Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Miloš Kuljić

Bulovsko vrednosni modeli

mentor
Milan Grulović

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Uvod

Na samom početku imaću tu slobodu da citiram našeg genija:

> „Verske dogme više se ne prihvaćaju u njihovom ortodoksnom značenju, ali svaki pojedinac ima potrebu da veruje u neke vrste više sile. Svi mi moramo imati neki ideal koji će upravljati našim ponašanjem i zadovoljiti nas, ali on nije materijalan bez obzira da li je vjera, umjetnost, znanost ili bilo što drugo - samo je važno da djeluje kao nematerijalna sila.”
>
> Nikola Tesla

Posle Gödel-ovih teorema nekompletnosti matematika i nije tako daleko od vere, pogotovu teorija skupova. U slobodnom prevodu, u [10], Манин kaže: „Pitanje o formalnoj konzistentnosti **ZF** aksioma mora ostati u domenu vere, dok god se ne pokaže nekonzistentnost pomenutog sistema. Do sada nijedan dokaz baziran na ovim aksiomama nije doveo do kontradikcije; naprotiv, one su nam otvorile ceo jedan bogati svet klasične i moderne matematike. Ovaj svet ima izvesnu stvarnost i svoj život, život koji malo zavisi od formalizma kojim je opisan.

Ako se i otkrije kontradikcija u nekom delu ovoga sveta, ona će samo poslužiti za pojašnjenje, reviziju, i možda rekonstrukciju nekih ideja, kao što se dešavalo nekoliko puta u prošlosti, ali neće dovesti do njihovog pada.”

Bulovsko vrednosni modeli su prvi put iskorišćeni na teoriji skupova od strane Scott-a, Solovay-a i Vopěnka-e, a u cilju boljeg razumevanja metode forsinga. Danas su našli primenu u nestandardnoj analizi (videti [8]), pa čak i u kvantnoj fizici. Kroz sledećih nekoliko redova u kratkim crtama izlažemo sadržaj ovog rada.

Prve tri glave su uvodnog karaktera i u njima je data osnova bez koje se čitalac ne može uhvatiti u koštac sa Bulovsko vrednosnim modelima. Čitaoca koji je upućen u osnove logike prvoga reda, teorije skupova i Bulovih algebri upućujemo da direktno pređe na čitanje četvrte i pete glave.

U prvoj glavi vršimo pregled logike prvoga. Ova glava je u najtešnjoj vezi sa četvrtim delom rada.

Druga glava se bavi pregledom teorije skupova koji je potreban za praćenje pete glave. Akcenat je na transfinitnoj rekurziji, hijerarhiji skupova i dobro-zasnovanim relacijama.

U trećem delu rada izlažemo osnove teorije Bulovih algebri. Tematika je izložena detaljno jer se osobine Bulovih algebri intezivno eksploatišu u poslednje dve glave. Na kraju glave je dat dokaz Rasiowa-Sikorski teoreme koju koristimo u dokazu takozvane teoreme validnosti poglavlja 4.2.

U četvrtoj glavi se bavimo Bulovsko vrednosnim modelima proizvoljne teorije prvoga reda sa jednakošću. Dajmo dve varijante definicije Bulovsko vrednosnih struktura. U prvoj varijanti vršimo interpretiranje promenljivih jezika preko valuacija, dok u drugoj varijanti svakom elementu domena interpretacije dodeljujemo novi simbol konstante. Takođe, dajemo dva različita dokaza teoreme koja kaže da je formula tačna u dvovrednosnoj interpretaciji ako i samo ako je tačna u proizvoljnoj Bulovsko vrednosnoj interpretaciji.

Peta glava nosi naziv Bulovsko vrednosni univerzum. U ovoj glavi dajemo primenu Bulovsko vrednosnih modela na teoriju skupova koja je formalizovana u okviru predikatskog računa sa jednakošću. Koristeći se teorijom iznetom u drugom poglavlju konstruišemo specifičnu kumulativnu hijerarhiju $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, koju zovemo Bulovsko vrednosni univerzum. Primenom transfinitne rekurzije na klasi $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \times \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ sa dobro-zasnovanom i skupu-sličnom relacijom konstruišemo relacije pripadanja i jednakosti. Dokazujemo da su sve aksiome **ZFC**-a tačne u Bulovsko vrednosnom smislu, a samim tim i da $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ služi kao „model" teorije skupova.

Na kraju je navedena literatura koja je korišćena prilikom izrade rada, posebno, pored naziva pojedinih knjiga, u uglastim zagradama, je dat broj stranice na koju se pozivamo u tekstu.

Ovom prilikom bi izrazio zahvalnost svima koji su učestvovali u mom usmeravanju i odabiru poziva. Hvala mojoj porodici, nastavnicima osnovne škole Dušanu Petroviću i Milanu Stanisavljeviću. Hvala profesoru Radivoju Stojkoviću na podstreku i iskazanom strpljenju.

Posebno hvala mentoru profesoru Milanu Gruloviću na odabiru teme, korisnim sugestijama prilikom izrade rada i nezaboravnim pričama uz šolju tople kafe. Takođe, hvala članovima komisije za odbranu ovog rada profesorima Milošu Kuriliću i Borisu Šobotu.

Novi Sad, septembar 2014. godine

Miloš Kuljić

1

Pregled logike prvoga reda

Neka je A bilo kakav apstraktni skup. A zovemo *alfabetom.* Konačne nizove elemenata iz A zovemo *izrazi, reči* iz A (na *jeziku* A). Konačan niz izraza zvaćemo *tekst*[1] na jeziku A.

Pričaćemo o *jeziku sa alfabetom* A ako se određeni izrazi i tekstovi mogu izdvojiti i za njih se može reći da su „dobro formirani", „smisleni", itd. Dakle, u srpskom alfabetu A razlikujemo reči srpskoga jezika koje su sastavljene po nekim (gramatičkim) pravilima od proizvoljnog niza slova tog alfabeta. Slično je i sa logičkim jezikom.

Pravila za formiranje različitih izraza i tekstova čine *sintaksu* jezika. Pravila koja govore o odnosu jezika i stvarnosti (značenje jezika) zovemo *semantikom* jezika. *Sintaksa* i *semantika* jednoga jezika opisani su kroz *metajezik.*

Najvažnija klasa formalnih jezika je klasa jezika prvoga reda $\mathcal{L}_1$. Dva najvažnija predstavnika ove klase su: jezik teorije skupova L_1S i jezik aritmetike L_1A. Jezike klase $\mathcal{L}_1$ zovemo još i *predikatskim jezicima.*

1.1 Sintaksa jezika $\mathcal{L}_1$

Alfabet jezika iz klase $\mathcal{L}_1$ može da se podeli u šest disjunktnih podskupova. Sledeća tabela daje imena tih podskupova, standardnu notaciju za elemente tih podskupova u opštem slučaju kao i u specijalnim slučajevima, za jezike L_1S i L_1A. Posle tabele dajemo pravila za pravilno formiranje različitih reči. Imamo dva osnovna tipa reči bilo kojeg jezika L klase $\mathcal{L}_1$, a to su *termi* i *formule.* Oba tipa se rekurzivno definišu. Takođe, u ovoj tabeli je dat kompletni simbolizam teorije, međutim u delu **1.3** ne uzimamo u alfabet formalne teorije posmatranog jezika sve dole navedene simbole. Nešto više o

[1] Primetimo da ne koristimo pojam *rečenica.* Kasnije o tome.

tome ćemo kasnije reći.

<table>
<tr><td rowspan="2">Podskupovi
alfabeta A</td><td colspan="3">Imena i notacija</td></tr>
<tr><td>Opšti slučaj</td><td>u L_1S</td><td>u L_1A</td></tr>
<tr><td>veznici i
kvantifikatori</td><td colspan="3">$\leftrightarrow$ (ekvivalencija); $\rightarrow$ (implikacija); $\vee$ (ili); $\wedge$ (i);
$\neg$ (negacija); $\forall$ (univerzalni) i $\exists$ (egzistencijalni) kvantifikatori</td></tr>
<tr><td>promenljive</td><td colspan="3">$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$</td></tr>
<tr><td>konstante</td><td>$c_1, c_2, \ldots$</td><td>nema</td><td>0 (nula); 1 (jedinica)</td></tr>
<tr><td>operacije
stepena ili reda
$1, 2, 3, \ldots, j, \ldots$</td><td>$f_1, f_2, \ldots$</td><td>nema</td><td>$+$ (sabiranje, reda 2);
$\cdot$ (množenje,
reda 2)</td></tr>
<tr><td>relacije (predikati)
stepena ili reda
$1, 2, 3, \ldots, j, \ldots$</td><td>$R_1, R_2, \ldots$</td><td>$\in$ (je elemenat od,
reda 2);
$=$ (jednako, reda 2)</td><td>$=$ (jednakost, reda 2)</td></tr>
<tr><td>zagrade</td><td colspan="3">((leva zagrada);) (desna zagrada)</td></tr>
</table>

Tabela 1. Alfabet jezika klase $\mathcal{L}_1$.

Skup svih simbola promenljivih označavamo sa Var, skup svih znakova konstanti sa $Const$, skup svih funkcijskih znaka sa $\mathcal{F}$, dok sa $\mathcal{R}$ obeležamo skup svih relacijskih simbola našeg jezika. Dalje, neka je svakom $f \in \mathcal{F}$ dodeljen prirodan broj n_f koji označava broj argumenata funkcije f. Slično, sa prirodnim brojem n_R obeležavamo arnost proizvoljne relacije $R \in \mathcal{R}$.

Definicija 1.1. *Termi* su elementi namanjeg skupa izraza $\mathcal{T}$ za koji važi:

(a) $Const \cup Var \subset \mathcal{T}$;

(b) ako su $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$ i ako je $f \in \mathcal{F}$, onda $f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$. ▲

Definicija 1.2. *Formule* su elementi najmanjeg skupa izraza $\mathcal{W}$ koji zadovoljava sledeće uslove:

(a) za sve $R \in \mathcal{R}$ važi $R(t_1, \ldots, t_{n_R}) \in \mathcal{W}$, gde su $t_1, \ldots, t_{n_R}$ proizvoljni termi (*atomarne formule*);

(b) ako su $\phi, \psi \in \mathcal{W}$ i ako je x promenljiva, tada su izrazi:

$$(\phi) \leftrightarrow (\psi), \quad (\phi) \rightarrow (\psi), \quad (\phi) \vee (\psi), \quad (\phi) \wedge (\psi),$$

$$\neg(\phi), \quad \forall x(\phi) \text{ i } \exists x(\phi),$$

takođe elementi skupa $\mathcal{W}$. ▲

Neka je A alfabet jezika L iz $\mathcal{L}_1$. Konačni nizovi elemenata iz A tvore reči našeg jezika. Dakle, svakoj reči jezika L možemo dodeliti jedinstveni prirodan broj koji predstavlja dužinu niza simbola kojima je data reč predstavljena. Taj prirodan broj zovemo *dužina reči.* Određene reči su izdvojene i predstavljaju formule ili terme. Prethodne definicije impliciraju:

(a) Svaki term iz L je ili konstanta ili promenljiva ili je predstavljen u obliku $f(t_1, \ldots, t_{n_f})$, gde je f operacija reda n_f, a $t_1, \ldots, t_{n_f}$ su termi kraće dužine.

(b) Svaka formula iz L je predstavljena ili u obliku $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, gde je R n_R-arna relacija, a $t_1, \ldots, t_{n_R}$ su termi kraće dužine, ili u nekoj od sedam formi:

$$(\phi) \leftrightarrow (\psi), \quad (\phi) \rightarrow (\psi), \quad (\phi) \vee (\psi), \quad (\phi) \wedge (\psi),$$

$$\neg(\phi), \quad \forall x(\phi) \text{ i } \exists x(\phi),$$

gde su ϕ i ψ formule kraće dužine i x je promenljiva.

Indukcijom po dužini reči se pokazuje sledeća važna

Lema 1.1 (Jedinstvene prezentacije). *Svaka reč unutar jezika L je ili term, ili formula, ili ni term ni formula. Ove alternative, kao i alternative iz (a) i (b) iznad, su uzajamno isključive. Svaki term (resp. formula) može na jedinstven način biti prikazan u nekoj formi iz (a) (resp. (b)).*

Korišćenje ove leme obezbeđuje korektnost sledećih definicija slobodnih i vezanih pojavljivanja varijabli u termima i formulama.

Definicija 1.3.

(a) Svako pojavljivanje promenljive u atomarnim formulama ili termima je *slobodno.*

(b) Svako pojavljivanje promenljive u $\neg(\phi)$ ili u $(\phi_1) * (\phi_2)$ (gde je $*$ bilo koji od veznika „$\vee$", „$\wedge$", „$\rightarrow$ ", „$\leftrightarrow$ ") je *slobodno* (respektivno *vezano*) ako i samo ako su odgovarajuća pojavljivanja u ϕ, ϕ_1 ili ϕ_2 *slobodna* (respektivno *vezana*).

(c) Svako pojavljivanje promenljive x u $\forall x\ (\phi)$ i $\exists x\ (\phi)$ je *vezano.* Pojavljivanje drugih promenljivih u $\forall x\ (\phi)$ i $\exists x\ (\phi)$ je isto kao i njihovo pojavljivanje u formuli ϕ. ▲

Neka se kvantifikator $\forall$ (ili $\exists$) pojavljuje u formuli ϕ. Iz prethodnih definicija sledi da posle posmatranog kvantifikatora mora da sledi promenljiva, a zatim i leva zagrada unutar ϕ. Izraz koji počinje sa tom promenljivom i završava sa korespodentnom desnom zagradom se zove *poljem delovanja* datog kvantifikatora.

Definicija 1.4. Pretpostavimo da nam je data formula ϕ, slobodno pojavljivanje promenljive x u ϕ, i term t. Kažemo da je term t *slobodan* za dato *pojavljivanje promenljive* x u ϕ ako to pojavljivanje x-a ne leži unutar polja delovanja bilo kog kvantifikatora oblika $\exists y$ ili $\forall y$, gde je y varijabla koja se pojavljuje u t. ▲

Obično moramo da zamenimo sva slobodna pojavljivanja date promenljive nekim termom, ako je zamena moguća u smislu prethodne definicije. Tu zamenu označavamo sa $\varphi(x|t)$. Važno je istaći da ovom operacijom zamene termi prelaze opet u terme i formule u formule (pokazuje se indukcijom po dužini izraza). Ako je t slobodan za sva slobodna pojavljivanja x-a u ϕ prosto kažemo da je term t slobodan za x u ϕ.

Prethodne dve definicije, **Definicija 1.3.** i **1.4.** se kasnije koriste. Ovde ćemo dati intuitivno objašnjenje istih.

Definicija 1.3. nam dozvoljava da uvedemo važnu klasu *zatvorenih* formula. Po definiciji ona se sastoji od formula bez slobodnih pojavljivanja promenljivih (njih takođe zovemo i *rečenicama*). Zatvorenim formulama odgovaraju tvrđenja koja su kompletno deteriminisana (u smislu tačnosti).

Definicija 1.4. daje „higijenska pravila” za menjanje notacije. Ako neodređeni objekat x želimo da zovemo nekim drugim imenom y u datoj formuli, moramo biti sigurni da se x ne pojavljuje u delovima formule gde je ime y već rezervisano za označavanje neodređenog objekta posle kvantifikatora. Drugim rečima, y mora biti slobodno od pojavljivanja x-a. Ovo se lepo ilustruje kroz jezik analize: umesto $\int_1^x f(y)\,\mathrm{d}y$ možemo pisati $\int_1^x f(z)\,\mathrm{d}z$, međutim ne smemo pisati $\int_1^x f(x)\,\mathrm{d}x$; promenljiva y je vezana, u polju delovanja $\int f(y)\,\mathrm{d}y$.

1.2 Interpretacija jezika klase $\mathcal{L}_1$

Formule imaju značenje samo kad damo interpretaciju simbolima. Neka je dat jezik L klase $\mathcal{L}_1$. Pod *interpretacijom* $\mathcal{M}$ jezika L mislimo na skup (klasu) D, koji zovemo *domenom* interpretacije, i funkciju I koja dodeljuje:

(1) svim relacijskim simbolima R reda n_R, n_R-arnu relaciju $R_\mathcal{M}$ na D, dakle $R_\mathcal{M} \subseteq D^{n_R}$;

(2) svim funkcijskim znacima f reda n_f, funkciju $f_{\mathcal{M}}$ iz D^{n_f} u D, dakle $f_{\mathcal{M}} : D^{n_f} \to D$;

(3) svakoj konstanti c, elemenat $c_{\mathcal{M}}$ iz domena D, dakle $c_{\mathcal{M}} \in D$.

Definicija 1.5. *Valuacija* α interpretacije $\mathcal{M}$ je preslikavanje skupa promenljivih $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ u domen interpretacije $D_{\mathcal{M}}$. ▲

Definicija 1.6. *Vrednost* terma u valuaciji α interpretacije $\mathcal{M}$, u oznaci $[t]_\alpha^{\mathcal{M}}$, je elemenat domena definisan sa:

(1) $[x_i]_\alpha^{\mathcal{M}} = \alpha(x_i)$ za sve $i \in \mathbb{N}$, gde je x_i promenljiva;

(2) $[c]_\alpha^{\mathcal{M}} = c_{\mathcal{M}}$ za proizvoljnu konstantu c, primetimo da $[c]_\alpha^{\mathcal{M}}$ na zavisi od valuacije α;

(3) ako je f proizvoljna funkcija reda n_f i ako su vrednosti terma $t_1, \ldots, t_{n_f}$ već definisani ($[t_i]_\alpha^{\mathcal{M}} \in D_{\mathcal{M}}$, $i = 1, \ldots, n_f$), tada

$$[f(t_1, \ldots, t_{n_f})]_\alpha^{\mathcal{M}} = f_{\mathcal{M}}([t_1]_\alpha^{\mathcal{M}}, \ldots, [t_{n_f}]_\alpha^{\mathcal{M}}).$$

▲

Definicija 1.7. Atomarna formula $\phi = R(t_1, \ldots, t_{n_R})$ je *tačna ili zadovoljena* u valuaciji α interpretacije $\mathcal{M}$, u oznaci $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ ili $\mathcal{M} \models \phi[\alpha]$, akko važi:

$$([t_1]_\alpha^{\mathcal{M}}, \ldots, [t_{n_R}]_\alpha^{\mathcal{M}}) \in R_{\mathcal{M}},$$

gde je R n_R-arna relacija i $t_1, \ldots t_{n_R}$ su termi našeg jezika.

Za formule koje nisu atomarne kroz sledećih par tačaka rekurzivno definišemo relaciju zadovoljenja u valuaciji α interpretacije $\mathcal{M}$:

(a) $\mathcal{M} \models_\alpha \neg\phi$ ako i samo ako nije $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$;

(b) $\mathcal{M} \models_\alpha \phi \vee \psi$ ako i samo ako $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ ili $\mathcal{M} \models_\alpha \psi$;

(c) $\mathcal{M} \models_\alpha \phi \wedge \psi$ ako i samo ako $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ i $\mathcal{M} \models_\alpha \psi$;

(d) $\mathcal{M} \models_\alpha \phi \to \psi$ ako i samo ako ili nije $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ ili $\mathcal{M} \models_\alpha \psi$;

(e) $\mathcal{M} \models_\alpha \phi \leftrightarrow \psi$ ako i samo ako ili $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ i $\mathcal{M} \models_\alpha \psi$ ili nije $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ i nije $\mathcal{M} \models_\alpha \psi$;

(f) $\mathcal{M} \models_\alpha (\forall x_i)\phi$ ako i samo ako za svaku valuaciju α' koja se razlikuje od α u najviše i-tom članu važi $\mathcal{M} \models_{\alpha'} \phi$;

(g) ako je $d \in D$, tada $\mathcal{M} \models_\alpha (\exists x_j)\phi$ ako i samo ako za neko $d \in D$ važi $\mathcal{M} \models_{\alpha(j|d)} \phi$. Sa $\alpha(j|d)$ označavamo valuaciju definisanu jednakošću:

$$\alpha(j|d)(x_i) := \begin{cases} \alpha(x_i), & \text{za } i \neq j \\ d, & \text{za } i = j \end{cases},$$

gde je $d \in D_{\mathcal{M}}$. ▲

Kažemo da je formula ϕ *tačna u interpretaciji* $\mathcal{M}$ ako je $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ za sve valuacije α date interpretacije $\mathcal{M}$. U tom slučaju pišemo $\mathcal{M} \models \phi$. Formula je *netačna u interpretaciji* $\mathcal{M}$ ako i samo ako za sve valuacije α interpretacije $\mathcal{M}$ nije $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$.

Interpretaciju $\mathcal{M}$ zovemo *modelom* skupa formula Γ ako i samo ako je svaka formula iz skupa Γ tačna u interpretaciji $\mathcal{M}$.

Dajemo par tvrđenja koja predstavljaju *semantičke osobine logike prvoga reda.*

- Ne postoji formula ϕ za koju je istovremeno $\mathcal{M} \models \phi$ i $\mathcal{M} \models (\neg\phi)$;
- Ako je $\mathcal{M} \models \phi$ i $\mathcal{M} \models (\phi \rightarrow \psi)$ onda važi i $\mathcal{M} \models \psi$;
- $\mathcal{M} \models \phi$ ako i samo ako $\mathcal{M} \models (\forall x)\phi$. Ovaj rezultat se proširuje na sledeći način. Pod *zatvorenjem* formule ϕ mislimo na zatvorenu formulu koju dobijamo od ϕ stavljanjem prefiksa univerzalnih kvantifikatora onih varijabli koje se pojavljuju slobodno u formuli ϕ. Ako ϕ nema slobodnih promenljivih onda je njeno zatvorenje sama formula ϕ. Sada imamo da je ϕ tačna akko je njeno zatvorenje tačno.
- Neka je ϕ zatvorena formula. Tada za svaku interpretaciju $\mathcal{M}$ ili je $\mathcal{M} \models \phi$ ili $\mathcal{M} \models \neg\phi$, odnosno ili je ϕ tačna u $\mathcal{M}$ ili ϕ nije tačna u $\mathcal{M}$.
- Neka je $\phi(x)$ formula i t term koji je slobodan za promenljivu x unutar formule ϕ. Tada imamo da je formula $(\forall x)\phi(x) \rightarrow \phi(t)$ tačna u svim interpretacijama.
- Ako formula ϕ ne sadrži slobodna pojavljivanja promenljive x tada je $(\forall x)(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\forall x)\psi)$ tačno u svim interpretacijama.

Dokaze prethodnih tačaka videti u, recimo, [11].

Formula ϕ je *logički validna* ili *valjana* ako i samo ako je tačna u svim interpretacijama.

Za formulu ϕ kažemo da je *zadovoljavajuća* akko postoji interpretacija $\mathcal{M}$ i u njoj neka valuacija α za koju važi $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$.

Formula ϕ je logički validna akko $\neg\phi$ nije zadovoljavajuća i ϕ je zadovoljavajuća akko $\neg\phi$ nije logički validna. Ako je ϕ zatvorena formula tada je ona zadovoljavajuća akko za neku interpretaciju $\mathcal{M}$ važi $\mathcal{M} \models \phi$.

Formula ϕ je *kontradikcija* ako i samo ako je $\neg\phi$ logički validna.

Kažemo da ϕ *logički implicira* ψ (ili da je ψ *logička posledica* od ϕ) akko za svaku interpretaciju $\mathcal{M}$ i za svaku valuaciju α iz $\mathcal{M}$ važi da iz $\mathcal{M} \models_\alpha \phi$ sledi $\mathcal{M} \models_\alpha \psi$. Dve formule su *logički ekvivalentne* akko logički impliciraju jedna drugu.

Formula ψ je *logička posledica skupa formula* Σ akko postoji konačan skup formula $\Gamma(\subseteq \Sigma)$ za koji je ψ logička posledica svih formula ϕ koje su iz Γ.

1.3 Formalizacija teorije prvoga reda

U prošlom delu smo dali jednu vrstu interpretacije logike iz klase $\mathcal{L}_1$. Ona je izvršena kroz davanje tačnosti i netačnosti formula u određenoj valuaciji datog modela, **Definicija 1.7.** Takav pristup nam je omogućio da vidimo kada je formula logički validna, kontradikcija ili nijedno od ta dva u određenom modelu. Da bi rekli nešto više o teoriji, zadovoljenost u svim modelima, treba nam drugi pristup. On je izvršen kroz formalnu teoriju.

Formalna teorija T je definisana ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) Prebrojiv skup simbola je dat kao alfabet od T. Konačan niz simbola teorije T zovemo izrazi od T;

(2) Postoji podskup skupa svih izraza od T koji se zove skup *dobro formiranih formula* (dff) od T. Obično postoji efektna procedura za određivanje „dobre formiranosti";

(3) Izdvojeni podskup skupa dobro formiranih formula teorije T zovemo *aksiomama* od T. Najčešće postoji efektna procedura na osnovu koje vidimo da li je posmatrana (dff) aksioma, u tom slučaju takvu formalnu teoriju zovemo *aksiomatskom* teorijom;

(4) Postoji konačan skup relacija $R_1, \ldots, R_n$ nad skupom (dff), koji zovemo *pravila izvođenja.* Za svako R_i postoji jedinstven pozitivan ceo broj j takav da za svaki skup od j dobro forimranih formula i za svaku (dff) ϕ, postoji efektna procedura na osnovu koje odlučujemo da li su datih j (df) formula u relaciji R_i sa ϕ i ako jesu ϕ zovemo *direktnom posledicom* datog skupa (dff) po pravilu R_i.

Dokaz u teoriji T je niz $\phi_1, \ldots, \phi_n$ formula[2] takvih da za svako i ili je ϕ_i aksioma od T ili je ϕ_i direktna posledica nekih prethodnih formula po nekom od pravila izvođenja.

Teorema teorije T je formula ϕ za koju postoji dokazni niz čiji je poslednji član ϕ. Takav dokaz zovemo *dokaz formule* ϕ.

Teorija T je *konzistentna* akko ne postoji formula ϕ za koju su i ϕ i $\neg\phi$ teoreme.

Formulu ψ teorije T zovemo *posledicom* skupa formula Γ ako i samo ako postoji niz $\phi_1, \ldots, \phi_n$ formula tako da $\psi = \phi_n$ i za svako i ili je ϕ_i aksioma ili je ϕ_i u Γ ili je pak ϕ_i direktna posledica nekih prethodnih formula iz niza na osnovu nekog pravila izvođenja. Takav niz zovemo *dokazom* ili *dedukcijom* formule ψ iz Γ. Elementi skupa Γ se zovu *hipoteze* ili *premise* dokaza. Koristimo $\Gamma \vdash \psi$ kao zamenu za „ψ je posledica od Γ”. Da ne bi došlo do zabune, kad radimo sa više teorija stavljamo $\Gamma \vdash_T \psi$ kao zamenu za ψ je posledica skupa Γ u teoriji T. Ako je Γ konačan skup $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ tada pišemo $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ umesto $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \psi$. Ako je Γ prazan skup $\emptyset$, tada $\emptyset \vdash \psi$ ako i samo ako je ψ teorema. Uobičajeno se izostavlja znak „$\emptyset$” i piše se $\vdash \psi$. Dakle, $\vdash \psi$ je drugi naziv za ψ je teorema.

Kroz sledeće četiri tačke uvodimo formalnu aksiomatsku teoriju T za neki jezik $L \in \mathcal{L}_1$, koju zovemo *teorijom prvoga reda* ili *teorijom predikatskog računa*.

(1) Simboli teorije T su isti kao u delu **1.1.**, s tim što se ograničavamo na veznike $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$ i univerzalni kvantifikator $\forall$ (videti Tabelu 1.).

(2) Dobro formirane formule definišemo preko **Definicije 1.1.** i **Definicije 1.2.**, gde se u potonjoj ograničavamo na simbole iz (1).

(3) *Logičke aksiome.* Neka su ϕ, ψ i τ proizvoljne formule teorije T tada su sledeće formule aksiome:

- (A1) $\phi \rightarrow (\phi \wedge \phi)$;
- (A2) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi$;
- (A3) $(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\neg(\psi \wedge \tau) \rightarrow \neg(\tau \wedge \phi))$;
- (B1) $[\forall x(\phi \rightarrow \psi)] \rightarrow (\forall x(\phi) \rightarrow \forall x(\psi))$;
- (B2) $\phi \rightarrow \forall x(\phi)$, gde je formula ϕ takva da ne sadrži slobodna pojavljivanja promenljive x;
- (B3) $\forall x(\phi(x)) \rightarrow \phi(x|t)$, videti komentar posle **Definicije 1.4.**

[2] Od sada pod pojmom formula mislimo na dobro formiranu formulu. Ako bude bilo potrebe napomenućemo kada izraz nije (dff).

Specijalne aksiome. Njih ne možemo navesti. One zavise od teorije koja se formalizuje u okviru predikatskog računa. U drugoj glavi navodimo devet specijalnih aksioma teorije L_1S, uobičajena je oznaka **ZFC**.

(4) Pravila izvođenja teorije prvoga reda su:

(a) *Modus Ponens* (**MP**): ψ sledi iz ϕ i $\phi \to \psi$;

(b) *Generalizacija* (**GEN**): $\forall x(\phi)$ sledi iz ϕ.

Ostale veznike uvodimo preko sledeće definicije:

(D1) $\phi \vee \psi$ zamena za $\neg((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$;

(D2) $\phi \leftrightarrow \psi$ zamena za $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$;

(D3) $(\exists x)\phi$ zamena za $\neg((\forall x)(\neg\phi))$.

Trebalo bi da napomenemo da ovaj izbor logičkih aksioma i pravila izvođenja nije nikako jedinstven. Postoji mnogo ekvivalentnih pristupa, mi smo izabrali formalizaciju kao u [14].

Neka je T teorija prvoga reda. Pod modelom teorije T mislimo na interpretaciju u kojoj su sve aksiome teorije tačne. Zbog semantičkih osobina imamo da modus ponens i generalizacija očuvavaju tačnost formula. Dakle, svaka teorema teorije T je tačna u svakom modelu date teorije.

Sada dajemo par tvrđenja logike prvoga reda koja se dokazuju bez interpretiranja simbola. Dokaze pogledati u [11] i [15].

Teorema 1.1 (Dedukcije). *Neka je ϕ zatvorena formula i neka $\Gamma, \phi \vdash \psi$ tada $\Gamma \vdash \phi \to \psi$.*

Teorema 1.2 (Redukcije). *Ako je Γ skup formula teorije T i ako je φ formula te teorije, tada važi:*

$$\Gamma \vdash \varphi \quad akko \quad \vdash (\phi_1 \to \cdots \to \phi_n \to \varphi),$$

gde sve formule ϕ_i predstavljaju zatvorenje nekih formula iz Γ.

1.4 Teorije prvoga reda sa jednakošću

Neka je $L_=$ jezik klase $\mathcal{L}_1$ koji sadrži relacijski znak $=$ dužine dva. Tradicionalno pišemo $x_1 = x_2$ umesto $=(x_1, x_2)$. Ako je ϕ formula, x promenljiva i t term, sa $\phi(x \leftrightsquigarrow t)$ označavamo rezultat zamene t-a za neka, ne nužno sva, slobodna pojavljivanja x kad ne dolazi do zabune, odnosno kada je to pojavljivanje slobodno za term t. $T_=$ zovemo *teorijom prvoga reda sa jednakošću* (ili jednostavno *teorijom sa jednakošću*) ako spisku logičkih aksioma pridodamo sledeće dve aksiome jednakosti:

(C1) Refleksivnost jednakosti: $(\forall x)(x = x)$;

(C2) $x = y \to (\phi(x) \to \phi(x \leftrightsquigarrow y))$, gde je ϕ atomarna formula, a x i y su promenljive.

Uz pomoć logičkih aksioma i aksioma jednakosti pokazuje se sledeće važno tvrđenje, dokaz se može videti u, recimo, [10] ili [11].

Lema 1.2. *Neka je $T_=$ proizvoljna teorija sa jednakošću, tada postoji dokaz sledećih formula u datoj teoriji $T_=$:*

a) $t = t$, *za sve terme t jezika $L_=$;*

b) $t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$ *za svaka dva terma t_1 i t_2 našeg jezika;*

c) $(t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3) \to t_1 = t_3$, *za proizvoljne terme t_1, t_2 i t_3;*

d) $x = t \to (\phi(x) \to \phi(x \leftrightsquigarrow t))$, *gde je ϕ proizvoljna formula jezika $L_=$, t je proizvoljan term, a x proizvoljna promenljiva za koju je dozvoljena pomenuta zamena.*

1.5 Kompletnost

Ovde dajemo krajnji, najbitniji rezultat, Gödel-ovu teoremu kompletnosti: U proizvoljnoj predikatskoj logici (teoriji prvoga reda) teoreme su tačno one formule jezika koje su logički validne formule. Teorema kompletnosti zapravo predstavlja vezu između relacija $\vdash$ i $\models$.

Teorema 1.3 (Kompletnost)**.** *Neka je T proizvoljna teorija prvoga reda. Tada za proizvoljnu formulu ϕ teorije T imamo*

$$\phi \text{ je teorema.} \leftrightarrow \phi \text{ je logički validna.}$$
$$\vdash \phi \leftrightarrow \models \phi.$$

Posledica: *Za svaku teoriju prvoga reda T imamo:*

a) *Formula ϕ je tačna u svakom modelu teorije T ako i samo ako je $\vdash_T \phi$.*

b) *Ako je formula ψ teorije T logička posledica skupa formula Σ iste teorije, tada je takođe $\Sigma \vdash_T \psi$.*

c) *T je konzistentna teorija ako i samo ako ima model.*

Napomena: Važi i proširenje Gödel-ove teoreme kompletnosti na teorije sa jednakošću ako se jednakost „normalno” interpretira. Model $\mathcal{M}$ teorije sa jednakošću zovemo *normalnim* ako simbol $=$ interpretiramo kao relaciju-dijagonalu na domenu D date interpretacije, preciznije:

$$([t_1]_\alpha^{\mathcal{M}}, [t_2]_\alpha^{\mathcal{M}}) \in =_{\mathcal{M}} \text{ akko } [t_1]_\alpha^{\mathcal{M}} = [t_2]_\alpha^{\mathcal{M}}$$

Dokaz ovog tvrđenja kao i prošle teoreme i posledice imamo u [10] ili [11].

U delu **1.2** interpretirali smo sve simbole, međutim jasno je da je dovoljno ograničiti se na interpretaciju simbola $\rightarrow$, $\wedge$, $\neg$ i $\forall$, naravno od same teorije zavisi interpretacija atomarnih formula.

2

Pregled Teorije skupova

Aksiomatizacija teorije skupova se vrši u teoriji prvoga reda sa jednakošću, na jeziku $L_=$. U samoj teoriji pored predikata jednakosti imamo još jedan predikat reda dva, predikat „$\in$”, funkcijski znaci i simboli konstanti ne postoje. Objekte teorije zovemo skupovima. Obeležavamo ih malim slovima latinice $x, y, z, \ldots$ iako ponekad koristimo i velika slova. Skraćeni zapisi koji se koriste su:

$$x \notin y \text{ zamena za } \neg(x \in y); \quad x \neq y \text{ zamena za } \neg(x = y);$$

$$\forall x \in a\ \varphi(x) \text{ zamena za } \forall x(x \in a \to \varphi(x));$$

$$\exists x \in a\ \varphi(x) \text{ zamena za } \exists x(x \in a \wedge \varphi(x));$$

$$\exists! x\ \varphi(x) \text{ zamena za } \exists x\ \forall u(\varphi(u) \leftrightarrow u = x).$$

2.1 Aksiome ZFC teorije

(Ax1) *Aksioma ekstenzionalnosti:*

$$\forall x \forall y(\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y).$$

(Ax2) *Aksioma para:*

$$\forall a \forall b \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b).$$

(Ax3) *Shema izdvajanja:*
Ako je $\varphi(u, p)$ formula u kojoj y nema slobodnih pojavljivanja, tada:

$$\forall x \forall p \exists y \forall u(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \varphi(u, p)).$$

(Ax4) *Aksioma unije:*

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge u \in z)).$$

Posledice prve četiri aksiome teorije skupova su:

1. Ekstenzionalnost govori o tome da je skup determinisan svojim elementima. Zapravo važi i obrat:

$$x = y \rightarrow \forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y).$$

Ovo tvrđenje je teorema logike prvoga reda sa jednakošću.

2. Prve dve aksiome nam omogućuju definisanje uređenog para. Ako su nam data dva skupa a i b tada postoji jedinstveni skup $\{a, b\}$. Dalje, koristeći dosetku Kuratovskog imamo postojanje i uređenog para:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \text{ i važi: } (a, b) = (u, v) \leftrightarrow a = u \wedge b = v.$$

Uređenu trojku definišemo sa $(a, b, c) := ((a, b), c)$, itd.

3. Shema separacije zaslužuje naročit osvrt. U početku je njena formulacija bila mnogo jača. Bilo kakva kolekcija objekata (zapravo skupova) je opet skup. Preciznije, svaka kolekcija skupova koja može da se „specifikuje" na našem jeziku je skup.

Aksioma izdvajanja (Frege 1893): $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$,
gde je $\varphi(x)$ bilo koja formula (jezika teorije skupova) u kojoj promenljiva y nije slobodna (pošto pretpostavka y slobodna u $\varphi(x)$ može dovesti do konfuzije sa y koje garantuje sama aksioma). Razlog pisanja $\varphi(x)$ mesto φ je nameran pokušaj fokusiranja pažnje na „interensantne" slučajeve ove aksiome sheme, slučajeve u kojima formula φ sadrži slobodna pojavljivanja varijable x. Slično, kada smo u **(Ax3)** stavljali $\varphi(u, p)$ pod promenljivom p smo mislili na neki parametar koji figuriše unutar formule φ.

Teorema 2.1 (Raselova antinomija)**.** $\neg \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$.

Dokaz. Pre svega treba primetiti da ovo nije samo teorema teorije skupova, ovo je teorema logike, u dokazu ne koristimo niti jednu specijalnu aksiomu **ZF**-a. Pretpostavimo suprotno, neka postoji skup y takav da je tačna negacija teoreme: $\forall x (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$, tada, kako je formula ispunjena za sve x to važi i konkretno za $x = y$. Dakle, imamo:

$$y \in y \leftrightarrow y \notin y,$$

što je kontradikcija. Pretpostavku moramo odbaciti. ∎

Jedan od načina kojim je izbegnuta nekozinstetnost Aksiome izdvajanja je Aksioma Shema separacije (**Ax3**) koju smo i mi uvrstili u naš sistem aksioma. Naime, jednom kad imamo neki skup z tada možemo formirati i skup $\{x \in z : \varphi(x)\}$. Napravimo skup $r = \{x \in z : x \notin x\}$, međutim sada imamo ako $r \in z$ onda $r \in r \leftrightarrow r \notin r$, što znači da $r \notin z$, odnosno pokazali smo sledeću

Teorema 2.2. *Ne postoji skup svih skupova (univerzum* $\mathbf{V}$*):* $\forall z \exists r(r \notin z)$.

Niti jedna do sada data aksioma ne govori o postojanju skupova. Sve one govore o kreiranju skupova od nekih postojećih. Aksioma beskonačnosti koju dajemo posle postuliše postojanje skupa. Međutim, kako je $\exists x(x = x)$ teorema predikatskog računa i kako su naši jedini objekti poimanja skupovi, to možemo reći da smo pretpostavili postojanje bar jednog skupa onog trenutka kada smo prihvatili logiku prvoga reda.

Definicija 2.1. Sa $\emptyset$ označavamo jedinstveni skup y za koji važi $\forall x(x \notin y)$.

Data definicija je dobra: Neka je z proizvoljan skup (on postoji zbog gornje priče). Primenimo **Ax3** sa formulom φ koja je kontradikcija (na primer, $x \neq x$) da dobijemo y takvo da je $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$ što je ekvivalentno sa $\forall x(x \in y \leftrightarrow \text{NETAČNO})$. Jedinstvenost sledi iz ekstenzionalnosti. ▲

Prve tri aksiome opravdavaju i sledeću:

Definicija 2.2. Za date skupove a i b imamo:

- Presek dva skupa $a \cap b := \{x \in a : x \in b\}$;
- Razlika dva skupa $a - b := \{x \in a : x \notin b\}$;
- Kažemo da su a i b *disjunktni* ako je $a \cap b = \emptyset$;
- Neka je $\mathcal{F} \neq \emptyset$ familija skupova, tada

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{y \in \mathcal{F}} y = \{x : \forall y \in \mathcal{F}(x \in y)\}.$$

▲

Skup $a \cap b$ se mogao definisati i kao $\bigcap\{a, b\}$, naravo posle definicije preseka familije koja u ovom slučaju predstavlja dvoelementnu familiju dobijenu primenom aksiome para. Ova definicija kaže da objekti definisani u njoj zaista postoje (oni su skupovi). Primetimo da je uslov u poslednjoj tački neophodan, u suprotnom imamo $\bigcap \emptyset$ je skup, što se kosi sa Teoremom 2.2.

4. Za definisanje unije nisu nam dovoljne prve tri aksiome. Prve četiri aksiome nam opravdavaju sledeću

Definicija 2.3. Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljna familija skupova (može i prazna!), tada je

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y = \{x : \exists y \in \mathcal{F}(x \in y)\}$$

objekat naše teorije (skup). ▲

Takođe definišemo sledeće kolekcije:

$$u \cup v := \bigcup \{u, v\}, \qquad u \cup v \cup t := (u \cup v) \cup t, \quad itd.$$

$$\{a, b, c\} := \{a, b\} \cup \{c\}, \qquad \{a_1, a_2, \dots, a_n\} := \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}.$$

Sa dodatnom, petom aksiomom moguće je formalizovati diskretni deo matematike (matematiku konačnih skupova). Posle Aksiome Partitvnog skupa dajemo definicije najvažnijih objekata koji se mogu opravdati grupom prvih pet aksioma.

(Ax5) *Aksioma partitivnog skupa:*

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow u \subset x),$$

gde je $u \subset x$ zamena za formulu $\forall z (z \in u \to z \in x)$.

5. Ako nam je dat proizvoljan skup x tada postoji i skup y čiji elementi su podskupovi skupa x. Taj skup zovemo *partitivnim skupom* skupa x i označavamo ga sa $\mathcal{P}(x)$. Dakle, za proizvoljan skup x definišemo

$$\mathcal{P}(x) := \{u : u \subset x\},$$

partitivni skup skupa x.
Korišćenjem pete aksiome možemo definisati *proizvod* dva skupa a i b:

$$a \times b := \{(x, y) : x \in a \wedge y \in b\},$$

u aksiomi izdvajanja stavimo da je $\varphi(u) \equiv \exists x \in a\ \exists y \in b\ (u = (x, y))$, dok je skup iz kojeg izdvajamo $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$. Lako uopštavamo definiciju *Dekartovog proizvoda*, ako je n je prirodan broj:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times a_{n+1} := (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) \times a_{n+1},$$

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) : x_1 \in a_1 \wedge x_2 \in a_2 \wedge \dots \wedge x_n \in a_n\}.$$

Neka je dat prirodan broj n, n-arna *relacija* ρ je skup uređenih n-torki u smislu gornjih definicija. Kažemo da je ρ *n-arna relacija na skupu x* ako je $\rho \subset x^n$. Često pišemo $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mesto $(x_1, \dots, x_n) \in \rho$. Takođe, specijalno za ρ binarno, imamo „$x\ \rho\ y$" mesto $(x, y) \in \rho$. Neka je ρ binarna relacija, tada *domenom* relacije ρ zovemo skup

$$dom(\rho) := \{u : \exists v(u, v) \in \rho\},$$

a sa *skup slika* relacije ρ zovemo skup

$$ran(\rho) := \{v : \exists u(u, v) \in \rho\}.$$

Binarna relacija f je *funkcija* ako za sve $(x, y) \in f$ i $(x, z) \in f$ važi $y = z$. Jedinstveno y takvo da je $(x, y) \in f$ zovemo *vrednošću* funkcije f u x; Koristimo standardnu notaciju:

$$y = f(x) \text{ ili } f : x \mapsto y, \ldots \text{ kao zamenu za } (x, y) \in f.$$

f je funkcija *na skupu* x ako je $x = dom(f)$. Ako je $dom(f) = x^n$, tada f zovemo n*-arnom funkcijom* na skupu x. f je funkcija *iz* x u y:

$$f : x \to y,$$

ako je $dom(f) = x$ i $ran(f) \subset y$. Skup svih funkcija iz skupa x u skup y označavamo sa y^x. Ako je $y = ran(f)$ tada f zovemo funkcijom *na* ili *sirjekcijom na* skup y. Funkcija f je *1-1* ili *injekcija* na skupu x ako

$$f(x) = f(y) \quad \text{implicira} \quad x = y.$$

Operacija stepena (reda) n na skupu x je funkcija $f : x^n \to x$.
Restrikcija funkcije f na skup x (obično važi $x \subset dom(f)$) je funkcija

$$f \restriction x := \{(u, v) \in f : u \in x\}.$$

Funkcija g je *ekstenzija (proširenje)* funkcije f ako $f \subset g$, što znači $dom(f) \subset dom(g)$ i $g(x) = f(x)$ za sve $x \in dom(f)$.
Ako su f i g funkcije takve da je $ran(g) \subset dom(f)$, *kompozicija* funkcija f i g je funkcija $f \circ g$ sa domenom $dom(f \circ g) = dom(g)$ za koju važi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ za sve $x \in dom(g)$.
Skup slika funkcije f označavamo sa $f"x$ ili $f(x)$, koristićemo i oznaku $im(f)$:

$$f"x = f(x) := \{v : (\exists u \in x) v = f(u)\}, \text{ gde je } x \subset dom(f),$$

dok *inverznu sliku* skupa y definišemo sa

$$f^{-1}(y) := \{u : f(u) \in y\}.$$

Ako je f „1-1” funkcija tada *inverznu* funkciju funkcije f obeležavamo sa f^{-1} i važi

$$f^{-1}(u) = v \text{ ako i samo ako } f(v) = u.$$

Ovde smo naveli najosnovnije posledice prvih pet aksioma. Ispostavlja se da su nam one dovoljne za formalizaciju diskretne matematike, matematike konačnog. Preostale su nam još tri aksiome, o kojima će više reči biti na drugom mestu.

(Ax6) *Aksioma beskonačnosti:*

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x) y \cup \{y\} \in x).$$

(Ax7) *Shema zamene:*
Neka je φ proizvoljna formula u kojoj promenljiva b nema slobodnih pojavljivanja, tada:

$$\forall a(\forall x \in a\ \exists! y\ \varphi(x,y) \to \exists b\ \forall x \in a\ \exists y \in b\ \varphi(x,y)).$$

(Ax8) *Aksioma fundacije:*

$$(\forall x)((\exists y)(y \in x) \to (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

(Ax9) *Aksioma izbora* **(AC)**:
Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljna familija nepraznih skupova, tada

$$\forall x \in \mathcal{F}\ \forall y \in \mathcal{F}\ (x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \to \exists c\ \forall x \in \mathcal{F}(SING(c \cap x)),$$

gde je $SING(x)$ zamena za x je singlton: $\exists y \in x\ \forall z \in x(z = y)$.

Napomene: Ovaj sistem aksioma nije jedinstven, postoje ekvivalentni pristupi aksiomatizaciji Teorije skupova. Mi smo se opredelili za **ZFC** aksiomatiku, po Cermelo-u i Fraenkel-u. Za drugačije odabire aksioma **ZFC**-a i dokaze ekvivalentnosti tih pristupa upućujemo na sjajnu knjigu Lévy-a, [9].

2.2 Klase

Videli smo u prošloj glavi da Fregeova aksioma izdvajanja dovodi do paradoksa. Naime, za formulu teorije skupova, $\varphi(x)$, kolekcija $\{x : \varphi(x)\}$ ne mora biti skup. Zbog toga uvodimo novi pojam, *klasa*. Klasu određenu formulom $\varphi(x)$ označavamo sa $\{x : \varphi(x)\}$, nju čine svi objekti x za koje je tačna formula $\varphi(x)$. Izraze oblika $\{x : \varphi(x)\}$ zovemo još i *term-klase*. Formula $\varphi(x)$ može da sadrži i druge slobodne promenljive sem x. Te varijable zovemo *parametrima*, različite vrednosti parametara dovode do formiranja različitih klasa. Primetimo da je svaki skup y klasa, jer $y = \{x : \varphi(x)\}$, gde je $\varphi(x) \equiv x \in y$. Klasa je proširenje pojma skupa u smislu da je svaki skup klasa ali nije svaka klasa skup.

Sa pojmom klase proširujemo jezik tako što svako tvrđenje koje sadrži term-klasu zamenjuje, verovatno duže, tvrđenje koje ne sadrži term-klase. Neformalno rečeno imamo:
Kako je $\{x : \varphi(x)\}$ kolekcija svih x koji zadovoljavaju $\varphi(x)$, izjava $y \in \{x : \varphi(x)\}$ označava $\varphi(y)$, gde smo izvršili pravilnu zamenu promenljivih x i y. Pošto su dva skupa koji imaju jednake elemente jednaki, to će i dve klase biti jednake ako su im članovi jednaki. Tačnije,

$$\{x : \varphi(x)\} = \{x : \psi(x)\} \text{ zamenjuje } \forall z(\varphi(z) \leftrightarrow \psi(z)).$$

Svaki skup je i klasa, otuda je dozvoljeno pisati $x = \{y : \varphi(y)\}$, kao i $\{y : \varphi(y)\} = x$, a ovo u prevodu označava $\forall z(z \in x \leftrightarrow \varphi(z))$. Kada kažemo da je jedna klasa član neke druge klase $\{x : \varphi(x)\} \in \{y : \psi(y)\}$ zapravo mislimo na formulu $\exists z(z = \{x : \varphi(x)\} \wedge z \in \{y : \varphi(y)\})$ i slično izraz tipa $\{x : \varphi(x)\} \in y$ zamenjuje $\exists z(z = \{x : \varphi(x)\} \wedge z \in y)$.

U prošloj glavi smo pokazali da ne postoji skup svih skupova. Međutim, on jeste klasa

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\},$$

koju zovemo *univerzumom*. Klase koje nisu skupovi, poput klase $\mathbf{V}$, zovemo *pravim klasama*.

Dogovorimo se da promenljive napisane velikim slovom alfabeta predstavljaju zamenu za term-klase. Znači kada napišemo veliko slovo, recimo A, pod time mislimo na klasu A bilo da je ona prava klasa, bilo da je skup, naravno ako drugačije ne napomenemo. Slično, trudićemo se da sa malim slovima označavamo promenljive koje predstavljaju skupove. Recimo $A \subset B$ označava

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ zamena za } \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)),$$

gde smo sa $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ označili term-klase koji definišu klase A i B respektivno.

Primer 2.1. Neka je A klasa definisana sa $\{x : \varphi(x, p)\}$, tada za svaki skup a važi $a \cap A$ je skup. $\square$

Objašnjenje: Ovo je zapravo skraćeni zapis tvrđenja **Ax3**. Imamo:

$$x \in a \cap A \text{ akko } x \in a \wedge x \in A \text{ akko } x \in a \wedge \varphi(x, p).$$

U ovom primeru smo koristili zamenu $x \in A \cap a \leftrightarrow x \in A \wedge x \in a$.

Usvajamo sledeću:

Definicija 2.4. Za svaka dva terma-klase A i B, definišemo:

- $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;
- $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$;
- $A - B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$;
- $\bigcup A := \bigcup\limits_{y \in A} y := \{x : \exists y(y \in A \wedge x \in y\}$;
- $\bigcap A := \bigcap\limits_{y \in A} y := \{x : \forall y(y \in A \to x \in y)\}$. ▲

Šta bi značilo $x \in \bigcup A$? U prevodu: $\exists y(\varphi(y) \wedge x \in y)$. Slično, $x \in \bigcap A$ zamenjuje $\forall y(\varphi(y) \to x \in y)$. Vidimo da su obe ove formule posle prevođenja postale izjave našeg jezika pre proširenja. Jasno je da $\bigcup A$ ne mora da bude skup, dok je na osnovu sheme izdvajanja $\bigcap A$ uvek skup, sem u slučaju kada je $A = \emptyset$. Ako je $A \neq \emptyset$ tada $\exists y(y \in A)$, sada na osnovu **Ax3** imamo $\bigcap A = \{x : x \in y \wedge \varphi(x)\}$, gde je $\varphi(x) \equiv \forall y(\varphi(y) \to x \in y)$.

Dalje, daćemo definicije *relacije-klase* i *funkcije-klase*.

Definicija 2.5. Za proizvoljne dve klase A i B definišemo:

- $A \times B := \{x : \exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b))\}$;
- $A^2 := A \times A$;
- $\mathcal{R}el(A) \leftrightarrow A \subset \mathbf{V}^2$;
- $\mathcal{J}ed(A) \leftrightarrow \forall u \forall v \forall w((u, v) \in A \wedge (u, w) \in A \to v = w)$;
- $\mathcal{F}un(A) \leftrightarrow \mathcal{R}el(A) \wedge \mathcal{J}ed(A)$. ▲

Kroz sledeći primer ilustrujemo upotrebu malopređašnje definicije.

Primer 2.2. Nek je $\mathcal{F}un(F)$ tada za svaki skup a, F"a je takođe skup. □

Objašnjenje: Ovaj primer je skraćeni zapis sheme zamene. Neka je

$$F = \{u : \exists x \exists y(u = (x, y)) \wedge \varphi(x, y)\},$$

gde je $\varphi(x, y)$ formula iz **Ax7**. Neka je a proizvoljan skup, tada kako je $\mathcal{F}un(F)$ važi i $\mathcal{J}ed(F)$, pa je tačno

$$\forall x \in a \exists! y(\varphi(x, y)).$$

U suprotnom $\exists x \in a \exists u \exists v (u \neq v \wedge \varphi(x,u) \wedge \varphi(x,v))$ što se kosi sa $\mathcal{J}ed(F)$. Dakle, skup b iz sheme zamene predstavlja zapravo F"a.
Napomene: Na početku smo rekli da prihvatamo **ZFC** aksiomatiku. Samim tim su objekti naše teorije skupovi i samo skupovi. Klase ne postoje kao objekti naše teorije. Sam pojam klase nam služi kao pomoćno sredstvo, radi lakšeg zapsivanja. Postoji pristup Teoriji skupova preko **NGB** aksiomatike, po Von Neumann-u, Gödel-u i Bernays-u. **NGB** teorija za objekte ima klase, dok su skupovi klase koje su elementi nekih drugih klasa. Kratak pregled teorije **NGB** je dat u knjizi [8].

2.3 Ordinali

Ovde dajemo pregled teorije ordinala bez operacija nad njima. Najbitniji deo ovog dela rada predstavljaju dva principa: princip transfinitne indukcije i princip transfinitne rekurzije. Bez ta dva principa nezamisliv je bilo kakav iole ozbiljniji pristup teoriji skupova.

Definicija 2.6. Neka je data binarna relacija ρ i skup A. Tada kažemo:

- ρ je *tranzitivna na* A akko $\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ (x\rho y \wedge y\rho z \rightarrow x\rho z)$;
- ρ je *irefleksivna na* A akko $\forall x \in A\ \neg(x\rho x)$;
- ρ je *refleksivna na* A akko $\forall x \in A\ (x\rho x)$;
- ρ zadovoljava zakon *trihotomije na* A akko
$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (x\rho y \vee y\rho x \vee x = y);$$
- Relaciju ρ koja je irefleksivna i tranzitivna na A zvaćemo *strogo parcijalnim uređenjem* skupa A;
- Relaciju ρ koja je irefleksivna, tranzitivna i zadovoljava zakon trihotomije na A zvaćemo *totalnim* ili *linearnim uređenjem* skupa A. ▲

Relacija koja je parcijalno uređenje[1] često se obeležava sa $<$. Sa $\leq$ označavamo relaciju datu sa $x \leq y$ akko $x < y \vee x = y$. Od posebnog su značaja relacije *dobrog uređenja*. Pre definicije dobrog uređenja treba da usvojimo još nekoliko pojmova. Neka je P parcijalno uređen skup relacijom $<$. Dalje, neka je X proizvoljan neprazan podskup skupa P i $a \in P$, tada:

- a je *maksimalan* elemenat skupa X ako $a \in X$ i $\forall x \in X \neg(a < x)$;

[1] Mislimo na strogo parcijalno uređenje iz gornje definicije.

- a je *minimalan* elemenat skupa X ako $a \in X$ i $\forall x \in X \neg(x < a)$;
- a je *najveći* elemenat skupa X ako $a \in X$ i $\forall x \in X(x \leq a)$;
- a je *najmanji* elemenat skupa X ako $a \in X$ i $\forall x \in X(a \leq x)$;
- a je *gornje ograničenje* skupa X ako $\forall x \in X(x \leq a)$;
- a je *donje ograničenje* skupa X ako $\forall x \in X(a \leq x)$;
- najmanje gornje ograničenje skupa X zovemo *supremumom* skupa X.
- a je *infimum* skupa X ako je a najveće donje ograničenje skupa X.

Supremum i infimum skupa X (ako postoje) obično označavamo sa $supX$ i $infX$. Ako je skup P linearno uređen tada se maksimalni i najveći kao i minimalan i najmanji elemenat skupa X poklapaju. Sada smo u mogućnosti da damo definiciju dobrog uređenja:

Definicija 2.7. Relacija ρ je *dobro uređenje* na skupu A akko ρ linearno uređuje A i svaki neprazan podskup skupa A ima minimalni elemenat. ▲

Teorija *oridinala* ili *ordinalnih brojeva* zapravo predstavlja teoriju dobrih uređenja. Mi koristimo Von Neumann-ovu definiciju ordinala, a za nju nam treba pojam tranzitivnog skupa. Posle dajemo par tvrđenja vezanih za tematiku ordinala.

Definicija 2.8. Skup z je *tranzitivan* akko $\forall y \in z\ (y \subset z)$, što je ekvivalentno sa

$$\forall x\ \forall y\ (x \in y \wedge y \in z \rightarrow x \in z).$$

▲

Ovo nije jedina karakterizacija tranzitivnih skupova, jer važi sledeća:

Teorema 2.3. *Neka je x proizvoljan skup. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1). *x je tranzitivan;*

(2). *$\bigcup x \subset x$;*

(3). *$\mathcal{P}(x)$ je tranzitivan skup.*

Definicija 2.9. Skup z je *ordinal* akko je z tranzitivan skup i z je dobro uređen relacijom $\in$. ▲

Treba razlikovati pojmove tranzitivnog skupa i tranzitivne relacije. Skup $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ je tranzitivan, dok relacija „$\in$” nije tranzitivna na A. Zaista, izjava $\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ (x \in y \wedge y \in z \to x \in z)$ nije tačna (neka je $x = \emptyset$, $y = \{\emptyset\}$ i $z = \{\{\emptyset\}\}$).

Tradicionalno se ordinali označavaju grčkim slovima sa početka alfabeta, što je i kod nas slučaj. Recimo, $\forall \alpha\ \varphi(\alpha)$ zamenjuje

$$\forall x\ (x \text{ je ordinal } \to \varphi(x)).$$

Podrazumevali smo da α predstavlja ordinal. Takođe, pod $\alpha < \beta$ mislimo $\alpha \in \beta$, a $\alpha \leq \beta$ zamenjuje $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

Definišemo klasu

$$ON = \{x : x \text{ je ordinal}\},$$

svih ordinala. Naravno, kad kažemo x je ordinal mislimo na formulu našega jezika:

$$\begin{gathered}
\forall t \in x\ \neg(t \in t) \quad \wedge \\
\forall t \in x\ \forall u \in x\ \forall v \in x\ (t \in u \wedge u \in v \to t \in v) \quad \wedge \\
\forall t \in x\ \forall v \in x\ (t \in v \vee v \in t \vee v = t) \quad \wedge \\
\forall t \in x\ (t \subset x) \quad \wedge \\
(\forall t \in\ \mathcal{P}(x) \setminus \emptyset)\ (\exists v \in t)\ (\forall u \in t)\ (\neg u \in v).
\end{gathered}$$

Pokazuje se da je ON prava klasa, odnosno ON nije objekat **ZFC**-a. Mi koristimo pojam klase ON jer nam olakšava dosta toga, tako:

(i) $x \in ON$ zamenjuje „x je ordinal”;

(ii) $x \subset ON$ zamenjuje „$\forall y \in x\ (y$ je ordinal$)$”;

(iii) $x \cap ON$ zamenjuje „$\{y \in x : y$ je ordinal$\}$”.

Sledeća teorema kaže da je klasa ON dobro uređena relacijom $\in$. Kako je ON prevelik objekat da bi bio skup i kako nismo dali definicije uređenja na klasama, u teoremi je dat „prevod” na jezik koji poznajemo.

Teorema 2.4. *ON je dobro uređeno sa $\in$. Preciznije:*

(1). *$\in$ je tranzitivno na ordinalima: $\forall \alpha\ \forall \beta\ \forall \gamma\ (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \to \alpha < \gamma)$;*

(2). *$\in$ je irefleksivno na ordinalima: $\forall \alpha\ \neg(\alpha < \alpha)$;*

(3). *$\in$ zadovoljava zakon trihotomije na ordinalima:*

$$\forall \alpha\ \forall \beta\ (\alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta);$$

(4). *svaki neprazni skup ordinala ima najmanji elemenat s obzirom na relaciju* $\in$.

Prethodnu teoremu nećemo dokazivati, pogledati u [6]. U dokazu iste se koristi niz pomoćnih tvrđenja:

Lema 2.1. *ON je tranzitivna klasa. Tačnije, ako je* $\alpha \in ON$ *i* $z \in \alpha$*, tada* $z \in ON$.

Dokaz. α je tranzitivan skup, otuda $z \subset \alpha$. Kako je $\in$ dobro uređenje na α, to $\in$ dobro uređuje i svaki podksup od α, pa samim tim i z. Ostaje da pokažemo tranzitivnost skupa z ili $x \in y \in z \rightarrow x \in z$. Kako je $z \subset \alpha$ to imamo $y \in \alpha$, pa i $y \subset \alpha$ što daje $x \in \alpha$. Sada, iz $x, y, z \in \alpha$ imamo $x \in y \in z \rightarrow x \in z$ jer je $\in$ tranzitivno na α. ■

Prethodna lema kaže da su elementi ordinala opet ordinali. Sledeća kaže da je presek neprazne familije ordinala opet ordinal.

Lema 2.2. *Ako je* Γ *neprazan skup ordinala, tada je* $\bigcap \Gamma$ *ordinal.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in \Gamma$ takav da je $\alpha \neq \emptyset$. Kako je $\bigcap \Gamma \subset \alpha$ i α dobro uređen sa $\in$ to je i $\bigcap \Gamma$ dobro uređen sa $\in$. Preostaje da se pokaže tranzitivnost skupa $\bigcap \Gamma$. U to ime neka važi $x \in y \in \bigcap \Gamma$. Sledeći niz implikacija pokazuje tranzitivnost preseka familije:

$$\forall \beta \in \Gamma \ (y \in \beta) \rightarrow \forall \beta \in \Gamma \ (x \in \beta) \rightarrow x \in \bigcap \Gamma,$$

jer je svako β iz Γ tranzitivan skup. ■

Pokazaćemo i poslednju lemu u nizu.

Lema 2.3. *Za svaka dva ordinala* α *i* β *imamo:* $\alpha \subsetneq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$.

Dokaz. ($\leftarrow$): Trivijalno iz tranzitivnosti ordinala β.
($\rightarrow$): Pretpostavimo da je $\alpha \subsetneq \beta$. Pokazujemo $\alpha \in \beta$. Neka je $X = \beta - \alpha$. Zbog pretpostavke je $X \neq \emptyset$, pa postoji δ - $\in$-najmanji elemenat skupa X. Ako bi pokazali da je $\delta = \alpha$ imali bi tvrđenje teoreme jer je $\delta \in \beta$. Uzmimo neko $\gamma \in \delta$, tada $\gamma \in \beta$ (tranzitivnost ordinala β) i $\gamma \notin X$ jer je δ najmanji u X. Preostaje $\gamma \in \alpha$, a otuda $\delta \subset \alpha$ jer je γ bilo proizvoljno.
Pretpostavimo $\delta \subsetneq \alpha$. Fiksirajmo neko $\eta \in \alpha - \delta$. Kako je $\delta, \eta \in \beta$ i $\eta \notin \delta$ to imamo $\eta = \delta$ ili $\delta \in \eta$ (trihotomija relacije $\in$ na β). Primetimo $\delta \notin \alpha$ jer je $\delta \in X$. Dakle, nije $\eta = \delta$. Isto tako ne može da važi ni $\delta \in \eta$ jer bi imali $\delta \in \eta \in \alpha \rightarrow \delta \in \alpha$ (tranzitvnost α). Ovim je dokaz gotov. ■

Dokaz **Teoreme 2.4.** uz pomoć prethodne tri leme nije komplikovan, dokaz videti u, recimo, [6] ili [3].

Teorema 2.5. *ON je prava klasa, ne postoji skup koji sadrži sve ordinale.*

Dokaz. Neka skup X sadrži sve ordinale. Tada bi na osnovu sheme izdvajanja postojao i skup $ON = \{y \in X : y \text{ je ordinal}\}$. Iz **Leme 2.1.** i **Teoreme 2.4.** imamo da je i ON ordinal, pa $ON \in ON$, što se kosi sa **Teoremom 2.4.2.** ■

Ova kontradikcija je poznata pod nazivom Burali-Forti–ev paradoks i jedan je od najstarijih paradoksa. Stariji je od Raselovog paradoksa kao i od Von Neumann-ove definicije ordinala. Mi smo dali noviju verziju paradoksa, originalno tvrđenje je napisano u Kantorovoj „naivnoj" teoriji: Burali-Forti je iz pretpostavke o skupu svih dobrih uređenja konstruisao dobro uređenje strogo duže od svih dobrih uređenja, uključujući i sebe, što je kontradikcija.

Prazan skup je ordinal. Uvedimo oznaku $0 := \emptyset$. Skup koji sadrži prazan skup je ordinal, oznaka $1 := \{\emptyset\}$ ili $1 := \{0\}$. Broj 2 označava skup koji sadrži ordinale 0 i 1, 2 je takođe ordinal. Možemo nastaviti dalje sa „brojanjem". Ovo je naravno neformalni pristup, međutim videćemo da se zapravo na taj način definišu prirodni brojevi.

Ako je X neprazan skup ordinala, tada je $\bigcap X$ takođe ordinal. Unija proizvoljnog skupa ordinala predstavlja ordinal. Važi $\bigcap X = min(X)$ i $\bigcup X = sup(X)$, odnosno $\bigcap X$ je najmanji ordinal skupa X, dok je $\bigcup X$ najmanji ordinal α takav da važi $\beta \leq \alpha$ za sve $\beta \in X$.

Za proizvoljni ordinal α skup $\alpha \cup \{\alpha\}$ takođe predstavlja ordinal i to je prvi ordinal strogo veći od α. Koristimo oznaku $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.

Klasu svih ordinala razbijamo na tri podklase. Jedna je prazan skup, ordinal 0. Dok za druge dve dajemo:

Definicija 2.10. Ordinal $\alpha \in ON - \{0\}$ zovemo:

- *naslednim* ako je $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ za neko $\beta \in ON$;
- *graničnim* ako nije nasledan. ▲

Ordinali, 1,2,3... su nasledni, što se lako proverava. Postojanje graničnih ordinala je zagarantovano aksiomom beskonačnosti. Pre toga nam treba:

Definicija 2.11. Ordinal β zovemo *konačnim* ordinalom ili *prirodnim brojem* akko za svaki $\alpha \leq \beta$ važi $\alpha = 0$ ili α je nasledni. ▲

Ako je n prirodan broj, tada je $n \cup \{n\}$ prirodan broj i svaki element od n je opet prirodan broj. Ako je x skup iz aksiome beskonačnosti, tada x sadrži sve prirodne brojeve ([6]). Sada na osnovu **Ax6** i Sheme izdvajanja opravdavamo definiciju skupa $\{n \in x : n \text{ je prirodan broj}\}$. Taj skup obeležavamo sa ω.

Teorema 2.6. *Skup svih prirodnih brojeva (ω) je granični ordinal i to najmanji granični ordinal.*

Sada dajemo tvrđenje koje karakteriše granične ordinale.

Teorema 2.7. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *α je granični ordinal;*

(ii) *$\alpha \neq 0$ i za sve $\beta < \alpha$ postoji γ tako da $\beta < \gamma < \alpha$;*

(iii) *$\alpha = \bigcup \alpha \neq 0$.*

Veza između ordinala i dobrih uređenja je predstavljena kroz:

Teorema 2.8. *Ako je ρ dobro uređenje na skupu A, tada postoji jedinstveni ordinal α za koji važi $(A, \rho) \cong (\alpha, \in)$, gde $\cong$ predstavlja izomorfizam. Dakle, postoji funkcija f sa domenom A i kodomenom α koja je bijekcija i važi*

$$\forall x \in A\ \forall y \in A\ (x\rho y \leftrightarrow f(x) \in f(y)).$$

Dajemo još dva principa, princip transfinitne indukcije i rekurzije.

Teorema 2.9 (Transfinitna indukcija na ordinalima)**.** *Za svaku formulu $\psi(\alpha)$ važi: ako je $\psi(\alpha)$ tačno za neki ordinal α, tada postoji najmanji ordinal β takav da je $\psi(\beta)$ tačno.*

Dokaz. Fiksirajmo α tako da je $\psi(\alpha)$. Ako je α najmanji nemamo šta da dokazujemo. Ako nije, tada skup $x = \{\beta < \alpha : \psi(\beta)\}$ nije prazan pa postoji najmanji elemenat tog skupa x. Taj elemenat β je traženi ordinal za koji je formula $\psi(\beta)$ tačna. ∎

Ovo je zapravo teorema shema; za bilo koju formulu $\psi(\alpha)$ zatvorenje formule

$$\exists\alpha\ \psi(\alpha) \rightarrow \exists\alpha\ (\psi(\alpha) \wedge \forall\beta < \alpha(\neg\psi(\beta)))$$

je dokazivo iz aksioma teorije. Dajemo još jednu formulaciju koja se češće koristi.

Teorema 2.10. *Neka je $\psi(\alpha)$ formula za koju važi:*

(1). *$\psi(0)$ je tačno;*

(2). *ako iz α ordinal i $\psi(\alpha)$ je tačno sledi $\psi(\alpha + 1)$ je tačno;*

(3). *ako iz $\forall\beta < \alpha$ ($\psi(\beta)$ je tačno), gde je α granični ordinal, sledi $\psi(\alpha)$ je tačno.*

Tada je formula $\psi(\alpha)$ tačna za svaki ordinal α.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: $\exists\varepsilon\ \neg(\psi(\varepsilon))$. Na osnovu prethodne teoreme postoji i najmanji ordinal δ za koji $\neg(\psi(\delta))$. Zbog (1) $\delta \neq 0$. Neka je δ naslednì, tada postoji $\beta \in ON$ takav da $\delta = \beta+1$. Otuda $\beta < \delta$ i zbog izbora δ imamo $\psi(\beta)$ je tačno. Međutim, sada iz (2) tačno je i $\psi(\beta + 1) = \psi(\delta)$, kontradikcija. Slično, dolazimo u kontradikciju sa pretpostavkom i u slučaju kada je δ granični ordinal. ∎

Pre teoreme o transfinitnoj rekurziji dajemo jedno pomoćno tvrđenje.

Lema 2.4. *Neka je F klasa-funkcija sa domenom ON i neka je α fiksiran ordinal. Tada postoji jedinstvena funkcija f sa domenom α takva da je $f(\xi) = F(\xi)$ za svako $\xi < \alpha$.*

Tvrđenje ove leme zapravo znači:
Neka je data formula $\varphi(x, y)$ tada pokazujemo:

$$[\forall x(\exists y\ \varphi(x,y) \leftrightarrow x \text{ je ordinal}) \wedge \forall x(x \text{ je ordinal} \rightarrow \exists! y\ \varphi(x,y))] \rightarrow$$
$$\forall x[x \text{ je ordinal} \rightarrow \exists! f(f \text{ je funkcija i } dom(f) = x) \wedge \forall y \forall z((y,z) \in f \rightarrow \varphi(y,z))]$$

Dokaz. Na osnovu sheme zamene, skup

$$A = \{x : \exists\xi < \alpha\ (F(\xi) = x)\}$$

postoji (videti Primer 2.2. iz glave Klase). Neka je

$$f = \{(\xi, y) \in \alpha \times A : F(\xi) = y\}.$$

Jasno se vidi da f zadovoljava uslove naše leme. ∎

Funkciju f čije postojanje smo opravdali u prethodnoj lemi označavaćemo sa $F \restriction \alpha$.

Teorema 2.11. *Neka je G klasa-funkcija sa domenom klasom svih skupova. Tada postoji jedinstvena klasa-funkcija F sa domenom ON takva da za svaki ordinal α važi $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$.*

Dokaz. Posmatrajmo sledeći uslov:
$(*)$ f je funkcija sa domenom α i za svako $\xi < \alpha$ imamo $f(\xi) = G(f \restriction \xi)$.
Prvo pokazujemo:
(1) Ako f, α zadovoljavaju $(*)$ i g, β zadovoljavaju $(*)$ i $\alpha \leq \beta$ tada $f = g \restriction \alpha$.
Ovo pokazujemo transfinitnom indukcijom na α, tačnije iz $\xi < \alpha$ sledi $f(\xi) = g(\xi)$. Pretpostavimo da je to tačno za sve $\eta < \xi$, gde je $\xi < \alpha$. Tada

$f \restriction \xi = g \restriction \xi$, dakle $f(\xi) = G(f \restriction \xi) = G(g \restriction \xi) = g(\xi)$, što završava induktivni dokaz.
(2) Za svaki ordinal α postoji funkcija f koja zadovoljava $(*)$.
Dokaz ide indukcijom. Trivijalno za $\alpha = 0$. Neka važi za α i neka je f funkcija koja zadovoljava $(*)$. Definišimo $h = f \cup \{(\alpha, G(f))\}$. Jasno je da $(*)$ stoji i za h sa $dom(h) = \alpha + 1$. Konačno, pretpostavimo da je α granični ordinal i neka je ispunjeno $(*)$ za sve $\beta < \alpha$. Iz (1) za sve $\beta < \alpha$ postoji jedinstveno f koje zadovoljava (1); označimo to f sa f_β (shemu zamene koristiti). Definišimo $g = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Zbog (1) g predstavlja funkciju čiji je domen $\bigcup \alpha = \alpha$.
(3) Za sve $\beta < \alpha$ imamo $f_\beta = g \restriction \beta$ i $g(\beta) = G(g \restriction \beta)$.
Prvi uslov je jasan. Za drugi imamo

$$g(\beta) = f_{\beta+1}(\beta) = G(f_{\beta+1} \restriction \beta) = G(g \restriction \beta).$$

Dakle, (3) stoji; otuda $(*)$ je ispunjeno za α. Ovime završavamo induktivni dokaz za (2).
Sada za svaki ordinal α neka je $F(\alpha) = f(\alpha)$, gde je f izabrano tako da $(*)$ važi za $\alpha + 1$ i f. Ova definicija je dobra zbog (1). Takođe, imamo $F \restriction \alpha = f \restriction \alpha$. Dakle, $F(\alpha) = f(\alpha) = G(f \restriction \alpha) = G(F \restriction \alpha)$. Time završavamo dokaz postojanja funkcije.
Što se tiče jedinstvenosti, pretpostavimo da H takođe zadovoljava uslove teoreme. Dokažimo da je $F(\alpha) = H(\alpha)$ za svaki ordinal α. Neka je tačno za sve $\beta < \alpha$. Otuda $F \restriction \alpha = H \restriction \alpha$, pa je

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha) = G(H \restriction \alpha) = H(\alpha).$$

Ovime završavamo induktivni dokaz jedinstvenosti. ■

Na kraju ovog poglavlja dajemo uređenje na klasi $ON \times ON$. Neka su (α_1, α_2) i (β_1, β_2) dva proizvoljna elementa klase $ON \times ON$. Pisaćemo $(\alpha_1, \alpha_2) < (\beta_1, \beta_2)$ akko važi neki od sledećih uslova:

(1) $sup\{\alpha_1, \alpha_2\} < sup\{\beta_1, \beta_2\}$;

(2) $sup\{\alpha_1, \alpha_2\} = sup\{\beta_1, \beta_2\}$ i $\alpha_1 < \beta_1$;

(3) $sup\{\alpha_1, \alpha_2\} = sup\{\beta_1, \beta_2\}$ i $\alpha_1 = \beta_1$ i $\alpha_2 < \beta_2$.

Ovakvo uređenje zovemo *kanoničkim*. Uređeni parovi (α, β) se porede koristeći ordinale $sup\{\alpha, \beta\}$. Takođe, skup uređenih parova (α, β) za koji su odgovarajući supremumi jednaki porede se *leksikografski*, (2) i (3) naše definicije. Pokazuje se da je ovo uređenje na klasi $ON \times ON$ zapravo dobro uređenje, u smislu **Teoreme 2.4.** Takođe, ova definicija kanoničkog uređenja datog na klasi $ON \times ON$ se lako uopštava na $ON \times ON \times ON = ON^3$, $ON^4, \ldots$

2.4 Hijerarhija skupova

Ova glava predstavlja prirodni nastavak prethodne. Odmah na početku dajemo primenu transfinitne rekurzije na ordinalima.

Neka su dati skup x_0 i dve funkcije-klase Q i R definisane na univerzumu $\mathbf{V}$. Uz pomoć njih konstruišemo novu klasu funkciju G. Za početak definišemo $G(0) := x_0$. Dalje, ako je x funkcija sa domenom $\alpha + 1$ za neko $\alpha \in ON$, tada stavljamo $G(x) := Q(x(\alpha))$. Ako je $dom(x) = \alpha$ granični ordinal, tada imamo $G(x) := R(\bigcup im(x))$. U svim ostalim slučajevima stavimo da je $G(x) := 0$. Na osnovu **Teoreme 2.11.** postoji klasa funkcija F koja zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{array}{rcll} F(0) & = & x_0, & \\ F(\alpha+1) & = & Q(F(\alpha)) & (= G(F \restriction \alpha+1)), \\ F(\alpha) & = & R(\bigcup\limits_{\xi<\alpha} F(\xi)) & (= G(F \restriction \alpha)),\ \text{za } \alpha \text{ granični ordinal.} \end{array}$$

Svaki skup $F(\alpha)$ zovemo *spratom* funkcije F, dok se sama funkcija-klasa F naziva *kumulativnom hijerarhijom.* Uniju klase $im(F)$, tačnije

$$\bigcup_{\alpha \in ON} F(\alpha) := \bigcup im(F),$$

zovemo *granicom* ili *limitom* kumulativne hijerarhije $(F(\alpha))_{\alpha \in ON}$.

Nama će biti od interesa kumulativne hijerarhije specifičnog „izgleda”. Naime, x_0 će biti prazan skup, R će predstavljati indentičko preslikavanje univerzalne klase $\mathbf{V}$, i na kraju, Q je klasa-funkcija sa domenom $\mathbf{V}$. U tom slučaju kumulativne hijerarhije se konstruišu induktivno, počevši od praznog skupa sukcesivnom primenom operanda Q. Variranjem Q-a dobijamo različite kumulativne hijerarhije.

Primer 2.3. Jedan od najednostavnijih primera kumulativne hijerarhije je slučaj $x_0 = 0$, $R = I_{\mathbf{V}}$ i $Q = \mathscr{P}_{tr}$, gde $\mathscr{P}_{tr}$ šalje $x \in \mathbf{V}$ u skup $\mathscr{P}_{tr}(x)$ svih tranzitivnih podskupova skupa x. Kako je tranzitivan podskup ordinala ordinal to je $Q(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ i otuda $F(\alpha + 1) = \alpha + 1$ za svaki ordinal α. Ako je α granični, tada imamo:

$$F(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} F(\xi) = \bigcup_{\xi+1<\alpha} F(\xi+1) = \bigcup_{\xi+1<\alpha} \xi + 1 = \alpha.$$

Prema tome granica naše rastuće kumulativne hijerarhije je klasa svih ordinala ON. $\square$

Posmatrajmo kumulativnu hijerarhiju datu sa $Q = \mathcal{P}$, operand uzimanja svih podskupova. Ostaje $x_0 = 0$ i $R = I_{\mathbf{V}}$. Dobija se kumulativna hijerarhija:

$$\begin{aligned} V_0 &:= 0, \\ V_{\alpha+1} &:= \mathcal{P}(V_\alpha), \quad \text{za naslednі ordinal } \alpha, \\ V_\alpha &:= \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi, \quad \text{za granični ordinal } \alpha. \end{aligned}$$

Klasu $\mathbf{V}_N := \bigcup_{\alpha \in ON} V_\alpha$ zovemo *Von Neumann-ovim univerzumom.* Niži spratova hijerarhije $\mathbf{V}_N$ su: $V_1 = \mathcal{P}(0) = \{0\} = 1$, $V_2 = \mathcal{P}(1) = 2$, $V_3 = \mathcal{P}(V_2) = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\} \neq 3$, ...

Ispostavlja se da Von Neumann-ova hijerarhija ima vrlo zanimljive osobine. U sledećih par tvrđenja ih navodimo.

Lema 2.5. *Za svaki ordinal α važi:*

(i) *V_α je tranzitivan skup;*

(ii) *$V_\beta \subset V_\alpha$ za sve $\beta < \alpha$.*

Dokaz. Dokazaćemo oba tvrđenja simultano indukcijom po α. Jasno je za $\alpha = 0$. Pod pretpostavkom da oba tvrđenja važe za α, dokažimo da su tačna i za $\alpha + 1$. Prvo dokazujemo
$(1): V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$. Neka je $x \in V_\alpha$. Kako (i) važi za α to je skup V_α tranzitivan. Dakle $x \subset V_\alpha$, pa $x \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. (1) je dokazano.

Sada (ii) sledi. Naime, ako je $\beta < \alpha + 1$ proizvoljno, tada je $\beta \leq \alpha$, pa je $V_\beta \subseteq V_\alpha$ jer je (ii) tačno za ordinal α. Dakle, uz pomoć (1): $V_\beta \subset V_{\alpha+1}$.

Da bi dokazali (i) za $\alpha + 1$, pretpostavimo da je $x \in y \in V_{\alpha+1}$. Tada $y \in \mathcal{P}(V_\alpha)$, pa je $y \subset V_\alpha$, otuda $x \in V_\alpha$. Zbog (1) imamo $x \in V_{\alpha+1}$, što smo i želeli.

Pretpostavimo sada da je γ granični ordinal i da su tvrđenja (i) i (ii) ispunjena za svako $\beta < \gamma$. Za dokaz (i), neka je $x \in y \in V_\gamma$. Na osnovu definicije sprata V_γ postoji $\beta < \gamma$ tako da je $y \in V_\beta$. Zbog (i) važi $x \in V_\beta$, pa i $x \in V_\gamma$. Uslov (ii) je očigledan. $\blacksquare$

Definicija 2.12. Za svaki skup $x \in \mathbf{V}_N$ definišemo $rank(x)$ kao najmanji ordinal α takav da je $x \in V_{\alpha+1}$ (akko $x \subseteq V_\alpha$). $\blacktriangle$

Neka je $\delta_x = \min(\{\gamma \in ON : x \in V_\gamma\})$, gde je x proizvoljan elemenat hijerarhije $\mathbf{V}_N$. Lako se vidi da je za svako $x \in \mathbf{V}_N$ ordinal δ_x naslední. Trivijalno nije $\delta_x = 0$ jer onda $x \in V_0 = 0$, kontradikcija. Slično, pretpostavka da je δ_x granični ordinal vodi u kontradikciju: $x \in V_{\delta_x} = \bigcup_{\beta<\delta_x} V_\beta$, pa δ_x nije najmanji.

Sledeća tabela prikazuje skupove iz prva tri sprata kumulativne hijerarhije $\mathbf{V}_N$ zajedno sa odgovarajućim rankovima tih skupova:

rank	skup
0	$\emptyset = 0$
1	$\{\emptyset\} = 1$
2	$\{\{\emptyset\}\} = \{1\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$
3	$\{\{1\}\}, \{0, \{1\}\}, \{1, \{1\}\}, \{0, 1, \{1\}\},$
	$\{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\} = 3,$
	$\{\{1\}, 2\}, \{0, \{1\}, 2\}, \{1, \{1\}, 2\}, \{0, 1, \{1\}, 2\}$

Tabela 2. Skupovi i njihovi rankovi.

Dajemo nekoliko tvrđenja koja opisuju osobine ranka skupova iz $\mathbf{V}_N$.

Lema 2.6. *Sledeća tvrđenja važe:*

(1). $V_{\alpha+1} - V_\alpha = \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) = \alpha\}$;

(2). $V_\alpha = \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) < \alpha\}$;

(3). *ako je* $x \in y$ *i* $y \in \mathbf{V}_N$, *tada je* $x \in \mathbf{V}_N$ *i* $rank(x) < rank(y)$.

Dokaz. (1): Ako je $x \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$, tada je α najmanji ordinal za koji je $x \in V_{\alpha+1}$. Ako bi važilo $x \in V_\beta$ za neko $\beta < \alpha$ tada zbog **Leme 2.5.**(ii) imamo i $x \in V_\alpha$, kontradikcija. Pokazali smo $V_{\alpha+1} - V_\alpha \subset \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) = \alpha\}$. Suprotno, ako je $rank(x) = \alpha$, onda je jasno $x \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$.

(2): Koristimo transfinitnu indukciju na ordinalima. Za $\alpha = 0$ tvrđenje trivijalno važi. Neka je α naslední i neki važi $V_\alpha = \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) < \alpha\}$; zbog (1) imamo

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) = \alpha\} = \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) < \alpha + 1\},$$

što je trebalo i pokazati. U slučaju graničnog ordinala α i pretpostavke da je za sve $\xi < \alpha$ ispunjeno $V_\xi = \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) < \xi\}$ dobijamo

$$V_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha} \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) < \xi\} = \{x \in \mathbf{V}_N : rank(x) < \alpha\},$$

što se lako proverava.

(3): Iz prošle leme imamo da su svi skupovi V_α tranzitivni, otuda direktno sledi $x \in \mathbf{V}_N$. Konačno, pokažimo $x \in y \to rank(x) < rank(y)$: Neka je α najmanji ordinal za koji je $y \in V_{\alpha+1}$; dakle, $rank(y) = \alpha$. Iz $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ imamo $y \subset V_\alpha$, a samim tim i $x \in V_\alpha$. Zbog (2) je $rank(x) < \alpha$. ∎

Iz Tabele 2. vidimo da važi $rank(0) = 0$, $rank(1) = 1$, $rank(2) = 2$ i $rank(3) = 3$, sledeće tvrđenje generalizuje primećeno:

Lema 2.7. *Neka je α proizvoljan ordinal. Tada:*

a) $ON \cap V_\alpha = \alpha$;

b) $ON \subset \mathbf{V}_N$;

c) $rank(\alpha) = \alpha$.

Dokaz. Deo pod a) dokazujemo indukcijom po α. Slučajevi $\alpha = 0$ i α je granični ordinal su trivijalni. Dalje, pretpostavimo da je $ON \cap V_\alpha = \alpha$ za ordinal α. Pokažimo $ON \cap V_{\alpha+1} = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. $\alpha \cup \{\alpha\} \subset V_{\alpha+1}$ sledi iz $\alpha \subset V_\alpha \subset V_{\alpha+1}$ i

$$\alpha \subset V_\alpha \to \alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}; \text{ odakle } \{\alpha\} \subset V_{\alpha+1}.$$

Dalje, neka je δ proizvoljan ordinal iz $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$. Dakle, $\delta \subset V_\alpha \cap ON = \alpha$. Sledi $\delta \subset \alpha$, odnosno $\delta \leq \alpha$. Prema tome $ON \cap V_{\alpha+1} = \{\delta : \delta \leq \alpha\} = \alpha + 1$.

Rezultat pod a) implicira $\alpha \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$ zbog čega je i c) ispunjeno na osnovu prošle leme. Iz a) imamo direktno b). ∎

Za nalaženje rankova skupova koji nisu ordinali korisna je ova:

Lema 2.8. *Za svaki skup y važi: $y \in \mathbf{V}_N \leftrightarrow y \subset \mathbf{V}_N$ i ako $y \in \mathbf{V}_N$, onda je:*

$$rank(y) = sup\{rank(x) + 1 : x \in y\}.$$

Dokaz. Ako je $y \in \mathbf{V}_N$, tada je i $y \subset \mathbf{V}_N$ na osnovu **Leme 2.6.**(3). Ako je $y \subset \mathbf{V}_N$, tada možemo definisati i ordinal $\beta = sup\{rank(x) + 1 : x \in y\}$. Sada, na osnovu iste leme imamo $y \subseteq \mathbf{V}_\beta$. Dakle, $y \in \mathbf{V}_{\beta+1}$, pa je $y \in \mathbf{V}_N$ i $rank(y) \leq \beta$. Takođe, $rank(x) < rank(y)$ za sve $x \in y$, odnosno $rank(x) + 1 \leq rank(y)$. Uzimajući supremum skupa svih $x \in y$ dobijamo $\beta \leq rank(y)$. ∎

Direktna posledica prethodne leme je sledeća:

Lema 2.9. *Ako je $z \subseteq y \in \mathbf{V}_N$, tada takođe $z \in \mathbf{V}_N$ i $rank(z) \leq rank(y)$.*

Neka je $x \in \mathbf{V}_N$. Ako je $rank(x)$ granični ordinal ili 0, tada važi $rank(\bigcup x) = rank(x)$, dok za $rank(x) = \alpha + 1$ imamo $rank(\bigcup x) = \alpha$.

Jako bitna činjenica vezana za klasu $\mathbf{V}_N$ je ta da se podudara sa univerzumom svih skupova. Pre nego što to pokažemo treba nam pojam *tranzitivnog zatvorenja* koji je opravdan kroz sledeću teoremu.

Teorema 2.12. *Neka je dat proizvoljan skup a. Tada postoji tranzitivan skup b sa sledećim osobinama:*

(i) *$a \subseteq b$;*

(ii) *Za svaki tranzitivan skup c takav da je $a \subseteq c$ važi $b \subseteq c$.*

Dokaz. Rekurzijom po prirodnim brojevima definišemo:

$$\begin{aligned} d_0 &= a; \\ d_{m+1} &= d_m \cup (\bigcup d_m), \quad \text{za proizvoljno } m \in \omega \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Neka je $b = \bigcup_{m \in \omega} d_m$. Očigledno je $a \subseteq b$ zbog $a = d_0$. Dalje, uzmimo proizvoljne x i y za koje $x \in y \in b$. Iz definicije skupa b imamo da postoji neko $m_0 \in \omega$ za koje $y \in d_{m_0}$. Kako unija skupa d_{m_0} sadrži elemente elemenata od d_{m_0} to imamo i $x \in \bigcup d_{m_0} \subseteq d_{m_0+1} \subseteq b$. Dakle, b je tranzitivan skup. Preostaje da se pokaže (ii). Neka je c tranzitivan skup za koji važi $a \subseteq c$. Indukcijom po prirodnim brojevima pokazujemo $d_m \subseteq c$. Prvo, imamo $d_0 = a \subseteq c$, znači tvrđenje važi za $m = 0$. Pretpostavimo da je ono tačno i za neko $m = n$. Sada $d_{n+1} = d_n \cup (\bigcup d_n) \subseteq c \cup (\bigcup c) = c$, čime smo kompletirali dokaz indukcijom. ∎

Skup čije smo postojanje opravdali prethodnom teoremom zovemo *tranzitivnim zatvorenjem* skupa a i označavamo ga sa $trcl(a)$.

Teorema 2.13. *Aksioma Fundacije je ekvivalentna tvrđenju $\mathbf{V} = \mathbf{V}_N$.*

Dokaz. $(\leftarrow)$: Primetimo da iz $x \in \mathbf{V}_N$ i $x \neq \emptyset$, i $y \in x$ ima najmanji rank među elementima od x tada $y \cap x = \emptyset$.
$(\rightarrow)$: Neka je $x \in \mathbf{V}$ proizvoljan skup. Na osnovu prethodne teoreme postoji skup $t = trcl(x)$. Ako je $t \subset \mathbf{V}_N$, onda zbog $x \subseteq t \subset \mathbf{V}_N$ i **Lema 2.8.**, **2.9.** važi $x \in \mathbf{V}_N$. Ako pak $\neg(t \subset \mathbf{V}_N)$, tada $t \setminus \mathbf{V}_N \neq \emptyset$ ($t \setminus \mathbf{V}_N$ je skup), pa na osnovu Aksiome Fundacije postoji $y \in t \setminus \mathbf{V}_N$ za koji $y \cap (t \setminus \mathbf{V}_N) = \emptyset$. Međutim $y \subseteq t$, jer je t tranzitivan, a odavde $y \subset \mathbf{V}_N$ i time $y \in \mathbf{V}_N$, što je kontradikcija. ∎

Posledice prethodne teoreme su silne. Pošto se klase $\mathbf{V}$ i $\mathbf{V}_N$ podudaraju to definiciju ranka proširujemo na sve skupove jer su svi skupovi u $\mathbf{V}_N$. Samim tim tvrđenja ovog poglavlja koja su vezana za rankove skupova iz $\mathbf{V}_N$ se proširuju na sve skupove našeg univerzuma.

2.5 Dobro zasnovane klase-relacije

Sledeća definicija je na neki način uopštenje relacije biti elemenat među skupovima.

Definicija 2.13. Neka je $\mathbf{A}$ klasa. Za klasu-relaciju $\mathbf{R}$ kažemo da je *dobro zasnovana* na $\mathbf{A}$ ako i samo ako za svaki neprazan podskup X klase $\mathbf{A}$ postoji $x \in X$ takav da za sve $y \in X$ nije tačno da $(y, x) \in \mathbf{R}$. Takav skup x zovemo $\mathbf{R}$-*minimalnim.* ▲

Primer 2.4. Pokažimo da je relacija „biti elemenat" $\in$ dobro-zasnovana na klasi $\mathbf{V}$ u smislu prethodne definicije. Neka je X proizvoljan neprazan podskup klase $\mathbf{V}$. Na osnovu Aksiome Fundacije postoji neki skup $x \in X$ takav da je $x \cap X = \emptyset$. Ako bi postojao neki skup $y \in X$ za koji bi važilo $(y, x) \in \mathbf{R}$, gde je sa $\mathbf{R}$ označena klasa-relacija „biti elemenat" definisana na klasi $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, to bi značilo da je $y \in x$. Dakle, imali bi $y \in x \cap X$, što se kosi sa Aksiomom Fundacije. □

Kako klase kao objekti teorije **ZFC** ne postoje, to rigorozna formulacija **Definicije 2.13.** izgleda ovako: Kad govorimo o klasi-relaciji $\mathbf{R}$ zapravo govorimo o formuli $\varphi(x, y)$ koja je dobro-zasnovana na nekoj drugoj formuli $\psi(x)$ (formulom ψ definišemo klasu $\mathbf{A}$). Prevod prethodnog primera bi bio $\varphi(x, y) \equiv x \in y$ i $\psi(x) \equiv x = x$. Zapis pomenute definicije:

$$\forall X[((\forall x \in X)(\psi(x)) \wedge X \neq \emptyset) \rightarrow ((\exists x \in X)(\forall y \in X)\neg\varphi(y, x))].$$

Definicija 2.14. Klasa-relacija $\mathbf{R}$ data na klasi $\mathbf{A}$ je *skupu-slična* akko za sve $a \in \mathbf{A}$ klasa $\{b \in \mathbf{A} : (b, a) \in \mathbf{R}\}$ predstavlja skup. ▲

Primer 2.5. U ovom primeru pokazujemo da je relacija „biti elemenat" koja je data na klasi $\mathbf{V}$ skupu-slična. Neka je x proizvoljan skup. Na osnovu **(Ax4)** i **(Ax5)** $\bigcup \mathcal{P}(x)$ je skup koji je jednak sa skupom $\{y : y \in V \wedge y \in x\}$. Dakle, relacija „$\in$" ,data na celom univerzumu $\mathbf{V}$, je skupu-slična. □

Neka je klasa-relacija $\mathbf{R}$ skupu-slična na klasi $\mathbf{A}$ i neka je $x \in \mathbf{A}$. Rekurzijom na prirodnim brojevima definišemo skup $pred_n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. Zapravo smo sa *pred* označili skup *prethodnika* klase-relacije $\mathbf{R}$. Preciznije:

$$pred_0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{A} : (y, x) \in \mathbf{R}\};$$
$$pred_{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup \{pred_0(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) : y \in pred_n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})\}.$$

Sada, kada su za svako $n \in \omega$ definisani $pred_n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, možemo definisati i skup:

$$cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup_{n \in \omega} pred_n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}).$$

Lema 2.10. *Neka je $\mathbf{R}$ dobro-zasnovana i skupu-nalik klasa-relacija na klasi $\mathbf{A}$ i neka $x \in \mathbf{A}$. Ako je y elemenat od $cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, tada $pred_0(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subseteq cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$.*

Dokaz. Za neko $n \in \omega$ važi $y \in pred_n(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$. Tada je

$$pred_0(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subseteq pred_{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subseteq cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}).$$

■

Posle ovih tehničkih definicija u mogućnosti smo da dokažemo uopštenje principa indukcije.

Teorema 2.14. *Ako je $\mathbf{R}$ dobro-zasnovana i skupu-slična klasa-relacija na klasi $\mathbf{A}$, tada svaka neprazna podklasa klase $\mathbf{A}$ ima $\mathbf{R}$-minimalni elemenat.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{X}$ neprazna podklasa klase $\mathbf{A}$ i neka je $x \in \mathbf{X}$ takvo da nije $\mathbf{R}$-minimalni elemenat od $\mathbf{X}$. Dakle, postoji $y \in \mathbf{X}$ tako da je $(y, x) \in \mathbf{R}$. Iz $pred_0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \cap \mathbf{X} \subseteq cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \cap \mathbf{X}$ sledi da je $cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \cap \mathbf{X}$ neprazan podskup od $\mathbf{A}$, a otuda postoji neko y koje je $\mathbf{R}$-minimalni elemenat tog podskupa. Pretpostavimo $(z, y) \in \mathbf{R}$. Tada, na osnovu **Leme 2.10.**, je $z \in pred_0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subseteq cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, odnosno $z \notin \mathbf{X}$. Dakle, y je $\mathbf{R}$-minimalni elemenat klase $\mathbf{X}$. ■

Teorema 2.15. *Neka je $\mathbf{R}$ dobro-zasnovana i skupu-slična relacija na univerzumu $\mathbf{V}$. Tada imamo:*

(i) *ako je tačno $\exists x\ \Phi(x)$ za neki skup x i formulu Φ teorije skupova, onda postoji $\mathbf{R}$-minimalni objekat m za koji je ispunjeno $\Phi(m)$;*

(ii) *Indukcija po dobro-zasnovanoj relaciji:*
ako $\forall x[\forall y(y\ \mathbf{R}\ x \to \Phi(y)) \to \Phi(x)]$, onda $\forall x \Phi(x)$.

Dokaz. (i): Neka je $\mathbf{B} := \{x \in \mathbf{V} : \Phi(x)\}$ podklasa klase $\mathbf{V}$. Iz uslova teoreme imamo da je klasa $\mathbf{B}$ neprazana. Na osnovu prethodne teoreme imamo da postoji $\mathbf{R}$-minimalni elemenat podklase $\mathbf{B}$. Dakle, postoji neko $m \in \mathbf{B}$ sa osobinom da ne postoji elemenat $x \in \mathbf{B}$ za koji je $(x, m) \in \mathbf{R}$, a odavde imamo i da je m $\mathbf{R}$-minimalni elemenat klase $\mathbf{V}$ za koji je tačna formula $\Phi(m)$.
(ii): Pretpostavimo suprotno: postoji neki skup x za koji je $\neg\Phi(x)$. Sada, zbog (i) ove teoreme imamo da postoji objekat m koji je $\mathbf{R}$-minimalan među objektima koji zadovoljavaju $\neg\Phi$. Za takav skup m važi $\neg\Phi(m)$ ali takođe i $\forall y(y\ \mathbf{R}\ m \to \Phi(y))$ što se kosi sa pretpostavkom tvrđenja. ∎

Napomena: Neki autori (kao u [8]) ovoj temi pristupaju drugačije. Naime, posmatraju klase-relacije $\mathbf{R}$ date na celom univerzumu $\mathbf{V}$ (kod nas $\mathbf{A} = \mathbf{V}$). Zatim definišu dobro_zasnovanu relaciju $\mathbf{R}$ sa ova dva uslova:

- Klasa $\mathbf{R}^{-1}(x) := \{y \in \mathbf{V} : (y, x) \in \mathbf{R}\}$ je skup za sve $x \in \mathbf{V}$; ovaj uslov u našem pristupu znači da je $\mathbf{R}$ skupu-slična.
- Za svaki neprazan skup $x \in \mathbf{V}$ postoji elemenat $y \in x$ za koji važi $x \cap \mathbf{R}^{-1}(y) = \emptyset$; kod nas ovo predstavlja definiciju dobre-zasnovanosti.

Formulacija **Teoreme 2.15.**(ii) bi onda glasila:
Neka je $\mathbf{R}$ *dobro_zasnovana klasa-relacija. Tada važi:*
(princip indukcije na $\mathbf{R}$*): Ako je klasa* X *takva da za sve* $x \in \mathbf{V}$ *formula* $\mathbf{R}^{-1}(x) \subset X$ *povlači* $x \in X$ *tada je* $X = \mathbf{V}$.

Teorema 2.16. *Neka je* $\mathbf{R}$ *klasa-relacija koja je dobro-zasnovana i skupu-slična na* $\mathbf{A}$. *Neka je data klasa-funkcija* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. *Tada postoji jedinstvena klasa-funkcija* $\mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *takva da za sve* $x \in \mathbf{A}$,

$$\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \upharpoonright pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})).^2$$

Dokaz. Ovu teoremu nećemo dokazivati. Dokaz predstavlja uopštenje dokaza **Teoreme 2.11.**(videti [12]), koja je specijalan slučaj ovog tvrđenja za $\mathbf{A} = ON$ i $\mathbf{R} =$ „ $\in$ ”. Umesto dokaza dajemo par komentara. Činjenica da je $\mathbf{R}$ skupu-slična na $\mathbf{A}$ implicira da je $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ zapravo skup, pa je samim tim i $\mathbf{F}(x, \mathbf{G} \upharpoonright pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))$ takođe skup na osnovu Aksiome Sheme zamene. Dalje, podsećajući se da su klase zapravo zamene za formule, imamo:

- $\varphi(x, y, z)$ je funkcija iz $\psi(x) \times \mathbf{V}$ u $\mathbf{V}$ zamenjuje:

$$\forall x, y, z, \omega\ [\varphi(x, y, z) \wedge \varphi(x, y, \omega) \to z = \omega] \wedge \forall x, y\ [\exists z\ \varphi(x, y, z) \leftrightarrow \psi(x)].$$

[2] Sa $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ smo mislili na skup prethodnika $pred_0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$

- $\theta(x, y)$ je funkcija iz $\psi(x)$ u $\mathbf{V}$ zamenjuje:

$$\forall x, y, z\ [\theta(x, y) \wedge \theta(x, z) \to y = z] \wedge \forall x\ [\exists y\ \theta(x, y) \leftrightarrow \psi(x)].$$

- a je skup svih prethodnika od x na osnovu formule $\chi(x, y)$ zamenjuje:

$$\forall y\ [y \in a \leftrightarrow \chi(y, x)].$$

- f je restrikcija od $\theta(x, y)$ na skup svih prethodnika od x na osnovu formule $\chi(x, y)$ zamenjuje:

$$\forall z[z \in f \leftrightarrow \exists x, y, a(\ a \text{ je skup svih prethodnika } x\text{-a po formuli } \chi(x, y) \\ \wedge z = (x, y) \wedge x \in a \wedge \theta(x, y))].$$

Rigorozan zapis tvrđenja teoreme bi glasio:
Neka su date formule $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x)$, $\chi(x, y)$, $\theta^{'}(x, y)$. Tada postoji i formula $\theta(x, y)$ za koju je tačno sledeće:

[$\chi(x, y)$ je dobro-zasnovana na $\psi(x) \wedge \chi(x, y)$ je skupu-slična na $\psi(x)$
$\wedge\ \varphi(x, y, z)$ je funkcija iz $\psi(x) \times \mathbf{V}$ u $\mathbf{V}$] $\to$
$\theta(x, y)$ je funkcija iz $\psi(x)$ u $\mathbf{V} \wedge \forall x \exists f, z[f$ je restrikcija funkcije $\theta(x, y)$
na skup prethodnika od x po formuli-relaciji $\chi(x, y) \wedge \theta(x, y) \wedge \varphi(x, f, z)]$
$\wedge$ ([$\theta^{'}(x, y)$ je funkcija iz $\psi(x)$ u $\mathbf{V} \wedge \forall x \exists f, z[f$ je restrikcija funkcije $\theta^{'}(x, y)$
na skup prethodnika od x po formuli-relaciji $\chi(x, y) \wedge \theta^{'}(x, y) \wedge \varphi(x, f, z)]]$
$\to \forall x, z[\theta(x, z) \leftrightarrow \theta^{'}(x, y)]$).

■

3

Bulove algebre

U ovoj glavi vršimo pregled definicija i osnovnih teorema vezanih za Bulove algebre.

Definicija 3.1. Bulova algebra je struktura $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ gde je B neprazan skup, *nosač* ili *domen* Bulove algebre, $\vee$ i $\wedge$ su binarne operacije na B, * je unarna operacija na B. Postoje dva izdvojena elementa skupa B koje označavamo sa $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Takođe, date operacije zadovoljavaju sledeće uslove:

1. Komutativni zakoni:

$$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a;$$

2. Asocijativni zakoni:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c;$$

3. Distributivni zakoni:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

4. Zakoni neutralnih elemenata:

$$\mathbf{0} \vee a = a \qquad \mathbf{1} \wedge a = a;$$

5. Zakoni komplementacije:

$$a \vee a^* = \mathbf{1} \qquad a \wedge a^* = \mathbf{0}.$$

▲

Primer 3.1. Neka je A neprazan skup tada je $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^c, 0, A)$ Bulova algebra, gde smo sa ^{c} označili unarnu operaciju komplementiranja skupa u odnosu na skup A. Ako stavimo $A = 1$ dobijamo specijalnu dvoelementnu Bulovu algebru koju označavamo sa $\mathbf{2}$. Svaka dvoelementna Bulova algebra je izomorfna sa $\mathbf{2}$. $\square$

Teorema 3.1. *Ako je $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra, tada za $\forall a, b \in B$ važi:*

(1). *Idempotentni zakoni:* $a \vee a = a \qquad a \wedge a = a.$

(2). *Zakoni apsorbcije:* $a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \vee (a \wedge b) = a.$

Dokaz.
1.a): $a \vee a = (a \vee a) \wedge \mathbf{1} = (a \vee a) \wedge (a \vee a^*) = a \vee (a \wedge a^*) = a \vee \mathbf{0} = a.$
1.b): $a \wedge a = (a \wedge a) \vee \mathbf{0} = (a \wedge a) \vee (a \wedge a^*) = a \wedge (a \vee a^*) = a \wedge \mathbf{1} = a.$
2.a): $a \vee (a \wedge b) = (a \wedge \mathbf{1}) \vee (a \wedge b) = a \wedge (\mathbf{1} \vee b) = a \wedge (b^* \vee b \vee b) = a \wedge \mathbf{1} = a.$
2.b): Slično kao 2.a). $\blacksquare$

Teorema 3.2. *Ako je $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra, tada*

(1). $\mathbf{0}^* = \mathbf{1} \qquad \mathbf{1}^* = \mathbf{0}.$

(2). $(\forall a \in B)(\mathbf{1} \vee a = \mathbf{1})$ *i* $(\forall a \in B)(\mathbf{0} \wedge a = \mathbf{0}).$

Dokaz. (1): $\mathbf{0}^* = \mathbf{0} \vee \mathbf{0}^* = \mathbf{1}.$
(2): $\mathbf{1} \vee a = (a^* \vee a) \vee a = a^* \vee (a \vee a) = a^* \vee a = \mathbf{1}.$
Ostalo se analogno pokazuje. $\blacksquare$

Teorema 3.3. *Ako je $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra, tada za $\forall a, b \in B$ važi:*

(1). *iz $a \vee b = \mathbf{1}$ i $a \wedge b = \mathbf{0}$ sledi $b = a^*$;*

(2). $(a^*)^* = a$;

(3). $(a \vee b)^* = (a^*) \wedge (b^*)$ *i* $(a \wedge b)^* = (a^*) \vee (b^*)$;

(4). *$a \wedge b = a$ ako i samo ako $a \vee b = b$.*

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
(1)\colon\ b &= b \wedge \mathbf{1} = b \wedge (a \vee a^*) = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^*) \\
&= \mathbf{0} \vee (b \wedge a^*) = (a \wedge a^*) \vee (b \wedge a^*) \\
&= (a \vee b) \wedge a^* = \mathbf{1} \wedge a^* = a^*
\end{aligned}
$$

(2): Kako je $a \vee a^* = \mathbf{1}$ i $a \wedge a^* = \mathbf{0}$, to zbog (1) imamo $(a^*)^* = a$.

$$
\begin{aligned}
(3)\colon\ (a \vee b) \vee (a^* \wedge b^*) &= a \vee ((b \vee a^*) \wedge (b \vee b^*)) \\
&= a \vee (b \vee a^*) = \mathbf{1}. \\
(a \vee b) \wedge a^* \wedge b^* &= [(a \wedge a^*) \vee (b \wedge a^*)] \wedge b^* \\
&= b \wedge a^* \wedge b^* = \mathbf{0}. \\
\text{Iz (1). imamo } (a \vee b)^* &= a^* \wedge b^*.
\end{aligned}
$$

(4): Ako je $a \wedge b = a$, tada $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$. Ako je $a \vee b = b$, tada $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$.
Drugi deo tvrđenja (3) ide slično. ■

Definicija 3.2. Ako je $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra, tada za $\forall a, b \in B$ definišemo:

(1). $(a - b) := a \wedge b^*$;

(2). $(a \Rightarrow b) := a^* \vee b$;

(3). $(a \Leftrightarrow b) := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$;

(4). $(a \leq b) \leftrightarrow a \wedge b = a$.

Relaciju $\leq$ zovemo *prirodnim uređenjem* na Bulovoj algebri. ▲

Teorema 3.4. *Ako je* $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *Bulova algebra sa prirodnim uređenjem* $\leq$, *tada za* $\forall a, b, c \in B$ *važi:*

(1). $a \leq a$;

(2). *Iz* $a \leq b$ *i* $b \leq a$ *sledi* $a = b$;

(3). *Iz* $a \leq b$ *i* $b \leq c$ *sledi* $a \leq c$.

Dokaz. (1): $a \wedge a = a$.
(2): $a = a \wedge b = b \wedge a = b$
(3): Ako je $a = a \wedge b$ i $b = b \wedge c$ tada $a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$. ■

Iz prethodne teoreme vidimo da je relacija $\leq$ na skupu B refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, dakle Bulova algebra generiše poredak na nosaču Bulove algebre - $(B, \leq)$ je parcijalno uređenje. Kroz sledeća tvrđenja dajemo osnovne osobine prirodnog uređenja.

Teorema 3.5. *Ako je* $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *Bulova algebra sa prirodnim uređenjem* $\leq$*, tada za* $\forall a, b \in B$ *važi:*

(1). $a \leq b \;\leftrightarrow\; b^* \leq a^*$;

(2). $a \leq b \;\leftrightarrow\; a - b = \mathbf{0}$;

(3). $a \leq b \;\leftrightarrow\; (a \Rightarrow b) = \mathbf{1}$.

Dokaz. (1) ($\rightarrow$): Iz $a \leq b$ imamo $a \wedge b = a$, a otuda i $a^* = (a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$. Sada iz **Teoreme 3.3.**(4) sledi $b^* \wedge a^* = b^*$, odnosno $b^* \leq a^*$.
(1) ($\leftarrow$): Ako je $b^* \leq a^*$ tada $(a^*)^* \leq (b^*)^*$, tačnije $a \leq b$.

(2) ($\rightarrow$): Iz $a \leq b$ imamo $a \wedge b = a$, a otuda i $a \wedge b^* = (a \wedge b) \wedge b^* = \mathbf{0}$.
(2) ($\leftarrow$): Ako je $a \wedge b^* = \mathbf{0}$, tada $a = a \wedge \mathbf{1} = a \wedge (b \vee b^*) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^*) = a \wedge b$ ili $a \leq b$.

(3) ($\rightarrow$): Iz $a \leq b$ imamo $a \wedge b = a$ i $a^* = a^* \vee b^*$, a otuda $(a \Rightarrow b) = a^* \vee b = (a^* \vee b^*) \vee b = a^* \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$.
(3) ($\leftarrow$): Ako važi $(a \Rightarrow b) = \mathbf{1}$, onda imamo $a = a \wedge \mathbf{1} = a \wedge (a^* \vee b) = a \wedge b$, odnosno $a \leq b$. ■

Teorema 3.6. *Ako je* $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *Bulova algebra sa prirodnim uređenjem* $\leq$*, tada za* $\forall a, b, c, d \in B$ *važi:*

(1). $\mathbf{0} \leq a \leq \mathbf{1}$;

(2). *iz* $a \leq b$ *i* $c \leq d$ *sledi* $(a \wedge c) \leq (b \wedge d)$ *i* $(a \vee c) \leq (b \vee d)$.

Dokaz. (1): $\mathbf{0} = \mathbf{0} \wedge a$, a imamo i $a = a \wedge \mathbf{1}$.
(2): Iz $a = a \wedge b$ i $c = c \wedge d$ sledi $(a \wedge c) \wedge (b \wedge d) = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = a \wedge c$, takođe imamo i $(a \vee c) \wedge (b \vee d) = (a \wedge b) \vee (a \wedge d) \vee (c \wedge b) \vee (c \wedge d) = a \vee (a \wedge d) \vee (c \wedge b) \vee c = a \vee c$. ■

Malopređašnja teorema nam govori da parcijalno uređen skup $(B, \leq)$ ima najmanji i najveći elemenat u odnosu na relaciju $\leq$. Sledeće tvrđenje proizilazi iz prethodnih tvrđenja i definicija:

Teorema 3.7. *Ako je $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ Bulova algebra sa prirodnim uređenjem $\leq$, tada za $\forall a, b, c \in B$ važi:*

(1). $a \leq b^* \leftrightarrow a \wedge b = \mathbf{0}$;

(2). $a \leq (a \vee b)$ *i* $b \leq (a \vee b)$;

(3). $(a \wedge b) \leq a$ *i* $(a \wedge b) \leq b$;

(4). *iz* $a \leq c$ *i* $b \leq c$ *sledi* $(a \vee b) \leq c$;

(5). *iz* $c \leq a$ *i* $c \leq b$ *sledi* $c \leq (a \wedge b)$.

Iz prethodne teoreme, konkretno iz (2) i (3), imamo da svaki dvoelementni podskup $\{a, b\} \subset B$ ima infimum i supremum u B, preciznije $inf\{a, b\} = a \wedge b$ i $sup\{a, b\} = a \vee b$, pa je prirodno uređenje $\leq$ Bulove algebre zapravo *mreža*. Lako se pokazuje da svaki konačan podskup Bulove algebre takođe ima supremum i infimum unutar Bulove algebre, naravno u odnosu na prirodno uređenje $\leq$. Za beskonačne podskupove to ne mora da važi. Ubuduće sa masnim slovom $\mathbf{B}$ označavamo strukturu Bulove algebre $(B, \vee, \wedge, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, a sa B označavamo nosač iste algebre.

Definicija 3.3. Neka je $\mathbf{B}$ Bulova algebra i neka je $\leq$ prirodno uređenje. Dalje, neka je A proizvoljan neprazni podskup skupa B. Ako postoji elemenat $b \in B$ sa osobinom:

(1). $(\forall a \in A)(a \leq b)$ i $(\forall b' \in B)[(\forall a \in A)(a \leq b') \rightarrow b \leq b']$, tada kažemo da je b supremum skupa A i označavamo ga sa $\bigvee\limits_{a \in A} a$;

(2). $(\forall a \in A)(b \leq a)$ i $(\forall b' \in B)[(\forall a \in A)(b' \leq a) \rightarrow b' \leq b]$, tada kažemo da je b infimum skupa A i označavamo ga sa $\bigwedge\limits_{a \in A} a$. ▲

Definicija 3.4. Bulovu algebru $\mathbf{B}$ zovemo *kompletnom* Bulovom algebrom ako svaki neprazan podskup skupa B ima i supremum i infimum u B. ▲

Primer 3.2. Bulova algebra $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^c, 0, A)$ gde je A neprazan skup je kompletna Bulova algebra. Zaista, ako je $X \subset \mathcal{P}(A)$ i $X \neq \emptyset$, tada

$$\bigvee_{x \in X} x = \bigcup_{x \in X} x \qquad \text{i} \qquad \bigwedge_{x \in X} x = \bigcap_{x \in X} x.$$

□

Neka je **B** kompletna Bulova algebra. Posmatrajmo preslikavanja

$$\bigvee,\ \bigwedge:\ \mathcal{P}(B)\setminus\emptyset \to B$$

koja svakom podskupu Bulove algebre dodeljuju njegov supremum i infimum, respektivno. Ova preslikavanja se često zovu *beskonačne* operacije. Beskonačne operacije kompletnih Bulovih algebri imaju važne osobine. U sledećih par tvrđenja navodimo te osobine.

Teorema 3.8. *Ako je* **B** *kompletna Bulova algebra i ako je* $A \neq \emptyset$ *proizvoljan podskup skupa* B*, tada važe sledeći De Morganovi zakoni:*

(1). $\left(\bigvee\limits_{a\in A} a\right)^{*} = \bigwedge\limits_{a\in A} a^{*}$;

(2). $\left(\bigwedge\limits_{a\in A} a\right)^{*} = \bigvee\limits_{a\in A} a^{*}$.

Dokaz. (1): Kako je $(\forall b \in A)(b \leq \bigvee_{a\in A} a)$, imamo iz **Teoreme 3.5.** $(\bigvee_{a\in A} a)^{*} \leq b^{*}$, a odavde i

$$\left(\bigvee_{a\in A} a\right)^{*} \leq \bigwedge_{a\in A} a^{*}.$$

Takođe, $(\forall b \in A)(\bigwedge_{a\in A} a^{*} \leq b^{*})$, a odavde $b \leq (\bigwedge_{a\in A} a^{*})^{*}$, dakle

$$\bigvee_{a\in A} a \leq \left(\bigwedge_{a\in A} a^{*}\right)^{*},$$

odnosno

$$\bigwedge_{a\in A} a^{*} \leq \left(\bigvee_{a\in A} a\right)^{*}.$$

(2): Slično sa (1). ■

Teorema 3.9. *Ako je* **B** *proizvoljna Bulova algebra i ako je* $A \neq \emptyset$ *podskup skupa* B*, tada važe sledeći beskonačni distributivni zakoni (ako postoji leva strana, postoji i desna i među njima važi jednakost):*

(1). $b \vee \bigwedge\limits_{a\in A} a = \bigwedge\limits_{a\in A}(b \vee a)$ *za svako* $b \in B$;

(2). $b \wedge \bigvee_{a\in A} a = \bigvee_{a\in A} (b \wedge a)$ *za svako* $b \in B$*;*

Dokaz. (1): Očigledno

$$\forall a \in A \text{ važi } b \vee \bigwedge_{x\in A} x \leq b \vee a.$$

Prema tome $b \vee \bigwedge_{x\in A} x$ je donja granica skupa $\{b \vee a : a \in A\}$. Neka je i c donje ograničenje skupa $\{b \vee a : a \in A\}$. Za $x \in A$ imamo, dakle, $c \leq b \vee x$, što pak daje

$$c \wedge b^* \leq (b \vee x) \wedge b^* = x \wedge b^* \leq x.$$

Sledi $c \wedge b^* \leq \bigwedge_{a\in A} a$. Konačno,

$$c = c \wedge \mathbf{1} = c \wedge (b \vee b^*) = (c \wedge b) \vee (c \wedge b^*) \leq b \vee \bigwedge_{a\in A} a.$$

(2): Analogno sa (1). ■

Iz beskonačnih distributivnih zakona slede mnoge korisne osobine. Te osobine dajemo u sledećoj teoremi koju ne dokazujemo. Brojanje nastavljamo sa prethodnom teoremom jer su sve osobine koje navodimo u tesnoj vezi.

Teorema 3.10. *Neka je* $\mathbf{B}$ *kompletna Bulova algebra i neka su* I *i* J *indeksni skupovi elemenata iz* B $(x_i, x_j, x_{ij} \in B$ *za sve* $i \in I, j \in J)$*. Neka je* $b \in B$ *prozivoljno. Tada važe sledeće relacije:*

$$(3).\ \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \Rightarrow b = \bigwedge_{i\in I}(x_i \Rightarrow b); \quad (4).\ \left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) \Rightarrow b = \bigvee_{i\in I}(x_i \Rightarrow b);$$

$$(5).\ b \Rightarrow \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) = \bigvee_{i\in I}(b \Rightarrow x_i); \quad (6).\ b \Rightarrow \left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) = \bigwedge_{i\in I}(b \Rightarrow x_i);$$

$$(7).\ \bigvee_{i\in I}\bigvee_{j\in J} x_{i,j} = \bigvee_{j\in J}\bigvee_{i\in I} x_{i,j}; \quad (8).\ \bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} x_{i,j} = \bigwedge_{j\in J}\bigwedge_{i\in I} x_{i,j};$$

$$(9).\ \bigvee\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigvee_{i\in I}\bigvee X_i; \quad (10).\ \bigwedge\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigwedge_{i\in I}\bigwedge X_i,$$

gde su X_i *neprazni podskupovi nosača* B *za sve* $i \in I$.

3.1 Ideali i filteri Bulovih algebri

Na početku dajemo definiciju homomorfizma Bulovih algebri, koji je u tesnoj vezi sa idealima i filterima. Takođe dajemo par tvrđenja koja posle koristimo.

Definicija 3.5. Funkcija $f : B_1 \to B_2$ je homomorfizam Bulove algebre $\mathbf{B}_1$ u Bulovu algebru $\mathbf{B}_2$ akko za sve $x, y \in B_1$ važi:

(1). $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

(2). $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

(3). $f(x^*) = (f(x))^*$. ▲

Ako je funkcija iz gornje definicije „na” onda kažemo da je f *epimorfizam*, ako je još i „1-1” onda je zovemo *izomorfizmom* Bulovih algebri. Izomorfizam Bulove algebre $\mathbf{B}$ na samu sebe zovemo *automorfizmom* Bulove algebre $\mathbf{B}$.

Teorema 3.11. *Ako su $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ Bulove algebre i ako je $f : B_1 \to B_2$ takvo da za $\forall x, y \in B_1$ važi (1) i (3)* **Definicije 3.5.** *(ili (2) i (3)), onda je f homomorfizam pomenutih Bulovih algebri.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= f((x^* \vee y^*)^*) = (f(x^* \vee y^*))^* = (f(x^*) \vee f(y^*))^* \\ &= (f(x)^* \vee f(y)^*)^* = f(x) \wedge f(y). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.12. *Ako je f homomorfizam iz $\mathbf{B}_1$ u $\mathbf{B}_2$, tada važi:*

(1). $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

(2). $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

(3). $(\forall x, y \in B_1)[x \leq y \to f(x) \leq f(y)]$;

(4). *skup svih automorfizama čini grupu u odnosu na operaciju kompozicije dve funkcije, grupu koju označavamo sa* $Aut(\mathbf{B})$.

Dokaz. (1): $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} \wedge \mathbf{0}^*) = f(\mathbf{0}) \wedge f(\mathbf{0})^* = \mathbf{0}$.
(2): $f(\mathbf{1}) = f(\mathbf{1} \vee \mathbf{1}^*) = f(\mathbf{1}) \vee f(\mathbf{1})^* = \mathbf{1}$.
(3): $x \leq y \to x = x \wedge y \to f(x) = f(x) \wedge f(y) \to f(x) \leq f(y)$. ■

Pre formulacije sledeće teoreme usvajamo jednu oznaku. Neka je dato parcijalno uređenje $(P, \leq)$. Tada sa $[a]$ označavamo skup $\{y \in P : y \leq a\}$ za proizvoljno $a \in P$.

Teorema 3.13. *Ako je* $\mathbf{B}$ *Bulova algebra sa prirodnim uređenjem* $\leq$ *i ako je* $B_0 = B \setminus \{\mathbf{0}\}$, *tada je* $\leq$ *parcijalno uređenje na* B_0 *i važi:*

$$(\forall a, b \in B_0)([a] \cap [b] = \emptyset \leftrightarrow a \wedge b = \mathbf{0}).$$

Dokaz. Kako je $\leq$ parcijalno uređenje na B, to je ono i parcijalno uređenje na nepraznom podskupu B_0 skupa B. Slučaj trivijalne Bulove algebre B nije zanimljiv. Ostaje da pokažemo datu rečenicu. U to ime neka su $a, b \in B_0$ proizvoljni.
$(\rightarrow)$: Neka važi $[a] \cap [b] = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, da je $a \wedge b = c \neq \mathbf{0}$. Otuda imamo i $c \leq a$ kao i $c \leq b$, pa dolazimo u kontradikciju sa $[a] \cap [b] = \emptyset$.
$(\leftarrow)$: Neka je sada $a \wedge b = \mathbf{0}$. Pretpostavimo suprotno, da je $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, neka je za neko $c \in B_0$ ispunjeno $c \leq a$ i $c \leq b$. To c mora biti različito od $\mathbf{0}$ jer je $c \in B_0$. Međutim, tada iz relacija $c \leq a$ i $c \leq b$ imamo $(c \wedge c) \leq (a \wedge b) \leftrightarrow c \leq (a \wedge b) \leftrightarrow c \wedge (a \wedge b) = c$, a odavde imamo kontradikciju sa $a \wedge b = \mathbf{0}$. ∎

Krećemo sa definicijom ideala Bulove algebre, a zatim listamo tvrđenja vezana za ideale.

Definicija 3.6. I je *ideal* Bulove algebre $\mathbf{B}$ ako i samo ako $I \subseteq B$ i ako važe uslovi:

(1). $\mathbf{0} \in I$;

(2). $\forall a, b \in I \rightarrow (a \vee b) \in I$;

(3). Za svako $a \in I$ i za sve $b \in B$ važi $a \wedge b \in I$. ▲

Ideal I Bulove algebre zovemo *pravim* akko $\mathbf{1} \notin I$; ako je $I = [b]$, onda takav ideal zovemo *glavnim*. Ideal je *trivijalan* ako i samo ako je $I = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema 3.14. *Ako je* I *ideal Bulove algebre* $\mathbf{B}$, *tada važi:*

(1). $(\forall a, b \in B)[a \leq b \in I \rightarrow a \in I]$;

(2). $\mathbf{1} \in I \rightarrow I = B$.

Dokaz. (1): Neka je $b \in I$ i neka je $a \leq b$. Odavde imamo $a \wedge b = a$, a odavde, prema (3) $a \in I$.
(2): Neka je $b \in B$ proizvoljno. Tada zbog $b \leq \mathbf{1}$ i (1) ove teoreme imamo $b \in I$. ∎

Definicija 3.7. Ako je f homomorfno preslikavanje Bulove algebre $\mathbf{B}_1$ u $\mathbf{B}_2$, tada sledeći skup zovemo *jezgrom* homomorfizma f:

$$ker(f) = \{a \in B_1 : f(a) = \mathbf{0}\}.$$

▲

Sledeća teorema pokazuje da je jezgro homomorfizma ideal Bulove algebre.

Teorema 3.15. *Ako je f homomorfizam Bulove algebre $\mathbf{B}_1$ u $\mathbf{B}_2$, tada je $ker(f)$ pravi ideal Bulove algebre $\mathbf{B}_1$. Dalje, ako je $ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, tada je f „1-1" funkcija.*

Dokaz. Kako je $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, imamo i $\mathbf{0} \in ker(f)$. Ako je $a, b \in ker(f)$, tada

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Otuda $(a \vee b) \in ker(f)$. Ako je $a \in ker(f)$ i $b \in B_1$, tada

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = \mathbf{0} \wedge f(b) = \mathbf{0}.$$

Odavde $(a \wedge b) \in ker(f)$. Time smo pokazali da je $ker(f)$ ideal u $\mathbf{B}_1$. Međutim,

$$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \neq \mathbf{0}.$$

Dakle, $\mathbf{1} \notin ker(f)$, odnosno $ker(f)$ je pravi ideal.

Ako pretpostavimo $ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ i $f(x) = f(y)$, tada je $f(x - y) = \mathbf{0}$, a odavde $x - y = \mathbf{0}$ i $x \leq y$. Slično je $(y - x) \in ker(f)$ i $y \leq x$. Dakle $x = y$, odnosno f je „1-1". ■

Teorema 3.16. *Ako je I ideal Bulove algebre $\mathbf{B}$, tada imamo:*

$$(\forall a, b \in B)[a \vee b \in I \rightarrow (a \in I \text{ i } b \in I)].$$

Dokaz.

$$a = a \wedge (a \vee b) \in I.$$
$$b = b \wedge (a \vee b) \in I.$$

■

Definicija 3.8. Neka je I pravi ideal Bulove algebre $\mathbf{B}$. Definišemo skupove:

(1). $(\forall a \in B)\ \ a/I \stackrel{def.}{=} \{x \in B : (a \wedge x^*) \vee (x \wedge a^*) \in I\};$

(2). $B/I \overset{def.}{=} \{a/I : a \in B\}$. ▲

Posmatrajmo relaciju

$$x \sim y \leftrightarrow x \bigtriangleup y \in I, \quad \text{za sve } x, y \in B,$$

gde smo sa $\bigtriangleup$ označili operaciju *simetrične razlike* $((x - y) \wedge (y - x))$ Bulove algebre $\mathbf{B}$. Pokazuje se da je $\sim$ relacija ekvivalencije na B, a skupovi a/I upravo predstavljaju elemente skupa $B/I := B/\sim$.

Lema 3.1. *Neka je I pravi ideal Bulove algebre $\mathbf{B}$, tada imamo:*

(1). $a/I = b/I \leftrightarrow ((a \wedge b^*) \vee (b \wedge a^*)) \in I$;

(2). *Iz* $a/I = c/I$ *i* $b/I = d/I$ *sledi* $(a \vee b)/I = (c \vee d)/I$;

(3). *Iz* $a/I = c/I$ *i* $b/I = d/I$ *sledi* $(a \wedge b)/I = (c \wedge d)/I$;

(4). $a/I = b/I \rightarrow a^*/I = b^*/I$.

Dokaz. (1)($\rightarrow$): Ako je $a/I = b/I$, tada zbog $(a \wedge a^*) \vee (a \wedge a^*) = \mathbf{0} \in I$ imamo $a \in a/I$, a odavde i $a \in b/I$. Iz definicije skupa b/I imamo $((a \wedge b^*) \vee (b \wedge a^*)) \in I$.
(1)($\leftarrow$): Neka važi $((a \wedge b^*) \vee (b \wedge a^*)) \in I$ i neka je $x \in a/I$ proizvoljno, tada na osnovu **Teoreme 3.14.**(1) imamo $a \wedge b^*, b \wedge a^*, x \wedge a^*, a \wedge x^* \in I$. Zbog toga je

$$\begin{gathered}(a \wedge b^* \wedge x) \vee (b \wedge a^* \wedge x^*) \vee (x \wedge a^* \wedge b^*) \vee (a \wedge x^* \wedge b) \in I \\ ((x \wedge b^*) \vee (b \wedge x^*)) \wedge (a \vee a^*) \in I \\ (x \wedge b^*) \vee (b \wedge x^*) \in I\end{gathered}$$

odnosno $x \in b/I$. Analogno radimo i za $x \in b/I \rightarrow x \in a/I$.
(2): Na osnovu (1) ovog tvrđenja imamo $((a \wedge c^*) \vee (c \wedge a^*)) \in I$ i $((b \wedge d^*) \vee (d \wedge b^*)) \in I$, sada zbog **Teoreme 3.16.** sledi $a \wedge c^*, c \wedge a^*, b \wedge d^*, d \wedge b^* \in I$. Odavde imamo:

$$\begin{aligned}&(a \wedge c^* \wedge d^*) \vee (c \wedge a^* \wedge b^*) \vee (b \wedge d^* \wedge c^*) \vee (d \wedge b^* \wedge a^*) \in I \\ \rightarrow \quad & ((a \vee b) \wedge c^* \wedge d^*) \vee ((c \vee d) \wedge a^* \wedge b^*) \in I \\ \rightarrow \quad & ((a \vee b) \wedge (c \vee d)^*) \vee ((c \vee d) \wedge (a \vee b)^*) \in I,\end{aligned}$$

što opet zbog (1) daje $(a \vee b)/I = (c \vee d)/I$.
(3): Opet, kao pod (2), imamo $a \wedge c^*, c \wedge a^*, b \wedge d^*, d \wedge b^* \in I$, a odavde:

$$\begin{aligned}&(a \wedge c^* \wedge b) \vee (c \wedge a^* \wedge d) \vee (b \wedge d^* \wedge a) \vee (d \wedge b^* \wedge c) \in I \\ \rightarrow \quad & ((a \wedge b) \wedge (c \wedge d)^*) \vee ((c \wedge d) \wedge (a \wedge b)^*) \in I,\end{aligned}$$

kraće, $(a \wedge b)/I = (c \wedge d)/I$.
(4): Iz pretpostavke i (1) imamo $(a \wedge b^*) \vee (b \wedge a^*) \in I$, a odavde:

$$(a^* \wedge (b^*)^*) \vee (b^* \wedge (a^*)^*) = (a \wedge b^*) \vee (b \wedge a^*) \in I,$$

ili $a^*/I = b^*/I$. ■

Teorema 3.17. *Ako je I pravi ideal Bulove algebre $\mathbf{B}$, tada B/I predstavlja nosač Bulove algebre, $\mathbf{B/I}$, sa operacijama:*

$$a/I \vee b/I = (a \vee b)/I, \quad a/I \wedge b/I = (a \wedge b)/I, \quad (a/I)^* = a^*/I$$

i konstantama $\mathbf{0}/I$ i $\mathbf{1}/I$.

Dokaz. Kao prvo, na osnovu prethodne leme definicije operacija strukture $\mathbf{B/I}$ su dobre. Treba proveriti uslove **Definicije 3.1**. Preciznije, ako su $a/I, b/I, c/I \in B/I$ proizvoljno odabrani tada važe svih 5 tačaka definicije. Provera je trivijalna i oslanja se na prethodnu lemu i činjenicu da je B nosač Bulove algebre. Tako, za četvrtu tačku, imamo:

$$\mathbf{0}/I \vee a/I = (\mathbf{0} \vee a)/I = a/I \quad \text{i} \quad \mathbf{1}/I \wedge a/I = (\mathbf{1} \wedge a)/I = a/I,$$

gde prva jednakost sledi iz definicija operacija algebre $\mathbf{B/I}$ koje su opravdane prethodnom lemom, a druga jednakost iz činjenice da je $\mathbf{B}$ Bulova algebra za sebe. ■

Sledeća teorema predstavlja vezu između Bulove algebre $\mathbf{B}$ i algebre $\mathbf{B/I}$, koja je na osnovu prethodnog tvrđenja takođe Bulova. Ta veza je data kroz homomorfizam čije je jezgro baš ideal I.

Teorema 3.18. *Ako je I pravi ideal Bulove algebre $\mathbf{B}$ i ako je funkcija f definisana sa*

$$(\forall a \in B)(f(a) = a/I),$$

tada je f homomorfizam Bulove algebre $\mathbf{B}$ „na” $\mathbf{B/I}$ i važi $ker(f) = I$.

Dokaz. Neka su $a, b \in B$ i $c \in I$ proizvoljno odabrani, tada imamo

$$\begin{gathered} f(a \vee b) = (a \vee b)/I = a/I \vee b/I = f(a) \vee f(b), \\ f(a^*) = a^*/I = (a/I)^* = (f(a))^*, \\ (\dagger): \ c/I = \mathbf{0}/I \leftrightarrow ((c \wedge \mathbf{1}) \vee (\mathbf{0} \wedge c^*)) = c \vee \mathbf{0} = c \in I. \end{gathered}$$

Ovim smo pokazali da je f homomorfizam (**Teorema 3.11.**). Takođe, $ker(f) = \{a \in B : f(a) = \mathbf{0}/I\} = I$ (zbog †). ■

Definicija 3.9. Pravi ideal I Bulove algebre $\mathbf{B}$ zovemo *maksimalnim* idealom akko za svaki ideal J iz $\mathbf{B}$ važi

$$I \subseteq J \to I = J \vee J = B.$$

▲

Kroz sledeću teoremu dajemo ekvivalent definicije maksimalnog ideala.

Teorema 3.19. *Ideal I je maksimalan ideal Bulove algebre $\mathbf{B}$ akko*

$$(\star): \ (\forall b \in B)[b \in I \leftrightarrow b^* \notin I].$$

Dokaz. $(\to)$: Neka je $b \in B$ takvo da važi istovremeno $b^* \notin I$ i $b \notin I$. Posmatrajmo sledeći podskup skupa B:

$$J = \{x \vee y : x \leq b \wedge y \in I\},$$

sigurno je $\mathbf{0} \in J$. Neka su $x_1 \vee y_1 \in J$ i $x_2 \vee y_2 \in J$, iz definicije skupa J imamo da je tada $x_1 \leq b$, $y_1 \in I$ i $x_2 \leq b$, $y_2 \in I$, a odavde

$$(x_1 \vee x_2) \leq b \quad \text{i} \quad (y_1 \vee y_2) \in I.$$

Dakle, $(x_1 \vee x_2) \vee (y_1 \vee y_2) \in J$. Dalje, za proizvoljno c važi $c \leq \mathbf{1}$ i zbog toga

$$(x_1 \wedge c) \leq x_1 \leq b \quad \text{i} \quad (y_1 \wedge c) \in I,$$

što daje $(x_1 \vee y_1) \wedge c \in J$. Ovim smo pokazali da je skup J zapravo ideal koji sadrži I. Zbog pretpostavke $b \notin I$ imamo da je zapravo $I \subsetneq J$. Takođe važi relacija $b^* \notin J$ inače

$$(\exists x \leq b)(\exists y \in I)[b^* = x \vee y],$$

a odavde $b^* = b^* \wedge b^* = (x \vee y) \wedge b^* = (\mathbf{0} \vee (y \wedge b^*)) \in I$, što se kosi sa izborom elementa b. Dakle, $b^* \notin J$, pa je J pravi ideal u $\mathbf{B}$ koji strogo (sa)drži I, a to je kontradikcija sa maksimalnošću od I.

Neka je sada $b \in B$ takvo da je istovremeno $b^* \in I$ i $b \in I$. Iz definicije ideala imamo $\mathbf{1} = b^* \vee b \in I$, pa I nije pravi ideal jer se podudara sa B. Time smo pokazali da iz maksimalnosti ideala I sledi $(\star)$.
$(\leftarrow)$: Neka je tačno $(\star)$. Pretpostavimo da je J ideal takav da je $I \subsetneq J$. Tada mora postojati $b \in J$ sa osobinom $b \notin I$. Otuda $b^* \in I \subset J$, a samim tim

$$(b^* \vee b) = \mathbf{1} \in J$$

i I je maksimalan ideal jer je $J = B$. ∎

Teorema 3.20. *Neka je $A \neq \emptyset$ i za sve $a \in A$, I_a je ideal Bulove algebre* $\mathbf{B}$. *Tada je $\bigcap_{a\in A} I_a$ ideal Bulove algebre* $\mathbf{B}$.

Dokaz. Direktno sledi iz definicije ideala i preseka familije skupova. ∎

Priču o idealima završavamo dokazom tvrđenja koje govori o tome da je svaki pravi ideal sadržan u nekom maksimalnom idealu. Pre dokaza nam treba definicija ideala generisanog nekim skupom, što opravdavamo prethodnom teoremom.

Definicija 3.10. Neka je $\mathbf{B}$ Bulova algebra i neka je $A \subseteq B$. Tada

$$\bigcap \{I : A \subseteq I \wedge I \text{ je ideal iz } \mathbf{B}\},$$

predstavlja ideal *generisan skupom* A. ▲

Lema 3.2. *Ako je I ideal Bulove algebre* $\mathbf{B}$ *koji je generisan nepraznim skupom A, tada važi $b \in I$ akko $b \in B$ i*

$$(\exists b_1, \ldots, b_n \in A)[b \leq (b_1 \vee \cdots \vee b_n)].$$

Dokaz. Neka je $J = \{b \in B : (\exists b_1, \ldots, b_n \in A)[b \leq (b_1 \vee \cdots \vee b_n)]\}$. Ako su dati $a, b \in J$ i proizvoljno c, tada imamo

$$\begin{gathered}(a \vee b) \in J \text{ zbog } a \vee b \leq (a_1 \vee \cdots \vee a_m) \vee (b_1 \vee \cdots \vee b_n);\\ (a \wedge c) \in J \text{ zbog } (a \wedge c) \leq a \leq (a_1 \vee \cdots \vee a_m);\\ \mathbf{0} \in J \text{ zbog } \mathbf{0} \leq a, \text{ proizvoljan elemenat nepraznog } A.\end{gathered}$$

Dakle, J je ideal za koji važi $A \subseteq J$. Kako je I generisan sa A to mora biti $I \subseteq J$, međutim imamo

$$b \leq (b_1 \vee \cdots \vee b_n) \in I \rightarrow b \in I,$$

pa važi i $J \subseteq I$. ∎

Lema 3.3. *Ako je I pravi ideal Bulove algebre* $\mathbf{B}$, *ako $a^* \notin I$ i ako je I_a ideal Bulove algebre* $\mathbf{B}$ *generisan sa $I \cup \{a\}$, tada je I_a pravi ideal.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno – $\mathbf{1} \in I_a$. Tada na osnovu prethodne leme imamo

$$(\exists b \in I)[\mathbf{1} \leq (b \vee a)].$$

Sada, $a^* = (a^* \wedge \mathbf{1}) \leq (a^* \wedge b) \in I$, a ovo je kontradikcija sa uslovom leme. ∎

Teorema 3.21. *Svaki pravi ideal I Bulove algebre* $\mathbf{B}$ *može da se proširi do maksimalnog ideala, odnosno, postoji maksimalan ideal J Bulove algebre* $\mathbf{B}$ *za koji važi $I \subseteq J$.*

Dokaz. Uredićemo nosač Bulove algebre nekim dobrim uređenjem, ovo možemo uraditi ako prihvatamo (**AC**), naravno Bulove algebre se mogu formalizovati kroz teoriju **ZFC**. Dakle, neka je $B = \{b_\alpha : \alpha < \lambda\}$, $|B| = \lambda$ dobro uređenje skupa B. Dalje, rekurzijom na ordinalu λ definišemo sledeću hijerarhiju:

$$\underline{\text{za } \alpha = 0:}$$

$$I_0 = \begin{cases} I \cup \{b_0\}, & \text{ako } b_0, b_0^* \notin I \\ I, & \text{inače} \end{cases};$$

$$\underline{\text{za } \alpha = \beta + 1:}$$

$$I_\alpha = \begin{cases} I_\beta \cup \{b_\alpha\}, & \text{ako } b_\alpha, b_\alpha^* \notin I_\beta \\ I_\beta, & \text{inače} \end{cases};$$

$$\underline{\text{za } \alpha \text{ granični}:}$$

$$I_\alpha = \begin{cases} \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta \cup \{b_\alpha\}, & \text{ako } b_\alpha, b_\alpha^* \notin \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta \\ \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta, & \text{inače} \end{cases}.$$

Ideal $J = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} I_\alpha$ je traženi maksimalni ideal koji sadrži ideal I. Proveru ovoga ostavljamo čitaocu, što sledi iz same konstrukcije hijerarhije.

■

Prelazimo na pojam filtera Bulovih algebri, odmah zatim dajemo par tvrđenja vezanih za filtere.

Definicija 3.11. F je *filter* Bulove algebre $\mathbf{B}$ akko $\emptyset \neq F \subseteq B$ i važe sledeći uslovi:

(a) Za sve $x \in F$ i $y \in F$ važi $(x \wedge y) \in F$;

(b) Za sve $x \in F$ i $y \in B$ za koje je $x \leq y$ važi $y \in F$. ▲

PRIMER 3.3. Neka je $\mathbf{B}$ proizvoljna Bulova algebra. Posmatrajmo skup $F = \{\mathbf{1}\}$, trivijalno se vidi da su uslovi (a) i (b) prethodne definicije ispunjeni za skup F. Dakle, skup $\{\mathbf{1}\}$ uvek predstavlja filter proizvoljne Bulove algebre.

Ako je A neprazan skup, a $a \subset A$ i

$$F = \{x \subseteq A : a \subseteq x\},$$

tada je F filter Bulove algebre $\mathcal{P}(A)$. Zaista, za $a \subseteq x, y$ važi $a \subseteq x \cap y$, pa je ispunjen uslov (a). Takođe, ako za $a \subseteq x$ i $y \in \mathcal{P}(A)$ važi $x \cap y = x \leftrightarrow x \subseteq y$, onda je ispunjeno i $a \subseteq y$ (važi i (b)). $\square$

Definicija 3.12. Neka je F filter Bulove algebre $\mathbf{B}$. Tada kažemo:

(1). F je *ultrafilter* akko $(\forall x \in B)(x \in F \leftrightarrow x^* \notin F)$;

(2). F je *glavni filter* akko $(\exists a \in F)(F = \{x \in B : a \leq x\})$;

(3). F je *pravi filter* akko $\mathbf{0} \notin F$;

(4). F je *trivijalan filter* akko $F = \{\mathbf{1}\}$. ▲

Lema 3.4. *Ako je F filter na Bulovoj algebri $\mathbf{B}$, tada važe uslovi:*

(1). $\mathbf{1} \in F$;

(2). *Za sve $x \in F$ i $y \in B$ važi $(x \vee y) \in F$.*

Dokaz. (1): Stavimo li da je $y = \mathbf{1}$ u uslov (b) **Definicije 3.11.** dobijamo tvrđenje.
(2): Opet, zbog (b) iz $x \leq (x \vee y)$ imamo $(x \vee y) \in F$. ■

Sledeća teorema predstavlja vezu između ideala i filtera Bulovih algebri. Ta dva pojma su dualni.

Teorema 3.22. *Ako je $\mathbf{B}$ Bulova algebra i ako su F i I neprazni pravi podskupovi nosača B sa osobinom $a \in F$ akko $a^* \in I$, tada važe sledeće tačke:*

- *I je ideal u $\mathbf{B}$* **akko** *F je filter na $\mathbf{B}$;*
- *I je maksimalan ideal* **akko** *F je ultrafilter;*
- *I je glavni ideal* **akko** *F je glavni filter;*
- *I je pravi ideal* **akko** *F je pravi filter;*
- *I je trivijalan ideal* **akko** *F je trivijalan filter.*

Dokaz. U Bulovim algebrama važi princip dualiteta iz kojeg se ova teorema lako pokazuje. Preciznije, trebaju nam tvrđenja koja u sebi sadrže operaciju komplementiranja:

$$\mathbf{0}^* = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \mathbf{1}^* = \mathbf{0};$$
$$(a^*)^* = a \quad \text{i} \quad (a \wedge b)^* = a^* \vee b^* \quad \text{i} \quad (a \vee b)^* = a^* \wedge b^*;$$
$$a \leq b \leftrightarrow b^* \leq a^* \ldots$$

Sva potrebna tvrđenja smo pokazali ranije u ovoj glavi, sam dokaz izostavljamo. ■

Lema 3.5. *Ako je F ultrafilter na $\mathbf{B}$ i ako definišemo preslikavanje f sa*

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{1}, & x \in F \\ \mathbf{0}, & x \in B \setminus F \end{cases},$$

tada f predstavlja homomorfizam Bulove algebre $\mathbf{B}$ na $\mathbf{2}$.

Važi i obrat, ako je f homomorfizam algebre $\mathbf{B}$ na $\mathbf{2}$, onda je skup

$$F = \{x \in B : f(x) = \mathbf{1}\}$$

ultrafilter na $\mathbf{B}$. Preslikavanje f zovemo kanoničkim homomorfizmom definisanim ultrafilterom F.

Dokaz. Pokažimo obrat. Neka je f homomorfizam iz $\mathbf{B}$ na $\mathbf{2}$. Kako je $f(\mathbf{1_B}) = \mathbf{1_2}$, to je $F \neq \emptyset$, a jasno je $F \subseteq B$. Iz $f(x) = \mathbf{1_2}$ i $f(y) = \mathbf{1_2}$ imamo

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = \mathbf{1_2},$$
$$x \leq z \to f(x) \leq f(z) \to f(z) = \mathbf{1_2}, \quad \text{gde je } z \in B.$$
$$x \in F \leftrightarrow f(x) = \mathbf{1_2} \leftrightarrow (f(x))^* = \mathbf{0_2} \leftrightarrow f(x^*) = \mathbf{0_2} \leftrightarrow x^* \notin F.$$

Dakle, F je ultrafilter na $\mathbf{B}$. ■

Teorema 3.23. *Svaki pravi filter Bulove algebre $\mathbf{B}$ može da se proširi do ultrafiltera na $\mathbf{B}$, preciznije, ako je F pravi filter na $\mathbf{B}$, onda postoji ultrafilter F' na $\mathbf{B}$ tako da važi $F \subseteq F'$.*

Dokaz. Kako je F pravi filter na $\mathbf{B}$, to sigurno $\mathbf{0} \notin F$, pa je skup $I = \{a \in B : a^* \in F\}$ neprazan. Iz četvrte tačke **Teoreme 3.22.** imamo da je I pravi ideal Bulove algebre $\mathbf{B}$. Na osnovu **Teoreme 3.21.** postoji maksimalan ideal J iz $\mathbf{B}$ tako da je $I \subseteq J$. Posmatrajmo skup $F' = \{a^* \in B : a \in J\}$, koji je takođe neprazan jer je J pravi ideal. Na osnovu druge tačke **Teoreme 3.22.** imamo da je F' ultrafilter na $\mathbf{B}$. Ako je $x \in F$ proizvoljno, tada $x^* \in I \subseteq J \to x^* \in J$, a odavde $(x^*)^* = x \in F'$. Dakle, $F \subseteq F'$.

Postoji dokaz bez korišćenja pojma ideala ali svakako bi morali koristiti ekvivalent Aksiome izbora, Kuratovski-Zornovu[1] lemu. Mi smo koristili ekvivalent dobrog uređenja prilikom dokaza **Teoreme 3.21.** ■

[1]Zanimljivo je uočiti kako se u „zapadnoj” literaturi nekako izgubilo ime Kuratovskog, iako je desetak godina ranije od Zorna pokazao tvrđenje.

3.2 Rasiowa-Sikorski teorema

Dajemo nekoliko definicija i tvrđenja vezana za filtere Bulovih algebri koja nam trebaju za dokaz teoreme. Sam dokaz tvrđenja je uzet iz [5]. Zatim dajemo posledicu Rasiowa-Sikorski teoreme koju pokazujemo neznatnom modifikacijom pomenutog dokaza, a koja nam treba u sledećoj glavi.

Definicija 3.13. Neka je $\mathbf{B}$ Bulova algebra i neka je $E \subseteq B$. Tada

$$\bigcap\{F : E \subseteq F \wedge F \text{ je filter iz } \mathbf{B}\},$$

predstavlja filter generisan skupom E. ▲

Lema 3.6. *Ako je F filter Bulove algebre $\mathbf{B}$ koji je generisan sa $E \subseteq B$, $E \neq \emptyset$, tada važi: $b \in F$ akko*

$$(\exists e_1, \ldots, e_n \in E)[(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \leq b].$$

Dokaz. Dualno tvrđenje sa **Lemom 3.2.** ■

Definicija 3.14. Neka je $\mathbf{B}$ Bulova algebra i neka je $E \subseteq B$. Skup E ima *svojstvo konačnog preseka (s.k.p.)* akko za svako $n \in \omega$ i $e_1, \ldots, e_n \in E$ važi $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n > 0$. ▲

Lema 3.7. *Filter Bulove algebre $\mathbf{B}$ generisan skupom E je najmanji filter u $\mathbf{B}$ koji sadrži skup E. Taj filter je pravi akko skup E ima s.k.p.*

Dokaz. Iz same definicije filtera generisanog nekim skupom imamo prvi deo tvrđenja. Drugi deo sledi iz **Definicije 3.12.**(3), **Leme 3.6.** i prethodne definicije ovog poglavlja. ■

Teorema 3.24. *Podskup Bulove algebre je sadržan u ultrafilteru akko ima svojstvo konačnog preseka.*

Dokaz. Neka je data Bulova algebra $\mathbf{B}$. Posmatrajmo podskup E te algebre.
($\rightarrow$): Ako je E sadržano u nekom ultrafilteru U, onda zbog **Definicije 3.12.** imamo da E ima s.k.p.
($\leftarrow$): Ako E ima s.k.p. onda iz **Leme 3.7.** filter F generisan sa E je pravi filter. Sada na osnovu **Teoreme 3.23.** postoji i ultrafilter U koji sadrži taj pravi filter F. ■

Posledica: *Elemenat $a \in B$ Bulove algebre $\mathbf{B}$ je sadržan u nekom ultrafilteru akko $a > 0$.*

Da li homomorfizam h Bulove algebre $\mathbf{A}$ u Bulovu algebru $\mathbf{B}$ očuvava infimume i supremume podskupova skupa A? Konkretno, imajmo u vidu sledeću definiciju.

Definicija 3.15. Neka je $h : A \to B$ homomorfizam Bulove algebre $\mathbf{A}$ u algebru $\mathbf{B}$. Funkciju h zovemo *kompletnim homomorfizmom* akko za svaki $M \subseteq A$ za koji postoji $\bigvee^{\mathbf{A}} M$ ($\bigwedge^{\mathbf{A}} M$) postoji i $\bigvee^{\mathbf{B}} h(M)$ ($\bigwedge^{\mathbf{B}} h(M)$) i važi:

$$h\left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{A}} M\right) = \bigvee\nolimits^{\mathbf{B}} h(M) \quad \left(h\left(\bigwedge\nolimits^{\mathbf{A}} M\right) = \bigwedge\nolimits^{\mathbf{B}} h(M)\right)$$

▲

Generalno, ne mora svaki homomorfizam biti kompletan, videti [2].

Definicija 3.16. Neka je F ultrafilter Bulove algebre $\mathbf{B}$ i neka je $M \subseteq B$ takav da $\bigvee M$ ($\bigwedge M$) postoje. Kažemo da F *očuvava supremume* $\bigvee M$ akko $\bigvee M \in F$ implicira $m \in F$ za neko $m \in M$. F *očuvava infimume* $\bigwedge M$ akko $M \subseteq F$ povlači $\bigwedge M \in F$. ▲

Lema 3.8. *Ultrafilter F Bulove algebre $\mathbf{B}$ očuvava $\bigvee M$ ($\bigwedge M$) akko odgovarajući kanonički homomorfizam $\chi_F : B \to 2$ očuvava pomenute supremume (infimume).*

Dokaz. Tvrđenje direktno sledi iz **Leme 3.5.** i prethodne dve definicije. ■

Neka je F ultrafilter kompletne Bulove algebre $\mathbf{B}$ koji očuvava supremume. Tada, zbog prethodne leme, homomorfizam χ_F takođe očuvava supremume. Dakle, za $M \subseteq B$ proizvoljno odabrano (postoji $\bigvee^{\mathbf{B}} M$ jer je $\mathbf{B}$ kompletna Bulova algebra) imamo:

$$(\star):\quad \chi_F\left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{B}} M\right) = \bigvee\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(M).$$

Neka je $N \subseteq B$. Kako je χ_F homomorfizam to imamo zbog $(\star)$ i beskonačnih De Morganovih osobina:

$$\chi_F\left(\bigwedge\nolimits^{\mathbf{B}} N\right) = \left(\chi_F\left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{B}} N^*\right)\right)^* = \left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(N^*)\right)^* = \bigwedge\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(N).$$

Tačnije, posmatrani ultrafilter F očuvava i infimume. Lako se uočava da ovo važi i za proizvoljne Bulove algebre; ako neki ultrafilter očuvava supremume unutar Bulove algebre $\mathbf{B}$, onda on očuvava i infimume. Sledeća važna teorema govori o postojanju ultrafiltera koji očuvavaju supremume i infimume.

Teorema 3.25 (Rasiowa-Sikorski)**.** *Neka su, u netrivijalnoj Bulovoj algebri $\mathbf{B}$, date najviše prebrojive familije S i P podskupova iz B za koje $\bigvee M$ postoji za sve M iz S i $\bigwedge N$ postoji za sve N iz P. Tada postoji ultrafilter F u $\mathbf{B}$ koji očuvava $\bigvee M$ za sve M iz S i $\bigwedge N$ za sve N iz P.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da postoji ultrafilter F koji očuvava supremume $\bigvee M$ skupova $M \in S$. Naime, ako za sve $N \in P$ postoje infimumi $\bigwedge N$, tada za sve $N \in P$ postoje supremumi $\bigvee N^*$. Dalje, neka je F ultrafilter koji očuvava supremume $\bigvee N^*$ skupova $N \in P$. Tada F očuvava infimume $\bigwedge N$, $N \in P$. Pretpostavimo suprotno, da je za neko $N \in P$ ispunjeno $N \subseteq F$ i $\bigwedge N \notin F$. Važi:

$$\bigwedge N \notin F \leftrightarrow (\bigwedge N)^* \in F \leftrightarrow \bigvee N^* \in F \rightarrow (\exists n \in N)\ n^* \in F,$$

a odavde imamo $(n^*)^* = n \notin F$, što se kosi sa pretpostavkom $N \subseteq F$.

Ako je $S = \emptyset$, tada svaki ultrafilter zadovoljava postavljeni uslov, kako je Bulova algebra netrivijalna to ona sigurno sadrži bar jedan ultrafilter na osnovu posledice **Teoreme 3.24.**

Dalje, neka je S neprazna familija. U ovom slučaju postoji numeracija familije $S = \{M_n : n \in \omega\}$. Indukcijom po prirodnim brojevima konstruišemo opadajući niz:

$$\mathbf{1} = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots .$$

Tražimo svi elementi niza budu različiti od nule, dakle $a_i \in B^+ = B \setminus \{\mathbf{0}\}$, $i \in \omega$ i da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$(\bullet) : \quad a_{n+1} \wedge \bigvee M_n = \mathbf{0} \ \text{ ili } \ a_{n+1} \leq m, \text{ za neko } m \in M_n.$$

Neka je $a_0 = \mathbf{1}$. Posle konstrukcije elementa a_n ($> \mathbf{0}$), a_{n+1} konstruišemo na ovaj način: Ako je $a_n \wedge \bigvee M_n = \mathbf{0}$ onda stavljamo $a_{n+1} = a_n$. U suprotnom, na osnovu **Teoreme 3.9.**, imamo:

$$\mathbf{0} < a_n \wedge \bigvee M_n = \bigvee \{a_n \wedge m : m \in M_n\},$$

pa mora postojati $m \in M_n$ tako da važi $\mathbf{0} < a_n \wedge m$ i u ovom slučaju stavljamo $a_{n+1} = a_n \wedge m$. Zbog samog izbora elemenata vidimo da važi uslov $(\bullet)$.

Skup $E = \{a_n : n \in \omega\}$ predstavlja opadajući lanac u B^+ i zbog toga E ima s.k.p. Na osnovu **Teoreme 3.24.** postoji ultrafilter F koji sadrži skup E. Pokažimo da ultrafilter F očuvava supremume $\bigvee M$ za $M \in S$.

U to ime, neka je $M = M_n$ i $\bigvee M_n \in F$. Kako je $a_{n+1} \in F$ i F je pravi filter to važi $a_{n+1} \wedge \bigvee M_n > \mathbf{0}$, a odavde iz $(\bullet)$ imamo $a_{n+1} \leq m$ za neko $m \in M$. Dakle, $m \in F$ i ultrafilter F zadovoljava uslove tvrđenja. ∎

Teorema 3.26. *Neka je data kompletna Bulova algebra* $\mathbf{B}$ *i neka je* P *najviše prebrojiva familija podskupova iz* B. *Za proizvoljan elemenat* $\mathbf{1} > b \in B$ *postoji ultrafilter* F *iz* $\mathbf{B}$ *tako da* $b \notin F$ *i* F *očuvava infimume* $\bigwedge N$ *za sve* $N \in P$.

Dokaz. Modifikujemo dokaz Rasiowa-Sikorski teoreme. Kao prvo, numerišemo familiju $P = \{N_n : n \in \omega\}$. Od familije P napravimo familju $S = \{M_n : n \in \omega\}$, gde je $M_n = N_n^*$, $n \in \omega$. Sada za familiju S simuliramo prethodni dokaz s tim što moramo konstruisati ultrafilter koji neće sadržati b. To činimo tako što konstruišemo niz elemenat koji su svi $> \mathbf{0}$:

$$b^* = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots,$$

gde je $b^* > \mathbf{0}$ zbog $b < \mathbf{1}$. Nastavljajući dokaz dolazimo do ultrafiltera F koji sadrži skup $E = \{a_n : n \in \omega\}$, pa samim tim $b^* \in F$, odnosno $b \notin F$. Ultrafilter F zbog konstrukcije očuvava supremume, pa za kanonički homomorfizam χ_F važi:

$$\chi_F\left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{B}} M\right) = \bigvee\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(M).$$

Iz poslednje jednakosti i osobina Bulovih algebri imamo sledeći niz ekvivalencija:

$$\begin{gathered}
\chi_F\left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{B}} M\right) = \bigvee\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(M) \\
\updownarrow \\
\left(\chi_F\left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{B}} M\right)\right)^* = \left(\bigvee\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(M)\right)^* \\
\updownarrow \\
\chi_F\left(\bigwedge\nolimits^{\mathbf{B}} M^*\right) = \bigwedge\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(M^*) \\
\updownarrow \\
\chi_F\left(\bigwedge\nolimits^{\mathbf{B}} N\right) = \bigwedge\nolimits^{\mathbf{2}} \chi_F(N).
\end{gathered}$$

Zbog **Leme 3.8.** vidimo da ultrafilter F očuvava infimume $\bigwedge N$ za $N \in P$. ■

4

Bulovsko vrednosne strukture

Pre definisanja Bulovsko vrednosnih struktura bacimo pogled na interpretaciju logike prvoga reda. Interpretaciju $\mathcal{M}$ smo definisali kao uređeni par (D, I), gde je D bio nosač (domen) interpretacije, a I funkcija koja je davala značenje simbolima našeg jezika. Svakom n-arnom predikatskom simbolu, R, interpretacija, $\mathcal{M}$, je dodeljivala neku n-arnu relaciju datu na domenu D, preciznije $R_{\mathcal{M}} \subseteq D^n$. Ovu relaciju možemo posmatrati kao funkciju $R_{\mathcal{M}} : D^n \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, gde je sa $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} = \mathbf{2}$ označena minimalna Bulova algebra, ako se dogovorimo da važi:

$$R_{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_n) = \mathbf{1} \text{ ako i samo ako } (d_1, \ldots, d_n) \in R_{\mathcal{M}}.$$

Ovo se lako proširuje na sve formule jezika definisanjem istinitosne funkcije $\| \ , \ \|_{\mathcal{M}}$ čiji je kodomen Bulova algebra $\mathbf{2}$, tako što stavljamo:

$$\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{1} \text{ ako i samo ako } \mathcal{M}, \alpha \models \phi.$$

Dakle, rečenice (zatvorene formule) imaju istinitosnu vrednost ili $\mathbf{0}$ ili $\mathbf{1}$ u proizvoljnoj interpretaciji $\mathcal{M}$. Zbog svega ovoga interpretacije $\mathcal{M}$ date u **1.2** zovemo još i *dvovrednosnim interpretacijama*, pisaćemo i **2**-*vrednosne strukture.*

Mi želimo da oslabimo uslov koji imamo na broju mogućih istinitosnih vrednosti rečenica. To ćemo uraditi tako što Bulovu algebru $\mathbf{2}$ zamenimo nekom drugom Bulovom algebrom $\mathbf{B}$. Prvi korak u tom pravcu je da svakom predikatskom slovu R dodelimo funkciju $R_{\mathcal{M}} : D^n \to \mathbf{B}$, gde je $\mathbf{B}$ Bulova algebra određena strukturom u kojoj se nalazimo, koju zovemo *Bulovsko vrednosna struktura*, kraće **B**-struktura. Iako funkcija $\| \ , \ \|$ i relacija $\models$ podjednako dobro opisuju pojam valjanosti unutar dvovrednosnih struktura, kada se radi o proizvoljnim **B**-strukturama oslanjaćemo se isključivo na **B**-vrednosnu funkciju $\| \ , \ \|$ (kasnije je definišemo) pošto ćemo imati više od dve mogućnosti $\mathcal{M}, \alpha \models \phi$ ili $\mathcal{M}, \alpha \models \neg\phi$ koje se pojavljuju dvovrednosnim strukturama.

Funkcija $=_{\mathcal{M}}$: $D^2 \to \mathbf{B}$ koju dodeljujemo predikatu $=$, rezervisanom za jednakost, treba da zadovoljava određene uslove. Kako je elemenat $d \in D$ jednak samome sebi, tražićemo $=_{\mathcal{M}} (d, d) = \mathbf{1}$. Međutim, ne zahtevamo da iz $d_1 \neq d_2$ sledi $=_{\mathcal{M}} (d_1, d_2) = \mathbf{0}$, gde su d_1 i d_2 elementi domena interpretacije $\mathcal{M}$. Zapravo mi dozvoljavamo mogućnost $=_{\mathcal{M}} (d_1, d_2) = \mathbf{1}$ za različite $d_1, d_2 \in D$. U dvovrednosnim strukturama, $\mathcal{N}$, zbog **Leme 1.2.** tačno je sledeće:

$$[=_{\mathcal{N}} (d_i, e) \wedge R_{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n)] \ \to \ R_{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, e, \ldots, d_n);$$
$$=_{\mathcal{N}} (d_i, e) \ \to \ =_{\mathcal{N}} (f_{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n), f_{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, e, \ldots, d_n)).$$

U Bulovsko vrednosnoj strukturi $\mathcal{M}$, funkcija $=_{\mathcal{M}}$ ne predstavlja strogu jednakost kao u dvovrednosnom slučaju zbog čega gornje formule ne moraju biti tačne; potrebno je uvesti uslove koji povezuju Bulovsko vrednosnu jednakost i funkcije $R_{\mathcal{M}}$, $f_{\mathcal{M}}$ tako da važe pomenute formule na jeziku Bulovih algebri. Imajući u vidu **Teoremu 3.5.** dolazimo do pomenutih uslova:

$$[=_{\mathcal{M}} (d_i, e) \wedge R_{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n)] \ \leq \ R_{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, e, \ldots, d_n);$$
$$=_{\mathcal{M}} (d_i, e) \ \leq \ =_{\mathcal{M}} (f_{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n), f_{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, e, \ldots, d_n)),$$

gde je sa $\mathcal{M}$ označena Bulovsko vrednosna struktura.

4.1 Definisanje B-struktura I

Imajući u vidu sve što je rečeno u uvodu ove glave dolazimo do sledeće definicije. Dajemo definiciju kao u [4].

Definicija 4.1. Bulovsko vrednosna struktura $\mathcal{A}$ za teoriju prvoga reda sa jednakošću $L_=$ je neprazan skup $D_{\mathcal{A}}$ zajedno sa sledećim:

(1) kompletna Bulova algebra $\mathbf{B}_{\mathcal{A}}$;

(2) za svaki funkcijski znak f reda n imamo funkciju $f_{\mathcal{A}} : D_{\mathcal{A}}^n \to D_{\mathcal{A}}$;

(3) za svaki predikatski simbol R reda n imamo funkciju $R_{\mathcal{A}} : D_{\mathcal{A}}^n \to \mathbf{B}_{\mathcal{A}}$ takvu da za sve $d_1, \ldots, d_n, e \in D_{\mathcal{A}}$ važi:

(a) $=_{\mathcal{A}} (e, e) = \mathbf{1}$,

(b) $R_{\mathcal{A}}(d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n) \wedge (=_{\mathcal{A}} (d_i, e)) \leq R_{\mathcal{A}}(d_1, \ldots, e, \ldots, d_n)$,

(c) $=_{\mathcal{A}} (d_i, e) \ \leq \ =_{\mathcal{A}} (f_{\mathcal{A}}(d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n), f_{\mathcal{A}}(d_1, \ldots, e, \ldots, d_n))$;

(4) za svaki simbol konstante c imamo elemenat $c_{\mathcal{A}} \in D_{\mathcal{A}}$. ▲

Kako je $=$ predikatski simbol reda 2 i kako smo ga interpretirali kao funkciju $=_{\mathcal{A}}$ čiji je domen D^2, a kodomen $\mathbf{B}_{\mathcal{A}}$, dali smo zapis oblika $=_{\mathcal{A}} (\cdot, \cdot) = b \in \mathbf{B}_{\mathcal{A}}$. Koristi se još i $(\cdot =_{\mathcal{A}} \cdot) = b \in \mathbf{B}_{\mathcal{A}}$ kao zamena za pomenuto zapisivanje.

Neka su $d, e \in D_{\mathcal{A}}$ proizvoljni elementi Bulovske interpretacije $\mathcal{A}$. Ako u (3b) prethodne definicije stavimo $R \equiv =$ i ako iskoristimo (3a) dobijamo:

$$[(e =_{\mathcal{A}} e) \wedge (e =_{\mathcal{A}} d) \leq (d =_{\mathcal{A}} e)] \leftrightarrow [(e =_{\mathcal{A}} d) \leq (d =_{\mathcal{A}} e)],$$

analogno imamo i $(d =_{\mathcal{A}} e) \leq (e =_{\mathcal{A}} d)$. Ovim smo pokazali *simetričnost jednakosti u Bulovskoj interpretaciji.* Dakle, $(e =_{\mathcal{A}} d) = (d =_{\mathcal{A}} e)$.

U Bulovskim interpretacijama imamo i *tranzitivnost jednakosti.* Iskoristimo li pokazanu simetričnost i (3b) imamo:

$$[(e =_{\mathcal{A}} d) \wedge (d =_{\mathcal{A}} c)] = [(d =_{\mathcal{A}} e) \wedge (c =_{\mathcal{A}} d)] \leq (c =_{\mathcal{A}} e) = (e =_{\mathcal{A}} c).$$

Vrednost terma u valuaciji α Bulovske interpretacije $\mathcal{A}$ označavamo sa $[t]^{\mathcal{A}}_{\alpha}$ i definišemo kao u dvovrednosnim strukturama, videti **Definiciju 1.6.**

Preostaje da definišemo obećanu „funkciju istine" (pandan **Definicije 1.7.** dvovrednosnih struktura) iz uvoda ove glave, funkciju $\| \ , \ \|_{\mathcal{A}}$ Bulovske strukture $\mathcal{A}$. Ova funkcija ima za kodomen Bulovu algebru $\mathbf{B}_{\mathcal{A}}$, a definiše se rekurzivno na skupu formula posmatranog jezika.

Definicija 4.2. Istinitosna vrednost atomarne formule $\phi = R(t_1, \ldots t_n)$ u valuaciji α Bulovske interpretacije $\mathcal{A}$, u oznaci $\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}}$, je data sa:

$$\|R(t_1, \ldots, t_n), \alpha\|_{\mathcal{A}} = R_{\mathcal{A}}([t_1]^{\mathcal{A}}_{\alpha}, \ldots, [t_n]^{\mathcal{A}}_{\alpha}) \in \mathbf{B}_{\mathcal{A}},$$

gde je R predikatski simbol reda n, a $t_1, \ldots, t_n$ su termi jezika $L_=$. Jasno, $R_{\mathcal{A}}$ je funkcija iz (3) definicije Bulovske strukture $\mathcal{A}$.

Za neatomarne formule rekurzivno definišemo pomenutu funkciju kroz sledeće tačke:

- $\|\neg\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\phi, \alpha\|^*_{\mathcal{A}}$;
- $\|\phi \wedge \psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}}$;
- $\|\phi \vee \psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \vee \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}}$;
- $\|\exists x_j \phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = sup\{\|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} : d \in D_{\mathcal{A}}\} = \bigvee_{d \in D_{\mathcal{A}}} \|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}}$;

- $\|\forall x_j \phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = inf\{\|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} : d \in D_{\mathcal{A}}\} = \bigwedge_{d \in D_{\mathcal{A}}} \|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}}$. ▲

Ostali simboli logike prvoga reda ($\rightarrow$, $\leftrightarrow$) se mogu definisati uz pomoć **Definicije 3.2.**, imamo:

$$\begin{aligned}
\|\phi \rightarrow \psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} &= \|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\phi, \alpha\|^*_{\mathcal{A}} \vee \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}}; \\
\|\phi \leftrightarrow \psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} &= \|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \\
&= (\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}}) \wedge (\|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}}).
\end{aligned}$$

Vratimo se na dvovrednosne strukture $\mathcal{M}$. U njima važi $\|(\exists x_j)\psi, \alpha\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{1}$ ako i samo ako za neki elemenat $d \in D_{\mathcal{M}}$ važi $\|\psi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{M}} = \mathbf{1}$ (videti **Definicija 1.7.**(g)). Odgovarajuća osobina u Bulovsko vrednosnim strukturama $\mathcal{A}$ bi glasila:

(**MaxP**): za sve x_j, ψ i α, postoji $e \in D_{\mathcal{A}}$
tako da je $\|(\exists x_j)\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\psi, \alpha(j|e)\|_{\mathcal{A}}$.

Drugim rečima, supremum $sup\{\|\psi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} : d \in D_{\mathcal{A}}\}$ je *maksimum* jer se dostiže za određeni elemenat e domena interpretacije. Takve Bulovske strukture $\mathcal{A}$, koje zadovoljavaju gornji *Princip maksimuma*, zovemo i *dobrim* Bulovsko vrednosnim strukturama.
Slično, u dobrim **B**-strukturama važi da za sve x_j, ψ i α postoji $e \in D_{\mathcal{A}}$ tako da je:

$$\|(\forall x_j)\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = inf\{\|\psi, \alpha(j|d)\| : d \in D_{\mathcal{A}}\} = \|\psi, \alpha(j|e)\|_{\mathcal{A}}.$$

Preciznije, za elemenat e se dostiže minimum unutar zadate interpretacije $\mathcal{A}$.

Teorema 4.1. *Ako je zadata formula φ i valuacije α, β takve da za slobodna pojavljivanja x_j u φ važi $\alpha(x_j) = \beta(x_j)$ onda je $\|\varphi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\varphi, \beta\|_{\mathcal{A}}$ u proizvoljnoj* **B**-*strukturi $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je t proizvoljan term u kojem se pojavljuju promenjlive $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$. Koristeći **Lemu 1.1.** i indukciju po dužini terma dobijamo $[t]^{\mathcal{A}}_{\alpha} = [t]^{\mathcal{A}}_{\beta}$ za valuacije α i β u kojima je $\alpha(x_{j_i}) = \beta(x_{j_i})$, $i = 1, \ldots, k$.

Neka je φ atomarna formula oblika $R(t_1, \ldots, t_n)$, gde je R predikatski simbol reda n. Upotrebimo li **Definiciju 4.2.** dobijamo:

$$\begin{aligned}
\|\varphi, \alpha\|_{\mathcal{A}} &= \|R(t_1, \ldots, t_n), \alpha\|_{\mathcal{A}} \\
&= R_{\mathcal{A}}([t_1]^{\mathcal{A}}_{\alpha}, \ldots, [t_n]^{\mathcal{A}}_{\alpha}) \\
&= R_{\mathcal{A}}([t_1]^{\mathcal{A}}_{\beta}, \ldots, [t_n]^{\mathcal{A}}_{\beta}) \\
&= \|R(t_1, \ldots, t_n), \beta\|_{\mathcal{A}} = \|\varphi, \beta\|_{\mathcal{A}},
\end{aligned}$$

jer je $[t_1]^{\mathcal{A}}_\alpha = [t_1]^{\mathcal{A}}_\beta, \ldots, [t_n]^{\mathcal{A}}_\alpha = [t_n]^{\mathcal{A}}_\beta$, a $R_{\mathcal{A}}$ je funkcija.

Pretpostavimo da φ nije atomarna formula. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Ako je φ oblika $\psi * \theta$ (gde je $*$ neki od logičkih veznika) ili $\neg\psi$, onda tvrđenje sledi direktno iz uslova i indukcijske hipoteze. Tako imamo, na primer:

$$\begin{aligned}\|\varphi, \alpha\|_{\mathcal{A}} &= \|\psi \wedge \theta, \alpha\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\theta, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\psi, \beta\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\theta, \beta\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|\psi \wedge \theta, \beta\|_{\mathcal{A}} = \|\varphi, \beta\|_{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Neka je φ oblika $\forall x_k\ \psi$ i neka uslovi teoreme važe za formulu ψ. Po definiciji **B**-vrednosne funkcije dobijamo:

$$\|\varphi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{d \in D_{\mathcal{A}}} \|\psi, \alpha(k|d)\|_{\mathcal{A}},$$

$$\|\varphi, \beta\|_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{d \in D_{\mathcal{A}}} \|\psi, \beta(k|d)\|_{\mathcal{A}}.$$

Kako je $\|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\psi, \beta\|_{\mathcal{A}}$ uz uslov da se valuacije α i β podudaraju na indeksima slobodnih pojavljivanja promenljivih unutar ψ-a, to imamo i $\|\psi, \alpha(k|d)\|_{\mathcal{A}} = \|\psi, \beta(k|d)\|_{\mathcal{A}}$, a odavde je zadovoljeno i tvrđenje za formulu φ. Slučaj $t = \exists x_k\ \psi$ se svodi na prethodni sa $\neg\forall x_k\ \neg\psi$. ■

Posledica *Ako je ϕ rečenica jezika $L_=$ tada je $\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \|\phi, \beta\|_{\mathcal{A}}$ za sve valuacije α i β Bulovsko vrednosne interpretacije $\mathcal{A}$.*

Ako je iz konteksta jasno koja je **B**-struktura u pitanju, recimo $\mathcal{A}$, izostavljaćemo donje indekse u zapisima $\| \ ,\ \|_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{B}_{\mathcal{A}}$, $D_{\mathcal{A}}$ kao i gornje u $[t]^{\mathcal{A}}_\alpha$.

Zbog prethodne posledice pišemo $\|\phi\|$ kada je formula ϕ rečenica. Takođe, ako u formuli ϕ figurišu slobodne promenljive $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ pišemo $\|\phi, d_1, \ldots, d_n\|$ umesto $\|\phi, \alpha\|$, gde je $\alpha(x_{i_t}) = d_t,\ t = 1, \ldots, n$.

U Bulovsko vrednosnoj interpretaciji $\mathcal{A}$ pišemo $\mathcal{A}, \alpha \models \psi$ ili $\mathcal{A} \models \psi[\alpha]$ kada je $\|\psi, \alpha\| = \mathbf{1}$ i takođe $\mathcal{A} \models \psi$ ako je $\mathcal{A}, \alpha \models \psi$ za sve valuacije α. Osobine relacije $\models$ sa dvovrednosnih struktura se ne prenose na **B**-strukture. Tako, iz $\mathcal{A}, \alpha \models \varphi \vee \psi$ ne sledi ni $\mathcal{A}, \alpha \models \varphi$ ni $\mathcal{A}, \alpha \models \psi$. Slično, iako $\mathcal{A}, \alpha \models \neg\varphi$ implicira da nije $\mathcal{A}, \alpha \models \varphi$, u **B**-strukturama ne važi suprotna implikacija. Ove činjenice imamo odatle što $\mathbf{0}$ (netačno) i $\mathbf{1}$ (tačno) nisu jedine mogućnosti.

Neka je data teorija T klase $L_=$. **B**-strukturu $\mathcal{A}$ te teorije zovemo *modelom* od T ako za svaku aksiomu te teorije, ϕ, važi $\mathcal{A} \models \phi$.

Za formulu θ kažemo da je *valjana* ili *validna* u okviru teorije T ako za svaki

B-model $\mathcal{A}$ teorije T važi $\mathcal{A} \models \theta$.

Postavlja se pitanje: U kakvoj su vezi valjane formule dvovrednosnih struktura i valjane formule **B**-struktura? Jasno da formula koja je valjana u **B**-vrednosnom smislu mora biti valjana i u dvovrednosnim modelima. Da li važi obrat? Sledećih nekoliko tvrđenja pokušava da odgovori na ovo pitanje.

Teorema 4.2. *Svaka teorema predikatskog računa sa jednakošću je valjana u Bulovsko vrednosnom smislu.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljna Bulovsko vrednosna struktura nekog jezika iz klase $L_=$. Pokazujemo: $(\vdash \varphi) \rightarrow (\mathcal{A} \models \varphi)$, gde je φ formula jezika sa jednakošću, odnosno, zbog definicije valjanosti u **B**-strukturama:

$$\vdash \varphi \ \rightarrow \ \|\varphi, \alpha\| = \mathbf{1},$$

za svaku valuaciju α **B**-strukture $\mathcal{A}$.

○ Aksiome (A1)-(A3) imaju vrednost **1**:

$$\begin{aligned}
\|\phi \rightarrow (\phi \wedge \phi)\| &= \|\phi\| \Rightarrow \|\phi \wedge \phi\| = \|\phi\|^* \vee \|\phi \wedge \phi\| \\
&= \|\phi\|^* \vee (\|\phi\| \wedge \|\phi\|) = (\|\phi\|^* \vee \|\phi\|) \wedge (\|\phi\|^* \vee \|\phi\|) \\
&= \mathbf{1} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}. \\
\|(\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi\| &= \|\phi \wedge \psi\| \Rightarrow \|\phi\| = \|\phi \wedge \psi\|^* \vee \|\phi\| \\
&= (\|\phi\|^* \vee \|\psi\|^*) \vee \|\phi\| = \mathbf{1} \vee \|\psi\|^* = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\|(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\neg(\psi \wedge \tau) \rightarrow \neg(\tau \wedge \phi))\| = \|\phi \wedge \psi\| \Rightarrow \|\neg(\psi \wedge \tau) \rightarrow \neg(\tau \wedge \phi)\| \\
= (\|\phi\| \wedge \|\psi\|)^* \vee (\|\psi \wedge \tau\|^* \Rightarrow \|\tau \wedge \phi\|^*) \\
= (\|\phi\|^* \vee \|\psi\|^*) \vee (\|\psi \wedge \tau\| \vee \|\tau \wedge \phi\|^*) \\
= (\|\phi\|^* \vee \|\psi\|^*) \vee ((\|\psi\| \wedge \|\tau\|) \vee (\|\tau\|^* \vee \|\phi\|^*) \\
= (\|\phi\|^* \vee \|\psi\|^* \vee \|\tau\|^*) \vee (\|\psi\| \wedge \|\tau\|) \\
= \|\phi\|^* \vee ((\|\psi\| \wedge \|\tau\|)^* \vee (\|\psi\| \wedge \|\tau\|)) = \|\phi\|^* \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}.
\end{gathered}$$

U gornjim izvođenjima izostavljali smo valuaciju α iz zapisa $\|\phi, \alpha\|$ i pisali samo $\|\phi\|$. Formule ϕ, ψ, τ su proizvoljne, mogu da sadrže slobodne promenljive, bitno je da **B**-vrednosti formula (A1)-(A3) iznose **1** i da ne zavise od valuacije α.

○ Aksiome (B1)-(B3) imaju vrednost **1**:

Za proveru toga poslužiće sledeća lema.

Lema 4.1. *Za proizvoljnu Bulovsko vrednosnu strukturu $\mathcal{A}$ važi:*

$$\mathcal{A}, \alpha \models \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \ \textit{akko} \ \|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \leq \|\theta, \alpha\|_{\mathcal{A}},$$

gde je α proizvoljna valuacija **B***-strukture $\mathcal{A}$.*

Dokaz Leme 4.1:

$$\mathcal{A}, \alpha \models \phi \to (\psi \to \theta) \text{ akko } \|\phi \to (\psi \to \theta), \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1},$$

Jednakost $\|\phi \to (\psi \to \theta), \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$ je ekvivalentna sledećim relacijama:

$$\begin{gathered} \|\phi, \alpha\|^*_{\mathcal{A}} \vee (\|\psi, \alpha\|^*_{\mathcal{A}} \vee \|\theta, \alpha\|_{\mathcal{A}}) = \mathbf{1} \\ \updownarrow \\ (\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}})^* \vee \|\theta, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1} \\ \updownarrow \\ (\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}}) \Rightarrow \|\theta, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}, \end{gathered}$$

Na kraju, zbog **Teoreme 3.5.**(3) poslednja jednakost je ekvialentna sa traženom relacijom $\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \leq \|\theta, \alpha\|_{\mathcal{A}}$. ∎

-Aksiomu (B1): $[\forall x_j(\phi \to \psi)] \to [\forall x_j(\phi) \to \forall x_j(\psi)]$, dokazujemo tako što ćemo pokazati (prethodna lema):

$$(*) : \bigwedge_{d \in D_{\mathcal{A}}} \|\phi \to \psi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} \wedge \bigwedge_{d \in D_{\mathcal{A}}} \|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} \leq \bigwedge_{d \in D_{\mathcal{A}}} \|\psi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}}.$$

Pisaćemo $\|\phi, d\|$ kao zamenu za $\|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}}$ jer nije bitna ni **B**-struktura $\mathcal{A}$, ni valuacija α(proizvoljna je), a ni zamena $\alpha(j|d)$ u valuaciji α, jer je promenljiva x_j proizvoljna u formuli ϕ, bitno je samo da se slobodno pojavljuje.
Kako je $\bigwedge_{d \in D} \|\phi \to \psi, d\|$ zapravo infimum $inf\{\|\phi \to \psi, d\| : d \in D\}$ to za svaki elemenat $e \in D$ važi $\bigwedge_{d \in D} \|\phi \to \psi, d\| \leq \|\phi \to \psi, e\|$. Analogno imamo $\bigwedge_{d \in D} \|\phi, d\| \leq \|\phi, e\|$, gde je $e \in D$ proizvoljno izabrano. Dalje, zaključujemo:

$$\begin{aligned} (\bullet) : \|\phi \to \psi, e\| \wedge \|\phi, e\| &= (\|\phi, e\| \Rightarrow \|\psi, e\|) \wedge \|\phi, e\| \\ &= (\|\phi, e\|^* \vee \|\psi, e\|) \wedge \|\phi, e\| \\ &= \|\psi, e\| \wedge \|\phi, e\| \leq \|\psi, e\|. \end{aligned}$$

Iz $\bigwedge_{d \in D} \|\phi \to \psi, d\| \leq \|\phi \to \psi, e\|$ i $\bigwedge_{d \in D} \|\phi, d\| \leq \|\phi, e\|$ preko **Teoreme 3.6.**(2) imamo $\bigwedge_{d \in D} \|\phi \to \psi, d\| \wedge \bigwedge_{d \in D} \|\phi, d\| \leq \|\phi \to \psi, e\| \wedge \|\phi, e\|$, a odavde zbog $(\bullet)$ dobijamo

$$\bigwedge_{d \in D} \|\phi \to \psi, d\| \wedge \bigwedge_{d \in D} \|\phi, d\| \leq \|\psi, e\|,$$

za proizvoljan elemenat $e \in D$. Kako je infimum najveće donje ograničenje to važi i tražena relacija $(*)$.

- Aksioma (B2): $\phi \to \forall x_k(\phi)$, gde je x_k promenljiva koja nema slobodnih pojavljivanja unutar furmule ϕ. Kako se x_k ne pojavljuje slobodno u ϕ to važi $\|\phi, \alpha\| = \bigwedge_{d\in D} \|\phi, \alpha(k|d)\|$, a odavde imamo:

$$\begin{aligned}\|\phi \to \forall x_k(\phi), \alpha\| &= \|\phi, \alpha\| \Rightarrow \|\forall x_k(\phi), \alpha\| \\ &= \|\phi, \alpha\|^* \vee \bigwedge_{d\in D} \|\phi, \alpha(k|d)\| \\ &= \|\phi, \alpha\|^* \vee \|\phi, \alpha\| = \mathbf{1}.\end{aligned}$$

-Aksioma (B3): $\forall x_j(\phi(x_j)) \to \phi(x_j|t)$, gde je term t slobodan za pojavljivanje x_j-a u ϕ. Neka term t u valuaciji α ima vrednost $[t]^{\mathcal{A}}_\alpha \in D_{\mathcal{A}}$. Pokažimo da je za proizvoljno $e \in D_{\mathcal{A}}$ ispunjeno $\mathcal{A}, \alpha \models \forall x_j(\phi(x_j)) \to \phi(e)$, odnosno da je $\bigwedge_{d\in D_{\mathcal{A}}} \|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\phi, \alpha(j|e)\|_{\mathcal{A}}$, a ovo je automatski ispunjeno jer je sa leve strane infimum. Kako je e bio proizvoljan elemenat domena to imamo i:

$$\bigwedge_{d\in D_{\mathcal{A}}} \|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\phi, \alpha(j|[t]^{\mathcal{A}}_\alpha)\|_{\mathcal{A}}$$

akko

$$\bigwedge_{d\in D_{\mathcal{A}}} \|\phi, \alpha(j|d)\|_{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\phi, \alpha(j|[t]^{\mathcal{A}}_\alpha)\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}.$$

∘ Logičke aksiome (C1) i (C2) imaju vrednost $\mathbf{1}$:
Iz **Definicije 4.1.**(3a) imamo da je $\|x = x, e\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$, gde je $e \in D_{\mathcal{A}}$ proizvoljno izabrano, samim tim važi i

$$\|\forall x_k(x_k = x_k), \alpha\|_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{d\in D_{\mathcal{A}}} \|x_k = x_k, \alpha(k|d)\|_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{d\in D_{\mathcal{A}}} \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Aksioma (C2) se **Lemom 4.1.** svodi na pokazivanje

$$\|x = y, \alpha\|_{\mathcal{A}} \wedge \|\phi(x), \alpha\|_{\mathcal{A}} \leq \|\phi(x \leftrightsquigarrow y), \alpha\|_{\mathcal{A}},$$

a ovo sledi iz činjenice da je ϕ atomarna formula i **Definicije 4.1.**(3b).

∘ Pravila izvođenja očuvavaju vrednost $\mathbf{1}$:
Neka je $\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$ i $\|\phi \to \psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$. Odavde imamo:

$$(\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} \Rightarrow \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}) \leftrightarrow (\|\phi, \alpha\|^*_{\mathcal{A}} \vee \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}) \leftrightarrow$$
$$(\mathbf{1}^* \vee \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}) \leftrightarrow (\mathbf{0} \vee \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}) \leftrightarrow \|\psi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}.$$

Dakle, pravilo izvođenja **MP** važi u Bulovsko vrednosnom smislu. Neka je $\vdash \phi$, odnosno $\|\phi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$ za sve valuacije α. Nađimo vrednost formule $\forall x_k(\phi)$, gde je x_k proizvoljna promenljiva. Imamo: $\|\forall x_k(\phi), \alpha\|_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{d\in D_{\mathcal{A}}} \|\phi, \alpha(k|d)\|_{\mathcal{A}} = \bigwedge_{d\in D_{\mathcal{A}}} \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Dakle, važi i **GEN**.

∘ Neka je φ proizvoljna teorema teorije $L_=$, $\vdash \varphi$. Za nju postoji dokazni niz u kojem su sve formule aksiome, ili su direktne posledice nekih prethodnih formula. Kako smo pokazali da sve aksiome imaju vrednost **1** i kako pravila izvođenja očuvavaju vrednost **1** to i vrednost teoreme φ mora biti **1**. Ovim je dokaz gotov. ∎

Teorema 4.3. *Neka je T teorija iz klase $L_=$ i neka je $\mathcal{A}$ proizvoljan $\mathbf{B}$-model od T, tada je svaka teorema teorije T valjana u Bulovsko vrednosnom smislu.*

Dokaz. Neka je $T \vdash \varphi$. Na osnovu Teoreme Redukcije postoji konačan niz rečenica $\phi_1, \ldots, \phi_n$ teorije T, takvih da je $\vdash (\phi_1 \to \cdots \to \phi_n \to \varphi)$, a samim tim imamo i $\vdash (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \varphi$. Na osnovu prethodne teoreme za proizvoljnu Bulovsko vrednosnu strukturu $\mathcal{A}$ koja predstavlja model teorije T, važi da je $\|(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \varphi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$. Dalje, kako je $\mathcal{A}$ model teorije T imamo $\|\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$ jer je $\|\phi_1\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}, \ldots, \|\phi_n\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$. Sada se jasno vidi da mora biti $\|\varphi, \alpha\|_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}$, odnosno $\mathcal{A} \models \varphi$. ∎

4.2 Definisanje B-struktura II

Postoji još jedan pristup u interpretiranju Logike prvoga reda, a samim tim i u interpretiranju Bulovskih struktura. Naime, prilikom interpretiranja problem se javlja u davanju značenja kvantifikatorskim simbolima, odnosno promenljivim našeg jezika. To se prevazilazi valuacijama, što je uobičajen metod u dvovrednosnim interpretacijama, ili *uvođenjem novih simbola konstanti* u naš prvobitni jezik. Ovde iznosimo drugi metod na Bulovsko vrednosnim interpretacijama.

Neka je dat jezik prvoga reda sa jednakošću $L_=$. Ideja je da svakom elementu domena interpretacije $D_{\mathcal{M}}$ dodelimo novi simbol konstante koji zatim umetnemo u naš jezik. Ovim dobijamo novi, prošireni, jezik koji označavamo sa $L_=(D_{\mathcal{M}})$. Zatim definišemo istinitost nad skupom rečenica novog jezika (formula je tačna u interpretaciji ako je tačna u *svakoj valuaciji* te interpretacije), a formule koje imaju slobodna pojavljivanja promenljivih možemo prosto zatvoriti ili posmatrati njihove takozvane *instance*. Pređimo na formalizaciju rečenog:

Definicija 4.3. Bulovsko vrednosna interpretacija, $\mathcal{A}$, jezika $L_=$ je uređena petorka $\mathcal{A} = (D_{\mathcal{A}}, F_{\mathcal{A}}, P_{\mathcal{A}}, \mathbf{B}_{\mathcal{A}}, \|\ \|_{\mathcal{A}})$ koja zadovoljava sledeće uslove:

1) $D_{\mathcal{A}}$ je neprazan skup. Neka je za svako $a \in D_{\mathcal{A}}$, $\underline{a}$ novi simbol konstante koji imenuje a i neka je sa $L_=(\mathcal{A})$ označen jezik $L_= \cup \{\underline{a} : a \in D_{\mathcal{A}}\}$.

2) $F_\mathcal{A} = \{f_\mathcal{A} : f$ je funkcijski znak jezika $L_=\}$, gde je $f_\mathcal{A} : D^n_\mathcal{A} \to D_\mathcal{A}$ za n-arnu funkciju f. Svakom zatvorenom termu t jezika $L_=(\mathcal{A})$ dodeljujemo vrednost $t_\mathcal{A}$ iz $D_\mathcal{A}$ sledećom indukcijom: ako je $t = \underline{a}$ tada je $t_\mathcal{A} = a$ (slično imamo i za stare simbole konstanti), a ako je $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ gde je f n-arni funkcijski znak jezika $L_=$, tada je $t_\mathcal{A} = f_\mathcal{A}((t_1)_\mathcal{A}, \ldots, (t_n)_\mathcal{A})$.

3) $P_\mathcal{A} = \{R_\mathcal{A} : R$ je predikatski simbol jezika $L_=\}$, gde je $R_\mathcal{A} : D^n_\mathcal{A} \to \mathbf{B}_\mathcal{A}$ za n-arni simbol R.

4) $\mathbf{B}_\mathcal{A}$ je netrivijalna kompletna Bulova algebra.

5) $\| \; \|_\mathcal{A}$ je funkcija iz skupa *rečenica* jezika $L_=(\mathcal{A})$ na $\mathbf{B}_\mathcal{A}$ za koju važi:

   a) za svako $d \in D_\mathcal{A}$ važi: $\|\underline{d} = \underline{d}\|_\mathcal{A} = \mathbf{1}$;

   b) za sve zatvorene terme $t_1, \ldots, t_n$ jezika $L_=(\mathcal{A})$ imamo:
   $$\|R(t_1, \ldots, t_n)\|_\mathcal{A} = R_\mathcal{A}((t_1)_\mathcal{A}, \ldots, (t_n)_\mathcal{A}) \in \mathbf{B}_\mathcal{A},$$
   gde je R proizvoljni predikatski simbol reda n jezika $L_=$;

   c) za sve $d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n, e \in D_\mathcal{A}$ imamo:
   $$\|\underline{d_i} = \underline{e}\|_\mathcal{A} \leq \|f(\underline{d_1}, \ldots, \underline{d_i}, \ldots, \underline{d_n}) = f(\underline{d_1}, \ldots, \underline{e}, \ldots, \underline{d_n})\|_\mathcal{A},$$
   gde je f proizvoljni n-arni funkcijski znak jezika $L_=$;

   d) za sve $d_1, \ldots, d_i, \ldots, d_n, e \in D_\mathcal{A}$ imamo:
   $$\|\underline{d_i} = \underline{e}\|_\mathcal{A} \wedge \|R(\underline{d_1}, \ldots, \underline{d_i}, \ldots, \underline{d_n})\|_\mathcal{A} \leq \|R(\underline{d_1}, \ldots, \underline{e}, \ldots, \underline{d_n})\|_\mathcal{A},$$
   gde je R predikatski simbol reda n jezika $L_=$;

   e) za sve rečenice φ jezika $L_=(\mathcal{A})$ važi: $\|\neg\varphi\|_\mathcal{A} = \|\varphi\|^*_\mathcal{A}$;

   f) za svake dve rečenice φ i ψ jezika $L_=(\mathcal{A})$ imamo:
   $$\begin{aligned} \|\varphi \wedge \psi\|_\mathcal{A} &= \|\varphi\|_\mathcal{A} \wedge \|\psi\|_\mathcal{A}, \\ \|\varphi \vee \psi\|_\mathcal{A} &= \|\varphi\|_\mathcal{A} \vee \|\psi\|_\mathcal{A}, \\ \|\varphi \to \psi\|_\mathcal{A} &= \|\varphi\|_\mathcal{A} \Rightarrow \|\psi\|_\mathcal{A}, \\ \|\varphi \leftrightarrow \psi\|_\mathcal{A} &= \|\varphi\|_\mathcal{A} \Leftrightarrow \|\psi\|_\mathcal{A}; \end{aligned}$$

   g) neka je φ formula jezika $L_=(\mathcal{A})$ koja ima slobodno pojavljivanje promenljive x tada:
   $$\begin{aligned} \|\exists x(\varphi(x))\|_\mathcal{A} &= \bigvee_{d \in D_\mathcal{A}} \|\varphi(\underline{d})\|_\mathcal{A}, \\ \|\forall x(\varphi(x))\|_\mathcal{A} &= \bigwedge_{d \in D_\mathcal{A}} \|\varphi(\underline{d})\|_\mathcal{A}, \end{aligned}$$

gde smo sa $\varphi(\underline{d})$ označili zamenu svih slobodnih pojavljivanja x-a novom konstantom $\underline{d}$ koja predstavlja ime elementa d. ▲

Zbog pojednostavljenja notacije često pišemo d umesto $\underline{d}$ kada je jasno iz kontesta da „d" predstavlja ime elementa d, a ne sam elemenat domena interpretacije. Izostavljamo indekse u zapisu $(D_\mathcal{A}, F_\mathcal{A}, P_\mathcal{A}, \mathbf{B}_\mathcal{A}, \|\ \|_\mathcal{A})$, i pišemo $(D, F, P, \mathbf{B}, \|\ \|)$ ako time ne dolazimo u zabunu. Takođe, ako imamo više Bulovsko vrednosnih struktura onda dodajemo nove indekse $\mathcal{B}, \mathcal{C} \ldots$

Rečenica ψ jezika $L_=(\mathcal{A})$ je *tačna u interpretaciji* $\mathcal{A}$ ako je $\|\psi\|_\mathcal{A} = \mathbf{1}$. Formula $\psi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, gde su pojavljivanja promenljivih $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ slobodna, je *tačna u interpretaciji* $\mathcal{A}$ ako je $\psi(\underline{d_1}, \ldots, \underline{d_n})$ tačna u $\mathcal{A}$ za sve $d_1, \ldots, d_n \in D_\mathcal{A}$; $\psi(\underline{d_1}, \ldots, \underline{d_n})$ zovemo $\mathcal{A}$-*instancom* formule $\psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Teorema 4.4. *Rečenica φ jezika $L_=$ je tačna u svim* $\mathbf{B}$*-strukturama akko je logički validna.*

Dokaz. $(\rightarrow)$: Ako je φ tačna u svim $\mathbf{B}$-strukturama, onda je ona tačna i u svim $\mathbf{2}$-strukturama, gde $\mathbf{2}$ predstavlja dvovrednosnu Bulovu algebru $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$. Iz uvoda ove glave se vidi da su definicije interpretacija iz 1.2 i dvovrednosnih Bulovskih interpretacija ekvivalentne, samim tim je φ logički validna formula.
$(\leftarrow)$: Neka je φ logički validna rečenica, onda je ona tačna u svim $\mathbf{2}$-strukturama. Pretpostavimo suprotno, neka u nekoj Bulovsko vrednosnoj strukturi $\mathcal{A}$ rečenica φ nije tačna, preciznije

$$\|\varphi\|_\mathcal{A} = b \neq \mathbf{1},$$

gde je b elemenat kompletne Bulove algebre $\mathbf{B}_\mathcal{A}$. Tvrđenje indukcijom po složenosti formule. Jedini interesantan slučaj nastupa ako je φ oblika $\forall x(\psi(x))$. Neka je $N = \{\|\psi(\underline{d})\|_\mathcal{A} : d \in D_\mathcal{A}\}$. Kako je $b < \mathbf{1}$ i $N \subseteq B_\mathcal{A}$ to na osnovu **Teoreme 3.26.** postoji ultrafilter U kompletne Bulove algebre $\mathbf{B}_\mathcal{A}$ za koji $b \notin U$ i U očuvava infimum skupa N. Za kanonički homomorfizam $\chi_U : B_\mathcal{A} \to 2$ važi $\chi_U(b) = \mathbf{0}$ i $\chi_U(\bigwedge N) = \bigwedge \chi_U(N)$. Kompozicija preslikavanja $h := \chi_U \circ \|\ \|_\mathcal{A}$ iz skupa svih rečenica jezika $L_=(\mathcal{A})$ na $\mathbf{2}$ ispunjava uslov 5)g) **Definicije 4.3.** za formulu φ, jer

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= h(\forall x(\psi(x))) = \chi_U(\|\varphi\|_\mathcal{A}) = \chi_U(\|\forall x(\psi(x))\|_\mathcal{A}) \\ &= \chi_U\left(\bigwedge_{d \in D_\mathcal{A}} \|\psi(\underline{d})\|_\mathcal{A}\right) = \chi_U\left(\bigwedge N\right) = \bigwedge \chi_U(N) \\ &= \bigwedge_{d \in D_\mathcal{A}} \chi_U(\|\psi(\underline{d})\|_\mathcal{A}) = \bigwedge_{d \in D_\mathcal{A}} h(\psi(\underline{d})). \end{aligned}$$

Na drugoj strani imamo $h(\varphi) = \chi_U(\|\varphi\|_{\mathcal{A}}) = \chi_U(b) = \mathbf{0}$, pa preslikavanje h određuje dvovrednosnu strukturu u kojoj formula φ nije tačna. ∎

Teorema 4.5. *Ako postoji dokazni niz za formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ unutar jezika $L_=$ onda važi $\mathcal{A} \models \varphi(d_1, \ldots, d_n)$ za proizvoljne elemente $d_1, \ldots, d_n$ domena* **B***-strukture $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Kako je $\vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ to je na osnovu Teoreme Kompletnosti $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ logički validna formula. Kako su jedine slobodne promenljive unutar φ baš $x_1, \ldots, x_n$ to je $\varphi(d_1, \ldots, d_n)$ zatvorena formula. Sada, na osnovu prethodne teoreme imamo da je $\mathcal{A} \models \varphi(d_1, \ldots, d_n)$, gde su $d_1, \ldots d_n \in D_{\mathcal{A}}$. ∎

Teorema 4.6. *Za proizvoljnu formulu $\varphi(x)$ teorije $L_=$ unutar* **B***-struktura važi*

$$\|e = d\| \wedge \|\varphi(e)\| \leq \|\varphi(d)\|, \text{ za proizvoljne } d, e \in D.$$

Dokaz. Pokazuje se lako indukcijom po dužini formule. Ovde dajemo alternativni pristup uz korišćenje prethodne teoreme. Naime, na osnovu **Leme 1.2.**(d) imamo da postoji dokaz formule $\phi(x, y) \equiv [x = y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))]$, pa na osnovu **Teoreme 4.5.** imamo da je $\mathcal{A} \models \phi(e, d)$, gde su $e, d \in D_{\mathcal{A}}$ proizvoljno uzeti. Dalje, na osnovu **Leme 4.1.** imamo da je tačno

$$\|e = d\| \wedge \|\varphi(e)\| \leq \|\varphi(d)\|.$$

Međutim, lako se vidi da za dokaz tvrđenja **Leme 1.2.** treba indukcija. ∎

5

Bulovsko vrednosni univerzum

Korišćenjem tehnike iz poglavlja 2.4. dolazimo do specifične kumulativne hijerarhije $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Spratovi pomenute hijerarhije se sastoje od svih funkcija čiji domeni pripadaju prethodnom(nižem) spratu, a vrednosti tih preslikavanja se nalaze u fiksnoj, kompletnoj Bulovoj algebri $\mathbf{B}$.

$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \subset \mathbf{V}$ predstavlja pravu klasu koju zovemo Bulovsko vrednosni univerzum, kraće $\mathbf{B}$-univerzum.

Ideju za posmatranje Bulovsko vrednosnih univerzuma crpimo iz same interpretacije pojma skupa. Naime, svakom skupu $x \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_N$ mogli bi da dodelimo karakterističnu funkciju χ_x definisanu sa

$$x \subset dom(\chi_x) \quad \text{i} \quad \chi_x(t) = \mathbf{1} \text{ akko } t \in x,$$

gde je $1 \in 2 = im(\chi_x)$. Jasno je da na raspolaganju imamo klasu takvih funkcija. Da bi elemente domena $dom(\chi_x)$ takođe interpretirali kao dvovrednosne funkcije, trebalo bi da smo svim elementima sprata $\mathbf{V}_\beta,\ \beta < rank(x)$ na kojem se nalazi $dom(\chi_x)$ već asocirali odgovarajuće karakteristične funkcje. Koristeći se rekurzijom dolazimo do $\mathbf{2}$-univerzuma:

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{2})} = \{x | (\exists \alpha \in ON)(x \in \mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{2})})\},$$

gde su spratovi $\mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{2})}$ sačinjeni od karakterističnih funkcija čiji domeni pripadaju nekom nižem spratu posmatrane hijerarhije:

$$\mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{2})} = \{x : Fun(x) \wedge ran(x) \subset 2 \wedge (\exists \beta < \alpha)(dom(x) \subset V_\beta^{(\mathbf{2})})\}.$$

Dalje, svakom elementu $x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$ dodelimo jedinstveni skup $\overline{x} = \{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})} : x(t) = \mathbf{1}\}$. Dva elementa x i y dvovrednosnog univerzuma poredimo sa:

$$x = y \text{ akko } \overline{x} = \overline{y} \text{ (pišemo } \|x = y\| = \mathbf{1},\ \text{inače } \|x = y\| = \mathbf{0});$$
$$x \in y \text{ akko } x \in \overline{y} \text{ (pišemo } \|x \in y\| = \mathbf{1},\ \text{inače } \|x \in y\| = \mathbf{0}).$$

Na osnovu ovoga za proizvoljne $x, y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$ važe sledeće veze:

$$\|x \in y\| = \bigvee_{t \in dom(y)} (y(t) \wedge \|t = x\|),$$
$$\|x = y\| = \bigwedge_{t \in dom(y)} (y(t) \Rightarrow \|t \in x\|) \ \wedge \bigwedge_{t \in dom(x)} (x(t) \Rightarrow \|t \in y\|).$$

Prethodne relacije su motivisane sa validnim formulama **ZFC**-a:

$$u \in v \leftrightarrow (\exists z)(z \in v \wedge z = u),$$
$$u = v \leftrightarrow (\forall z)[(z \in u \rightarrow z \in v) \wedge (z \in v \rightarrow z \in u)].$$

5.1 Konstrukcija univerzuma

Fiksirajmo kompletnu Bulovu algebru $\mathbf{B}$ koja je elemenat Von Neumann-ovog univerzuma $\mathbf{V}_N$ (**Teorema 2.13.**) *Bulovsko vrednosni univerzum* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ nastaje kao granica kumulativne hijerarhije (videti 2.4.) ako stavimo $x_0 := 0$ i $R := I_{\mathbf{V}_N}$, a klasu-funkciju Q definišemo sa:

$$y \in Q(x) \leftrightarrow Fun(y) \wedge dom(y) \subset x \wedge im(y) \subset B.$$

Izgled dobijene hijerarhije $(\mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})})_{\alpha \in ON}$ je:

$$\mathbf{V}_0^{(\mathbf{B})} := 0$$
$$\mathbf{V}_{\alpha+1}^{(\mathbf{B})} := \{y : Fun(y) \wedge dom(y) \subset \mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})} \wedge im(y) \subset B\}, \ \alpha \in K_I$$
$$\mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})} := \bigcup \{\mathbf{V}_\beta^{(\mathbf{B})} : \beta < \alpha\}, \ \alpha \in K_{II},$$

gde je K_I klasa naslednih ordinala, dok je K_{II} klasa graničnih. Limit ove hijerarhije je željeni univerzum: $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} := \bigcup_{\alpha \in ON} \mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})}$.

Kako je prazan skup funkcija čiji je domen takođe prazan, vidimo da su prvi i drugi sprat hijerarhije redom

$$\mathbf{V}_1^{(\mathbf{B})} = \{0\} \text{ i } \mathbf{V}_2^{(\mathbf{B})} = \{0\} \cup \{(0, b) : b \in B\}.$$

Ordinale $rank(x)$ skupova x Bulovsko vrednosnog univerzuma $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ označavamo sa $\rho(x)$. Iz definicije ranka skupova jasno je da $\rho(x) = \alpha \in K_I$, gde je α najmanji ordinal za koji je $x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}^{(\mathbf{B})}$. Takođe, nije teško pokazati da iz $\alpha < \beta$ sledi $\mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})} \subset \mathbf{V}_\beta^{(\mathbf{B})}$.

Teorema 5.1 (Princip indukcije u $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$). *Neka je φ proizvoljna formula jezika* **ZFC** *tada važi:*

$$(\forall x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})})((\forall y \in dom(x))\varphi(y) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow (\forall x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})})\varphi(x).$$

Dokaz. Relacija $(x < y) \leftrightarrow (x \in dom(y))$ je dobro-zasnovana i skupu-slična na klasi $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, pa na osnovu **Teoreme 2.15.**(ii) sledi tvrđenje teoreme. ∎

ZFC teorija je aksiomatizovana u okviru $L_=$ i sadrži predikatski simbol „$\in$" reda 2. Dakle, za kompletiranje Bulovsko vrednosnog univerzuma ostaje da definišemo interpretacije predikata jednakosti i „biti elemenat". Definišemo dve klase-funkcije date na $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \times \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ čiji je kodomen podskup nosača B Bulove algebre $\mathbf{B}$.

Definicija 5.1. Za svako $x, y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ imamo:

(1) $\|x \in y\| := \bigvee_{z \in dom(y)} (y(z) \wedge \|z = x\|)$,

(2) $\|x = y\| := \bigwedge_{z \in dom(y)} (y(z) \Rightarrow \|z \in x\|) \ \wedge \bigwedge_{z \in dom(x)} (x(z) \Rightarrow \|z \in y\|)$. ▲

Lema 5.0. *Prethodna definicija je dobra.*

Dokaz. Pogledajmo datu definiciju malo bolje, vidimo da je u (1) relacija biti elemenat definisana preko relacije jednakosti, a u (2) da je jednakost data preko „$\in$". Zaključujemo da je definicija rekurzivnog tipa. Proverimo da je to zaista tako.

Ako eliminišemo $\in$ iz **Definicije 5.1.**(2), za $x, y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ imamo:

$$\|x = y\| = \bigwedge_{u \in dom(x)} \left(x(u) \Rightarrow \bigvee_{v \in dom(y)} (y(v) \wedge \|u = v\|) \right)$$
$$\wedge \bigwedge_{v \in dom(y)} \left(y(v) \Rightarrow \bigvee_{u \in dom(x)} (x(u) \wedge \|u = v\|) \right).$$

Dalje, koristeći se osobinama Bulovih algebri (videti **Teorema 3.10.**), prethodno možemo zapisati kao:

$$\|x = y\| = \bigwedge_{u \in dom(x)} \bigwedge_{v \in dom(y)} \left[\bigvee_{v \in dom(y)} (x(u) \Rightarrow (y(v) \wedge \|u = v\|)) \right.$$
$$\left. \wedge \bigvee_{u \in dom(x)} (y(v) \Rightarrow (x(u) \wedge \|u = v\|)) \right].$$

Na klasi $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \times \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ definišemo klasu-relaciju $\mathbf{R}$ definisanu sa:

$$(u, v)\mathbf{R}(x, y) \leftrightarrow (u \in dom(x) \wedge v \in dom(y)).$$

Nije teško proveriti da je $\mathbf{R}$ skupu-slična i dobro-zasnovana klasa-relacija na klasi $\mathbf{V^{(B)}} \times \mathbf{V^{(B)}}$. Zbog lakšeg zapisa sa $seg(x)$ označavaćemo skup $pred(\mathbf{V^{(B)}} \times \mathbf{V^{(B)}}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{V^{(B)}} \times \mathbf{V^{(B)}} : y \; \mathbf{R} \; x\}$. Sada dajemo formulu $\varphi(x, y, z)$ iz teoreme o transfinitnoj rekurziji (videti **Teorema 2.16.**):

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) \equiv & (x \in \mathbf{V^{(B)}} \times \mathbf{V^{(B)}} \wedge Fun(y) \wedge dom(y) = seg(x) \wedge im(y) \subset B \wedge \\ & z = \bigwedge_{u \in seg(x)} \Bigg[\bigvee_{\pi_2(u) \in dom(\pi_2(x))} [\pi_1(x)(\pi_1(u)) \Rightarrow (\pi_2(x)(\pi_2(u)) \wedge y(u))] \\ & \wedge \bigvee_{\pi_1(u) \in dom(\pi_1(x))} [\pi_2(x)(\pi_2(u)) \Rightarrow (\pi_1(x)(\pi_1(u)) \wedge y(u))] \Bigg]) \vee \\ & (x \notin \mathbf{V^{(B)}} \times \mathbf{V^{(B)}} \wedge y = y \wedge z = \emptyset).\end{aligned}$$

Formulom $\varphi(x, y, z)$ je definisana funkcija-klasa $\mathbf{F}(x, y) = z$, a **Teorema 2.16.** nam garantuje postojanje funkcije-klase $\mathbf{G}$ za koju važi:

$$\forall x \in \mathbf{V^{(B)}} \times \mathbf{V^{(B)}} \quad \mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \restriction seg(x)) = z \;\; (= \|\pi_1(x) = \pi_2(x)\|).$$

Čitaoucu ostavljamo da opravda definiciju meta-funkcije $\|x \in y\|$. ∎

Neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula teorije **ZFC** i neka su $u_1, \ldots, u_n$ elementi univerzuma $\mathbf{V^{(B)}}$. Elemenat $\|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\|$ Bulove algebre $\mathbf{B}$ možemo naći preko **Definicija 4.1.**,**4.2.** ili **4.3.**, ako stavimo $D_{\mathcal{A}} = \mathbf{V^{(B)}}$ i ako pokažemo da naše definicije meta-funkcija $\|\cdot \in \cdot\|$ i $\|\cdot = \cdot\|$ zadovoljavaju uslove pomenutih definicija iz 4. glave. Pišemo $\mathbf{V^{(B)}} \models \varphi(u_1, \ldots u_n)$, a pri tom mislimo na $\|\varphi(u_1, \ldots u_n)\| = \mathbf{1}$; formulu $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ zovemo i $\mathbf{B}$-*formulom*, dok $\|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\|$ zovemo $\mathbf{B}$-*vrednošću* te formule. U sledećoj teoremi pokazujemo da su zadovoljeni uslovi definicija iz prethodne glave.

Teorema 5.2. *Ako je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dokazivo u predikatskom računu sa jednakošću tada je $\mathbf{V^{(B)}} \models \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ za sve $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{V^{(B)}}$. Zapravo za sve $x, y, z \in \mathbf{V^{(B)}}$ važi:*

(1) $\|x = x\| = \mathbf{1}$;

(2) $x(y) \le \|y \in x\|$ *za sve* $y \in dom(x)$;

(3) $\|x = y\| = \|y = x\|$;

(4) $\|x = y\| \wedge \|y = z\| \le \|x = z\|$;

(5) $\|x \in y\| \wedge \|x = z\| \le \|z \in y\|$;

(6) $\|y \in x\| \wedge \|x = z\| \leq \|y \in z\|$;

(7) $\|x = y\| \wedge \|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(y)\|$ *za svaku* $\mathbf{B}$*-formulu* φ.

Dokaz. Prvi deo tvrđenja sledi odmah iz **Teoreme 4.2.** posle dokaza tačaka (1)-(6), jer su tada ispunjeni uslovi **Definicije 4.1.** Međutim, u definisanju Bulovsko vrednosnih struktura domen interpretacije je bio skup, a ne prava klasa ($\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$). Jedan od načina kojim se pomenuta prepreka eliminiše je taj da u definicijama $\mathbf{B}$-struktura dozvolimo da domen interpretacije bude i prava klasa. Ovde dajemo samo objašnjenje za definisanje infimuma, tako desna strana jednakosti

$$\|\forall x(\varphi(x))\| = \bigwedge_{u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|\varphi(u)\|$$

postoji, jer klasa $\{\|\varphi(u)\| : u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}\}$ predstavlja skup ($\subseteq B$).

(1): Koristimo princip indukcije (po rangu) iz **Teoreme 5.1.** Neka je za sve $y \in dom(x)$ ispunjeno $\|y = y\| = \mathbf{1}$. Uz pomoć **Definicije 5.1.**(1) nalazimo

$$\|y \in x\| = \bigvee_{t \in dom(x)} (x(t) \wedge \|t = y\|) \geq x(y) \wedge \|y = y\| = x(y),$$

a odavde uz **Teoremu 3.5.**(3) imamo

$$\|x = x\| = \bigwedge_{y \in dom(x)} (x(y) \Rightarrow \|y \in x\|) = \mathbf{1}.$$

(2): Iz **Definicije 5.1.**(1) i (1) ove teoreme direktno imamo

$$(\forall y \in dom(x)) \ \|y \in x\| \geq (x(y) \wedge \|y = y\|) \geq x(y).$$

(3): Kako je sama definicija Bulovsko vrednosne jednakosti ($\|\cdot = \cdot\|$) simetrična to odmah imamo traženo.

Tačke (4)-(6) dokazujemo uporedo. Sa $\rho(x, y, z) := (\alpha, \beta, \gamma) \in ON^3$ označavamo trojku koja predstavlja permutaciju ordinala $\rho(x)$, $\rho(y)$ i $\rho(z)$ tako da važi $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Na klasi ON^3 posmatramo kanoničko uređenje $<$ sa kraja poglavlja 2.3. Neka je $x, y, z \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ proizvoljno uzeto i pretpostavimo da su nejednakosti (4)-(6) tačne za sve $u, v, w \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ za koje je $\rho(u, v, w) < \rho(x, y, z)$ (indukcijska pretpostavka).

(4): Neka je $t \in dom(x)$. Kako je $\|x = y\| \leq (x(t) \Rightarrow \|t \in y\|)$ (definicija meta-funkcije $\|\cdot = \cdot\|$) to, na osnovu osobina Bulovih algebri, imamo

$$(\star) : \quad \begin{array}{rl} x(t) \wedge \|x = y\| & \leq \|t \in y\|, \\ x(t) \wedge \|x = y\| \wedge \|y = z\| & \leq \|t \in y\| \wedge \|y = z\|. \end{array}$$

Imajući u vidu da je $\rho(t,y,z) < \rho(x,y,z)$ $(t \in dom(x))$ i na osnovu indukcijske pretpostavke za (6), nalazimo

$$\|t \in y\| \wedge \|y = z\| \leq \|t \in z\|,$$
$$x(t) \wedge \|x = y\| \wedge \|y = z\| \leq \|t \in z\|.$$

Opet, iz osobina Bulovih algebri, imamo

$$\|x = y\| \wedge \|y = z\| \leq x(t) \Rightarrow \|t \in z\|,$$

što implicira

$$(*): \quad \|x = y\| \wedge \|y = z\| \leq \bigwedge_{t \in dom(x)} (x(t) \Rightarrow \|t \in z\|).$$

Analogno, ako z i x zamene mesta, dobijamo

$$(**): \quad \|z = y\| \wedge \|y = x\| \leq \bigwedge_{t \in dom(z)} (z(t) \Rightarrow \|t \in x\|).$$

Pogledamo li opet na **Definiciju 5.1.**(2) vidimo da (*) i (**) zbog **Teoreme 3.6.**(2) daju $\|x = y\| \wedge \|y = z\| \leq \|x = z\|$.
(5): Uzmimo $t \in dom(y)$; odavde je $\rho(t,x,z) < \rho(x,y,z)$, pa na osnovu indukcijske pretpostavke za (4) i definicije meta-funkcije $\|z \in y\|$ sledi

$$y(t) \wedge \|t = x\| \wedge \|x = z\| \leq y(t) \wedge \|t = z\| \leq \|z \in y\|.$$

Odavde, zbog **Teoreme 3.9.**(2) imamo

$$\|x = z\| \wedge \bigvee_{t \in dom(y)} (y(t) \wedge \|t = x\|) \leq \|z \in y\|,$$

što, zbog **Definicije 5.1.**(1), daje (5).
(6): Uzimajući $t \in dom(x)$ i praveći analogiju sa $(\star)$ dolazimo do

$$x(t) \wedge \|x = z\| \leq \|t \in z\|,$$
$$\|t = y\| \wedge x(t) \wedge \|x = z\| \leq \|t = y\| \wedge \|t \in z\|.$$

Kako je $\rho(t,y,z) < \rho(x,y,z)$ to možemo iskoristiti indukcijusku pretpostavku za (5) i **Teoremu 3.9.**(2) da dobijemo

$$x(t) \wedge \|x = z\| \wedge \|t = y\| \leq \|y \in z\|,$$
$$\|x = z\| \wedge \bigvee_{t \in dom(x)} (x(t) \wedge \|t = y\|) \leq \|y \in z\|.$$

Dakle, zbog definicije $\|y \in x\|$, imamo $\|x = z\| \wedge \|y \in x\| \leq \|y \in z\|$.

(7): Direktno iz **Teoreme 4.6.** i prethodnih tačaka ove teoreme koji opravdavaju pozivanje na tvrđenje 4.6. ∎

Kao prvu posledicu prethodne teoreme pokazujemo sledeću veoma korisnu lemu koja nam omogućava nalaženje **B**-vrednosti formula u kojima imamo vezana pojavljivanja promenljivih.

Lema 5.1. *Za svaku* **B***-formulu* φ *sa jednom slobodnom promenljivom* x *i za svako* $u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ *važe jednakosti:*

$$\|(\exists x \in u)\varphi(x)\| = \bigvee_{v \in dom(u)} (u(v) \wedge \|\varphi(v)\|),$$

$$\|(\forall x \in u)\varphi(x)\| = \bigwedge_{v \in dom(u)} (u(v) \Rightarrow \|\varphi(v)\|).$$

Dokaz. Ove dve jednakosti međusobno su dualne. Naime, ako u prvu relaciju umesto φ stavimo $\neg\varphi$ i ako iskoristimo De Morganove zakone dobijamo drugu jednakost. Dakle, dovoljno je pokazati prvu relaciju.
Iz osobina supremuma i (2) prethodne teoreme dobijamo:

$$\begin{aligned}
\|(\exists x \in u)\varphi(x)\| &= \|(\exists x)(x \in u \wedge \varphi(x))\| \\
&= \bigvee_{v \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} (\|v \in u\| \wedge \|\varphi(v)\|) \\
&\geq \bigvee_{v \in dom(u)} (\|v \in u\| \wedge \|\varphi(v)\|) \\
&\geq \bigvee_{v \in dom(u)} (u(v) \wedge \|\varphi(v)\|).
\end{aligned}$$

Takođe imamo:

$$\begin{aligned}
\|(\exists x \in u)\varphi(x)\| &= \bigvee_{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} (\|t \in u\| \wedge \|\varphi(t)\|) \\
&= \bigvee_{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \left(\bigvee_{v \in dom(u)} (u(v) \wedge \|v = t\|) \wedge \|\varphi(t)\| \right) \\
&= \bigvee_{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \left(\bigvee_{v \in dom(u)} (u(v) \wedge \|v = t\| \wedge \|\varphi(t)\|) \right) \\
&\leq \bigvee_{v \in dom(u)} (u(v) \wedge \|\varphi(v)\|),
\end{aligned}$$

gde druga jednakost sledi iz **Definicije 5.1.**, treća iz **Teoreme 3.9.**(2), dok poslednja nejednakost predstavlja primenu tačke (7) prethodnog tvrđenja. ∎

5.2 Podalgebre i njihove strukture

Neka je data Bulova algebra $\mathbf{B}$. Podskup $\emptyset \neq B' \subseteq B$ je nosač podalgebre $\mathbf{B}'$ akko je zatvoren za sve operacije. Kompletnu Bulovu algebru $\mathbf{B}'$ zovemo *kompletnom podalgebrom* algebre $\mathbf{B}$ ako je $\mathbf{B}'$ podalgebra od $\mathbf{B}$ i ako za sve $X \subseteq B'$ važi $\bigvee^{\mathbf{B}'} X = \bigvee^{\mathbf{B}} X$ i $\bigwedge^{\mathbf{B}'} X = \bigwedge^{\mathbf{B}} X$. Kroz sledećih nekoliko tvrđenja ispitujemo vezu između Bulovskih univerzuma $\mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$ i $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ gde $\mathbf{B}'$ predstavlja kompletnu podalgebru od $\mathbf{B}$.

Teorema 5.3. *Neka je* $\mathbf{B}'$ *kompletna podalgebra algebre* $\mathbf{B}$. *Tada:*

(1) $\mathbf{V}^{(\mathbf{B}')} \subseteq \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$;

(2) $\|u \in v\|_{\mathbf{B}'} = \|u \in v\|_{\mathbf{B}}$ *za sve* $u, v \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$;

(3) $\|u = v\|_{\mathbf{B}'} = \|u = v\|_{\mathbf{B}}$ *za sve* $u, v \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$.

Dokaz. (1): Pokazujemo indukcijom po ordinalima. Pokazaćemo da je za sve $\alpha \in ON$ ispunjeno $\mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B}')} \subseteq \mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})}$. Za $\alpha = 0$ imamo $0 \subseteq 0$, što je tačno. Dalje, iz indukcijske pretpostavke ($\mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B}')} \subseteq \mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})}$) i uslova teoreme dobijamo

$$x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}^{(\mathbf{B}')} \leftrightarrow (Fun(x) \wedge dom(x) \subset \mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B}')} \wedge im(x) \subset B') \rightarrow$$
$$(Fun(x) \wedge dom(x) \subset \mathbf{V}_\alpha^{(\mathbf{B})} \wedge im(x) \subset B) \leftrightarrow x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}^{(\mathbf{B})}.$$

Za α granični ordinal tvrđenje odmah sledi iz indukcijske pretpostavke.
(2) i (3): simultano pokazujemo korišćenjem **Teoreme 5.1.** Za $u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$ proizvoljno i za sve $y \in dom(v)$ neka je tačno sledeće:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \|u \in y\|_{\mathbf{B}'} = \|u \in y\|_{\mathbf{B}}, \\ \text{(b)} & \|u = y\|_{\mathbf{B}'} = \|u = y\|_{\mathbf{B}}, \\ \text{(c)} & \|y \in u\|_{\mathbf{B}'} = \|y \in u\|_{\mathbf{B}}. \end{array}$$

Sada, iz **Definicije 5.1.** i indukcijske pretpostavke (b) dobijamo

$$\begin{aligned} (\bullet):\ \|u \in v\|_{\mathbf{B}'} &= \bigvee_{y \in dom(v)} (v(y) \wedge \|u = y\|_{\mathbf{B}'}) \\ &= \bigvee_{y \in dom(v)} (v(y) \wedge \|u = y\|_{\mathbf{B}}) = \|u \in v\|_{\mathbf{B}}. \end{aligned}$$

Takođe, koristeći definiciju $\mathbf{B}$-vrednosti za jednakost imamo

$$\begin{aligned} \|u = v\|_{\mathbf{B}'} &= \bigwedge_{y \in dom(v)} (v(y) \Rightarrow \|y \in u\|_{\mathbf{B}'}) \wedge \bigwedge_{y \in dom(u)} (u(y) \Rightarrow \|y \in v\|_{\mathbf{B}'}) \\ &= \bigwedge_{y \in dom(v)} (v(y) \Rightarrow \|y \in u\|_{\mathbf{B}}) \wedge \bigwedge_{y \in dom(u)} (u(y) \Rightarrow \|y \in v\|_{\mathbf{B}}) = \|u = v\|_{\mathbf{B}}, \end{aligned}$$

gde smo prilikom gornjeg izračunavanja koristili indukcijsku hipotezu (c) i ($\bullet$). Preostaje da pokažemo iz I.P. sledi $\|v \in u\|_{\mathbf{B}'} = \|v \in u\|_{\mathbf{B}}$, što izostavljamo. Jasno je da smo prilikom dokazivanja tačaka (2) i (3) koristili (1). ∎

U ovoj teoremi smo zapravo pokazali da atomarne formule teorije skupova imaju iste vrednosti u univerzumu $\mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$ kao i u $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, pod uslovom da je $\mathbf{B}'$ kompletna podalgebra od $\mathbf{B}$. Kako se ponašaju ostale, neatomarne, formule? Ako za neku formulu $\psi(x)$ važi $\|\psi(u)\|_{\mathbf{B}'} = \|\psi(u)\|_{\mathbf{B}}$, gde je $u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$ proizvoljno, mi ne možemo tvrditi da su Bulovske vrednosti formule $\exists x(\psi(x))$ unutar posmatranih struktura jednake. Naime,

$$\|\exists x(\psi(x))\|_{\mathbf{B}'} = \bigvee_{u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}} \|\psi(u)\|_{\mathbf{B}'} \quad (\text{u } \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}),$$

$$\|\exists x(\psi(x))\|_{\mathbf{B}} = \bigvee_{u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|\psi(u)\|_{\mathbf{B}} \quad (\text{u } \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}).$$

Desne strane gornjih jednakosti ne moraju biti jednake jer u potonjoj tražimo supremum od „šireg skupa”. Sigurni smo u $\|\exists x(\psi(x))\|_{\mathbf{B}'} \leq \|\exists x(\psi(x))\|_{\mathbf{B}}$.

Međutim, za *vezane formule* φ teorije skupova imamo $\|\varphi\|_{\mathbf{B}'} = \|\varphi\|_{\mathbf{B}}$, što pokazujemo u sledećem tvrđenju. Formula φ teorije **ZFC** je *vezana formula* akko se svi kvantifikatori iz φ pojavljuju u obliku $\forall x \in y$ ili $\exists x \in y$.

Teorema 5.4. *Ako je* $\mathbf{B}'$ *kompletna podalgebra algebre* $\mathbf{B}$ *i ako je* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *proizvoljna vezana formula* **ZFC**-*a, onda*

$$\|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}'} = \|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}},$$

za sve $u_1, \ldots u_n \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$.

Dokaz. Tvrđenje pokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Baza indukcije, za atomarne formule, je pokazana u prethodnoj teoremi (2) i (3). Neka važi $\|\phi(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}'} = \|\phi(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}}$ za sve formule ϕ manje složenosti od φ i za sve $u_1, \ldots u_n \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$ (I.P.). Indukcijski korak: ako je φ oblika $\phi_1 * \phi_2$, gde je $*$ neki od veznika $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ ili $\rightarrow$ imamo:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}'} &= \|\phi_1(u_1, \ldots, u_n) * \phi_2(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}'} \\
&= \|\phi_1(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}'} * \|\phi_1(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}'} \\
&= \|\phi_1(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}} * \|\phi_1(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}} \\
&= \|\phi_1(u_1, \ldots, u_n) * \phi_2(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}} = \|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathbf{B}},
\end{aligned}$$

jer su ϕ_1 i ϕ_2 kraće dužine od φ. Slično imamo i u slučaju $\varphi \equiv \neg\phi$. Neka je φ oblika $(\forall x \in u)\phi(x)$ za neko $u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')}$, tada imamo

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathbf{B}'} &= \|(\forall x \in u)\phi(x,u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathbf{B}'} \\
&= \bigwedge_{v\in dom(u)}^{\mathbf{B}'} (u(v) \Rightarrow \|\phi(v,u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathbf{B}'}) \text{ (\textbf{Lema 5.1.})} \\
&= \bigwedge_{v\in dom(u)}^{\mathbf{B}} (u(v) \Rightarrow \|\phi(v,u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathbf{B}}) \text{ (I.P. i uslov teoreme)} \\
&= \|(\forall x \in u)\phi(x,u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathbf{B}} = \|\varphi(u_1,\ldots,u_n)\|_{\mathbf{B}}.
\end{aligned}$$

U slučaju $\varphi \equiv (\exists x \in u)\phi(x)$ postupamo analogno sa prethodnim. ■

Tvrđenje prethodne teoreme možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B}')} \models \varphi(u_1,\ldots,u_n) \leftrightarrow \mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \varphi(u_1,\ldots,u_n),$$

gde je $\mathbf{B}'$ kompletna podalgebra od $\mathbf{B}$ i gde je $u_1,\ldots,u_n \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B}')} \subseteq \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, dok je formula φ vezana. Kako je $\mathbf{2} = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ kompletna podalgebra proizvoljne kompletne Bulove algebre $\mathbf{B}$, to za vezane formule $\varphi(u_1,\ldots,u_n)$ uvek imamo

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{2})} \models \varphi(u_1,\ldots,u_n) \leftrightarrow \mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \varphi(u_1,\ldots,u_n),$$

gde je $u_1,\ldots u_n \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})} \subseteq \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. U narednim tvrđenjima pokazujemo da je univerzum $\mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$ u neku ruku izomorfan sa Von Neumann-ovim univerzumom $\mathbf{V}_N$, kojeg ubuduće označavamo sa $\mathbf{V}$.

Definicija 5.2. Za svaki skup $x \in \mathbf{V}$ definišemo $\hat{x} = \{(\hat{y},\mathbf{1_B}) : y \in x\}$ rekurzijom po dobro-zasnovanoj i skupu-sličnoj $\in$-relaciji, videti poglavlje 2.5. ▲

Iz prethodne definicije imamo $\hat{x} \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})} \subset \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ i

$$dom(\hat{x}) = \{\hat{y} : y \in x\} \quad \text{i} \quad im(\hat{x}) = \{\mathbf{1_B}\}.$$

Iz **Teoreme 5.3.**(2) i (3) imamo da je za sve $x, y \in \mathbf{V}$

$$\|\hat{x} \in \hat{y}\|_{\mathbf{B}} = \|\hat{x} \in \hat{y}\|_{\mathbf{2}} \in \mathbf{2} \quad \text{i} \quad \|\hat{x} = \hat{y}\|_{\mathbf{B}} = \|\hat{x} = \hat{y}\|_{\mathbf{2}} \in \mathbf{2}.$$

Preslikavanje $x \to \hat{x}$ $(x \in \mathbf{V})$ je *kanonsko potapanje* univerzuma $\mathbf{V}$ u Bulovsko vrednosni univerzum $\mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$. Elemente iz $\mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$ oblika $\hat{x}$ $(x \in \mathbf{V})$ zovemo *standardnim* elementima. Kaže se i da je $\hat{x}$ *standardno ime* za skup x unutar univerzuma $\mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$.

Teorema 5.5.

(1) *Ako je* $x \in \mathbf{V}$ *i* $y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$ *onda*

$$\|y \in \hat{x}\| = \bigvee \{\|y = \hat{u}\| : u \in x\};$$

(2) *Za sve* $x, y \in \mathbf{V}$ *važi*

$$x \in y \leftrightarrow \mathbf{V}^{(\mathbf{2})} \models \hat{x} \in \hat{y} \quad i \quad x = y \leftrightarrow \mathbf{V}^{(\mathbf{2})} \models \hat{x} = \hat{y};$$

(3) *Preslikavanje* $x \to \hat{x}$ *je injektivno;*

(4) *Za svako* $y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$ *postoji jedinstveni elemenat* $x \in \mathbf{V}$ *takav da je* $\mathbf{V}^{(\mathbf{2})} \models \hat{x} = y$.

Dokaz. (1): Direktnim računanjem i korišćenjem prethodne definicije dobijamo

$$\begin{aligned} \|y \in \hat{x}\| &= \bigvee_{u \in dom(\hat{x})} (\hat{x}(u) \wedge \|u = y\|) \\ &= \bigvee_{u \in x} (\underbrace{\hat{x}(\hat{u})}_{=\mathbf{1}} \wedge \|\hat{u} = y\|) = \bigvee_{u \in x} \|\hat{u} = y\|. \end{aligned}$$

(2): Koristimo indukciju po rangu skupova univerzuma $\mathbf{V}$, **Teorema 2.15.**(ii). Pretpostavimo da je za sve $z \in \mathbf{V}$ sa $rank(z) < rank(y)$ tačno sledeće:

$$(\text{I.P.}): \quad \begin{array}{l} (\forall x)(x \in z \leftrightarrow \|\hat{x} \in \hat{z}\| = \mathbf{1}), \\ (\forall x)(x = z \leftrightarrow \|\hat{x} = \hat{z}\| = \mathbf{1}), \\ (\forall x)(z \in x \leftrightarrow \|\hat{z} \in \hat{x}\| = \mathbf{1}). \end{array}$$

Zbog (1) važi $\|\hat{x} \in \hat{y}\| = \bigvee\{\|\hat{u} = \hat{x}\| : u \in y\}$. Kako je $(u \in y) \to (rank(u) < rank(y))$ (**Lema 2.6.**(3)) to na osnovu (I.P.) zaključujemo $\|\hat{x} \in \hat{y}\| = \mathbf{1}$ akko „za neko $u \in y$ važi $\|\hat{u} = \hat{x}\| = \mathbf{1}$" akko „za neko $u \in y$ važi $u = x$" (imamo u vidu da radimo sa algebrom **2**).
Dalje, na osnovu **Definicija 5.1.**,**5.2** kao i osobina Bulovih algebri imamo

$$\begin{aligned} \|\hat{x} = \hat{y}\| &= \bigwedge_{u \in dom(\hat{x})} (\hat{x}(u) \Rightarrow \|u \in \hat{y}\|) \wedge \bigwedge_{v \in dom(\hat{y})} (\hat{y}(v) \Rightarrow \|v \in \hat{x}\|) \\ &= \bigwedge_{u \in x} (\hat{x}(\hat{u}) \Rightarrow \|\hat{u} \in \hat{y}\|) \wedge \bigwedge_{v \in y} (\hat{y}(\hat{v}) \Rightarrow \|\hat{v} \in \hat{x}\|) \\ &= \bigwedge_{u \in x} (\mathbf{1} \Rightarrow \|\hat{u} \in \hat{y}\|) \wedge \bigwedge_{v \in y} (\mathbf{1} \Rightarrow \|\hat{v} \in \hat{x}\|) = \bigwedge_{u \in x} \|\hat{u} \in \hat{y}\| \wedge \bigwedge_{v \in y} \|\hat{v} \in \hat{x}\|. \end{aligned}$$

Odavde, ako pogledamo na desnu stranu gornje jednakosti zaključujemo da će biti $\|\hat{x} = \hat{y}\| = \mathbf{1}$ akko

$$(\bullet): \ (\forall u \in x)\|\hat{u} \in \hat{y}\| = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad (\star): \ (\forall v \in y)\|\hat{v} \in \hat{x}\| = \mathbf{1}.$$

$(\bullet)$ je ekvivalentno sa $(\forall u \in x) u \in y$ (prvi deo tvrđenja tačke (2)), dok je $(\star)$ ekvivalentno sa $(\forall v \in y) v \in x$ (treći deo I.P.). Lako se vidi da $(\star)$ i $(\bullet)$ zajedno daju $x = y$, što je i trebalo pokazati.

Da bi dokaz bio kompletan preostaje da pokažemo $\|\hat{y} \in \hat{x}\| = \mathbf{1} \leftrightarrow y \in x$. Opet, zbog (1) imamo

$$\|\hat{y} \in \hat{x}\| = \bigvee \{\|\hat{y} = \hat{u}\| : u \in x\}.$$

Dakle, $\|\hat{y} \in \hat{x}\| = \mathbf{1}$ akko „za neko $u \in x$ važi $\|\hat{y} = \hat{u}\| = \mathbf{1}$." Poslednja izjava je zbog gornjeg ekvivalentna sa $(\exists u \in x) u = y$, a ovo sa $y \in x$.
(3): Direktna posledica druge tačke ove teoreme.
(4): Dokaz izvodimo uz pomoć **Teoreme 5.1.** stavljajući $\mathbf{B} = \mathbf{2}$ i $\varphi(t) \equiv (\exists u \in \mathbf{V})\|\hat{u} = t\| = \mathbf{1}$. Indukcijska pretpostavka je $(\forall t \in dom(y))\varphi(t)$, gde je $y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$ proizvoljno uzeto. Treba da pokažemo da iz I.P. sledi $\varphi(y)$. Traženi skup iz formule $\varphi(y)$ označavamo sa x. Pokažimo da $x \in \mathbf{V}$ definisano sa

$$x := \{u \in \mathbf{V} : (\exists t \in dom(y))(y(t) = \mathbf{1} \wedge \|\hat{u} = t\| = \mathbf{1})\}$$

zadovoljava $\|\hat{x} = y\| = \mathbf{1}$. Pre svega x je skup, pošto je $dom(y)(\subset \mathbf{V}^{(\mathbf{2})})$ takođe skup. Dalje, iz definicije Bulovske jednakosti i elementa $\hat{x}$ imamo

$$\begin{aligned}
\|\hat{x} = y\| &= \bigwedge_{t \in dom(y)} (y(t) \Rightarrow \|t \in \hat{x}\|) \wedge \bigwedge_{u \in dom(\hat{x})} (\hat{x}(u) \Rightarrow \|u \in y\|) \\
&= \underbrace{\bigwedge_{t \in dom(y)} (y(t) \Rightarrow \|t \in \hat{x}\|)}_{=(a)} \wedge \underbrace{\bigwedge_{u \in x} \|\hat{u} \in y\|}_{=(b)}.
\end{aligned}$$

(a): Pokažimo da je za sve $t \in dom(y)$ ispunjeno $y(t) \leq \|t \in \hat{x}\|$, što je zbog **Teoreme 3.5.**(3) ekvivalentno sa $(\forall t \in dom(y))((y(t) \Rightarrow \|t \in \hat{x}\|) = \mathbf{1})$. Naime, iz (1) ovog tvrđenja imamo $\|t \in \hat{x}\| = \bigvee_{u \in x} \|t = \hat{u}\|$. Neka je $t \in dom(y)$ proizvoljno, tada zbog I.P. postoji $u \in V$ sa $\|t = \hat{u}\| = \mathbf{1}$. Ako ovo u pripada x onda je $\bigvee_{u \in x} \|t = \hat{u}\| = \mathbf{1}$, pa je sigurno $y(t) \leq \|t \in \hat{x}\|$. Ako pak $u \notin x$ onda zbog definicije x-a mora biti $y(t) = \mathbf{0}$ $(im(y) \subset \mathbf{2})$, pa je opet $y(t) \leq \|t \in \hat{x}\|$. Dakle $(a) = \mathbf{1}$.
(b): Za svako $u \in x$ imamo

$$\|\hat{u} \in y\| = \bigvee_{t \in dom(y)} (y(t) \wedge \|t = \hat{u}\|) = \mathbf{1},$$

jer postoji $t \in dom(y)$ za koje je $y(t) = \mathbf{1}$ i $\|t = \hat{u}\| = \mathbf{1}$. Dakle, $(b) = \mathbf{1}$.

Jedinstvenost: Neka za neko $y \in \mathbf{V^{(2)}}$ postoje $x_1, x_2 \in \mathbf{V}$ sa

$$\mathbf{V^{(2)}} \models \hat{x_1} = y \quad \text{i} \quad \mathbf{V^{(2)}} \models \hat{x_2} = y.$$

Drugačije zapisano imamo $\|\hat{x_1} = y\| = \mathbf{1}$ i $\|\hat{x_2} = y\| = \mathbf{1}$, što zajedno sa **Teoremom 5.2.** daje $\|\hat{x_1} = \hat{x_2}\| = \mathbf{1}$, odnosno $x_1 = x_2$ (tačka (2) ovog tvrđenja). ∎

Na osnovu **Teoreme 5.3.**(2)i(3) i činjenice da je $\mathbf{2}$ kompletna podalgebra Bulove algebre $\mathbf{B}$ u tačkama (2) i (4) prethodnog tvrđenja umesto $\mathbf{V^{(2)}}$ možemo staviti $\mathbf{V^{(B)}}$.

Sledeća teorema prestavlja prirodni nastavak prethodne. $x \in V$ zadovoljava formulu $\varphi(x)$ ako i samo ako standardni elemenat $\hat{x}$ zadovoljava $\varphi(\hat{x})$ unutar univerzuma $\mathbf{V^{(2)}}$, dok $\varphi(\hat{x})$ ne mora biti tačno u proizvoljnom $\mathbf{V^{(B)}}$.

Teorema 5.6. *Neka su $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{V}$ i neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula* **ZFC** *teorije. Tada*

(1) $\varphi(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow \mathbf{V^{(2)}} \models \varphi(\hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})$;

(2) *Ako je φ vezana formula onda*

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow \mathbf{V^{(B)}} \models \varphi(\hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n});$$

(3) *Ako je φ formula klase Σ_1 onda*

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) \rightarrow \mathbf{V^{(B)}} \models \varphi(\hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n}).$$

Dokaz. (1): Koristimo indukciju po dužini formule φ. Ako je φ atomarna formula onda na osnovu **Teoreme 5.5.**(2) direktno imamo $\varphi \leftrightarrow \mathbf{V^{(2)}} \models \varphi$. Indukcijska pretpostavka: neka je za sve formule ϕ kraće dužine od φ ispunjeno (1). Jedini netrivijalan slučaj nastupa ako je formula φ oblika $(\exists x)\phi(x, u_1, \ldots, u_n)$ ili $(\forall x)\phi(x, u_1, \ldots, u_n)$. Ovde iznosimo dokaz u slučaju egzistencijalnog kvantifikatora.
$(\rightarrow)$: Ako je $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ tačno, onda postoji $u_0 \in \mathbf{V}$ za koje je formula $\phi(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ takođe tačna. Zbog I.P. imamo $\|\phi(\hat{u_0}, \hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| = \mathbf{1}$. Koristeći se definicijom $\mathbf{B}$-vrednosti zaključujemo

$$\|(\exists x)\phi(x, \hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| \geq \|\phi(\hat{u_0}, \hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| = \mathbf{1}.$$

Dakle, $\|\varphi(\hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| = \mathbf{1}$.
$(\leftarrow)$: Neka je sada $\|\varphi(\hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| = \mathbf{1}$. Računajući $\|\varphi\|$ dobijamo

$$\mathbf{1} = \bigvee\{\|\phi(u, \hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| : u \in \mathbf{V^{(2)}}\}.$$

Dakle, $\|\phi(v, \hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| = \mathbf{1}$ za neko $v \in \mathbf{V}^{(\mathbf{2})}$. Iz (4) prethodne teoreme postoji jedinstveni $u_0 \in \mathbf{V}$ sa $\|\hat{u_0} = v\| = \mathbf{1}$. Zbog **Teoreme 5.2.**(7) imamo

$$\mathbf{1} = \|\phi(v, \hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\| \wedge \|v = \hat{u_0}\| \leq \|\phi(\hat{u_0}, \hat{u_1}, \ldots, \hat{u_n})\|,$$

što zajedno sa I.P. daje tačnost formule $\phi(u_0, u_1, \ldots, u_n)$, a samim tim i $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$.

(2): Direktna posledica **Teoreme 5.4.**(**2** je kompletna podalgebra od **B**) i (1) ovog tvrđenja.

(3): Formula φ je klase Σ_1 akko je konstituisana od atomarnih formula i njihovih negacija uz korišćenje logičkih operacija $\wedge, \vee, \forall x \in y$, i $\exists x$. ∎

5.3 Aksiome ZF teorije u univerzumu $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$

U ovome delu rada pokazujemo da proizvoljni Bulovsko vrednosni univerzum $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ predstavlja **B**-model **ZF** teorije. Zapravo pokazujemo da ako je $\mathbf{V} \models \mathbf{ZF}$ onda važi i $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \mathbf{ZF}$, gde **V** predstavlja univerzum svih skupova u kojem važe sve aksiome **(Ax1)-(Ax8)**. Pokazujemo sledeću

Teorema 5.7. *Sve aksiome, a samim tim i sve teoreme* **ZF** *teorije tačne su u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$.

Dokaz. Na osnovu **Lema 5.2.-5.9.** imamo da su sve sve aksiome **ZF**-a tačne u $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Sada, na osnovu **Teoreme 5.2.** i **Teoreme 4.3.** imamo i da su sve teoreme iz **ZF** tačne u **B**-univerzumu. ∎

Lema 5.2. *Aksioma ekstenzionalnosti* **(Ax1)** *je tačna u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$:

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall x)(\forall y)((\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y).$$

Dokaz. Za proizvoljna dva elementa x i y univerzuma $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ definišemo

$$c(x, y) := \|(\forall u \in x)(u \in y)\| = \bigwedge_{u \in dom(x)} (x(u) \Rightarrow \|u \in y\|),$$

gde poslednja jednakost sledi iz **Leme 5.1.** Iz definicije Bulovske jednakosti imamo $c(x, y) \wedge c(y, x) = \|x = y\|$. Na drugoj strani važi

$$c(x, y) \wedge c(y, x) = \|(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y)\|,$$

što zajedno sa malopređašnjim, a na osnovu **Teoreme 3.5.**(3) daje

$$\begin{gathered}\|(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y)\| = \|x = y\| \leftrightarrow \\ \|(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y)\| \Leftrightarrow \|x = y\| = \mathbf{1} \leftrightarrow \\ \|(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \leftrightarrow x = y\| = \mathbf{1} \rightarrow \\ \|(\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y\| = \mathbf{1}.\end{gathered}$$

■

Lema 5.3. *Aksioma para* **(Ax2)** *je tačna u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$*:*

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall a)(\forall b)(\exists c)(\forall x)(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b).$$

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ proizvoljno uzeti. Konstruišemo elemenat $c \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ sa

$$(*): \qquad dom(c) := \{a, b\} \quad \text{i} \quad im(c) = \{\mathbf{1}\}.$$

Ako je $a \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha+1}$ i $b \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\beta+1}$ za $\gamma = max\{\alpha, \beta\} + 1$ sigurno važi $c \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\gamma+1}$, zbog definicije c-a imamo $Fun(c)$ i $im(c) \subset B$, dok $dom(c) \subset \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\gamma}$, jer

$$a \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha+1} \subset \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\gamma} \wedge b \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\beta+1} \subset \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\gamma} \rightarrow \{a, b\} \subset \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\gamma}.$$

Prema **Definiciji 5.1.** je

$$\begin{aligned}\|x \in c\| &= \bigvee_{t \in dom(c)} (c(t) \wedge \|t = x\|) = \bigvee_{t \in \{a,b\}} \|t = x\| \\ &= \|a = x\| \vee \|b = x\| = \|x = a \vee x = b\|.\end{aligned}$$

Kako u Bulovoj algebri $\mathbf{B}$ važi $a = b$ akko $a \Leftrightarrow b = \mathbf{1}$ to ako dva puta iskoristimo tvrđenje 3.5.(3) imamo:

$$\begin{gathered}\|x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b)\| = \mathbf{1} \quad (x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}) \rightarrow \\ \bigwedge_{x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b)\| = \mathbf{1} \leftrightarrow \\ \|(\forall x)(x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))\| = \mathbf{1}.\end{gathered}$$

■

Lema 5.4. *Shema izdvajanja* **(Ax3)** *je tačna u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$*:*

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall x)(\forall p)(\exists y)(\forall u)(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \varphi(u, p)).$$

Dokaz. Neka su x i p proizvoljni elementi univerzuma $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Definišemo funkciju $y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ preko formula

$$dom(y) := dom(x), \qquad y(u) := x(u) \wedge \|\varphi(u,p)\| \;\; (u \in dom(y)).$$

Važi $\|(\forall u)(u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \varphi(u,p))\| = a \wedge b$, gde je

$$a := \|(\forall u \in y)(u \in x \wedge \varphi(u,p))\|, \quad b := \|(\forall u \in x)(\varphi(u,p) \rightarrow u \in y)\|.$$

Prema **Lemi 5.1.** i definiciji y-a je

$$\begin{aligned} a &= \bigwedge_{u \in dom(y)} (y(u) \Rightarrow \|u \in x \wedge \varphi(u,p)\|) \\ &= \bigwedge_{u \in dom(y)} [(x(u) \wedge \|\varphi(u,p)\|) \Rightarrow (\|u \in x\| \wedge \|\varphi(u,p)\|)] = \mathbf{1}, \end{aligned}$$

gde poslednja jednakost važi zbog **Teorema 5.2.**(2) i **3.5.**(3). Slično prethodnom računu imamo

$$\begin{aligned} b &= \bigwedge_{u \in dom(x)} [x(u) \Rightarrow (\|\varphi(u,p)\| \Rightarrow \|u \in y\|)] \\ &= \bigwedge_{u \in dom(x)} [(x(u) \wedge \|\varphi(u,p)\|) \Rightarrow \|u \in y\|] = \bigwedge_{u \in dom(x)} [y(u) \Rightarrow \|u \in y\|] = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Dakle, y zadovoljava uslove sheme izdvajanja unutar **B**-univerzuma. ∎

Lema 5.5. *Aksioma unije* **(Ax4)** *je tačna unutar* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$*:*

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall x)(\exists y)(\forall u)(u \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \wedge u \in z)).$$

Dokaz. Za elemenat $x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ definišemo $y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ sa formulama

$$\begin{aligned} dom(y) &:= \bigcup\{dom(z) : z \in dom(x)\}, \\ y(t) &:= \|(\exists z \in x)(t \in z)\| \;\; (t \in dom(y)). \end{aligned}$$

Pokažimo da važi $\|y = \bigcup x\| = \mathbf{1}$.

Na osnovu **Leme 5.1.** i definicije y-a dobijamo

$$\begin{aligned} \|y \subset \bigcup x\| &= \|(\forall t)(t \in y \rightarrow t \in \bigcup x)\| = \|(\forall t \in y)(\exists z \in x)(t \in z)\| \\ &= \bigwedge_{t \in dom(y)} (\|(\exists z \in x)(t \in z)\| \Rightarrow \|(\exists z \in x)(t \in z)\|) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Za drugi smer, uz korišćenje **Teoreme 3.10.**(6) imamo

$$\begin{aligned}\|\bigcup x \subset y\| &= \|(\forall z)(z \in x \to z \subset y)\| = \|(\forall z \in x)(\forall u \in z)(u \in y)\| \\ &= \bigwedge_{z \in dom(x)} [x(z) \Rightarrow \bigwedge_{u \in dom(z)} (z(u) \Rightarrow \|u \in y\|)] \\ &= \bigwedge_{z \in dom(x)} \bigwedge_{u \in dom(z)} \underbrace{[x(z) \Rightarrow (z(u) \Rightarrow \|u \in y\|)]}_{(\star)}.\end{aligned}$$

Nađimo **B**-vrednost izraza $(\star)$. Primetimo da je za $z \in dom(x)$ i $u \in dom(z)$, a uz pomoć **Teoreme 5.2.**(2), **Leme 5.1.** i definicije funkcije y, ispunjeno

$$\begin{aligned}x(z) \wedge z(u) \leq x(z) \wedge \|u \in z\| &\leq \bigvee_{z \in dom(x)} (x(z) \wedge \|u \in z\|) \\ = \|(\exists z \in x)(u \in z)\| &= y(u) \leq \|u \in y\|.\end{aligned}$$

Iz gornje formule na osnovu osobina Bulovih algebri dobijamo

$$(x(z) \wedge z(u)) \Rightarrow \|u \in y\| = \mathbf{1} \quad \text{akko} \quad x(z) \Rightarrow (z(u) \Rightarrow \|u \in y\|) = \mathbf{1},$$

odnosno $(\star) = \mathbf{1}$. Time dobijamo $\|y = \bigcup x\| = \mathbf{1}$, pa važi

$$\|(\exists v)(v = \bigcup x)\| = \bigvee_{v \in \mathbf{V^{(B)}}} \|v = \bigcup x\| \geq \|y = \bigcup x\| = \mathbf{1}.$$

Prelaskom na infimum po $x \in \mathbf{V^{(B)}}$ dolazimo do kraja dokaza:

$$\|(\forall x)(\exists y)(y = \bigcup x)\| = \bigwedge_{x \in \mathbf{V^{(B)}}} \|(\exists y)(y = \bigcup x)\| = \mathbf{1}.$$

■

Lema 5.6. *Aksioma partitivnog skupa* **(Ax5)** *je tačna u* $\mathbf{V^{(B)}}$*:*

$$\mathbf{V^{(B)}} \models (\forall x)(\exists y)(\forall u)(u \in y \leftrightarrow u \subset x).$$

Dokaz. Za dato $x \in \mathbf{V^{(B)}}$ definišemo y sa

$$dom(y) := B^{dom(x)} \quad \text{i} \quad y(u) := \|u \subset x\| \quad (u \in dom(y)),$$

gde smo sa $B^{dom(x)}$ označili skup svih funkcija iz $dom(x)$ u B. Lako se proverava $y \in \mathbf{V^{(B)}}$. Pokazaćemo da važi $\|u \in y \leftrightarrow u \subset x\| = \mathbf{1}$ za sve $u \in \mathbf{V^{(B)}}$, što je dovoljno za dokaz tvrđenja.

($\rightarrow$): Iz definicije $\|\cdot \in \cdot\|$, funkcije y i **Teoreme 5.2.**(7) dobijamo

$$\|u \in y\| = \bigvee_{t \in dom(y)} (y(t) \wedge \|t = u\|) = \bigvee_{t \in dom(y)} (\|t \subset x\| \wedge \|t = u\|) \leq \|u \subset x\|.$$

Dakle, $\|u \in y \rightarrow u \subset x\| = \mathbf{1}$ na osnovu tvrđenja 3.5.(3).

($\leftarrow$): Fiksirajmo elemenat u. Neka je $u' \in dom(y)$ dat sa $u'(t) := \|t \in u\|$ za sve $t \in dom(u')$ $(= dom(x))$.

Za proizvoljno $t \in \mathbf{V^{(B)}}$ imamo

$$\|t \in u'\| = \bigvee_{z \in dom(u')} u'(z) \wedge \|t = z\| = \bigvee_{z \in dom(u')} \|z \in u\| \wedge \|t = z\| \leq \|t \in u\|.$$

Odavde sledi $\|u' \subset u\| = \mathbf{1}$.

Na drugoj strani, zbog **Teoreme 5.2.**(5), osobina Bulovih algebri i činjenice $dom(x) = dom(u')$ važi

$$\begin{aligned}\|t \in u \cap x\| = \|t \in x\| \wedge \|t \in u\| &= \bigvee_{z \in dom(x)} (x(z) \wedge \|t = z\|) \wedge \|t \in u\| \\ = \bigvee_{z \in dom(x)} (x(z) \wedge \|t = z\| \wedge \|t \in u\|) &\leq \bigvee_{z \in dom(x)} (\|t = z\| \wedge \|t \in u\|) \\ \leq \bigvee_{z \in dom(x)} (\|t = z\| \wedge \|z \in u\|) &= \bigvee_{z \in dom(u')} (\|t = z\| \wedge u'(z)) = \|t \in u'\|.\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo $\|u \cap x \subset u'\| = \mathbf{1}$.

Takođe, zbog osobina infimuma, **Leme 5.1.**, definicije podskupa i elementa y, i uz pomoć **Teoreme 5.2.**(2) dobijamo

$$\begin{aligned}\|u \subset x\| = \bigwedge_{t \in \mathbf{V^{(B)}}} (\|t \in u\| \Rightarrow \|t \in x\|) &\leq \bigwedge_{t \in dom(u')} (u'(t) \Rightarrow \|t \in x\|) \\ = \|(\forall t \in u')(t \in x)\| = \|u' \subset x\| &= y(u') \leq \|u' \in y\|.\end{aligned}$$

Stavljajući na jedno mesto sve što smo rekli o u i u' zaključujemo

$$\begin{gathered}\|u \subset x\| = \|x \cap u \subset u'\| \wedge \|u' \subset u\| \wedge \|u \subset x\| \leq \|u = u'\|, \\ \|u \subset x\| \leq \|u' \in y\|,\end{gathered}$$

gde prvi niz relacija sledi iz jednostavnih osobina skupova i Bulovih algebri. Koristeći se sa $\|u \subset x\| \leq \|u = u'\|$ i $\|u \subset x\| \leq \|u' \in y\|$ iznalazimo

$$\|u \subset x\| = \|u \subset x\| \wedge \|u = u'\| \leq \|u' \in y\| \wedge \|u = u'\| \leq \|u \in y\|,$$

odnosno $\|u \subset x \rightarrow u \in y\| = \mathbf{1}$ (a opet zbog **Teoreme 3.5.**(3)). $\blacksquare$

Lema 5.7. *Aksioma beskonačnosti* **(Ax6)** *je tačna u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$*:*

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \exists x(\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x))$$

Dokaz. Traženi **B**-skup x će biti baš $\hat{\omega}$ koji dobijamo od ordinala $\omega \in \mathbf{V}$ koristeći **Definiciju 5.2.**

Za početak uočimo $\|\hat{0} \in \hat{\omega}\| = \mathbf{1}$, gde smo sa $\hat{0} \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ označili pandan praznome skupu univerzuma $\mathbf{V}$.

Dalje, za dato $y \in \mathbf{V}$ i $u := y \cup \{y\}$ važi $\|\hat{u} = \hat{y} \cup \{\hat{y}\}\| = \mathbf{1}$. Zaista, koristeći se **Teoremom 5.5.**(1) za svako $v \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ imamo

$$\|v \in \hat{u}\| = \bigvee_{s \in u} \|\hat{s} = v\| = \bigvee_{s \in y \cup \{y\}} \|\hat{s} = v\| = \bigvee_{s \in y} \|\hat{s} = v\| \vee \|\hat{y} = v\|,$$
$$\|v \in \hat{y} \cup \{\hat{y}\}\| = \|v \in \hat{y}\| \vee \|v = \hat{y}\| = \bigvee_{s \in y} \|\hat{s} = v\| \vee \|v = \hat{y}\|.$$

Imajući ovo u vidu zajedno sa **Lemom 5.1** i **Teoremom 5.5**(2) dobijamo

$$\begin{aligned}\|(\forall y \in \hat{\omega})(y \cup \{y\} \in \hat{\omega})\| &= \bigwedge_{y \in dom(\hat{\omega})} (\hat{\omega}(y) \Rightarrow \|y \cup \{y\} \in \hat{\omega}\|)\\ &= \bigwedge_{y \in \omega} \|\hat{y} \cup \{\hat{y}\} \in \hat{\omega}\| = \bigwedge_{y \in \omega} \|\widehat{y \cup \{y\}} \in \hat{\omega}\| = \mathbf{1},\end{aligned}$$

zbog toga što ω zadovoljava uslove **(Ax6)**. ∎

U dokazu prošle leme smo koristili da je $\hat{0}$ prazan skup u $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Pokažimo da je to zaista tako; pokažimo da važi $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \emptyset^{\mathbf{B}} = \hat{0}$, gde smo sa $\emptyset^{\mathbf{B}}$ označili prazan skup univerzuma $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Zapravo $\|\emptyset^{\mathbf{B}} = x\|$ je skraćeni zapis formule $\|(\forall t)(t \notin x)\|$ (**Definicija 2.1.**). Sada, za sve $t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, a zbog tvrđenja 5.5.(1) imamo

$$\|t \in \hat{0}\| = \bigvee_{u \in 0} \|t = \hat{u}\| = \mathbf{0}.$$

Odavde sledi:

$$\|(\forall t)(t \notin \hat{0})\| = \bigwedge_{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|t \notin \hat{0}\| = \mathbf{1}.$$

Dokaz **Leme 5.7.** je mogao biti dosta kraći uz korišćenje **Teoreme 5.6.**(2). Naime, formula $\varphi(\omega) \equiv (\forall y \in \omega)(y \cup \{y\} \in \omega)$ je vezana i dokaziva u **ZF**, pa važi i $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \varphi(\hat{\omega})$, odnosno $\|(\forall y \in \hat{\omega})(y \cup \{y\} \in \hat{\omega})\| = \mathbf{1}$.

Lema 5.8. *Shema zamene* **(Ax7)** *je tačna u univerzumu* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$*:*

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall a)((\forall x \in a)(\exists! y)\varphi(x,y) \to (\exists b)(\forall x \in a)(\exists y \in b)\varphi(x,y)),$$

gde promenljiva b nema slobodnih pojavljivanja u formuli φ.

Dokaz. Pokazaćemo jače tvrđenje, u kojem ne tražimo postojanje tačno jednog elementa y. Dakle, pokazujemo

$$\|(\forall a)((\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x,y) \to (\exists b)(\forall x \in a)(\exists y \in b)\varphi(x,y))\| = \mathbf{1}.$$

Ovo ojačanje sheme zamene može se pokazati u okviru **ZF**-a, videti u [6].

Neka je a proizvoljan elemenat iz $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Kako je B skup to za svako fiskno $x \in dom(a)$ klasa

$$K := \{\|\varphi(x,y)\| : y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}\} \subset B,$$

takođe predstavlja skup, pa postoji i $\bigvee K \in B$. Ako pokažemo

$$(\star):\ (\forall x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})})(\exists! \beta \in ON) \bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|\varphi(x,y)\| = \bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\beta}} \|\varphi(x,y)\|,$$

to na osnovu sheme zamene za skupove (tačnije u $\mathbf{V}$) imali bi postojanje funkcije $x \mapsto \alpha_x$ sa domenom $dom(a)$ i kodomenom skupom ordinala za koju važi

$$\bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|\varphi(x,y)\| = \bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha_x}} \|\varphi(x,y)\|.$$

Dalje, stavimo $\alpha := sup\{\alpha_x : x \in dom(a)\}$ i definišemo $b \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ sa

$$dom(b) := \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha}, \qquad im(b) := \{\mathbf{1}\}.$$

Primetimo $b \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha+1}$, takođe b je traženi elemenat zbog

$$\begin{aligned}
\|(\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x,y)\| &= \bigwedge_{x \in dom(a)} (a(x) \Rightarrow (\bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|\varphi(x,y)\|)) \\
&= \bigwedge_{x \in dom(a)} (a(x) \Rightarrow (\bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha_x}} \|\varphi(x,y)\|)) \\
&\leq \bigwedge_{x \in dom(a)} (a(x) \Rightarrow (\bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha}} \|\varphi(x,y)\|)) \\
= \bigwedge_{x \in dom(a)} (a(x) \Rightarrow (\|(\exists y \in b)\varphi(x,y)\|) &= \|(\forall x \in a)(\exists y \in b)\varphi(x,y)\|.
\end{aligned}$$

Pokažimo tvrđenje $(\star)$. Neka je $x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ proizvoljno izabran. Za svaki ordinal γ definišemo $a_\gamma := \bigvee_{y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}_{\gamma}} \|\varphi(x,y)\|$. Dalje, za sve $a \in B$ stavimo

$$\gamma(a) = min\{\gamma : a_\gamma > a\} \ \text{ i } \ \gamma(a) = 0, \text{ ako } a_\gamma \not> a \text{ za sve } \gamma \in ON.$$

Posmatrajmo ordinal $\beta := sup\{\gamma(a) : a \in B\}$ (β je ordinal jer je B skup). Za β važi $(\forall\gamma > \beta)(a_\gamma \geq a_\beta \wedge a_\gamma \not> a_\beta)$, što je dovoljno za $(\star)$. Zaista, za proizvoljan ordinal γ iz $\gamma > \beta$ sledi $\mathbf{V}_\beta^{(\mathbf{B})} \subset \mathbf{V}_\gamma^{(\mathbf{B})}$, a samim tim i

$$a_\gamma = \bigvee_{y \in \mathbf{V}_\gamma^{(\mathbf{B})}} \|\varphi(x,y)\| \geq \bigvee_{y \in \mathbf{V}_\beta^{(\mathbf{B})}} \|\varphi(x,y)\| = a_\beta.$$

Pretpostavka $a_\gamma > a_\beta$ vodi u kontradikciju zbog izbora ordinala β. ∎

Lema 5.9. *Aksioma fundacije* **(Ax8)** *je tačna u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$*:*

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall x)((\exists y)(y \in x) \to (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Dokaz. Pokazujemo da za proizvoljno $x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ važi

$$b := \|(\exists y)(y \in x) \wedge (\forall y \in x)(y \cap x \neq \emptyset)\| = \mathbf{0}.$$

Pretpostavimo suprotno, da je $b \neq \mathbf{0}$. Iz $b \leq \|(\exists y)(y \in x)\|$ sledi da mora postojati elemenat $y_0 \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ za koji je $\|y_0 \in x\| \wedge b \neq \mathbf{0}$ i $\rho(y_0) \leq \rho(y)$ za sve $y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ za koje je $\|y \in x\| \wedge b \neq \mathbf{0}$ (indukcija po ordinalima $\rho(y)$).

Dalje, koristeći se sa $(y \cap x \neq \emptyset) \leftrightarrow ((\exists z \in y)(z \in x))$, za proizvoljno $y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ nalazimo

$$\|y \in x\| \wedge b \leq \|y \cap x \neq \emptyset\| = \bigvee_{z \in dom(y)} (y(z) \wedge \|z \in x\|).$$

Poslednja relacija daje $\|y_0 \in x\| \wedge b \wedge \bigvee_{z \in dom(y_0)} (y_0(z) \wedge \|z \in x\|) \neq \mathbf{0}$. Odavde imamo da mora postojati $z_0 \in dom(y_0)$ za koji je $\|y_0 \in x\| \wedge b \wedge \|z_0 \in x\| \neq \mathbf{0}$. Međutim, zbog $\rho(z_0) < \rho(y_0)$ dolazimo u kontradikciju sa $\|z_0 \in x\| \wedge b \neq \mathbf{0}$.

Dakle, $b = \mathbf{0}$ što daje

$$\begin{aligned} \mathbf{1} = b^* &= \|\neg((\exists y)(y \in x) \wedge (\forall y \in x)(y \cap x \neq \emptyset))\| \\ &= \|\neg((\exists y)(y \in x)) \vee (\exists y \in x)(y \cap x = \emptyset)\| \\ &= \|(\exists y)(y \in x) \to (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)\|. \end{aligned}$$

Kako poslednje važi za proizvoljno $x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ to imamo i

$$\begin{aligned} &\|(\forall x)((\exists y)(y \in x) \to (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))\| \\ = &\bigwedge_{x \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|(\exists y)(y \in x) \to (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)\| = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

∎

5.4 AC u univerzumu $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$

Za aksiomu izbora smo ostavili celo poglavlje pošto je i dokaz tvrđenja $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\mathbf{Ax9})$ najduži. Dokaza ima koliko i ekvivalenata aksiome izbora. Naime, ako u **ZF** važi $\varphi \leftrightarrow \mathbf{AC}$ onda na osnovu **Teoreme 5.7.** iz $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \varphi$ sledi i $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \mathbf{AC}$. Kako nismo spominjali princip maksimuma u $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ to se ne možemo oslanjati na ekvivalente koji garantuju postojanje ekstremnih elemenata, kao što je u [1]. Ovde, kao i u većini ove glave, radimo po knjizi [8], gde je pokazana jedna varijanta principa dobrog uređenja.

Definicija 5.3. Neka je $\mathcal{F}$ familija nepraznih uzajamno disjunktnih skupova. *Funkcija izbora za* $\mathcal{F}$ je funkcija f za koju važi $\mathcal{F} = dom(f)$ i za sve $x \in \mathcal{F}$ imamo $f(x) \in x$. *Izborni skup familije* $\mathcal{F}$ je skup c za koji $c \cap x$ predstavlja singlton za sve $x \in \mathcal{F}$. ▲

Teorema 5.8. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna u* **ZF***:*

(1) *Aksioma izbora* **(AC)**.

(2) *Svaka familija nepraznih međusobno disjunktnih skupova ima funkciju izbora.*

(3) *Svaki skup se može dobro urediti.*

(4) $(\forall u)(\exists \alpha \in ON)(\exists g)(Fun(g) \wedge dom(g) = \alpha \wedge u \subset im(g))$.

Dokaz. (1) $\rightarrow$ (2): Neka je data proizvoljna familija nepraznih skupova $\mathcal{F}$. Definišemo skup $\mathcal{F}^* := \{\{x\} \times x : x \in \mathcal{F}\}$. Dakle, na osnovu (1) za familiju $\mathcal{F}^*$ postoji izborni skup c^*. Ako je $c^* = \{(x, c_x) : x \in \mathcal{F}\}$, onda je funkcija izbora data sa $f(x) = c_x$, za $x \in \mathcal{F}$.
(2) $\rightarrow$ (1): Neka je $\mathcal{F}$ disjunktna familija nepraznih skupova. Ako je f funkcija izbora familije $\mathcal{F}$ onda $c := \{f(x) : x \in \mathcal{F}\}$ predstavlja izborni skup date familije. Zaista za proizvoljno $x \in \mathcal{F}$ postoji tačno jedan skup $y = f(x) \in x$ i važi $y \in c$, a samim tim i $y \in c \cap x$, gde je y jedinstveno.
(2) $\leftrightarrow$ (3): Videti u [6].
(3) $\rightarrow$ (4): Neka je u proizvoljan skup. Tada postoji dobro uređenje $<$ na tom skupu. Na osnovu **Teoreme 2.8.** postoji ordinal α tako da je $(u, <) \cong (\alpha, \in)$. Iz ovog izomorfizma imamo i traženu funkciju g.
(4) $\rightarrow$ (2) : Neka je $\mathcal{F}$ familija nepraznih skupova, tada postoji ordinal α i funkcija g za koju važi $dom(g) = \alpha$ i $\bigcup \mathcal{F} := u \subset im(g)$. Funkciju izbora f konstruišemo sa

$$(t, s) \in f \leftrightarrow s \in t \wedge t \in \mathcal{F} \wedge (\exists \alpha_0 \in \alpha)(g(\alpha_0) = s)$$
$$\wedge (\forall \beta \in \alpha)(g(\beta) \in t \rightarrow \alpha_0 \leq \beta).$$

Dakle, $f(t) = g(\alpha_0)$, gde je α_0 najmanji elemenat skupa $\{\beta \in \alpha : g(\beta) \in t\}$. ■

Pokazaćemo $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (4)$. Znamo da je **(AC)** nezavisna od **ZF** aksioma. Međutim, kao i u prošloj glavi, mi zapravo pokazujemo da iz $\mathbf{V} \models \mathbf{AC}$ sledi i $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (4)$. U sledećim redovima „punimo” Bulovski univerzum stvarima potrebnim za dokaz četvrte tačke prošlog tvrđenja.

Definicija 5.4. Za sve $x, y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ definišemo:

(a) *Singlton u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, u oznaci $\{x\}^{\mathbf{B}}$, sa

$$dom(\{x\}^{\mathbf{B}}) := \{x\} \quad \text{i} \quad im(\{x\}^{\mathbf{B}}) := \{\mathbf{1}\};$$

(b) *Neuređeni par u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, u oznaci $\{x, y\}^{\mathbf{B}}$, sa

$$dom(\{x, y\}^{\mathbf{B}}) := \{x, y\} \quad \text{i} \quad im(\{x, y\}^{\mathbf{B}}) := \{\mathbf{1}\};$$

(c) *Uređeni par u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, u oznaci $(x, y)^{\mathbf{B}}$, sa

$$(x, y)^{\mathbf{B}} := \{\{x\}^{\mathbf{B}}, \{x, y\}^{\mathbf{B}}\}^{\mathbf{B}}.$$

▲

Elementi definisani u prethodnoj definiciji odgovaraju svojim imenima. Kao što smo u prethodnoj glavi pokazivali da je $\|\hat{0} = \emptyset^{\mathbf{B}}\| = \mathbf{1}$ tako i ovde imamo

Teorema 5.9. *Za sve* $x, y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ *važi:*

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall t)(t \in \{x\}^{\mathbf{B}} \leftrightarrow t = x), \\ (2) & \mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall t)(t \in \{x, y\}^{\mathbf{B}} \leftrightarrow t = x \vee t = y), \\ (3) & \mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall t)(t \in (x, y)^{\mathbf{B}} \leftrightarrow t \in (x, y)), \end{array}$$

skraćeno $\|\{x\}^{\mathbf{B}} = \{x\}\| = \|\{x, y\}^{\mathbf{B}} = \{x, y\}\| = \|(x, y)^{\mathbf{B}} = (x, y)\| = \mathbf{1}$.

Dokaz. Tvrđenje (2) je zapravo aksioma para koju smo pokazali. (3) sledi direktno iz (1) i (2). Pokažimo (1). Ako je $t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ proizvoljno uzeto, onda

$$(*): \quad \|t \in \{x\}^{\mathbf{B}}\| = \bigvee_{s \in dom(\{x\}^{\mathbf{B}})} (\{x\}^{\mathbf{B}}(s) \wedge \|s = t\|) = \|t = x\|.$$

Iz $(*)$ imamo $\|t \in \{x\}^{\mathbf{B}} \leftrightarrow t = x\| = \mathbf{1}$, a iz ovoga dobijamo (1). ■

Podsetimo se da za sve $x, y, x', y' \in \mathbf{V}$ važi:

$$(x, y) = (x', y') \leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Kako je ova ekvivalencija teorema **ZF** teorije, to na osnovu tvrđenja 5.7. imamo njenu istinitost i u univerzumu $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Dakle, za sve $x, y, x', y' \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ važi

$$\|(x, y) = (x', y')\| = \|x = x'\| \wedge \|y = y'\|.$$

Zbog prethodne teoreme znamo da $(x, y)^{\mathbf{B}}$ predstavlja uređeni par u $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$, pa sledi

$$(\S): \quad \|(x, y)^{\mathbf{B}} = (x', y')^{\mathbf{B}}\| = \|x = x'\| \wedge \|y = y'\|.$$

Drugačije zapisano

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (x, y)^{\mathbf{B}} = (x', y')^{\mathbf{B}} \leftrightarrow \mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models x = x' \wedge y = y'.$$

Na 25. strani smo rečenicu „x je ordinal” preveli na jezik teorije skupova. Neka je $Ord(x)$ formula koja označava taj prevod. Vidimo da je $Ord(x)$ vezana formula, pa na osnovu **Teoreme 5.6.**(2) imamo

$$Ord(\alpha) \leftrightarrow \mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models Ord(\hat{\alpha}).$$

Na osnovu **Teoreme 5.5.**(2) za sve $\alpha, \beta \in ON$ važi

$$\alpha = \beta \leftrightarrow \|\hat{\alpha} = \hat{\beta}\| = \mathbf{1}.$$

Teorema 5.10. *Aksioma izbora* **(AC)** *je tačna u* $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$*:*

$$\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models (\forall u)(\exists \alpha)(\exists f)(Fun(f) \wedge Ord(\alpha) \wedge dom(f) = \alpha \wedge u \subset im(f)).$$

Dokaz. Neka je $u \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ proizvoljno. Kako je $dom(u)$ skup, to na osnovu aksiome izbora za univerzum $\mathbf{V}$, postoji ordinal α i funkcija g takva da važi $dom(g) = \alpha$ i $dom(u) = im(g) \subset \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$.

Definišemo $f \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ sa formulom

$$f := \{(\hat{\beta}, g(\beta))^{\mathbf{B}} : \beta < \alpha\} \times \{\mathbf{1}\}.$$

Funkcija f zadovoljava sve potrebne uslove:

(1): $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models$ „f je binarna relacija.”

Zaista, ako je $t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ takvo da $t \in f$, onda imamo

$$\begin{aligned} \|t \in f\| &= \bigvee_{z \in dom(f)} (f(z) \wedge \|z = t\|) = \bigvee_{\beta < \alpha} (\mathbf{1} \wedge \|t = (\hat{\beta}, g(\beta))^{\mathbf{B}}\|) \\ &\leq \bigvee\{\|t = (x, y)^{\mathbf{B}}\| : x, y \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}\} = \|(\exists x)(\exists y)(t = (x, y))\|, \end{aligned}$$

jer važi $\{z : z \in dom(f)\} = \{(\beta, g(\beta))^{\mathbf{B}} : \beta < \alpha\}$.

(2): $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models Fun(f)$.

Zbog (1) dovoljno je pokazati $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models \mathcal{J}ed(f)$ (funkcija je dobro definisana). Neka su $t, s_1, s_2 \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ proizvoljno uzeti. Na osnovu **Teoreme 5.9.**, definicije $\|\cdot \in \cdot\|$ i funkcije f, beskonačnih distrubitivnih zakona, činjenice (§), **Teoreme 5.2.**(4) i **Teoreme 5.5.**(2) (zapravo njene posledice $x \neq y \leftrightarrow \|\hat{x} = \hat{y}\| = \mathbf{0}$) imamo

$$
\begin{aligned}
&\|(t, s_1) \in f \wedge (t, s_2) \in f\| = \|(t, s_1)^{\mathbf{B}} \in f\| \wedge \|(t, s_2)^{\mathbf{B}} \in f\| \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} (\|(t, s_1)^{\mathbf{B}} = (\hat{\beta}, g(\beta))^{\mathbf{B}}\| \wedge \|(t, s_2)^{\mathbf{B}} = (\hat{\gamma}, g(\gamma))^{\mathbf{B}}\|) \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} (\|t = \hat{\beta}\| \wedge \|t = \hat{\gamma}\| \wedge \|s_1 = g(\beta)\| \wedge \|s_2 = g(\gamma)\| \\
&\leq \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\alpha} (\|\hat{\beta} = \hat{\gamma}\| \wedge \|s_1 = g(\beta)\| \wedge \|s_2 = g(\gamma)\|) \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha} (\|s_1 = g(\beta)\| \wedge \|s_2 = g(\beta)\|) \leq \|s_1 = s_2\|.
\end{aligned}
$$

(3): $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models Ord(\hat{\alpha}) \wedge dom(f) = \hat{\alpha}$.

Pre formulacije ove teoreme već smo opravdali tačnost tvrđenja $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models Ord(\hat{\alpha})$. Ostaje da se pokaže $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models dom(f) = \hat{\alpha}$. Za proizvoljno $t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$ zaključujemo

$$
\|t \in dom(f)\| = \|(\exists s)(t, s) \in f\| = \bigvee_{s \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|(t, s) \in f\|
$$

$$
\bigvee_{s \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \bigvee_{\beta<\alpha} \|(t, s) = (\hat{\beta}, g(\beta))\| = \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{s \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} (\|t = \hat{\beta}\| \wedge \|s = g(\beta)\|)
$$

$$
= \bigvee_{\beta<\alpha} \|t = \hat{\beta}\| = \bigvee_{\beta \in dom(\hat{\alpha})} \|t = \beta\| = \|t \in \hat{\alpha}\|.
$$

(4): $\mathbf{V}^{(\mathbf{B})} \models u \subset im(f)$.

Neka je $s \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}$. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
\|s \in u\| &= \bigvee_{v \in dom(u)} (u(v) \wedge \|s = v\|) \leq \bigvee_{\beta<\alpha} \|s = g(\beta)\| \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha} (\|s = g(\beta)\| \wedge \bigvee_{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|\hat{\beta} = t\|) \\
&\bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|(t, s) = (\hat{\beta}, g(\beta))\| \\
&= \bigvee_{t \in \mathbf{V}^{(\mathbf{B})}} \|(t, s) \in f\| = \|(\exists t)(t, s) \in f\| = \|s \in im(f)\|.
\end{aligned}
$$

■

Literatura

[1] John L. Bell
Boolean-Valued Models and Independence Proofs,
Clarendon Press, Oxford, 2005.

[2] Steven Givant, Paul Halmos,
Introduction to Boolean Algebras [103.],
Springer-Verlag, New York, 2009.

[3] Thomas Jech,
Set Theory, The Third Milenium Edition
Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[4] Anthony Collins Klug,
Some Theory of Boolean Valued Models, Master Thesis,
The University Of British Columbia, 1974.

[5] Sabine Koppelberg,
Part I: General Theory of Boolean Algebars
Handbook of Boolean algebars, volume 1,
North-Holland, Amsterdam, 1989.

[6] Kenneth Kunnen,
The Fundations of Mathematics,
Individual author and College Publications, London, 2009.

[7] Kenneth Kunnen,
Set Theory, An Introduction to Independence Proofs
North-Holland, Amsterdam, 1980.

[8] A.G. Kusraev, S.S. Kutateladze
Boolean Valued Analysis,
Kluwer Academic Publishers, 1999.

[9] Azriel Levy,
Basic Set Theory, Prerađeno izdanje iz 1979.
Dover Publications, Mineola, 2002.

[10] Yuri. I. Manin,
A Course in Mathematical Logic for Mathematicians, Second Edition
Springer-Verlag, New York, 2010.

[11] Elliott Mendelson
Introduction to Mathematical Logic, Second Edition
D. van Nostrand company, New York, 1979.

[12] Don Monk,
Notes on Advanced Set Theory, Beleške preuzete sa sajta ovog profesora,
The University of Colorado

[13] Aleksandar Perović, Aleksandar Jovanović,
Boban Veličković,
Teorija Skupova,
Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[14] J. Barkley Rosser
Logic for mathematicians
McGraw-Hill book company, New York, 1953.

[15] Joseph R. Shoenfield
Mathematical Logic [41. - 42.],
Addison-Wesley publishing company, Massachusetts, 1967.

[16] Gaisi Takeuti, Wilson M. Zaring,
Axiomatic Set Thory,
Springer-Verlag, New York, 1971.

Biografija

Miloš Kuljić je rođen u 15. aprila 1987. godine u Somboru. Detinjstvo provodi u Bačkom Brestovcu, gde završava i osnovnu školu „Nikola Tesla”, 2001. godine. Iste godine upisuje se u matematičko odelenje Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu, koju završava 2006. godine. Na Departman za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu upisuje se 2006. godine. Leta 2011. godine završava osnovne studije na smeru „profesor matematike” sa prosečnom ocenom 9,22. Iste, 2011. godine, upisuje master akademske studije na matičnom fakultetu, usmerenje: „master-profesor matematike”. Krajem februara 2014. godine polažio je poslednji ispit na master studijama i time stekao uslov za odbranu ovog rada.

Novi Sad, septembar 2014. godine Miloš Kuljić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Miloš Kuljić
AU

Mentor: prof. dr Milan Grulović
MN

Naslov rada: Bulovsko vrednosni modeli
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2014
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5, 104, 24, 2, 0, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička logika, Teorija skupova
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Bulovsko vrednosni model, Rasiowa-Sikorski teorema, **B**-vrednost, **B**-struktura, Bulovsko vrednosni univerzum, dobro-zasnovana relacija, skupu-slična relacija, transfinitna rekurzija, ordinal, klasa, ultrafilter, Bulova algebra, teorija skupova, **ZFC**, **ZF**, **AC**
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi definisanjem Bulovsko vrednosnih modela proizvoljnog jezika prvoga reda. Takođe, data je primena na teoriji skupova koja je formalizovana u okviru predikatskog računa. Dokazano je važenje svih aksioma **ZFC**-a u Bulovsko vrednosnom smislu kao i aksioma logike prvoga reda sa jednakošću.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Milan Grulović, redovni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Boris Šobot, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Miloš Kuljić
AU

Mentor: Milan Grulović, Ph.D.
MN

Title: Boolean valued models
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2014
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5, 104, 24, 2, 0, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical Logic, Set Theory
SD

Subject/Key words: Boolean valued model, Rasiowa-Sikorski lemma, **B**-value, **B**-structure, Boolean valued univers, well-founded relation, set-like relation, transfinite recursion, ordinal, class, ultrafilter, Boolean algebra, set theory, **ZFC**, **ZF**, **AC**
SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
This thesis deals with defining Boolean-valued models of any first-order language. We give application of defined notion on set theory which is formalised through first-order language. It was shown that all of the axioms of **ZFC** and predicate logic are true in Boolean-valued sense.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
Member:	Dr Milan Grulović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
Member:	Dr Boris Šobot, teaching assistant, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad