



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



Наташа Тодоровић

КОШИЈЕВ ПОСТУПАК ЗА РЕШАВАЊЕ НЕЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

мастер рад

Нови Сад, септембар 2014.

Садржај

Предговор	2
1 Увод	4
1.1 Неке ознаке, дефиниције и теореме.....	4
1.1.1 Ознаке	4
1.1.2 Дефиниције	5
1.1.3 Теореме.....	7
2 Кошијев итеративни поступак	9
2.1 Дефиниција поступка.....	9
2.2 Конвергенција и ред конвергенције	10
3 Модификације Кошијевог итеративног поступка	11
3.1 Модификације Коу.....	11
3.1.1 Поступци и анализа конвергенције	11
3.1.2 Поступци слободни од израчунавања квадратног корена	13
3.2 Нове модификације Кошијевог поступка	14
3.2.1 Апроксимације другог извода.....	14
3.2.2 Апроксимације другог извода помоћу Џини средина.....	16
3.2.3 Апроксимације функције L	17
3.2.4 Нови итеративни поступак	18
3.2.4.1 Први избор функције G	22
3.2.4.2 Други избор функције G	22
4 Нумерички експерименти	24
5 Закључак	28
6 Литература	29
7 Биографија	31

Предговор

Решавање нелинеарних једначина је један од најстаријих и најважнијих математичких проблема. Среће се у математици и многим другим наукама, на пример, физици, астрономији и економији. За већину нелинеарних једначина немогуће је одредити тачно решење поступцима који користе елементарне алгебарске операције. Због тога се овакве једначине решавају приближно, применом неког нумеричког најчешће итеративног поступка. Овај приступ је посебно добио на важности појавом рачунара, јер рачунање постаје брзо, једноставно и тачно.

У мастер раду посматрамо поступке типа Кошија за решавање нелинеарне једначине $f(x) = 0$ са једном непознатом и његове модификације четвртог реда конвергенције. Класични поступак типа Кошија који побољшава Њутнов поступак (који је реда конвергенције два) дат је са

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L(x_n)}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

где је

$$L(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Кошијев поступак је трећег реда конвергенције и захтева израчунавање другог извода. Предложене су многе варијанте Кошијевог поступка које не захтевају израчунавање другог извода, између осталог и оне приказане у радовима [11] и [12]. У овом раду посматрамо Кошијев поступак за решавање нелинеарних једначина и неке његове модификације четвртог реда конвергенције слободне од израчунавања другог извода. За апроксимацију

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L(x_n)}}$$

користили смо модификовану Паде апроксимацију. За апроксимацију $L(x_n)$, односно другог извода $f''(x_n)$, користимо Џини средине. Као специјални случајеви ових средина појављују се, поред осталих, аритметичка, геометријска и хармонијска

середина. За посматране модификације Кошијевог поступка доказана је конвергенција четвртог реда и одређене су асимптотске константе грешке.

Мастер рад је подељен у четири дела. У уводном делу дате су ознаке, дефиниције и теореме које се користе у даљем раду. Други део садржи дефиницију Њутновог поступка, Кошијевог поступка, теореме о конвергенцији и реду конвергенције. У трећем делу посматрани су неки од новијих резултата који се односе на посматрану проблематику, а посебно на делове из рада [12]. Оригинални део мастер рада представља модификације Кошијевог поступка које се добијају одговарајућим Паде апроксимацијама и апроксимацијама другог извода заснованим на срединама Џинија, [7-8]. За ове модификације је доказана конвергенција четвртог реда. Такође, анализираће се утицај параметара који се појављују у срединама Џинија.

У последњем делу рада приказаћемо нумеричке експерименте урађене у програмском пакету *Mathematica*. На самом крају дајемо кратак закључак, након чега је наведена коришћена литература.

Нови Сад, септембар 2014.

Наташа Тодоровић

1 Увод

1.1 Неке ознаке, дефиниције и теореме

1.1.1 Ознаке

$\{x_n\}$	низ бројева $x_0, x_1, \dots$
$D = [a, b]$	интервал којем припада низ $\{x_n\}$
$C^k[a, b]$	скуп k -пута непрекидно диференцијабилних функција на интервалу $[a, b]$
$Lip_\gamma[a, b]$	скуп функција које на интервалу $[a, b]$ задовољавају Липшицов услов са константом γ
α	решење једначине $f(x) = 0$
$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$	асимптотска константа грешке
$e_n = x_n - \alpha$	грешка у n -тој итерацији
$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$	једначина грешке
$\frac{e_{n+1}}{e_n^p}$	апроксимације асимптотске константе грешке
p	ред конвергенције итеративног поступка
$L(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$	функција Кошијевог поступка

1.1.2 Дефиниције

Дефиниција 1. За две једначине кажемо да су еквивалентне на интервалу $[a, b]$ ако су решења која припадају интервалу $[a, b]$ једне једначине решења друге једначине и обрнуто.

Дефиниција 2. Сваки реалан број α , за који важи да је $f(\alpha) = 0$, називамо решење или корен једначине $f(x) = 0$. Корен једначине $f(x) = 0$ називамо и нула функције f .

Дефиниција 3. Број α је решење вишеструкости s једначине $f(x) = 0$ ако је

$$f(x) = (x - \alpha)^s g(x)$$

при чему је функција g ограничена у α и важи $g(\alpha) \neq 0$. За s се увек узима позитиван цео број. Ако је $s = 1$, онда кажемо да је корен прост или једнострук, а ако је $s > 1$ онда је вишеструк.

Дефиниција 4. Нека је $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Број $\alpha \in D$ за који важи $\alpha = \varphi(\alpha)$ је решење једначине $x = \varphi(x)$ и назива се непокретна тачка функције φ .

Нека је x_0 произвољан број из интервала $[a, b]$. Формирајмо низ бројева $x_0, x_1, \dots$ према

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Овај низ је могуће формирати само ако $\varphi(x_n) \in [a, b]$, $n = 0, 1, \dots$ због дефинисаности функције φ на интервалу $[a, b]$. Очигледно, ако функција φ пресликава интервал $[a, b]$ у самог себе, важи $\varphi(x_n) \in [a, b]$, $n = 0, 1, \dots$. Ако је низ $x_0, x_1, \dots$ добро дефинисан и има граничну вредност, тј. за неко $\alpha \in [a, b]$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, онда је α решење једначине $x = \varphi(x)$, ако је функција φ непрекидна на интервалу $[a, b]$. Наиме, из $\varphi(x) \in [a, b]$, за свако $x \in [a, b]$ следи, због затворености интервала $[a, b]$, да тачка $\alpha \in [a, b]$, а због непрекидности функције φ следи

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \varphi(\alpha).$$

Дакле, ако низ $x_0, x_1, \dots$ конвергира, његова гранична вредност α је решење једначине $x = \varphi(x)$, а чланови тог низа апроксимирају то решење.

Поступак, у коме рачунамо вредности $x_0, x_1, \dots$ према $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ се назива итеративни поступак (поступак сукцесивних апроксимација), где је $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ итеративно правило, функција φ је функција корака, а низ $x_0, x_1, \dots$ је итеративни низ. Први члан тог низа је почетна апроксимација. Када итеративни низ конвергира за произвољну почетну вредност, кажемо да итеративни поступак конвергира.

Дефиниција 5. Функција φ задовољава Липшицов услов на интервалу D ако постоји константа γ таква да за свако $x, y \in D$ важи

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Константа γ се назива Липшицова константа. Ако је $\gamma < 1$ онда се ова константа назива константа контракције, а функција φ се назива контракција или контрактивно пресликавање.

Дефиниција 6. Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$. Ако постоји константа $C \in [0,1)$ и цео број $K \geq 0$ такав да за $n \geq K$ важи

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|$$

каже се да је низ $x_0, x_1, \dots$ линеарно конвергентан.

Ако постоје константе $p > 1, C \geq 0$ и цео број $K \geq 0$ такав да за $n \geq K$ важи

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^p$$

каже се да низ $x_0, x_1, \dots$ конвергира ка α са редом бар p . За $p = 2$ конвергенција је квадратна, а за $p = 3$ кубна.

Дефиниција 7. Ред конвергенције итеративног поступка једнак је реду конвергенције итеративног низа добијеног посматраним итеративним поступком.

Да би се одредио ред конвергенције често се посматра константа

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p}.$$

Уколико оваква константа постоји поступак је бар реда p . Ако је $\eta \neq 0$, поступак је реда p и η се назива асимптотска константа поступка. Ако је $\eta = 0$, посматра се гранична вредност са $p + 1$ у експоненту имениоца. Ако је опет $\eta = 0$, узима се $p + 2$ итд, док се не добије константа различита од нуле.

Одређивање реда конвергенције није увек једноставно и тиме се овде нећемо бавити. Навешћемо само ред конвергенције оних поступака које будемо посматрали. Ред конвергенције се користи за упоређивање брзине конвергенције.

Дефиниција 8. Кажемо да је итеративни поступак са редом конвергенције p_1 бржи од итеративног поступка са редом конвергенције p_2 ако је $p_1 > p_2$.

Дефиниција 9. Ако је $e_n = x_n - \alpha$ грешка у n -тој итерацији, релација

$$e_{n+1} = C e_n + O(e_n^{p+1})$$

где је C асимптотска константа грешке, а p ред конвергенције, се назива једначина грешке поступка.

1.1.3 Теореме

Итеративни поступак се може користити и код решавања једначина облика $f(x) = 0$. Како смо до сада посматрали једначину облика $x = \varphi(x)$, у следећој теореме ћемо дати услове за еквивалентност једначина $f(x) = 0$ и $x = \varphi(x)$.

Теорема 1. Нека је $g(x) \neq 0$ за $x \in [a, b]$. Тада су једначине $f(x) = 0$ и $x = \varphi(x)$ са $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ еквивалентне на интервалу $[a, b]$.

Теорема 2. Нека је φ непрекидна функција на интервалу $[a, b]$ и $\varphi(a), \varphi(b) \in [a, b]$. Тада постоји $\alpha \in [a, b]$ тако да је $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Теорема 3. Функција која задовољава Липшицов услов на интервалу D је непрекидна на том интервалу.

Обрнуто не мора да важи, тј. непрекидна функција на интервалу D не мора да задовољава Липшицов услов на истом интервалу.

Теорема 4. Ако функција φ има у интервалу D непрекидан први извод, тј. ако је за свако $x \in D$

$$|\varphi'(x)| \leq \gamma$$

онда $\varphi \in \text{Lip}_\gamma(D)$.

Теорема 5. Нека је φ контракција на интервалу D и нека пресликава тај интервал у самог себе. Тада итеративни низ $\{x_n\}$ одређен са

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

са произвољним $x_0 \in D$, конвергира ка јединственом решењу $\alpha \in D$ једначине $x = \varphi(x)$ и важи

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} |x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \dots$$

где је γ Липшицова константа контракције функције φ .

Вредности $\frac{\gamma}{1-\gamma} |x_n - x_{n-1}|$ и $\frac{\gamma^n}{1-\gamma} |x_1 - x_0|$ дефинисане у претходној теореме називају се апостериорна и априорна оцена грешке.

Поред априорне и апостериорне, често се користи и следећа оцена грешке која не зависи од итеративне функције φ .

Теорема 6. Нека $f \in C^1(D)$ и $|f'(x)| \geq m > 0$ за $x \in D$. Ако је $\alpha \in D$ решење једначине $f(x) = 0$ и $x_n \in D, n = 0, 1, \dots$, онда је

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

Теорема 7. [16] *Ред конвергенције једнокорачног поступка*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

је позитиван цео број. Овај поступак има ред конвергенције p ако и само ако је

$$\alpha = \varphi(\alpha), \quad \varphi^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Ред конвергенције и асимптотске константе грешке свих поступака које посматрамо у овом раду одређујемо користећи претходну теорему. У зависности од p за асимптотске константе грешке узимамо

$$\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

а добијени резултат изражавамо преко константи $C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}, j=2, 3, \dots$

Како су функције корака посматраних итеративних поступака сложене и израчунавање њихових извода није једноставно, тај посао смо препустили програмском пакету *Mathematica*.

2 Кошијев итеративни поступак

2.1 Дефиниција поступка

Један од најпопуларнијих поступака за решавање једначина облика $f(x) = 0$ је Њутнов (или Њутн-Рафсонов) поступак. Овај поступак потиче од Њутна, али га је у данашњем облику формулисао Рафсон. Дат је са

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

при чему је x_0 произвољна почетна апроксимација траженог решења. Ово је важан и основни поступак, који конвергира квадратно.

Постоји фамилија поступака који представљају побољшања Њутновог поступка, а захтевају израчунавање другог извода. Један од њих је и Кошијев поступак, који је дат са

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L(x_n)}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

где је

$$L(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

при чему је x_0 произвољна почетна апроксимација траженог решења. Овај поступак је трећег реда конвергенције. Међутим, у многим случајевима израчунавање другог извода и квадратног корена је „скупо“ и примена овог поступка је ограничена. Кошијев поступак је ефикасан када је израчунавање другог извода једноставно и не захтева пуно времена.

У скорије време, проучавају се многи поступци слободни од израчунавања другог извода. Ови поступци не захтевају израчунавање другог извода и конвергирају кубно. Овакав приступ је важан и интересантан и за извођење нових итеративних поступака већег реда конвергенције слободних од израчунавања другог извода.

2.2 Конвергенција и ред конвергенције

У овом делу рада посматрамо конвергенцију Кошијевог итеративног поступка. Користимо резултате из [8]. Прво доказујемо теорему о конвергенцији у општем случају, а затим, одговарајућим избором функције, закључујемо да тврђење теореме важи и за Кошијев поступак.

Теорема 8. [8] *Нека је f довољно пута непрекидно диференцијабилна функција у околини I своје једноструке нуле α и нека је $f'(x) > 0$ у I . Ако је H функција за коју је $H(0) = 1$, $H'(0) = \frac{1}{2}$ и $|H''(0)| < \infty$, онда је итеративни поступак $x_{n+1} = F(x_n), n = 0, 1, \dots$ где је*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} H(L(x)),$$

и

$$L(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

трећег реда.

Доказ. Рачунајући изводе функције F , можемо добити:

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= 1 - H(0), \\ F''(\alpha) &= -2H'(0)L'(\alpha) + \frac{H(0)f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \\ L'(\alpha) &= \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}. \end{aligned}$$

Сада је лако видети да, под претпоставкама теореме, имамо:

$F(\alpha) = \alpha$, $F'(\alpha) = 0$ и $F''(\alpha) = 0$, одакле следи тврђење, а на основу теореме 7.

Ако у претходној теорему функцију H дефинишемо са

$$H(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2x}}, \quad x \leq \frac{1}{2}$$

добива се Кошијев поступак, и при томе су испуњени сви услови теореме 8, па на основу ње следи да Кошијев итеративни поступак има ред конвергенције три.

3 Модификације Кошијевог итеративног поступка

3.1 Модификације Коу

3.1.1 Поступци и анализа конвергенције

Нека је

$$y_n = x_n - \theta f(x_n)/f'(x_n),$$

где је θ ненула реалан параметар. Посматрамо Тејлоров развој за $f(y_n)$ у околини x_n

$$f'(y_n) \approx f'(x_n) + f''(x_n)(y_n - x_n) \quad (2)$$

што имплицира

$$L(x_n) = \frac{f''(x_n) f(x_n)}{f'(x_n)^2} \approx \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{\theta f'(x_n)} \equiv H(x_n, y_n) \quad (3)$$

па из (1) добијамо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4)$$

Најбољи избор θ показан је у следећој теорему.

Теорема 9. [12] Нека је $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $\alpha \in D$ једнострука нула функције f . Претпоставимо да је функција f довољно глатка у околини α . Тада поступак дефинисан са (4) има ред конвергенције четири ако је $\theta = 2/3$.

Доказ. Користећи Тејлоров развој и уврштавањем у израз $f(\alpha) = 0$, добијамо

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)) \quad (5)$$

где је $e_n = x_n - \alpha$ и $C_j = \left(\frac{1}{j!}\right) f^{(j)}(\alpha)/f'(\alpha)$, $j = 2, 3, \dots$

Даље имамо

$$f'(x_n) = f'(\alpha) \left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4) \right) \quad (6)$$

Дељењем (5) са (6) добијамо

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2 e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3) e_n^3 + (7C_2 C_3 - 4C_2^3 - 3C_4) e_n^4 + O(e_n^5) \quad (7)$$

$$y_n - \alpha = e_n - \theta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (1 - \theta) e_n + \theta C_2 e_n^2 - 2\theta(C_2^2 - C_3) e_n^3 + O(e_n^4) \quad (8)$$

Развијањем $f'(y_n)$ у околини α и користећи (8) добијамо

$$f'(y_n) = f'(\alpha) \left[\begin{aligned} &1 + 2(1 - \theta) C_2 e_n + (2\theta C_2^2 + 3(1 - \theta)^2 C_3) e_n^2 \\ &- (4\theta C_2^3 + (6\theta^2 - 10\theta) C_2 C_3 + 4(\theta - 1)^3 C_4) e_n^3 + O(e_n^4) \end{aligned} \right] \quad (9)$$

Из (6) и (9) добијамо

$$\begin{aligned} H(x_n, y_n) &= 2C_2 e_n - (6C_2^2 + (3\theta - 6)C_3) e_n^2 \\ &+ (16C_2^3 + (12\theta - 28)C_2 C_3 + 4(\theta^2 - 3\theta + 3)C_4) e_n^3 + O(e_n^4) \end{aligned} \quad (10)$$

Даље, из (10) добијамо

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)}} = 1 + \frac{1}{2} H(x_n, y_n) + \frac{1}{2} H(x_n, y_n)^2 + \frac{5}{8} H(x_n, y_n)^3 + O(e_n^4) \quad (11)$$

Сада из (7) и (11) имамо

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= e_n - \left(\frac{3}{2} \theta - 1 \right) C_3 e_n^3 \\ &+ \left[\frac{3}{2} \theta C_2 C_3 + (2\theta^2 - 6\theta + 3) C_4 \right] e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(\frac{3}{2} \theta - 1 \right) C_3 e_n^3 \\ &- \left[\frac{3}{2} \theta C_2 C_3 + (2\theta^2 - 6\theta + 3) C_4 \right] e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned} \quad (13)$$

То значи да поступак дефинисан са (4) има ред конвергенције бар три. Ако узмемо да је $\theta = 2/3$ онда има ред конвергенције четири, и у том случају, из (13), добијамо да је једначина грешке

$$e_{n+1} = -\left(C_2 C_3 + \frac{1}{9} C_4\right) e_n^4 + O(e_n^5) \quad (14)$$

Тиме је доказ завршен.

У теорему 9. показано је да је ред конвергенције поступка дефинисаног са (4) повезан са избором параметра θ . У пракси су много бољи поступци чији је ред конвергенције четири у односу на оне поступке чији је ред конвергенције три, уколико њихова примена „кошта“ исто.

3.1.2 Поступци слободни од израчунавања квадратног корена

Слично као у класичном Кошијевом поступку, и у поступку дефинисаном са (4) потребно је израчунавање квадратног корена. То може бити веома захтевно. У циљу да се избегне израчунавање квадратног корена, изводе се поступци у којима то није потребно, а помоћу Тејлорових апроксимација.

Тејлорова апроксимација за $\sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)}$ је

$$\sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)} = \sum_{j \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^j (-2H(x_n, y_n))^j \quad (15)$$

Користећи (15) и (4) добија се за $m \geq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sum_{j \geq 0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^j (-2H(x_n, y_n))^j} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (16)$$

Са друге стране имамо

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2H(x_n, y_n)}}{H(x_n, y_n)} = \sum_{j \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} (-1)^j 2^{j+1} H(x_n, y_n)^j \quad (17)$$

Дакле, помоћу (17), добија се, за $m \geq 0$, апроксимација

$$x_{n+1} = x_n - \left(\sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} (-1)^j 2^{j+1} H(x_n, y_n)^j \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (18)$$

Аналогно се може показати да за $m \geq 1$, поступци дефинисани са (16) и (18) имају ред конвергенције најмање три. Даље, за $m \geq 2$, поступци дефинисани са (16) и (18) имају ред конвергенције четири.

У зависности од вредности m , добијају се различите модификације Кошијевог поступка, а неке од њих су:

1. За $m = 0$ у (16) и (18), добија се Њутнов поступак.
2. За $m = 2$ у (16), имамо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4}{4 - 2H(x_n, y_n) - H(x_n, y_n)^2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (19)$$

3. За $m = 2$ у (18), добија се

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} H(x_n, y_n) + \frac{1}{2} H(x_n, y_n)^2 \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (20)$$

Дакле, добијене су неке варијанте Кошијевог поступка које су дефинисане са (4), (16) и (18), респективно. Сви представљени поступци са редом конвергенције четири могу се записати у општем облику

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} H(x_n, y_n) + \frac{1}{2} H(x_n, y_n)^2 + \gamma H(x_n, y_n)^3 + O(H(x_n, y_n)^4) \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$.

3.2 Нове модификације Кошијевог поступка

У овом параграфу посматрамо модификације Кошијевог поступка четвртог реда конвергенције које су слободне од израчунавања другог извода. То постижемо апроксимацијама L , односно другог извода f'' срединама, као и коришћењем Паде апроксимација.

3.2.1 Апроксимације другог извода

Посматраћемо две апроксимације другог извода, које су познате у литератури, и помоћу њих и средина формирати нове апроксимације другог извода. Користећи се добијеним резултатима добићемо и нове апроксимације за

$$L(x_n) = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2},$$

а тиме и модификације Кошијевог поступка.

Користећи Тејлоров развој, добијамо

$$f(y_n) \approx \frac{1}{2}(x_n - y_n)^2 f''(x_n) + (y_n - x_n)f'(x_n) + f(x_n),$$

а одатле

$$f''(x_n) \approx -\frac{2(y_n f'(x_n) - x_n f'(x_n) + f(x_n) - f(y_n))}{(x_n - y_n)^2}.$$

Како је

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

добијамо

$$f''(x_n) \approx \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2}.$$

Даље, поново коришћењем Тејлоровог развоја добијамо

$$f'(y_n) \approx (y_n - x_n)f''(x_n) + f'(x_n),$$

односно,

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n},$$

па је

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{f(x_n)}.$$

Да бисмо смањили број израчунавања, користимо Кингову, [19], апроксимацију првог извода. Тако добијамо

$$f'(y_n) \approx \frac{f'(x_n)(f(x_n) + \gamma f(y_n))}{f(x_n) + \beta f(y_n)}$$

где су β и γ реални параметри, па је

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n) \left(f'(x_n) - \frac{f'(x_n)(f(x_n) + \gamma f(y_n))}{f(x_n) + \beta f(y_n)} \right)}{f(x_n)} = \frac{(\beta - \gamma) f(y_n) f'(x_n)^2}{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}.$$

Ако је $\gamma \neq \beta - 2$ ред конвергенције не може бити већи од два. Ово се лако проверава рачунањем одговарајућих извода функције корака, коју ћемо формулисати на крају параграфа. За $\gamma = \beta - 2$ следи

$$f'(y_n) \approx \frac{f'(x_n)(f(x_n) + (\beta - 2)f(y_n))}{f(x_n) + \beta f(y_n)},$$

а за други извод

$$f''(x_n) \approx \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}.$$

Са ове две апроксимације другог извода

$$f''(x_n) \approx \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2} \quad \text{и} \quad f''(x_n) \approx \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}$$

помоћу средина добијамо нове апроксимације другог извода. На пример, аритметичка средина даје

$$f''(x_n) \approx \frac{\frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2} + \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}}{2}$$

односно,

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n)^2 f(y_n) (2f(x_n) + \beta f(y_n))}{f(x_n)^2 (f(x_n) + \beta f(y_n))}.$$

3.2.2 Апроксимације другог извода помоћу Цини средина

Цини средина за два броја a и b дефинисана је, према [7-8], са

$$\sigma(a, b, r, p) = \begin{cases} \left(\frac{a^p + b^p}{a^r + b^r} \right)^{1/(p-r)}, & r \neq p \\ \exp\left(\frac{a^r \ln a + b^r \ln b}{a^r + b^r} \right), & r = p \neq 0 \\ \sqrt{ab}, & r = p = 0 \end{cases}$$

Специјални случајеви Цини средине су: p -степенна средина за $r = 0$ и $p \neq 0$, аритметичка за $r = 0$ и $p = 1$, хармонијска за $r = 0$ и $p = -1$ и геометријска за $r = 0$ и $p = 0$.

Ако је $b = a\phi$, онда за Џини средине важи

$$\sigma(a, b, r, p) = a\sigma(1, \phi, r, p).$$

Користећи се апроксимацијама за друге изводе

$$a = \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2}, \quad b = \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))},$$

и Џини срединама са

$$\phi = \frac{b}{a} = \frac{\frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}}{\frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2}} = \frac{f(x_n)}{f(x_n) + \beta f(y_n)}$$

добивамо

$$f''(x_n) \approx \sigma(a, b, r, p) = a\sigma(1, \phi, r, p) = \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2} \sigma(1, \phi, r, p).$$

3.2.3 Апроксимације функције L

Апроксимацију за

$$L(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

добивамо заменом другог извода неком апроксимацијом Џини типа. Тако добијамо

$$f''(x_n) \approx \sigma(a, b, r, p) = a\sigma(1, \phi, r, p) = \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2} \sigma(1, \phi, r, p)$$

па је

$$L(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} \approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)^2} \frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2} \sigma(1, \phi, r, p) = \frac{2f(y_n)}{f(x_n)} \sigma(1, \phi, r, p).$$

Ако дефинишемо

$$s = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}$$

онда је

$$\phi = \frac{b}{a} = \frac{\frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)(f(x_n) + \beta f(y_n))}}{\frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2}} = \frac{f(x_n)}{f(x_n) + \beta f(y_n)} = \frac{1}{1 + \beta s}.$$

Имајући то у виду, добијамо

$$L(x) \approx 2s\sigma(1, \phi, r, p) = 2s\sigma\left(1, \frac{1}{1 + \beta s}, r, p\right)$$

3.2.4 Нови итеративни поступак

Поново посматрамо Кошијев поступак

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L(x_n)}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Паде апроксимација (1,1) за

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L(x_n)}}$$

је

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L(x)}} \approx \frac{L(x) - 2}{2(L(x) - 1)} = 1 + \frac{L(x)}{2(1 - L(x))}.$$

Користећи се претходном релацијом, апроксимацијом

$$L(x) \approx 2s\sigma(1, \phi, r, p) = 2s\sigma\left(1, \frac{1}{1 + \beta s}, r, p\right)$$

и увођењем параметра δ , посматрамо функцију корака

$$\varphi(x) = x - \left(1 + \frac{2s\sigma(1, \phi, r, p)}{2 - (2 + \delta)2s\sigma(1, \phi, r, p)}\right) \frac{f(x)}{f'(x)}$$

односно, поступак

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p)}{1 - (2 + \delta)s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p)}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

За функцију корака важи

$$\varphi(\alpha) = \alpha, \quad \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = 0, \quad \varphi'''(\alpha) = (\beta - 2\delta)c_2^2.$$

Четврти ред конвергенције можемо добити само ако је $\beta = 2\delta$. Имајући то у виду добијамо итеративни поступак

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{2s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p)}{2 - (4 + \beta)s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Поред овог поступка посматраћемо поступке облика

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} G(2s\sigma(1, \phi, r, p))$$

где је G једна од (k, m) Паде апроксимација функције

$$1 + \frac{2z}{4 - (4 + \beta)z}$$

са

$$z = 2s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p)$$

У следећој табели приказујемо ове Паде апроксимације за $k = 0, 1, 2$ и $m = 0, 1, 2, 3$.

$k \setminus m$	0	1	2	3
0	1	$\frac{z+2}{2}$	$\frac{\beta+4}{8}z^2 + \frac{1}{2}z + 1$	$\frac{(\beta+4)^2}{32}z^3 + \frac{\beta+4}{8}z^2 + \frac{1}{2}z + 1$
1	$-\frac{2}{z-2}$	$\frac{z(\beta+2)-4}{z(\beta+4)-4}$	$\frac{z(\beta+2)-4}{z(\beta+4)-4}$	$\frac{z(\beta+2)-4}{z(\beta+4)-4}$
2	$-\frac{8}{(\beta+2)z^2+4z-8}$	$\frac{z(\beta+2)-4}{z(\beta+4)-4}$	$\frac{z(\beta+2)-4}{z(\beta+4)-4}$	$\frac{z(\beta+2)-4}{z(\beta+4)-4}$

Табела 1.

Конвергенцију посматраних поступака ћемо доказати користећи се следећом теоремом, која је последица теореме 7.

Теорема 10. Нека је I околина једноструког корена α јеначине $f(x) = 0$. Претпоставимо да функција f има непрекидне изводе све до четвртог реда на I и да је $f'(x) > 0$ на I . Онда је ред конвергенције поступка

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

четири ако је

$$\alpha = F(\alpha), \quad F^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad F^{(4)} \neq 0.$$

Асимптотска константа грешке је $F^{(4)}/4!$.

У даљем раду посматрамо итеративни поступак

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

где је са $z = 2s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p)$ функција F дефинисана као

$$\left(1 + \frac{2z}{4 - (4 + \beta)z}\right)G(z)$$

или нека од Паде апроксимација (из претходне табеле) ове функције.

Изводе функције F можемо одредити користећи програмски пакет *Mathematica*. Изрази којима су дефинисани изводи су гломазни, те ћемо посматрати само вредности тих израза за $x = \alpha$. Посматрајући добијене изразе одредићемо које особине треба да задовољава функција G да би наш поступак био четвртог реда. Да бисмо могли одредити изводе функције F потребно је да познајемо вредности извода функције

$$s(x) = \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f(x)}.$$

Директно посматрање функције s и њених извода није могуће због тога што $s(\alpha)$ није дефинисано ($s(\alpha) = \frac{0}{0}$). Међутим, ако се посматра Тејлоров развој функције s овај проблем се може превазићи. Како је за неко τ између x и $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$s(x) = \frac{f(x)f''(x)}{2f'(x)^2} - \frac{f^{(3)}(x)f(x)^2}{6f'(x)^3} + \frac{f^{(4)}(\tau)f(x)^3}{24f'(x)^4},$$

добивамо

$$s(\alpha) = 0, \quad s'(\alpha) = C_2, \quad s''(\alpha) = -6C_2^2 + 4C_3, \quad s'''(\alpha) = 6(8C_2^3 - 10C_2C_3 + 3C_4)$$

$$s^{(4)}(\alpha) = -24(20C_2^4 - 37C_2^2C_3 + 8C_3^2 + 14C_2C_4 - 5C_5)$$

Користећи то, даље добијамо

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = 1 - G(0).$$

Да бисмо добили $F'(\alpha) = 0$, мора бити $G(0) = 1$. Користећи овај услов, добијамо

$$F''(\alpha) = 2C_2(1 - 2G'(0)).$$

Како тражимо да буде $F''(\alpha) = 0$, мора бити $G'(0) = 1/2$. Сада је

$$F'''(\alpha) = -12C_2^2 \left(1 - \frac{1}{4}(\beta + 8) + G''(0) \right).$$

Очигледно, $F'''(\alpha) = 0$ ако је $G''(0) = (\beta + 4)/4$.

Сада разликујемо три случаја, а асимптотску константу грешке рачунамо користећи резултате теореме 10.

1. Ако је $r = p = 0$, онда је

$$F^{(4)}(\alpha) = -24C_2C_3 + C_2^3(120 + 48\beta + 3\beta^2 - 32G'''(0)),$$

па је асимптотска константа грешке

$$\frac{F^{(4)}(\alpha)}{24} = -C_2C_3 + C_2^3 \left(5 + 2\beta + \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{4}{3}G'''(0) \right).$$

2. Ако је $r = p$ и $p \neq 0$, онда је

$$F^{(4)}(\alpha) = -24C_2C_3 + C_2^3(120 + 48\beta + (3 - 6r)\beta^2 - 32G'''(0))$$

па је асимптотска константа грешке

$$\frac{F^{(4)}(\alpha)}{24} = -C_2C_3 + C_2^3 \left(5 + 2\beta + \frac{1}{8}(1 - 2r)\beta^2 - \frac{4}{3}G'''(0) \right).$$

3. Ако је $r \neq p$, онда је

$$F^{(4)}(\alpha) = -24C_2C_3 + C_2^3(120 + 48\beta - 3(-1 + p + r)\beta^2 - 32G'''(0)),$$

па је асимптотска константа грешке

$$\frac{F^{(4)}(\alpha)}{24} = -C_2C_3 + C_2^3 \left(5 + 2\beta - \frac{1}{8}(-1 + p + r)\beta^2 - \frac{4}{3}G'''(0) \right).$$

На основу изложеног, доказали смо следећу теорему.

Теорема 11. Нека је I околина једноструког корена α једначине $f(x) = 0$. Претпоставимо да функција f има непрекидне изводе све до четвртог реда на I и да је $f'(x) > 0$ на I . Онда је ред конвергенције поступка

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} G(2s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p))$$

четири ако је $G(0) = 1, G'(0) = 1/2$ и $G''(0) = (\beta + 4)/4$. Асимптотска константа грешке је

$$\left\{ \begin{array}{ll} -C_2 C_3 + C_2^3 \left(5 + 2\beta + \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{4}{3}G'''(0) \right), & \text{за } r = p = 0 \\ -C_2 C_3 + C_2^3 \left(5 + 2\beta + \frac{1}{8}(1 - 2r)\beta^2 - \frac{4}{3}G'''(0) \right), & \text{за } r = p \neq 0 \\ -C_2 C_3 + C_2^3 \left(5 + 2\beta - \frac{1}{8}(-1 + p + r)\beta^2 - \frac{4}{3}G'''(0) \right), & \text{за } r \neq p \end{array} \right\}$$

3.2.4.1 Први избор функције G

За функцију

$$G(x) = 1 + \frac{2x}{4 - (4 + \beta)x}.$$

важи $G(0) = 1, G'(0) = \frac{1}{2}, G''(0) = \frac{\beta + 4}{4}$ и $G'''(0) = \frac{3}{16}(4 + \beta)^2$. Значи, са овако изабраном функцијом G добијамо поступак четвртог реда конвергенције, а одговарајућа асимптотска константа грешке дата је у наредној табели.

	Асимптотска константа грешке
$p \neq r$	$-\frac{1}{8}(-8 + \beta^2 + p\beta^2 + r\beta^2)C_2^3 - C_2 C_3$
$p = r$	$-\frac{1}{8}(-8 + \beta^2 + 2r\beta^2)C_2^3 - C_2 C_3$
$p = r = 0$	$C_2^3 - \frac{1}{8}\beta^2 C_2^3 - C_2 C_3$

Табела 2.

3.2.4.2 Други избор функције G

Ако функцију G бирамо из табеле 1, онда за изборе $(0,0), (0,1), (1,0)$ нису испуњени услови за четврти ред конвергенције. За остале изборе ти услови су испуњени, тј. важи

$$G(0) = 1, G'(0) = \frac{1}{2}, G''(0) = \frac{\beta + 4}{4} \text{ и } G'''(0) = \frac{3}{16}(4 + \beta)^2.$$

Значи, са овако изабраним функцијама G добијамо поступак четвртог реда конвергенције, а одговарајућа асимптотска константа грешке дата је са

$$\left(1 - \frac{1+p+r}{8}\beta^2\right)c_2^3 - c_2c_3.$$

Ако функцију G бирамо из табеле 1, онда за изборе $(0,2)$, $(2,0)$ услови за четврти ред конвергенције су испуњени. Облици тих функција су исти као одговарајући облици функција из (19) и (20) са $\beta = 0$ и $z = 2s(x_n)\sigma(1, \phi, r, p)$ уместо $H(x_n, y_n)$. У том случају је асимптотска константа грешке дата са $c_2^3 - c_2c_3$.

4 Нумерички експерименти

У овом делу рада приказаћемо нумеричке резултате са поступцима описаним у претходном поглављу. Сва рачунања су урађена у програмском пакету *Mathematica* 8. Прецизност је повећана на 20000 цифара са *SetPrecision* функцијом. Користили смо следећи излазни критеријум: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ и $|f(x_k)| < \varepsilon$ где је α тачно решење посматране једначине. У случајевима када тачно решење није доступно, користили смо његову апроксимацију која је рачуната са 10000 цифара, али смо приказали само 20 цифара. Нумерички ред конвергенције ord рачунат је према

$$ord_k = \frac{\ln(|x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|)}{\ln(|x_k - \alpha|/|x_{k-1} - \alpha|)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и представља апроксимацију реда конвергенције p , а апроксимације C_k асимптотске константе грешке C рачунате су према

$$C_k = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Посматрали смо следеће функције:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} - \sin x, [7] \quad \alpha_1^* \approx 0.52359877559829887308, \quad x_0 = 0.7$$

$$f_2(x) = x^3 - 10, [6] \quad \alpha_2^* \approx 2.1544346900318837217, \quad x_0 = 2$$

$$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10, [6, 7, 8] \quad \alpha_3^* \approx 1.3652300134140968457, \quad x_0 = 2$$

$$f_4(x) = e^{-x} + \cos x, [7] \quad \alpha_4^* \approx 1.7461395304080124176, \quad x_0 = 2$$

$$f_5(x) = 3x^2 - e^x, [6] \quad \alpha_5^* \approx 0.91000757248870906066, \quad x_0 = 1$$

$$f_6(x) = e^{x^2+7x-30} - 1, [6, 7, 8, 9] \quad \alpha_6 = 3, \quad x_0 = 3.1$$

$$f_7(x) = 8x - \cos x - 2x^2, [7] \quad \alpha_7^* \approx 0.12807710275379877853, \quad x_0 = 1$$

$$f_8(x) = \arctg x, [7,14] \quad \alpha_8 = 0, \quad x_0 = 1$$

$$f_9(x) = \sqrt{x} - \cos x, [8] \quad \alpha_9^* \approx 0.6417143708728826584, \quad x_0 = 0.6$$

$$f_{10}(x) = x^3 - \cos x + 2, [7] \quad \alpha_{10}^* \approx -1.1725779647539700126, \quad x_0 = -1.2$$

$f_1(x) = 0, \quad \beta = 1, \quad p = 1, \quad r = 0$				
k	x_k	$ \alpha - x_k $	ред конвергенције	водећи члан грешке
0	0.69999999999999995559	$1.8 * 10^{-1}$	-	-
1	0.52350284988860796462	$9.6 * 10^{-5}$	-	0.09906691521
2	0.52359877559829886748	$5.6 * 10^{-18}$	4.0537488	0.06613968137
3	0.52359877559829887308	$6.5 * 10^{-71}$	3.9999925	0.06615471834
4	0.52359877559829887308	$1.2 * 10^{-282}$	4.00000000	0.06615471834
5	0.52359877559829887308	$1.3 * 10^{-1129}$	4.00000000	0.06615471834
6	0.52359877559829887308	$1.9 * 10^{-4517}$	4.00000000	0.06615471834

Табела 3.

На основу резултата приказаних у табели 3. можемо закључити да поступци које посматрамо имају ред конвергенције који смо и очекивали. Изабрана почетна вредност је таква да је грешка у почетку релативно велика, али је ред конвергенције ипак четири.

У табелама 4. и 5. поредимо поступке за различите вредности параметара p и r , посматрајући вредности $-\log(|x_6 - \alpha|)$.

f	$\beta = 1$			
	$p = 0, r = 0$	$p = 1, r = 1$	$p = 1, r = 0$	$p = 0, r = 1$
f_1	4477.4	4558.9	4516.7	4516.7
f_2	4995.8	5465.1	5184.6	5184.6
f_3	2682.1	2872.6	2768.8	2768.8
f_4	4467.7	4512.1	4489.4	4489.4
f_5	5185.1	5294.3	5237.2	5237.2
f_6	1852.9	2380.1	2112.7	2112.7
f_7	2699.7	3053.0	2849.9	2849.9
f_8	3392.7	3725.7	2660.4	2660.4
f_9	10128.4	9607.4	9798.1	9798.1
f_{10}	6720.0	7062.0	6866.6	6866.6

Табела 4.

f	$\beta = 2$			
	$p = 1/2, r = 1/2$	$p = 3/2, r = 1/2$	$p = 3/2, r = 5/2$	$p = 1, r = 1/2$
f_1	4858.8	5329.6	5138.9	5043.3
f_2	5016.2	4556.8	4126.7	4742.4
f_3	3437.5	3374.6	2486.7	4350.4
f_4	4649.0	4787.7	5274.6	4714.0
f_5	5705.2	6416.4	5536.8	6036.4
f_6	1828.5	1292.0	765.3	1507.4
f_7	2846.8	2359.8	2035.4	2564.4
f_8	1647.5	2666.7	2732.2	1538.9
f_9	9140.7	8943.2	8687.6	9032.6
f_{10}	7113.8	6527.6	8687.6	6570.9

Табела 5.

Можемо уочити да се погодан избор параметара p и r разликује од једначине до једначине. На асимптотску константу грешке поред параметара утичу и константе c_2 и c_3 , па се не може рећи шта је оптимални избор параметара. У табели 6. приказаћемо промену асимптотске константе грешке у односу на промену параметара β, p и r на примеру једначине $f_3(x) = 0$.

$f_3(x) = 0$				
r	p	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
0	0	0.0881410000	0.073412375213986365195	0.029226500779294911332
0	1		0.058683750402422547241	-0.029687998466960360484
0	2		0.043955125590858729286	-0.088602497713215632301
1	0		0.058683750402422547241	-0.029687998466960360484
1	1		0.043955125590858729286	-0.088602497713215632301
1	2		0.029226500779294911332	-0.14751699695947090411
2	0		0.043955125590858729286	-0.088602497713215632301
2	1		0.029226500779294911332	-0.14751699695947090411
2	2		0.014497875967731093378	-0.20643149620572617593

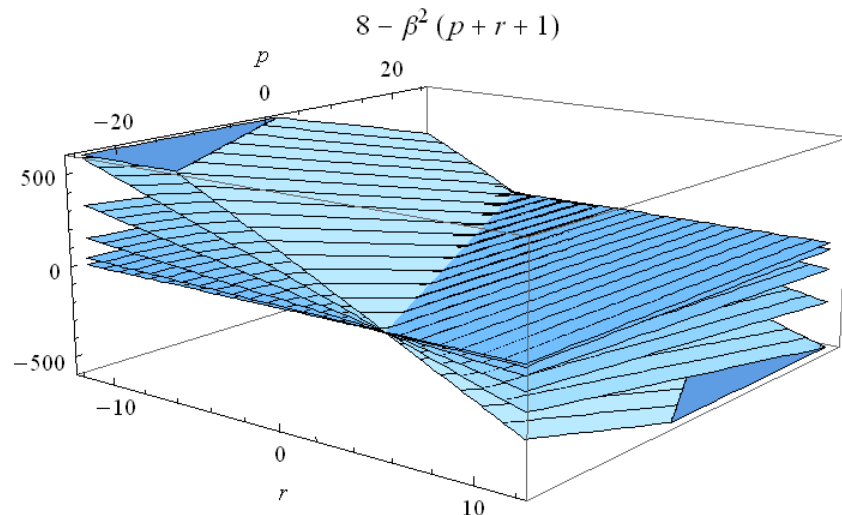
Табела 6.

Асимптотска константа грешке дата је са

$$c_2 \left(\left(1 - \frac{1+p+r}{8} \beta^2 \right) c_2^2 - c_3 \right).$$

Ако је $(8 - (1+p+r)\beta^2)c_3 > 0$ на смањење асимптотске грешке се не може утицати у општем случају. Само на примерима, када су познате вредности c_2 и c_3 , погодним

изборима параметара β, r, p , може се утицати на смањење асимптотске константе грешке. Ако су $(8 - (1 + p + r)\beta^2)$ и c_3 супротног знака, тј. ако је $(8 - (1 + p + r)\beta^2)c_3 < 0$, асимптотска константа постаје минимална ако је $8 - (1 + p + r)\beta^2 = 0$. У том случају је та константа $-c_2c_3$. На следећој слици приказани су скупови тачака за које је $8 - (1 + p + r)\beta^2 = 0$ за $\beta = 0, 1, \dots, 5$.



Слика 1.

Уколико је $\beta = 0$, вредности параметара p и r не утичу на асимптотску константу грешке и она је тада $c_2^3 - c_2c_3$.

5 Закључак

У мастер раду посматрали смо Кошијев поступак за решавање нелинеарних једначина и његове модификације четвртог реда конвергенције. Поред приказа неких познатих модификација Кошијевог поступка изведене су и нове модификације тог поступка. Оне су засноване на модификованој Паде апроксимацији функције корака Кошијевог поступка и на Џини срединама две познате апроксимације другог извода. Џини средине садрже и два параметра, који као специјалне изборе дају аритметичку, хармонијску и геометријску средину. Такође, избором тих параметара можемо утицати и на асимптотску константу грешке. Средине типа Столарског имају потпуно исту улогу као и средине типа Џини и сви елементи разматрања, које смо спровели за Џини средине, потпуно су исти.

Оригинални део мастер рада представља формирање нове фамилије поступака, доказ њене конвергенције и одређивање асимптотске константе грешке. Утицај параметара Џини средина на формирање асимптотске константе грешке приказан је првенствено кроз нумеричке примере и анализу у једном посебном случају.

У четвртом делу рада приказано је више резултата изведених експеримената који су урађени у програмском пакету *Mathematica*. Примери су узети из релевантних радова. Нумерички резултати су у складу са теоријским разматрањима.

6 Литература

- [1] Chun C., Ham Y. M., Some fourth-order modications of Newton's method, Appl. Math. Comput. 197 (2008) 654-658.
- [2] Chun C., Neta B., Some modication of Newton's method by the method of undetermined coecients, Comput. Math. Appl. 56 (2008) 2528-2538.
- [3] Grau, M., Noguera, M., A Variant of Cauchy's Method with Accelerated Fifth-Order Convergence, Applied Mathematics Letters 17 (2004) 509-517.
- [4] Herceg D., Krejić N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.
- [5] Herceg, D., Herceg, Đ., Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126-6133.
- [6] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1-9.
- [7] Herceg, Đ., Herceg, D., Sixth-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics, 267(2014), 244–253.
- [8] Herceg, Đ., Herceg, D., Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.
- [9] Homeier, H.H.H., On Newton-type methods with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), 425–432.
- [10] Kou J., Li, Y., Wang X., Fourth-order iterative methods free from second derivative, Applied Mathematics and Computation 184 (2007) 880–885.
- [11] Kou J., Second-derivative-free variants of Cauchy's method, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 339-344.
- [12] Kou, J., Fourth-order variants of Cauchy's method for solving non-linear equations, Applied Mathematics and Computation 192 (2007) 113–119.
- [13] Kou, J., Li, Y., Wang, X., Third-order modification of Newton's method, Journal of Computational and Applied Mathematics 205 (2007), 1 – 5
- [14] Kou, J., Li, Z., Wang, X., A modification of Newton method with third-order convergence, Applied Mathematics and Computation 181 (2006), 1106–1111.

- [15] Kou, J., Some variants of Cauchy's method with accelerated fourth-order convergence, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 213 (2008) 71 – 78.
- [16] Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.
- [17] Traub J.F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.
- [18] Herceg D., Herceg Đ., *Numerička matematika*, Symbol, Novi Sad, 2009.
- [19] King, R. F., A family of fourth order methods for nonlinear equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 10 (1973) 876-879.

7 Биографија



Наташа Тодоровић рођена је 15. октобра 1990. године у Новом Саду. Основну школу „Светозар Милетић“ у Тителу завршила је 2005. године, као ђак генерације и носилац Вукове дипломе. Гимназију „Исидора Секулић“, природно-математички смер, у Новом Саду завршила је 2009. године, као носилац Вукове дипломе. Исте године уписала је основне академске студије математике на Природно-математичком факултету у Новом Саду, а завршила их 2012. године. Након завршених основних студија, уписала је мастер академске студије математике, модул настава математике, на истом факултету. До јуна 2014. године положила је све испите предвиђене планом и програмом и тако стекла право за одбрану мастер рада.

Нови Сад, септембар 2014.

Наташа Тодоровић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Мастер рад

ВР

Аутор: Наташа Тодоровић

АУ

Ментор: др Драгослав Херцег

МН

Наслов рада: Кошијев поступак за решавање нелинеарних једначина

МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода: српски и енглески

ЈИ

Земља публикација: Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2014.

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3

МА

Физички опис рада: 4 поглавља/ 35 страна/ 6 табела/19 литература/1 слика/1 фотографија

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Нумеричка математика

НД

Кључне речи: поступак, ред конвергенције, једначина грешке

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод:

У раду посматрамо неке нумеричке поступке за решавање нелинеарне једначине са једном непознатом $f(x) = 0$ који се заснивају на модификацијама Кошијевог поступка и дајемо неке нове варијанте Кошијевог поступка. Код посматраних поступака други извод је замењен срединама Цинија одређених помоћу првих извода и зависе од два параметра. Анализа конвергенције показује да нови поступци имају четврти ред конвергенције. У сваком итеративном кораку нови поступци захтевају једно израчунавање функције и два израчунавања првог извода. Нумерички резултати показују да су нови поступци ефикасни.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 26.2.2014.

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: Др Хелена Зарин, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: Др Ђорђе Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: Др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Nataša Todorović

AU

Mentor: dr Dragoslav Herceg

MN

Title: Cauchy's method for solving nonlinear equations

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: 4 chapters/ 35 pages/ 6 tables/19 references/1 picture/1 photograph

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words: method, order of convergence, equation error

SKW UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

Abstract: In this paper, we consider some numerical methods for solving nonlinear equations $f(x) = 0$ with one unknown, which are based on modifications of Cauchy's method, and present some new variants of Cauchy's method. In considered methods the second derivative is replaced by Gini's means between the first derivatives and depend on two parameters. Analysis of convergence shows that the new methods have fourth-order convergence. Per iteration the new methods require one evaluations of the function and two of its first derivative. Numerical results show that the new methods are efficient.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 26.2.2014.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr, Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad