UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Nataša Duraković

Izvodi i integrali necelog reda

-master rad-

Mentor:
Docent dr Sanja Konjik

Novi Sad, 2011.

Predgovor

Frakcioni račun (eng. *fractional calculus*) je oblast matematičke analize koja se bavi izučavanjem i primenom izvoda i integrala prozvoljnog realnog ili kompleksnog reda, a stara je koliko i klasični kalkulus kakvim ga poznajemo danas. Koreni sežu do kraja 17. veka kada su Njutn i Lajbnic postavljali osnove diferencijalnog i integralnog računa. Tačnije, Lajbnic je prvi upotrebio oznaku $d^n/dx^n f(x)$ za n-ti izvod funkcije f u svom pismu Lopitalu iz 1697. godine, verovatno pretpostavljajući da je n prirodan broj, na šta je Lopital odgovorio upitavši ga koje je značenje izraza za $n = 1/2$? Ovom rečenicom rođen je frakcioni račun. Ne zadugo, novom teorijom su počeli da se bave mnogi poznati matematičari i naučnici tog doba, među kojima su Ojler, Riman, Liuvil, Abel, Furije... Do kraja 20. veka otkrivene su mnoge fizičke manifestacije i različite primene frakcionog računa. Modeli zasnovani na frakcionim diferencijalnim jednačinama su se pokazali korisnim u fizici, mehanici, elektrotehnici, biohemiji, medicini, finansijama, teoriji verovatnoće i mnogim drugim naukama koje su se razvijale poslednjih decenija. Interesantna je činjenica da se u relativno novoj grani psihologije, tzv. matematičkoj psihologiji, sistemi jednačina frakcionog reda mogu upotrebiti za modeliranje ponašanja ljudi.

U ovom radu nastojalo se da se frakcioni račun uvede pomoću već poznatih matematičkih pojmova kao i da se prikaže primena na različitim poljima nauke. Rad sadrži pet glava i organizovan je na sledeći način. Prva glava sadrži osnovne pojmove matematičke analize koji se koriste pri definisanju frakcionih operatora. Date su definicije prostora integrabilnih, apsolutno neprekidnih i neprekidnih funkcija kao i neka osnovna tvrđenja vezana za njih. Pored toga, integralne transformacije (Furijeova, Melinova i Laplasova) i specijalne funkcije frakcionog računa (Gama i Beta funcija, Mitag-Leflerova, Gausova hipergeometrijska i Beselova funkcija). U drugoj glavi je detaljno izložena teorija Riman-Liuvilovih frakcionih operatora. Date su definicije i osnovne osobine izvoda i integrala, sa akcentom na svojstvu polugrupe koje frakcioni integrali zadovoljavaju, dok kod frakcionih izvoda isto ne mora da važi. Pokazana je veza između frakcionih izvoda i integrala kao recipročnih operatora kao i teoreme analogne teoremama klasičnog kalkulusa (teoreme o razmeni limesa i integrala (izvoda), frakciona Tejlorova teorema, Lajbnicova formula za računanje frakcionog izvoda proizvoda funkcija i formula za parcijalnu integraciju). Na kraju glave su dati primeri frakcionih izvoda i integrala nekih elementarnih funkcija i već pomenute integralne transformacije primenjene na Riman-Liuvilove integrale i izvode. Treća glava daje drugačiji pristup definisanju frakcionih izvoda koji imaju široku primenu. Data je definicija Kaputovih izvoda i neke osnovne osobine, kao i veza sa Riman-Liuvilovim operatorima, a tu su i transformacije Kaputovih izvoda. Četvrta glava je posvećena primeni frakcionih operatora u modeliranju pojava sa kojima se svakodnevno srećemo. Akcenat je na difuzionim procesima i viskoelastičnim svojstvima materijala koji se sve više upotrebljavaju. Prikazano je nekoliko frakcionih modela koji se koriste u fizici, medicini, stomatologiji i biologiji. Na kraju, u petoj glavi, kao prilog je dat kratak istorijski pregled razvoja frakcionog računa i tablice izvoda i integrala nekih najčešće korišćenih funkcija.

* * *

Ogromnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Sanji Konjik na korisnim savetima, sugstijama i primedbama, a pre svega na strpljenju sa mnom. Priznajem da joj svojom tvrdoglavošću nisam nimalo olakšala posao i nadam se da nam se to neće isprečiti na putu za neku dalju saradnju u budućnosti. Čast je i zadovoljstvo bilo raditi sa njom!

Takođe se zahvaljujem i članovima komisije dr Mirjani Stojanović i dr Danijeli Rajter-Ćirić.

Novi Sad, septembar 2011. godine — Nataša Duraković

Sadržaj

Glava 1

Uvod

U ovom poglavlju dajemo definicije i tvrđenja poznata iz opšte analize, a koja će nam koristiti u definisanju frakcionih izvoda i integrala kao i u rešavanju jednačina koje u sebi sadrže frakcione operatore. Date su definicije L^p prostora i prostora apsolutno neprekidnih i neprekidnih funkcija kao i osnovna tvrđenja vezana za njih, zatim osnove integralnih transformacija i specijalnih funkcija frakcionog računa. Tvrđenja su uglavnom bez dokaza a za više detalja pogledati [11], [18] i [20].

1.1 Prostori integrabilnih, apsolutno neprekidnih i neprekidnih funkcija

U ovom odeljku dajemo definicije različitih prostora funkcija na intervalu $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

1.1.1 Definicija *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Sa $\mathcal{C}^n([a, b])$ označavamo prostor funkcija f koje su n puta neprekidno diferencijabilne na $[a, b]$ sa normom*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_{\mathcal{C}^0} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x)|, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Specijalno, za $n = 0$, $\mathcal{C}^0([a, b]) \equiv \mathcal{C}([a, b])$ je prostor neprekidnih funkcija f na $[a, b]$ sa normom

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Sa $\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty([a, b])$ označavamo prostor beskonačno diferencijabilnih ili glatkih funkcija na $[a, b]$.

1.1.2 Definicija *Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Sa $L^p([a,b])$ označavamo skup Lebeg-merljivih funkcija f na $[a,b]$ za koje je $\|f\|_p < \infty$, gde je*

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

i

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| := \inf\{c \in \mathbb{R} \,\big|\, |f(x)| \leq c, \textit{skoro svuda na}\, [a,b]\}.$$

Napomenimo da su dve funkcije koje su jednake skoro svuda na $[a,b]$, tj. koje se razlikuju do na skup mere nula, jednake u prostoru $L^p([a,b])$. Drugim rečima, elementi prostora $L^p([a,b])$ su klase ekvivalencije funkcija, gde su funkcije f i g ekvivalentne ako je $f(x) = g(x)$ skoro svuda na $[a,b]$.
Može se pokazati da u prostoru Lebeg-merljivih funkcija važe sledeće nejednakosti:

1. *Helderova nejednakost*, za $p > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \, dt = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad f \in L^p([a,b]), g \in L^q([a,b]).$$

2. *Koši-Švarcova nejednakost:*

$$\Big| \int_a^b f(t)g(t) \, dt \Big| \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \quad f, g \in L^2([a,b]).$$

3. *Nejednakost Minkovskog:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in L^p([a,b]).$$

4. *Uopštena nejednakost Minkovskog:*

$$\Big(\int_{\Omega_1} dx \Big| \int_{\Omega_2} f(x,y) \, dy \Big|^p \Big)^{1/p} \leq \int_{\Omega_2} dy \Big(\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p \, dx \Big)^{1/p},$$

$f \in L^p([a,b] \times [c,d])$.

Koristeći nejednakost Minkovskog se može pokazati da su $\|f\|_p$ i $\|f\|_\infty$ iz definicije 1.1.2 norme na $L^p([a,b])$.
Iz Helderove nejednakosti dobijamo da na konačnim intervalima važi

$$L^{p_1}([a,b]) \subset L^{p_2}([a,b]) \qquad \text{i} \qquad \|f\|_{p_2} \leq c\, \|f\|_{p_1},$$

ako je $1 \leq p_2 < p_1$ i $c = const.$
Takođe važi i *Fubinijeva teorema* koja dozvoljava promenu redosleda integracije kod višestrukih integrala.

1.1.3 Teorema *Neka je* $\Omega_1 = [a,b]$, $\Omega_2 = [c,d]$, *gde su* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$, *i neka je* $f(x,y)$ *merljiva na* $\Omega_1 \times \Omega_2$. *Ako bar jedan od integrala*

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,dy, \qquad \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,dx, \qquad \iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

apsolutno konvergira, onda su sva tri integrala jednaka.

Koristićemo i specijalni slučaj Fubinijeve teoreme, poznatiji kao *Dirihleova formula*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_y^b f(x,y)\,dx \tag{1.1}$$

koja važi pod pretpostavkom da bar jedan od integrala apsolutno konvergira.

Neka je sada $[a,b]$ konačan interval, tj. $-\infty < a < b < \infty$. Definišimo prostore apsolutno neprekidnih funkcija.

1.1.4 Definicija *Funkcija* f *je apsolutno neprekidna na intervalu* $[a,b]$ *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za svaki konačan, po parovima disjunktan niz podintervala* $[a_k,b_k] \subset [a,b], k = 1,2,...,n,$ *za koji je* $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, *sledi da je* $\sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k)) < \varepsilon$.
Prostor apsolutno neprekidnih funkcija na $[a,b]$ *se označava sa* $AC([a,b])$.

Poznato je da se prostor $AC([a,b])$ poklapa sa prostorom primitivnih funkcija od $L^1([a,b])$-funkcija, odnosno,

$$f \in AC([a,b]) \Leftrightarrow f(x) = c + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt, \qquad \int\limits_a^b |\varphi(t)|\,dt < \infty, \tag{1.2}$$

tj. $\varphi \in L^1([a,b])$. Otuda sledi da je izvod apsolutno neprekidne funkcije apsolutno integrabilna funkcija, tj. $f'(x) = \varphi(x)$ skoro svuda na $[a,b]$ i $c = f(a)$. Obrnuto u opštem slučaju ne važi. Naime, apsolutna neprekidnost funkcije ne sledi nužno iz postojanja apsolutno integrabilnog izvoda skoro svuda, što će biti od velikog značaja u teoriji frakcionog integro-diferenciranja.

Za $n \in \mathbb{N}$ sa $AC^n([a,b])$ označavamo prostor funkcija f koje imaju neprekidne izvode na $[a,b]$ do reda $n-1$ i $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$, odnosno

$$AC^n([a,b]) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{n-1}([a,b]) \;\middle|\; f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

Specijalno, $AC^1([a,b]) \equiv AC([a,b])$.
Sledeća lema daje karakterizaciju prostora $AC^n([a,b])$.

1.1.5 Lema *Funkcija f pripada prostoru $AC^n([a,b])$ ako i samo ako se može zapisati u obliku*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\, dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \tag{1.3}$$

gde je $\varphi \in L^1([a,b])$, a c_k proizvoljne konstante, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Jednakost (1.3) sledi direktno iz definicije prostora $AC^n([a,b])$, (1.2) i poznate formule za računanje n-tostrukog integrala.

1.2 Integralne transformacije

U ovom odeljku ćemo se upoznati sa osnovnim integralnim transformacijama kao što su Furijeove, Melinove i Laplasove transformacije, koje ćemo u nastavku koristiti.

1.2.1 Furijeova transformacija

Neka je f funkcija jedne realne promenljive. *Furijeova transformacija* funkcije f se definiše kao

$$(\mathcal{F} f(x))(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Inverzna Furijeova transformacija je data sa:

$$(\mathcal{F}^{-1} g(\xi))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Prethodni integrali apsolutno konvergiraju za funkcije $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ kao i za funkcije $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Ponekad je korisno Furijeovu transformaciju zapisati u sledećem obliku:

$$(\mathcal{F}f(x))(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}-1}{ix} f(x)\,dx. \tag{1.6}$$

1.2.1 Napomena Radi jednostavnijeg zapisa, često se izostavlja promenljiva x, ukoliko ne dovodi do zabune, i pišemo samo $(\mathcal{F}f)(\xi)$ ili $\mathcal{F}f(\xi)$. Podjednako ćemo koristiti sve ove oznake.

Za "dovoljno dobre" funkcije f i g, ove transformacije su jedna drugoj inverzne, tj. važi

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f \qquad \text{i} \qquad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g,$$

kao i sledeća relacija

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(\xi) = f(-\xi).$$

Sledeća osobina daje vezu Furijeovih transformacija i operatora translacije τ_h i dilatacije Π_λ definisanih sa

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h), \quad x, h \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

i

$$(\Pi_\lambda f)(x) = f(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \tag{1.8}$$

respektivno.
Za funkcije $f \in L^k(\mathbb{R})$, $k = 1, 2$, važi:

$$(\mathcal{F}\tau_h f)(\xi) = e^{-i\xi h}(\mathcal{F}f)(\xi)$$

$$(\mathcal{F}\Pi_\lambda f)(\xi) = \frac{1}{\lambda}\,(\mathcal{F}f)\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)$$

$$(\mathcal{F}e^{iax}f(x))(\xi) = (\tau_{-a}\mathcal{F}f)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi + a), \quad \xi, a \in \mathbb{R}.$$

Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ tada je $(\mathcal{F}f)(\xi)$ neprekidna ograničena funkcija koja teži nuli kad $|\xi| \to \infty$. Brzina opadanja funkcije $\mathcal{F}f$ u beskonačnosti je u vezi sa regularnošću funkcije f. Ta veza je data sledećim jednakostima

$$(\mathcal{F}D^n f(x))(\xi) = (-i\xi)^n(\mathcal{F}f(x))(\xi), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.9}$$

i

$$D^n(\mathcal{F}f(x))(\xi) = (\mathcal{F}(ix)^n f(x))(\xi), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.10}$$

i važe za funkcije $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ za koje je $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, gde je $k = 0, 1, ..., n$.

Konvolucija funkcija f i g se definiše pomoću integrala

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt, \tag{1.11}$$

i dobro je definisana u sledećim slučajevima:

- ako $f,\, g \in L^1(\mathbb{R})$ tada i $f * g \in L^1(\mathbb{R})$,
- ako $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ tada i $f * g \in L^2(\mathbb{R})$,
- ako $f,\, g \in L^2(\mathbb{R})$ tada je konvolucija funkcija f i g neprekidna, ograničena funkcija koja se anulira u beskonačnosti.

Furijeova transformacija konvolucije je data Furijeovom konvolucionom teoremom.

1.2.2 Teorema *Neka je ispunjen jedan od prethodnih uslova. Tada je Furijeova transformacija konvolucije* $f * g$ *data sa*

$$(\mathcal{F}(f * g))(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi)(\mathcal{F}g)(\xi).$$

Takođe navodimo sinusne i kosinusne Furijeove tansformacije funkcije f

$$(\mathcal{F}_c f)(\xi) = \int_0^{\infty} \cos(\xi x) f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^+,$$

$$(\mathcal{F}_s f)(\xi) = \int_0^{\infty} \sin(\xi x) f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^+,$$

i odgovarajuće inverzne transformacije

$$(\mathcal{F}_c^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(x\xi) g(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$(\mathcal{F}_s^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(x\xi) g(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

1.2.2 Melinova transformacija

Neka je f funkcija jedne realne promenljive. *Melinova transformacija* funkcije f se definiše kao

$$(\mathcal{M}f(t))(s) = f^*(s) := \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\, dt, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{1.12}$$

a inverzna Melinova transformacija za $x \in \mathbb{R}^+$ je data sa

$$(\mathcal{M}^{-1}g(s))(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} t^{-s} g(s)\, ds, \quad \gamma = \mathrm{Re}\,(s). \tag{1.13}$$

Prethodne relacije se mogu izvesti iz (1.4) i (1.5) zamenom $f(x)$ sa $f(e^x)$ i ix sa s. Tako uslovi za konvergenciju integrala u definiciji važe na osnovu odgovarajućih uslova za konvergenciju Furijeove i inverzne Furijeove transformacije.
Neka od osnovnih svojstava Melinove transformacije su:

$$(\mathcal{M}f(at))(s) = a^{-s}(\mathcal{M}f)(s), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$(\mathcal{M}\, t^a f(t))(s) = (\tau_{-a}\mathcal{M}f)(s) = (\mathcal{M}f)(s+a), \quad s, a \in \mathbb{C}$$

i

$$(\mathcal{M}f(t^a))(s) = \frac{1}{|a|}\,(\mathcal{M}f)\Big(\frac{s}{a}\Big), \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Ponavljajući parcijalnu integraciju, dobijamo i bitnu vezu za Melinovu transformaciju n-tog izvoda funkcije f, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}D^n f)(s) &= \int_0^\infty D^n f(t) t^{s-1}\, dt \\
&= \big[D^{n-1} f(t) t^{s-1}\big]\big|_0^\infty - (s-1) \int_0^\infty D^{n-1} f(t) t^{s-2}\, dt \\
&= \big[D^{n-1} f(t) t^{s-1}\big]\big|_0^\infty - (s-1)(\mathcal{M}D^{n-1} f)(s-1) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \Gamma(s)}{\Gamma(s-k)} \big[D^{n-k-1} f(t) t^{s-k-1}\big]\big|_0^\infty + \frac{(-1)^n \Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} (\mathcal{M}f)(s-n),
\end{aligned}$$

što se može zapisati i u obliku:

$$(\mathcal{M}D^n f)(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)} \big[D^{n-k-1} f(t) t^{s-k-1}\big]\big|_0^\infty + \frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)} (\mathcal{M}f)(s-n). \tag{1.14}$$

Specijalno, ako zamena donje i gornje granice anulira funkcije u sumi, dobijamo pojednostavljenu formulu:

$$(\mathcal{M}D^n f)(s) = \frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)}\,(\mathcal{M}f)(s-n),$$

gde je Γ specijalna Ojlerova gama funkcija o kojoj će više reči biti u odeljku 1.3.1. Melinov operator konvolucije funkcija f i g se definiše za $t \in \mathbb{R}^+$ na sledeći način:

$$(f \circ g)(x) = \int\limits_0^x f\Big(\frac{x}{t}\Big) g(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Teorema konvolucije za Melinovu transformaciju uz iste pretpostavke kao u teoremi 1.2.2 je oblika

$$(\mathcal{M}(f \circ g))(s) = (\mathcal{M}f)(s)(\mathcal{M}g)(s).$$

Poznato je da se Melinovom transformacijom eksponencijalne funkcije dobija gore pomenuta gama funkcija:

$$(\mathcal{M}e^{-t})(z) = \Gamma(z), \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0.$$

1.2.3 Laplasova transformacija

Neka je $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, i $s \in \mathbb{C}$. *Laplasova transformacija* funkcije f se definiše kao

$$(\mathcal{L}f(t))(s) = \widetilde{f}(s) := \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt. \tag{1.15}$$

Za egzistenciju integrala (1.15) je potrebno da je funkcija f eksponencijalno ograničena, što znači da postoje konstante $M > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ takve da za neko $t_0 \geq 0$ važi

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t > t_0.$$

Inverzna Laplasova transformacija se definiše kao

$$(\mathcal{L}^{-1}g(s))(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} g(s)\,ds, \tag{1.16}$$

gde je $\gamma = \mathrm{Re}\,(s)$.

Koristeći Melinovu transformaciju može se pokazati da se inverzna Laplasova transformacija može zapisati i u obliku

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)} g^*(1-s)\, ds, \quad \gamma = \mathrm{Re}\,(s) < 1.$$

Ako su za funkcije f_1 i f_2 definisane Laplasove transformacije, tada važi

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

tj. važi linearnost Laplasove tranformacije.

Jednostavnim računom mogu se izračunati Laplasove transformacije nekih elementarnih funkcija:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\, t^{\alpha})(s) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1 \\
(\mathcal{L}\, e^{at})(s) &= \frac{1}{s-a} \\
(\mathcal{L}\, t^{\alpha-1} e^{at})(s) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(s-a)^{\alpha}} \\
(\mathcal{L}\, \cos at)(s) &= \frac{s}{s^2+a^2} \\
(\mathcal{L}\, \sin at)(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}.
\end{aligned}$$

Jedno od najkorisnijih svojstava Laplasove transformacije je tzv. konvoluciona teorema. Naime, ako pretpostavimo da važe uslovi teoreme 1.2.2, može se pokazati da je

$$(\mathcal{L}(f * g))(s) = (\mathcal{L}f)(s)(\mathcal{L}g)(s), \tag{1.17}$$

gde je konvolucija funkcija f i g data u (1.11).
Laplasova transformacija se može dobiti i od Furijeove transformacije uzimajući da je $f(t) = 0$ za $t < 0$ i zamenom promenljive $ix = s$.
Istaknimo još i da kad god odgovarajuće Laplasove transformacije postoje, važe i sledeće jednakosti analogne onim za Furijeove transformacije:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\tau_h f)(s) &= e^{-sh}(\mathcal{L}f)(s) \\
(\mathcal{L}\Pi_\lambda f)(s) &= \frac{1}{\lambda}(\mathcal{L}f)\Big(\frac{s}{\lambda}\Big) \\
(\mathcal{L}\, e^{-at} f(t))(s) &= (\tau_{-a}\mathcal{L}f))(s) = (\mathcal{L}f)(s+a), \quad s, a \in \mathbb{R} \\
D^n(\mathcal{L}f(t))(s) &= (-1)^n(\mathcal{L}\, t^n f(t))(s), \quad n \in \mathbb{N} \\
(\mathcal{L}\, D^n f)(s) &= s^n(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(D^k f)(0). \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

1.3 Specijalne funkcije

Specijalne funkcije, kao što su gama, beta ili Mitag-Leflerova funkcija imaju značajnu ulogu u frakcionom računu. U daljem radu ćemo dosta koristiti gama i beta funkciju, stoga ćemo ih detaljno obraditi i upoznati se sa njihovim bitnim osobinama.

1.3.1 Gama funkcija

Gama funkcija (često se naziva i Ojlerova gama funkcija) Γ se definiše preko tzv. Ojlerovog integrala druge vrste i glasi:

$$\Gamma(z) := \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.19}$$

gde je $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.
Jasno je da integral (1.19) konvergira za sve kompleksne vrednosti z za koje je $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.
Zaista, imamo

$$\begin{aligned} \Gamma(x+iy) &= \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy}\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy\ln t}\, dt \\ &= \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \ln t) + i \sin(y \ln t)]\, dt, \end{aligned}$$

gde je izraz u uglastim zagradama ograničen za svako t, zatim konvergencija u beskonačnosti je obezbeđena sa e^{-t}, a za konvergenciju u nuli moramo imati $x = \mathrm{Re}\,(z) > 1$.

1.3.1 Napomena Često se u literaturi može naći i opštija definicija gama funkcije: gama funkcija Γ je meromorfna funkcija nezavisne promenljive z i njena recipročna vrednost je oblika

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{k}\Big)^{-\frac{z}{k}},$$

gde je $\gamma = 0,57721566...$ Ojlerova konstanta.
Ovde možemo primetiti da nema dodatnog uslova da je $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

Jedna od osnovnih osobina gama funkcije je da ona zadovoljava *redukcionu formulu*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0, \tag{1.20}$$

koja se lako može pokazati parcijalnom integracijom.
Koristeći prethodnu relaciju, Ojlerovu gama funkciju možemo produžiti i na levu poluravan, tj. za vrednosti $\mathrm{Re}\,(z) \leq 0$ na sledeći način:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \mathrm{Re}\,(z) > -n,\ n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{Z}_0^- := \{0, -1, -2, ...\}, \tag{1.21}$$

gde je $(z)_n$ *Pohamerov* simbol za $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}_0$ definisan sa:

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1).$$

Sada jednostavno dobijamo sledeće identitete:

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n!$$

i

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

Primetimo da za ovako zapisanu gama funkciju možemo lako zaključiti da je analitička svuda u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$, osim i tačkama $z = 0, -1, -2...$ u kojima ima polove prvog reda i može se predstaviti formulom

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{(z+k)k!}[1 + \mathcal{O}(z+k)] \quad z \to k, k \in \mathbb{N}_0,$$

što sledi zamenom $z = 1 - n$ i $n - 1 = k$.

1.3.2 Napomena Oznaka $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$, $z \to a$, čita se "funkcija f je veliko O funkcije g" i znači da za $\varepsilon > 0$ za koje je $|z - a| < \varepsilon$ sledi $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| < M$, za neko $M < \infty$.

Koeficijent $(z+k)^{-1}$ u okolini pola $z = -k$ se naziva reziduum (ostatak) gama funkcije u oznaci $\mathrm{Res}\,\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$.

Još neke osobine gama funkcije su:

1. *Opšta diferencna jednakost:*

$$\Gamma(z+n) = (z)_n\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n}\Gamma(z).$$

2. *Funkcionalna jednakost:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi},$$

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}.$$

3. *Duplikaciona (Ležandrova) formula:*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big)$$

   i uopštena Gaus-Ležandrova multiplikaciona formula:

$$\Gamma(mz)\frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\Big(z+\frac{k}{m}\Big), \quad m = 2, 3\ldots.$$

4. *Stirlingova formula:*

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}[1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{z}\Big)], \quad |argz| < \pi, |z| \to \infty$$

   i njene posledice:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n[1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)], \quad n \to \infty,$$

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi}|y|^{x-\frac{1}{2}}e^{-\pi\frac{|y|}{2}}[1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{y}\Big)], \quad y \to \infty.$$

5. Količnik dve gama funkcije razvijen u red u okolini beskonačnosti:

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}\sum_{k=0}^{N}\frac{c_k}{z^k} + z^{a-b}\mathcal{O}(z^{-N-1}),$$

   $c_0 = 1$, $|arg(z+a)| < \pi$, $|z| \to \infty$.

Koristićemo još i *Ojlerovu psi-funkciju* koja se definiše preko izvoda logaritma gama funkcije

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{1.22}$$

1.3.2 Beta funkcija

Beta funkcija $B(z,\omega)$ se definiše preko Ojlerovog integrala prve vrste

$$B(z,\omega) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}\,dt, \qquad \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Re}\,(\omega) > 0. \tag{1.23}$$

Posmatrajmo funkcije $f(u) = u^{z-1}$ i $g(u) = u^{\omega-1}$, tada je

$$(f * g)(u) = \int_0^u \tau^{z-1}(u-\tau)^{\omega-1}\,d\tau,$$

pa uvodeći smenu $\tau = vu$ dobijamo

$$(f * g)(u) = u^{z+\omega-1}\int_0^1 v^{z-1}(1-v)^{\omega-1}\,dv.$$

Sada iz teoreme o konvoluciji Laplasove transformacije imamo

$$\mathcal{L}(u^{z+\omega-1}B(z,\omega)) = \mathcal{L}(u^{z-1})\mathcal{L}(u^{\omega-1}) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{s^{z+\omega}},$$

pa sledi da je

$$u^{z+\omega-1}B(z,\omega) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{s^{z+\omega}}\right) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)u^{z+\omega-1}}{\Gamma(z+\omega)}.$$

Odavde dobijamo veoma bitnu vezu između gama i beta funkcije koja je data formulom:

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}. \tag{1.24}$$

Integral (1.23) ima smisla i za vrednosti $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ ili $\mathrm{Re}\,(\omega) = 0$ ($z \neq 0$, $\omega \neq 0$) i tada imamo samo uslovnu konvergenciju. Naime, sledeći limes postoji i poklapa se sa analitičkim produženjem $B(z,\omega)$ s obzirom na ω i vrednosti $\mathrm{Re}\,(\omega) = 0$, $\omega \neq 0$:

$$B(z,i\theta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} t^{z-1}(1-t)^{i\theta-1}\,dt, \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \theta \neq 0.$$

Takođe se koristi i sledeći integral koji se dobija iz (1.23) pomoću smene $t = y + (x-y)\xi^{-1}$:

$$\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}\,dt = (x-y)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, 1-\alpha-\beta),$$

$x > y$, $0 < \mathrm{Re}\,(\alpha) < 1 - \mathrm{Re}\,(\beta)$.

1.3.3 Mitag-Leflerova funkcija

Neka je $z \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$, funkcija definisana preko stepenog reda sa

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{1.25}$$

se naziva *Mitag-Leflerova funkcija*[1] jednog parametra.
Jasno, za $\alpha = 1$ i $\alpha = 2$ dobijamo razvoje eksponencijalne funkcije i hiperboličnog kosinusa:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \qquad E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!} = \cosh(\sqrt{z}).$$

Za $\alpha = n \in \mathbb{N}$ može se pokazati da za funkciju $E_n(\lambda z^n)$ važi sledeća diferencijalna formula

$$\Big(\frac{d}{dz}\Big)^n E_n(\lambda z^n) = \lambda E_n(\lambda z^n), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

kao i

$$\Big(\frac{d}{dz}\Big)^n \Big[z^{n-1} E_n\Big(\frac{\lambda}{z^n}\Big)\Big] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+1}} E_n\Big(\frac{\lambda}{z^n}\Big), \quad z \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Takođe, imamo i integralnu reprezentaciju za $\alpha > 0$ i $z \in \mathbb{C}$ ($|\arg(z)| < \pi$):

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)} (-z)^{-s}\, ds.$$

Iz (1.12) dobijamo da je Melinova transformacija Mitag-Leflerove funkcije

$$(\mathcal{M}E_\alpha(-t))(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)}$$

za $0 < \mathrm{Re}\,(s) < 1$, dok je Laplasova transformacija nešto komplikovanija i stoga je nećemo navoditi.
Dvoparametarska Mitag-Leflerova funkcija se definiše za $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ i glasi

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{1.26}$$

Jasno je da se Mitag-Leflerova funkcija jednog parametra može definisati preko dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije za $\beta = 1$, odnosno $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

[1] Iako se naziva Mitag-Leflerova funkcija, prvi put se pojavljuje u radovima Vimana, a osnovna svojstva su detaljno obradili Agraval i Humbert četiri decenije kasnije.

1.3.3 Napomena Primetimo da se pri definisanju funkcija nigde ne pominje konvergencija reda, međutim, uz pomoć Stirlingove formule se može pokazati da red konvergira za svako $z \in \mathbb{C}$.

Analogne diferencijalne formule za dvoparametarsku Mitag-Leflerovu funkciju važe:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n z^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda z^n) = z^{\beta-n-1} E_{n,\beta-n}(\lambda z^n), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

i

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-\beta} E_{n,\beta}\left(\frac{\lambda}{z^n}\right)\right] = \frac{(-1)^n \lambda}{z^{n+\beta}} E_{n,\beta}\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), \quad z \neq 0, \lambda \in \mathbb{C},$$

kao i integralna reprezentacija

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} (-z)^{-s}\, ds.$$

Melinova transformacija dvoparametarske Mitag-Leflerove funkcije je oblika

$$(\mathcal{M}E_{\alpha,\beta}(-t))(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}.$$

Koristeći dvoparametarsku Mitag-Leflerovu funkciju za različite vrednosti parametara α i β, možemo definisati mnoge dobro poznate funkcije:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh z}{z}.$$

1.3.4 Gausova hipergeometrijska i Beselova funkcija

Gausova hipergeometrijska i Beselova funkcija su veoma značajne za frakcioni račun jer se pojavljuju prilikom rešavanja frakcionih integrala nekih elementarnih funkcija.

Gausova hipergeometrijska funkcija ${}_2F_1(a,b;c;z)$ se definiše na jediničnoj kružnici pomoću sume hipergeometrijskog reda

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \tag{1.27}$$

gde su $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ parametri i promenljiva $|z| < 1$, a $(a)_k$ Pohamerov simbol definisan u 1.3.1. Red apsolutno konvergira za $|z| < 1$ i za $|z| = 1$ kad je $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$. Za ostale vrednosti promenljive z definiše se analitičko produženje reda preko Ojlerove integralne reprezentacije

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt,$$

$0 < \operatorname{Re}(b) < \operatorname{Re}(c)$, $|\arg(1-z)| < \pi$.
Kumerova funkcija se definiše preko Gausove hipergeometrijske na sledeći način

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\Big(a,b;c;\frac{z}{b}\Big), \quad |z| < \infty.$$

Sada možemo definisati *Beselovu funkciju* $J_\nu(z)$ pomoću hipergeometrijske funkcije

$$ {}_0F_1(c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(c)_k k!} = \lim_{a\to\infty} {}_1F_1\Big(a;c;\frac{z}{a}\Big), \quad |z| < \infty$$

na sledeći način:

$$ J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu} {}_0F_1\Big(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)k!}. \tag{1.28}$$

Beselova funkcija se može predstaviti i u Poasonovoj integralnoj reprezentaciji

$$ J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2}\cos(zt)\,dt, \quad \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Specijalno za $\nu = -1/2$ i $\nu = 1/2$ imamo

$$ J_{-1/2}(z) = \Big(\frac{2}{\pi z}\Big)^{1/2}\cos z \qquad \text{i} \qquad J_{1/2}(z) = \Big(\frac{2}{\pi z}\Big)^{1/2}\sin z.$$

Glava 2

Riman-Liuvilovi integrali i izvodi necelog reda

Postoji više pristupa definisanju izvoda i integrala necelog reda, a najčešće se koristi Riman-Liuvilov pristup i može se naći u gotovo svim knjigama i radovima posvećenim ovoj temi. Neke od pomenutih knjiga, odakle su i preuzete definicije i tvrđenja koja slede u nastavku teksta su [6], [7], [11], [12], [16], [17], [18] i [20].

U stvaranju računa sa integralima i izvodima necelog reda, veoma značajnu ulogu je odigrala Abelova integralna jednačina

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt = f(x), \quad x \geq a, 0 < \alpha < 1, \tag{2.1}$$

Jasno, za $\alpha = 1$ imamo $\varphi = f'$. Za vrednosti $0 < \alpha < 1$ (slučaj $\alpha > 1$ se svodi na prethodni kad je $0 < \alpha < 1$), može se izračunati (jedinstveno) rešenje jednačine i ono je oblika

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt. \tag{2.2}$$

Slično, $\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}\,dt$ je rešenje Abelove jednačine oblika

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt = f(x), \quad x \leq b, 0 < \alpha < 1.$$

Ako je f apsolutno neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada (2.1) ima jedinstveno rešenje u prostoru $L^1([a,b])$, i može se zapisati na sledeći način

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt\right].$$

Vodeći se jednačinom (2.2) kao i nekim poznatim rezultatima iz klasične analize, definisaćemo izvode i integrale necelog reda $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.1 Definicija i osnovna svojstva Riman-Liuvilovih integrala i izvoda

Poznato je da se n-tostruki integral funkcije φ može računati po formuli

$$\int_a^x dx \int_a^x dx ... \int_a^x \varphi(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt,$$

što se lako pokazuje indukcijom po n. Kako je $(n-1)! = \Gamma(n)$ imamo da desna strana gornje jednakosti može imati značenje i za necele vrednosti n, tako da se prirodno nameće sledeća definicija integrala necelog reda.

2.1.1 Definicija *Neka je $f \in L^1([a,b])$ i $\alpha > 0$. Tada se levi Riman-Liuvilov integral reda α funkcije f, u oznaci ${}_aI_x^\alpha f$, definiše kao*

$${}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\theta)^{\alpha-1} f(\theta)\,d\theta, \quad x \in [a,b], \tag{2.3}$$

dok se desni Riman-Liuvilov integral reda α funkcije f, u oznaci ${}_xI_b^\alpha f$, definiše kao

$${}_xI_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (\theta-x)^{\alpha-1} f(\theta)\,d\theta, \quad x \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Gore definisani integrali funkcije $f \in L^1([a,b])$ postoje skoro svuda na $[a,b]$, a takođe su elementi prostora $L^1([a,b])$ što se može pokazati (na primer za levi Riman-Liuvilov integral) tako što zapišemo

$$\int_a^x (x-\theta)^{n-1} f(\theta)\,d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-\theta)\,\varphi_2(\theta)\,d\theta,$$

gde su

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} u^{n-1}, & 0 < u \le b-a \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} f(u), & a \le u \le b \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Po konstrukciji su obe funkcije $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(\mathbb{R})$ pa na osnovu teoreme o konvoluciji i poznatih osobina Lebegovih integrala sledi da je i početni integral takođe u $L^1([a,b])$.
Primetimo da važi i sledeća jednakost:

$$Q_a I_x^\alpha = {}_x I_b^\alpha Q,$$

gde je Q "refleksivni operator" definisan sa $(Q\varphi)(x) = \varphi(a+b-x)$.
Veoma bitno je svojstvo polugrupe operatora frakcione integracije.

2.1.2 Teorema *Neka su $\alpha, \beta > 0$ i $f \in L^1([a,b])$. Tada važi*

$${}_a I_x^\alpha \, {}_a I_x^\beta f(x) = {}_a I_x^{\alpha+\beta} f(x), \quad {}_x I_b^\alpha \, {}_x I_b^\beta f(x) = {}_x I_b^{\alpha+\beta} f(x),$$

skoro svuda na $[a,b]$.
Specijalno, ako je $f \in \mathcal{C}([a,b])$ ili $\alpha+\beta \ge 1$ onda jednakost imamo na celom skupu $[a,b]$.

Dokaz.

$$\begin{aligned}
{}_a I_x^\alpha \, {}_a I_x^\beta f(x) &= {}_a I_x^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_a^x (x-\theta)^{\beta-1} f(\theta)\, d\theta \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x (x-\theta)^{\alpha-1} \left(\int\limits_a^\theta (\theta-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \int\limits_\tau^x (x-\theta)^{\alpha-1} (\theta-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\theta\, d\tau, \\
&= (*)
\end{aligned}$$

pa uvođenjem smene promenljivih $\theta = \tau + s(x-\tau)$ dobijamo

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \int\limits_0^1 (x-\tau-s(x-\tau))^{\alpha-1} (s(x-\tau))^{\beta-1} f(\tau)(x-\tau)\, ds\, d\tau \\
&= (**)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\int\limits_0^1 (x-\tau)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}(x-\tau)^{\beta}f(\tau)\,ds\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\,ds\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Vidimo da je integral $\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\,ds = B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ pa sada lako dobijamo tvrđenje

$$
{}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\,d\tau = {}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x).
$$

Dokaz za desni Riman-Liuvilov integral ide analogno.
Drugi deo teoreme važi jer ako je $f\in\mathcal{C}([a,b])$ tada je i ${}_aI_x^{\beta}f\in\mathcal{C}([a,b])$ pa je i ${}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta}f\in\mathcal{C}([a,b])$, a takođe i ${}_aI_x^{\alpha+\beta}f\in\mathcal{C}([a,b])$. Sada, kako se dve neprekidne funkcije poklapaju skoro svuda na $[a,b]$, sledi da se moraju poklapati i na celom skupu $[a,b]$.
Ako je $f\in L^1([a,b])$ i $\alpha+\beta\geq 1$ onda iz prvog dela imamo da je

$$
{}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta}f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta-1}\,{}_aI_x^{1}f(x),
$$

pa kao u prethodnom razmatranju imamo neprekidnost i poklapanje na celom skupu, što je i trebalo pokazati. □

Takođe, može se pokazati da važi i komutativnost Riman-Liuvilovih integrala, odnosno važi sledeća propozicija.

2.1.3 Propozicija *Pod uslovima teoreme 2.1.2 važi jednakost*

$$
{}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta}f(x) = {}_aI_x^{\beta}\,{}_aI_x^{\alpha}f(x)
$$

Dokaz. Iz prethodne teoreme imamo

$$
{}_xI_b^{\alpha}\,{}_xI_b^{\beta}f(x) = {}_xI_b^{\alpha+\beta}f(x) = {}_xI_b^{\beta+\alpha}f(x) = {}_xI_b^{\beta}\,{}_xI_b^{\alpha}f(x),
$$

odakle sledi tvrđenje. □

2.1.4 Napomena Iz prethodne dve teoreme sledi da operatori

$$
\left\{{}_aI_x^{\alpha} : L^1([a,b]) \to L^1([a,b]) : \alpha\geq 0\right\}
$$

formiraju komutativnu polugrupu. Identički operator ${}_aI_x^{0}$ je neutralni element ove polugrupe.

U sledećoj definiciji ćemo se upoznati sa inverznim operatorom frakcione integracije koga nazivamo frakcioni izvod.

2.1.5 Definicija *Neka je $f \in AC([a,b])$ i $0 \leq \alpha < 1$. Tada se levi Riman-Liuvilov izvod reda α funkcije f, u oznaci ${}_aD_x^\alpha f$, definiše kao*

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} {}_aI_x^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(\theta)}{(x-\theta)^\alpha}\, d\theta, \quad x \in [a,b], \tag{2.5} $$

dok se desni Riman-Liuvilov izvod reda α funkcije f, u oznaci ${}_xD_b^\alpha f$, definiše kao

$$ {}_xD_b^\alpha f(x) = \Big(-\frac{d}{dx}\Big) {}_xI_b^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \Big(-\frac{d}{dx}\Big) \int_x^b \frac{f(\theta)}{(\theta-x)^\alpha}\, d\theta, \tag{2.6} $$

$x \in [a,b]$.

Prethodna definicija dozvoljava da je $\alpha = 0$ što daje ${}_aD_x^0 f(x) = {}_xD_b^0 f(x) = f(x)$. Primetimo da smo integrale definisali za proizvoljno $\alpha > 0$, međutim u definiciji izvoda stoji da je $0 \leq \alpha < 1$. Pre nego što pređemo na slučaj kada je $\alpha \geq 1$, dajemo dovoljan uslov za postojanje frakcionih izvoda.

2.1.6 Lema *Neka je $f \in AC([a,b])$. Tada za $0 \leq \alpha < 1$, ${}_aD_x^\alpha f$ i ${}_xD_b^\alpha f$ postoje skoro svuda na $[a,b]$. Štaviše, ${}_aD_x^\alpha f, {}_xD_b^\alpha f \in L^p([a,b]), 1 \leq p < 1-\alpha$, i*

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(\theta)}{(x-\theta)^\alpha}\, d\theta \right] \tag{2.7} $$

i

$$ {}_xD_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^\alpha} - \int_x^b \frac{f'(\theta)}{(\theta-x)^\alpha}\, d\theta \right]. \tag{2.8} $$

Dokaz. Koristeći definiciju Riman-Liuvilovog izvoda i pretpostavku $f \in AC([a,b])$, dobijamo

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(\theta)(x-\theta)^{-\alpha}\, d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \Big(f(a) + \int_a^\theta f'(u)\, du \Big)(x-\theta)^{-\alpha}\, d\theta \\ &= (*) \end{aligned} $$

$$\begin{aligned}(*) \quad &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\Big(f(a)\int\limits_a^x (x-\theta)^{-\alpha}\,d\theta + \int\limits_a^x\int\limits_a^\theta f'(u)(x-\theta)^{-\alpha}\,du\,d\theta\Big)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{d}{dx}\int\limits_a^x\int\limits_a^\theta f'(u)(x-\theta)^{-\alpha}\,du\,d\theta\Big).\end{aligned}$$

Na osnovu Fubinijeve teoreme 1.1.3 o zameni redosleda integrala, dobijamo

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x f'(u)\frac{(x-u)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,du\Big).$$

Sada iz osnovnih svojstava diferenciranja parametarskih integrala dobijamo tvrđenje. □

Postoje primeri da i uz nešto slabije uslove koje funkcija f mora da zadovoljava, operator frakcionog izvoda je dobro definisan. Na primer, moguće je naći frakcione izvode funkcije koja ima integrabilne singularitete [1]. Posmatrajmo sledeću funkciju $f(x) = (x-a)^{-\mu}$, $0 < \mu < 1$.
Tada dobijamo tzv. *Ojlerovu formulu*

$${}_aD_x^\alpha (x-a)^{-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)}\frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}. \tag{2.9}$$

Zaista,

$$\begin{aligned}{}_aD_x^\alpha (x-a)^{-\mu} \quad &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{(\theta-a)^{-\mu}}{(x-\theta)^\alpha}\,d\theta\\ &= (*)\end{aligned}$$

Uvođenjem smene promenljivih $z = \theta - a$ dobijamo

$$\begin{aligned}(*) \quad &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x-a}\frac{z^{-\mu}}{(x-a-z)^\alpha}\,dz\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x-a}\frac{z^{-\mu}}{(x-a)^\alpha(1-\frac{z}{x-a})^\alpha}\,dz\\ &= (**)\end{aligned}$$

[1]Neprekidna, lokalno integrabilna funkcija f na (a, x) ima integrabilni singularitet reda $r < 1$ u tački $\theta = a$ ako je $\lim_{\theta\to a}(\theta-a)^r f(\theta) = const \neq 0$.

Smenom $\xi = \frac{z}{x-a}$ se integral svodi na beta funkciju:

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{(x-a)^{-\mu}\xi^{-\mu}}{(x-a)^{\alpha}(1-\xi)^{\alpha}} (x-a)\, d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (x-a)^{1-\mu-\alpha} \int_0^1 \xi^{-\mu}(1-\xi)^{-\alpha}\, d\xi \\
&= \frac{1-\mu-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot (x-a)^{-\mu-\alpha} \cdot B(1-\mu, 1-\alpha).
\end{aligned}$$

Koristeći relacije za beta i gama funkciju (1.24) i (1.20) dobijamo

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{-\mu} &= \frac{1-\mu-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\mu-\alpha)} \cdot (x-a)^{-\mu-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \cdot (x-a)^{-\mu-\alpha},
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.
Očigledno, za $\mu = 1-\alpha$, koristeći svojstvo gama funkcije $\Gamma(m) = \pm\infty$ za $m = 0, 1, ...$, imamo da je ${}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\alpha-1} = 0$, pa možemo primetiti da funkcija $(x-a)^{\alpha-1}$ kod izvoda ${}_aD_x^{\alpha}$ igra istu ulogu kao konstanta kod klasičnih izvoda. Takođe imamo i da Ojlerova formula važi i kada je $\mu \leq 0$. Stoga, za $\mu = 0$ dobijamo da je ${}_aD_x^{\alpha}c \neq 0$, za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$. Ove činjenice su od velikog značaja u radu sa frakcionim računom zbog velikih razlika u osobinama između ovako definisanih necelih i već dobro poznatih klasičnih izvoda.

Pređimo sada na definiciju frakcionih izvoda reda α za $\alpha \geq 1$. U tu svrhu koristićemo sledeće oznake: za $\alpha \geq 1$ pišemo $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, gde je $[\alpha]$ ceo deo, a $\{\alpha\}$, $0 \leq \{\alpha\} < 1$, racionalni deo broja α.

2.1.7 Definicija *Neka je $f \in AC^{[\alpha]+1}([a,b])$ i $\alpha \geq 1$. Tada je*

$${}_aD_x^{\alpha} f(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^{[\alpha]} {}_aD_x^{\{\alpha\}} f(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\{\alpha\}} f(x), \quad x \in [a,b],$$

i

$${}_xD_b^{\alpha} f(x) = \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^{[\alpha]} {}_xD_b^{\{\alpha\}} f(x) = \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^{[\alpha]+1} {}_xI_b^{1-\{\alpha\}} f(x), \quad x \in [a,b].$$

Dakle, za $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ i $f \in AC^n([a,b])$, imamo da je $[\alpha] = n-1$ i $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha] = \alpha - n + 1$

$${}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \int_a^x \frac{f(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\, d\theta, \quad x \in [a,b], \tag{2.10}$$

i analogno,

$$ {}_xD_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n \int\limits_x^b \frac{f(\theta)}{(\theta-x)^{\alpha-n+1}}\,d\theta, \quad x\in[a,b]. \tag{2.11}$$

Ponovo, ako stavimo $\alpha = n-1$ u (2.10) i (2.11), respektivno, i kako je $[\alpha]=n-1$ i $\{\alpha\}=0$ dobijamo

$$ {}_aD_x^{n-1} f(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^{n-1} {}_aD_x^0 f(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^{n-1} f(x), $$

i respektivno

$$ {}_xD_b^{n-1} f(x) = \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^{n-1} {}_xD_b^0 f(x) = \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^{n-1} f(x). $$

Dovoljan uslov za postojanje levog i desnog Riman-Liuvilovog izvoda reda α za $\alpha\in[0,1)$ iz leme 2.1.6 važi i u slučaju kada je $n-1\le\alpha<n$. Dakle, dovoljno je da

$$ \int\limits_a^x \frac{f(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\,d\theta, \int\limits_x^b \frac{f(\theta)}{(\theta-x)^{\alpha-n+1}}\,d\theta \in AC^{[\alpha]+1}([a,b]). $$

Takođe, za $n-1\le\alpha<n, n\in\mathbb{N}$, imamo

$$ {}_aD_x^\alpha (x-a)^{\alpha-n} = 0, \quad \text{i} \quad {}_xD_b^\alpha (b-x)^{\alpha-n} = 0, $$

kao i ${}_aD_x^\alpha c \neq 0$, i ${}_xD_b^\alpha c\neq 0$, $c\in\mathbb{R}$.
U teoremi 2.1.2 smo videli da Riman-Liuvilov operator integracije ima svojstvo polugrupe, pa se prirodno postavlja pitanje da li i operator diferenciranja zadovoljava isto. Odgovor je potvrdan pod određenim uslovima, što ćemo videti u sledećoj teoremi, dok u opštem slučaju ne mora da važi.

2.1.8 Teorema *Neka je $\alpha,\beta\ge 0$, $\varphi\in L^1([a,b])$ i neka je $f = {}_aI_x^{\alpha+\beta}\varphi$. Tada važi*

$$ {}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta f = {}_aD_x^{\alpha+\beta} f. $$

Primetimo da nije neophodno da je funkcija φ zadata eksplicitno, već je dovoljno da znamo da takva funkcija postoji.

Dokaz. Radi jednostavnijeg zapisa koristićemo oznaku D^n umesto $(\frac{d}{dx})^n$. Iz pretpostavke teoreme i definicije Riman-Liuvilovog izvoda imamo

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta f(x) &= {}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta {}_aI_x^{\alpha+\beta}\varphi(x) = D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\{\alpha\}} D^{[\beta]+1} {}_aI_x^{1-\{\beta\}} {}_aI_x^{\alpha+\beta}\varphi(x) \\ &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\alpha+[\alpha]} D^{[\beta]+1} {}_aI_x^{1-\beta+[\beta]} {}_aI_x^{\alpha+\beta}\varphi(x). \end{aligned} $$

Koristeći poznat identitet $D^n {}_aI_x^n f = f$ gde je $n \in \mathbb{N}$ i svojsvo polugrupe integralnog operatora, dobijamo

$$\begin{aligned} {}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta f(x) &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\alpha+[\alpha]} D^{[\beta]+1} {}_aI_x^{1+[\beta]+\alpha} \varphi(x) \\ &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\alpha+[\alpha]} D^{[\beta]+1} {}_aI_x^{1+[\beta]} {}_aI_x^\alpha \varphi(x) \\ &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\alpha+[\alpha]} {}_aI_x^\alpha \varphi(x) \\ &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1+[\alpha]} \varphi(x) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je ${}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta f(x) = \varphi(x)$.
Slično se pokazuje i da je ${}_aD_x^{\alpha+\beta} f(x) = \varphi(x)$ odakle sledi tvrđenje. □

Pokažimo da ukoliko nisu zadovoljeni uslovi teoreme svojstvo polugrupe kao i zakon komutativnosti za Riman-Liuvilove izvode ne moraju da važe.

2.1.9 Primer Neka je $f(x) = (x-a)^{-1/2}$ i $\alpha = \beta = 1/2$. Tada iz Ojlerove formule (2.9) imamo da je

$${}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aD_x^{1/2}(x-a)^{-1/2} = 0 \quad \text{i} \quad {}_aD_x^\beta f(x) = {}_aD_x^{1/2}(x-a)^{-1/2} = 0,$$

odakle sledi da je i ${}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta f(x) = 0$.
Međutim,

$${}_aD_x^{1/2+1/2}(x-a)^{-1/2} = {}_aD_x^1(x-a)^{-1/2} = -1/2(x-a)^{-3/2}.$$

Dakle, ${}_aD_x^{\alpha+\beta} f(x) \neq 0$, pa ne važi svojstvo polugrupe, tj.

$${}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta f(x) = {}_aD_x^\beta {}_aD_x^\alpha f(x) \neq {}_aD_x^{\alpha+\beta} f(x).$$

Neka je sad $f(x) = (x-a)^{1/2}$ i $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/2$. Imamo

$${}_aD_x^{1/2} f(x) = \sqrt{\pi}/2 \quad \text{a} \quad {}_aD_x^{3/2} f(x) = 0,$$

pa je ${}_aD_x^{1/2} {}_aD_x^{3/2} f(x) = 0$, ali ${}_aD_x^{3/2} {}_aD_x^{1/2} f(x) = -\pi/4(x-a)^{-3/2} \neq 0$ (videti odeljak 2.5).
Dakle,

$${}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\beta f(x) \neq {}_aD_x^\beta {}_aD_x^\alpha f(x),$$

pa ne važi komutativnost frakcionih izvoda.

Operacije frakcione integracije i diferenciranja s kojima smo se već upoznali za realno $\alpha > 0$ se mogu prirodno proširiti i na slučaj kompleksne vrednosti α za $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$. Slučaj $\mathrm{Re}\,(\alpha) = 0$ ćemo posebno diskutovati.

Jasno je da su gore definisani integrali i izvodi reda α, $\alpha > 0$, ustvari integrali i izvodi kompleksnog reda α $(\mathrm{Re}\,(\alpha) \neq 0)$ gde je $\mathrm{Im}\,(\alpha) = 0$.
Razmotrimo sada izvod isključivo imaginarnog reda α, dakle $\mathrm{Re}\,(\alpha) = 0$. Neka je $\alpha = i\omega$. Tada se levi i desni izvod imaginarnog reda definišu formulama

$$ {}_aD_x^{i\omega} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\omega)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(\theta)}{(x-\theta)^{i\omega}}\, d\theta, \quad x \in [a,b] \tag{2.12} $$

i

$$ {}_xD_b^{i\omega} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\omega)} \Big(-\frac{d}{dx} \Big) \int_x^b \frac{f(\theta)}{(\theta-x)^{i\omega}}\, d\theta, \quad x \in [a,b]. \tag{2.13} $$

Primetimo da je definicija u potpunosti ista kao definicija (2.5). Međutim, za definisanje integrala imaginarnog reda ne možemo koristiti definiciju (2.3) zbog divergencije integrala za $\alpha = i\omega$ pa prihvatamo da je ${}_aI_x^{i\omega} f(x) = \frac{d}{dx} {}_aI_x^{1+i\omega} f(x)$, odakle sledi

$$ {}_aI_x^{i\omega} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\omega)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-\theta)^{i\omega} f(\theta)\, d\theta, \quad x \in [a,b] \tag{2.14} $$

i

$$ {}_xI_b^{i\omega} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\omega)} \frac{d}{dx} \int_x^b (\theta-x)^{i\omega} f(\theta)\, d\theta, \quad x \in [a,b]. \tag{2.15} $$

Da bismo kompletirali definiciju frakcionog integro-diferenciranja za svako $\alpha \in \mathbb{C}$, ostaje da se upoznamo sa identičkim operatorom

$$ {}_aD_x^0 f := {}_aI_x^0 f = f $$

što je u saglasnosti sa (2.14).
Kao što je i očekivano, ne postoji esencijalnih razlika između integrala i izvoda imaginarnog reda. Dalje, važi analogno tvrđenje o egzistenciji i reprezentaciji izvoda u slučaju $0 < \alpha < 1$, stoga izostavljamo dokaz.

2.1.10 Lema *Neka je $f \in AC([a,b])$. Tada ${}_aD_x^{i\varphi} f$ postoji za svako x i može se predstaviti u obliku (2.7) za $\alpha = i\varphi$.*

U narednoj teoremi dajemo dovoljan uslov za postojanje necelih izvoda proizvoljnog komleksnog reda α, $\mathrm{Re}\,(\alpha) \geq 0$ u opštem slučaju (specijalni slučajevi za $0 < \alpha < 1$ i $\mathrm{Re}\,(\alpha) = 0$ su već diskutovani u lemama 2.1.6 i 2.1.10).

2.1.11 Teorema *Neka je* $Re(\alpha) \geq 0$ *i* $f \in AC^n([a,b])$, $n = [Re(\alpha)] + 1$. *Tada* ${}_aD_x^\alpha f$ *i* ${}_xD_b^\alpha f$ *postoje skoro svuda na* $[a,b]$ *i mogu se predstaviti u obliku*

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\, d\theta \tag{2.16}$$

i

$$ {}_xD_b^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^k + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\theta)}{(\theta-x)^{\alpha-n+1}}\, d\theta. \tag{2.17}$$

Dokaz. Kako je $f \in AC^n([a,b])$, imamo reprezentaciju iz leme 1.1.5 iz prvog poglavlja. Kada to zamenimo u (2.10) i stavimo

$$\varphi(\theta) = f^{(n)}(\theta), \qquad c_k = \frac{f^{(n)}(a)}{k!},$$

nakon jednostavnih transformacija dobijamo traženu jednakost.
Druga jednakost se analogno dobija. □

2.2 Veza Riman-Liuvilovih integrala i izvoda kao recipročnih operatora

Dobro je poznato iz klasične analize da su operatori diferenciranja i integracije recipročni u datom poretku, drugim rečima, uvek važi $(d/dx)\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, međutim u opštem slučaju $\int_a^x f'(t)\,dt \neq f(x)$ zbog pojavljivanja konstante $-f(a)$. Takođe, $(d/dx)^n {}_aI_x^n = f$, $n \in \mathbb{N}$, ali ${}_aI_x^n f^{(n)}(x) \neq f(x)$, $n \in \mathbb{N}$ i ${}_aI_x^n f^{(n)}$ se razlikuje od f za polinom stepena $n-1$.
Slično, imaćemo i da je ${}_aD_x^\alpha {}_aI_x^\alpha f = f$, dok ${}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f$ nije obavezno jednako sa f zbog linearne kombinacije funkcija $(x-a)^{\alpha-k}$, $k = 1, 2, \ldots [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ koje, u ovom slučaju, igraju ulogu polinoma kod frakcionog diferenciranja (videti (2.9)).

2.2.1 Teorema *Neka je* $\alpha \geq 0$. *Tada za svaku funkciju* $f \in L^1([a,b])$ *važi*

$${}_aD_x^\alpha {}_aI_x^\alpha f(x) = f(x) \qquad i \qquad {}_xD_b^\alpha {}_xI_b^\alpha f(x) = f(x)$$

skoro svuda.

Dokaz. Slično se pokazuje da tvrđenje važi kako za levi, tako i za desni Riman-Liuvilov izvod i integral pa ćemo dati dokaz samo za levi. Slučaj kada je $\alpha = 0$

trivijalno važi jer su tada oba ${}_aD_x^0$ i ${}_aI_x^0$ identički operatori.
Za $\alpha > 0$ postupak je analogan postupku u dokazu teoreme 2.1.8. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} {}_aD_x^\alpha {}_aI_x^\alpha f(x) &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\{\alpha\}} {}_aI_x^\alpha f(x) \\ &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\alpha+[\alpha]} {}_aI_x^\alpha f(x) \\ &= D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1+[\alpha]} f(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

2.2.2 Napomena Prethodna teorema važi i za funkcije $f \in L^p([a,b])$, $1 \le p \le \infty$.

Dakle, utvrdili smo da je Riman-Liuvilov izvod ${}_aD_x^\alpha$ levi inverzni operator za Riman-Liuvilov integral ${}_aI_x^\alpha$. Naravno, kao što smo već nagovestili u opštem slučaju ne možemo tvrditi da je i desni inverzni. U narednim teoremama ćemo videti kada to ipak važi, a kada ne, i kako tada izgleda reprezentacija za ${}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f$.

2.2.3 Teorema *Neka je $\alpha > 0$. Ako postoji funkcija $\varphi \in L^1([a,b])$ takva da je $f(x) = {}_aI_x^\alpha \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, tada je*

$${}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f(x) = f(x)$$

skoro svuda.

Dokaz. Dokaz jednostavno sledi iz prethodne teoreme i definicije funkcije f:

$${}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha ({}_aI_x^\alpha \varphi(x)) = {}_aI_x^\alpha ({}_aD_x^\alpha {}_aI_x^\alpha \varphi(x)) = {}_aI_x^\alpha \varphi(x) = f(x).$$

□

2.2.4 Teorema *Neka je $\alpha > 0$ i $n = [\alpha] + 1$. Neka je f funkcija takva da je ${}_aI_x^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$, tada je*

$${}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{z\to a^+} D^{n-k-1} {}_aI_z^{n-\alpha} f(z).$$

Specijalno, za $0 < \alpha < 1$ imamo

$${}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{z\to a^+} {}_aI_z^{1-\alpha} f(z).$$

Dokaz. Primetimo prvo da limes na desnoj strani postoji na osnovu pretpostavke ${}_aI_x^{n-\alpha}f \in AC^n([a,b])$ odakle sledi neprekidnost za $D^{n-1}{}_aI_x^{n-\alpha}f$, a iz ekvivalencije (1.2) imamo da postoji funkcija $\varphi \in L^1([a,b])$ takva da je

$$D^{n-1}{}_aI_x^{n-\alpha}f(x) = D^{n-1}{}_aI_x^{n-\alpha}f(a) + {}_aI_x^1\varphi(x).$$

Prethodna jednakost predstavlja diferencijalnu jednačinu reda $n-1$ po ${}_aI_x^{n-\alpha}f$ čije je rešenje dato u obliku

$${}_aI_x^{n-\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}\lim_{z\to a^+}D^k{}_aI_z^{n-\alpha}f(z) + {}_aI_x^n\varphi(x). \tag{2.18}$$

Sada primenimo ${}_aD_x^{n-\alpha}$ na obe strane prethodne jednakosti, pa na osnovu teoreme 2.2.1 sledi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_aD_x^{n-\alpha}(\cdot-a)^k}{k!}\lim_{z\to a^+}D^k{}_aI_z^{n-\alpha}f(z) + {}_aD_x^{n-\alpha}{}_aI_x^n\varphi(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_aD_x^{n-\alpha}(\cdot-a)^k}{k!}\lim_{z\to a^+}D^k{}_aI_z^{n-\alpha}f(z) + {}_aD_x^1{}_aI_x^{1-n+\alpha}{}_aI_x^n\varphi(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+\alpha-n}}{\Gamma(k+\alpha-n+1)}\lim_{z\to a^+}D^k{}_aI_z^{n-\alpha}f(z) + {}_aI_x^\alpha\varphi(x). \end{aligned}$$

Da je ${}_aD_x^{n-\alpha}(\cdot-a)^k = \frac{(x-a)^{k+\alpha-n}}{\Gamma(k+\alpha-n+1)}$ ćemo pokazati u odeljku 2.5.
Dakle,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+\alpha-n}}{\Gamma(k+\alpha-n+1)}\lim_{z\to a^+}D^k{}_aI_z^{n-\alpha}f(z) + {}_aI_x^\alpha\varphi(x). \tag{2.19}$$

Dalje, po definiciji ${}_aD_x^\alpha$ i zamenom u jednakost (2.18) dobijamo

$$\begin{aligned} {}_aI_x^\alpha{}_aD_x^\alpha f(x) &= {}_aI_x^\alpha D^n{}_aI_x^{n-\alpha}f(x) \\ &= {}_aI_x^\alpha D^n\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\cdot-a)^k}{k!}\lim_{z\to a^+}D^k{}_aI_z^{n-\alpha}f(z) + {}_aI_x^n\varphi\right](x) \\ &= {}_aI_x^\alpha D^n{}_aI_x^n\varphi(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_aI_x^\alpha D^n[(\cdot-a)^k]}{k!}\lim_{z\to a^+}D^k{}_aI_z^{n-\alpha}f(z) \\ &= {}_aI_x^\alpha\varphi(x). \end{aligned}$$

Poslednja jednakost sledi iz teoreme 2.2.1 i činjenice da se u sumi svaki sabirak anulira jer je $m > k$ za $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Sada zamenom $n-k-1$ sa k u (2.19) i iz prethodnog rezultata je

$$ {}_aI_x^\alpha {}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^\alpha \varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{z\to a^+} D^{n-k-1} {}_aI_z^{n-\alpha} f(z), $$

odakle sledi tvrđenje. □

Još jedan od bitnih rezultata klasične analize je Tejlorova teorema koja se može uopštiti i na frakcioni račun.

2.2.5 Teorema *(Tejlorova teorema) Neka je $f \in AC^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$. Tada za svako $x, y \in [a,b]$ važi*

$$ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!} D^k f(y) + {}_yI_x^n D^n f(x). $$

2.2.6 Teorema *(Frakciona Tejlorova teorema) Neka su zadovoljeni uslovi teoreme 2.2.4. Tada je*

$$ \begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \lim_{z\to a^+} {}_aI_z^{n-\alpha} f(z) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+\alpha-n}}{\Gamma(k+\alpha-n+1)} \lim_{z\to a^+} D^k {}_aI_z^{n-\alpha} f(z) + {}_aI_x^{n-\alpha} {}_aD_x^{n-\alpha} f(x). \end{aligned} $$

2.3 Frakcioni identiteti

U prethodnim odeljcima smo se upoznali sa osnovnim osobinama frakcionih integrala i izvoda, kao i sa njihovom međusobnom vezom, a sada ćemo videti još neke identitete koji, očekivano, dosta podsećaju na već dobro poznate vezane za klasične izvode i integrale.
U daljem tekstu, ako nije eksplicitno naglašeno, smatraćemo da su frakcioni integrali i izvodi dobro definisani.
Prvo ćemo diskutovati razmenu redosleda limesa i integrala.

2.3.1 Teorema *Neka je $\alpha > 0$ i neka niz neprekidnih funkcija $\{f_k\}_{n=1}^\infty$ uniformno konvergira na $[a,b]$. Tada možemo izmeniti redosled operatora frakcione integracije i granične vrednosti, tj.*

$$ ({}_aI_x^\alpha \lim_{k\to\infty} f_k)(x) = (\lim_{k\to\infty} {}_aI_x^\alpha f_k)(x). $$

Dokaz. Neka je f granica niza funkcija $\{f_k\}$. Važi da je tada i f takođe neprekidna funkcija. Sada imamo

$$\begin{aligned}
|{}_aI_x^\alpha f_k(x) - {}_aI_x^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |f_k(\theta) - f(\theta)|(x-\theta)^{\alpha-1}\, d\theta \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f_k - f\|_\infty \int_a^x (x-\theta)^{\alpha-1}\, d\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_\infty (x-a)^\alpha \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_\infty (b-a)^\alpha,
\end{aligned}$$

što uniformno konvergira ka nuli za svako $x \in [a,b]$ kad $k \to \infty$. □

2.3.2 Propozicija *Neka je f analitička na $(a-h, a+h)$ za neko $h > 0$ i neka je $\alpha > 0$. Tada je*

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{k+\alpha}}{k!(\alpha+k)\Gamma(\alpha)} D^k f(x)$$

za $a \leq x < a + h/2$ i

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha)} D^k f(a)$$

za $a \leq x < a + h$. Štaviše, ${}_aI_x^\alpha f$ je analitička na $(a, a+h)$.

Dokaz. Za dokaz prve jednakosti koristimo definiciju Riman-Liuvilovog integrala

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\theta)(x-\theta)^{\alpha-1}\, d\theta$$

i razvoj funkcije f u stepeni red u okolini tačke x. Kako je $x \in [a, a+h/2)$ red konvergira na celom intervalu na kome integralimo. Zato, iz teoreme 2.3.1 možemo da razmenimo sumu i integral i na kraju iz jednakosti za frakcioni integral stepene funkcije (detaljnije u odeljku 2.5 o elementarnim funkcijama), sledi tvrđenje.
Dokaz druge jednakosti se izvodi na sličan način, ali sada razvijamo funkciju u okolini tačke a, što nam daje konvergenciju reda na traženom intervalu.
Analitičnost za ${}_aI_x^\alpha f$ sledi iz druge jednakosti. □

Sledeća teorema govori o konvergenciji niza frakcionih integrala.

2.3.3 Teorema *Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka je $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ niz nenegativnih brojeva koji konvergira ka broju m. Tada, za svako $f \in L^p([a,b])$*

$$\lim_{k\to\infty} {}_aI_x^{m_k} f = {}_aI_x^m f$$

gde je konvergencija u smislu norme prostora $L^p([a,b])$.

Pre nego što formulišemo analogne teoreme prethodnim, a vezane za frakcione izvode, videćemo da je operator frakcionog diferenciranja linearan. Naime, ako su f_1 i f_2 dve funkcije definisane na intervalu $[a,b]$ i $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tada je

$${}_aD_x^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \cdot {}_aD_x^\alpha f_1 + c_2 \cdot {}_aD_x^\alpha f_2$$

i analogno za desni izvod

$${}_xD_b^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \cdot {}_xD_b^\alpha f_1 + c_2 \cdot {}_xD_b^\alpha f_2.$$

Dokaz sledi direktno iz definicije ${}_aD_x^\alpha$, odnosno ${}_xD_b^\alpha$.

2.3.4 Teorema *Neka je $\alpha > 0$ i neka je $\{f_k\}_{n=1}^{\infty}$ niz neprekidnih funkcija koji uniformno konvergira na $[a,b]$ tako da ${}_aD_x^\alpha f_k$ postoji za svako k. Neka niz $\{{}_aD_x^\alpha f_k\}_{k=1}^{\infty}$ uniformno konvergira na intervalu $[a+\varepsilon, b]$ Tada za svako $x \in [a,b]$ imamo*

$$(\lim_{k\to\infty} {}_aD_x^\alpha f_k)(x) = ({}_aD_x^\alpha \lim_{k\to\infty} f_k)(x).$$

Dokaz. Kako je ${}_aD_x^\alpha = D^{[\alpha]+1} {}_aI_x^{1-\{\alpha\}}$, na osnovu teoreme 2.3.1, niz $\{{}_aI_x^{1-\{\alpha\}} f_k\}_k$ uniformno konvergira pa možemo da razmenimo limes i frakcioni integral, a kako $([\alpha]+1)$-i izvod niza uniformno konvergira na svakom kompaktnom podintervalu $(a,b]$, na osnovu teoreme iz klasične analize možemo da razmenimo limes i izvod za svako $a < x \leq b$, pa sledi tvrđenje. $\square$

Sada možemo izvesti i analogone propozicije 2.3.2 i teoreme 2.3.3.

2.3.5 Propozicija *Neka je f analitička na $(a-h, a+h)$ za neko $h > 0$ i neka je $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Tada*

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(x-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} D^k f(x)$$

za $a \leq x < a + h/2$ i

$${}_aI_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} D^k f(a)$$

za $a \leq x < a + h$. Štaviše, ${}_aD_x^\alpha f$ je analitička na $(a, a+h)$.

Dokaz. Koristeći propoziciju 2.3.2 i definiciju operatora ${}_aD_x^\alpha$ imamo da važi

$$ {}_aI_x^{[\alpha]-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha - [\alpha]}{k} \frac{(x-a)^{k+[\alpha]-\alpha}}{\Gamma(k+1+[\alpha]-\alpha)} D^k f(x), $$

gde smo koristili da je $k!\Gamma(\alpha)(\alpha+k)\binom{-n}{k} = (-1)^k \Gamma(k+1+\alpha)$. Diferenciranjem jednakosti $[\alpha]$ puta po promenljivoj x, dobijamo

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha - [\alpha]}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+[\alpha]-\alpha)} D^{[\alpha]} \big[(\cdot - a)^{k+[\alpha]-\alpha} D^k f \big](x). $$

Iz klasične Lajbnicove formule (Teorema 2.3.7) sledi

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha - [\alpha]}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+[\alpha]-\alpha)} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{j} D^{[\alpha]-j} \big[(\cdot - a)^{k+[\alpha]-\alpha} \big](x) D^{k+j} f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha - [\alpha]}{k} \sum_{j=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{j} \frac{(x-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+1+j-\alpha)} D^{k+j} f(x). \end{aligned} $$

Po definiciji je $\binom{\mu}{j} = 0$ kad je $\mu \in \mathbb{N}$ i $\mu < j$, pa možemo da zamenimo gornju granicu u sumi sa ∞, a nakon smene $j = l - k$ dobijamo

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \binom{\alpha - [\alpha]}{k} \binom{[\alpha]}{l-k} \frac{(x-a)^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} D^l f(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{\alpha - [\alpha]}{k} \binom{[\alpha]}{l-k} \frac{(x-a)^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} D^l f(x) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} \frac{(x-a)^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} D^l f(x). \end{aligned} $$

□

Pre nego što formulišemo sledeću teoremu, navešćemo bitno svojstvo frakcionih integrala koje ćemo koristiti u dokazu. Naime, može se pokazati da ako je funkcija neprekidna na intervalu $[a, b]$ i važi $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^\delta)$ kad $x \to a$ za neko $\delta > 0$, onda je

$$ \lim_{k \to \infty} \| {}_aI_x^{m_k} f - {}_aI_x^m f \|_\infty = 0, \tag{2.20} $$

gde je $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ niz nenegativnih brojeva koji konvergira ka m. Dokaz jednakosti (2.20) se može naći u [6].

2.3.6 Teorema *Neka je* $f \in \mathcal{C}^m([a,b])$ *za neko* $m \in \mathbb{N}$. *Tada*

$$\lim_{\alpha \to m^-} {}_aD_x^\alpha f = D^m f$$

tačkasto na intervalu $(a,b]$. *Ako je* $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^{m+\delta})$ *kada* $x \to a^+$ *za neko* $\delta > 0$, *konvergencija je uniformna na intervalu* $[a,b]$.

Dokaz. Na osnovu pretpostavke $f \in \mathcal{C}^m([a,b])$, funkciju možemo razviti u Tejlorov red u okolini tačke a. Dakle, $f(x) = T_{m-1}[f;a](x) + R_{m-1}[f;a](x)$, pri čemu je $T_{m-1}[f;a](x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ polinom stepena $m-1$, a $R_{m-1}[f;a](x)$ ostatak. Imamo

$$\begin{aligned} {}_aD_x^\alpha f(x) - D^m f(x) &= {}_aD_x^\alpha T_{m-1}[f;a](x) - D^m T_{m-1}[f;a](x) \\ &\quad + {}_aD_x^\alpha R_{m-1}[f;a](x) - D^m R_{m-1}[f;a](x). \end{aligned}$$

Kako je $T_{m-1}[f;a](x)$ polinom $m-1$ stepena, $D^m T_{m-1}[f;a] = 0$, štaviše,

$${}_aD_x^\alpha T_{m-1}[f;a](x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}$$

(videti odeljak 2.5 pod **1.**). Sledi

$$\begin{aligned} {}_aD_x^\alpha f(x) - D^m f(x) &= D^m {}_aI_x^{m-\alpha} R_{m-1}[f;a](x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} \\ &\quad - D^m R_{m-1}[f;a](x). \end{aligned}$$

Pod pretpostavkom da je $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^m)$ čitava suma je jednaka nuli[2] jer se odgovarajući izvodi anuliraju u a.
Ostaje još da se oceni razlika ${}_aD_x^\alpha R_{m-1}[f;a] - D^m R_{m-1}[f;a]$. U tu svrhu koristimo integralnu reprezentaciju ostatka $R_{m-1}[f;a](x)$ koja ima sledeći oblik

$$R_{m-1}[f;a](x) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^x f^{(m)}(u)(x-u)^{m-1}\,du = {}_aI_x^m D^m f(x).$$

Sledi da je $D^m R_{m-1}[f;a] = D^m {}_aI_x^m D^m f = D^m f$. Za drugi sabirak, koristeći svojstvo polugrupe integralnog operatora, možemo da pišemo

$$\begin{aligned} {}_aD_x^\alpha R_{m-1}[f;a] &= D^m {}_aI_x^{m-\alpha} R_{m-1}[f;a] = D^m {}_aI_x^{m-\alpha} {}_aI_x^m D^m f \\ &= D^m {}_aI_x^m {}_aI_x^{m-\alpha} D^m f = {}_aI_x^{m-\alpha} D^m f. \end{aligned}$$

[2] Ako nemamo dodatnu pretpostavku, suma se anulira, jer kad α tačkasto konvergira ka m na $[a,b]$, tj. argument gama funkcije konvergira ka nenegativnom celom broju (a gama funkcija ima polove u nenegativnim celim brojevima), limes je jednak nuli.

Po pretpostavci je $D^m f$ neprekidno na $[a,b]$, pa tačkasta konvergencija sledi na osnovu (2.20) ako posmatramo ${}_aI_x^{m-\alpha}D^m f$ i ${}_aI_x^0 D^m f = D^m f$.
Štaviše, ako je $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^{m+\delta})$ tada je $D^m f(x) = \mathcal{O}((x-a)^{\delta})$ kad $x \to a$ pa imamo uniformnu konvergenciju na $[a,b]$, čime je dokazan drugi deo tvrđenja. □

Pored svih osobina koje važe i u klasičnom kalkulusu, kada se govori o proizvodu funkcija, situacija je drugačija. Podsetimo se prvo Lajbnicove formule za računanje "običnog" izvoda proizvoda funkcija.

2.3.7 Teorema *(Lajbnicova formula) Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $f, g \in \mathcal{C}^n([a,b])$. Tada je*

$$D^n[f \cdot g] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^k f)(D^{n-k} g).$$

Istaknimo dve bitne činjenice vezane za Lajbnicovu formulu. Prvo, formula je simetrična, što znači da možemo da menjamo redosled funkcija f i g, a da desna strana jednakosti ostane nepromenjena; drugo, da bismo odredili n-ti izvod proizvoda, potrebno je da znamo izvode do reda n svakog od činioca. Dakle, nijedan od činilaca ne mora da ima $(n+1)$-i izvod. Može se pokazati da Lajbnicova formula za levi, odnosno desni Riman-Liuvilov izvod proizvoda funkcija u opštem slučaju ne važi:

$${}_aD_x^\alpha(f \cdot g) \neq f \cdot {}_aD_x^\alpha g + {}_aD_x^\alpha f \cdot g \quad \text{i} \quad {}_xD_b^\alpha(f \cdot g) \neq f \cdot {}_xD_b^\alpha g + {}_xD_b^\alpha f \cdot g.$$

Međutim, ako pretpostavimo još neke dodatne uslove za funkcije f i g, Lajbnicova formula se može proširiti i na frakcione izvode.

2.3.8 Teorema *(Lajbnicova formula za Riman-Liuvilove izvode) Ako su funkcije f i g analitičke na $(a-h, a+h)$ za neko $h > 0$ i $\alpha > 0$ tada je*

$$\begin{aligned} {}_aD_x^\alpha[f \cdot g](x) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]} \binom{\alpha}{k} ({}_aD_x^k f)(x) \cdot ({}_aD_x^{\alpha-k} g)(x) \\ &\quad + \sum_{k=[\alpha]+1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_aD_x^k f)(x) \cdot ({}_aI_x^{k-\alpha} g)(x) \end{aligned}$$

za $a < x < a + h/2$.

Ovde vidimo da k u sumi uzima nenegativne cele vrednosti, pa smo na desnoj strani mogli pisati $D^k f$ umesto ${}_aD_x^k f$. Dalje, k prolazi kroz *sve* nenegativne brojeve i zato, da bi desna strana imala smisla potrebno je da $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$. Što se tiče funkcije g deluje da nije potreban toliko jak uslov, s obzirom na to da tražimo izvode do reda α, međutim zbog analitičnosti proizvoda, neophodno je da je i

g takođe analitička. Napomenimo još da se iz ove opštije formule može dobiti i prvobitna Lajbnicova formula jer za cele vrednosti α za koje je $k > \alpha$ binomni koeficijent $\binom{\alpha}{k}$ je jednak nuli pa se i čitava druga suma anulira.
Dokažimo sada ovu teoremu.
Dokaz. Iz propozicije 2.3.5 imamo

$$ {}_aD_x^\alpha[f\cdot g](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}D^k[f\cdot g](x). $$

Sada primenimo klasičnu Lajbnicovu formulu na $D^k[f\cdot g]$ i izmenimo redosled sumiranja pa dobijamo

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^\alpha[f\cdot g](x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}D^jf(x)D^{k-j}g(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\binom{k}{j}D^jf(x)D^{k-j}g(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}D^jf(x)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\alpha}{l+j}\frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)}\binom{l+j}{j}D^lg(x). \end{aligned} $$

Koristeći poznati identitet $\binom{\alpha}{l+j}\binom{l+j}{j} = \binom{\alpha}{j}\binom{\alpha-j}{l}$, dobijamo

$$ \begin{aligned} {}_aD_x^\alpha[f\cdot g](x) &= \sum_{j=0}^{\infty}D^jf(x)\binom{\alpha}{j}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\alpha-j}{l}\frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)}D^lg(x) \\ &= \sum_{j=0}^{[\alpha]}\binom{\alpha}{j}D^jf(x)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\alpha-j}{l}\frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)}D^lg(x) \\ &+ \sum_{j=[\alpha]+1}^{[\alpha]}\binom{\alpha}{j}D^jf(x)\sum_{l=0}^{\infty}\binom{\alpha-j}{l}\frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)}D^lg(x). \end{aligned} $$

Iz prve jednakosti iz propozicija 2.3.5 i 2.3.2 možemo zameniti unutrašnje sume. Time je tvrđenje pokazano. □

Dodajmo još da se u slučaju frakcionih izvoda može izvesti i formula za izvod složene funkcije poznatija kao Faà di Bruno-va formula, ali zbog komplikovanosti same formule, pa samim tim i njene nepraktičnosti, u radu nećemo je eksplicitno navoditi.

Takođe važi i formula za frakcionu pacijalnu integraciju (videti i propoziciju 3.1.16 u poglavlju 3) koja se direktno dokazuje razmenom integracije na jednoj od strana jednakosti.

2.3.9 Lema *Neka je* $\alpha > 0$, $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ ($p \neq 1$ *i* $q \neq 1$ *za* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$) *i* $\varphi(x) \in L^p([a,b])$ *i* $\phi(x) \in L^q([a,b])$. *Tada je*

$$\int_a^b \varphi(x)\, {}_aI_x^\alpha \psi \, dx = \int_a^b \psi(x)\, {}_xI_b^\alpha \varphi \, dx. \tag{2.21}$$

2.4 Integrali i izvodi necelog reda na beskonačnim intervalima

Frakcioni integrali dati u (2.3) i (2.4) mogu se jednostavno proširiti sa konačnih intervala $[a,b]$ na realnu polupravu $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ i ceo skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ što ćemo videti u daljem tekstu.

Neka je $x \in (0,\infty)$, tada se levi, odnosno desni Riman-Luvilovi integrali definišu respektivno na sledeći način:

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = {}_0I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\theta)^{\alpha-1} f(\theta)\, d\theta \tag{2.22}$$

i

$$(I_{-}^\alpha f)(x) = {}_xI_\infty^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (\theta-x)^{\alpha-1} f(\theta)\, d\theta, \tag{2.23}$$

a odgovarajući levi i desni izvodi

$$(D_{0+}^\alpha f)(x) = {}_0D_x^\alpha f(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n {}_0I_x^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \int_0^x \frac{f(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\, d\theta \tag{2.24}$$

i

$$(D_{-}^\alpha f)(x) = {}_xD_\infty^\alpha f(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n {}_xI_\infty^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n \int_x^\infty \frac{f(\theta)\, d\theta}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}} \tag{2.25}$$

gde je $n = [\alpha] + 1$ i $\alpha > 0$.
Izrazi $I_{0+}^\alpha f$, $I_{-}^\alpha f$ i $D_{0+}^\alpha f$, $D_{-}^\alpha f$ se u literaturi obično nazivaju *Liuvilovi levi i desni*

frakcioni integrali i *frakcioni izvodi na realnoj poluosi* $\mathbb{R}^+$.

Neka je sada $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, tada se levi, odnosno desni *Liuvilovi integrali i izvodi* definišu na sledeći način.
Integrali:

$$(I_+^\alpha f)(x) = {}_{-\infty}I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-\theta)^{\alpha-1} f(\theta)\, d\theta \tag{2.26}$$

i

$$(I_-^\alpha f)(x) = {}_xI_\infty^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (\theta-x)^{\alpha-1} f(\theta)\, d\theta. \tag{2.27}$$

Izvodi:

$$(D_+^\alpha f)(x) = {}_{-\infty}D_x^\alpha f = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n {}_{-\infty}I_x^{n-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \int_{-\infty}^{x} \frac{f(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\, d\theta, \tag{2.28}$$

i

$$(D_-^\alpha f)(x) = {}_xD_\infty^\alpha f = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n {}_xI_\infty^{n-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n \int_{x}^{\infty} \frac{f(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\, d\theta, \tag{2.29}$$

gde je $n = [\alpha] + 1$ i $\alpha > 0$.

Specijalno, za $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ je

$$(D_+^0 f)(x) = (D_-^0 f)(x) = f(x)$$

i

$$(D_+^n f)(x) = f^{(n)}(x), \qquad (D_-^n f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x),$$

gde je $f^{(n)}(x)$ običan n-ti izvod funkcije f.
Za $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\mathrm{Re}\,(\alpha) = 0$ imamo Liuvilove izvode imaginarnog reda i definišu se analogno Riman-Liuvilovim izvodima.
Možemo primetiti da su sve definicije analogne odgovarajućim definicijama na konačnim intervalima pa važe i analogna tvrđenja za svojstvo polugrupe integrala, zatim frakcioni izvod je levi inverzni operator za frakcioni integral istog reda i naravno, važi formula za frakcionu parcijalnu integraciju, stoga ćemo ih samo navesti bez dokaza.

2.4.1 Teorema *Neka je* $\alpha, \beta > 0$, $p \geq 1$ *i* $\alpha + \beta \geq 1/p$. *Ako je* $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ (*odnosno* $f \in L^p(\mathbb{R})$), *tada važi*

$$(I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\beta} f)(x), \qquad (I_{+}^{\alpha} I_{+}^{\beta} f)(x) = (I_{+}^{\alpha+\beta} f)(x)$$

i

$$(I_{-}^{\alpha} I_{-}^{\beta} f)(x) = (I_{-}^{\alpha+\beta} f)(x).$$

2.4.2 Teorema *Neka je* $\alpha \geq 0$. *Tada, za svaku funkciju* $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ (*odnosno* $f \in L^1(\mathbb{R})$) *važi*

$$(D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f)(x) = f(x), \qquad (D_{+}^{\alpha} I_{+}^{\alpha} f)(x) = f(x)$$

i

$$(D_{-}^{\alpha} I_{-}^{\alpha} f)(x) = f(x)$$

skoro svuda.

2.4.3 Teorema *Neka je* $\alpha > 0$. *Tada, za "dovoljno dobre" funkcije* φ, ψ *i* f, g *važe sledeće relacije za frakcionu parcijalnu integraciju*

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)(I_{0+}^{\alpha}\psi)(x)\,dx = \int_0^{\infty} \psi(x)(I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)\,dx,$$

$$\int_0^{\infty} f(x)(D_{0+}^{\alpha}g)(x)\,dx = \int_0^{\infty} g(x)(D_{-}^{\alpha}f)(x)\,dx$$

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_{+}^{\alpha}\psi)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(D_{+}^{\alpha}g)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(D_{-}^{\alpha}f)(x)\,dx.$$

2.4.4 Napomena U ovom odeljku smo radili uz pretpostavku da odgovarajući integrali konvergiraju u beskonačnosti. Međutim, nekad se frakcioni integrali mogu definisati i opštije uz uslovnu konvergenciju tako da je

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-\theta)^{\alpha-1} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \int_{x-N}^{x} (x-\theta)^{\alpha-1} f(\theta)\,d\theta,$$

ali se tom problematikom ovde nećemo detaljnije baviti.

2.5 Integrali i izvodi necelog reda elementarnih funkcija

Posmatrajmo integrale i izvode funkcija f na intervalu $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$.

1. Neka je $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ ili $f(x) = (b-x)^{\beta-1}$ i neka su $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ i $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$. Tada važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
{}_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\,(x-a)^{\beta+\alpha-1},\\
{}_aD_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\,(x-a)^{\beta-\alpha-1},\\
{}_xI_b^\alpha (b-x)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\,(b-x)^{\beta+\alpha-1},\\
{}_xD_b^\alpha (b-x)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\,(x-a)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Pokažimo sada prve dve jednakosti. Druge dve se dobijaju analognim postupkom.

$${}_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\theta)^{\alpha-1}(\theta-a)^{\beta-1}\,d\theta.$$

Integral rešavamo kao prilikom dobijanje Ojlerove formule (2.9)

$$\begin{aligned}
{}_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\theta)^{\alpha-1}(\theta-a)^{\beta-1}\,d\theta\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} (x-z-a)^{\alpha-1}z^{\beta-1}\,dz\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} (x-a)^{\alpha-1}\Big(1-\frac{z}{x-a}\Big)^{\alpha-1}z^{\beta-1}\,dz\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{1} (x-a)^{\alpha-1}(1-\xi)^{\alpha-1}\xi^{\beta-1}(x-a)^{\beta-1}(x-a)\,d\xi\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,(x-a)^{\beta+\alpha-1}\int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1}\xi^{\beta-1}\,d\xi\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,(x-a)^{\beta+\alpha-1}B(\beta,\alpha)\\
&= (*)
\end{aligned}$$

$$(*) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,(x-a)^{\beta+\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}$$

Dakle, ${}_aI_x^\alpha(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\,(x-a)^{\beta+\alpha-1}$.

Drugu jednakost ćemo izvesti direktno koristeći definiciju (2.10).
Neka je $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^\alpha(x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{(\theta-a)^{\beta-1}}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_0^{x-a} z^{\beta-1}(x-z-a)^{n-\alpha-1}dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_0^{x-a} z^{\beta-1}(x-a)^{n-\alpha-1}\left(1-\frac{z}{x-a}\right)^{n-\alpha-1} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_0^{1} \xi^{\beta-1}(x-a)^{\beta+n-\alpha-1}(1-\xi)^{n-\alpha-1}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n+(\beta-\alpha-1)} \int\limits_0^{1} (1-\xi)^{n-\alpha-1}\xi^{\beta-1}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\,(n+\beta-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta+\alpha-1}B(\beta,n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\,(x-a)^{\beta+\alpha-1}.
\end{aligned}$$

U specijalnom slučaju, kad je stepen funkcije prirodan broj k imamo

$${}_aI_x^\alpha(x-a)^k = \frac{k!}{\Gamma(k+1+\alpha)}\,(x-a)^{k+\alpha}$$

$${}_aD_x^\alpha(x-a)^k = \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)}\,(x-a)^{k-\alpha}.$$

Već smo na samom početku zaključili da je funkcija $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}$ tzv. stacionarna funkcija za odgovarajući Riman-Liuvilov izvod, međutim, može se pokazati da važi i opštiji rezultat, odnosno

$${}_aD_x^\alpha(x-a)^{\alpha-k} = 0, \qquad k = 1,\dots,n$$

$${}_xD_b^\alpha(b-x)^{\alpha-k} = 0, \qquad k = 1,\dots,n$$

što zapravo sledi na osnovu osobine da je $\Gamma(k) = \pm\infty$ za $k = 0, 1, \ldots$.

2. Posmatrajmo funkciju $f(x) = 1$.
Zamenom u definiciju (2.3) frakcionog integrala i jednostavnim računom dobijamo

$$ {}_aI_x^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x (x-\theta)^{\alpha-1}\, d\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\, (x-a)^\alpha. $$

Naravno, ovu jednakost lako možemo izvesti i iz rezultata pod **1.** ako uzmemo $\beta = 1$. Tako dobijamo i mnogo bitniji zaključak vezan za frakcioni izvod koji smo već naveli u odeljku 2.1, a to je da je frakcioni izvod konstantne funkcije $f(x) = 1$, pa i svake druge kontantne funkcije, različit od nule tj.

$$ {}_aD_x^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, c\,(x-a)^{-\alpha} \neq 0. $$

3. Posmatrajmo sada opštiji slučaj kad je $f(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$. Rešavajući integral analogno prethodnim dobijamo

$$ \begin{aligned} & {}_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1} = \\ = \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, (x-a)^{\alpha+\beta-1}(b-a)^{\gamma-1} \int\limits_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1}\xi^{\beta-1}\Big(1 - \frac{x-a}{b-a}\,\xi\Big)^{\gamma-1}\, d\xi \\ = \;& (b-a)^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, (x-a)^{\alpha+\beta-1} {}_2F_1\Big(1-\gamma, \beta; \alpha+\beta; \frac{x-a}{b-a}\Big), \end{aligned} $$

gde je

$$ {}_2F_1\Big(1-\gamma, \beta; \alpha+\beta; \frac{x-a}{b-a}\Big) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1}\xi^{\beta-1}\Big(1 - \frac{x-a}{b-a}\,\xi\Big)^{\gamma-1}\, d\xi $$

Ojlerova integralna reprezentacija Gausove hipergeometrijske funkcije definisane u odeljku 1.3.4. Slično se može izvesti i za funkciju $f(x) = (x-a)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}$ gde je $c < a$

$$ {}_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1} = (a-c)^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} {}_2F_1\Big(1-\gamma, \beta; \alpha+\beta; \frac{a-x}{a-c}\Big). $$

4. Neka je $f(x) = (x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$, $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$. Tada je

$$ {}_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1}\ln(x-a) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}[\psi(\beta) - \psi(\beta+\alpha) + \ln(x-a)], $$

gde je $\psi(z)$ Ojlerova psi-funkcija definisana sa (1.22). Zaista, nakon smene promenljivih $\theta = a + z(x-a)$ u integralu dobijamo

$$\begin{aligned} {}_aI_x^\alpha (x-a)^{\beta-1}\ln(x-a) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}\int\limits_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}\ln z(x-a)\,dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}[A + B\ln(x-a)] \end{aligned}$$

gde je

$$B = \int\limits_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}\,dz = B(\beta,\alpha), \quad A = \int\limits_0^1 \frac{z^{\beta-1}\ln z}{(1-z)^{1-\alpha}}\,dz$$

i A se dobija diferenciranjem po β jednakosti $B = B(\beta,\alpha)$.

5. Za funkciju $f(x) = \frac{\cos\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}$, koristeći Tejlorov razvoj funkcije $\cos x$ i Poasonovu integralnu reprezentaciju Beselove funkcije $J_\nu(z)$ imamo da je

$${}_aI_x^\alpha \frac{\cos\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}} = 2^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}(x-a)^{\frac{2\alpha-1}{4}}J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\sqrt{x-a}), \quad Re(\alpha) \geq 0.$$

Slično možemo izvesti i sledeću jednakost

$${}_aI_x^\alpha (x-a)^{\alpha-1}\cos Ax - a = \sqrt{\pi}\Big(\frac{x-a}{A}\Big)^{\alpha-1/2}\cos\frac{A(x-a)}{2}J_{\alpha-\frac{1}{2}}\Big(\frac{A(x-a)}{2}\Big).$$

Neka je sada interval $(0,\infty)$ ili ceo skup $\mathbb{R}$.

6. Neka je $f(x) = x^{\beta-1}$. Tada se jednostavnom zamenom $a = 0$ i $\beta = 0$ u **1.** dobija

$${}_0I_x^\alpha x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\,x^{\beta+\alpha-1}, \quad \mathrm{Re}\,(\beta) > 0$$

i

$${}_0D_x^\alpha x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\,x^{\beta-\alpha-1}, \quad \mathrm{Re}\,(\beta) > 0.$$

Zatim,

$${}_xI_\infty^\alpha x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\,x^{\beta+\alpha-1}, \quad \mathrm{Re}\,(\alpha+\beta) < 1$$

i

$${}_xD_\infty^\alpha x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\,x^{\beta-\alpha-1}, \quad \mathrm{Re}\,(\alpha+\beta-[\mathrm{Re}\,(\alpha)]) < 1.$$

7. Neka je $f(x) = e^{-\lambda x}$ ili $f(x) = e^{\lambda x}$, i $\mathrm{Re}\,(\lambda) > 0$.
Ako je $\mathrm{Re}\,(\alpha) \geq 0$, važe sledeće jednakosti za Liuvilove integrale i izvode:

$$ {}_xI^\alpha_\infty e^{-\lambda x} = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x} \quad \text{i} \quad {}_xD^\alpha_\infty e^{-\lambda x} = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} $$

i

$$ {}_{-\infty}I^\alpha_x e^{\lambda x} = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda x} \quad \text{i} \quad {}_{-\infty}D^\alpha_x e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x}, $$

što se jednostavno pokazuje parcijalnom integracijom.

8. Neka su $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$ i $\mathrm{Re}\,(\mu) > 0$. Tada važe sledeće relacije vezane za Mitag-Leflerovu funkciju:

$$ (I^\alpha_{0+}\, x^{\beta-1} E_{\mu,\beta}(\lambda x^\mu))(x) = x^{\alpha+\beta-1} E_{\mu,\alpha+\beta}(\lambda x^\mu) $$

i

$$ (D^\alpha_{0+}\, x^{\beta-1} E_{\mu,\beta}(\lambda x^\mu))(x) = x^{\alpha-\beta-1} E_{\mu,\alpha-\beta}(\lambda x^\mu). $$

Specijalno, ako je $\mu = \alpha$, prethodna formula se može zapisati na sledeći način

$$ (D^\alpha_{0+}\, x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^\alpha))(x) = \frac{x^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \lambda x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^\alpha). $$

Ako je $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ i $\mathrm{Re}\,(\beta) > [\mathrm{Re}\,(\alpha)] + 1$, tada je

$$ (D^\alpha_{-}\, x^{\alpha-\beta} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{-\alpha}))(x) = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \lambda x^{-\alpha-\beta} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{-\alpha}). $$

2.6 Transformacije frakcionih integrala i izvoda

Integralne tranformacije su od velikog značaja u rešavanju diferencijalnih jednačina koje u sebi sadrže frakcione operatore. Naime, često neke diferencijalne jednačine ne možemo rešiti klasičnim postupcima. Tada, datu jednačinu transformacijama pretvorimo u algebarsku jednačinu koju možemo da rešimo, pa odgovarajućom inverznom transformacijom tako dobijenog rešenja nalazimo rešenje početne jednačine.
U odeljku 1.2 smo naveli osnove Furijeove, Laplasove i Melinove integralne transformacije. Ovde ćemo pokazati kako one izgledaju primenjene na frakcione integrale i izvode.

2.6.1 Furijeova transformacija

Pre nego sto definišemo Furijeovu transformaciju frakcionih integrala pokažimo sledeću pomoćnu jednakost.

$$\int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-z\theta}\, d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha}, \quad z \neq 0. \tag{2.30}$$

Za $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ imamo da je $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$, i $0 < \mathrm{Re}\,(\alpha) < 1$ za $\mathrm{Re}\,(z) = 0$. Košijeva glavna vrednost funkcije z^α, analitičke u desnoj poluravni, se bira tako da je z^α pozitivno za $z = x > 0$ za realno α.
Jednakost važi na osnovu definicije gama funkcije kad je $z = x > 0$ pa sledi da važi i kada je $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. Posmatrajmo sada granični slučaj, kad je $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ i $z \neq 0$. Tada imamo

$$\int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-ix\theta}\, d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)}{(ix)^\alpha}, \quad 0 < \mathrm{Re}\,(\alpha) < 1,\, x \neq 0,$$

gde nam uslov $\mathrm{Re}\,(\alpha) < 1$ obezbeđuje konvergenciju u beskonačnosti. Uvedimo smenu $ix\theta = s$:

$$\int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-ix\theta}\, d\theta = (ix)^{-\alpha} \int_{\mathcal{L}} s^{\alpha-1} e^{-s}\, ds,$$

gde je $\mathcal{L}$ imaginarna poluosa $(0, i\infty)$ za $x > 0$ i $(-i\infty, 0)$ za $x < 0$. Kako se $|e^{-s}|$ anulira u desnoj poluravni kad $s \to \infty$, može se pokazati da je tada $\int_{\mathcal{L}} s^{\alpha-1} e^{-s}\, ds = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(\alpha)$, odakle sledi jednakost (2.30).

2.6.1 Teorema *Neka je $0 < Re\,(\alpha) < 1$ i $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tada je Furijeova transformacija integrala $I_+^\alpha f$ definisana sa*

$$(\mathcal{F} I_+^\alpha f)(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{(i\xi)^\alpha}. \tag{2.31}$$

Dokaz. Koristeći jednakost (1.6) dobijamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{F} I_+^\alpha f(x))(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi} - 1}{ix}\, dx\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-\theta)^{\alpha-1} f(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, d\theta \int_\theta^\infty \frac{e^{ix\xi} - 1}{ix} (x-\theta)^{\alpha-1}\, dx.\end{aligned}$$

Promena redosleda integracije je moguća na osnovu Fubinijeve teoreme 1.1.3. Sada diferenciranjem i uvođenjem smene $x-\theta=s$, dobijamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}I_+^\alpha f(x))(\xi) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,d\theta\int\limits_{\theta}^{\infty} e^{ix\xi}(x-\theta)^{\alpha-1}\,dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,e^{i\theta\xi}\,d\theta\int\limits_{0}^{\infty} e^{is\xi}(s)^{\alpha-1}\,ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\widehat{f}(\xi)\frac{\Gamma(\alpha)}{(i\xi)^\alpha}.\end{aligned}$$

Poslednja jednakost sledi iz (2.30), pa otuda sledi tvrđenje. □

2.6.2 Napomena Primetimo da je jednakost (2.31) definisana u slučaju $0<\mathrm{Re}\,(\alpha)<1$ i ne može se proširiti i na vrednosti $\mathrm{Re}\,(\alpha)\geq 1$ u uobičajenom obliku, jer leva strana (2.31) ne mora biti definisana, čak ni za glatke funkcije. Zaista, ako je $f\in\mathcal{C}^\infty$ i $\alpha=1$, imamo $(I_+^1 f)(x)=\int_{-\infty}^x f(\theta)\,d\theta$, pa $(I_+^1 f)(x)\to const$ kad $x\to+\infty$ i Furijeova transformacija $\mathcal{F}I_+^1 f(x)$ ne postoji u klasičnom smislu. Međutim, jednakost se ipak može uopštiti i za vrednosti α sa osobinom $\mathrm{Re}\,(\alpha)>0$ gde su funkcije elementi tzv. Lizorkinovog prostora funkcija. Za više detalja videti [20].

Koristeći (2.31) i formulu (1.9) za Furijeovu transformaciju izvoda celog reda funkcije, dobijamo Furijeovu transformaciju frakcionih izvoda

$$(\mathcal{F}D_+^\alpha f)(\xi)=\widehat{f}(\xi)(-i\xi)^\alpha,\qquad \mathrm{Re}\,(\alpha)\geq 0. \tag{2.32}$$

Furijeova transformacija se uglavnom koristi pri rešavanju diferencijalnih jednačina koje u sebi sadrže frakcione izvode po prostornoj promenljivoj.

Navedimo još i sinusnu i kosinusnu Furijeovu transformaciju frakcionih integrala $I_{0+}^\alpha f$ i $I_-^\alpha f$, pod pretpostavkom da je $0<\alpha<1$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_c I_{0+}^\alpha f)(\xi) &= \xi^{-\alpha}\Big(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_c f(\xi)-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_s f(\xi)\Big),\\ (\mathcal{F}_s I_{0+}^\alpha f)(\xi) &= \xi^{-\alpha}\Big(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_c f(\xi)+\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_s f(\xi)\Big)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_c I_{-}^\alpha f)(\xi) &= \xi^{-\alpha}\Big(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_c f(\xi)+\sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_s f(\xi)\Big),\\ (\mathcal{F}_s I_{0+}^\alpha f)(\xi) &= \xi^{-\alpha}\Big(-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_c f(\xi)+\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\mathcal{F}_s f(\xi)\Big).\end{aligned}$$

2.6.2 Laplasova transformacija

Koristeći konvoluciju definisanu u (1.11), integral $I^{\alpha}_{0+}f$ se može predstaviti u obliku

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x) = \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(x), \qquad \mathrm{Re}\,(\alpha) > 0, \tag{2.33}$$

gde je

$$x_+^{\alpha-1} = \begin{cases} x^{\alpha-1}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Kako Laplasova transformacija zadovoljava konvolucionu teoremu (1.17) možemo izvesti sledeći rezultat za Laplasovu transformaciju frakcionih integrala

$$(\mathcal{L}I^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^{-\alpha}(\mathcal{L}f)(s). \tag{2.34}$$

U slučaju operatora $I^{\alpha}_{-}f$ Laplasova transformacija dovodi do komplikovanije funkcije koja u jezgru sadrži Gausovu hipergeometrijsku funkciju ${}_1F_1(a;c;z)$ i stoga je nećemo navoditi, a može se naći u [20].
Dokažimo sada jednakost (2.34).

2.6.3 Teorema *Neka je Re$\,(\alpha) > 0$ i $f \in L^1((0,b))$, $b > 0$ i neka važi*

$$|f(x)| \le Ae^{p_0 x}, \qquad 0 < b < x,$$

gde su $A > 0$ i $p_0 > 0$ konstante. Tada je

$$(\mathcal{L}I^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^{-\alpha}(\mathcal{L}f)(s),$$

za Re$\,(s) > p_0$.

Dokaz. Pokažimo prvo da je Laplasova transformacija dobro definisana. Neka je $x > b+1$ i ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je α realan broj. Tada je

$$\begin{aligned} |(I^{\alpha}_{0+}f)(x)| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (x-\theta)^{\alpha-1}|f(\theta)|\,d\theta + \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_b^x (x-\theta)^{\alpha-1}e^{p_0\theta}\,d\theta \\ &\le C_1 x^{\max\{0,\alpha-1\}} + \frac{A\,e^{p_0 x}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-b}(s)^{\alpha-1}e^{-p_0 s}\,ds \\ &\le C_1 x^{\max\{0,\alpha-1\}} + C_2\,e^{p_0 x}, \end{aligned}$$

i kako važi da iz $f \in L^1((0,b))$ sledi $I^{\alpha}_{0+}f \in L^1((0,b))$, možemo primeniti Laplasovu transformaciju na $I^{\alpha}_{0+}f$. Sada jednostavnim računanjem, uz korišćenje Fubinijieve teoreme 1.1.3 i već dokazane jednakosti (2.30), sledi tvrđenje. □

U sledećoj teoremi dajemo dovoljan uslov za postojanje Laplasove transformacije frakcionih izvoda.

2.6.4 Teorema *Neka važe uslovi prethodne teoreme i neka je* $f \in AC^n([0,b])$, $n = [Re\,(\alpha)] + 1$ *i* $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Tada je*

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s), \tag{2.35}$$

za $Re\,(s) > p_0$.

Dokaz. Kako je $(D^{\alpha}_{0+}f)(x) = (d/dx)^n(I^{n-\alpha}_{0+}f)(x)$ i iz pretpostavke $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, sledi da je i $(d/dx)^k(I^{n-\alpha}_{0+}f)(x) = 0$ za $x = 0$ i $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Sada, koristeći prethodnu teoremu i jednakost (1.18) koja glasi:

$$(\mathcal{L}\,D^n f)(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(D^k f)(0),$$

dobijamo

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^n s^{-(n-\alpha)}(\mathcal{L}f)(s),$$

što je i trebalo pokazati. □

Laplasova transformacija frakcionih izvoda se upotrebljava pri rešavanju problema u kojima figurišu frakcioni izvodi po vremenskoj promenljivoj.

2.6.5 Napomena Iz jednakosti (2.34) i koristeći inverznu Laplasovu transformaciju možemo izvesti sledeću reprezentaciju operatora $I^{\alpha}_{0+}f$:

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x) = \mathcal{L}^{-1}x^{-\alpha}\mathcal{L}f(x).$$

2.6.3 Melinova transformacija

Melinova transformacija Liuvilovih frakcionih integrala $I^{\alpha}_{0+}f$ i $I^{\alpha}_{-}f$ i frakcionih izvoda $D^{\alpha}_{0+}f$ i $D^{\alpha}_{-}f$ je data u sledećim teoremama.

2.6.6 Teorema *Neka je* $Re\,(\alpha) > 0$, $s \in \mathbb{C}$ *i* $f(t)t^{s+\alpha-1} \in L^1((0,\infty))$.

1. *Ako je* $Re\,(s) < 1 - Re\,(\alpha)$, *tada*

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{0+}f)(s) = \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\,(\mathcal{M}f)(s+\alpha), \quad Re\,(s+\alpha) < 1. \tag{2.36}$$

2. *Ako je* $Re\,(s) > 0$, *tada*

$$(\mathcal{M}I^{\alpha}_{-}f)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}\,(\mathcal{M}f)(s+\alpha). \tag{2.37}$$

Dokaz je potpuno analogan dokazu teoreme 2.6.3.

2.6.7 Teorema *Neka je* $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $f(t)t^{s-\alpha-1} \in L^1((0,\infty))$.

1. *Ako je* $Re(s) < 1 + Re(\alpha)$, $s \in \mathbb{C}$ *i važe sledeći uslovi*

$$\lim_{t\to 0^+} \left[t^{s-k-1}(I_{0+}^{n-\alpha} f)(t)\right] = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

i

$$\lim_{t\to\infty} \left[t^{s-k-1}(I_{0+}^{n-\alpha} f)(t)\right] = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1,$$

tada je

$$(\mathcal{M}D_{0+}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\,(\mathcal{M}f)(s-\alpha), \quad Re(s-\alpha) < 1. \tag{2.38}$$

2. *Ako je* $Re(s) > 0$ *i važe sledeći uslovi*

$$\lim_{t\to 0^+} \left[t^{s-k-1}(I_{-}^{n-\alpha} f)(t)\right] = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

i

$$\lim_{t\to\infty} \left[t^{s-k-1}(I_{-}^{n-\alpha} f)(t)\right] = 0, \quad k = 0,1,\dots,n-1,$$

tada je

$$(\mathcal{M}D_{-}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}\,(\mathcal{M}f)(s-\alpha). \tag{2.39}$$

Ako je $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ i $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$, a uslovi prethodne teoreme nisu zadovoljeni, tj. odgovarajući limesi nisu jednaki nuli, tada se mogu izvesti i opštije formule od (2.38) i (2.39) i one glase:

$$(\mathcal{M}D_{0+}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\,(\mathcal{M}f)(s-\alpha) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+k-s)}{\Gamma(1-s)} \left[t^{s-k-1}(I_{0+}^{n-\alpha} f)(t)\right]_0^\infty$$

i

$$(\mathcal{M}D_{-}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}\,(\mathcal{M}f)(s-\alpha) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-k)} \left[t^{s-k-1}(I_{-}^{n-\alpha} f)(t)\right]_0^\infty.$$

Specijalno, kada je $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ imamo

$$(\mathcal{M}D_{0+}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\,(\mathcal{M}f)(s-\alpha) + \left[t^{s-1}(I_{0+}^{1-\alpha} f)(t)\right]_0^\infty$$

i

$$(\mathcal{M}D_{-}^{\alpha}f)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}\,(\mathcal{M}f)(s-\alpha) + \left[t^{s-1}(I_{-}^{1-\alpha}f)(t)\right]_{0}^{\infty}.$$

Za kraj dajemo vezu Liuvilovih operatora frakcione integracije sa operatorima translacije τ_h i dilatacije Π_λ definisanih u (1.7) i (1.8). Za "dovoljno dobre" funkcije važe sledeće jednakosti:

$$\tau_h I_{0+}^{\alpha} f = I_{h+}^{\alpha} \tau_h f \quad \text{i} \quad \tau_h I_{-}^{\alpha} f = I_{-}^{\alpha} \tau_h f, \quad \alpha > 0,\, h \in \mathbb{R},$$

i

$$\Pi_\lambda I_{0+}^{\alpha} f = \lambda^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} \Pi_\lambda f \quad \text{i} \quad \Pi_\lambda I_{-}^{\alpha} f = \lambda^{\alpha} I_{-}^{\alpha} \Pi_\lambda f, \quad \alpha > 0,\, \lambda > 0.$$

Glava 3

Kaputovi izvodi

Riman-Liuvilovi izvodi i integrali su odigrali značajnu ulogu u razvoju teorije frakcionog diferenciranja i integracije kao i primene u teorijskoj matematici (u rešavanju običnih diferencijalnih jednačina, definisanju novih klasa funkcija, sumiranju redova, itd.). Međutim, kako se ispostavilo, pojavio se veliki nedostatak pri pokušaju modeliranja realnih problema u fizici, posebno u mehanici i teoriji viskoelastičnosti, gde se frakcione diferencijalne jednačine koriste u opisivanju svojstava materijala. Zato se uvodi nešto drugačiji pristup koji je ustanovio M. Kaputo, pa otuda i naziv Kaputovi izvodi.

3.1 Definicija i osnovna svojstva

Postoji više pristupa definisanju Kaputovih izvoda u zavisnosti od autora. Sledeća definicija koristi Riman-Liuvilove izvode i može se naći u knjigama [11] i [6].
Neka su ${}_aD_x^\alpha f$ i ${}_xD_b^\alpha f$ Riman-Liuvilovi izvodi reda $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ na $[a,b]$ definisani u (2.10) i (2.11) respektivno.

3.1.1 Definicija *Neka je* $Re\,(\alpha) > 0$ *i* $f \in AC^n([a,b])$, $n = [Re\,(\alpha)] + 1$. *Tada se levi Kaputov izvod reda* α *funkcije* f, *u oznaci* ${}_a^CD_x^\alpha f$ *definiše kao*

$$ {}_a^CD_x^\alpha f(x) = {}_aD_x^\alpha \Big[f(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\theta - a)^k \Big](x), \quad x \in [a,b], \tag{3.1} $$

dok se desni Kaputov izvod reda α *funkcije* f, *u oznaci* ${}_x^CD_b^\alpha f$ *definiše kao*

$$ {}_x^CD_b^\alpha f(x) = {}_xD_b^\alpha \Big[f(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b - \theta)^k \Big](x), \quad x \in [a,b]. \tag{3.2} $$

Ovaj koncept Kaputovih izvoda se pojavljuje u radovima više matematičara, uključujući i Kaputa, a mogu se naći i u veoma starim spisima Liuvila, ali po dogovoru nose naziv Kaputa.

Koristeći definiciju (2.10) Riman-Liuvilovih izvoda i parcijalnu integraciju dobijamo sledeću interpretaciju Kaputovih izvoda:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha f(x) \quad &= \quad \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\Bigg(-\frac{(x-\theta)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big[f(\theta)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\theta-a)^k\Big]\Bigg|_{\theta=a}^{x} \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-\theta)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\frac{d}{d\theta}\Big[f(\theta)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\theta-a)^k\Big]\,d\theta\Bigg) = (*) \end{aligned}$$

Prvi sabirak se očigledno anulira, pa je prethodni izraz jednak sledećem

$$\begin{aligned} (*) \quad &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{n-1}\int_a^x (x-\theta)^{n-\alpha-1}\Big[f'(\theta)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(\theta-a)^{k-1}\Big]\,d\theta \\ = \quad &\cdots = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-\theta)^{n-\alpha-1}\Big[f^{(n-1)}(\theta)-f^{(n-1)}(a)\Big]\,d\theta, \end{aligned}$$

odnosno, dobijamo da se Kaputov izvod može zapisati u obliku

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\,d\theta.$$

Slično se izvodi relacija i za desni Kaputov izvod.
Prethodna jednakost se često uzima za definiciju Kaputovih izvoda i uvedena je od strane Kaputa, a može se naći u [3] i [4], stoga dajemo i tu definiciju.

3.1.2 Definicija *Neka je $f \in AC^n([a,b])$ i $n-1 \leq \alpha < n$. Levi Kaputov izvod reda α funkcije f, u oznaci ${}_a^C D_x^\alpha f$, se definiše kao*

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\,d\theta, \quad x \in [a,b]. \tag{3.3}$$

Desni Kaputov izvod reda α, u oznaci ${}_x^C D_b^\alpha f$, se definiše kao

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b \frac{(-f)^{(n)}(\theta)}{(\theta-x)^{\alpha-n+1}}\,d\theta, \quad x \in [a,b]. \tag{3.4}$$

Obe definicije Kaputovih izvoda se podjednako koriste.

3.1.3 Napomena Iz prethodne definicije i jednakosti (2.10), odnosno (2.11), možemo zaključiti da je Kaputov izvod ${}_a^C D_x^\alpha$, odnosno ${}_x^C D_b^\alpha$ funkcije f jednak Riman-Liuvilovom integralu reda $n-\alpha$ funkcije $f^{(n)}$, tj.

$$ {}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x), $$

odnosno,

$$ {}_x^C D_b^\alpha f(x) = (-1)^n {}_x I_b^{n-\alpha} f^{(n)}(x). $$

Sada trivijalno sledi da kada je $\alpha = n \in \mathbb{N}$, Kaputov izvod postaje "običan" izvod, tj.

$$ {}_a^C D_x^n f(x) = f^{(n)}(x) \quad \text{i} \quad {}_x^C D_b^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x). $$

Veza Kaputovih i Riman-Liuvilovih izvoda se može izraziti sledećom propozicijom.

3.1.4 Propozicija *Neka je $f \in AC^n([a,b])$ i $n-1 \leq \alpha < n$. Tada važi*

$$ {}_a D_x^\alpha f(x) = {}_a^C D_x^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \tag{3.5} $$

i

$$ {}_x D_b^\alpha f(x) = {}_x^C D_b^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(b). \tag{3.6} $$

Dokaz. Pokažimo jednakost (3.5), (3.6) se dokazuje analogno. Koristeći definiciju levog Kaputovog izvoda (3.1) i **1.** iz odeljka 2.5 jednostavno dobijamo

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha f(x) &= {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} {}_x D_b^\alpha (\cdot - a)^k (x) \\ &= {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}, \end{aligned} $$

odakle sledi tvrđenje. □

Direktna posledica prethodne propozicije je sledeća lema.

3.1.5 Lema *Neka važe uslovi Propozicije 3.1.4. Tada je*

$$ {}_a^C D_x^\alpha f = {}_a D_x^\alpha f \quad \text{ako i samo ako je} \quad f^{(k)}(a) = 0, $$

odnosno

$$ {}_x^C D_b^\alpha f = {}_x D_b^\alpha f \quad \text{ako i samo ako je} \quad f^{(k)}(b) = 0, $$

za $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

U opštem slučaju, Riman-Liuvilov i Kaputov frakcioni izvod se ne poklapaju:

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]} {}_aI_x^{1-\{\alpha\}} f(x) \neq {}_aI_x^{1-\{\alpha\}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]} f(x) = {}_a^CD_x^\alpha f(x), $$

i slično za desne izvode, što sledi iz napomene 3.1.3.
Nasuprot Riman-Liuvilovim, Kaputovi izvodi zadovoljavaju sledeću jednakost

$$ {}_a^CD_x^\alpha c = {}_x^CD_b^\alpha c = 0, \quad c \in \mathbb{R}. $$

Dakle, Kaputov izvod konstantne funkcije jednak je nuli što, kako smo već pokazali, kod Riman-Liuvilovih nije slučaj. Takođe važe i sledeće jednakosti za Kaputov izvod funkcija $(x-a)^{\beta-1}$ i $(b-x)^{\beta-1}$ i dosta su slične odgovarajućim Riman-Liuvilovim:

$$ {}_a^CD_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\,(x-a)^{\beta-1}, $$
$$ {}_x^CD_b^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\,(b-x)^{\beta-1}, $$

kada je $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$.

Kada govorimo o kompoziciji Riman-Liuvilovog integralnog i Kaputovog diferencijalnog operatora, dobijamo da je Kaputov izvod takođe levi inverzni za Riman-Liuvilov integral, ali ne i desni.

3.1.6 Teorema *Neka je $f \in \mathcal{C}([a,b])$ i $\alpha \neq 0$. Tada je*

$$ {}_a^CD_x^\alpha\, {}_aI_x^\alpha f(x) = f(x) \quad i \quad {}_x^CD_b^\alpha\, {}_xI_b^\alpha f(x) = f(x), $$

za $x \in [a,b]$.

Dokaz. Označimo sa $\phi(x) = {}_aI_x^\alpha f(x)$. Može se pokazati da je tada $D^k\phi(a) = 0$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, gde je $n = [\alpha] + 1$, pa koristeći prethodnu lemu imamo

$$ {}_a^CD_x^\alpha\, {}_aI_x^\alpha f(x) = {}_a^CD_x^\alpha \phi(x) = {}_aD_x^\alpha \phi(x). $$

Sada, na osnovu teoreme 2.2.1 da je Riman-Liuvilov izvod levi inverzni za Riman-Liuvilov integral, sledi

$$ {}_a^CD_x^\alpha\, {}_aI_x^\alpha f(x) = {}_aD_x^\alpha \phi(x) = {}_aD_x^\alpha\, {}_aI_x^\alpha f(x) = f(x). $$

□

3.1.7 Napomena U dokazu smo koristili da je $D^k\phi(a) = 0$ za $k = 0, 1, \dots, n-1$, gde je $n = [\alpha] + 1$, što sledi na osnovu teoreme 2.5 u [6] čija je formulacija sledeća: ako je $f \in H_\mu([a, b])$ za neko $\mu \in [0, 1]$ i $0 < \alpha < 1$, tada je

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}\,(x-a)^\alpha + \mathcal{O}((x-a)^{\mu+\alpha}). $$

Dokaz same teoreme je tehničke prirode i prilično je dugačak, pa ga zato izostavljamo, a može se naći u [6].
Primetimo još da je pretpostavka teoreme da $f \in H_\mu([a, b])$, tj. funkcija pripada Helderovom prostoru reda μ koji se definiše na sledeći način:

$$ H_\mu([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \,|\, (\exists\, c > 0)(\forall\, x, y \in [a, b])\, |f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|^\mu\}. $$

3.1.8 Teorema *Neka je $\alpha > 0$ i $n - 1 \leq \alpha < n$. Ako je $f \in AC^n([a, b])$, tada je*

$$ {}_aI_x^\alpha\, {}_a^CD_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k $$

i

$$ {}_xI_b^\alpha\, {}_x^CD_b^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-x)^k. $$

Specijalno, ako je $0 < \alpha \leq 1$ i $f \in AC([a, b])$, tada je

$$ {}_aI_x^\alpha\, {}_a^CD_x^\alpha f(x) = f(x) - f(a) \quad i \quad {}_xI_b^\alpha\, {}_x^CD_b^\alpha f(x) = f(x) - f(b). $$

Dokaz. Neka je $\alpha \notin \mathbb{N}$. Kako je $f \in AC^n([a, b])$ imamo reprezentaciju (3.3), pa možemo pisati

$$ {}_aI_x^\alpha\, {}_a^CD_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^{n-\alpha} D^n f(x) = {}_aI_x^n D^n f(x) = {}_aI_x^n\, {}_aD_x^n f(x), $$

gde smo koristili osobinu polugrupe Riman-Liuvilovog integrala (teorema 2.1.2). Sada primenom teoreme 2.2.4 na prethodnu jednakost dobijamo tvrđenje. □

Sledeća teorema je analogon Tejlorove teoreme za Kaputove izvode.

3.1.9 Teorema *(Tejlorov razvoj za Kaputove izvode) Neka je $f \in AC^n([a, b])$, $n - 1 \leq \alpha < n$ i $\alpha > 0$. Tada je*

$$ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + {}_aI_x^\alpha\, {}_a^CD_x^\alpha f(x). \tag{3.7} $$

Jednakost (3.7) je od velikog značaja prilikom rešavanja diferencijalnih jednačina u kojima figurišu dve vrste diferencijalnih operatora. Takođe važe i sledeće dve leme, koje imaju značajne posledice.

3.1.10 Lema *Neka je $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ i $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, gde je $n = [\alpha] + 1$. Tada ${}_a^C D_x^\alpha f \in \mathcal{C}([a,b])$ i ${}_a^C D_x^\alpha f(a) = 0$.*

3.1.11 Lema *Neka je $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ i $n = [\alpha] + 1$. Ako je $f \in AC^n([a,b])$ i za neko $\widetilde{\alpha} \in (\alpha, n)$ je ${}_a^C D_x^{\widetilde{\alpha}} f \in \mathcal{C}([a,b])$. Tada je ${}_a^C D_x^\alpha f \in \mathcal{C}([a,b])$ i ${}_a^c D_x^\alpha f(a) = 0$.*

Dokaz. Dokaz sledi iz sledećeg niza jednakosti a na osnovu komutativnosti Riman-Liuvilovih integrala:

$$ {}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} D^n f(x) = {}_a I_x^{\widetilde{\alpha}-\alpha} {}_a I_x^{n-\widetilde{\alpha}} D^n f(x) = {}_a I_x^{\widetilde{\alpha}-\alpha} \, {}_a^c D_x^{\widetilde{\alpha}} f(x). $$

□

Pretpostavimo sada da važe uslovi leme 3.1.10 i da je $\alpha > 2$. Tada na osnovu lema sledi da su svi izvodi ${}_a^C D_x^\alpha f$, $0 < \alpha < 3$, neprekidni. Jasno, tada su i ${}_a^C D_x^l f(x)$ i ${}_a^C D_x^{l+1} f(x)$ neprekidni za $0 < l < 2$. Međutim, to ne mora nužno da povlači da je ${}_a^C D_x^l f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Kao posledicu dobijamo da ne mora da važi ni $D \, {}_a^C D_x^l f = {}_a^C D_x^{l+1} f$, jer je funkcija sa desne strane jednakosti neprekidna, dok sa leve strane ne mora biti. Tako dobijamo da u opštem slučaju Kaputovi izvodi ne zadovoljavaju svojstvo polugrupe.

3.1.12 Lema *Neka je $f \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $k \in \mathbb{N}$ i neka za $\alpha, \varepsilon > 0$ postoji $l \in \mathbb{N}$, $l \leq k$ tako da $\alpha, \alpha + \varepsilon \in [l-1, l]$. Tada je*

$$ {}_a^C D_x^\varepsilon \, {}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a^C D_x^{\alpha+\varepsilon} f(x). $$

Dokaz. Tvrđenje trivijalno važi kada je $\alpha = l - 1$ i $\alpha + \varepsilon = l$ i taj slučaj nećemo razmatrati. Inače je $0 < \varepsilon < 1$. Na osnovu leme 3.1.5 je ${}_a^C D_x^\varepsilon f(x) = {}_a D_x^\varepsilon f(x)$ kad je $f(a) = 0$. Posmatrajmo sledeće slučajeve:

1. $\alpha + \varepsilon \in \mathbb{N}$. Tada je $[\alpha] = \alpha + \varepsilon$, tj. $[\alpha] - \alpha = \varepsilon$. Sada dobijamo

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_x^\varepsilon \, {}_a^C D_x^\alpha f(x) &= {}_a D_x^\varepsilon \, {}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\varepsilon {}_a I_x^{[\alpha]-\alpha} D^{[\alpha]} f(x) = {}_a D_x^\varepsilon {}_a I_x^\varepsilon D^{[\alpha]} f(x) \\ &= D^{[\alpha]} f(x) = D^{\alpha+\varepsilon} f(x) = {}_a^C D_x^{\alpha+\varepsilon} f(x). \end{aligned} $$

2. $\alpha \in \mathbb{N}$. Iz napomene 3.1.3 jednostavno sledi

$$ {}_a^C D_x^\varepsilon \, {}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a^C D_x^\varepsilon D^\alpha f(x) = {}_a I_x^{1-\varepsilon} D^{\alpha+1} f(x) = {}_a^C D_x^{\alpha+\varepsilon} f(x). $$

3. Ako ne važe prethodni slučajevi, onda imamo $[\alpha] = [\alpha + \varepsilon]$, pa sličnim postupkom dobijamo:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^{\varepsilon} \, {}_a^C D_x^{\alpha} f(x) &= {}_a D_x^{\varepsilon} \, {}_a^C D_x^{\alpha} f(x) = {}_a D_x^{\varepsilon} {}_a I_x^{[\alpha]-\alpha} D^{[\alpha]} f(x) \\ &= D^1 {}_a I_x^{1-\varepsilon} {}_a I_x^{[\alpha]-\alpha} D^{[\alpha]} f(x) = D^1 {}_a I_x^1 {}_a I_x^{[\alpha+\varepsilon]-\alpha+\varepsilon} D^{[\alpha+\varepsilon]} f(x) \\ &= {}_a^C D_x^{\alpha+\varepsilon} f(x). \end{aligned}$$

Time je lema dokazana. □

3.1.13 Teorema *Neka je $f \in \mathcal{C}^{\mu}([a,b])$ za neko $\mu \in \mathbb{N}$. Ako je $\alpha \in [0,\mu]$, tada je*

$${}_a D_x^{\mu-\alpha} \, {}_a^C D_x^{\alpha} f(x) = D^{\mu} f(x).$$

Dokaz. Ako je α ceo broj tvrđenje važi na osnovu rezultata iz klasične analize. Pretpostavimo da α nije ceo broj. Tada možemo pisati

$$\begin{aligned} {}_a D_x^{\mu-\alpha} \, {}_a^C D_x^{\alpha} f(x) &= D^{\mu-[\alpha]+1} {}_a I_x^{\alpha+1-[\alpha]} {}_a I_x^{[\alpha]-\alpha} D^{[\alpha]} f(x) \\ &= D^{\mu-[\alpha]+1} {}_a I_x^1 D^{[\alpha]} f(x) = D^{\mu-[\alpha]} D^{[\alpha]} f(x) \\ &= D^{\mu} f(x). \end{aligned}$$

□

Primetimo da se u tvrđenju sa desne strane jednakosti pojavljuje običan izvod. Dakle, pod određenim uslovima, kombinovanjem Riman-Liuvilovog i Kaputovog diferencijalnog operatora dobijamo klasičan diferencijalni operator.
Koristeći samo definiciju, možemo pokazati da je Kaputov operator linearan, tj. važi sledeća teorema.

3.1.14 Teorema *Neka su $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ takve da ${}_a^C D_x^{\alpha} f_1$ i ${}_a^C D_x^{\alpha} f_2$ postoje skoro svuda na $[a,b]$ i neka su $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Tada ${}_a^C D_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ postoji skoro svuda na $[a,b]$ i važi*

$${}_a^C D_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \cdot {}_a^C D_x^{\alpha} f_1 + c_2 \cdot {}_a^C D_x^{\alpha} f_2.$$

Formulisaćemo još i Lajbnicovu formulu za Kaputov operator u slučaju kada je $0 < \alpha < 1$.

3.1.15 Teorema *(Lajbnicova formula za Kaputove izvode) Neka je $0 < \alpha < 1$ i f i g funkcije analitičke na $(a-h, a+h)$ za neko $h > 0$. Tada je*

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^{\alpha}[f \cdot g](x) &= \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(a)(f(x) - f(a)) + {}_a^C D_x^{\alpha} g(x) \cdot f(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_a I_x^{k-\alpha} g(x) \cdot {}_a^C D_x^k f(x). \end{aligned}$$

Dokaz. Kako je $0 < \alpha < 1$, iz definicije Kaputovog izvoda (3.1) je

$$ {}_a^C D_x^\alpha [f \cdot g] = {}_a D_x^\alpha [f \cdot g - f(a)g(a)] = {}_a D_x^\alpha [f \cdot g] - f(a)g(a) {}_a D_x^\alpha 1. $$

Sada, na osnovu Lajbnicove formule za Riman-Liuvilove izvode (teorema 2.3.8) imamo

$$ {}_a^C D_x^\alpha [f \cdot g] = f({}_a D_x^\alpha g) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_a D_x^k f) \cdot ({}_a I_x^{k-\alpha} g) - f(a)g(a) {}_a D_x^\alpha 1. $$

Kada dodamo i oduzmemo izraz $f \cdot g(a)({}_a D_x^\alpha 1)$ sa desne strane, a zatim pregrupišemo sabirke, dobijamo

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha [f \cdot g] &= f({}_a D_x^\alpha [g - g(a)]) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_a D_x^k f) \cdot ({}_a I_x^{k-\alpha} g) \\ &\quad + g(a)(f - f(a)) {}_a D_x^\alpha 1 \\ &= f \cdot ({}_a D_x^\alpha g) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} ({}_a D_x^k f) \cdot ({}_a I_x^{k-\alpha} g) + g(a)(f - f(a)) {}_a D_x^\alpha 1. \end{aligned} $$

Ovde smo koristili da je ${}_a D_x^k = D^k = {}_a^C D_x^k$ za $k \in \mathbb{N}$.
Sada tvrđenje jednostavno sledi zamenom izraza ${}_a D_x^\alpha 1$ sa $\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, što važi na osnovu odeljka 2.5 pod **2**. □

Koristeći Kaputove izvode možemo pokazati formulu za frakcionu parcijalnu integraciju u sledećoj interpretaciji.

3.1.16 Propozicija *Neka su $f, g \in AC([a,b])$ i $0 \le \alpha < 1$. Tada važi formula za frakcionu parcijalnu integraciju i ona je oblika:*

$$ \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g \, dx = \int_a^b g(x) {}_x D_b^\alpha f \, dx. \tag{3.8} $$

Dokaz. Kako $f, g \in AC([a,b])$, sledi da su levi i desni Riman-Liuvilovi i Kaputovi izvodi funkcija f i g dobro definisani.
Imamo:

$$ \begin{aligned} \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g \, dx &= \int_a^b f(x) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(\theta)}{(x-\theta)^\alpha} \, d\theta \, dx \\ &= \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{g(\theta)}{(x-\theta)^\alpha} \, d\theta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{f'(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{g(\theta)}{(x-\theta)^\alpha} \, d\theta \, dx. \end{aligned} $$

Ovde smo koristili formulu za klasičnu parcijalnu integraciju. Primenjujući Dirihleovu formulu (1.1) dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,{}_aD_x^\alpha g\,dx &= \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b \frac{g(\theta)}{(b-\theta)^\alpha}\,d\theta - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b g(\theta)\int_\theta^b \frac{f'(x)}{(x-\theta)^\alpha}\,dx\,d\theta \\
&= \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b \frac{g(\theta)}{(b-\theta)^\alpha}\,d\theta - \int_a^b g(\theta)\,{}_\theta^C D_b^\alpha f\,d\theta \\
&= \int_a^b g(\theta)\Big(\frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{(b-\theta)^\alpha} + {}_\theta^C D_b^\alpha f\Big)\,d\theta \\
&= \int_a^b g(x)\,{}_xD_b^\alpha f\,dx,
\end{aligned}$$

gde smo koristili (3.5) za $n = 1$. □

Do sada smo radili sa Kaputovim izvodima definisanim na konačnom intervalu $[a, b]$. Definicija se može proširiti i na interval $(0, \infty)$ kao i na ceo skup $\mathbb{R}$ na sledeći način:

$$({}^C D_{0^+}^\alpha f)(x) = {}_0^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{f^{(n)}(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\,d\theta \tag{3.9}$$

i

$$({}^C D_-^\alpha f)(x) = {}_x^C D_\infty^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^\infty \frac{f^{(n)}(\theta)}{(\theta-x)^{\alpha-n+1}}\,d\theta, \tag{3.10}$$

za $x \in (0, \infty)$.
Ako je $x \in \mathbb{R}$, tada imamo

$$({}^C D_+^\alpha f)(x) = {}_{-\infty}{}^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^x \frac{f^{(n)}(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}}\,d\theta \tag{3.11}$$

i

$$({}^C D_-^\alpha f)(x) = {}_x^C D_\infty^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^\infty \frac{f^{(n)}(\theta)}{(\theta-x)^{\alpha-n+1}}\,d\theta. \tag{3.12}$$

Kaputovi izvodi zadovoljavaju sledeće jednakosti:

$$({}^C D_+^\alpha e^{\lambda x})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda x} \quad \text{i} \quad ({}^C D_-^\alpha e^{-\lambda x})(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda x},$$

za $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$ i $\lambda > 0$.
Mitag-Leflerova funkcija $E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha]$ je invarijanta u odnosu na ${}^C_a D^\alpha_x$, što nije slučaj za ${}^C D^\alpha_-$. Tačnije, važi sledeća propozicija.

3.1.17 Propozicija *Ako je $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, tada je*

$$ {}^C_a D^\alpha_x \, E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha](x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha] $$

i

$$ ({}^C D^\alpha_- \, x^{\alpha-1} E_\alpha(\lambda x^\alpha))(x) = \frac{1}{x} E_{\alpha,1-\alpha}(\lambda x^{-\alpha}). $$

Specijalno, ako je $\alpha = n \in \mathbb{N}$, važi

$$ D^n E_n[\lambda(x-a)^n] = E_n[\lambda(x-a)^n] $$

i

$$ D^n x^{n-1} E_n(\lambda x^n) = \frac{1}{x} E_{n,1-n}(\lambda x^{-n}) = \frac{\lambda}{x^{n+1}} E_\alpha[\lambda x^{-\alpha}). $$

3.2 Transformacije Kaputovih izvoda

Neka je Kaputov izvod reda α funkcije f dat u obliku (3.11), tj.

$$ ({}^C D^\alpha_+ f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f^{(n)}(\theta)}{(x-\theta)^{\alpha-n+1}} \, d\theta = {}_{-\infty}I^{n-\alpha}_x f^{(n)}(x), \quad n-1 < \alpha < n. $$

Na osnovu Furijeove transformacije Riman-Liuvilovog integrala (2.31) i formule (1.9) za računanje Furijeove transformacije n-tog izvoda funkcije, imamo

$$ (\mathcal{F}\, {}^C D^\alpha_+ f)(\xi) = (\mathcal{F} I^{n-\alpha}_+ f^{(n)})(\xi) = \frac{\big(\mathcal{F} f^{(n)}\big)(\xi)}{(-i\xi)^{n-\alpha}} = \frac{(-i\xi)^n \widehat{f}(\xi)}{(-i\xi)^{n-\alpha}} = \widehat{f}(\xi)(-i\xi)^\alpha. $$

Dakle, *Furijeova transformacija Kaputovog izvoda* ${}^C D^\alpha_+ f$ je data sa:

$$ (\mathcal{F}\, {}^C D^\alpha_+ f)(\xi) = \widehat{f}(\xi)(-i\xi)^\alpha, \tag{3.13} $$

i rezulteat je isti kao i kod Furijeove transformacije Riman-Liuvilovog izvoda $D^\alpha_+ f$. Furijeova transformacija frakcionih izvoda se koristi za analiziranje oscilatornih jednačina sa prigušenim članom frakcionog reda, zatim za konstrukciju globalnog rešenja linearne frakcione diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima i izučavanje procesa relaksacije u izolatorima.

Posmatrajmo Kaputov izvod ${}^C D^\alpha_{0+} f$ definisan u (3.9). Sličnim postupkom kao kod Furijeove transformacije, na osnovu (2.34) i (1.18) dobijamo Laplasovu transformaciju Kaputovog izvoda na sledeći način:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\,{}^C D_{0+}^{\alpha} f)(s) &= (\mathcal{F} I_{0^+}^{n-\alpha} f^{(n)})(s) = s^{-(n-\alpha)}(\mathcal{L}f(n))(s) \\
&= s^{\alpha-n}\Big(s^n(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)\Big) \\
&= s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

Dakle, *Laplasova transformacija Kaputovog izvoda* ${}^C D_{0+}^{\alpha} f$ glasi:

$$(\mathcal{L}\,{}^C D_{0+}^{\alpha} f)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \tag{3.14}$$

Specijalno, ako je $0 < \alpha \leq 1$ imamo

$$(\mathcal{F}\,{}^C D_{0+}^{\alpha} f)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - s^{\alpha-1} f(0).$$

Kako formula za Laplasovu transformaciju Kaputovog izvoda sadrži vrednosti funkcije f i njenih izvoda u nuli, što u fizici ima svoju interpretaciju (npr. $f(0)$ je početni položaj, $f'(0)$ početna brzina i $f''(0)$ ubrzanje), za očekivati je da je veoma korisna u rešavanju praktičnih problema koji dovode do frakcionih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima uz uobičajene početne uslove.

Pod pretpostavkom da postoje $(\mathcal{M}f^{(n)})(s+n-\alpha)$ i $(\mathcal{M}f)(s-\alpha)$ a na osnovu (1.14), dobija se Melinova transformacija Kaputovog izvoda ${}^C D_{0+}^{\alpha} f$.
Neka je $\alpha > 0$ i $\operatorname{Re}(s) < 1 - \operatorname{Re}(n-\alpha)$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}\,{}^C D_{0+}^{\alpha} f)(s) &= (\mathcal{M} I_{0^+}^{n-\alpha} f^{(n)})(s) = \frac{\Gamma(1-n+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}f^{(n)})(s) \\
&= \frac{\Gamma(1-n+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\Bigg(\frac{\Gamma(1-s-n+\alpha+n)}{\Gamma(1-s-n+\alpha)}(\mathcal{M}f)(s+n-\alpha-n) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1-s-n+\alpha+k)}{\Gamma(1-s-n+\alpha)}\big[f^{(n-k-1)}(t)t^{s+n-\alpha-k-1}\big]\Big|_0^{\infty}\Bigg) \\
&= \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}f)(s-\alpha) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+\alpha+k-n-s)}{\Gamma(1-s)}\big[f^{(n-k-1)}(t)t^{s+n-\alpha-k-1}\big]\Big|_0^{\infty}.
\end{aligned}$$

Specijalno, za $0 < \alpha < 1$,

$$(\mathcal{M}\,{}^C D_{0+}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}f)(s-\alpha) + \frac{\Gamma(\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\big[f(t)t^{s-\alpha}\big]\Big|_0^{\infty}.$$

Ako zamena donje i gornje granice anulira funkcije u sumi, dobijamo pojednostavljenu formulu:

$$(\mathcal{M}\,{}^{C}D^{\alpha}_{0+}f)(s) = \frac{\Gamma(1-s+\alpha)}{\Gamma(1-s)}\,(\mathcal{M}f)(s-n).$$

Slično, ako je $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ imamo da je Melinova transformacija Kaputovog izvoda ${}^{C}D^{\alpha}_{-}f$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}\,{}^{C}D^{\alpha}_{-}f)(s) &= \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}(\mathcal{M}f)(s-\alpha) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n-\alpha-k)}\left[f^{(n-k-1)}(t)t^{s+n-\alpha-k-1}\right]\Big|_{0}^{\infty},\end{aligned}$$

a ako je $0 < \alpha < 1$, tada imamo

$$(\mathcal{M}\,{}^{C}D^{\alpha}_{0+}f)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}(\mathcal{M}f)(s-\alpha) + \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1-\alpha)}\left[f(t)t^{s-\alpha}\right]\Big|_{0}^{\infty}.$$

Glava 4

Primena frakcionih izvoda

Već smo u više navrata napominjali veliku primenu frakcionog računa pri modeliranju različitih pojava u raznim oblastima nauke. Najčešće su to jednačine koje opisuju viskoelastična svojstva materijala i proces difuzije čestica. U ovom poglavlju ćemo navesti primere nekih jednačina i modela u kojima se pojavljuju frakcioni operatori. Neki od problema prezentovanih u nastavku su bili razmatrani na međunarodnoj konferenciji u Španiji 2010. god. na temu frakcionog računa i mogu se naći u [19].

4.1 Viskoelastičnost

Viskoelastičnost je jedna od oblasti fizike koja pruža najviše mogućnosti za primenu frakcionih diferencijalnih i integralnih operatora, prvenstveno zbog sve šire upotrebe polimernih materijala na različitim poljima inženjeringa. Pre nego što definišemo frakcioni model koji objašnjava viskoelastična svojstva materijala, podsetimo se klasičnog modela. Dobro poznata veza normalnog napona σ i relativne promene dužine (istezanje ili sabijanje) ε čvrstog elastičnog tela se može iskazati Hukovim zakonom

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \tag{4.1}$$

gde E predstavlja moduo elastičnosti tela. S druge strane, za Njutnovske fluide važi sledeća veza

$$\sigma(t) = \eta\frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{4.2}$$

gde je sa η označen koeficijent viskoznosti fluida.
Prethodne jednakosti ne predstavljaju univezalne zakonitosti, već matematičke modele idealnih čvrstih materijala i fluida koji se u prirodi retko sreću. Štaviše, većina materijala poseduje svojstva i elastičnih tela i fluida i nalaze se u stanju između idealnog čvrstog i idealnog tečnog stanja.

Zbog toga se Hukovi (elastični) i Njutnovi (viskozni) elementi se kombinuju u jednu jednačinu koja odražava oba svojstva, i to na dva načina: serijski i paralelno. Serijska veza daje Maksvelov model viskoelastičnosti

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}, \tag{4.3}$$

za koji imamo da ako je $\sigma = const$ sledi da je i $\frac{d\varepsilon}{dt} = const$ što znači da ako je napon konstantan, deformisanje je beskonačno, što ne odgovara stvarnoj situaciji. U slučaju paralelne veze dobijamo Voigtov model

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{4.4}$$

iz koga sledi implikacija $\varepsilon = const \Rightarrow \sigma = const$, što ponovo ne odražava eksperimentalno dobijene podatke. U cilju poboljšanja navedenih nedostataka uvodi se Kelvinov model viskoelastičnosti, koji se dobija serijskom vezom Voigtovog viskoelastičnog i Hukovog elastičnog elementa i glasi:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1 + E_2}{\eta}\,\sigma = E_1\Big(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2}{\eta}\,\varepsilon\Big), \tag{4.5}$$

i Zenerov model viskoelastičnosti, koji se dobija paralelnom vezom Maksvelovog viskoelastičnog i Hukovog elastičnog elementa:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_2}{\eta}\,\sigma = (E_1 + E_2)\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1E_2}{\eta}\,\varepsilon, \tag{4.6}$$

U oba sistema imamo po dva Hukova elementa sa modulima elasičnosti E_1 i E_2 i jedan viskoelastični element sa koeficijentom viskoznosti η. Ovako dati modeli daju bolji kvalitativni opis svojstava, ali sa kvantitativne tačke gledišta nisu zadovoljavajući. Takođe, polazeći od (4.5) i (4.6) kao osnovnih zakona deformisanja viskoelastičnih materijala, dobijaju se komplikovane diferencijalne jednačine višeg reda, koje stvaraju poteškoće prilikom formulisanja i rešavanja praktičnih problema i kao takve nisu pogodne za upotrebu.
Ako detaljnije analiziramo jednačinu (4.1) možemo primetiti da je napon upravo srazmeran relativnoj promeni dužine čvrstog tela, tačnije, proporcionalan je nultom izvodu funkcije promene dužine čvrstog tela, dok kod tečnosti, iz jednačine (4.2) imamo da je proporcionalan prvom izvodu. Tako se prirodno nameće pretpostavka da u slučaju "među-materijala", odnos napona i promene dužine možemo izraziti korišćenjem "među-izvoda", odnosno

$$\sigma(t) = E\,{}_0D_t^{\alpha}\varepsilon(t), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4.7}$$

gde su E i α konstante i α zavisi od materijala. Jednačinu (4.7) je postavio Skot Bler.

Hukov zakon (4.1), koji je jednoparametarski model i Skot Blerov, koji je dvoparametarski (parametri su E i α) se mogu dalje uopštavati dodavanjem izraza koji sadrže izvode napona i deformacije proizvoljnog reda, što dovodi do petoparametarskog opšteg Zenerovog modela:

$$\sigma(t) + a\,{}_0D_t^{\alpha}\sigma(t) = b\varepsilon(t) + c\,{}_0D_t^{\beta}\varepsilon(t). \tag{4.8}$$

Prethodna jednačina se može pojednostaviti jer kod većine materijala eksperimentalno se pokazalo da je $\alpha = \beta$, pa je opšti Zenerov model ustvari četvoroparametarski model.
Dati modeli imaju široku primenu, prvenstveno u biomehanici. U nastavku ćemo videti kako oni konkretno izgledaju primenjeni na različite organe u organizmu.

Jedna od prvih definicija biomehanike (J.D. Hampfri) kao mehanike primenjene na biologiju, može se proširiti na primenu mehanike u svrhu boljeg razumevanja fiziologije i patofiziologije, kao i dijagnostikovanja i lečenja bolesti i povreda. Ljudski organizam je kompleksan biosistem koji osim mehaničkih, ispoljava i fiziološke funkcije; proteini, ćelije, tkiva i organi otkrivaju širok spektar materijala i njihovih struktura, što se odražava mnoštvom različitih funkcija za izučavanje. Predmet izučavanja je najčešće struktura i mehanizam rada mekog tkiva. Mehaničko ponašanje mekog tkiva ima krucijalnu ulogu pri stvaranju i razvijanju čvrstih organa i u reagovanju organizma na različite povrede, a degenerativni uslovi, kao i infekcije i mehaničke traume ostavljaju drastične promene na mekom tkivu. Matematičkim modelima je moguće opisati interakciju između adaptacije tkiva i mehaničkih uslova unutar mekih tkiva.

4.1.1 Viskoelastičnost tkiva pluća

Prethodnu opštu priču možemo primeniti u modeliranju respiratornog sistema čoveka, uzimajući pritom u obzir viskoelastična svojstva tkiva u organizmu. Ova tema je detaljno obrađena u radovima [10] i [13].
Viskoelastičnost vazdušnih stubova je određena reološkim osobinama tkiva, odnosno zavisi od udela hrskavice kao viskozne komponente (kolagen) i udela mekog tkiva kao elastične komponente (elastina). Posmatrajući samo elastična svojstva, pod pretpostavkom da je deformisanje relativno malo, sledi linearna zavisnost opisana Hukovim zakonom (4.1), koja kao takva ne odgovara viskoelastičnim karakteristikama vazdušnih stubova. Dalje, konstitutivna jednačina dobijena na osnovu Voigtovog modela (4.4), ne uzima u obzir efekat relaksacije napona, tj. javlja se već pomenuti problem da ako je $\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)$, $t > t_0$, tada se ni napon ne menja. Slično se dobija i ako posmatramo izvod jednačine (4.4) po vremenu

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = E\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + \eta\frac{\partial^2 \varepsilon(t)}{\partial t^2}.$$

Dodajmo prethodnoj jednačini sa desne strane izraz $H\varepsilon$, proporcionalan deformaciji, gde je H parametar koji zavisi od materijala. Tako dobijamo jednačinu

$$\frac{\partial\sigma(t)}{\partial t} = E\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial t} + \eta\frac{\partial^2\varepsilon(t)}{\partial t^2} + H\varepsilon(t), \tag{4.9}$$

u kojoj ima relaksacije napona i predstavlja kombinaciju Maksvelovog i Voigtovog modela viskoelastičnosti. Jednačina (4.9) u određenoj meri otklanja nedostatke svakog od modela pojedinačno i dosta dobro karakteriše viskoelastično ponašanje, ali ga ne objašnjava u potpunosti.
Kliničkim ispitivanjem je pokazano da su interakcije unutar plućnog tkiva u značajnoj vezi sa niskim frekvencijama udisaja kod čoveka (detaljnije u [10]); viskoelastično svojstvo tkiva pluća pruža otpor tkiva pri niskim frekvencijama koji opada ka nuli kako se frekvencija povećava. Elastin je činilac koji određuje takvo ponašanje u mekom tkivu i ono se može opisati pomoću frakcionih operatora. Tako jednačina (4.9) dobija precizniji oblik

$$\frac{\partial^\beta\sigma(t)}{\partial t^\beta} = E\frac{\partial^\beta\varepsilon(t)}{\partial t^\beta} + \eta\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varepsilon(t)}{\partial t^{\alpha+\beta}} + H\varepsilon(t), \tag{4.10}$$

gde je $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, a ∂^β označava Riman-Liuvilov izvod reda β. Frakcionom integracijom reda β prethodne jednačine, u Riman-Luvilovim oznakama, nalazimo zavisnost površinskog napona σ i relativne promene dužine ε u vazdušnim zidovima:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\, {}_0D_t^\alpha\varepsilon(t) + H\, {}_0I_t^\beta\varepsilon(t). \tag{4.11}$$

4.1.2 Frakcioni model strukture srednjeg uha

Hirurško lečenje hroničnih upala srednjeg uha podrazumeva iskorenjivanje patoloških promena i rekonstukciju bubne opne (membrana timpani) radi poboljšanja funkcije sluha tj. prenošenja zvuka kroz ušni kanal preko bubne opne do spiralnog kanala (puža). Prostornim pokretima koščica maleus, inkus i stapes (nazivaju se još i čekić, nakovanj i uzengije respektivno), prenose se zvučni talasi do srednjeg uha ispunjenog tečnošću gde se nalaze receptori. U rekonstrukciji bubne opne se najčešće koristi fascia (ovojnica) temporalnog mišića, perihondrium ili graft hrskavice ušne školjke. Analiza tonalnim audiometrom je pokazala da hrskavica, kao rekonstruktivni materijal ima bolje karakteristike u poređenju sa fasciom temporalnog mišića i perihonondriumom jer ima veću mehaničku stabilnost, dok druga dva prvenstveno pružaju bolji akustički kvalitet. Pomoću matematičkog modela mogu se ispitati mehanička svojstva bubne opne i njenih mogućih transplanata, kao i ostale strukture srednjeg uha, ligamenata i tetiva. Model je predstavljen u radu [5] a zasniva se na modifikovanom Zenerovom modelu (4.6) viskoelastičnog tela i zahteva poznavanje vrednosti četiri konstante koje opisuju

mehanička svojstva svake od navedenih struktura, a računaju se iz nelinearnog sistema koji zadovoljava Klausiuis-Diemovu nejednakost i u kome figuriše Mitag-Leflerova funkcija (detaljnije u [5]).
Neka je Zenerov model zapisan preko sledeće jednakosti:

$$\sigma(t) + \tau_\sigma \, {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = E\varepsilon(t) + E\tau_\varepsilon \, {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t), \tag{4.12}$$

gde su $0 < \alpha < 1$ i $\tau_\sigma, \tau_\varepsilon, E$ tražene konstante.
Posmatrajmo prvo slučaj stapedialne tetive (skraćeno ST) koja se nalazi između glave stapesa i piramidalnog ispupčenja na unutrašnjem zidu šupljine srednjeg uha. Kontrakcija stapedialnog mišića uzrokuje stapedialni refleks koji preko tetive povlači stapes izvan ovalnog prozora. Ovaj refleks štiti unutrašnje uho od jake buke i omogućava komunikaciju uprkos glasnim okolnim zvucima. Zato je razumevanje strukture i osobina ST jedan od predmeta izučavanja, posebno ako je patološko okoštavanje tetive glavni razlog gubljenja sposobnosti provođenja zvučnih talasa. Pomoću testa relaksacije napona, izvršen je niz merenja mehaničkih svojstava ST u srednjem uhu i dobijene su sledeće vrednosti parametara u Zenerovom modelu:

$$\alpha = 0.411, \quad \tau_\sigma = 0.491, \quad \tau_\varepsilon = 1.397 \quad \text{i} \quad E = 3.334. \tag{4.13}$$

Pored stapedialnog, još jedan mišić u srednjem uhu učestvuje u zaštiti i naziva se tensor timpani ili zatezač bubne opne. Tetiva tensor timpani se nalazi između koštanog zida puža i vrata maleusa u šupljini srednjeg uha. Kontrakcija mišića tensor timpani povlači bubnu opnu medijalno i ograničava njenu pokretljivost. Tako je protok zvuka smanjen dok je mišić stegnut. Mehanički opis tetive je značajan za studije normalnih i patoloskih funkcija srednjeg uha kao i mogućnosti njegove uspešne rekonstrukcije. Test relaksacije napona opisuje viskoelastično ponašanje tetive tensor timpani, a vrednosti konstanti u Zanerovom modelu iznose

$$\alpha = 0.40, \quad \tau_\sigma = 0.399, \quad \tau_\varepsilon = 1.017 \quad \text{i} \quad E = 2.003. \tag{4.14}$$

Prednji ligament maleusa pruža mehaničku podršku glavi maleusa. Čini ga vezivno tkivo koje predstavlja kompleksnu hijerarhijski uređenu strukturu vlakna kolagena koja su inače prilično teška za modeliranje. Merenjem relaksacije napona prednjeg ligamenta maleusa dobijeni su sledeći podaci koji upotpunjuju frakcioni model

$$\alpha = 0.303, \quad \tau_\sigma = 0.598, \quad \tau_\varepsilon = 1.515 \quad \text{i} \quad E = 1.64. \tag{4.15}$$

Poslednja i najbitnija struktura unutar srednjeg uha na koju se može primeniti Zenerov model čini bubna opna. Bubna opna je tanka membrana koja razdvaja spoljnje od unutrašnjeg uha i ima oblik konusa sa izvijenim stranama. Ima značajnu ulogu u transformaciji zvučnih talasa u mehaničke vibracije slušnih koščica. Sastoji se iz tri sloja membrana sa kolagenim vlaknima raspoređenim u radijalnom i kružnom pravcu i ispoljava viskoelastična svojstva. Mehaničke osobine opne su ispitivane a prikupljeni podaci iznose

$$\alpha = 0.536, \quad \tau_\sigma = 2.023, \quad \tau_\varepsilon = 3.563 \quad \text{i} \quad E = 4.096. \tag{4.16}$$

Modifikovan Zenerov model se može koristiti i za opis mehaničkih osobina različitih transplanata koji se koriste u rekonstrukciji bubne opne. Već smo pomenuli da se najčešće koriste fascia temporalnog mišića, perihondrium i hrskavica usne školjke. Fascia je sloj fibroznog tkiva koja obavija mišiće, kosti, organe, nerve, krvne sudove i druge strukture. Hrskavica je neprokrvljeno fleksibilno vezivno tkivo i nalazi se u zglobovima, grudnom košu, uhu, nosu, laktovima, kolenima, člancima, bronhijama i međupršljenskim diskovima. Nije toliko čvrsta kao kost ali je kruća i manje fleksibilnija od mišića. Postoje tri vrste hrskavica: hijelinska, elastična i fibrohrskavica. Elastična se nalazi u školjki uveta i sadrži veliku količinu elastičnih vlakana pa ju je moguće modelirati Zenerovim modelom viskoelastičnosti.
Uporedimo sada viskoelastična svojstva bubne opne i njenih transplanta. U eksperimentu sprovedenom sa trbušnom fasciom dobijene su sledeće vrednosti parametara Zanerovog modela

$$\alpha = 0.499, \quad \tau_\sigma = 3.257, \quad \tau_\varepsilon = 7.658 \quad \text{i} \quad E = 5.030, \tag{4.17}$$

dok kod hrskavice ušne školjke oni iznose

$$\alpha = 0.596, \quad \tau_\sigma = 18.588, \quad \tau_\varepsilon = 87.277 \quad \text{i} \quad E = 0.761. \tag{4.18}$$

Napomenimo još da slušni kapaciteti rekonstruisane bubne opne dosta zavise od samog implanta, ali i od tehnike i uslova pod kojima je postavljen kao i od preostale strukture srednjeg uha.

4.1.3 Matematički model ljudskog zuba

Određivanje mehaničkih osobina dentina[1] je od velikog značaja kako sa praktične tako i sa teorijske tačke gledanja. Sastav i mikrostruktura zuba[2] su dobro poznati i postoji više radova posvećenih određivanju veze između strukture i mehaničkih svojstava zuba. Građu zuba čine približno 70% neorganske i 20% organske materije, a ostalih 10% je voda. Neorganski deo ima strukturu sličnu kostima, dok se

[1] Dentin (lat: substantia eburnea) ili zubna kost je čvrsto tkivo koje izgrađuje najveći deo zuba. Pokriven je sa gleđi (u predelu krune) i cementom (u predelu korena) i ima približan oblik zuba, a u centralnom delu formira zubnu šupljinu.

[2] Mikrostrukturu zuba sačinjavaju sitne cevčice, kanali tzv. tubule prečnika od $0.8 - 2.5\,\mu m$, koje se protežu kroz čitav zub po putanji koja podseća na slovo S u krunici zuba, dok pri korenu imaju pravolinijki pravac.

organski deo sastoji uglavnom od kolagena tipa 1. Tubule su ispunjene ćelijama odontoblasta i dentalnom tečnošću. Ako bismo dentin modelirali kao elastično telo (homogeno, izotropno), da bismo u potpunosti odredili mehaničko ponašanje pri konstantnoj temperaturi potrebno je poznavanje vrednosti dva parametra (npr. moduo elastičnosti i Poasonov odnos). Ako u obzir uzmemo i stogo orijentisanu cevkastu strukturu zuba, neophodno je uvesti mnogo složeniji model. Mi ćemo predstaviti viskoelastičan frakcioni model zuba (za više detalja pogledati [1]) zasnovan na modifikovanom Zenerovom modelu definisanom u (4.8). Posmatrajmo specijalan slučaj jednačine (4.8) kad je $\alpha = \beta$ i zapišimo je u obliku

$$\sigma(t) + a\,{}_0D_t^{\alpha}\sigma(t) = E\big(\varepsilon(t) + b\,{}_0D_t^{\alpha}\varepsilon(t)\big), \tag{4.19}$$

gde je $0 < \alpha < 1$ i a, b i E su konstante koje se određuju eksperimentalno. Tako se dobija da je

$$\alpha = 0.136, \quad a = 0.525, \quad b = 0.778 \quad \text{i} \quad E\varepsilon_0 = 616.287. \tag{4.20}$$

Detaljan postupak nalaženja vrednosti konstanti u (4.20) se može naći u [1]. Značaj ovog modela je u sledećem: jednostavan je za upotrebu, radi sa malim vrednostima parametara E, a, b, α i omogućava predviđanje ponašanja materijala sa velikom tačnošću (relativna greška je manja od 3%). Konstante E, a, b i α se mogu odrediti i za različite vrednosti temperature što je od značaja u stvarnim kliničkim situacijama, npr. u rekonstruktivnoj stomatologiji, za očekivanje je da će materijali slični dentinu davati mnogo bolje rezultate od drugih materijala.

4.2 Frakciona difuziona jednačina

Normalna ili obična difuzija je proces spontanog širenja čestica unutar gasa, tečnosti ili čvrstog tela. Naziva se još i Gausova difuzija a karakterišu je: kretanje čestica iz oblasti više koncentracije ka oblasti niže koncentracije; koncentracija ima Gausovu gustinu raspodele; sistem je blizak ravnotežnom stanju; asimptotsko srednje-kvadratno premeštanje je linearna funkcija vremena tj. $\langle x^2(t)\rangle \sim t$, a distribucija brzine četica je Maksvelova . Normalna difuzija se modelira difuzionom jednačinom

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4.21}$$

gde je $\mathcal{D}$ difuziona konstanta koja zavisi od svojstava materijala. Međutim, u određenim sistemima prethodna priča ne važi i oni su daleko od stanja ravnoteže, a difuzija je ili spora ili brza. Takvo odstupanje od normalne difuzije se naziva anomalna difuzija i karakteriše je pre svega nelinearna zavisnost asimptotskog srednje-kvadratnog premeštanja čestica od vremena, tj. $\langle x^2(t)\rangle \sim t^{\alpha}$, za $\alpha \neq 1$. U

zavisnosti od vrednosti parametra α, vrši se podela anomalne difuzije na *subdifuziju* ($\alpha < 1$) i *superdifuziju* ($\alpha > 1$). Anomalna difuzija se vrlo efektno može modelirati frakcionim difuzionim jednačinama uz korišćenje tehnike CTRW (eng. continuous time random walk, detaljnije u [8]).
Modeliranje difuzije u specifičnim poroznim materijalima (fraktalno telo) je jedno od najznačajnijih oblasti primene izvoda necelog reda. Da bi se opisalo kretanje unutar fraktala, koristi se sledeća jednačina koja sadrži frakcioni izvod:

$$ {}_0D_t^{1/d-1} J(t) = LX(t), \tag{4.22} $$

gde je L konstanta i d dimenzija fraktala a funkcije $J(t)$ i $X(t)$ su date u [18]. Veoma je važno da je frakciona difuziona jednačina vezana za dinamičke procese u fraktalnom telu, a red rezultujuće jednačine zavisi od fraktalne dimenzije fraktala, što služi pri modeliranju poroznog materijala.
Dalje izucavanje je dovelo do dva tipa frakcionih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Prva predstavlja generalizaciju frakcione parcijalne diferencijalne jednačine (definisana je od strane Oldhama i Španiera a više detalja se može naći u [17]) kao zamene za Fikov zakon i ima oblik

$$ {}_0D_t^{1/d} P(r,t) = -A\Big(\frac{\partial P(r,t)}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} P(r,t)\Big), $$

gde je $P(r,t)$ gustina funkcije RW (eng. random walk) na fraktalu, A i κ su konstante, a d eksponent anomalne difuzije koji zavisi od fraktalne dimenzije posmatranog tela. Druga jednačina je

$$ {}_0D_t^{2/d_u} P(r,t) = \frac{1}{r^{d_s-1}} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^{d_s-1} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\Big), $$

gde d_u i d_s zavise od fraktalne dimenzije tela. Još jedan primer jednačine drugog tipa je *Nigmatulinova jednačina* koja u najjednostavnijem slučaju prostorne jednodimenzione difuzije ima sledeći oblik

$$ {}_0D_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2}. \tag{4.23} $$

Kako je red izvoda po vremenu α proizvoljan realan broj, uključujući pritom vrednosti $\alpha - 1$ i $\alpha = 2$, jednačina (4.23) se često naziva *frakciona difuziono-talasna jednačina*. Zaista, za $\alpha = 1$ jednačina postaje klasicna difuziona jednačina, dok za $\alpha = 2$ dobijamo talasnu jednačinu. Za $0 < \alpha < 1$ imamo ultrasporu difuziju, a vrednosti $1 < \alpha < 2$ odgovaraju tzv. prelaznim procesima.
Posmatrajmo sada jednačinu (4.23) u sledećem obliku

$$ {}_0D_t^{\alpha} u(x,t) = \lambda^2 \frac{d^2 u(x,t)}{dx^2}, \tag{1} $$

uz početni i granični uslov

$$ {}_0D_t^{\alpha-1}u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) \tag{IC}$$

$$ \lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0. \tag{BC}$$

Rešenje početnog problema se jednostavno može dobiti uz korišćenje Furijeove i Laplasove trasformacije (detaljan postupak je prikazan u [18]) i ono je oblika

$$ u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{4.24}$$

gde je G Grinova funkcija definisana na sledeći način

$$ G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2\beta^2t^\alpha)\cos\beta x\,d\beta,$$

a β je Furijeov parametar transformacije.
Jednačina (1) se može zapisati i na drugi način tako da se u njoj se pojavljuje frakcioni integralni operator. Tako dobijamo *Šnajder-Vajsovu frakcionu difuzionu jednačinu*:

$$ u(x,t) = u(x,0) + \lambda^2\,{}_0I_t^\alpha\,\frac{d^2u(x,t)}{dx^2}, \tag{1'}$$

sa početnim uslovom

$$ u(x,0) = \varphi(x). \tag{IC'}$$

Rešenje ovog početnog problema je takođe (4.24). Razlika između jednačina (1) i (1′) je što druga dozvoljava upotrebu klačnih početnih uslova sa izvodima celog reda, dok kod prve to nije slučaj jer se pojavljuje Riman-Liuvilov izvod. Međutim, jednačine su ekvivalentne ukoliko se u (1) umesto Riman-Liuvilovog koristi Kaputov diferencijalni operator.

4.3 Kataneov tip prostorno-vremenske frakcione jednačine provođenja toplote

Klasična jednačina provođenja toplote je data sa

$$ \partial_t T = \mathcal{D}\,\partial_{xx}T, \tag{4.25}$$

gde je $\mathcal{D} = \lambda/\rho c$ i izvodi se iz sistema dve jednačine:
jednačine balansa energije (naziva se još i zakon održanja energije) u pojednostavljenom obliku

$$ \rho c\,\partial_t T = -\partial_x q, \tag{4.26}$$

i Furijeovog zakona provođenja toplote

$$q = -\lambda\, \partial_x T, \tag{4.27}$$

pri čemu su temperatura T i toplotni fluks q, veličine koje zavise od $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, a $\lambda > 0$ označava koeficijent toplotne provodljivosti, $\rho > 0$ gustinu i $c > 0$ specifični toplotni kapacitet materijala. Iz jednačine (4.26) sledi da se razlika između toplotnog fluksa koji ulazi i koji izlazi iz infinitezimalno malog dela materijala, troši na njegovo zagrevanje, odnosno na promenu temperature T. Furijeov zakon (4.27) je konstitutivna jednačina koja povezuje fluks q i temperaturni gradijent $\partial_x T$ i opisuje osobinu da se toplotni fluks anulira samo ako nema distribucije temperature u prostoru, odnosno, u istom trenutku različiti delovi tela imaju iste temperature. Kako je (4.25) parabolična parcijalna diferencijalna jednačina, za posledicu dobijamo da je brzina prostiranja poremećaja beskonačna, što u fizičkom smislu nije prihvatljivo. Zato, radi poboljšanja modela, postojeću konstitutivnu jednačinu zamenjujemo Kataneovim zakonom provođenja toplote u sledećem obliku

$$\tau\, \partial_t q + q = -\lambda\, \partial_x T, \tag{4.28}$$

gde je $\tau \geq 0$ vreme relaksacije. Prethodna jednačina se može zapisati i u obliku $q = \mathcal{L}^{-1}\big(\frac{1}{1+\tau s}\big) *_t (-\lambda\, \partial_x T)$, gde je $\mathcal{L}^{-1}$ inverzna Laplasova transformacija, a $*_t$ vremenska konvolucija. Sada kombinacijom jednačina (4.26) i (4.28) dobijamo tzv. telegrafsku jednačinu

$$\tau\, \partial_{tt} T + \partial_t T = \mathcal{D}\, \partial_{xx} T, \quad \mathcal{D} = \frac{\lambda}{\rho c}. \tag{4.29}$$

Telegrafska jednačina je hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina i brzina $v = \sqrt{\mathcal{D}/\tau}$ širenja poremećaja je konačna, pa jednačina (4.29) opisuje širenje toplotnih talasa kroz telo(media).

U prethodnim jednačinama fugurišu isključivo izvodi celog reda, stoga u cilju generalizacije modela provođenja toplote, jednačinu (4.29) ćemo zapisati preko frakcionih izvoda na sledeći način

$$\big(\tau\, {}_0^C D_t^\alpha + 1\big)\, q = -\lambda\, {}_a^C \mathcal{E}_b^\beta\, T, \quad \alpha, \beta \in (0,1), \tag{4.30}$$

gde je ${}_0^C D_t^\alpha$ levi Kaputov izvod reda α, $0 \leq \alpha < 1$ definisan u (3.3), a ${}_a^C \mathcal{E}_b^\beta$ je simetrizovan Kaputov izvod reda β definisan sa

$${}_a^C \mathcal{E}_b^\beta u(x) = \frac{1}{2}\left({}_a^C D_x^\beta - {}_x^C D_b^\beta\right) u(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^b \frac{u'(\theta)}{|x-\theta|^\beta}\, d\theta,$$

pod pretpostavkom da je funkcija u apsolutno neprekidna i $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $0 \leq \beta < 1$. U slučaju $a = -\infty$ i $b = \infty$ pišemo $\mathcal{E}_x^\beta$ umesto ${}_a^C\mathcal{E}_b^\beta$ i imamo da je

$$\mathcal{E}_x^\beta u(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}|x|^{-\beta} * u'(x).$$

Jednačina (4.30) se naziva *Kataneov prostorno-vremenski frakcioni zakon provođenja toplote* i detaljno je obrađena u radu [2].
Primetimo da Kataneov prostorno-vremenski frakcioni zakon provođenja toplote uopštava i Furijeov (4.27) i Kataneov (4.28) zakon provođenja toplote. Zaista, može se pokazati da kada $\beta \to 1$, tada ${}_a^C\mathcal{E}_b^\beta \to \partial_x$ i kada $\alpha \to 1$ tada (4.30) postaje (4.28). Ako $\beta \to 1$ i $\tau = 0$ ili $\alpha = 0$ tada (4.30) postaje (4.27).
Sada uparivanjem jednačine balansa energije (4.26) sa Kataneovim prostorno-vremenskim frakcionim zakonom provođenja toplote (4.30) za $a = -\infty$ i $b = \infty$, može se izvesti sledeći sistem jednačina

$$\partial_t T = -\partial_x q \tag{1}$$

$$\tau\, {}_0^C D_t^\alpha q + q = -\lambda \mathcal{E}_x^\beta T, \tag{2}$$

koji predstavlja model procesa provođenja toplote. Dalje se mogu ispitivati egzistencija i jedinstvenost rešenja sistema uz početne (IC) i granične (BC) uslove:

$$T(x,0) = T_0(x), \quad q(x,0) = 0, \tag{IC}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} T(x,t) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} q(x,t) = 0. \tag{BC}$$

Sistem (1), (2) je ekvivalentan sledećoj jednačini

$$\partial_t T = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{1+s^\alpha}\Big) *_t \partial_x \mathcal{E}_x^\beta T, \tag{3}$$

koja se naziva *Kataneov tip prostorno-vremenske frakcione jednačine provođenja toplote*. Opšte rešenje početnog problema (1), (2), (IC) postoji i jedinstveno je, a dokaz se može naći u [2].
Prednost korišćenja operatora $\mathcal{E}_x^\beta$, $\beta \in (0,1)$ (naziva se još i frakcioni gradijent) leži u tome da red frakcionog gradijenta opisuje sposobnost materijala da provodi toplotu. Tako imamo da ako u sistem (1), (2), (IC), (BC) stavimo $\beta = 1$, sistem modelira klasičnu toplotnu provodljivost dok rešenje pokazuje kako dati materijal provodi toplotu. Uzimajući manje vrednosti β u rešenju primećujemo otpor u provodljivosti materijala, i što je manja vrednost β, otpor je veći. Tako u graničnom slučaju kad je $\beta = 0$ materijal postaje idealan izolator, a sistem (1), (2), (IC), (BC) predstavlja matematički model savršenog termalnog izolatora.

4.4 Modeliranje kretanja neutrona kao subdifuzije u nuklearnom reaktoru

Nuklaerni reaktor je veoma kompleksan sistem sa neutronskim lančanim reakcijama u središtu, a kretanje neutrona unutar njega je krajnje složeno. Ovaj problem je razmatran u radu [21]. U poređenju sa ostalim difuzionim procesima, neutronska difuzija podrazumeva i druge reakcije koje se odvijaju u nukleusu (npr. nuklearna fisija). Prema tome, dok se kreću, neutroni kako se stvaraju, tako ostaju zarobljeni u jezgru. Ovaj proces se naziva transportovanje (premeštanje) neutrona sa prvog regiona i energije do drugog, a izučava ga transportna teorija. Analiza, opis i kontrola nuklearnog reaktora zavisi od preciznog poznavanja distribucije neutrona unutar jezgra, a njihovo kretanje modelira linearna verzija Bolcmanove jednačine (neutronska transportna jednačina), koja stvara dosta poteškoća prilikom rešavanja. Stoga se koristi jednostavnija aproksimacija pomoću neutronske difuzione jednačine koja u opštem slučaju ima oblik

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathcal{D}\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r},t) + s(\mathbf{r},t), \tag{4.31}$$

gde $\mathbf{r}$ predstavlja koordinate tačke u prostoru, t vreme, $\mathcal{D}$ difuzionu konstantu, ∇ Laplasijan, $\phi(\mathbf{r},t)$ fluks, v brzinu kretanja neutrona, Σ_a apsorpciju po poprečnom preseku u $\mathbf{r}$, $s(\mathbf{r},t)$ funkciju raspodele. Jednodimenziona neutronska difuziona jednačina se dobija iz dve jednačine: neutronske jednačine kontinuiteta:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + (\Sigma_a - \nu\Sigma_f)\phi(x,t) = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} \tag{4.32}$$

i neutronske konstitutivne jednačine:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial J(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + \Sigma_{tr}(x)J(x,t) = S_1(x,t), \tag{4.33}$$

gde je Σ_{tr} makroskopski transfer po poprečnom preseku, a S_1 početni uslov. U prethodnoj jednačini se često zanemaruju sabirci $\frac{1}{v}\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}$ i $S_1(x,t)$, te dobijamo pojednostavljeni oblik jednačine (4.33)

$$J = -\mathcal{D}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}, \tag{4.34}$$

gde je $\mathcal{D}$ difuziona konstanta data sa $\mathcal{D} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$. Kombinovanjem (4.32) sa (4.34) dobijamo neutronsku difuzionu jednačinu:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + (\Sigma_a - \nu\Sigma_f)\phi(x,t) = \mathcal{D}\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}. \tag{4.35}$$

Slično kao u odeljku 4.3 imamo da je (4.35) parabolična parcijalna diferencijalna jednačina pa za rezultat dobijamo beskonačnu brzinu širenja, što je nerealna situacija s obzirom na to da je brzina neutrona u jezgru reaktora konačna. Problem se rešava modifikovanim konstitutivnim zakonom koji je predložio Kataneo, a glasi

$$\tau\frac{\partial J(x,t)}{\partial t}+J(x,t)=-\mathcal{D}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}. \tag{4.36}$$

Kombinovanje (4.36) sa jednačinom kontinuiteta (4.32) rezultira neutronskom telegrafskom jednačinom koja je hiperbolična parcijalna diferencijalna jednačina i omogućava bolju reprezentaciju od klasične difuzione:

$$\left(\frac{\tau}{v}\right)\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}+N_1\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}+N_2\phi(x,t)=\mathcal{D}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4.37}$$

gde je $N_1=\tau\Sigma_a-\tau\nu\Sigma_f+1/v$ i $N_2=\Sigma_a-\nu\Sigma_f$.
Poznato je da neutronska difuziona teorija ima samo ograničenu validnost prilikom analiziranja reaktora za šta postoji više razloga (npr. difuziona reprezentacija ne važi u blizini jakih apsorbera poput goriva i kontrolnih štapova a i jezgro reaktora je često heterogeno). Ovi problemi su poslužili kao motivacija za razmatranje neutronske frakcione telegrafske jednačine (FTE). Espinosa i Paredes su posmatrali frakcionu verziju konstitutivne jednačine

$$\tau^\alpha\frac{\partial^\alpha J(x,t)}{\partial t^\alpha}+J(x,t)=-\mathcal{D}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}, \tag{4.38}$$

gde je $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ Riman-Liuvilov izvod reda $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<\alpha<1$ i koja sa jednačinom kontinuiteta (4.32) daje traženu neutronsku FTE:

$$\left(\frac{\tau^\alpha}{v}\right)\frac{\partial^{\alpha+1}\phi(x,t)}{\partial t^{\alpha+1}}+L_1\frac{\partial^\alpha\phi(x,t)}{\partial t^\alpha}+\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}+L_2\phi(x,t)=\mathcal{D}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4.39}$$

gde je $L_1=\tau^\alpha(\Sigma_a-\nu\Sigma_f)$ i $L_2=\Sigma_a-\nu\Sigma_f$. Međutim, mnogi su sumnjali u primenljivost jednačine s obzirom na to da se ne može izvesti na osnovu nekog stohastičkog procesa. Zato se posmatra drugačiji pristup, pomoću CTRW. Naime, kretanje neutrona u reaktoru se može smatrati subdifuzijom fraktala u procesu slučajnog hoda, što rezultira nešto drugačijom verzijom neutronske frakcione telegrafske jednačine

$$J(x,t)+\frac{\tau^\alpha}{2}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}J(x,t)=-\mathcal{D}\frac{\partial^{1-\alpha}}{\partial t^{1-\alpha}}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t). \tag{4.40}$$

Detaljan postupak dobijanja jednačine se može naći u [21].

4.5 Parametarska ocena frakcionih dinamičkih modela u biološkim sistemima

Poslednjih godina parametarska ocena privlači dosta pažnje matematičara. Koristi se u različitim primenama, a posebno u računskoj biologiji za široke klase problema koji zahtevaju ponovna merenja radi određivanja vrednosti parametara. Literatura na ovu temu sadrži dosta radova a bavi se istraživanjem brzine toka hemijske reakcije ili određivanjem koeficijenata u diferencijalnim jednačinama koje bi opisivale datu pojavu. U nastavku je korišćen rad [14].
Upravljački odlučujući dinamički sistem se može zapisati kao sledeći sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \tag{4.41}$$

sa početnim uslovom

$$u(0) = u_0, \tag{4.42}$$

gde su $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ parametri, m je broj hemijskih reakcija i za $0 \leq t \leq T$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ i $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ su n-dimenzionalne vektorske funkcije, a n je broj vrsta. Modeli koji se koriste uglavnom su zasnovani na frakcionim diferencijalnim jednačinama a proizilaze iz efekta anomalne difuzije. Okolina na kojoj se posmatrani proces odvija se odlikuje velikom gustinom i viskoznošću što je i očekivano s obzirom na mnoštvo molekula koji se tu nalaze. U svojim ogledima (1988. god.) Kopelman je primetio da kristalna smesa makromolekula može da utiče na prirodu hemijske reakcije. U pratećim radovima Kopelmana se može naći čvrst dokaz anomalnog difuzionog ponašanja proteina u membranama i unutar citozola u ćelijama. Više faktora izaziva ovakvo anomalno ponašanje, npr. velika gustina makromolekula ili pod interakcijom citoskeleta ispod membrane dolazi do zatvaranja prostora proteina.
U nastavku ćemo posmatrati ponašanje genetski regulisan model povratne informacije u Bacilius subtilis, bakterije koja se nalazi u zemljištu a poznatija je kao bakterija sena. Bakterija ima veoma otporan endoprostor koji joj omogućava visoku toleranciju na ekstremne spoljašnje uslove. Frakcioni model koji nastaje i beleži anomalno difuziono ponašanje je strogo nelinearan sistem diferencijalnih jednačina u sledećem obliku:

$$\frac{du(t)}{dt} = {}_0D_t^{1-\alpha} f(t, u, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \quad t > a, \tag{1}$$

sa početnim uslovom

$$u(0) = u_0, \tag{IC}$$

gde je ${}_0D_t^{1-\alpha}$ Riman-Liuvilov izvod reda $1-\alpha$, $0<\alpha<1$. Istaknimo da je prethodni početni problem ekvivalentan sa poznatom Volterovom integralnom jednačinom:

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau, u(\tau))| \, d\tau.$$

Za rešavanje početnog problema (1), (IC) koristi se tzv. frakcioni Prediktor-Korektor metod koji je detaljno opisan u [14].

Glava 5

Prilog

U prilogu dajemo par istorijskih napomena u vezi sa nastankom i razvojem frakcionog računa, kao i tablice Riman-Liuvilovih izvoda i integrala i Kaputovih izvoda nekih najčešće korišćenih funkcija. Više istorijskih detalja se može naći u knjigama [16], [17] i [20].

5.1 Frakcioni račun kroz istoriju

Prvobitna ideja koja je dovela do nastanka diferencijalnog i integralnog računa proizvoljnog reda datira iz 17. veka, kada je Lajbnic (*Gottfried Leibniz 1646-1716*) u svojim radovima upotrebio oznaku $d^n y/dx^n$ za n-ti izvod funkcije $y = y(x)$. Naizgled zbunjujuća notacija koja očigledno nagoveštava da je n prirodan broj, navela je Lopitala (*Guillaume de L'Hopital 1661-1704*) da zatraži detaljnije objašnjenje od Lajbnica i pritom obrazloži izraz u slučaju $n = 1/2$. Ovim se prvi put postavilo pitanje traženja izvoda čiji je red racionalan (eng. *fractonal*) broj. Otuda i naziv frakcioni račun koji često potstiče na pogrešno tumačenje, jer pod pojmom frakcionog računa se podrazumeva integro-diferenciranje kako racionalnog, tako i iracionalnog, pa čak i kompleksnog reda.
Osim sa Lopitalom, Lajbnic je delio svoja otkrića i sa Johanom Bernulijem, kome je i prvi put javno spomenuo mogućnost postojanja izvoda "opšteg" reda.
Fakcioni račun je bio predmet interesovanja i Ojlera (*Leonard Euler 1707-1783*), koji je posmatrao diferenciranje stepene funkcije $d^p x^a/dx^p$ za necele vrednosti parametra p.
Laplas (*Pierre-Simon Laplace 1749-1827*) je 1812. god. predložio ideju diferenciranja necelog reda za funkcije koje imaju integralnu reprezentaciju oblika $\int T(t)t^{-x}\,dt$.
Ideju Ojlera je detaljnije razradio Lakroa (*Francois Lacroix 1765-1843*) 1820. godine kada je jednostavno izračunao n-ti izvod funkcije $y = x^m$, za$m$ pozitivan ceo

broj, i tu formulu uopštio pomoću gama funkcije na sledeći način

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\, x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Na taj način je za konkretan primer $y = x$ i $n = 1/2$ dobio $\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$, što se poklapa sa današnjim rezultatima uz korišćenje Riman-Liuvilove definicije.
Sledeći korak preduzeo je Furije (*Joseph Fourier 1768-1830*). Njegova definicija frakcionog operatora proistekla je iz integralne reprezentacije funkcije

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \cos t(x-\lambda)\, dt.$$

Kako je $\frac{d^n}{dx^n} \cos t(x-\lambda) = t^n \cos[t(x-\lambda) + \frac{1}{2}\, n\pi]$ za $n \in \mathbb{N}$, zamenom $n = u$ (u je proizvoljan broj) Furije je dobio formulu

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} t^u \cos[t(x-\lambda) + \frac{1}{2}\, u\pi]\, dt. \tag{5.1}$$

Ovo je bila prva definicija izvoda proizvoljnog reda "dovoljno dobrih" funkcija.
Prvi značajniji pomak u primeni frakcionih operatora je napravio Abel (*Niels Abel 1802-1829*) 1823. godine. On je iskoristio frakcioni račun pri rešavanju integralne jednačine koja se pojavljuje u formulaciji problema tautohrona (problema određivanja oblika krive takve da je vreme spuštanja tela zanemarljive mase niz tu krivu, bez trenja, pod uticajem gravitacije nezavisno od početnog položaja tela).
Opšti slučaj Abelove jednačine smo već naveli na početku poglavlja 2. Posmatrajmo sada specijalan slučaj. Neka je vreme klizanja tela poznato, tada Abelova integralna jednačina ima oblik

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t)\, dt. \tag{5.2}$$

U jednačini (5.2) podintegralna funkcija f je nepoznata, a Abel je do rešenja došao tako što je desnu stranu zapisao u obliku $\sqrt{\pi}\frac{d^{-1/2}}{dx^{-1/2}} f(x)$, pa primenio $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ na obe strane jednakosti (pod pretpostavkom da operator zadovoljava uslov $D^{1/2}D^{-1/2}f = D^0 f = f$). Tako je dobio

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x),$$

i zaključio da kada znamo frakcioni izvod reda 1/2 konstante, možemo da odredimo i nepoznatu funkciju f. To je bio izvanredan uspeh Abela u oblasti frakcionog

računa.
Furijeova integralna jednačina i Abelovo rešenje su privukli pažnju Liuvila (*Joseph Liouville 1809-1882*), koji je napravio veliki korak u razvoju frakcionog računa. Osnove za razvoj nove teorije je našao u tada već poznatom rezultatu: $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, što je iskoristio pri definisanju izvoda proizvoljnog reda μ funkcije f na sledeći način

$$D^{\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^{\nu} e^{a_k x}, \tag{5.3}$$

pod pretpostavkom da se funkcija može razviti u red $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$. Očigledan nedostatak prethodne definicije je da je ona primenljiva samo za specijalne funkcije, a i postojanje izvoda zavisi od konvergencije reda. Međutim, koristeći (5.3), Liuvil je izveo formulu za diferenciranje stepene funkcije koja dosta podseća na moderne definicije:

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{(-1)^{\nu}\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} f(x+t) t^{\nu-1}\, dt. \tag{5.4}$$

Radovi Liuvila iz 1832. i 1837. godine su prvi koji su sadržali primenu frakcionog računa na rešavanje nekih tipova običnih linearnih diferencijalnih jednačina.
Osim Liuvila, najveći doprinos razvoju teorije frakcione integracije je dao Riman (*Bernhard Riemann 1826-1866*). Njegovo interesovanje za frakcioni račun je počelo još u studentskim danima kada je i napisao rad na tu temu, koji je nažalost objavljen tek nakon njegove smrti. Tragajući za uopštenjem Tejlorovog reda izveo je sledeću formulu:

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt + \Psi(x). \tag{5.5}$$

Zbog nejasnosti kod donje granice integrala, Riman je smatrao da je u definiciji neophodno dodati i komplementarnu funkciju Ψ. Pitanje postojanja komplementarne funkcije je izazvalo dosta zbrke. Liuvil je napravio grešku kad je dao sopstvenu interpretaciju tražene funkcije, pri čemu nije razmotrio slučaj kad je $x = 0$ što je dovelo do kontradikcije. A kako je Kejli (*A. Cayley 1821-1895*) primetio, najveća poteškoća kod Rimanove teorije je pitanje beskonačno mnogo mogućnosti za odabir komplementarne funkcije. Svaka druga prihvatljiva definicija frakcionih izvodabi morala da reši taj problem, što je i učinjeno: današnje definicije ne sadrže funkciju Ψ. Holmgren (*E. Holmgreen 1873-1943*) je prvi koji se "odrekao" komplementarne funkcije i prvi koji je predložio da se frakcino diferenciranje posmatra kao inverzna operacija za frakcionu integraciju. Na istu ideju je došao i Letnikov, nezavisno od Holmgrena.

Grunvald (*A. K. Grünwald 1838-1920*) i Letnjikov (*A. V. Letnikov 1837-1888*) su 1868. razvili drugačiji pristup frakcionom diferenciranju koji se bazira na sledećoj jednakosti:

$$D^{\nu} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_h^{\nu} f)(x)}{h^{\nu}}. \tag{5.6}$$

Najraniji radovi koji su doveli do Riman-Liuvilove definicije su dela Letnikova iz 1869., koji su za polaznu tačku uzeli Košijevu integralnu formulu $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$, gde je $\mathcal{C}$ zatvorena kriva u kompleksnoj ravni. Sličnim postupkom, ali na otvorenoj krivoj, Lorent (*H. Laurent 1841-1908*) je došao do definicije

$$_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x - t)^{\nu - 1} f(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\,(\nu) > 0. \tag{5.7}$$

U periodu od 1900-1970. je publikovan skroman broj radova vezan za oblast frakcionog računa. Doprinos su dali H. Dejvis, A. Erdeli, G. Hardi, H. Kober, J. Litlvud, M. Riz, S. Samko, H. Vejl... Godine 1974. u Konetikatu je održana prva međunarodna konferencija na temu frakcionog računa. Nakon toga, teorija frakcionih operatora doživljava nagli razvoj. Do današnjeg dana spisak knjiga, radova i tekstova posvećenih teoriji i primeni frakcionog računa broji više stotina naslova. Detaljan pregled većine pomenutih dela kao i održanih konferencija, kurseva i seminara na datu temu se može videti u [15].

Za kraj postavićemo i jedno interesantno pitanje na koje još uvek nije dat precizan odgovor: Da li frakcioni izvodi imaju geometrijsku interpretaciju?!

5.2 Tablice frakcionih izvoda i integrala

Neka je $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$ i $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$.

Tablica 1.

$f(x), \quad x > a$	${}_aI_x^\alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
$(x-a)^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}$
$(x \pm c)^{\gamma-1}$	$\frac{(a\pm c)^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha {}_2F_1(1, 1-\gamma; \alpha+1; \frac{a-x}{a\pm c}), a \pm c > 0$
$(x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{1-\gamma}} {}_2F_1(\beta+1, -\gamma; \alpha\beta+1; \frac{x-a}{b-a}),\ a < x < b$
$(x-a)^{\beta-1}(x \pm c)^{\gamma-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a\pm c)^{1-\gamma}} {}_2F_1(\beta+1, 1-\gamma; \alpha\beta+1; \frac{a-x}{a\pm c}),\ a \pm c > 0$
$e^{\lambda x}$	$e^{\lambda a}(x-a)^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda x - \lambda a)$
$(x-a)^\beta e^{\lambda x}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)e^{\lambda a}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} {}_1F_1(\beta+1; \alpha+\beta+1; \lambda x - \lambda a)$
$\ln(x-a)$	$\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln(x-a) + \psi(1) - \psi(\alpha+1)]$
$(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[\ln(x-a) + \psi(\beta) - \psi(\alpha+\beta)]$
$(x-a)^{\nu/2}J_\nu(\lambda\sqrt{x-a})$	$(2/\lambda)^\alpha (x-a)^{(\alpha+\nu)/2} J_{\alpha+\nu}(\lambda\sqrt{x-a}),\ \mathrm{Re}\,(\nu) > -1$
$(x-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}((x-a)^\mu)$	$(x-a)^{\alpha+\beta-1}E_{\mu,\alpha+\beta}((x-a)^\mu),\ \mathrm{Re}\,(\mu) > 0$

Tablica 2.

$f(x), \quad x \in \mathbb{R}$	${}_{-\infty}I_x^\alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
$(b-ax)^{\gamma-1}$	$\frac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)a^\alpha}(b-ax)^{\alpha+\gamma-1},\ \mathrm{Re}\,(\alpha+\gamma) < 1$
$\frac{1}{(1\pm ix)^\mu}$	$\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)} e^{\pm\alpha\pi i/2} \frac{1}{(1\pm ix)^{\mu-\alpha}}),\ \mathrm{Re}\,(\mu-\alpha) > 0$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha}e^{\lambda x},\ \mathrm{Re}\,(\lambda > 0)$
$\begin{cases} \sin\lambda x \\ \cos\lambda x \end{cases}$	$\lambda^{-\alpha}\begin{cases} \sin(\lambda x - \frac{\alpha\pi}{2}) \\ \cos(\lambda x - \frac{\alpha\pi}{2}) \end{cases},\ \lambda > 0, \mathrm{Re}\,(\alpha) < 1$
$e^{\lambda x}\begin{cases} \sin\gamma x \\ \cos\gamma x \end{cases}$	$\frac{e^{\lambda x}}{(\lambda^2+\gamma^2)^{\alpha/2}}\begin{cases} \sin(\gamma x - \alpha\varphi) \\ \cos(\gamma x - \alpha\varphi) \end{cases},\ \varphi = \arctan\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right), \mathrm{Re}\,(\lambda) > 0, \gamma > 0$

Tablica 3.

$f(x), \quad x \in \mathbb{R}$	${}_xI_\infty^\alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
$x^{\gamma-1}, \quad x > 0$	$\frac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}x^{\alpha+\gamma-1},\ \mathrm{Re}\,(\alpha+\gamma) < 1$
$(ax+b)^{\gamma-1}$	$\frac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)a^\alpha}(ax+b)^{\alpha+\gamma-1},\ \mathrm{Re}\,(\alpha+\gamma) < 1, \lvert\arg(a/b)\rvert < \pi$
$e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha}e^{-\lambda x},\ \mathrm{Re}\,(\lambda > 0)$
$\begin{cases} \sin\lambda x \\ \cos\lambda x \end{cases}$	$\lambda^{-\alpha}\begin{cases} \sin(\lambda x + \frac{\alpha\pi}{2}) \\ \cos(\lambda x + \frac{\alpha\pi}{2}) \end{cases},\ \lambda > 0, \mathrm{Re}\,(\alpha) < 1$
$e^{-\lambda x}\begin{cases} \sin\gamma x \\ \cos\gamma x \end{cases}$	$\frac{e^{-\lambda x}}{(\lambda^2+\gamma^2)^{\alpha/2}}\begin{cases} \sin(\gamma x + \alpha\varphi) \\ \cos(\gamma x + \alpha\varphi) \end{cases},\ \varphi = \arctan\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right), \mathrm{Re}\,(\lambda) > 0, \gamma > 0$
$x^{-\nu/2}J_\nu(\lambda x)$	$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\alpha x^{(\alpha+\nu)/2}J_{\nu-\alpha}(\lambda\sqrt{x}),\ \mathrm{Re}\,(2\alpha-\nu) < 3/2, \lambda > 0$

Neka je $\alpha > 0$ i $n = [\alpha] + 1$.

Tablica 4.

$f(x), \quad x \in \mathbb{R}$	$({}^cD^\alpha_{0+}f)(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
x^β	$\begin{cases} 0, & \beta \in \mathbb{N}_0 \text{ i } \beta < n \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}, & \beta \in \mathbb{N}_0 \text{ i } \beta \geq n \\ & \text{ili} \quad \beta \notin \mathbb{N}_0 \text{ i } \beta > n-1 \end{cases}$
$(x+c)^\beta, \quad \beta \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{c^{\beta-n-1}x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} {}_2F_1(1, n-\alpha; n-\alpha+1; -\frac{x}{c})$
$e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda x)$
$x^\lambda \ln x, \quad \lambda > n-1$	$x^{\lambda-\alpha} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k+1} \binom{\lambda}{k} \frac{n!}{n-k} \frac{\Gamma(\lambda-n+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} +$ $+ \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} x^{\lambda-\alpha} \quad (\psi(\lambda-n+1) - \psi(\lambda-\alpha+1) + \ln x)$
$\sin \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \frac{\lambda^n i(-1)^{n/2} x^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} [-{}_1F_1(1; n-\alpha+1; i\lambda x) \\ \quad + {}_1F_1(1; n-\alpha+1; -i\lambda x)] & n - \text{parno} \\ \frac{\lambda^n i(-1)^{(n-1)/2} x^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} [{}_1F_1(1; n-\alpha+1; i\lambda x) \\ \quad + {}_1F_1(1; n-\alpha+1; -i\lambda x)] & n - \text{neparno} \end{cases}$
$\cos \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \frac{\lambda^n i(-1)^{n/2} x^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} [{}_1F_1(1; n-\alpha+1; i\lambda x) \\ \quad + {}_1F_1(1; n-\alpha+1; -i\lambda x)] & n - \text{parno} \\ \frac{\lambda^n i(-1)^{(n-1)/2} x^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} [{}_1F_1(1; n-\alpha+1; i\lambda x) \\ \quad - {}_1F_1(1; n-\alpha+1; -i\lambda x)] & n - \text{neparno} \end{cases}$

Zaključak

U ovom radu su predstavljene teorijske osnove računa sa diferencijalnim i integralnim operatorima proizvoljnog realnog ili kompleksnog reda kao i njihova primena u različitim oblastima nauke.

Obrađena su dva različita pristupa definisanju frakcionih izvoda i integrala i pokazana je njihova međusobna veza, a takođe, napravljena je i paralela u odnosu na klasični kalkulus. Predstavljeno je i nekoliko modela koji ilustruju primenu frakcionih operatora u modeliranju difuzionih procesa i viskoelastičnih svojstava materijala. Na kraju je dat kratak istorijski osvrt na nastanak i razvoj frakcionog računa od 17. veka pa do današnjih dana.

Literatura

[1] Atanackovic, T.M. *Applications Of Fractional Calculus in Mechanics, lecture notes.* Department of Mechanics, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad 2007.

[2] Atanackovic, T., Konjik, S., Oparnica, Lj., Zorica, D. *The Cattaneo type space-time fractional heat conduction equation.* Contin. Mech. Thermodyn., to appear, 2011.

[3] Caputo, M. *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II.* Geophys. J. R. Astr. Soc., **13**:529–539, 1967.

[4] Caputo, M. *Elasticitá e Dissipazione.* Zanichelli, Bologna, 1969.

[5] Dankuc, D.V., Kovincic, N.I., Spasic, D.T. *A New Model for Middle Ear Structures with Fractional Type Dissipation Pattern.* Proceedings of 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, 2010.

[6] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations-An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[7] Gorenflo, R., Mainardi, F. Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order. In Mainardi F. Carpinteri, A., editor, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics,*, volume **378** of *CISM Courses and Lectures*, pages 223–276. Springer-Verlag, Wien and New York, 1997.

[8] Hanyga, A. *Multi-dimensional solutions of space-fractional diffusion equations.* Proc. R. Soc. A, 457:2993-3005, 2001.

[9] Hanyga, A. *Multi-dimensional solutions of space-time-fractional diffusion equations.* Proc. R. Soc. A, 458:429-450, 2002.

[10] Ionescu, C.M., Kosinski, W., De Keyser, R. *Viscoelasticity and fractal structure in a model of human lungs.* Arch. Mech., **62**, 1, pp. 21-48, Warszawa 2010.

[11] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006.

[12] Klimek M. *On Solutions Of Linear Fractional Differential Equations Of Variational Type.* Czestochowa University of Technology, Czestochowa, 2009.

[13] Kosinski, W., Ionescu, C.M. *On fractional time derivatives in constitutive modeling of materials.* Proceedings of 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, 2010.

[14] Liu, F., Burrage, K. *Parameter estimation for fractional dynamical models in biological systems.* Proceedings of 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, 2010.

[15] Machado, J.T., Kiryakova, V., Mainardi, F. *Recent history of fractional calculus.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 16(3):1140-1153, 2011.

[16] Miller, K.S., Ross, B. *An Introduction to the Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications.* John Willey & Sons, Inc., New York, 1993.

[17] Oldham, K.B., Spanier, J. *The Fractional Calculus.* Academic Press, New York, 1974.

[18] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, San Diego, 1999.

[19] Igor Podlubny, Blas M. Vinagre Jara, YangQuan Chen, Vicente Feliu Batlle, Inés Tejado Balsera. *Proceedings of FDA '10.* The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and Its Applications Badajoz, Spain, October 18-20, 2010.

[20] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. *Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[21] Vishwesh A. Vyawahare, P.S.V Nataraj. *Modeling Neutron Transport in a Nuclear Reactor as Subdiffusion: The Neutron Fractional-order Telegraph Equation.* Proceedings of 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, 2010.

Biografija

Rođena sam 9. aprila 1987. godine u Inđiji. Osnovnu školu "Dušan Jerković" sam završila u Inđijii kao nosilac Vukove diplome a potom sam upisala Gimnaziju u Inđiji, prirodno-matematički smer i maturirala sa odličnim uspehom 2006. godine.

Na Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer profesor matematike, upisala sam se 2006. godine i diplomirala 25. avgusta 2010. godine sa prosečnom ocenom 9.30. Nakon završetka osnovnih studija upisala sam master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija.

Novi Sad, septembar 2011. godine

Nataša Duraković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Nataša Duraković
AU

Mentor: Docent dr Sanja Konjik
MN

Naslov rada: Izvodi i integrali necelog reda **NR**

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2011
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5, 87, 21, 4, 0, 0, 1)
(broj poglavlja, broj strana, broj literarnih citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: apsolutno neprekidne i integrabilne funkcije, frakcioni račun, Riman-Liuvilovi integrali i izvodi, Kaputovi izvodi, viskoelastičnost, difuzija.
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ
U ovom radu smo predstavili teorijske osnove računa sa diferencijalnim i integralnim operatorima proizvoljnog realnog ili kompleksnog reda kao i njihovu primenu u različitim oblastima nauke.
Obradili smo dva različita pristupa definisanju frakcionih izvoda i integrala. Prvo smo definisali Riman-Liuvilove a zatim i Kaputove frakcione operatore. Pokazali smo i njihovu međusobnu vezu, a takođe, napravili smo i paralelu u odnosu na klasični kalkulus.
Dalje smo predstavili i nekoliko modela koji ilustruju primenu frakcionih operatora u modeliranju difuzionih procesa i viskoelastičnih svojstava materijala.
Na kraju teksta smo dali kratak istorijski pregled nastanka i razvoja frakcionog računa.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Mirjana Stojanović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Danijela Rajter–Ćirić, vanredni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Sanja Konjik, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Nataša Duraković
AU

Mentor: Sanja Konjik, Ph.D.
MN

Title: Derivatives and Integrals of Real Order
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5, 87, 21, 4, 0, 0, 1)
(chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis
SD

Subject/Key words: absolutely continuous and integrable functions, fractional calculus, Riemann-Liouville fractional integrals and fractional derivatives, Caputo fractional derivatives, viscoelasticity, diffusion.
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
In this work we present theoretical basis of calculus with differential and integral operators of arbitrary order and their applications on various fields of science.
We study two different approaches to defining fractional derivatives and integrals. First we define the Riemann-Liouville and then the Caputo fractional operators. We examine their relation, as well as the connection with the clasical calculus.
Further we give several models which illustrate different possibilities for application of fractional operators, in particular in modeling diffusion processes and viscoelasticity.
The last part of this work is devoted to a brief historical overview on development of fractional calculus.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Mirjana Stojanović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr. Danijela Rajter–Ćirić, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
Member:	Dr. Sanja Konjik, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad