



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



МАСТЕР РАД:

ХОМОГЕНЕ И НЕХОМОГЕНЕ КООРДИНАТЕ У ПРОЈЕКТИВНОЈ ГЕОМЕТРИЈИ

Ментор: проф. др Невена Пушић

Кандидат: Милорад Ероп

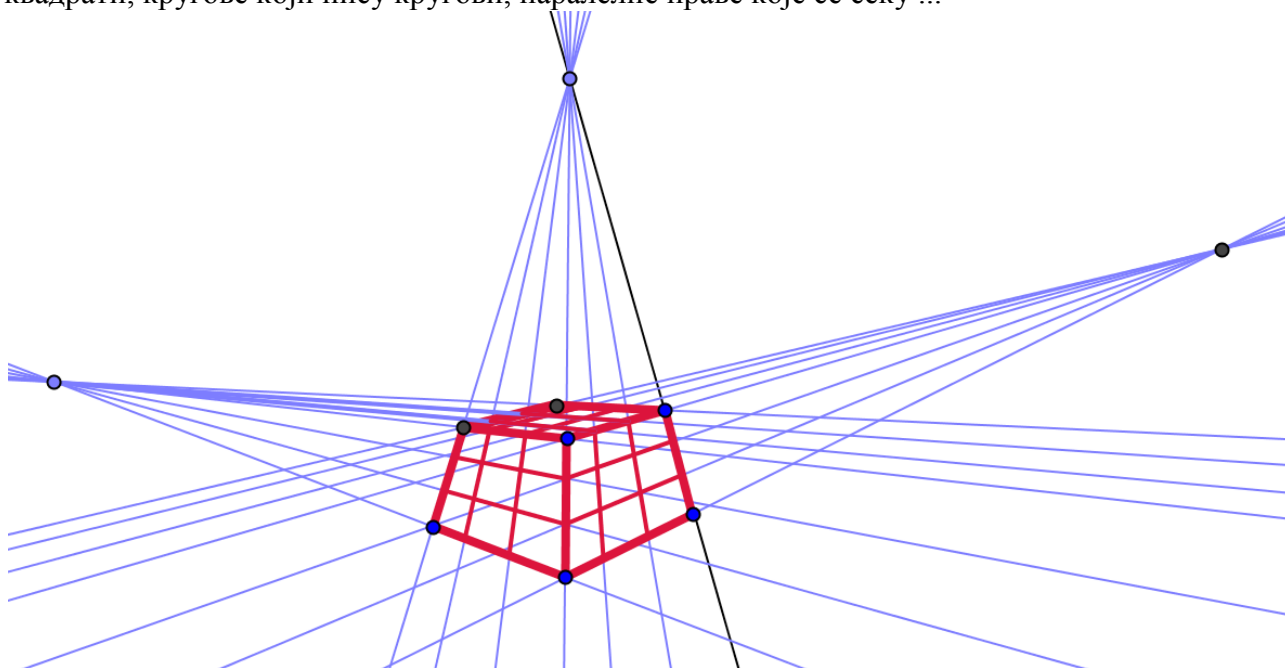
Нови Сад, 2014.

Садржај

Предговор	3
1. Увод	6
1.1. Историја пројективне геометрије.....	6
1.2. Преглед дефиниција и теорема пројективе геометрије.....	8
2. Једнодимензионе многострукости	12
2.1. Координатизација пројективне праве.....	12
2.2. Геометријски опис стандардних алгебарских операција.....	14
2.3. Хомогене координате тачке.....	18
2.4. Дворазмера.....	19
3. Дводимензионе многострукости	26
3.1. Настанак пројективне равни.....	26
3.2. Нехомогене координате тачака и правих у пројективној равни.....	27
3.3. Услов да тачка припада правој.....	32
3.4. Хомогене координате тачака и правих у пројективној равни.....	35
3.4.1. Хомогене координате тачака.....	35
3.4.2. Хомогене координате правих.....	41
3.4.3. Услов да тачка припада правој.....	47
3.4.4. Права одређена двама тачкама и тачка одређена двама правама	49
3.4.5. Услов колинеарности тачака и конкурентности правих.....	51
3.5. Аналитички доказ Дезаргове теореме	54
3.6. Трансформације координата	56
4. Тродимензионе многострукости	61
4.1. Настанак пројективног простора.....	61
4.2. Нехомогене координате тачака и равни у пројективном простору.....	62
4.3. Услов да тачка припада равни.....	65
4.4. Хомогене координате тачака и равни у пројективном простору.....	67
4.4.1. Хомогене координате тачака.....	67
4.4.2. Хомогене координате равни.....	70
5. Барицентричне координате.....	74
6. Plücker - ове координате праве.....	79
Закључак	84
Литература	85
Биографија	86

Предговор

Пројективна геометрија је свуда присутна. Када гледамо слику видимо квадрате који нису квадрати, кругове који нису кругови, паралелне праве које се секу ...



У еуклидској равни постоје праве које се не секу и које зовемо паралелним правама, у пројективној равни се сваке две праве секу у једној тачки. За паралелне праве у пројективној геометрији кажемо да се секу у бесконачности. Разбија се предрасуда да бесконачност не постоји и изграђује се тако што се еуклидској равни додају ове бесконачне тачке у којима се паралелне праве секу и решавамо проблем са бесконачношћу тако што ћемо ове тачке звати идеалним тачкама или сингуларним. Тако се еуклидска равна претвара у нови тип геометријског објекта који ћемо назвати пројективна равна. Слично, додавањем сингуларних тачака у еуклидски простор градимо пројективни простор. Логично је да се запитамо да ли се сви објекти који су до сада дефинисани могу пренети у новодобијени пројективни простор и, ако је могуће, да ли ће у њему важити особине и релације које су важиле у обичном простору.

Многи математичари су својим радом показали да тај нови, мистериозни простор није ништа друго до проширење еуклидског простора у коме се чак и две паралелне равни секу. Пошто ће се у раду углавном говорити о координатама почев од представљања тачака на правој и жељи да се свакој тачки придружи неки број, затим да се на аналитички начин прикаже када нека тачка припада некој правој, ред би био да се осврнемо мало и на координате бар кад је реч о основним геометријским елементима. Познато је да је тачка у еуклидској равни представљена као уређен пар реалних бројева. Ми том пару додајемо још једну координату и договоримо се да та тројка представља исту тачку. Нека је додата трећа координата и оно што је интересно у целој причи је да се ми можемо кретати из једног у други начин представљања тачке додавањем или уклањањем те треће координате. Затим, ако се све три координате помноже истим бројем различитим од нуле, добија се иста тачка и видимо да је тачка у потпуности одређена чак ако нису ни дате њене координате већ само њихова размера. Такве координате тачке се називају хомогеним. Видели смо да је у равни која представља простор димензије два свака тачка представљена са три хомогене координате, у простору димензије три тачка ће бити представљена са четири хомогене координате, и тако се може урадити за простор било које димензије. Па према томе, еуклидски простор димензије n се може проширити у пројективни простор исте димензије у којем ће тачке бити представљене са $n+1$ хомогених координата. У пројективном простору димензије два

бесконачне тачке образују бесконачну праву, а у три димензије бесконачну раван која се још зове и идеална или сингуларна раван. Ти сингуларни елементи су ипак на неки начин посебни и остају очувани приликом примене афине трансформације, а у сваком другом контексту се не разликују од других тачака. Видели смо начин изградње пројективног простора из еуклидског додавањем сингуларних елемената. Међутим, хајде да посматрамо пројективни простор из тог угла тако да њему још увек није придружен ниједан координатни оквир. У таквом простору бесмислено је, рецимо, говорити о паралелности правих пошто се оне секу у бесконачној тачки, али која тачка је бесконачна када су све тачке у почетку разматрања равноправне и нипочему се не разликују; да би прича ипак добила неки смисао, ми одаберемо неку праву и кажемо да је баш та права бесконачна права и да се састоји искључиво од бесконачних тачака. Узмемо празан папир и нацртамо праву линију и изградимо пројективни простор. Даље, нацртамо две праве које се секу на овој посебној правој. Пошто се секу у бесконачној тачки, дефинишемо да су те две праве међусобно паралелне. Слично важи и за две равни које се секу на сингуларној равни, како је њихов пресек сингуларна права кажемо да су паралелне. Према томе, геометрија пројективне равни без издвојене праве је позната као афина геометрија, а произвољно пројективно пресликавање које сингуларну праву једне равни пресликава на сингуларну праву друге је познато као афино пресликавање. Користећи појам паралелних правих, можемо да дефинишемо једнакост дужина две дужи на паралелним правима. Нека су A, B, C, D четири тачке и нека су праве AB и CD паралелне, онда дефинишемо да су две дужи AB и CD једнаке дужине, ако су праве AC и BD такође паралелне. Слично, две дужи на истој правој су једнаке дужине, ако постоји нека дуж на паралелној правој која је једнаке дужине са обе. Дакле, када из пројективне геометрије издвојимо сингуларну праву, губимо појам паралелности и добијамо афину геометрију. Када све то занемаримо, видимо да је могуће формирати геометрију без кругова, растојања, углова, паралелности, која се заснива само на неколико претпоставки које су једноставније од Еуклидових али не тако једноставне јер представљају путању од аксиома и „лаганих“ теорема до неочекиваних теорема. Идеја за геометрију ове врсте дошла је од изузетних уметника и архитеката.

У првом поглављу рада описана је координатизација пројективне праве. Да аналитичка метода може бити уведена у геометрију на чисто пројективној основи, први је показао фон Штаут. Оригинална метода фон Штаута је поједностављена модерним истраживањима у основама геометрије. Под једнодимензионим многострукостима се подразумева праволинијски низ тачака и прамен правих. Идеја је да свакој тачки на датој правој доделимо одговарајући број и обрнуто да сваком броју одговара тачно једна тачка праве. Да би од праве настала пројективна права потребно је на њој одабрати три различите тачке које чине репер. Даље, полазећи од те три фундаменталне тачке дефинисане су две једнозначне операције на паровима тачака. То су операције сабирања и множења, а затим су дефинисане њима инверзне операције одузимања и дељења. Конструкцијом четврте тачке у хармонијској групи, сваком рационалном броју смо придружили једну и само једну тачку. Тако смо конструисали скуп тачака који смо назвали скуп рационалних тачака у односу на дати репер. Потом је уведена аксиома непрекидности која омогућава увођење ирационалних тачака, односно тачака које би се придружиле ирационалним бројевима. Тако је уведена пројективна координата тачке што није ништа друго до број придружен тачки дате праве у односу на утврђен репер. Затим је дефинисан апстрактни концепт бројног система и уведена је дефиниција групе. Два бројна система су изоморфна ако произвољни низови операција примењени на бројеве једног система и исти низ операција примењен на одговарајуће бројеве другог дају резултате који су у кореспонденцији. Тачке на правој на којој је утврђен репер задовољавају услове из дефиниције бројног система, тако да се тачке могу сада посматрати сасвим другачије и то као бројеви бројног система. На тај начин је свака тачка праве означена бројем. Ти бројеви представљају нехомогене координате тачке. То омогућава да различите релације између тачака изразимо помоћу једначина између њихових

координата. На основу принципа дуалитета алгебра тачака на правој је само репрезентативна и може се пренети на алгебру елемената на произвољној једнодимензионој многострукости. Уведена је и дворазмера која претходи увођењу хомогених координата које су инваријантне у односу на произвољно пројективно пресликавање.

У другом поглављу рада описана је координатизација пројективне равни. Аналитичком представљању тачака и правих у равни предстоји одабир (на произвољан начин) две различите праве у тој равни које смо назвали координатним осама и које се секу у тачки такозваној координатни почетак. На свакој координатној оси смо означили фундаменталне тачке које чине репер. Свака тачка равни се може пројектовати и на једну и на другу осу и добијају се два броја. Та два броја јединствено одређују и јединствено су одређени датом тачком. Управо описана два броја који одређују дату тачку зову се нехомогене координате те тачке у односу на репере на осама. Користећи принцип дуалитета у равни добија се аналитичка репрезентација праве у равни. У ту сврху су дефинисани координатни центри, тј. произвољне две различите тачке у равни, аналогно у сваком прамену правих са овим центрима одређујемо репер произвољно. Описан је поступак увођења нехомогених координата за сваку тачку у равни и за сваку праву у истој равни. Истовремено су дефинисани и центри и осе да би се аналитички могло приступити разним проблемима и да бисмо могли утврдити када нека тачка припада датој правој а када не. У ту сврху је дефинисан и референтни троугао. Да би се избегао посебан карактер сингуларних елемената, пар нехомогених координата је замењен тројком хомогених координата. Систем хомогених координата смо пренели на раван на исти начин као код једнодимензионих многострукости. Дефинисан је референтни оквир координатног система. Дефинисан је и потребан и довољан услов у систему хомогених координата тачке и праве у равни који нам одговара на питање када тачка припада правој. Уведена је и једначина праве и једначина тачке, односно ако су дате две тачке може се одредити једначина праве која их спаја и дуално за праве могу се одредити координате свих правих датог прамена.

У трећем поглављу рада описана је координатизација пројективног простора димензије три. Координате тачке у простору уведене су на потпуно аналоган начин увођењу координата тачке у равни. Свака тачка која не припада сингуларној равни координатног система одређује и одређена је са три нехомогене координате. Дуални процес даје координате равни. Координате тачке и равни су стављене у погодну релацију, као што је то урађено у случају координата тачке и праве у равни. У овом систему координата изведен је и услов да тачка припада равни. Четири произвољне тачке чине референтни тетраедар, док увођењем још једне тачке, тих пет тачака чине референтни оквир система хомогених координата. Тако је свака тачка у простору представљена са четири хомогене координате, тј. уређене четворке која је инваријантна до на производ са константом различитом од нуле. Користећи принцип дуалитета, уведене су и хомогене координате равни у простору. Стављајући ове системе координата тачке и равни у одговарајућу релацију, лако смо извели потребан и довољан услов да тачка припада равни.

У четвртном поглављу описане су Plücker - ове координате праве у равни. Свака права одређена са две тачке представљена је са шест бројева. Уређена шесторка бројева представља Plücker - ове координате праве којима су придружене многобројне особине. Дат је потребан и довољан услов пресека две праве.

У петом поглављу описане су барицентричне координате. Möbius је први увео барицентричне координате у својој књизи *The barycentric calculus*. Да би се увеле барицентричне координате тачке било је неопходно дефинисати меру троугла као и појам паралелних правих, односно правих које се секу у сингуларној тачки.

1. Увод

1.1. Историја пројективне геометрије

Пројективна геометрија добија коначан облик као независна дисциплина у првој половини деветнаестог века. Међутим, много раније, у књигама сликара и архитеката, развијени су многи пројективни концепти.

У седамнаестом веку, Дезарг (1593-1662) развија бројне важне теореме које се односе на пројективне особине фигура, мада предмет пројективне геометрије као такве није сасвим био дефинисан у његовим радовима. По професији је био инжењер и архитекта. 1636. издаје дело о перспективи, али већина његових истраживања су угледала светлост дана у делу *Brouillon proiect on conics (објављеном 1639.)*. Дезарг почиње да развија принцип непрекидности тврдећи да се крајње тачке супротних страна праве линије поклапају, паралелне праве да се секу у бесконачној тачки, паралелне равни се секу у бесконачности, права линија се може посматрати као круг чији је центар у бесконачности. Утицај Дезаргових предавања на Декарта, Паскала и друге Французе који су се бавили геометријом је био велики. Али предмет пројективне геометрије је брзо пао у заборав првенствено што је Декартова аналитичка геометрија била много снажнија метода за доказивање и откривање многих законитости. Дезаргова истраживања су послужила многим математичарима да траже нове методе у истраживању, да проширују постојеће концепте у геометрији.

После Дезарга није било значајног прогреса у проучавању пројективних особина више од једног и по века. Нови прогрес у овој теми дешава се почетком деветнаестог века, што је у блиској вези са каријером Gaspard Monge-a (1746-1818). Његова дескриптивна геометрија је оживела интересовање за синтетичке методе и привукла пажњу на пројективне методе. Lazare Carnot, Charles Brianchon, Jean Poncelet, Joseph Gergonne, Michel Chasles су значајно допринели развоју пројективне геометрије тако што су присуствовали предавањима Monge-a у Ecole Polytechnique у Паризу. Ова предавања су објављена 1800. у облику текстуалне књиге назване *Geometrie descriptive*. Ово дело обухвата извођење закључака о облику и позицији геометријских фигура користећи трансверзале. Разматрао је теорију перспективе. Дело обухвата уметност представљања у две димензије тродимензионих објеката, проблеме које је Монж обично решавао користећи два дијаграма. Међу његовим резултатима су и његово решење парцијалне диференцијалне једначине другог реда.

Lazare Carnot (1753-1823) је био математичар који је издао три књиге из геометрије у којима је увео неке идеје и концепте који су били битни за настанак пројективне геометрије. Значајно је напоменути да је он први увео дворазмеру четворке тачака на правој, а затим је доказао да је дворазмера инваријантна за четири тачке добијене сечењем четири праве истог прамена произвољном сечицом. 1803. је написао дело *Geometrie de Position*. Ово дело обухвата дискусију о геометријском значењу негативних корена у алгебарским једначинама.

Poncelet (1788-1867) је дао прву дефиницију пројективне геометрије као проучавања пројективних особина фигура и систематично излагање основних принципа и теорема које се

на њих односе. Интересовао се за проблеме пројективне геометрије, несумњиво због утицаја Монжа, чији је био студент. Својим делом *Traite des proprietes projectives des figures* оставио је веома јак утисак на све који су се бавили геометријом и наслов тог дела доводи до израза пројективна геометрија који се и данас користи. Дуго времена је то била једна од најпознатијих текстуалних књига модерне геометрије. Са значењем пројекција, реципрочне вредности, хомологе фигуре развио је све главне особине кривих другог реда. Бавио се и теоријом полигона. Објавио је бројне чланке у Crelle-вом журналу. Највреднији од свих баве се објашњењем имагинарних решења у геометријским проблемима помоћу принципа непрекидности. Посебну пажњу је посветио пројективним особинама које остају очуване након примене пројективног пресликавања. Предмет проучавања пројективне геометрије је захваљујући њему окарактерисан са синтетичком методом.

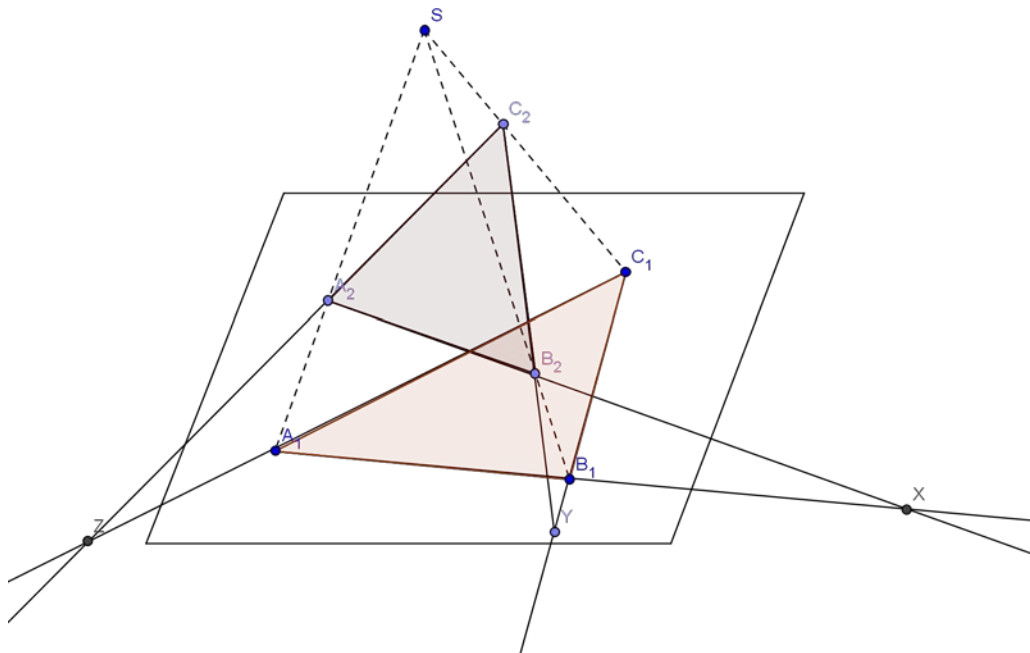
Julius Plücker (1801-1868) пореклом из Елберсфелда, студирао је на универзитетима Бона и Париза и своју докторску дисертацију је одбранио у Бону 1825. 1834. напушта место професора Универзитета у Берлину, јер је био подвргнут нападима Штајнерових ученика, који су бранили чисто синтетички метод. 1836. године почиње да ради на два департмана у Бону, математици и физици. Дошао је до значајних резултата, нарочито у геометрији. Мада су његова истраживања у почетку била базирана на синтетичкој методи, од 1828. почиње да развија свој „аналитичко-геометријски метод“. У свом *Analitisch-geometrische Entwicklungen* Plücker уводи хомогене пројективне координате у равни. Са аналитичке тачке гледишта ове координате представљају просто три независне линеарне функције примењене на три Декартове координате тачака, одређене заједничким чиниоцем. Са геометријске тачке гледишта, Plücker је показао да су три броја x_1, x_2, x_3 пропорционална (са произвољним коефицијентом пропорционалности различитим од нуле) растојањима од страна произвољног датог троугла, која је мерио сопственом јединицом мере. Ове координате су постале познатије као триангуларне или трилинеарне координате. Слично, у *System der analitischen Geometrie* Plücker уводи хомогене пројективне координате у тродимензионом простору. Аналитички метод је лакши за рад са бесконачним растојањима и имагинарним елементима и сасвим природно наводи Plücker-а да уведе координате праве, тј. координате праве линије. Разматрајући услов да променљива тачка лежи на фиксираној правој и услов да променљива права пролази кроз фиксирану тачку, Plücker непосредно из симетрије израза у једначини добија оправдање за Poncelet-Gergonne принцип дуалитета. На сличан начин Plücker уводи координате равни у тродимензиони простор и оправдава принцип дуалитета у простору, у којем тачка одговара равни. Са великом вештином је у свом геометријском истраживању примењивао методу скраћене нотације. Заузео је значајно место у развоју теорије алгебарских кривих вишег реда и теорије геометријских трансформација.

Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867.) уводи систем чисте геометрије. У свом делу *Geometrie der Lage* (1847.) конструисао је систем у геометрији изграђен без било каквог односа са бројевима или величинама. Упркос свом апстрактном облику, успео је да развије неметричке пројективне особине фигура, дискутује имагинарне тачке, праве и равни и чак добије геометријску дефиницију броја. Ови ставови су касније разрађени у његовом делу *Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856-1860*. Брилијантност ове геометрије је искористио Culmann као основу своје графичке статике.

1.2. Преглед дефиниција и теорема пројективне геометрије

Дефиниција 1.2.1. Тротеменик је фигура која се састоји од три неколинеарне тачке и три праве које су њима одређене. Наведене тачке су темена тротеменика, а наведене праве су његове стране.

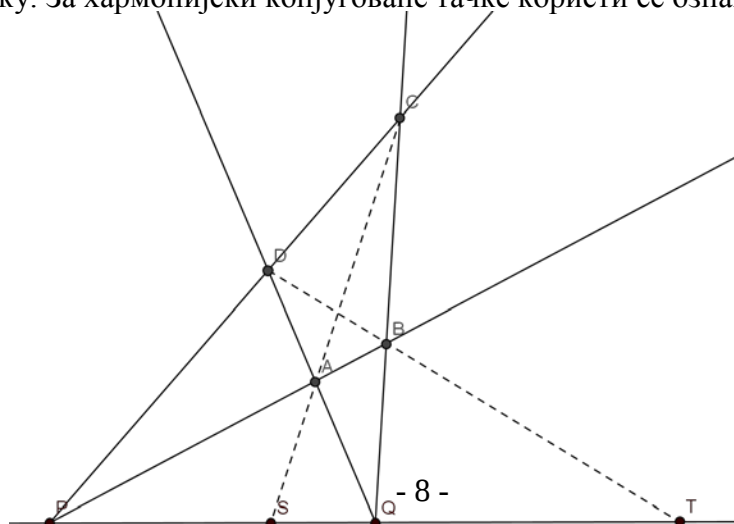
Теорема 1.2.2. (Дезаргова) Ако су праве које спајају одговарајућа темена два тротеменика конкурентне, тачке пресека парова одговарајућих страна су колинеарне.



Слика 1.2.1. Дезаргова теорема

Дефиниција 1.2.3. Потпуни четворотеменик је фигура која се састоји од четири тачке од којих никоје три нису колинеарне и шест правих које су њима одређене. Поменуте тачке су темена четворотеменика, а поменуте праве су његове стране. Пар страна четворотеменика који се не сече у његовом темену је пар његових наспрамних страна. Три пара наспрамних страна потпуног четворотеменика секу се у његовим дијагоналним тачкама.

Дефиниција 1.2.4. Пар тачака P, Q је хармонијски конјугован пару тачака S, T ако постоји потпуни четворотеменик $ABCD$ такав да су P и Q његове дијагоналне тачке, док S и T припадају правој $p(P, Q)$ и оним странама четворотеменика које пролазе кроз трећу дијагоналну тачку. За хармонијски конјуговане тачке користи се ознака $H(P, Q; S, T)$.



Слика 1.2.2. Хармонијски конјуговане тачке

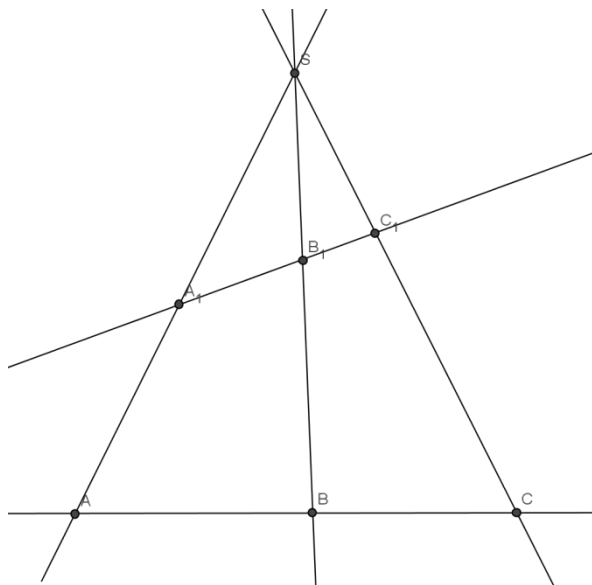
Теорема 1.2.5. Ако су дате три колинеарне тачке P, Q, S , четврта тачка T таква да важи $H(P, Q; S, T)$ је једнозначно одређена.

Теорема 1.2.6. Хармонијска конјугованост парова тачака је узајамна, односно, ако $H(P, Q; S, T)$, онда $H(S, T; P, Q)$.

Дефиниција 1.2.7. (Перспективна пресликавања)

1. Ако је узајамно једнозначна кореспонденција између праволинијских низова тачака са носачима p и p_1 таква да је сваки пар одговарајућих тачака X, X_1 колинеаран са истом тачком S , кажемо да је то перспективно пресликавање са центром S и записујемо

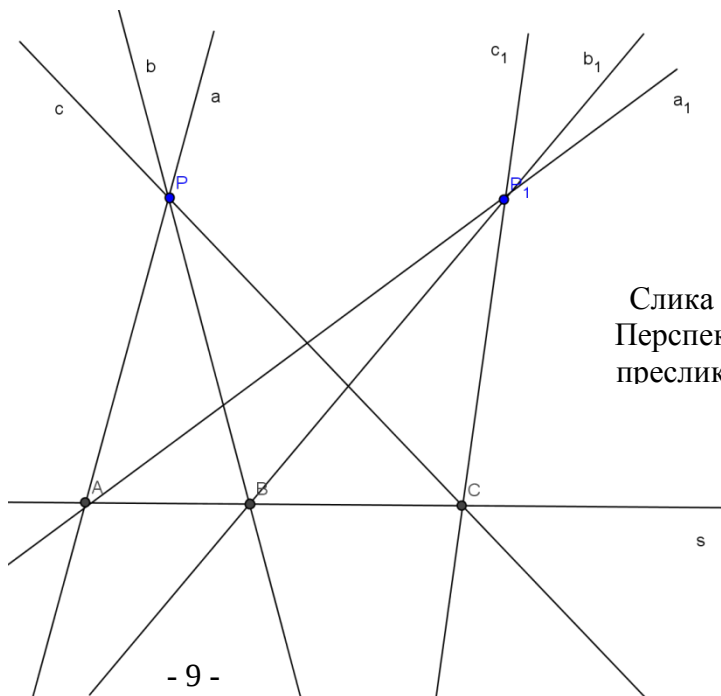
$$p(A, B, C, \dots) \stackrel{S}{\wedge} p_1(A_1, B_1, C_1, \dots).$$



Слика 1.2.3. Перспективно пресликавање

2. Ако је узајамно једнозначна кореспонденција између праменова правих са средиштима P и P_1 , таква да је сваки пар одговарајућих правих x и x_1 конкурентан са истом правом s кажемо да је то перспективно пресликавање са осом s и записујемо

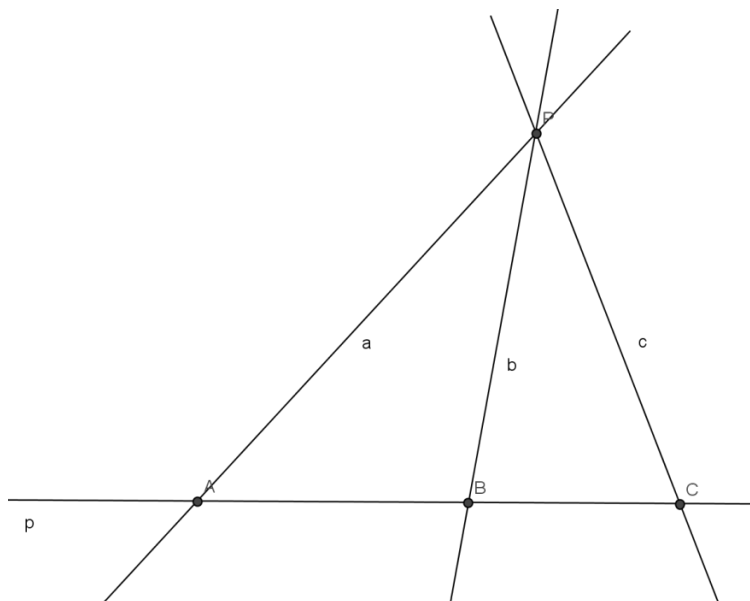
$$P(a, b, c, \dots) \stackrel{s}{\wedge} P_1(a_1, b_1, c_1, \dots).$$



Слика 1.2.4.
Перспективно
пресликавање

3. Ако је узајамно једнозначна кореспонденција између праволинијског низа тачака са носачем p и прамена правих са средиштем P таква да су одговарајући елементи међусобно инцидентни, кажемо да је то перспективно пресликавање и записујемо

$$p(A, B, C, \dots) \stackrel{P}{=} P(a, b, c, \dots).$$



Слика 1.2.5. Перспективно пресликавање

Дефиниција 1.2.8. Једнодимензионе многострукости су праволинијски низ тачака и прамен правих.

Дефиниција 1.2.9. Производ коначног броја перспективних пресликавања једнодимензионе многострукости је пројективно пресликавање једнодимензионе многострукости; производ коначног броја пројективних пресликавања је пројективно пресликавање.

Теорема 1.2.10. (Основна теорема пројективне геометрије) Увек постоји пројективно пресликавање једне једнодимензионе многострукости на другу једнодимензиону многострукост при коме се три задата елемента пресликавају на три задата елемента.

Теорема 1.2.11. Не постоје два међусобно различита пројективна пресликавања која три задата елемента пресликавају на три задата елемента.

Теорема 1.2.12. Пројективно пресликавање једнодимензионе многострукости увек се може приказати као производ два, односно три перспективна пресликавања.

Теорема 1.2.13. Ако при обострано једнозначном пресликавању једнодимензионе многострукости хармонијска конјугованост остаје очувана, то пресликавање је пројективно.

Теорема 1.2.14. За произвољне четири тачке A, B, C, D исте праве постоји пројективно пресликавање $A, B, C, D \mapsto B, A, D, C$.

Теорема 1.2.15. Ако су два праволинијска низа тачака са разним носачима у пројективној кореспонденцији тако да елемент који је инцидентан са оба носача одговара сам себи, то пресликавање је перспективно.

Дефиниција 1.2.16. Дводимензионе многострукости су скуп свих тачака једне равни и скуп свих правих једне равни.

Дефиниција 1.2.17. Обострано једнозначно пресликавање дводимензионе многострукости на дводимензиону многострукост је пројективно ако и само ако оно очувава релацију инциденције.

Теорема 1.2.18. Рестрикција пројективног пресликавања дводимензионе многострукости на једнодимензиону многострукост је пројективно пресликавање једнодимензионе многострукости.

Дефиниција 1.2.19. Колинеација је пројективно пресликавање које не мења природу објеката. Слика тачке овим пресликавањем је тачка, а слика праве је права.

Дефиниција 1.2.20. У општем случају, стране потпуног четворотеменика на датој правој одређују шест тачака A, B, C, D, E, F . Тих шест тачака поделимо у две групе тако да у истој групи не могу бити тачке које на датој правој одређују наспрамне странице четворотеменика и водимо рачуна о редоследу тачака, односно првој тачки у првој групи одговара прва тачка у другој групи и тако редом; парови одговарајућих тачака су парови тачака које на датој правој одређују наспрамне странице четворотеменика. За скуп који се састоји од шест тачака добијених на описан начин користи се ознака $Q(ABC, DEF)$. Уместо шест, стране потпуног четворотеменика на датој правој могу одредити и мање тачака и то уколико права садржи једну или две дијагоналне тачке. У том случају, парови одговарајућих тачака ће се поклапати.

Теорема 1.2.21. Потребан и довољан услов за пројективно пресликавање праве на саму себе. $MNAB \bar{\wedge} MNA_1B_1$ ($M \neq N$) ако и само ако је $Q(MAB, NB_1A_1)$.

Дефиниција 1.2.22. За пар одговарајућих елемената A и A_1 пресликавања π многострукости на саму себе каже се да је двоструко одговарајући (или пар хомологих тачака) ако је $\pi(A) = A_1$ и $\pi(A_1) = A$.

Дефиниција 1.2.23. Пројективно пресликавање једнодимензионе многострукости на саму себе чији је квадрат идентично пресликавање назива се инволуција. Произвољан пар хомологих тачака инволуције зове се конјугован пар тачака инволуције. Јасно је да ако инволуција пресликава тачку A у тачку A_1 , онда такође пресликава и тачку A_1 у A .

Теорема 1.2.24. Ако за једну тачку, рецимо тачку A неке праве, која није двојна тачка пројективног пресликавања π које ту праву пресликава на саму себе важе релације $\pi(A) = A_1$ и $\pi(A_1) = A$, онда је то пресликавање инволуција.

Последица 1.2.25. Инволуција је потпуно одређена са два пара конјугованих тачака.

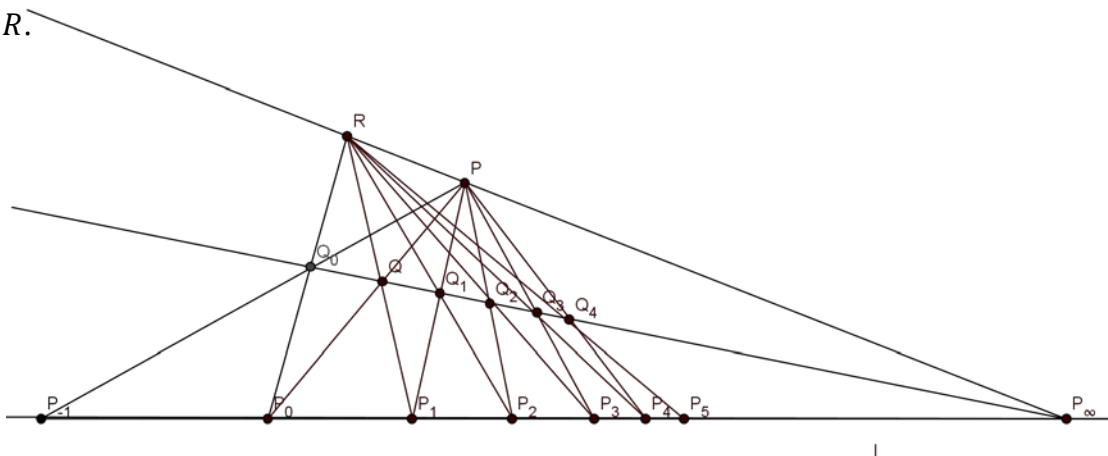
Дефиниција 1.2.26. Под појмом сноп равни дате тачке подразумевамо скуп свих равни у простору које садрже дату тачку.

2. Једнодимензионе многострукости

2.1. Координатизација пројективне праве

Од 1850 до 1856. математичар Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867) објавио је неколико књига са насловом *Beiträge zur Geometrie der Lage*. У тим књигама он је развио пројективну геометрију на чисто аксиоматском нивоу и први увео у геометрију аналитичке методе на чисто пројективној основи. У овом поглављу рада ћемо се упознати са алгебром тачака на правој тако што ћемо научити да сабирамо, одузимамо, множимо и делимо тачке, односно увешћемо геометријску конструкцију која ће описати сваку операцију. Посматраћемо праву као праволинијски низ тачака и свакој тачки на јединствен начин придружити тачно један реалан број. Искористићемо ове чињенице да изведемо многе занимљиве тврдње о структури пројективне праве и пројективном пресликавању.

Нека је дата права l и на њој уочимо три различите тачке и означимо их са P_0, P_1, P_∞ . Сада ћемо извршити координатизацију пројективне праве користећи те фундаменталне тачке. Каже се да фундаменталне тачке на l одређују репер. Дакле, нека је на правој l већ утврђен репер и за почетак ћемо да одредимо тачке које одговарају природним бројевима. Ван праве l , одаберимо тачку P и на правој $p(P_0, P)$ тачку Q . Нека се праве $p(P_1, Q)$ и $p(P_\infty, P)$ секу у тачки R .



Слика 2.1.1.

Нека тачке P_∞ и Q одређују праву l_∞^1 . Даље, нека права $p(P_1, P)$ сече праву l_∞^1 у тачки Q_1 , а нека права $p(R, Q_1)$ сече праву l у тачки P_2 . Описани поступак се може наставити и тако добијамо тачке $P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_i, \dots$; приметимо да свака тачка P_i припада оном одсечку P_0P_∞ којем припада и тачка P_1 . Дакле, независно од избора тачака P и Q , позиције тачака репера једнозначно одређују позиције тачака $P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$. Доделимо сада овом низу новодобијених тачака праве l бројеве. Нека су то индексни бројеви којим је свака добијена тачка означена и тако смо добили тачке којима су додељени природни бројеви. Рецимо тачки P_{21} је придружен број 21.

На сличан начин можемо да дефинишемо и тачке са целобројним негативним координатама. Нека права $p(P_0, R)$ сече праву l_∞^1 у тачки Q_0 , а права $p(P, Q_0)$ сече праву l у тачки P_{-1} . Нека је тачки P_{-1} додељен број -1. Овај поступак може неограничено да се настави на ту страну и при том се добијају тачке којима су додељени цели негативни бројеви. Није тешко уочити да

три узастопне тачке (кад се каже узастопне тачке подразумева се да су то тачке којима су додељена три узастопна цела броја) заједно са тачком P_∞ представљају хармонијски конјуговане тачке, тј. важи $H(P_{i-1}, P_i; P_{i+1}, P_\infty)$. Такође, за тачке којима су придружени цели бројеви који нису узастопни, али је разлика сваке две узастопне тачке исти број, и оне заједно са бесконачном тачком представљају хармонијски конјуговане тачке, односно важи $H(P_{i-m}, P_i; P_{i+m}, P_\infty)$. Пре него што наставимо са конструисањем тачака којима ћемо доделити рационалне бројеве треба приметити да се поступком одређивања тачака са природним индексом тачке згушњавају и приближавају бесконачној тачки, док конструисањем тачака којима додељујемо негативне целобројне координате уочавамо да се оне удаљавају од бесконачне тачке и све више се разређују. Очигледно је да важи $P_i \neq P_j$ за $i \neq j$, јер је принцип увек исти; полази се од три познате тачке и конструише се четврта, која са оне прве три чини хармонијску групу и која има координату за један већу или мању од оне која је последња конструисана.

Прво ћемо разматрати случај одређивања тачака којима ћемо доделити рационалне бројеве облика $\frac{1}{q}$, где је q произвољан цео број. Конструишемо прво тачку P_q којој доделимо број q и тачка $P_{\frac{1}{q}}$ ће бити једнозначно одређена као четврта тачка хармонијске групе тачака P_{-1}, P_1, P_q . И сада ћемо искористити један трик приликом одређивања тачке којој ћемо доделити број $\frac{p}{q}$; пошто знамо да одредимо положај тачке $P_{\frac{1}{q}}$, ми ћемо сада уместо да посматрамо репер P_0, P_1, P_∞ , посматрати репер у коме улогу јединичне тачке игра тачка $P_{\frac{1}{q}}$ и у том новоодређеном реперу пронађемо тачку P_p , и баш ће та тачка бити тражена тачка $P_{\frac{p}{q}}$ у односу на полазни репер P_0, P_1, P_∞ . Дакле, тачке $P_0, P_{\frac{1}{q}}, P_\infty$ одређују тачке $\dots, P_{-\frac{3}{q}}, P_{-\frac{2}{q}}, P_{-\frac{1}{q}}, P_0, P_{\frac{1}{q}}, P_{\frac{2}{q}}, P_{\frac{3}{q}}, \dots$. Скуп конструисаних тачака назива се скуп рационалних тачака пројективне праве у односу на репер P_0, P_1, P_∞ . Управо смо показали да постоји једнозначна кореспонденција између скупа рационалних бројева и скупа рационалних тачака у односу на репер P_0, P_1, P_∞ . А шта је са ирационалним тачкама? Да ли можемо на пројективној правој у односу на утврђени репер одредити тачку чија ће рецимо координата бити $\sqrt{2}$? Сада је време и место да се уведе аксиома непрекидности, која се иначе може формулисати на више еквивалентних начина, али смо се ми ипак одлучили за следећу:

Аксиома непрекидности 2.1.1. ([10]) Кореспонденција између скупа рационалних бројева и скупа рационалних тачака у односу на репер P_0, P_1, P_∞ може се проширити до узајамно једнозначне кореспонденције између скупа свих реалних бројева и скупа свих тачака пројективне праве из којег је искључена тачка P_∞ .

Дакле, свакој тачки одговара број и обрнуто сваком броју одговара јединствена тачка праве. Тачки P_0 одговара број 0, тачки P_1 број 1, а тачки P_a одговара број a . Ако на овај начин посматрамо пројективну праву, тачки P_∞ је придружен фиктивни елеменат ∞ . Придружени бројеви свакој тачки се зову нехомогене координате тачке. Тачка P_x има нехомогену координату x и у даљем раду ћемо ту тачку звати „тачка x “ уместо „тачка чија нехомогена координата је x “.

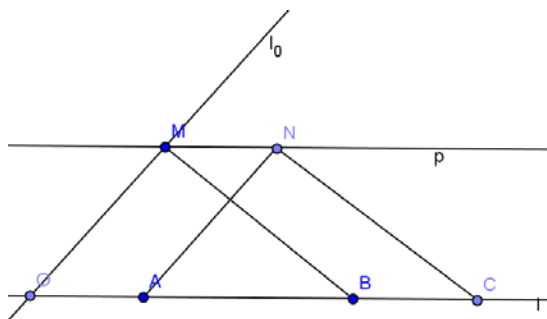
2.2. Геометријски опис стандардних алгебарских операција

У наставку се упознајемо са неколико геометријских конструкција које ћемо применити на две тачке пројективне праве на којој је репер већ одређен. Са свега неколико корака конструкције дефинисаћемо сабирање и множење тачака пројективне праве, а затим уз мале измене и њима инверзне операције одузимања и дељења.

Уочимо на правој l са утврђеним репером P_0, P_1, P_∞ , две тачке и означимо их са A и B . У односу на дати репер тачке A и B респективно имају нехомогене координате a, b . Желимо да конструишемо тачке чије су нехомогене координате $a + b$, $a \cdot b$, $a - b$ и $a : b$. Прво ћемо дефинисати сабирање две тачке, односно тачке која представља њихов збир.

Дакле, на правој l , посматрамо две тачке $A(a)$ и $B(b)$. Пошто смо упознати са координатизацијом пројективне праве можемо одмах да одредимо позицију тачке C чија је нехомогена координата $a + b$. Даље, позицију те тачке покушаћемо да опишемо на неки једноставан геометријски начин. Јасно је да та геометријска конструкција мора да важи за било које две тачке пројективне праве. Посао нам је олакшан тиме што имамо решење и знамо коју тачку треба да добијемо.

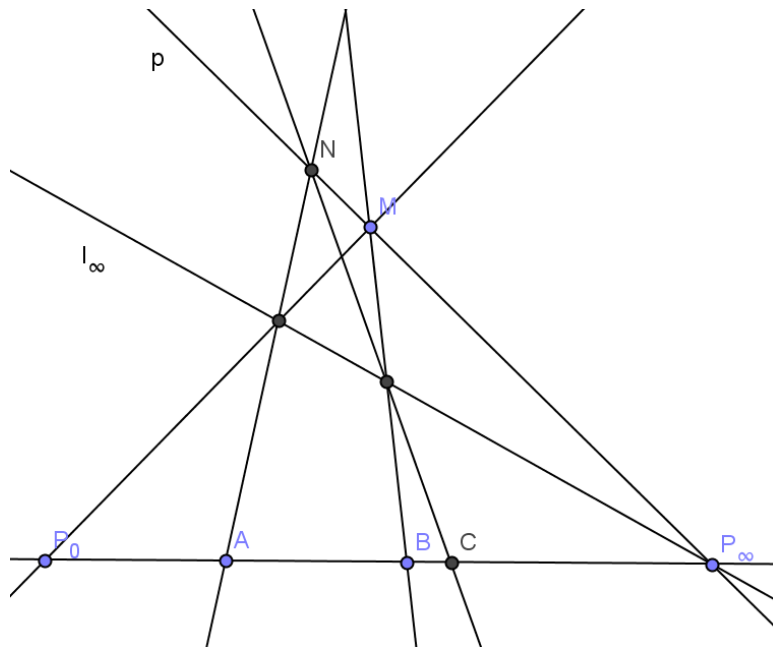
Прво ћемо видети како је тај проблем решен на обичној правој у Еуклидовој равни. Код тачке $A(a)$ број a представља само растојање те тачке од тачке O , односно координатног почетка. Транслирањем дужи OA дуж те праве, тако да се тачка O поклопи са тачком B , новодобијени положај тачке A одређује тачку $C(a + b)$.



Слика 2.2.1.

Нека је p права паралелна са правом l . Нека је l_0 произвољна права кроз тачку O различита од праве l . Нека права кроз A паралелна са l_0 одређује на правој p тачку N и нека је $p \cap l_0 = \{M\}$. Права кроз N паралелна са MB сече праву l у траженој тачки C .

Како је пројективна права екстензија *обичне* праве којој је додата једна тачка и проглашена за фиктивни елеменат, покушаћемо да исту идеју искористимо и у пројективној геометрији и на сличан начин дефинишемо сабирање. Улогу паралелне праве за праву l играће произвољна права која садржи бесконачну тачку. Морамо дефинисати у равни бесконачну праву чије тачке ће одређивати класе паралелних правих. Уочимо кроз бесконачну тачку праве l једну праву и означимо је са l_∞ . Иначе, било које две праве су паралелне уколико њихова пресечна тачка припада правој l_∞ .

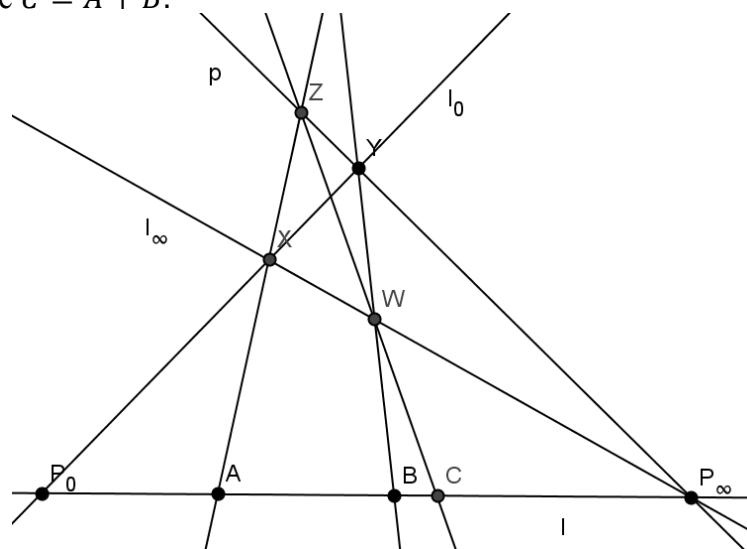


Слика 2.2.2.

Нека је p права паралелна са правом l . Те две праве су заиста паралелне пошто се секу на правој l_∞ . Нека је l_0 произвољна права кроз тачку P_0 , различита од праве l . Нека права кроз A паралелна са l_0 одређује на правој p тачку N и нека је $p \cap l_0 = \{M\}$. Права кроз N паралелна са MB сече праву l у траженој тачки C .

Уведени су коначно сви елементи да бисмо разумели дефиницију збира две тачке. Исти текст записан за случај Еуклидове равни важи и за пројективну раван. Прекопирали смо текст у жељи да проверимо да ли заиста важи (коришћене су намерно исте ознаке) и да бисмо још једном прошли пажљиво кроз њега. Сада је све јасно и наводимо дефиницију.

Дефиниција 2.2.1. (збир тачака) У равни која садржи праву l са утврђеним репером, нека су l_∞ и p две произвољне праве кроз фундаменталну тачку P_∞ и нека је l_0 произвољна права кроз P_0 . Нека l_0 сече праве l_∞ и p респективно у тачкама X и Y . Уочимо две произвољне тачке $A(a)$ и $B(b)$ на правој l и нека праве AX и BY секу праве p и l_∞ редом у тачкама Z и W . Тачка C у којој права ZW сече праву l се зове збир тачака A и B у односу на репер P_0, P_1, P_∞ и означава се $C = A + B$.



Слика 2.2.3.

Ако погледамо слику 2.2.3. приметимо да тачке X, Y, Z и W представљају темена потпуног четворотеменика, а P_0, A, B, C и P_∞ тачке које на правој l одређују његове стране, тако да на основу дефиниције 1.2.20. можемо закључити да важи

$$Q(P_0AP_\infty, CBP_\infty).$$

Теорема 2.2.2. Нека су A и B две тачке праве l , различите од P_0 и P_∞ . $A + B = C$ ако и само ако је $Q(P_0AP_\infty, CBP_\infty)$.

Ово тврђење следи непосредно из дефиниције збира тачака, $XYZW$ је потпуни четворотеменик који одређује тачке P_0, A, B, C и P_∞ .

Као непосредна последица дефиниције следи да за произвољну тачку A праве l важи:

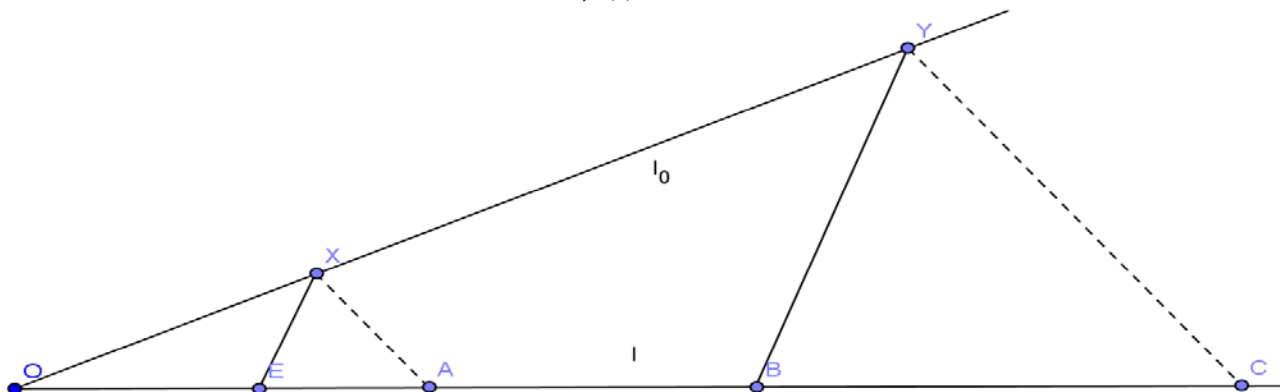
$$A + P_0 = P_0 + A = A$$

$$A + P_\infty = P_\infty + A = P_\infty, \quad A \neq P_0.$$

Пре него што наведемо дефиницију за множење тачака пројективне праве погледајмо најпре како се ради множење у еуклидској геометрији, односно на произвољној бројевној правој.

Нека су на бројевној правој означене тачке $O(0)$, $E(1)$, $A(a)$ и $B(b)$. Треба одредити тачку $C(x)$ тако да $x = a \cdot b$. Коришћењем односа страница сличних троуглова, одређујемо тачку чија је координата једнака производу координата две дате тачке.

$$x \cdot 1 = a \cdot b, \text{ относительно } x:a = b:1.$$



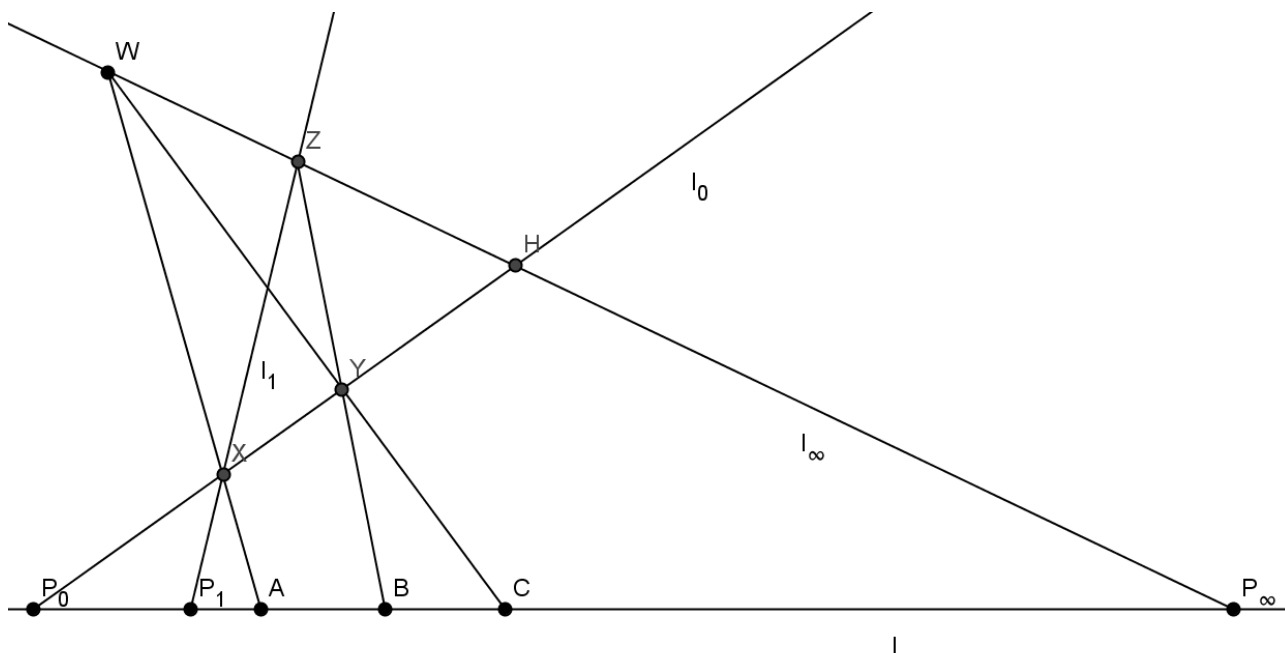
Слика 2.2.4.

Нека је l_0 произвољна права кроз тачку O , различита од праве l . Посматрамо паралелне праве кроз тачке E и B , које праву l_0 секу у тачкама X и Y респективно, као на слици 2.2.4.. Кроз тачку Y повлачимо праву паралелну са правом XA , која сече праву l у тачки C . Уочимо на слици сличне троуглове и применом Талесове теореме добијамо:

$$OC:OA = OY:OX, \quad OC:a = OB:OE, \quad OC:a = b:1, \quad OC = a \cdot b, \quad OC = x.$$

Дефиниција 2.2.3. (за производ две тачке) Нека је на правој l утврђен репер P_0, P_1, P_∞ . Нека су $A(a)$ и $B(b)$ две произвољне тачке те праве. Нека су у произвољној равни која садржи праву l уочене три праве l_∞, l_0, l_1 које садрже тачке P_∞, P_0, P_1 респективно. Нека права l_1

сече праве l_0 и l_∞ респективно у тачкама X и Z . Праве AX и BZ секу праве l_∞ и l_0 редом у тачкама W и Y . Тачка C добијена у пресеку праве l са WY представља производ тачака A и B , што означавамо $C = A \cdot B$.



Слика 2.2.5.

Теорема 2.2.4. Потребан и довољан услов да би производ две произвољне тачке A и B (обе различите од фундаменталних тачака) на l била тачка C : $A \cdot B = C$ ако и само ако је $Q(P_0AP_1, P_\infty BC)$.

Доказ теореме следи непосредно из дефиниције 2.2.3., јер је $XYZW$ потпуни четворотеменик.

За произвољну тачку $A \neq P_\infty$ важи:

$$P_1 \cdot A = A \cdot P_1 = A, \quad P_0 \cdot A = A \cdot P_0 = P_0, \quad P_\infty \cdot A = A \cdot P_\infty = P_\infty, \quad A \neq P_0.$$

Дате једнакости следе непосредно из дефиниције множења тачака.

Није тешко дефинисати инверзне операције за сабирање и множење тачака.

Дефиниција 2.2.5. (одузимање две тачке) Нека су A и B две тачке на правој l на којој је репер утврђен. Операција којом се одређује тачка C која задовољава релацију $A + C = B$, зове се одузимање и означава се $C = B - A$. Тачка C представља разлику тачака A и B .

У равни која садржи праву l са утврђеним репером, нека су l_∞ и p две произвољне праве кроз фундаменталну тачку P_∞ и нека је l_0 произвољна права кроз P_0 . Нека l_0 сече праве l_∞ и p респективно у тачкама X и Y . Уочимо две произвољне тачке $A(a)$ и $B(b)$ на правој l и нека праве AX и BZ секу праве p и l_∞ редом у тачкама Z и W . Тачка C у којој права YW сече праву l се зове разлика тачака A и B у односу на репер P_0, P_1, P_∞ .

За сваку тачку $A \neq P_\infty$ на l важи $A - A = P_0$.

Дефиниција 2.2.6. (дељење две тачке) Нека су A и B две тачке на правој l на којој је репер утврђен. Операција којом се одређује тачка C која задовољава релацију $A \cdot C = B$, зове се дељење и означава се $C = B : A$. Тачка C представља количник тачака A и B .

Нека је на правој l утврђен репер P_0, P_1, P_∞ . Нека су $A(a)$ и $B(b)$ две произвољне тачке те праве. Нека су у произвољној равни која садржи праву l уочене три праве l_∞, l_0, l_1 које садрже тачке P_∞, P_0, P_1 респективно. Нека права l_1 сече праве l_0 и l_∞ респективно у тачкама X и Z . Праве AX и BW секу праве l_∞ и l_0 редом у тачкама W и Y . Тачка C добијена у пресеку праве l са ZY представља количник тачака B и A , што означавамо $C = B : A$.

За сваку тачку $A \neq P_\infty, P_0$ на l важи $A : A = P_1, P_0 : A = P_0, A : P_0 = P_\infty$.

2.3. Хомогене координате тачке

Увођење нехомогених координата на пројективну праву има одређених недостатака. Највећи је тај што тачка P_∞ нема реалну координату, него јој је придружен фиктивни елемент ∞ . То често прави проблеме и супротно је духу пројективне геометрије у којој су све тачке на правој равноправне. Иако је тачка P_∞ изабрана сасвим произвољно, њен посебан карактер долази до изражаја у операцијама сабирања, множења, ... Да бисмо то избегли, уводимо нов тип координата на пројективну праву. Њих ћемо звати **хомогене** координате, за разлику од координата које смо већ увели, а које називамо нехомогеним координатама.

Дефиниција 2.3.1. Нека је на правој l одређен репер P_0, P_1, P_∞ , извршимо координатизацију пројективне праве и свакој тачки на правој доделимо број бројног система са којим је изоморфан скуп тачака праве. Сваки тако додељен број представља нехомогену координату тачке (ако изузмемо тачку P_∞). Ако је x нехомогена координата тачке P_x , тада су њене хомогене координате пар (x_1, x_2) такав да важи $x = \frac{x_1}{x_2}$. На овај начин, свака тачка пројективне праве има пар реалних координата, па и тачка P_∞ којој је придружен пар $(k, 0)$ за произвољан број $k \neq 0$ бројног система изоморфног са скупом тачака праве. Не постоји тачка чије су координате $(0, 0)$.

Дакле, свакој тачки праве одговара пар бројева и сваком пару бројева осим пара $(0, 0)$ одговара јединствена тачка праве. Овакво представљање тачака пројективне праве паровима бројева није једнозначно пошто је одређен само количник две координате. На пример, парови (x_1, x_2) и (kx_1, kx_2) где је $k \neq 0$ представљају исту тачку. Пошто је нехомогена координата тачке P_0 број 0, значи да количник њених хомогених координата мора бити 0 а то је једино могуће ако је $x_1 = 0$, даље, тачка P_1 се одликује чињеницом да је $x_1 = x_2$, а тачка P_∞ чињеницом да је $x_2 = 0$.

Тачка са координатама (x_1, x_2) пројективним пресликавањем се пресликава на тачку са координатама (x_1^1, x_2^2) тако да је задовољено $x_1^1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$,

$$x_2^1 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

при чему $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, иначе долази до дегенерисања датог пресликавања и све тачке би се пресликале у исту.

Ово пресликавање важи када је реч о пројективном пресликавању тачака једне праве на тачке те исте праве. Међутим, следећа теорема говори о пројективном пресликавању између тачака две различите праве.

Теорема 2.3.2. За свако пројективно пресликавање праве l на m , можемо изабрати репер на m у складу са репером на l тако да то пројективно пресликавање буде изражено са $y = x$.

Доказ. Свако пројективно пресликавање је одређено са три пара хомологих тачака. Нека су дате две праве l и m и нека је на свакој утврђен репер. Хоћемо да успоставимо такву кореспонденцију да се пројективним пресликавањем свака тачка праве l чија је нехомогена координата x преслика на тачку праве m која има баш исту нехомогену координату y односу на репер праве m . Правимо такву кореспонденцију да се тачке репера $0, 1, \infty$ праве l пресликају на тачке репера $0, 1, \infty$ праве m и придружимо координату x произвољне тачке A праве l оној тачки праве m у коју се A пресликала тим пројективним пресликавањем. Тако ће се постићи да тим пројективним пресликавањем парови хомологих тачака имају исте координате. Дакле, да бисмо представили пројективно пресликавање између две праве релацијом $y = x$, можемо произвољно одабрати репер на правој l , док је онда одабир репера на другој правој јединствено одређен. ■

2.4. Дворазмера

Фиксирамо три различите тачке на правој које одређују репер и означимо их $0, 1, \infty$. Убудуће ћемо за сваку тачку P_x чија је нехомогена координата x равноправно користити ознаке P_x и x . Хоћемо да свакој тачки x придружимо уређену четворку тачака $(0, \infty; x, 1)$ коју ћемо назвати дворазмера. Многе геометријске величине, као што је на пример растојање не остају инваријантне применом пројективног пресликавања. Једна од величина која остаје инваријантна, односно која се не мења применом пројективног пресликавања је дворазмера. Дворазмера је придружена уређеној четворци тачака на правој. Пошто смо се до сада упознали и са хомогеним и са нехомогеним координатама ту бројну величину која се зове дворазмера дефинисаћемо прво на нивоу хомогених координата.

Дефиниција 2.4.1. Нека су на правој l дате четири тачке $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ и $D = (d_1, d_2)$ својим хомогеним координатама. Дворазмера четворке тачака A, B, C, D , у ознаци $(A, B; C, D)$, је број дефинисан на следећи начин:

$$(A, B; C, D) := \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}$$

Користећи добро познате особине детерминанти приказаћемо да је дворазмера добро дата, тј. не зависи од избора хомогених координата за придружене тачке.

Теорема 2.4.2. Нека су p, q, r, s четири произвољна реална броја различита од нуле и $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ и $D = (d_1, d_2)$ четири тачке исте праве. Важи:

$$(A, B; C, D) = (pA, qB; rC, sD)$$

при чему $pA = (pa_1, pa_2)$.

Доказ. Знамо да је $\begin{vmatrix} pa_1 & rc_1 \\ pa_2 & rc_2 \end{vmatrix} = pr \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, сада применимо то у дефиницији и добијамо

$$(pA, qB; rC, sD) = \frac{\begin{vmatrix} pa_1 & rc_1 \\ pa_2 & rc_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pa_1 & sd_1 \\ pa_2 & sd_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} qb_1 & rc_1 \\ qb_2 & rc_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} qb_1 & sd_1 \\ qb_2 & sd_2 \end{vmatrix}} = \frac{pr \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{ps \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} : \frac{qr \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{qs \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = (A, B; C, D) \blacksquare$$

Сада ћемо дворазмеру да дефинишемо на један сасвим другачији начин обраћајући посебну пажњу на растојање између тачака на правој.

Нека је l произвољна права и на њој учимо четири тачке A, B, C, D . Ако је скуп тачака праве изоморфан са пољем реалних бројева тако да је тачки A придружен реалан број a , а тачки B број b , онда дефинишемо растојање између те две тачке са $|AB| := b - a$.

Дефиниција 2.4.3. Нека су A, B, C, D четири тачке исте праве, са нехомогеним координатама a, b, c, d редом. Дворазмера четворке тачака A, B, C, D је следећи број:

$$(A, B; C, D) = \frac{a - c}{a - d} : \frac{b - c}{b - d}$$

Врло једноставним рачуном, ако дате нехомогене координате a, b, c, d претворимо у хомогене $(a, 1)$, $(b, 1)$, $(c, 1)$ и $(d, 1)$, и израчунамо вредност дворазмере за те тачке на начин описан у дефиницији 2.4.1. добијамо исти број. Рецимо $\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - c$.

Напомена:

1) За дворазмеру четворке тачака A, B, C и D , равноправно ће бити коришћене следеће две ознаке: $(A, B; C, D)$ и $R(AB, CD)$. Због једноставности записа, елементи у ознаци за дворазмеру ће често бити замењени својим координатама. Дворазмеру четири праве, уколико је свака права означена са две тачке које је одређују, ћемо означити са $R(AB, CD, EF, GH)$.

2) Ако је једна од четири тачке у дворазмери бесконачна онда се вредност те дворазмере израчунава на начин описан у дефиницији 2.4.1., јер се дефиниција 2.4.3. искључиво односи на коначне тачке (бесконачна тачка нема нехомогену координату).

Координатни принцип нам омогућава да саставимо аналитички израз пројективног пресликавања пројективне праве на саму себе:

$$x^t = \frac{ax + b}{cx + d}, ad - bc \neq 0$$

Услов $ad - bc \neq 0$ значи да је пресликавање обострано једнозначно; у противном када тај услов не би био испуњен, пресликавање би се дегенерисало и све тачке би се пресликале у исту.

Аналитички израз пројективног пресликавања једнодимензионе многострукости може да буде схваћен и као израз за трансформацију координате тачке приликом промене репера. Сваки репер се може пројективно пресликати на сваки други.

Теорема 2.4.4. Дворазмера четворке тачака је инваријанта пројективног пресликавања.

Доказ. Нека се пројективним пресликавањем тачке са координатама x, y, z, t пресликавају на тачке са координатама p, q, r, s респективно, тада важи

$$p = \frac{ax + b}{cx + d}, q = \frac{ay + b}{cy + d}, r = \frac{az + b}{cz + d}, s = \frac{at + b}{ct + d}$$

$$\begin{aligned} (p, q; r, s) &= \frac{p - r}{p - s} : \frac{q - r}{q - s} = \frac{\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{az + b}{cz + d}}{\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{at + b}{ct + d}} : \frac{\frac{ay + b}{cy + d} - \frac{az + b}{cz + d}}{\frac{ay + b}{cy + d} - \frac{at + b}{ct + d}} = \\ &= \frac{\frac{acxz + adx + bcz + bd - acxz - bcx - adz - bd}{(cx + d)(cz + d)}}{\frac{acxt + adx + bct + bd - acxt - bcx - adt - bd}{(cx + d)(ct + d)}} : \frac{\frac{acyz + ady + bcz + bd - acyz - bcy - adz - bd}{(cy + d)(cz + d)}}{\frac{acyt + ady + bct + bd - acyt - bcy - adt - bd}{(cy + d)(ct + d)}} = \\ &= \frac{\frac{adx + bcz - bcx - adz}{cz + d}}{\frac{adx + bct - bcx - adt}{ct + d}} : \frac{\frac{ady + bcz - bcy - adz}{cz + d}}{\frac{ady + bct - bcy - adt}{ct + d}} = \\ &= \frac{(ct + d)(ad(x - z) + bc(z - x))}{(cz + d)(ad(x - t) + bc(t - x))} : \frac{(ct + d)(ad(y - z) + bc(z - y))}{(cz + d)(ad(y - t) + bc(t - y))} = \\ &= \frac{ad(x - z) + bc(z - x)}{ad(x - t) + bc(t - x)} : \frac{ad(y - z) + bc(z - y)}{ad(y - t) + bc(t - y)} \\ &= \frac{(x - z)(ad - bc)}{(x - t)(ad - bc)} : \frac{(y - z)(ad - bc)}{(y - t)(ad - bc)} \\ &= \frac{x - z}{x - t} : \frac{y - z}{y - t} \\ &= (x, y; z, t) \blacksquare. \end{aligned}$$

Теорема 2.4.5. Дворазмера четворке тачака не зависи од изабраног репера.

Доказ. Ако на једнодимензионој многострукости одаберемо два разна репера, увек пројективним пресликавањем можемо пресликати један на други. Том приликом, координата произвољне тачке у односу на први и други репер биће повезане релацијом

$$x^t = \frac{ax + b}{cx + d}, ad - bc \neq 0. \blacksquare$$

Теорема 2.4.6. Свако пресликавање једнодимензионих многострукости које очувава дворазмеру је пројективно.

Доказ. Нека се четири тачке A, B, C, D обострано једнозначним пресликавањем пресликају на друге четири тачке E, F, G, H и нека важи $(A, B; C, D) = (E, F; G, H)$. Постоји једнозначно одређено пројективно пресликавање које тројку тачака A, B, C пресликава на тројку тачака E, F, G . Тим пресликавањем тачка D се преслика на тачку K . Пошто је дворазмера инваријантна пројективног пресликавања, важи $(A, B; C, D) = (E, F; G, K)$. Добијамо $(E, F; G, H) = (E, F; G, K)$, одакле, због израза којим је дефинисана дворазмера следи $H \equiv K$ ■.

Дворазмера, иако се одликује особином да је инваријантна ипак зависи од распореда тачака које је формирају. Може се говорити о пермутацијама тачака у дворазмери. Од скупа од четири тачке (или друга четири елемента) постоје укупно 24 пермутације. Како из дефиниције дворазмере следи $(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A)$ закључујемо да у општем случају четири дате тачке могу да формирају шест различитих дворазмера. До истог закључка смо могли доћи и позивајући се на следећу теорему: *За произвољне четири тачке A, B, C, D исте праве важи пројективно пресликавање $A, B, C, D \bar{\wedge} B, A, D, C$.* Претходно смо показали да је дворазмера инваријантна у односу на пројективно пресликавање. Навешћемо све 24 пермутације. У сваком реду од следећих шест свака пермутација је пројективна са сваком, док две пермутације из различитих редова у општем случају нису пројективне.

$$\begin{array}{cccc}
 AB, CD & BA, DC & CD, AB & DC, BA \\
 AB, DC & BA, CD & DC, AB & CD, BA \\
 AC, BD & CA, DB & BD, AC & DB, CA \\
 AC, DB & CA, BD & DB, AC & BD, CA \\
 AD, BC & DA, CB & BC, AD & CB, DA \\
 AD, CB & DA, BC & CB, AD & BC, DA
 \end{array}$$

Међутим, ако четири дате тачке формирају хармонијски скуп, односно ако су прве две тачке хармонијски конјуговане са друге две тачке онда имамо укупно три различите вредности дворазмере.

Нека су A, B, C, D хармонијски конјуговане тачке једне праве и нека је на тој правој утврђен репер. Тачке A, B, C пројективним пресликавањем пресликамо у тачке којима су додељене нехомогене координате репективно $\infty, 0, 1$. Нека је z координата тачке у коју се тим пројективним пресликавањем пресликала тачка D . Сада тим тачкама доделимо хомогене координате $0 = (0, 1)$, $\infty = (1, 0)$, $1 = (1, 1)$ и $z = (x, y)$; обзиром да је дворазмера и хармонијска четворка тачака инваријантна у односу на пројективно пресликавање следи

$$(A, B; C, D) = (\infty, 0; 1, z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & x \\ 1 & y \end{vmatrix}} = \frac{1}{y} : \frac{-1}{-x} = \frac{x}{y} = z$$

Теорема 2.4.7. Нека су A, B, C, D четири тачке једне праве с дворазмером $(A, B; C, D) = k$. Тада имамо:

1. $(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A);$
2. $(A, B; D, C) = \frac{1}{k};$
3. $(A, C; B, D) = 1 - k;$
4. $(A, C; D, B) = \frac{1}{1-k};$
5. $(A, D; B, C) = \frac{k-1}{k};$
6. $(A, D; C, B) = \frac{k}{k-1}.$

Доказ. 1. и 2. следе директно из дефиниције дворазмере.

3. Треба показати да важи $(A, C; B, D) = 1 - (A, B; C, D)$. Нека су $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ и $D = (d_1, d_2)$ дате својим хомогеним координатама. Применимо дефиницију дворазмере и желимо да покажемо да је

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}} = 1 - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} = 1 - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Множимо обе стране једнакости са $\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и добијамо следећу једнакост

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Треба показати да лева страна следеће једнакости има вредност нула и тиме ће тврђење 3. бити доказано:

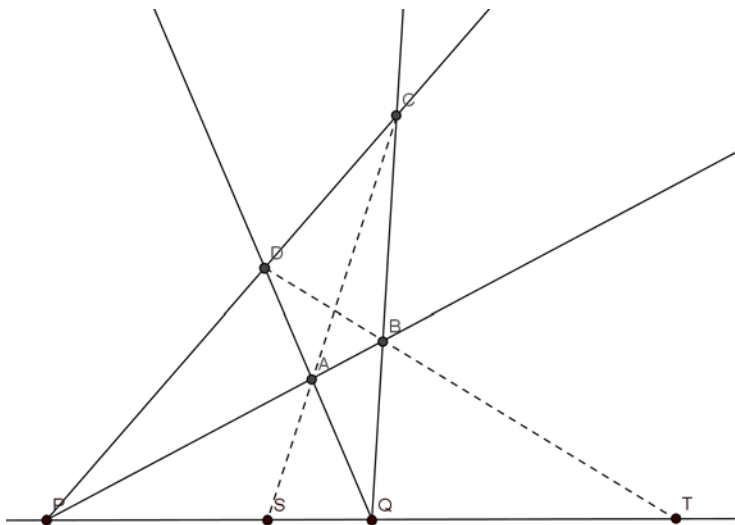
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1) - (a_1 d_2 - a_2 d_1)(c_1 b_2 - c_2 b_1) - (a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 d_2 - b_2 d_1) = 0 \\ a_1 b_2 c_1 d_2 - a_1 b_2 c_2 d_1 - a_2 b_1 c_1 d_2 + a_2 b_1 c_2 d_1 - \\ - a_1 b_2 c_1 d_2 + a_1 b_1 c_2 d_2 + a_2 b_2 c_1 d_1 - a_2 b_1 c_2 d_1 - \\ - a_1 b_1 c_2 d_2 + a_1 b_2 c_2 d_1 + a_2 b_1 c_1 d_2 - a_2 b_2 c_1 d_1 = 0 \end{aligned}$$

Како је низ еквивалентних израза тачан, показали смо да је $(A, C; B, D) = 1 - (A, B; C, D)$. Вредности осталих пермутација су директна последица прва три правила. ■

Теорема 2.4.8. Тачке P, Q, S, T чине групу хармонијски конјугованих тачака ако и само ако је $(P, Q; S, T) = -1$.

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека су тачке P, Q, S, T хармонијски конјуговане.



Слика 2.4.1.

Тачке P и Q су дијагоналне тачке одговарајућег потпуног четворотеменика, а S и T су тачке које припадају оним странама четворотеменика које одређују трећу дијагоналну тачку коју ћемо означити са M . Имамо следећа перспективна пресликавања:

$$\begin{aligned} p(P, Q, S, T) &\stackrel{A}{=} p_1(B, D, M, T) \\ &\stackrel{C}{\wedge} \\ p(P, Q, S, T) &\stackrel{A}{=} p_1(D, B, M, T) \end{aligned}$$

Пошто је дворазмера инваријанта пројективног пресликавања, следи да је $(B, D; M, T) = (D, B; M, T)$ што на основу претходне теореме значи да је вредност дворазмере $(P, Q; S, T) = -1$ или $(P, Q; S, T) = 1$. Вредност један одбацујемо, јер би то значило да се или прве две или друге две тачке поклапају, међутим то није могуће због тога што су те тачке хармонијски конјуговане.

($\Leftarrow$) Нека је $(P, Q; S, T) = -1$ и нека је N тачка таква да су P, Q, S, N хармонијски конјуговане тачке, што на основу доказаног смера теореме значи $(P, Q; S, N) = -1$ и такође важи

$p(P, Q, S, T) = p(P, Q, S, N)$, а то даље значи да се тачке T и N поклапају, па важи да су тачке P, Q, S, T хармонијски конјуговане тачке што је и требало доказати. ■

Навешћемо још неколико група од по четири тачке које су хармонијски конјуговане у следећој леми.

Лема 2.4.9. Нека су x и y два произвољна реална броја. Важи:

1. $(-x, x; 0, \infty) = -1$;
2. $(0, 2x; x, \infty) = -1$;
3. $(x, y; \frac{x+y}{2}, \infty) = -1$;
4. $(-1, 1; x, \frac{1}{x}) = -1$;
5. $(-x, x; 1, x^2) = -1$;

Претходним разматрањем дошли смо до два закључка, први да хармонијски конјуговане тачке имају вредност дворазмере -1 , и други веома значајан закључак да се свакој тачки чија је нехомогена координата x може придружити једнозначна дворазмера $(\infty, 0; 1, x)$.

У дворазмери од четири тачке бар три морају бити различите. Ако се неке две тачке поклапају и ако су оне међу прве три у дворазмери, онда ћемо се договорити да убудуће ту пермутацију заменимо „једнаком“ код које су прве три координате различите.

Тврђење 2.4.10. Важе следеће једнакости:

1. $(\infty, 0; 1, 0) = 0$;
2. $(\infty, 0; 1, 1) = 1$;
3. $(\infty, 0; 1, \infty) = \infty$.

Доказ. Директном применом дефиниције дворазмере доказујемо да важе дате једнакости.

Теорема 2.4.11. Ако су a, b, c три произвољна различита елемента једнодимензионе многострукости, а a_1, b_1, c_1 три друга произвољна различита елемента исте многострукости, онда је кореспонденција исказана релацијом $R(ab, cx) = R(a_1b_1, c_1x_1)$ пројективно пресликавање.

Теорема 2.4.12. Два скупа од по четири тачке су пројективна ако и само ако имају исту дворазмеру, тј. $abcd \bar{\wedge} a_1b_1c_1d_1$ ако и само ако је $R(ab, cd) = R(a_1b_1, c_1d_1)$.

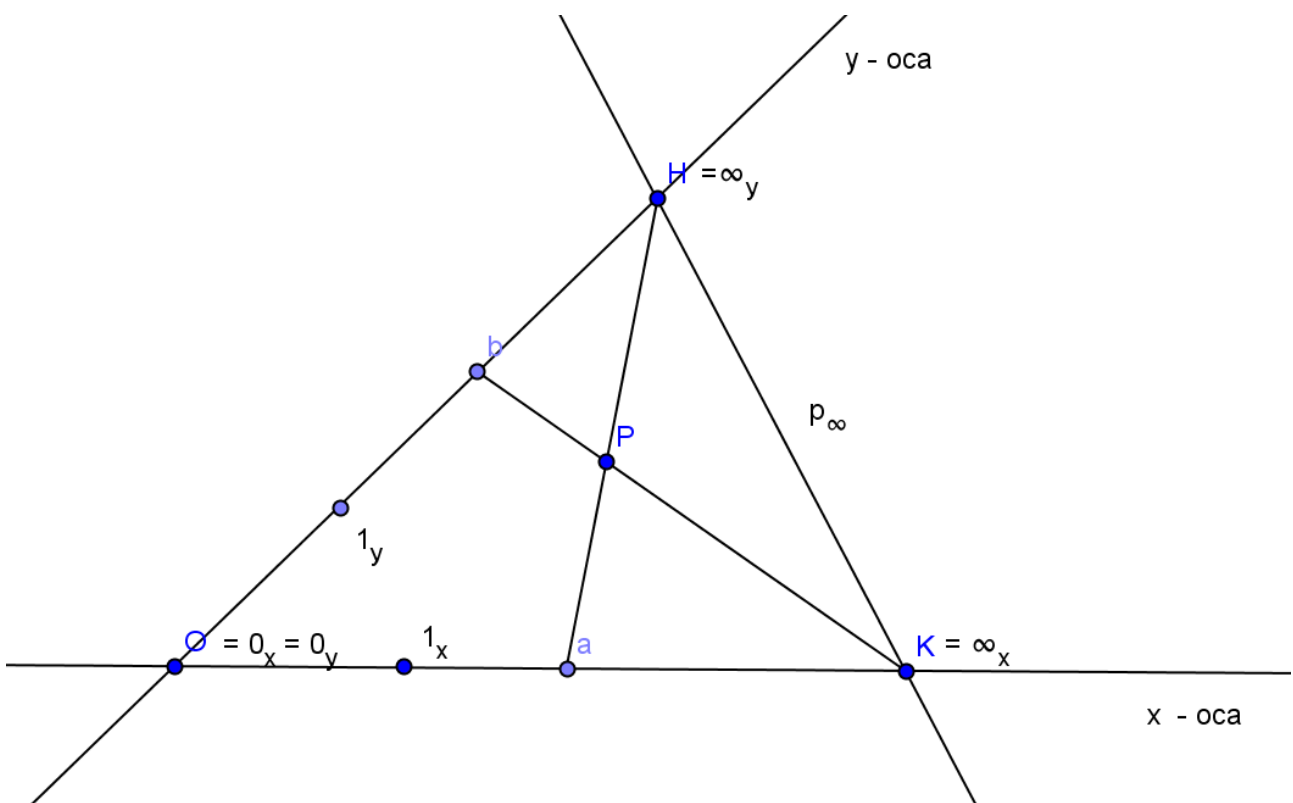
3. Дводимензионе многострукости

3.1. Настанак пројективне равни

Постоји аналитички и синтетички начин заснивања пројективне геометрије. У погледу примена аналитички приступ пројективној геометрији је најкориснији. Главни концепт аналитичког приступа је увођење координата и онда дефинисање геометријских објеката као једначина, а затим и релација које важе међу њима. Међутим, у већини књига, садржај је представљен у облику теорема дефинисаних на тачкама, правама и кривама без коришћења координата. Дакле, у синтетичком приступу, тачке и праве су исказане на потпуно апстрактан начин и то аксиомама и дефиницијама. Дакле, пројективна геометрија је дефинисана као произвољан систем који задовољава ове аксиоме. Међутим, да би се дефинисала пројективна раван, која је предмет изучавања у овом поглављу, полазимо од добро познате еуклидске геометрије. У овој геометрији две праве се или секу или не што зависи од тога да ли су паралелне или не. Постојање паралелних правих у равни је главни разлог проблема са којима ћемо се врло брзо упознати. Да бисмо их избегли, еуклидску раван ћемо проширити бесконачним елементима. Ови елементи ће ујединити специјалне случајеве који се јављају код паралелности. Стога, покушаћемо да конструишемо објекте који ће имати следеће особине: две праве се секу у једној и самој једној тачки, постоји једна и само једна права одређена са две различите тачке. То ће по много чему личити на обичну еуклидску раван, само што постулат паралелности неће важити на уобичајен начин. Тврдимо да ће се две различите праве увек сећи, па чак и кад су паралелне. Две наведене особине представљају главне претпоставке у аксиоматском дефинисању пројективне равни. Дакле, без икаквих изузетака важи да ће се две различите праве увек сећи у јединственој тачки и да ће две различите тачке увек одређивати јединствену праву. Остаје још да све наведено реализујемо и у пракси, односно да обичну еуклидску раван проширимо до пројективне равни тако што ћемо увести бесконачне елементе. Познато је да је паралелност правих релација еквиваленције на скупу свих правих у равни и да све праве у равни можемо сместити у класе међусобно паралелних правих. Свакој класи придружићемо по једну тачку. Та тачка ће играти улогу бесконачне тачке. У тој тачки ће се сећи све паралелне праве које припадају истој класи. Различитим класама су придружене различите бесконачне тачке. За сада разликујемо две врсте тачака: обичне и идеалне (или бесконачне) тачке. Међутим, осим у називу, те тачке се ни по чему неће разликовати када будемо увели хомогене координате. Даље, дефинишемо бесконачну праву, која садржи све бесконачне тачке, али ниједну обичну. Под појмом пројективна права подразумеваћемо и обичну и бесконачну праву. Ако тачка пресека две праве припада бесконачној правој, онда су те две праве паралелне у пројективној равни. На основу претходно изнетог можемо закључити да пројективна раван настаје тако што у Еуклидовој равни нацртамо произвољну праву и прогласимо је за бесконачну. Посматрајући сам процес проширивања Еуклидове равни до пројективне може се учинити да бесконачна тачка и бесконачна права играју посебну улогу, што није случај и са чим ћемо се убрзо упознати. Описани модел аксиоматске изградње није једини. Чак ни данас не постоји коначна класификација или пребројавање свих могућих пројективних равни. Пројективне равни не морају чак ни да буду бесконачни објекти. Постоје интересантни системи са коначно много тачака и правих које у потпуности задовољавају аксиоме пројективне равни.

3.2. Нехомогене координате тачака и правих у пројективној равни

Пројективна равна је настала проширењем еуклидске равни, тако што је нацртана једна произвољна права и означена као бесконачна права, чије су све тачке бесконачне и одређују класе паралелних правих. Дакле, две обичне праве су паралелне ако њихова пресечна тачка припада бесконачној правој. Првенствено желимо да извршимо нумеричко представљање пројективне равни, односно да тачке и праве које се у њој налазе прикажемо аналитички. Прво ћемо да анализирамо и уведемо нехомогене координате. Целокупан процес је поприлично сличан координатизацији Декартове равни, тако да ћемо и у пројективној равни настојати да свакој тачки придружимо уређен пар реалних бројева. Уочимо затим две праве, које нису паралелне, односно чија пресечна тачка, тачка O , не припада бесконачној правој. Назовимо те две праве координатним осама, а њихову пресечну тачку координатни почетак. На свакој координатној оси одредимо репер тако да нулта тачка обе координатне осе буде баш координатни почетак, а бесконачне тачке буду тачке пресека оса са бесконачном правом. Означимо координатне осе са x и y , а бесконачну праву са p_∞ . Јединичну тачку и на једној и на другој оси произвољно одаберемо. Правимо разлику у означавању фундаменталних тачака тако што у индексу сваке од њих уписујемо ознаку за осу. Тако да су фундаменталне тачке које чине репер на x -оси означене са $0_x, 1_x, \infty_x$, а фундаменталне тачке y -осе са $0_y, 1_y, \infty_y$.



Слика 3.2.1.

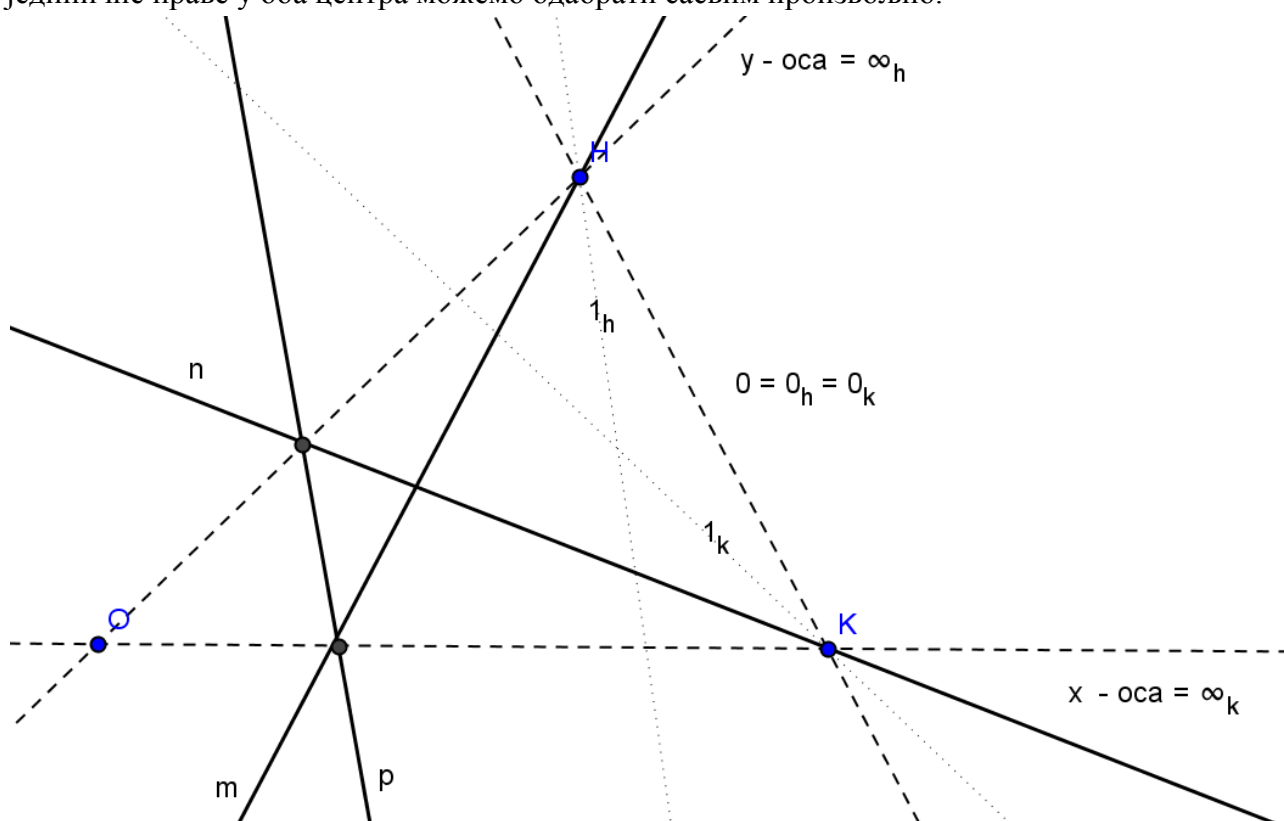
Идеја је да свакој тачки у пројективној равни придружимо нехомогене координате уколико је то могуће. Из разматрања искључујемо бесконачне тачке, јер за њих не постоје нехомогене координате. Свака бесконачна тачка у суштини представља тачку пресека две праве која се

све више удаљава док на крају савим нестане негде у даљини, тако да се још због тога називају и ишчезавајуће тачке или сингуларне.

Нека је P произвољна тачка пројективне равни, која не припада бесконачној правој p_∞ . Од свих бесконачних тачака кључне улоге играју оне две које припадају координатним осама тако да ћемо их означити са $K = \infty_x$ и $H = \infty_y$. Пресечну тачку праве HP са x - осом означимо са a . Број a представља нехомогену координату тако добијене тачке у односу на репер претходно дефинисан на x - оси. Када су дефинисане нехомогене координате на пројективној правој, рекли смо да ћемо уместо да стално наглашавамо тачка чија је нехомогена координата x , говорити кратко само тачка x . Дакле, број a је апсциса тачке P . На аналоган начин ћемо одредити и другу координату тачке P . То ће бити тачка у којој права KP сече y - осу и означићемо је са b . Број b истовремено представља нехомогену координату тачке на y - оси и ординату дате тачке P . Тачка P одређује два јединствена броја a и b на координатним осама. Ти бројеви представљају њене нехомогене координате и убудуће ћемо ту тачку означавати аналитички са (a, b) . Свака тачка пројективне равни, сем оних на бесконачној правој, представљена је као уређен пар реалних бројева и треба водити рачуна да се апсциса увек пише на првом месту, а ордината на другом месту у уређеном пару, исто као и у Декартовом координатном систему. Све тачке x - осе, осим тачке K имају нехомогене координате облика $(a, 0)$, аналогно, све тачке y - осе имају нехомогене координате облика $(0, b)$. Уколико посматрамо пројективну раван без бесконачне праве, на основу претходно написаног можемо закључити да свакој тачки одговарају две јединствене нехомогене координате, али важи и обрнуто да сваке две тачке на координатним осама одређују јединствену тачку. Међутим, уколико бисмо ипак покушали да описани поступак применимо и на тачке бесконачне праве, приметили бисмо да би све бесконачне тачке имале исте координате, чиме бисмо изгубили једнозначност, а и жеља нам је била да обе координате буду реални бројеви, како бисмо могли успоставити једнозначну кореспонденцију сваке осе са скупом реалних бројева. Да бисмо избегли посебан карактер бесконачних тачака врло брзо ћемо увести нову врсту координата, слично као и у једнодимензионалном случају, које ће обухватити и ове бесконачне тачке и које се онда ни по чему неће разликовати од других тачака пројективе равни. У духу пројективне геометрије је да су сви објекти равноправни и да се ни на који начин међусобно не разликују исте врсте објеката. Пошто су уведене нехомогене координате за тачке, даље, желимо то исто да урадимо и за праве које припадају пројективној равни. То можемо учинити на више различитих начина. Не треба заборавити драгоцену средство које важи у пројективној геометрији. То је принцип дуалитета. Често је много лакше доказати неку теорему тако што ћемо доказати њој дуалну теорему и применити затим принцип дуалитета на основу којег ће и првобитна теорема важити. Такође, кад је реч о овом принципу, треба нагласити да је веома економичан и да штеди време бар за 50 %. Сада се намеће више веома логичних питања. У односу на шта да одредимо нехомогене координате праве? Шта ће нам бити референтни оквир? Колико ће тих координата права имати? Најлакше је одговорити на последње питање. Повежемо претходну причу са принципом дуалитета у равни по којем су тачке и праве дуални објекти. Где год се спомене реч тачка, ту реч ћемо заменити са речи права, затим права одређена са две тачке ће бити тачка одређена са две праве. Ништа од тога не би било могуће да пројективна раван не почива на принципима да сваке две тачке одређују праву и да се сваке две праве секу, па чак и ако су паралелне. Искористимо принцип дуалитета у равни и пошто је тачка одређена са

две нехомогене координате, онда и права мора бити одређена са исто толико нехомогених координата.

Треба уочити два прамена правих, аналогно координатним осама два координатна центра и у сваком од њих одредити репер у односу на који ћемо даље одредити координате произвољне праве. То можемо учинити на произвољан начин, али да бисмо избегли претрпаност равни непотребним елементима покушаћемо да на темељима већ изграђеног референтног система за тачке изградимо уз мале модификације и систем који ће важити и за праве. Бесконачној правој дуално одговара бесконачна тачка. Ту улогу би могао да игра координатни почетак. Из разматрања ћемо искључити све праве које садрже координатни почетак из истог разлога као што смо то учинили код тачака бесконачне праве. Координатне осе ћемо заменити координатним центрима и било би погодно да то буду тачке H и K . Права одређена са те две тачке ће бити нулта права у односу и на један и други центар, односно $0_h = 0_k$. Координатне осе ће играти улогу бесконачних правих и то $x = \infty_k, y = \infty_h$, док јединичне праве у оба центра можемо одабрати сасвим произвољно.



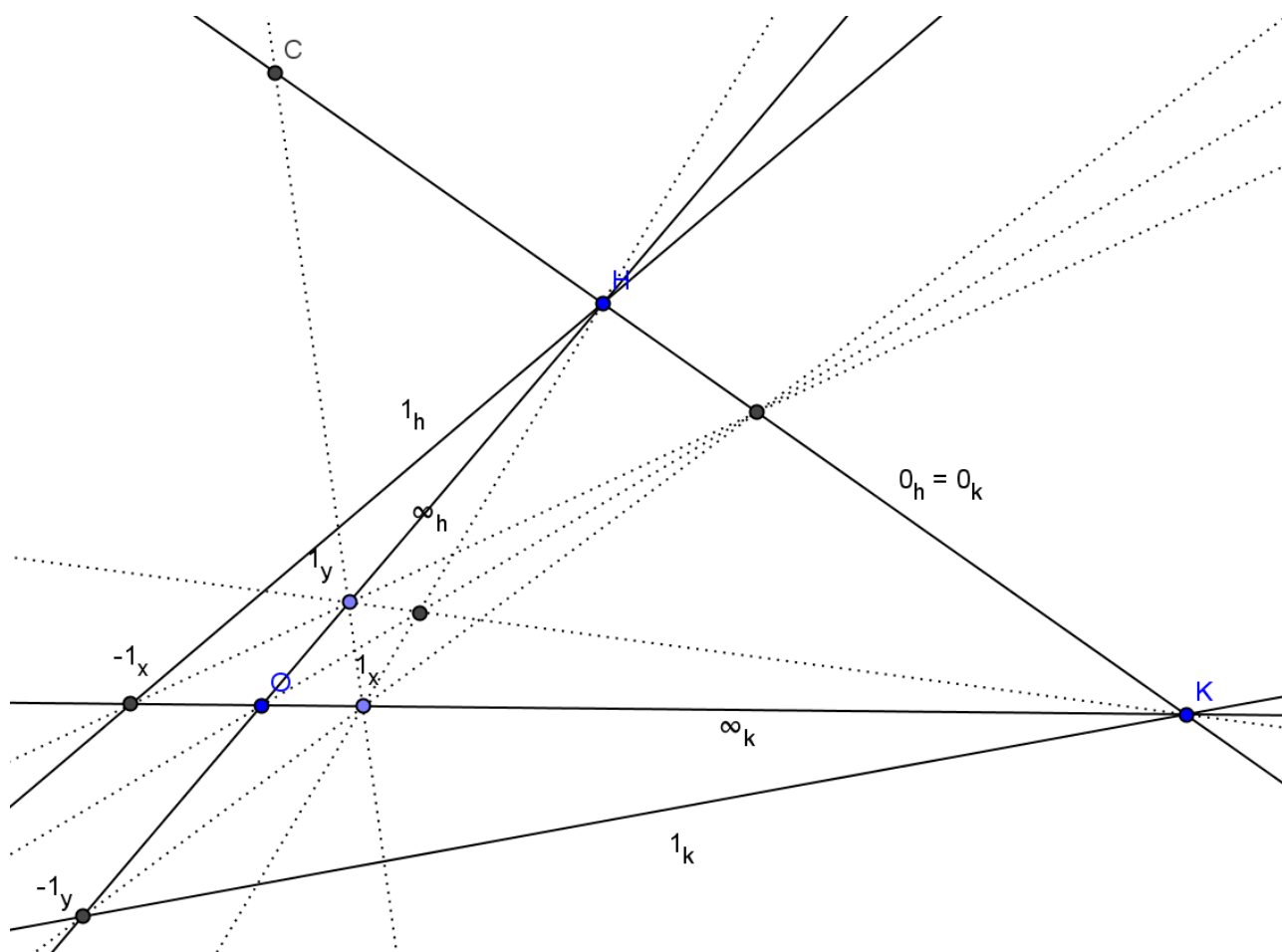
Слика 3.2.2.

После ћемо видети да уколико јединичне праве одаберемо на посебан начин, да ћемо изградити веома моћан систем који ће нам одмах дати информацију о координатама тачке на оси и праве одговарајућег центра која садржи ту тачку. Односно уколико нам је дата нехомогена координата праве у односу на репер изграђен у том центру, одмах ћемо знати и координату тачке на координатној оси која се добија у пресеку осе са том правом, али и обрнуто. Међутим пре него што дођемо до тога, за сада ћемо прихватити да смо јединичне праве у оба центра одредили сасвим произвољно. Дакле, фундаменталне праве h - центра смо означили са $0_h, 1_h, \infty_h$, а фундаменталне праве k - центра са $0_k, 1_k, \infty_k$. Уочимо у пројективној равни произвољну праву p , која не садржи пресечну тачку правих ∞_k и ∞_h , односно која не садржи координатни почетак O . Пресечна тачка правих p и ∞_k , одређује праву h - центра, чију нехомогену координату у односу на репер дефинисан на h - центру

ћемо назвати m . Аналогно, пресечна тачка правих p и ∞_h одређује праву k - центра чију нехомогену координату у односу на претходно изграђен репер ћемо означити са n . Права p на јединствен начин одређује два реална броја m и n . Ти бројеви су њене нехомогене координате. Убудуће ћемо праву p аналитички представљати њеним нехомогеним координатама као уређен пар, $[m, n]$. Користимо угласте заграде да бисмо правили разлику између уређеног пара нехомогених координата придруженог тачкама. Такође, уместо да кажемо права чија је нехомогена координата m у односу на репер изграђен, рецимо, на h - центру, ми ћемо кратко рећи права m h - центра. Дакле, свака права, ван координатног почетка, одређује два броја који представљају њене нехомогене координате. Водимо рачуна да на прво место у угластој загради наведемо нехомогену h - координату, а на друго место број који представља k - координату. Свака права која садржи h - центар има нехомогене координате облика $[m, 0]$, док праве које садрже k - центар имају координате облика $[0, n]$. Праве кроз координатни почетак немају нехомогене координате у овом систему са дефинисаним репером на сваком од дата два центра. Да бисмо избегли тај случај ускоро ћемо увести нову врсту координата као што је то већ претходно напоменуто. То ће бити хомогене координате. За сада не посматрамо тачке на бесконачној правој и праве кроз координатни почетак, док за све остале елементе пројективне равни желимо да утврдимо аналитички када нека тачка припада правој и обрнуто. Претпоставимо да постоји веза између координата тачке и праве која садржи ту тачку. У даљем раду ћемо покушати да одредимо ту везу. Из тог разлога ћемо увести ознаку за променљиву, односно произвољну тачку (x, y) неке праве и аналогно ознаку за произвољну праву $[h, k]$ која садржи фиксирану тачку.

Приликом одређивања репера у оба координатна центра речено је да се јединичне праве бирају произвољно. Шта би се десило ако бисмо те јединичне праве ипак одабрали на неки конкретан начин у жељи да направимо везу између координата тачака и правих истовремено? Упознали смо се са поступком одређивања нехомогених координата праве. Тачке у којима права сече бесконачне праве у оба центра спојили смо правима са одговарајућим центрима и добили жељене координате у односу на репере изграђене и на h - центру и на k - центру. Цео поступак ћемо покушати да поједноставимо. Хајде да видимо да ли можемо репер изабрати тако да већ пресечне тачке те праве са бесконачним правима одређују њене нехомогене координате. Прво ћемо пуну пажњу да посветимо тражењу релације која важи за произвољну праву h - центра и њену пресечну тачку са x - осом. Ако успемо да пронађемо одговарајућу везу њихових нехомогених координата, аналогно ће важити и за одговарајуће елементе k - центра и y - осе. Нека јединична права h - центра, права 1_h , садржи тачку -1_x . Посматрамо пројективно пресликавање које тачкама x - осе придружује праве h - центра тако да свакој тачки одговара она права која има исту нехомогену координату као и она. То пројективно пресликавање ћемо означити са π_1 . Применом пресликавања π_1 на тачке репера x - осе добијамо: $\pi_1(0_x) = 0_h$, $\pi_1(1_x) = 1_h$ и $\pi_1(\infty_x) = \infty_h$. Затим посматрамо пројективно пресликавање π_2 које праве h - центра пресликава у њихове тачке пресека са x - осом. Важи: $\pi_2(0_h) = \infty_x$, $\pi_2(1_h) = -1_x$ и $\pi_2(\infty_h) = 0_x$. Применимо композицију на та два пројективна пресликавања и добијамо пројективно пресликавање $\pi_3 = \pi_2\pi_1$ за које важи: $\pi_3(0_x) = \infty_x$, $\pi_3(1_x) = -1_x$ и $\pi_3(\infty_x) = 0_x$. Позивамо се на теорему 1.2.24.. Како је $\pi_3(0_x) = \infty_x$ и $\pi_3(\infty_x) = 0_x$, односно пројективно пресликавање π_3 има један пар конјугованих тачака, закључујемо да је π_3 инволуција. Није тешко приметити да се та инволуција може представити следећим аналитичким изразом

$\pi_3 = -\frac{1}{x}$. Налазимо се наомак циља. Остало је још само да све повежемо и донесемо закључак. Јасно је да ово пресликавање свакој тачки додељује тачку чија је нехомогена координата једнака супротном броју реципрочне вредности полазне тачке. То значи, ако имамо праву h - центра која x - осу сече у некој тачки x и ако желимо да одредимо нехомогену координату те праве, ми ћемо применити претходно описани поступак. Прво ћемо да придружимо тој тачки x праву h - центра чија је нехомогена координата баш x . Та права сече x - осу у некој тачки, рецимо x_1 . На основу аналитичког израза за описану инволуцију знамо да тачка x_1 има координату једнаку $-\frac{1}{x}$, односно $x_1 = -\frac{1}{x}$. Закључујемо да права чија је нехомогена координата x сече x - осу у тачки $-\frac{1}{x}$. Тиме смо дошли до релације која нам говори да ако знамо координате праве h - центра, пресечна тачка те праве и x - осе има координату једнаку супротној вредности реципрочне вредности координате праве, односно ако је координата праве a , онда је координата тачке $b = -\frac{1}{a}$. Међутим, нисмо дали одговор на обрнуто питање, ако нам је дата координата пресечне тачке b , чему ће бити једнака координата праве a одговарајућег центра која садржи ту тачку. У једначини $b = -\frac{1}{a}$ изразимо чему је једнако a и добијамо $a = -\frac{1}{b}$ једначину одговарајуће праве.

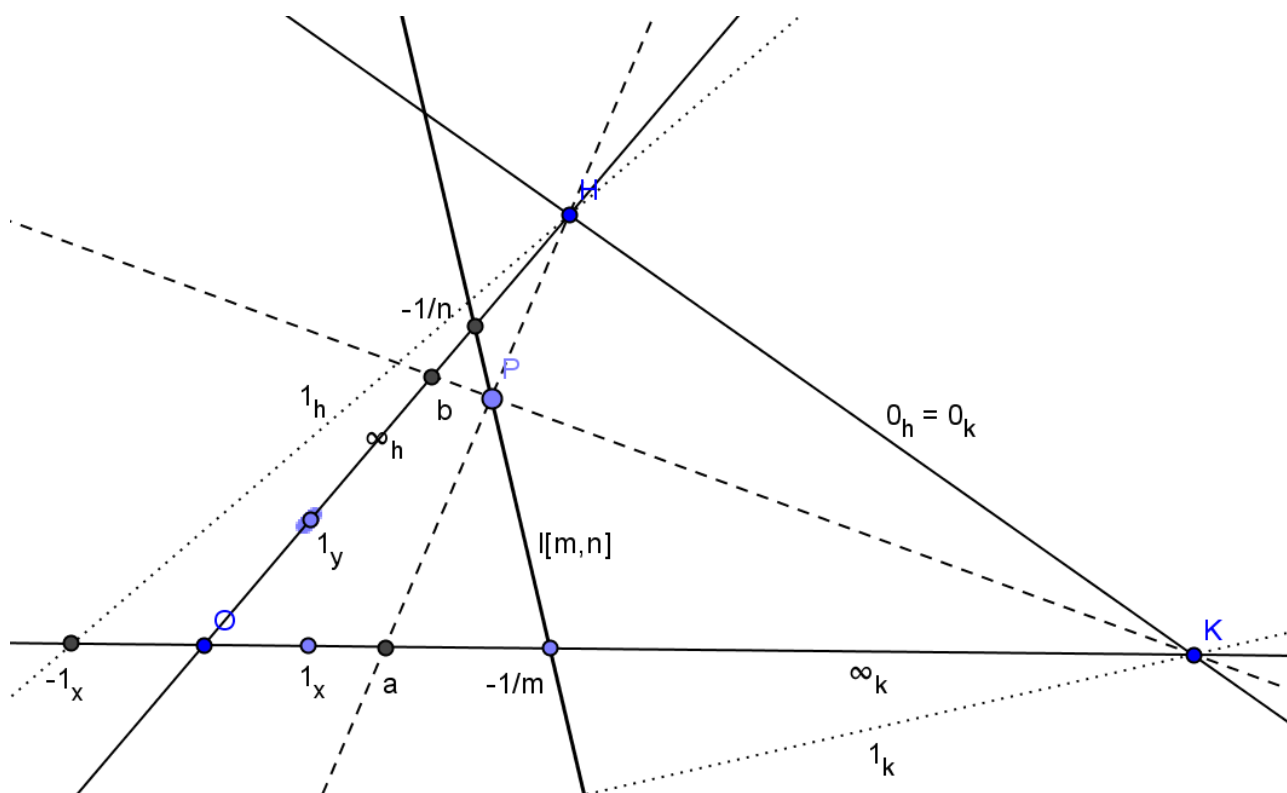


Слика 3.2.3.

Аналогно, добијене резултате можемо применити на праве k - центра и тачке y - осе. Права k - центра чија је нехомогена координата k сече y - осу у тачки чија је координата $-\frac{1}{k}$; тачка y - осе чија је нехомогена координата y припада правој k - центра чија је координата $-\frac{1}{y}$.

3.3. Услов да тачка припада правој

Посматрамо координатни систем у равни дефинисан тако да непосредно можемо одредити координате произвољне тачке, али и координате произвољне праве. Из разматрања су искључене бесконачне тачке, као и праве које садрже координатни почетак. О тим елементима ће бити више речи у наставку када уведемо хомогене координате. Дакле, на координатним осама и у координатним центрима је одређен репер. Договорили смо се да ће улогу јединичне праве у односу на H - центар играти права одређена тачкама H и -1_x , а јединична права 1_k је права која садржи тачке K и -1_y . Уколико јединичне праве одаберемо на неки други начин, онда ће то бити посебно наглашено. Уочимо у равни тачку $P(a, b)$ и праву $l[m, n]$ која садржи дату тачку. Желимо да одредимо потребан и довољан услов да тачка P припада правој l . Јасно је да права HP сече x - осу у тачки чија је нехомогена координата a , а права KP на y - осе одређује тачку чија је нехомогена координата b . Прво разматрамо најопштији случај када тачка P не припада ниједној од координатних оса, а права l се не поклапа са њима. Дакле, све нехомогене координате су различите од нуле. Права l сече x и y - осу у тачкама чије су нехомогене координате $-\frac{1}{m}$, $-\frac{1}{n}$ респективно.



Слика 3.3.1.

Уочимо следеће перспективно пресликавање чији је центар тачка P :

$$0_x a - \frac{1}{m} \infty_x \xrightarrow{P} 0_y \infty_y - \frac{1}{n} b.$$

На основу тог перспективног пресликавања и особине да дворамера остаје непромењена применом произвољног пројективног пресликавања закључујемо следеће:

$R\left(0_x a, -\frac{1}{m} \infty_x\right) = R\left(0_y \infty_y, -\frac{1}{n} b\right)$. Израчунамо вредност леве и десне стране написане једнакости и добићемо тражени услов.

$$R\left(0_x a, -\frac{1}{m} \infty_x\right) = R\left(0_y \infty_y, -\frac{1}{n} b\right)$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{m} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a & -\frac{1}{m} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{n} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\frac{1}{m}}{-1} : \frac{a + \frac{1}{m}}{-1} = \frac{\frac{1}{n}}{-b} : \frac{1}{1}$$

$$\frac{\frac{1}{m}}{a + \frac{1}{m}} = \frac{\frac{1}{n}}{-b}$$

$$-b \frac{1}{m} = \frac{1}{n} \left(a + \frac{1}{m}\right)$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} + \frac{1}{mn} = 0 \quad / \cdot mn$$

$$ma + nb + 1 = 0.$$

Дакле, када развијемо $R\left(0_x a, -\frac{1}{m} \infty_x\right) = R\left(0_y \infty_y, -\frac{1}{n} b\right)$, добијамо тражени услов да тачка P припада правој l : $ma + nb + 1 = 0$. Остало је још да се образложе специјални случајеви када тачка P припада x - оси или када припада y - оси, у жељи да покажемо да написана релација увек важи. У првом од преостала два случаја важи $b = 0$, $a \neq 0$, одакле следи $m = -\frac{1}{a}$ што значи да је релација тачна. Аналогно важи и случај када тачка P припада y - оси. Напомињемо на овом месту још једном да су из разматрања искључене праве које садрже координатни почетак. Међутим, као специјални случај бисмо могли издвојити и онај када права садржи један од два координатна центра. Рецимо, нека права l садржи тачку H . Друга нехомогена координата праве l је једнака нули, односно $n = 0$. Закључујемо да је $a = -\frac{1}{m}$, што значи да је и у овом случају изведена релација тачна. Управо смо показали потребан услов да тачка P припада правој l . Сада ћемо проверити да ли је то и довољан услов,

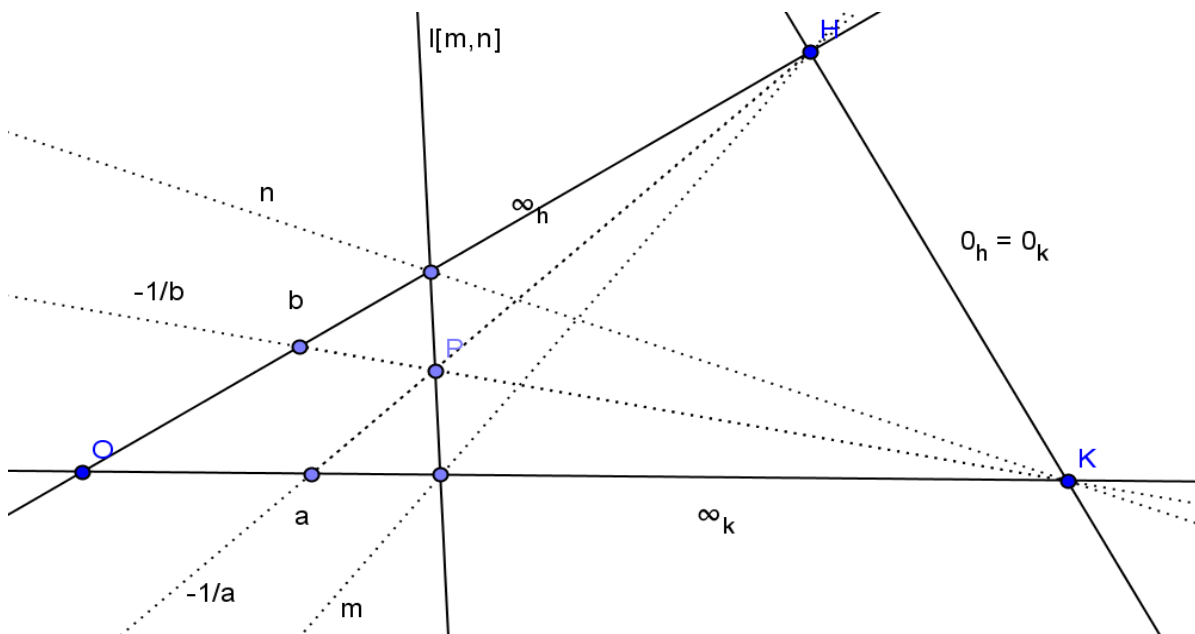
односно ако координате тачке и праве задовољавају релацију $ma + nb + 1 = 0$, да ли можемо тврдити да та тачка припада датој правој. Поступак је потпуно исти као описани, само што идемо од краја ка почетку. Ако важи релација $ma + nb + 1 = 0$, онда важи и једнакост $R\left(0_x a, -\frac{1}{m} \infty_x\right) = R\left(0_y \infty_y, -\frac{1}{n} b\right)$. Из једнакости закључујемо да постоји пројективно пресликавање које четворку прве дворазмере пресликава у четворку тачака друге респективно, а како је то пројективно пресликавање два праволинијска низа тачака са различитим носачима при чему елемент инцидентан са оба носача одговара сам себи, онда је то пресликавање перспективно. Дакле, тачка P мора припадати правој l .

Поменули смо раније принцип дуалитета и сада ћемо услов да тачка припада правој извести на дуалан начин да проверимо у пракси да ли тај принцип заиста функционише.

Правна h - центра која садржи тачку a на x - оси има нехомогену координату $-\frac{1}{a}$, а права k - центра која садржи тачку b на y - оси има нехомогену координату $-\frac{1}{b}$. Права $l[m, n]$ у пресеку са правама ∞_k и ∞_h одређује две тачке које припадају правама h - центра и k - центра респективно и према дефиницији имају координате m и n . Пошто тачка P припада правој l важи следеће перспективно пресликавање између праменова правих са средиштима H и K , чија је оса права l :

$$H\left(-\frac{1}{a}, 0, m, \infty_h\right) \stackrel{l}{=} K\left(-\frac{1}{b}, 0, \infty_k, n\right).$$

На основу теореме 2.4.12. важи $R\left(-\frac{1}{a} 0, m \infty_h\right) = R\left(-\frac{1}{b} 0, \infty_k n\right)$. Када дату једнакост развијемо, долазимо до истог закључка. Односно важи релација $ma + nb + 1 = 0$.



Слика 3.3.2.

3.4. Хомогене координате тачака и правих у пројективној равни

3.4.1. Хомогене координате тачака

До сада смо се упознали са тим да је *скоро* свака тачка у пројективној равни представљена са две нехомогене координате. Из разматрања су биле искључене тачке које припадају сингуларној правој, као и праве које садрже координатни почетак, јер за те елементе не постоје нехомогене координате. Међутим, ми желимо да рачунамо и са тим објектима. Централна тачка рада је спајање геометрије и алгебре. Заиста, разлика између коначних и бесконачних елемената је потпуно неприродна. Хоћемо све елементе у пројективној равни да посматрамо равноправно и због тога уводимо хомогене координате. Видели смо да су тачке и праве у равни дуални објекти и због тога ћемо их представити као уређене n -торке, само још нисмо сигурни са колико хомогених координата. Подсетимо се да смо исти проблем имали код праволинијског низа тачака, јер није постојала нехомогена координата за бесконачну тачку. Тај проблем је решен тако што смо нехомогене координате тачке заменили паром реалних бројева чији је количник једнак нехомогеној координати, а бесконачној тачки је придружен пар $(1,0)$ јер је $\frac{1}{0} = \infty$. Дакле, код једнодимензионих многострукости свака тачка је представљена са уређеним паром хомогених координата, односно у простору димензије један тачке су представљене са две хомогене координате. Дефинисали смо да је пројективна раван дводимензиона многострукост. Како је то простор димензије два, свакој тачки, али и правој придружићемо уређену тројку, односно три хомогене координате. Аналогно, у простору димензије n свакој тачки ћемо придружити $n + 1$ хомогену координату. Сада ћемо да анализирамо пројективну екстензију еуклидске равни у хомогеним координатама. Све елементе ћемо представити као уређене тројке. Дакле, тачке ћемо представити са три координате (a, b, c) . Уколико сваку координату те тројке помножимо истим бројем различитим од нуле, новодобијена тројка $(\lambda a, \lambda b, \lambda c), \lambda \neq 0$ представља исту тачку. Дакле, две пропорционалне тројке представљају исту тачку. Због ове особине уведен је назив хомогене координате. После ћемо се позабавити тиме како хомогене координате тачке одређују њен положај и обрнуто, ако је дата тачка како ћемо одредити њене хомогене координате. Пре него што то урадимо, увешћемо једну релацију еквиваленције која ће нам дати више формалну дефиницију хомогених координата, како бисмо их боље разумели и схватили њихову улогу. Потребно је одредити скуп на којем дефинишемо релацију, а затим и правило када су два елемента из тог скупа у релацији а када нису. Можемо проверити да ли та релација заиста испуњава услове да буде релација еквиваленције и шта ће бити класе еквиваленције, односно како елементе полазног скупа можемо поделити на класе. Дефинишемо релацију $\sim$ на скупу $R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ на следећи начин: $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ ако и само ако је $(x_1, y_1, z_1) = \lambda (x_2, y_2, z_2), \lambda \neq 0$. Дата релација је релација еквиваленције, јер је рефлексивна, симетрична и транзитивна што се лако доказује. Ако је $x = (x_1, x_2, x_3)$ произвољна тројка реалних бројева, $|x|$ означава класу свих тројки λx , где $\lambda \neq 0$. Јасно, две класе су идентичне ако имају једну заједничку уређену тројку реалних бројева. Стога, класа је одређена са произвољном својом тројком.. Чињеница да x и y припадају истој класи означава се са $x \sim y$, а негација овога са $x \not\sim y$. Све класе обухватају бесконачно много различитих тројки. Та особина нам омогућава да дату уређену тројку заменимо са погодном тројком из исте класе при чему ће многе интересантне особине

остати сачуване. Долазимо до још једне дефиниције пројективне равни. Пројективна раван се може дефинисати као скуп свих класа $|x|$ претходно дефинисане релације $\sim$ на скупу $R^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Свака класа представља једну тачку пројективне равни. Сада наилазимо на више значајних питања која ће нас усмерити у даљем раду. Како ћемо направити прелаз са нехомогених на хомогене координате? Да ли постоји разлика у представљању коначних и бесконачних тачака? Да ли ћемо моћи на први поглед да препознамо о којем од два елемента из претходног питања се ради чим погледамо уређену тројку њему придружених хомогених координата?

Прво ћемо видети какву ћемо тројку хомогених координата придружити бесконачним тачкама. По чему ће се те тачке разликовати од обичних, коначних тачака? Пошто је пројективна раван екстензија еуклидске равни, прво ћемо разматрати случај „бесконачних тачака“ са еуклидским координатама, ускоро ће бити јасно шта смо под тим термином подразумевали. Уочимо праву l и на њој произвољну тачку $A = (a, b)$. Затим извршимо параметризацију те праве са реалним интервалом кроз који ће се кретати параметар. Јасно је да је у еуклидској равни свака тачка представљена са две координате. За сваку вредност параметра $t \in R$, добијамо јединствену тачку праве l . Нека је параметризација дата формулом $l(x(t), y(t)) = (a + tx, b + ty)$, $t \in R$ у правцу (x, y) . Под правцем (x, y) подразумевамо да дата права садржи координатни почетак и тачку (x, y) . У наставку разматрамо гранични случај. Повећавањем вредности параметра, тачка $(a + tx, b + ty)$ се све више удаљава од координатног почетка. Датој тачки ћемо придружити уређену тројку тако што ћемо на те две координате додати као трећу координату број 1. Сада је та тачка представљена $(a + tx, b + ty, 1)$. За $t \neq 0$ помножимо добијену уређену тројку са $\frac{1}{t}$. Као резултат добијамо $(\frac{a}{t} + x, \frac{b}{t} + y, \frac{1}{t})$. Пустимо да t тежи бесконачности. Тачка је бесконачно удаљена од координатног почетка и представљена је уређеном тројком $(x, y, 0)$. Идеја за увођење хомогених координата за бесконачне тачке у пројективној равни се крије на овом месту. Заиста, ако посматрамо гранични случај, односно случај када параметар тежи бесконачности, тачка $(a + tx, b + ty)$ постаје (∞, ∞) . Сетимо се да за тачке бесконачне праве нисмо дефинисали нехомогене координате. Међутим, да смо описани поступак ипак применили, свака тачка бесконачне праве би имала координате (∞, ∞) и тиме бисмо изгубили једнозначност. Међутим, приметимо шта се десило са трећом координатом у граничном случају. Трећа координата је постала нула. Ово разматрање ћемо искористити приликом увођења хомогених координата. Покушаћемо да изградимо систем хомогених координата у пројективној равни тако што ће све бесконачне тачке имати трећу координату једнаку нули. Ако том трећом координатом поделимо прве две координате добићемо уређен пар (∞, ∞) . За сада се назире прелазак из једног у други систем координата. Свим коначним тачкама ћемо придружити трећу хомогену координату једнаку броју 1, а бесконачним тачкама нулу. На примерима ћемо видети како функционише прелазак са уређеног пара нехомогених координата на уређену тројку хомогених и обрнуто.

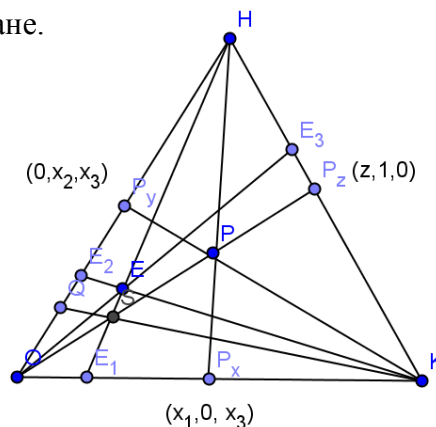
$(1, 2, 5), (2, 4, 10), (-1, -2, -5), (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1)$ су хомогене координате тачке $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. Декартове координате тачке $(8, 16, 4)$ добијамо дељењем све три координате са трећом координатом 4 да бисмо прво добили алтернативне хомогене координате $(2, 4, 1)$ чија је трећа координата једнака један. Стога, Декартове координате тачке су $(2, 4)$.

Упознали смо се са начином преласка са нехомогених на хомогене координате. Јасно је да ћемо бесконачним тачкама придружити уређену тројку чија је трећа координата једнака нули. Међутим, како да одредимо прве две координате? Посебну пажњу посвећујемо фундаменталним тачкама и градиме референтни оквир координатног система у односу на хомогене координате. Уочимо у пројективној равни праву и прогласимо је за бесконачну праву. Затим, уочимо две непаралелне праве, односно чија тачка пресека не припада бесконачној правој. Пресечну тачку те две праве назовемо координатни почетак и означимо је са O . Те две праве ће играти улогу координатних оса и стога ћемо их означити са x, y . Њихове пресечне тачке са бесконачном правом ћемо респективно означити K, H . До сада, све је идентично као и код изградње система нехомогених координата. Тачке O, K и H представљају темена референтног троугла. Ван страна референтног троугла уочимо тачку E која ће играти улогу јединичне тачке. Из темена H пројектујемо тачку E на x - осу и добијемо тачку E_1 . Тачка E_1 се разликује од тачака O и K , пошто тачка E не припада ниједној од страна референтног троугла. Затим пројектујемо тачку E из темена K на y - осу и добијамо тачку E_2 . Из тачке O пројектујемо тачку E на праву KH и добијамо тачку E_3 . Назовимо праву KH z - осу. На свакој страни референтног троугла, односно на свакој координатној оси имамо одређене три различите тачке. Те три тачке на свакој од координатних оса одређују репер и играју улогу фундаменталних тачака у том реперу. У односу на дати репер на свакој координатној оси извршићемо координатизацију и свакој тачки придружићемо нехомогену координату, а затим хомогену координату на начин како је то описано у претходном поглављу рада. Прво ћемо пажњу посветити тачкама x - осе, а затим ћемо и осталим координатним осама, односно њиховим тачкама придружити уређену тројку хомогених координата. Дакле, на x - оси улогу фундаменталних тачака играју тачке O, E_1 и K и као и раније означићемо их респективно са $0_x, 1_x$ и ∞_x . Тим тачкама смо респективно придружили хомогене координате $(0,1), (1,1)$ и $(1,0)$. Ако бисмо у пројективној равни тим тачкама придружили уређену тројку, при чему би прве две координате биле једнаке њиховим хомогеним координатама у односу на праву, а на место треће координате додали број 1, дошли бисмо до „непријатне ситуације“ да би тачке репера и на x - и на y - оси имале исте координате чиме бисмо изгубили једнозначност хомогених координата. Дакле, хоћемо да свака тачка буде једнозначно одређена са своје три хомогене координате. Према томе, морамо приступити решавању овог проблема на други начин. Хоћемо да на темељима хомогених координата које важе на правој изградимо хомогене координате у равни, али морамо то вешто урадити. Јасно је да тачке репера на координатним осама имају исте хомогене координате. Због тога морамо на неки начин направити разлику између координатних оса, односно координата тачака репера. Посматрамо тачке репера x - осе са нехомогеним координатама израженим као количник хомогених $O \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Затим одредимо нехомогене координате тих истих тачака у пројективној равни. Све три тачке припадају x - оси, па им је друга нехомогена координата у равни једнака нули, а прва координата је управо једнака њиховој нехомогеној координати на x - оси. Дакле, $O \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0$ и $K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0$. Исти поступак применимо и на тачке репера y - осе (водимо рачуна да све тачке y - осе имају прву нехомогену координату у равни једнаку нули, а друга координата им је једнака њиховој нехомогеној координати на y - оси) и добијамо: $O \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и

$H\left(0, \frac{1}{0}\right)$. Практично свака од ових тачака садржи три броја, који ће представљати њихове хомогене координате у равни, потребно је још само наћи начин на који ћемо их распоредити. Координатни почетак ту игра веома значајну улогу и помоћи ће нам да направимо разлику и уочимо специфичност сваке координатне осе. Пошто за тачке x - осе важи да им је друга нехомогена координата једнака нули, то правило ћемо задржати и када је реч о хомогеним координатама. Дакле, друга хомогена координата свих тачака у пројективној равни које припадају x - оси је једнака нули, тј. $x_2 = 0$. Аналогно, прва хомогена координата свих тачака на y - оси је једнака нули, тј. $x_1 = 0$. Дакле, све тачке на x - оси имају придружене хомогене координате облика $(x_1, 0, x_3)$. Како смо већ упознати са преласком са хомогених на нехомогене координате у равни, јасно је да ће нехомогена координата те тачке бити $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{0}{x_3}\right)$ тј. $\left(\frac{x_1}{x_3}, 0\right)$; разматрамо случај преласка када је $x_3 \neq 0$. Сада ћемо применити обрнути поступак на нехомогене координате. Закључујемо када је реч о x - оси да ћемо хомогене координате у равни добити тако што прву нехомогену координату напишемо као количник и попуњавамо места у уређеној тројци које ће представљати хомогене координате тако што бројилац разломка заузима место прве координате, друга координата је једнака нули, а именилац заузима треће место у уређеној тројци. Применимо то правило на тачке репера x - осе, $O\left(\frac{0}{1}, 0\right)$, $E_1\left(\frac{1}{1}, 0\right)$ и $K\left(\frac{1}{0}, 0\right)$, записане са нехомогеним координатама баш као што је и потребно и добијамо: $O(0,0,1)$, $E_1(1,0,1)$ и $K(1,0,0)$. Можемо сада свакој тачки x - осе придружити уређену тројку хомогених координата. Исто ћемо урадити и са тачкама које припадају y - оси. Скоро смо констатовали и договорили се да свим тачкама y - осе прва хомогена координата у уређеној тројци буде једнака нули, из разлога што имају прву координату у систему нехомогених координата у равни такође једнаку нули. Дакле, све тачке y - осе имају хомогене координате облика $(0, x_2, x_3)$. Те хомогене координате претварамо у нехомогене тако што прве две координате поделимо са x_3 , пошто говоримо уопштено о поступку, претпоставимо да је $x_3 \neq 0$. Нехомогене координате те тачке су једнаке $\left(0, \frac{x_2}{x_3}\right)$. Дакле, када су нам дате нехомогене координате тачке на y - оси да бисмо добили хомогене применићемо следећи поступак: другу нехомогену координату ћемо написати у облику разломка и правимо хомогене координате тако што прво место уређене тројке заузима нула, друго место бројилац разломка, а трећа хомогена координата ће бити именилац разломка. Применимо то правило на тачке репера y - осе, $O\left(0, \frac{0}{1}\right)$, $E_2\left(0, \frac{1}{1}\right)$ и $H\left(0, \frac{1}{0}\right)$, односно на тачке репера којима смо одредили нехомогене координате у равни и добијамо: $O(0,0,1)$, $E_2(0,1,1)$ и $H(0,1,0)$. Сада веома једноставно можемо одредити свакој тачки на x - и y - оси хомогене координате у пројективној равни. Пре него што пређемо на одређивање хомогених координата произвољне тачке у равни која не припада ниједној страни референтног троугла, остало је да се анализира добијање хомогених координата које ћемо придружити тачкама z - осе. За две тачке те координатне осе смо већ одредили координате, за тачке $K(1,0,0)$ и $H(0,1,0)$. Трећа координата свих тачака z - осе је једнака нули тако да преостаје за сваку тачку да се одреде преостале две хомогене координате. Поступак је потпуно аналоган претходно описаном, само што ће улогу фундаменталних тачака $0_z, 1_z$ и ∞_z које чине репер, играти респективно тачке H, E_3, K . Нехомогене координате тих тачака напишемо у облику разломка: $H\left(\frac{0}{1}\right), E_3\left(\frac{1}{1}\right), K\left(\frac{1}{0}\right)$. Уређену тројку хомогених координата за произвољну тачку бесконачне праве добијамо на следећи начин: трећа координата је једнака нули, прву

координату чини бројилац нехомогене координате написане у облику разломка, а другу координату чини именилац датог разломка. Применом описаног поступка на фундаменталне тачке које чине репер на бесконачној правој добијамо њихове хомогене координате: $H(0, 1, 0), E_3(1, 1, 0), K(1, 0, 0)$. Дакле, све тачке z - осе имају хомогене координате у равни облика: $(x_1, x_2, 0)$. Треба напоменути да када на произвољној координатној оси са произвољне тачке приказане са хомогеним раванским координатама уклонимо нулу која карактерише координатну осу, преостале две координате представљају њене хомогене координате на тој правој. На пример, када произвољној тачки која припада z - осе $(x_1, x_2, 0)$ уклонимо нулу преостале две координате представљају уређен пар (x_1, x_2) хомогених координата те тачке на z - осе у односу на претходно дефинисан репер. Сада знамо свакој тачки на страни референтног троугла да одредимо уређену тројку хомогених координата.

Даље, хоћемо да одредимо хомогене координате произвољној тачки пројективне равни која не припада ниједној од страна референтног троугла, односно која није ни на једној од координатних оса. Уочимо у равни такву тачку P . Пројектујемо ту тачку редом из темена референтног троугла H, K, O респективно на његове супротне стране KO, OH, HK и добијамо респективно три тачке P_x, P_y, P_z . Одредимо нехомогену координату за сваку од ове три тачке у односу на репере изграђене ка координатним осама. Нека је $P_x(x = \frac{x_1}{x_3}), P_y(y = \frac{x_2}{x_3}), P_z(z = \frac{z}{1})$. Тачки P ћемо придружити хомогене координате облика (x_1, x_2, x_3) . Остаје неколико ствари да се провери. Нехомогене координате тачке P су $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$. Увек можемо проширити или скратити размере x и y тако да им други чланови буду једнаки. Од нехомогених координата правимо хомогене тако што доведемо и прву и другу нехомогену координату до разломака који имају исте имениоце. Бројилац прве нехомогене координате ће бити прва хомогена координата, бројилац друге нехомогене ће бити друга хомогена координата, док заједнички именилац и прве и друге нехомогене координате ће бити трећа хомогена координата. У наставку одређујемо хомогене координате пројектованих тачака на координатне осе и добијамо: $P_x(x_1, 0, x_3), P_y(0, x_2, x_3), P_z(z, 1, 0)$. Ако успемо да покажемо да је $z = x_1 : x_2$, односно да тачка P_z има хомогене координате $(x_1, x_2, 0)$, онда ће систем хомогених координата потпуно функционисати и свака тачка ће бити једнозначно одређена са две своје пројекције из темена референтног троугла на његове супротне стране, али и обрнуто ако знамо хомогене координате неке тачке ван страна референтног троугла, онда ћемо знати без икаквог рачунања и хомогене координате све три пројекције из темена референтног троугла на његове супротне стране.



Слика 3.4.1.1.

Посматрамо два перспективна пресликавања респективно са центрима H, K . $x(O, E_1, P_x, K, \dots) \stackrel{H}{\underset{\wedge}{=}} p(O, S, P, P_z, \dots) \stackrel{K}{\underset{\wedge}{=}} y(O, Q, P_y, H)$. Производ описана два перспективна пресликавања је пројективно пресликавање, чак штавише перспективно пресликавање пошто инцидентна тачка са оба праволинијска низа тачака, тачка O одговара сама себи. Дакле, $x(O, E_1, P_x, K, \dots) \stackrel{\wedge}{=} y(O, Q, P_y, H)$. На основу особина дворазмере важи $R(OE_1, P_x K) = R(OQ, P_y H)$. Међутим, да бисмо израчунали дворазмеру, морамо одредити нехомогену координату тачке Q . Посматрамо два нова перспективна пресликавања са центрима O, K . Нека су то пресликавања:

$$z(H, E_3, P_z, K, \dots) \stackrel{O}{\underset{\wedge}{=}} p(H, E, S, E_1, \dots) \stackrel{K}{\underset{\wedge}{=}} y(H, E_2, Q, O).$$

Закључујемо да је $R(HE_3, P_z K) = R(HE_2, QO)$. Применом хомогених координата на правој израчунаћемо прво једну па затим и вредност друге дворазмере.

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & q \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{-z}{-1} : \frac{1-z}{-1} = \frac{1}{1} : \frac{1-q}{1}$$

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-q}, \text{ односно } q = 1 - \frac{z-1}{z}, \text{ тј. } q = \frac{1}{z}.$$

Нехомогена координата тачке Q је једнака $\frac{1}{z}$. Сада можемо да израчунамо и вредност прве написане дворазмере $R(OE_1, P_x K) = R(OQ, P_y H)$.

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ z & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{-x_1}{-1} : \frac{x_3 - x_1}{-1} = \frac{-x_2}{-1} : \frac{x_3 - zx_2}{-z}$$

$$\frac{x_1}{x_1 - x_3} = \frac{x_2 z}{zx_2 - x_3}$$

$$1 - \frac{x_3}{zx_2} = 1 - \frac{x_3}{x_1}$$

$$z = x_1 : x_2.$$

То је и требало показати.

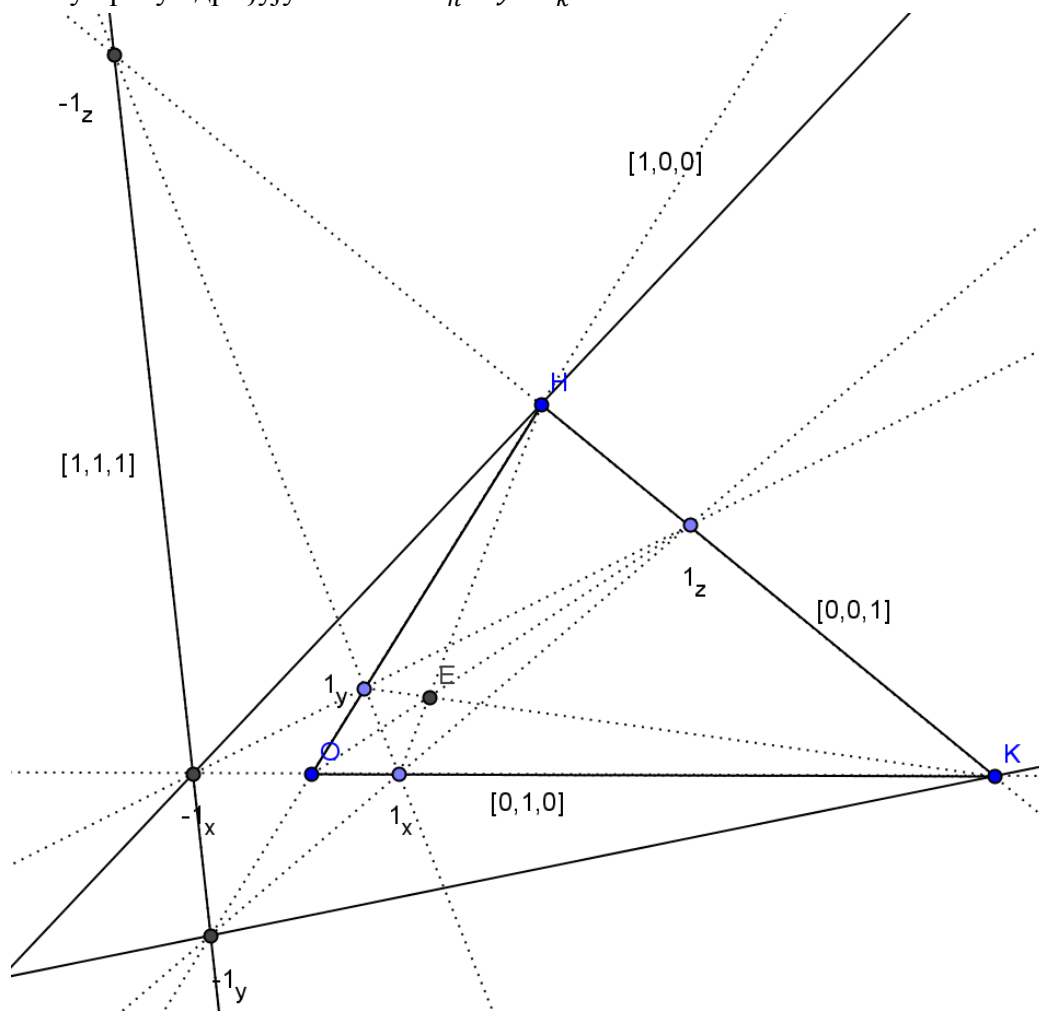
Према томе, свакој тачки пројективне равни може се придружити уређена тројка реалних бројева, (x_1, x_2, x_3) , који нису сви једнаки нули. Та тројка чини хомогене координате поменуте тачке у односу на четворку тачака која представља референтни систем. Уређена тројка $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, $\lambda \neq 0$ образује хомогене координате исте тачке. Обрнуто, свака уређена тројка (x_1, x_2, x_3) реалних бројева који нису сви истовремено једнаки нули, чини хомогене координате тачке. Том уређеном тројком тачка је једнозначно одређена. Пројекција тачке чије су хомогене координате (x_1, x_2, x_3) из темена H, K, O респективно на његове супротне стране KO, OH, HK има хомогене координате $(x_1, 0, x_3)$, $(0, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2, 0)$ респективно.

3.4.2. Хомогене координате правих

У наставку ћемо дефинисати хомогене координате за произвољну праву у равни. Како су тачке и праве у равни дуални објекти, свакој правој ћемо придружити уређену тројку реалних бројева и изградњу референтног оквира за праве ћемо урадити потпуно аналогно као што смо то урадили код хомогених координата тачака. Хомогене координате праве ћемо означавати угластим заградама да бисмо их разликовали од уређене тројке придружене тачкама. Аналогно дефиницији тачке, права је скуп свих тројки облика $\lambda[x_1, x_2, x_3]$ где је λ произвољан реалан број различит од нуле. Та три броја се називају, осим хомогеним још и линијским или тангенцијалним координатама праве. Стога $[4, -7, 2]$ је права, али и уређена тројка $[12, -21, 6]$ представља ту исту праву. Уочимо четири праве у равни и прогласимо их за референтни оквир. Међутим, због лакшег прелаза са једног на други систем координата и искључиво из тог разлога претпоставићемо да је систем нехомогених координата већ изграђен као што је то описано раније. Аналогно фундаменталним тачкама $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, фундаменталним правима ћемо придружити исте хомогене координате само записане у угластим заградама и то $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 1]$. На располагању већ имамо три координатне осе и њима ћемо придружити прве три написане уређене тројке у угластим заградама, само још нисмо сигурни којој оси да придружимо коју уређену тројку. Морамо водити рачуна да додељивање уређених тројки координатним осама буде такво да, када се вратимо на нехомогене координате, за тачке које им припадају буде задовољена једначина која показује да та тачка припада правој. Такође, остаје још нејасно која права ће играти улогу јединичне праве, односно којој правој ћемо придружити уређену тројку $[1, 1, 1]$. Сетимо се још да су код увођења нехомогених координата за праве из разматрања биле искључене праве које садрже координатни почетак. Договорили смо се да за њих не постоје нехомогене координате. Главни циљ увођења хомогених координата је да се и ове праве разматрају равноправно као и друге праве. Идеја је да на свакој од три тачке референтног троугла изградимо репер. Јединична права неће садржати ниједно теме тог троугла. Поступак је потпуно аналоган оном за тачке. Сетимо се још, да смо стране референтног троугла прогласили координатним осама и на свакој оси изградили репер и ван страна референтног троугла изабрали јединичну тачку. То је био референтни оквир када су тачке разматране. У наставку одређујемо хомогене координате правих које чине репер на оба до сада дефинисана координатна центра. У нехомогеним координатама репер на K - центру чине три праве $0_k, 1_k, \infty_k$ којима су придружене хомогене координате $[0, 1]$, $[1, 1]$, $[1, 0]$ респективно. Од тога, $[1, 0]$ су хомогене координате придружене x - осе, $[0, 1]$ су хомогене

координате у односу на репер K -центра придружене бесконачној правој и $[1, 1]$ је права која спаја тачку K и тачку којој је на y - оси придружен број -1 . Затим, хомогене координате правих репера H -центра су исто $[0, 1], [1, 1], [1, 0]$, с тим што је $[1, 0]$ заправо y - оса, $[1, 1]$ права која је одређена тачком H и тачком на x - оси која има нехомогену координату једнаку -1 , док је $[0, 1]$ уређена двојка хомогених координата која представља бесконачну праву. Дакле, нулта права у оба координатна центра је бесконачна права. Подсетимо се, у равни смо свакој правој одређивали две нехомогене координате у односу на репере на сваком центру, односно тачке пресека дате праве са координатним осама смо спајали правама са одговарајућим координатним центром и те две праве су давале две нехомогене координате. Све праве које садрже тачку H имају другу нехомогену координату једнаку нули, док је прва координата управо нехомогена координата те праве у односу на репер H -центра. Дакле, нека права која садржи тачку H има нехомогене координате у равни $[x, 0]$. Број x је нехомогена координата те праве H -центра. Нехомогену координату x можемо написати као количник хомогених координата $\frac{x_1}{x_2}$. Права коју разматрамо има у равни нехомогене координате облика $\left[\frac{x_1}{x_2}, 0\right]$. Аналогно поступку увођења хомогених координата за тачке, и овде ћемо остати при идеји да свим правама које садрже тачку H , како имају другу нехомогену координату једнаку нули, договоримо се да ће им и друга хомогена координата у уређеној тројци бити једнака нули. Хомогене координате посматране праве H -центра ће бити облика $[x_1, 0, x_2]$. Ако изузмемо другу координату која је једнака нули, преостале две координате чине уређен пар $[x_1, x_2]$ хомогених координата H -центра. Овим поступком долазимо до закључка да све праве које садрже тачку H имају другу координату једнаку нули у уређеној тројци хомогених координата у равни, док количник преостале две координате представља нехомогену координату те праве у односу на репер H -центра. Аналогно претходном разматрању, све праве које садрже тачку K како у систему нехомогених координата у равни имају прву координату једнаку нули, њихова прва координата у уређеној тројци хомогених координата ће исто, по договору бити једнака нули, док преостале две координате представљају хомогене координате те праве у односу на репер K - центра. Ако нека права има хомогене координате $[x_1, x_2]$ у односу на репер дефинисан на K - центру, онда су њене хомогене координате у равни представљене уређеном тројком $[0, x_1, x_2]$. Сада свакој правој која је инцидентна са једним од два координатна центра знамо да одредимо хомогене координате у равни. Јасно је које ћемо од фундаменталних правих $[0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0], [1, 1, 1]$ придружити x и y координатној оси. Прва координата је једнака нули код прве и друге од написаних уређених тројки што значи да ће те две праве садржати тачку K . Ако код хомогених координата $[0, 0, 1], [0, 1, 0]$ уклонимо прву координату, оно што остаје су уређени парови $[0, 1], [1, 0]$ који представљају хомогене координате две фундаменталне праве репера K -центра. Дакле, $[0, 1]$ је z оса, па ће $[0, 0, 1]$ представљати хомогене координате бесконачне праве, односно z осе, а $[1, 0]$ је x координатна оса, па ће $[0, 1, 0]$ представљати хомогене координате x - осе у равни. Међутим, праву $[0, 0, 1]$ смо могли посматрати тако да посебну пажњу посветимо томе што има другу координату једнаку нули, што даље на основу претходног разматрања значи да садржи тачку H . Ако бисмо уклонили другу координату остао би уређен пар $[0, 1]$ хомогених координата те праве у односу на репер H -центра, а то је нулта права чију улогу игра бесконачна права, односно z оса. На два начина смо проверили да $[0, 0, 1]$ представља бесконачну праву у равни. Права $[1, 0, 0]$ има другу координату једнаку нули, што значи да у систему нехомогених координата у равни има исто

другу координату једнаку нули, што даље значи да садржи тачку H . Ако уклонимо другу координату остаје уређена двојка $[1, 0]$ хомогених координата праве у односу на репер H -центра, а тај пар представља бесконачну праву репера, односно y -осу. Дакле, хомогене координате које смо придружили y -оси су $[1, 0, 0]$. Коначно, констатујемо да су хомогене координате x, y, z -осе респективно следеће уређене тројке $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[0, 0, 1]$. Да би референтни оквир био потпуно дефинисан остало је још да се одреди јединична права, односно права којој ћемо придружити уређену тројку $[1, 1, 1]$. Да бисмо одредили јединичну праву, подсетимо се како смо одредили јединичну тачку. Јединична тачка се добија у пресеку две праве које спајају темена референтног троугла са јединичном тачком репера на наспрамној страни. Довољно је да одаберемо произвољно две такве праве, јер смо бирали да се све три такве праве секу у јединичној тачки. Ако применимо принцип дуалитета, јединична права је права која је одређена са две тачке добијене у пресеку стране референтног троугла и јединичне праве репера изграђеног на темену троугла који се налази наспрам те стране. Приметимо да још нисмо дефинисали репер прамена правих код темена O тако да нам јединичну праву одређују тачке $x \cdot 1_h$ и $y \cdot 1_k$.



Слика 3.4.2.1.

Дакле, јединична права је одређена са тачкама којима су на x, y координатним осама придружене нехомогене координате $-1_x, -1_y$ респективно. Даље, желимо да покажемо да јединична права $[1, 1, 1]$ сече z осу у тачки која има нехомогену координату -1_z у односу на репер $H = 0_z$, $OE \cdot z = 1_z$, $K = \infty_z$. Нека ово за сада остане отворено питање. Нерешен

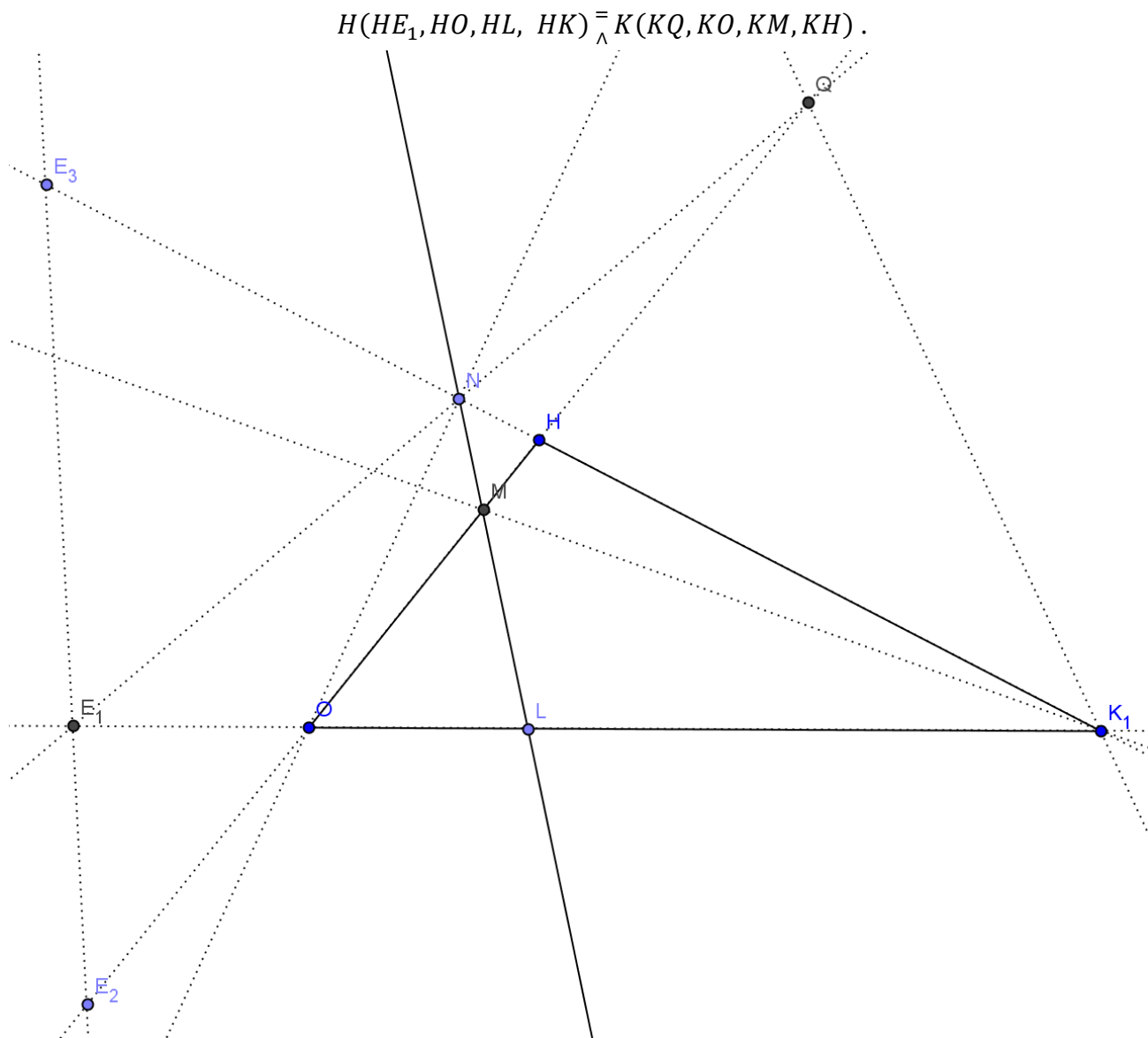
проблем ускоро постаје тривијално прост. Наравно, ми смо већ увели потребан и довољан услов да тачка припада правој уколико су оба објекта дата у својим нехомогеним координатама, међутим, тачка -1_z нема нехомогене координате као тачка бесконачне праве. Са друге стране, ми имамо хомогене координате јединичне праве $[1, 1, 1]$ и хомогене координате тачке $-1_z = (-1, 1, 0)$, али још увек не знамо довољан услов да би та тачка и права били инцидентни. Пре него што уведемо потребан и довољан услов у хомогеним координатама да тачка припада правој, довршићемо посао одређивања хомогених координата за произвољну праву у равни. Видели смо да све праве које садрже тачку H имају хомогене координате облика $[x, 0, z]$, затим све праве које садрже тачку K имају хомогене координате облика $[0, x, y]$. Дефинишемо репер на прамену правих које садрже тачку O . Знамо већ хомогене координате две праве тог прамена. То су $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$. Све праве кроз тачку O ће имати трећу координату једнаку нули. Уколико уклонимо трећу координату x -осе $[0, 1, 0]$, добијамо уређен пар $[0, 1]$. x -оса ће играти улогу нулте праве. y -оса је представљена хомогеним координатама $[1, 0, 0]$, на исти начин, уколико јој уклонимо трећу координату добијамо уређен пар који представља хомогене координате бесконачне праве. Због тога y -оса игра улогу бесконачне праве. Улогу јединичне праве ће играти права која поред тачке O , садржи и тачку на z -оси којој је придружена нехомогена координата -1_z у односу на репер HE_zK . У прамену тачке O дефинисан је репер, тако да сада произвољној правој тог прамена можемо одредити хомогене координате, затим их сместимо на прва два места у угласте заграде и на треће место додамо нулу и као резултат добијамо хомогене координате у равни за ту праву. Дакле, свака права која садржи координатни почетак има хомогене координате у равни облика $[x, y, 0]$. Даље, у разматрање узимамо праву која не садржи ниједно теме референтног троугла. Желимо да одредимо хомогене координате те праве у односу на референтни оквир који, као што смо већ видели, чине праве $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 1]$. Означимо ту праву са p . Тачке пресека праве p са координатним осама x, y, z означимо респективно тачкама L, M, N . Одредимо хомогене координате правих HL, KM, ON и нека су то респективно уређене тројке $[p_1, 0, p_3]$, $[0, p_2, p_3]$, $[l, m, 0]$. Хоћемо да покажемо да $l:m = p_1:p_2$. Приметимо прво да праве HL, KM, ON имају нехомогене координате у односу на репере H, K, O -центра респективно $\frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}, \frac{l}{m}$. Заправо до хомогених координата за те праве у равни, односно до уређених тројки смо дошли баш преко ових нехомогених координата. Да бисмо показали да је $l:m = p_1:p_2$, применићемо два перспективна пресликавања која дају пројективно пресликавање.

Посматрамо производ два перспективна пресликавања респективно са осама x, y , односно код првог перспективног пресликавања сваки пар одговарајућих правих H, N -центра ће бити инцидентан са x -осом, док ће код другог перспективног пресликавања оса бити y -оса, односно сваки пар одговарајућих правих K, N -центра ће бити инцидентан са y -осом.

$$H(HE_1, HO, HL, HK, \dots) \stackrel{x}{\underset{\wedge}{=}} N(NE_1, NO, NL, NK, \dots) \stackrel{y}{\underset{\wedge}{=}} K(KQ, KO, KM, KH).$$

$$E_1 = x \cdot 1_h, E_2 = y \cdot 1_k$$

Производ описана два перспективна пресликавања је пројективно пресликавање, чак шта више перспективно пресликавање пошто права која садржи средишта оба прамена, права z одговара сама себи. Дакле,



Слика 3.4.2.2.

На основу особина дворазмере важи $R(HE_1, HO, HL, HK) = R(KQ, KO, KM, KH)$. Дату једначину ћемо решити тако што ћемо сваку праву написати у хомогеним координатама у односу на координате два центра, тј. у односу на репере H, K - центра. Дате праве имају следеће хомогене координате: $HE_1 = [1, 1], HO = [1, 0], HL = [p_1, p_3], HK = [0, 1], KQ = [x, 1], KO = [1, 0], KM = [p_2, p_3], KH = [0, 1]$.

Применом хомогених координата на правој израчунаћемо прво једну, па затим и вредност друге дворазмере.

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & p_1 \\ 1 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x & p_2 \\ 1 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & p_2 \\ 0 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{p_3 - p_1}{1} : \frac{p_3}{1} = \frac{xp_3 - p_2}{x} : \frac{p_3}{1}$$

$$\frac{p_3 - p_1}{p_3} = \frac{p_3 - \frac{p_2}{x}}{p_3}$$

$$(*) \quad 1:x = p_1:p_2.$$

Посматрамо два нова перспективна пресликавања са осама z, y . Нека су то пресликавања:

$$O(OH, OE_3, ON, OK, \dots) \stackrel{z}{\underset{\wedge}{=}} E_1(E_1H, E_1E_3, E_1N, E_1K, \dots) \stackrel{y}{\underset{\wedge}{=}} K(KH, KE_2, KQ, KO).$$

Закључујемо да је $R(OH, OE_3, ON, OK) = R(KH, KE_2, KQ, KO)$. Применом хомогених координата на правој израчунаћемо прво једну па затим и вредност друге дворазмере. За праве $OH = [1, 0], OE_3 = [1, 1], ON = [l, m], OK = [0, 1], KH = [0, 1], KE_2 = [1, 1], KQ = [x, 1], KO = [1, 0]$ важи:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & l \\ 0 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & l \\ 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{m}{1} : \frac{m-l}{1} = \frac{-x}{-1} : \frac{1-x}{-1}$$

$$\frac{m}{m-l} = \frac{x}{x-1}, \text{ односно } 1 - \frac{l}{m} = 1 - \frac{1}{x}, \text{ тј. } 1:x = l:m. (**)$$

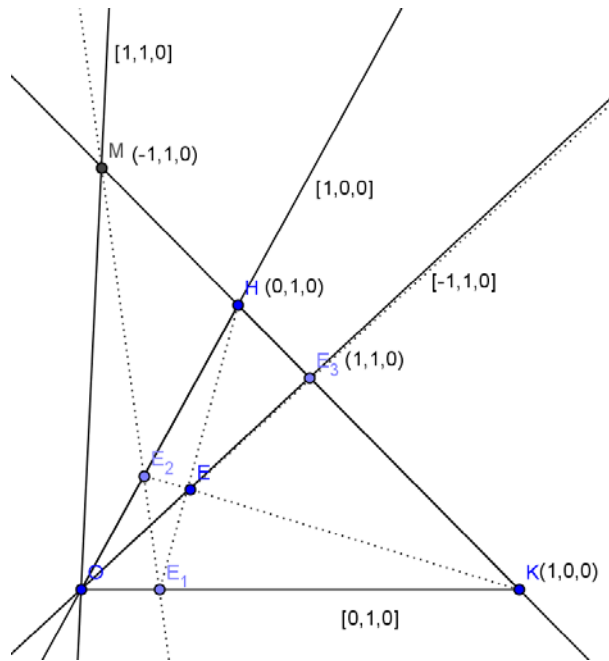
Из (*) и (**) следи да је $p_1:p_2 = l:m$, што је и требало показати.

Дакле, ако је права p која не садржи ниједно теме референтног троугла дата својим хомогеним координатама (нека је то уређена тројка $[l, m, n]$), тада одговарајуће праве редом H, K, O - центра, одређене респективно са тачкама у којима права p сече стране референтног троугла које се налазе наспрам тих центара имају хомогене координате у равни респективно $[l, 0, n], [0, m, n]$ и $[l, m, 0]$. Дакле, свака три реална броја, при чему нису сва три једнака нули, једнозначно одређује праву у равни. Односно, права је одређена ако су дати коефицијенти l, m, n , који нису истовремено једнаки нули. Коефицијенти $\lambda l, \lambda m, \lambda n$, где је λ реалан број различит од нуле, одређују исту праву. Уређена тројка $[l, m, n]$ чини хомогене координате праве. Називају се још линијске или тангенцијалне координате. Да резимирамо још једном. Координатним осама смо придружили редом хомогене координате $[0, 1, 0], [1, 0, 0], [0, 0, 1]$. Приметимо још да све тачке x - осе $[0, 1, 0]$ одликују се особином да им је друга координата једнака нули, затим све тачке y - осе $[1, 0, 0]$ имају прву координату једнаку нули, док је трећа хомогена координата свих тачака z - осе једнака нули. Ово запажање ћемо касније искористити када будемо дефинисали потребан и довољан услов да тачка припада правој. Даље, уколико права садржи само једно теме референтног троугла имаће само једну хомогену координату једнаку нули. Чим видимо хомогене координате праве и уколико та уређена тројка има само једну нулу, одмах знамо који од три темена референтног троугла та права садржи. Ако је прва координата једнака нули, права садржи тачку K , ако је друга координата једнака нули права садржи теме H , а ако је пак трећа координата једнака нули права садржи координатни почетак. Дакле, ако права садржи теме

K , рекли смо да ће имати прву координату једнаку нули, док ће друга и трећа координата бити хомогене координате те праве у односу на репер K - центра. Ако права не садржи ниједно теме референтног троугла, да бисмо одредили њене хомогене координате, довољно је да одредимо њене нехомогене координате $\left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right]$, сваку нехомогену координату напишемо у облику размере тако да им други члан буде једнак и уређена тројка $[x_1, x_2, x_3]$ представља хомогене координате. Обрнуто, ако су дата три реална броја x_1, x_2, x_3 , сва три различита од нуле, права одређена тим координатама се добија на следећи начин: трећом координатом x_3 , како је различита од нуле поделимо прве две и добијамо два броја $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$. Одредимо на x - оси тачку M која има нехомогену координату $-\frac{x_3}{x_1}$, на y - оси тачку N чија је нехомогена координата $-\frac{x_3}{x_2}$. Права MN је тражена права. Дакле, права која има хомогене координате $[x_1, x_2, x_3]$ је права MN . Последњи закључак смо извели захваљујући истовременом систему координата тачака и правих.

3.4.3. Услов да тачка припада правој

Разматраћемо прво најопштији случај да бисмо добили идеју. Нека је дата произвољна права p која не садржи ниједно теме референтног троугла. Хомогене координате те праве су $[p_1, p_2, p_3]$. Нека је M произвољна тачка те праве, која не припада бесконачној правој. Хомогене координате те тачке су (m_1, m_2, m_3) . Пошто је трећа координата тачке M различита од нуле, њене нехомогене координате добијамо дељењем прве две координате са m_3 . Дакле, уређен пар $\left(\frac{m_1}{m_3}, \frac{m_2}{m_3}\right)$ представља нехомогене координате тачке M у равни. Нехомогене координате праве p су $\left[\frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}\right]$. У нехомогеним координатама потребан услов да тачка M припада правој p је $\frac{m_1}{m_3} \cdot \frac{p_1}{p_3} + \frac{m_2}{m_3} \cdot \frac{p_2}{p_3} + 1 = 0$. Множењем сваког члана и леве и десне стране са $m_3 p_3$ добијамо потребан и довољан услов у хомогеним координатама да тачка припада правој и гласи: $m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 = 0$. Јасно је да претходно разматрање важи за све тачке и праве за које је $m_3 p_3 \neq 0$. Проверићемо да ли та веза важи и код елемената којима је трећа координата једнака нули. У ту сврху ћемо прво да посматрамо праве које садрже координатни почетак пошто је њихова трећа хомогена координата једнака нули. Праве које садрже координатни почетак имају хомогене координате облика $[p_1, p_2, 0]$. Ако је $X = (x_1, x_2, x_3)$ променљива тачка праволинијског низа тачака $[p_1, p_2, 0]$, треба да проверимо да ли је испуњен услов, односно да ли за њихове координате важи $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 0 = 0$. Пројективно пресликавање је одређено са три пара одговарајућих елемената. Посматрамо пројективно пресликавање које тачкама бесконачне праве придружује праве прамена чије је средиште тачка O , при чему одговарајући елементи имају исте нехомогене координате у односу на репере прамена правих и праволинијског низа тачака. Посматрамо затим још једно пројективно пресликавање које прамена које садрже тачку O придружује тачке у којима те праве секу бесконачну праву. Производ та два пресликавања је пројективно пресликавање. Сада ћемо видети како функционише то пресликавање и можемо ли извести аналитички израз који важи за координате тачака, тј. ако знамо координате тачке да одмах знамо и координате слике.



Слика 3.4.3.1.

$$z(K, E_3, H, M) \bar{\wedge} O(OH, OM, OK, OE_3) \bar{\wedge} z(H, M, K, E_3)$$

Ако пројективно пресликавање добијено као производ претходна два означимо са π , добијамо да је $\pi(K) = H$ и $\pi(H) = K$. Како је $H \neq K$, наведено пројективно пресликавање је инволуција и аналитички се може представити у нехомогеним координатама у односу на репер $H = 0_z$, $E_3 = 1_z$, $K = \infty_z$ са изразом $x_1 = -1/x$. Како све тачке бесконачне праве имају трећу хомогену координату једнаку нули, та трансформација се може у хомогеним координатама приказати на следећи начин: тачке облика $(x_1, x_2, 0)$ пресликава у тачке $(-x_2, x_1, 0)$. Наравно ту трансформацију је могуће представити на описан начин пошто су координате хомогене, другим речима уређена тројка се може заменити са погодном уређеном тројком множењем свих координата истом произвољном константом различитом од нуле. Зашто смо уопште изводили ово пројективно пресликавање и какву ћемо корист имати од њега? Произвољна права кроз тачку O задата са $[p_1, p_2, 0]$ сече бесконачну праву, односно z -осу у тачки чије су хомогене координате $(-p_2, p_1, 0)$. Овај закључак смо извели на основу претходно дефинисаног пројективног пресликавања, зато што се дата тачка пресликава у тачку у којој права која садржи координатни почетак и која има исте координате као полазна тачка сече бесконачну праву. Одредимо и друге тачке праве $[p_1, p_2, 0]$. Имамо хомогене координате две различите тачке које припадају и које самим тим и одређују праву $[p_1, p_2, 0]$. То су тачке $O = (0,0,1)$ и $(-p_2, p_1, 0)$. Како је тачка $(-p_2, p_1, 0)$ пројекција свих тачака те праве на z -осу из тачке O , прве две координате свих тачака, осим тачке O , ће бити $-p_2, p_1$, тако да ће практично трећа хомогена координата одређивати положај тачке на тој правој. Дакле, ако изузмемо тачку O , све тачке на правој $[p_1, p_2, 0]$ ће имати координате облика $(-p_2, p_1, x_3)$. Горе наведени услов да тачка припада правој је испуњен и за праве које садрже координатни почетак, јер је $-p_2 p_1 + p_1 p_2 + x_3 0 = 0$.

Дакле, тачка $X = (x_1, x_2, x_3)$ и права $p = [p_1, p_2, p_3]$ су инцидентни (тачка лежи на правој, права пролази кроз тачку) ако и само ако је $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0$.

Тачка чије су хомогене координате $(6, 3, 2)$ припада правој $[-2, 2, 3]$, јер је збир производа одговарајућих координата једнак нули. Уколико обичне заграде заменимо угластим, а угласте обичним, добијамо инцидентност и новодобијених објеката.

Ако је $X = (x_1, x_2, x_3)$ променљива тачка на фиксираној правој $p = [p_1, p_2, p_3]$, онда се аналитички једначина праве p може записати изразом $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 0$. На пример, ако је $X = (x_1, x_2, x_3)$ променљива тачка праве $[-2, 2, 3]$, онда се једначина те праве може записати са изразом $-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Све тачке чије координате задовољавају једначину $-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ припадају правој $[-2, 2, 3]$, па се због тога та једначина назива једначина праве и из ње одмах можемо одредити хомогене координате праве.

Ако је $p = [p_1, p_2, p_3]$ променљива права која садржи тачку $X = (x_1, x_2, x_3)$, онда се аналитички једначина свих правих кроз тачку X , односно једначина тачке X може записати изразом $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 0$. На пример, ако је $p = [p_1, p_2, p_3]$ променљива права прамена чије је средиште тачка $(1, 2, -3)$, онда се једначина те тачке може представити $p_1 + 2p_2 - 3p_3 = 0$. Све праве чије координате задовољавају једначину $p_1 + 2p_2 - 3p_3 = 0$ садрже тачку $(1, 2, -3)$, па се због тога та једначина назива једначина тачке и из ње одмах можемо одредити хомогене координате тачке.

3.4.4. Права одређена двема тачкама и тачка одређена двема правама

У пројективној геометрији две различите тачке одређују праву, дуално, две различите праве су инцидентне са тачком. Желимо да покажемо следеће: ако су нам дате хомогене координате две тачке да помоћу њих одредимо координате праве одређене са њима и аналоган проблем, ако су нам дате хомогене координате две праве како помоћу њих да одредити координате тачке коју те праве одређују. Нека су $X = (x_1, x_2, x_3)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3)$ две различите тачке. Нека је права p одређена са те две тачке. Хомогене координате праве p које желимо да одредимо ћемо означити са $[p_1, p_2, p_3]$. Како тачке X, Y припадају правој p , добијамо систем од две линеарне једначине са три непознате:

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 &= 0 \\ p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Разматрамо прво случај када права не садржи координатни почетак, односно када јој је трећа хомогена координата различита од нуле. Како су у питању хомогене координате, уређену тројку $[p_1, p_2, p_3]$ увек можемо помножити са бројем $\frac{1}{p_3}$ тако да трећа координата буде једнака један. Полазни систем сада постаје систем од две линеарне једначине са две непознате:

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= -x_3 \\ p_1y_1 + p_2y_2 &= -y_3. \end{aligned}$$

Тај систем решимо помоћу детерминанти Крамеровим правилом и добијамо:

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & x_2 \\ -y_3 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}, \quad p_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -x_3 \\ y_1 & -y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Детерминанта система $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ је различита од нуле. Ако би пак детерминанта система била једнака нули, то би значило $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, односно $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$. Разликујемо два случаја: а) $x_1 : x_2 : x_3 = y_1 : y_2 : y_3$, б) $x_2 : x_3 \neq y_2 : y_3$. Први случај није могућ пошто су X и Y две различите тачке. У другом случају систем постаје немогућ, односно нема решење.

Дакле, у најопштијем случају добили смо решење система и одредили координате праве p .

Хомогене координате праве p су $\left[\frac{\begin{vmatrix} -x_3 & x_2 \\ -y_3 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -x_3 \\ y_1 & -y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}, 1 \right]$. Како је $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$, помножимо уређену тројку са $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ и добијамо алтернативне хомогене координате праве

$$p = \left[\begin{vmatrix} -x_3 & x_2 \\ -y_3 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & -x_3 \\ y_1 & -y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right].$$

Применимо једну од особина детерминанти. Определимо се да координате праве одређене са две тачке буду:

$$p = \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right].$$

Следећи случај који разматрамо је случај када права садржи координатни почетак, односно када има трећу хомогену координату једнаку нули. Тада систем постаје:

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 &= 0 \\ p_1 y_1 + p_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Видели смо да све тачке те праве, осим координатног почетка имају координате облика $(-p_2, p_1, c)$. Како је $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$, систем има бесконачно много решења, што се уклапа у причу о хомогеним координатама, па ће координате те праве бити рецимо $p = [-x_2, x_1, 0]$.

Покажимо да између координата $[-x_2, x_1, 0]$ и $\left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right]$ уопште нема разлике, односно да најопштију формулу можемо користити и у овом специјалном случају.

Ако заменимо координате тачака дате праве у $\left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right]$, трећа координата праве постаје нула; остаје још да се покаже да је $\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = -x_2 : x_1$.

Сређујемо сваку координату посебно. Разматрамо случај када су коефицијенти различити од нуле и користимо: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. За прву координату важи: $\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2 = x_2 y_3 -$

$x_3 \frac{y_1 x_2}{x_1} = x_2 \left(y_3 - x_3 \frac{y_1}{x_1} \right) = x_2 \left(y_3 - x_3 \frac{y_2}{x_2} \right) = -x_2 \left(x_3 \frac{y_2}{x_2} - y_3 \right)$. За другу координату

важи: $\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = x_3 y_1 - x_1 y_3 = x_3 y_2 \frac{x_1}{x_2} - x_1 y_3 = x_1 \left(x_3 \frac{y_2}{x_2} - y_3 \right)$. Заиста важи

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = -x_2 : x_1.$$

Ако обе тачке имају трећу координату једнаку нули, онда је у питању бесконачна права и њене хомогене координате су $[0,0,1]$.

Ако су $X = (x_1, x_2, x_3)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3)$ две различите тачке, онда права одређена са те две тачке има координате облика $\left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right]$. На пример, јединичне тачке репера x и y координатних оса, односно тачке $(1,0,1)$ и $(0,1,1)$ одређују праву чије су координате $[-1, -1, 1]$.

За праве важи потпуно аналогно тврђење.

Ако су $m = (m_1, m_2, m_3)$ и $n = (n_1, n_2, n_3)$ две различите праве, онда тачка одређена са те две праве има координате облика $\left[\begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ n_3 & n_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \right]$. Тачка пресека две паралелне праве је бесконачна тачка, односно тачка чија је трећа координата једнака нули. Пресек две праве које нису паралелне је обична тачка, трећа координата јој је различита од нуле. На пример, нека су дате две праве, рецимо z - оса $[0,0,1]$ и права из претходног примера, тј. права $[1, 1, -1]$ одређена јединичним тачкама x и y координатних оса. Те две праве се секу у тачки $(-1,1,0)$. Тачка пресека представља тачку која у односу на репер дефинисан на z - оси има нехомогену координату -1_z . Аналогно, праве одређене помоћу две јединичне тачке било које две координатне осе секу трећу координатну осу у тачки која има нехомогену координату -1 у односу на репер дефинисан на њој. Сада можемо проверити и аналитички да јединична права $[1, 1, 1]$ сече z - осу у тачки $(1, -1, 0)$

3.4.5. Услов колинеарности тачака и конкурентности правих

Нека су дате три тачке са својим хомогеним координатама: $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3)$. Тражимо потребан и довољан услов да су колинеарне.

Претпоставимо да су тачке колинеарне. Све три тачке су инцидентне са неком правом $p = [p_1, p_2, p_3]$ тако да њихове хомогене координате задовољавају следеће три једначине:

$$\begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 &= 0 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 &= 0 \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 &= 0 \end{aligned}$$

Добили смо систем три једначине са три непознате. Јасно је да је једно од решења тривијално решење $(0,0,0)$ и то решење добијамо ако је детерминанта система различита од нуле. Међутим, не постоји права чије су хомогене координате $(0,0,0)$. Да би систем имао

нетривијално решење мора $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$. Дакле, те три тачке одређују праву ако је

детерминанта $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ једнака нули. Ако је та детерминанта различита од нуле, у том случају не постоји права одређена са дате три тачке, што значи да нису колинеарне. Проверимо да ли су, рецимо, тачке $-1_x, -1_y$ и -1_z колинеарне. Њихове хомогене координате су респективно $(-1, 0, 1)$, $(0, -1, 1)$ и $(-1, 1, 0)$. Како је вредност детерминанте $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ једнака нули, следи да су те три тачке колинеарне.

Аналогно тврђење можемо извести и за праве.

Нека су дате три праве са својим хомогеним координатама: $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$. Те три праве су конкурентне ако и само ако је детерминанта $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ једнака нули.

У наставку повезујемо хомогене координате праве одређене са две тачке са једначином праве коју задовољавају све тачке на њој. Тај резултат ћемо да повежемо са детерминантама. Дакле, нека су дате две тачке $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ и променљива тачка $X = (x_1, x_2, x_3)$ на правој AB . Како су све три тачке колинеарне, следи да детерминанта $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$ има вредност нула. Уколико развијемо детерминанту по трећој врсти, добијемо једначину:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ту једначину можемо записати и у облику:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Права одређена тачкама $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ има координате:

$$\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right].$$

Дакле, једначина $x_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ представља једначину праве AB .

Аналогно тврђење важи и за праве.

Нека су дате две праве са својим хомогеним координатама $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$. Нека $p = (p_1, p_2, p_3)$ представља произвољну праву конкурентну са a и b . Сада ћемо да одредимо једначину тачке одређене правима a и b . Како су све три праве конкурентне са

истом тачком следи да детерминанта $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$ има вредност нула. Развијањем те детерминанте по последњој врсти добијамо једначину:

$$p_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - p_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + p_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Након сређивања добија се једначина:

$$p_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + p_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

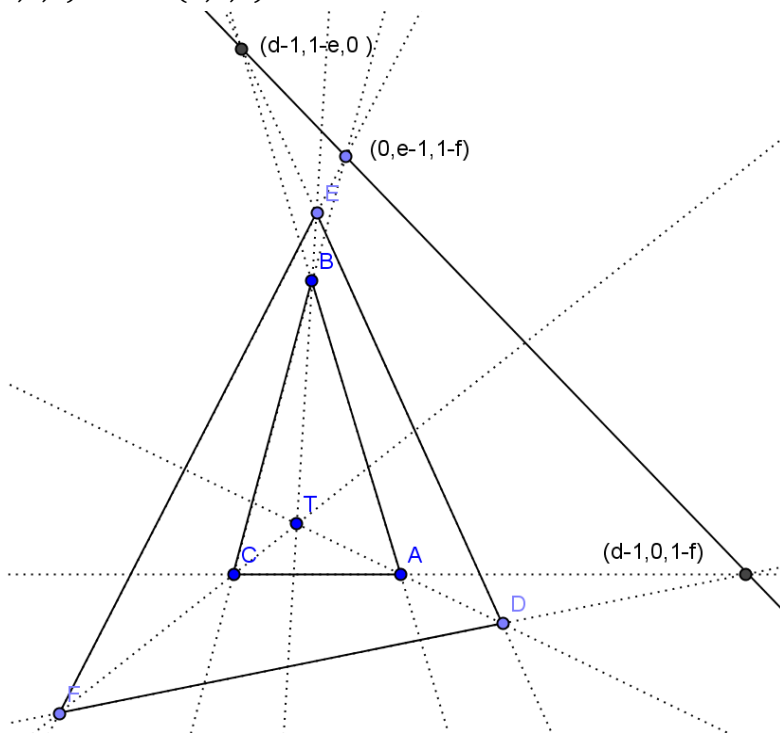
Како тачка одређена правама a и b има координате $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$, то једначина $p_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + p_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ представља једначину те тачке.

3.5. Аналитички доказ Дезаргове теореме

Прво ћемо да формулишемо Дезаргову теорему.

Дезаргова теорема 3.5.1. Ако су праве које спајају одговарајућа темена два тротеменика конкурентне, тачке пресека парова одговарајућих страна су колинеарне.

Доказ. Нека су ABC и DEF два тротеменика таква да су праве које спајају одговарајућа темена конкурентне. Дакле, праве AD , BE и CF секу се у тачки T . Нека важи: $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ и $T = (1,1,1)$.



Слика 3.5.1.

Координате тачке $D = (d_1, d_2, d_3)$ одређујемо из услова колинеарности са тачкама $A = (1,0,0)$ и $T = (1,1,1)$. Важи:

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Добијамо: $d_3 - d_2 = 0$, односно $d_2 = d_3$. Хомогене координате тачке D су $(d, 1, 1)$.

Координате тачке $E = (e_1, e_2, e_3)$ одређујемо из услова колинеарности са тачкама $B = (0,1,0)$ и $T = (1,1,1)$. Важи:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Добијамо: $e_1 - e_3 = 0$, односно $e_1 = e_3$. Хомогене координате тачке E су $(1, e, 1)$.

Координате тачке $F = (f_1, f_2, f_3)$ одређујемо из услова колинеарности са тачкама $C = (0,0,1)$ и $T = (1,1,1)$. Важи:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Добијамо: $f_2 - f_1 = 0$, односно $f_1 = f_2$. Хомогене координате тачке F су $(1, 1, f)$.

Треба доказати да су тачке $AB \cdot DE, BC \cdot EF, AC \cdot DF$ колинеарне, односно да је вредност одговарајуће детерминанте једнака нули. Навешћемо још једном свих шест тачака:

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1), D = (d, 1, 1), E = (1, e, 1), F = (1, 1, f).$$

$$AB = \left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] = [0, 0, 1]$$

$$DE = \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d & 1 \\ 1 & e \end{vmatrix} \right] = [1 - e, 1 - d, de - 1]$$

Тачка одређена са те две праве има координате:

$$AB \cdot DE = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 - d & de - 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ de - 1 & 1 - e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 - e & 1 - d \end{vmatrix} \right) = (d - 1, 1 - e, 0).$$

$$BC = \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right] = [1, 0, 0]$$

$$EF = \left[\begin{vmatrix} e & 1 \\ 1 & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & e \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] = [ef - 1, 1 - f, 1 - e]$$

Тачка одређена са те две праве има координате:

$$BC \cdot EF = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 - f & 1 - e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 - e & ef - 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ ef - 1 & 1 - f \end{vmatrix} \right) = (0, e - 1, 1 - f).$$

$$AC = \left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right] = [0, -1, 0]$$

$$DF = \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & d \\ f & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] = [f - 1, 1 - df, d - 1].$$

Тачка одређена са те две праве има координате:

$$AC \cdot DF = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 - df & d - 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ d - 1 & f - 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ f - 1 & 1 - df \end{vmatrix} \right) = (1 - d, 0, f - 1).$$

Треба показати да су тачке $(d - 1, 1 - e, 0), (0, e - 1, 1 - f), (1 - d, 0, f - 1)$ колинеарне.

$$\begin{vmatrix} d - 1 & 1 - e & 0 \\ 0 & e - 1 & 1 - f \\ 1 - d & 0 & f - 1 \end{vmatrix} = (d - 1)(e - 1)(f - 1) + (1 - e)(1 - f)(1 - d) = \\ = (d - 1)(e - 1)(f - 1) - (e - 1)(f - 1)(d - 1) = 0.$$

3.6. Трансформације координата

У свакој геометрији трансформације заузимају значајно место. Постоје различити аспекти при самом приступању и проучавању трансформација што искључиво зависи од тога шта са њима желимо да постигнемо. Можемо применом трансформација да променимо референтни оквир, после којих ће исти објекти бити приказани у новом координатном систему. Мењамо угао гледања, дозвољено нам је да фундаменталне тачке одаберемо на погодан начин и пресликамо пројективни простор на самог себе. Међутим, трансформације нам омогућавају и да померамо објекте са једне на другу позицију, па чак и да их деформишемо. Без обзира у коју сврху их користимо, ипак њихова најзначајнија особина је да остављају поједине особине објеката непромењеним.

У оквиру овог поглавља дефинисан је референтни оквир који се састоји од четири тачке од којих никоје три нису колинеарне. Помоћу тих тачака извршена је координатизација пројективне равни тако што су прво уведене нехомогене координате, а затим и хомогене да би се избегао посебан карактер појединих елемената, с обзиром да пројективна геометрија негује дух да су сви објекти равноправни. Произвољна тачка X је у пројективној равни представљена са три хомогене координате (x_1, x_2, x_3) . Даље, циљ нам је да покажемо шта ће се десити са координатама тачке X , уколико променимо референтни оквир одабиром четири нове фундаменталне тачке. Тачки X ће бити придружене нове координате. Настојаћемо да откријемо везу која важи између старих и нових координата. Ова слобода избора референтног оквира ће нам често поједноставити рачунања и омогућити да координатни систем одаберемо на погодан начин. Такође, показаћемо да кореспонденција тачака имплицира кореспонденцију правих и обрнуто, односно каже се да је једна кореспонденција индукована другом.

Најзначајнија особина пројективних трансформација је трансформација координата. Прво ћемо разматрати најопштији случај када су дате две четворке тачака у истој пројективној равни, од којих прва представља постојећи референтни оквир, а друга нови. Желимо да координате произвољне тачке X изразимо у координатама тог другог референтног оквира. Нека су A_1, B_1, C_1 и D_1 четири тачке од којих никоје три нису колинеарне и нека је A_2, B_2, C_2 и D_2 друга четворка тачака од којих никоје три нису колинеарне. Сваку од осам датих референтних тачака представимо хомогеним координатама:

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), B_1 = (b_{11}, b_{12}, b_{13}), \dots, C_2 = (c_{21}, c_{22}, c_{23}), D_2 = (d_{21}, d_{22}, d_{23}).$$

Хомогене координате сваке тачке су означене са два броја у индексу, при чему први број указује на координатни систем. На пример, код тачке $A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, број a_{12} је друга хомогена координата те тачке у односу на први референтни оквир. Дакле, први број у индексу може бити или један или два и показује у односу на који од два референтна оквира су то хомогене координате.

У два пројективна координатна система важи:

$$\begin{aligned} X &= x_{11}(a_{11}, a_{12}, a_{13}) + x_{12}(b_{11}, b_{12}, b_{13}) + x_{13}(c_{11}, c_{12}, c_{13}) \\ X &= x_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + x_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + x_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23}), \text{ тј.} \end{aligned}$$

$X = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ у првом референтном оквиру,

$X = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$ у другом референтном оквиру.

Пошто су тачке A_1, B_1, C_1 неколинеарне важи $|A_1, B_1, C_1| \neq 0$, а из истог разлога следи да је и $|A_2, B_2, C_2| \neq 0$. Дакле, свака референтна тачка првог координатног система се може изразити као линеарна комбинација референтних тачака другог и важи:

$$A_1 = m_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + m_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + m_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23}),$$

$$B_1 = n_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + n_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + n_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23}),$$

$$C_1 = k_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + k_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + k_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23}).$$

Такође важи, $\Delta = \begin{vmatrix} m_{21} & n_{21} & k_{21} \\ m_{22} & n_{22} & k_{22} \\ m_{23} & n_{23} & k_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, у супротном би једна колона била линеарна

комбинација друге две, што би значило да су тачке A_1, B_1, C_1 колинеарне, што није тачно.

$$\begin{aligned} \text{Дакле, } X &= x_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + x_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + x_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23}) = \\ &= x_{11}(a_{11}, a_{12}, a_{13}) + x_{12}(b_{11}, b_{12}, b_{13}) + x_{13}(c_{11}, c_{12}, c_{13}) = \\ &= x_{11}[m_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + m_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + m_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23})] + \\ &\quad + x_{12}[n_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + n_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + n_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23})] + \\ &\quad + x_{13}[k_{21}(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + k_{22}(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + k_{23}(c_{21}, c_{22}, c_{23})] = \\ &= (a_{21}, a_{22}, a_{23})(x_{11}m_{21} + x_{12}n_{21} + x_{13}k_{21}) + \\ &\quad + (b_{21}, b_{22}, b_{23})(x_{11}m_{22} + x_{12}n_{22} + x_{13}k_{22}) + \\ &\quad + (c_{21}, c_{22}, c_{23})(x_{11}m_{23} + x_{12}n_{23} + x_{13}k_{23}). \end{aligned}$$

Када се упореде коефицијенти добија се:

$$x_{21} = x_{11}m_{21} + x_{12}n_{21} + x_{13}k_{21},$$

$$x_{22} = x_{11}m_{22} + x_{12}n_{22} + x_{13}k_{22},$$

$$x_{23} = x_{11}m_{23} + x_{12}n_{23} + x_{13}k_{23}.$$

Ово су једначине за трансформацију из x_{1i} у систем координата x_{2i} , $i = 1, 2, 3$.

У наставку разматрамо специјалан случај, односно случај када се фундаменталне тачке $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ трансформишу редом у тачке $A = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $B = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$, $C = (c_{21}, c_{22}, c_{23})$ и $D = (d_{21}, d_{22}, d_{23})$.

Посматрајмо сада линеарну трансформацију коју смо добили разматрајући најопштији случај:

$$\begin{aligned}\sigma x_{21} &= x_{11}m_{21} + x_{12}n_{21} + x_{13}k_{21}, \\ \sigma x_{22} &= x_{11}m_{22} + x_{12}n_{22} + x_{13}k_{22}, \\ \sigma x_{23} &= x_{11}m_{23} + x_{12}n_{23} + x_{13}k_{23}.\end{aligned}$$

Веома лако можемо одредити коефицијенте дате трансформације. Када се тачка $(0,0,1)$ трансформише у тачку $A = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, добијамо:

$$k_{21} = \sigma a_{21}, k_{22} = \sigma a_{22} \text{ и } k_{23} = \sigma a_{23},$$

где је σ фактор пропорционалности, различит од нуле и који можемо одабрати на погодан начин.

Слично, трансформацијом тачака $(0,1,0)$ и $(1,0,0)$, добијамо:

$$\begin{aligned}n_{21} &= \varphi b_{21}, n_{22} = \varphi b_{22} \text{ и } n_{23} = \varphi b_{23}, \\ m_{21} &= \tau c_{21}, m_{22} = \tau c_{22} \text{ и } m_{23} = \tau c_{23}.\end{aligned}$$

Као што је наведено у општем случају, тачке A, B и C нису колинеарне, јер би у супротном добили да су фундаменталне тачке полазног референтног оквира колинеарне, а што је у супротности са полазном претпоставком.

Сада добијене коефицијенте вратимо у линеарну трансформацију.

$$\begin{aligned}\rho x_{21} &= x_{11}\tau c_{21} + x_{12}\varphi b_{21} + x_{13}\sigma a_{21}, \\ \rho x_{22} &= x_{11}\tau c_{22} + x_{12}\varphi b_{22} + x_{13}\sigma a_{22}, \\ \rho x_{23} &= x_{11}\tau c_{23} + x_{12}\varphi b_{23} + x_{13}\sigma a_{23}.\end{aligned}$$

Даље, трансформацијом тачке $(1,1,1)$ у тачку $D = (d_{21}, d_{22}, d_{23})$ важи следеће:

$$\begin{aligned}\rho d_{21} &= \tau c_{21} + \varphi b_{21} + \sigma a_{21}, \\ \rho d_{22} &= \tau c_{22} + \varphi b_{22} + \sigma a_{22}, \\ \rho d_{23} &= \tau c_{23} + \varphi b_{23} + \sigma a_{23}.\end{aligned}$$

Заменимо $\rho = 1$ и решимо систем једначина по τ, φ и σ и добијамо коефицијенте трансформације. Пошто је детерминанта система различита од нуле, решење је јединствено. Штавише, ниједна од вредности τ, φ и σ није једнака нули. Ако претпоставимо да је на пример $\varphi = 0$, следећа детерминанта би имала вредност нула,

$$\begin{vmatrix} c_{21} & d_{21} & a_{21} \\ c_{22} & d_{22} & a_{22} \\ c_{23} & d_{23} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \text{ што би на значило да су тачке } C, D \text{ и } A \text{ колинеарне, а што је супротно}$$

претпоставци да никоје три од њих нису колинеарне.

Целокупна претходна конструкција је заснована на хомогеним координатама. Као последицу свега наведеног, можемо да напишемо и једначине тих трансформација у нехомогеним координатама, тако што трећом линеарном једначином поделимо прве две и добијамо:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{xm_{21} + yn_{21} + k_{21}}{xm_{23} + yn_{23} + k_{23}}, \\ y_1 &= \frac{xm_{22} + yn_{22} + k_{22}}{xm_{23} + yn_{23} + k_{23}}, \text{ при чему је:} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} m_{21} & n_{21} & k_{21} \\ m_{22} & n_{22} & k_{22} \\ m_{23} & n_{23} & k_{23} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Међутим, ако се сингуларна права у систему нехомогених координата трансформише у саму себе, дата трансформација се може написати овако:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y_1 &= a_2x + b_2y + c_2, \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} &\neq 0. \end{aligned}$$

Жеља је да се у наставку рада упознамо са начином како кореспонденција тачака дата претходно описаним линеарним једначинама имплицира кореспонденцију правих. То омогућава да разлике између једних пројективних координата и произвољног другог система пројективних координата потпуно нестану. Прво ћемо видети како претходно наведене линеарне једначине трансформишу сваку праву у равни у јединствену праву. Нека је $X = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ произвољна тачка. Нека тачка X задовољава једначину праве: $u_{11}x_{11} + u_{12}x_{12} + u_{13}x_{13} = 0$, $[u_{11}, u_{12}, u_{13}] \neq 0$, као што видимо у координатама x_{1i} , $i = 1, 2, 3$. Да бисмо одредили координате те исте праве у односу на систем координата x_{2i} , морамо се упознати са инверзном трансформацијом за тачке и то из x_{2i} у x_{1i} систем координата. Правимо кратку дигресију и применом основних алгебарских операција добија се инверзна трансформација за трансформацију

$$\begin{aligned} \sigma x_{21} &= x_{11}m_{21} + x_{12}n_{21} + x_{13}k_{21}, \\ \sigma x_{22} &= x_{11}m_{22} + x_{12}n_{22} + x_{13}k_{22}, \\ \sigma x_{23} &= x_{11}m_{23} + x_{12}n_{23} + x_{13}k_{23} \end{aligned}$$

и која је дата са:

$$\begin{aligned} \sigma_1 x_{11} &= x_{21}A_{11} + x_{22}B_{11} + x_{23}C_{11}, \\ \sigma_1 x_{12} &= x_{21}A_{12} + x_{22}B_{12} + x_{23}C_{12}, \\ \sigma_1 x_{13} &= x_{21}A_{13} + x_{22}B_{13} + x_{23}C_{13}, \end{aligned}$$

при чему су коефицијенти у том систему (велика латинична слова) кофактори одговарајућих

елемената у детерминанти $A = \begin{vmatrix} m_{21} & n_{21} & k_{21} \\ m_{22} & n_{22} & k_{22} \\ m_{23} & n_{23} & k_{23} \end{vmatrix}$, односно $A \rightarrow m$,

$B \rightarrow n, C \rightarrow k$. Пропорција $x_{11}:x_{12}:x_{13} = x_{21}:x_{22}:x_{23}$ имплицира да се одговарајуће тачке са датим хомогеним координатама поклапају. После кратке дигресије која нам је омогућила да без икаквих проблема напустимо један и пређемо у други координатни систем, а затим да се лако поново вратимо у првобитни систем, настављамо причу о координатама праве $[u_{11}, u_{12}, u_{13}]$ кроз дату тачку X . У једначини праве $u_{11}x_{11} + u_{12}x_{12} + u_{13}x_{13} = 0$ заменимо координате тачке X са одговарајућим x_{2i} координатама и добијамо:

$$u_{11}(x_{21}A_{11} + x_{22}B_{11} + x_{23}C_{11}) + u_{12}(x_{21}A_{12} + x_{22}B_{12} + x_{23}C_{12}) + u_{13}(x_{21}A_{13} + x_{22}B_{13} + x_{23}C_{13}) = 0.$$

Након сређивања израза се добија:

$$x_{21}(A_{11}u_{11} + A_{12}u_{12} + A_{13}u_{13}) + x_{22}(B_{11}u_{11} + B_{12}u_{12} + B_{13}u_{13}) + x_{23}(C_{11}u_{11} + C_{12}u_{12} + C_{13}u_{13}) = 0.$$

Закључујемо да тачка X у координатама x_{2i} задовољава претходну једначину, што није ништа друго до једначина праве. Ако координате те *нове праве* означимо са u_{21}, u_{22}, u_{23} , добијамо $u_{21}x_{21} + u_{22}x_{22} + u_{23}x_{23} = 0$. Координате u_{2i} не могу све истовремено бити једнаке нули, јер би у супротном систем

$$\begin{aligned} u_{21} &= A_{11}u_{11} + A_{12}u_{12} + A_{13}u_{13}, \\ u_{22} &= B_{11}u_{11} + B_{12}u_{12} + B_{13}u_{13}, \\ u_{23} &= C_{11}u_{11} + C_{12}u_{12} + C_{13}u_{13}, \end{aligned}$$

био хомоген, а како је детерминанта система различита од нуле, следило би

$$[u_{11}, u_{12}, u_{13}] = 0.$$

Каже се да кореспонденција тачака индукује кореспонденцију правих.

На крају овог дела остане само да сумирамо резултате и донесемо закључак да се произвољна пројективна колинеација у равни може представити у координатама тачака или у координатама правих са три одговарајуће линеарне једначине, при чему је детерминанта система у оба случаја различита од нуле, али и обрнуто, да свака трансформација од три линеарне једначине са детерминантом система различитом од нуле представља пројективну колинеацију у равни.

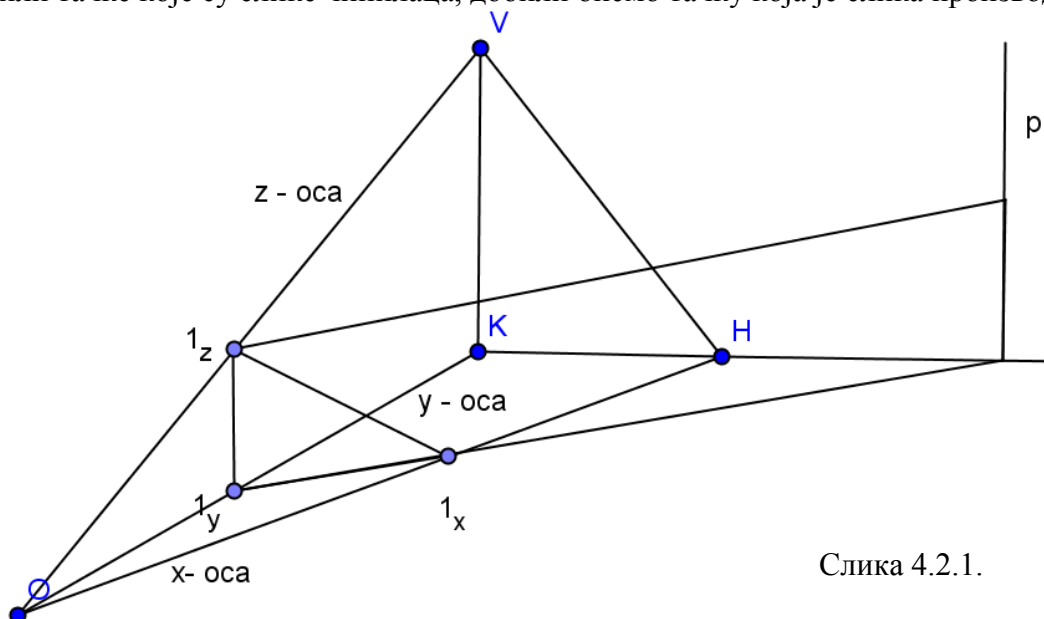
4. Тродимензионе многострукости

4.1. Настанак пројективног простора

До сада смо се бавили пројективном геометријом на једнодимензионим и дводимензионим многострукостима. Неке специјалне случајеве смо избегавали увођењем бесконачних елемената, а неке смо доказивали позивајући се на принцип дуалитета. Тај концепт желимо да применимо и на простор димензије три. Подсетимо се да смо пројективну раван изградили проширивањем „обичне“ Еуклидове равни, аналогно томе тродимензиони пројективни простор ћемо добити разматрањем Еуклидовог простора и проширићемо га са бесконачним елементима да избегемо неке специјалне случајеве. На пример, две праве, уколико се не секу, могу бити или паралелне или мимоилазне (не постоји раван која их садржи); равни могу бити паралелне или се секу по правој. Свакој класи паралелних правих придружимо по једну бесконачну тачку, док ће мимоилазне праве бити садржане у две паралелне равни. Приметимо да три паралелне праве не морају да припадају истој равни. Даље, желимо да тачке и равни посматрамо као дуалне елементе. Како сваке две тачке одређују праву, онда и сваке две равни морају да одређују праву. Проблем се јавља код паралелних равни. То решавамо тако што свакој класи паралелних равни придружимо по једну бесконачну (сингуларну) праву. Скуп тачака који се састоји од свих бесконачних тачака образује раван. Ту раван ћемо убудуће звати бесконачна или сингуларна раван. Ако у Еуклидовом простору уочимо сингуларну раван и придружимо јој особине које смо непосредно навели а односе се на решавање паралелних ситуација, добијамо пројективни простор. Дакле, скуп свих тачака Еуклидовог простора заједно са бесконачним тачкама формира пројективни тродимензиони простор. Приметимо да и у овом простору две равни могу бити паралелне са правом, а да нису међусобно паралелне. Јасно је да две тачке одређују праву. Ако је бар једна од њих обична, формирана права ће бити обична, а ако су обе тачке бесконачне добија се бесконачна права. Све тачке бесконачне праве су бесконачне. Две бесконачне праве се секу у бесконачној тачки и одређују бесконачну раван. Бесконачна раван се састоји искључиво од бесконачних тачака. Постоји бесконачно много бесконачних тачака и бесконачних правих садржаних у бесконачној равни. За сваку обичну праву постоји јединствена бесконачна тачка, која као што је то већ и речено одређује класу свих правих које су са њом паралелне. Разликујемо термилошки две врсте пројективних равни: обичну и бесконачну. Свака обична пројективна раван сече бесконачну раван по бесконачној правој. На сваку пројективну раван стога можемо применити досадашња разматрања и извршити њену координатизацију. Сви објекти у пројективној геометрији су равноправни и не постоји разлика између обичних и бесконачних објеката, осим у називу и улози коју играју приликом вршења координатизације. Неке од особина које важе у пројективном простору и које ћемо аксиоматски прихватити и примењивати у наставку рада су: три различите неколинеарне тачке одређују јединствену раван, две равни које се не поклапају одређују јединствену праву, три равни које се не секу по правој одређују јединствену тачку, права и тачка ван ње одређују јединствену раван, раван и права која није у њој садржана одређују јединствену тачку. У простору се губи дуалност тачака и правих, која је важила у равни. Праву ћемо посматрати само као скуп тачака од којих се састоји и њену координатизацију ћемо извршити независно од положаја који заузима у простору. Свакој правој ћемо придружити шест бројева до којих су независно дошли Hermann Günther Grassmann (1809-1877) и Julius Plücker (1801 - 1868).

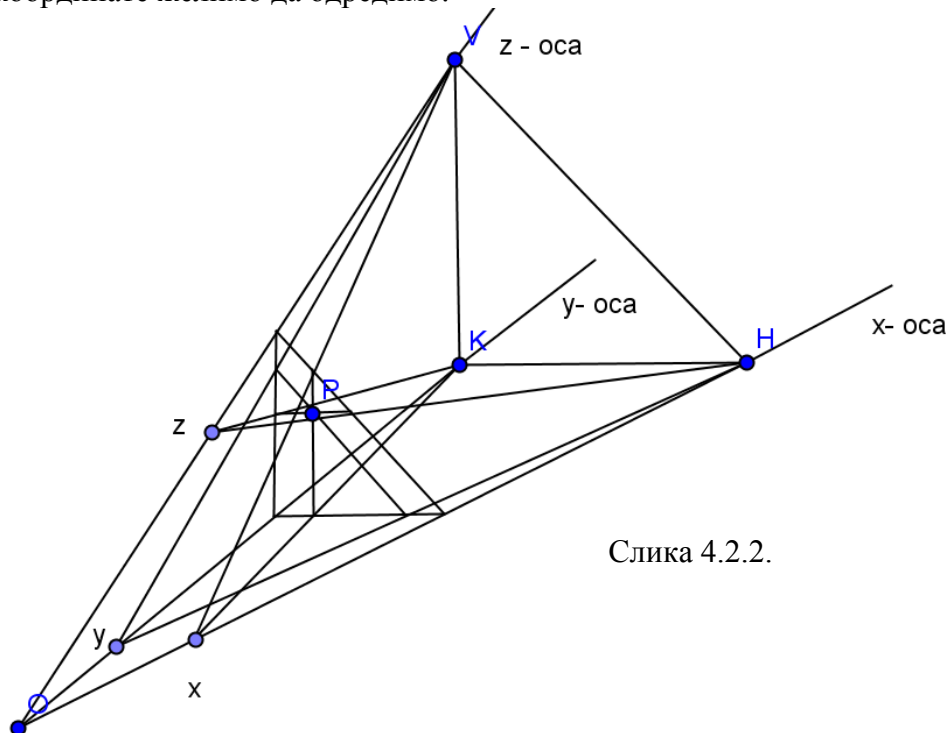
4.2. Нехомогене координате тачака и равни у пројективном простору

Пројективни тродимензиони простор је изграђен тако што је Еуклидов простор проширен једном равни. Та раван се назива бесконачна или сингуларна раван и игра веома важну улогу приликом одређивања координата тачака и равни. Свакој тачки ће бити придружена тројка нехомогених координата. Тачке и равни су дуални објекти у простору, па ће и свака раван бити одређена са три нехомогене координате. Да би координатизација била могућа увешћемо три координатне осе и на свакој од њих дефинисати репер. Из разматрања ће бити искључене све тачке бесконачне равни и све равни које садрже координатни почетак. Аналогно чињеници да је пројективна раван дефинисана са три тачке које чине референтни троугао, можемо закључити да ће пројективни простор бити одређен са четири тачке које ће чинити референтни тетраедар што ће заједно са јединичном тачком чинити референтни систем у односу на који одређујемо координате. Фиксирамо три тачке H, K, V у сингуларној равни и тачку O ван ње. Праве OH, OK, OV ће представљати респективно $x-, y-, z-$ координатну осу. Тачка O се зове координатни почетак. На свакој координатној оси фиксирамо тачку која ће играти улогу јединичне тачке. Три јединичне тачке одређују јединствену раван која сече сингуларну раван HKV . Праву пресека ћемо означити са p . Извршимо координатизацију x -осе помоћу репера. На x -оси одаберемо произвољну тачку X и одредимо њену нехомогену координату. Посматрамо раван одређену правом p и тачком X . Аксиоматски гледано, и та раван је једнозначно одређена и као таква сече и преостале две координатне осе. Све три тачке на координатним осама одређене овом равни имају исту нехомогену координату. Дакле, произвољна раван која садржи праву p има особину да на свакој координатној оси одређује тачку и да све три тако одређене тачке имају исту нехомогену координату. Те три тачке су одговарајући елементи тог пресликавања. Затим, познато је да је свака пројективна права, у овом случају координатна оса без бесконачне тачке, изоморфна са пољем реалних бројева. Сада се чини једноставним да резултате добијене на једној оси проширимо и пренесемо и на преостале две координатне осе. Фундаментални елементи једне осе ће се пресликати у фундаментаменталне елементе друге осе. Рецимо, на једној оси уочимо две тачке и затим одредимо тачку која представља њихов производ. Те три тачке, чиниоце и производ, пресликамо у односу на раван која садржи праву p на неку другу координатну осу. Координате добијене три тачке на новој оси испуњавају исту релацију. Заиста, ако бисмо помножили тачке које су слике чинилаца, добили бисмо тачку која је слика производа.



Слика 4.2.1.

За сада имамо одређену сингуларну раван HKV и три координатне осе које се секу у координатном почетку и на свакој од њих дефинисан репер. Координатни почетак заједно са три тачке у којима осе секу сингуларну раван одређује референтни тетраедар. Стране референтног тетраедра, изузимајући страну садржану у сингуларној равни, одређују три равни. Тачке које припадају тим равнима имају једну нехомогену координату једнаку нули и то баш ону координату чију координатну осу та раван не садржи. На пример, све тачке које припадају равни OKV имају прву, односно x - координату једнаку нули, јер та раван не садржи x - осу. Како одредити преостале две координате? Како одредити три нехомогене координате које ћемо придружити тачкама које не припадају ни једној од три наведене стране референтног тетраедра? Даћемо одговор на та два питања. Подсетимо се одређивања нехомогених координата тачке у пројективној равни. Пројектовали смо дату тачку из бесконачних тачака на координатне осе и тако добијени бројеви су били њене нехомогене координате. Исти процес ћемо применити и у пројективном простору. Нека је дата тачка P чије нехомогене координате желимо да одредимо.



Слика 4.2.2.

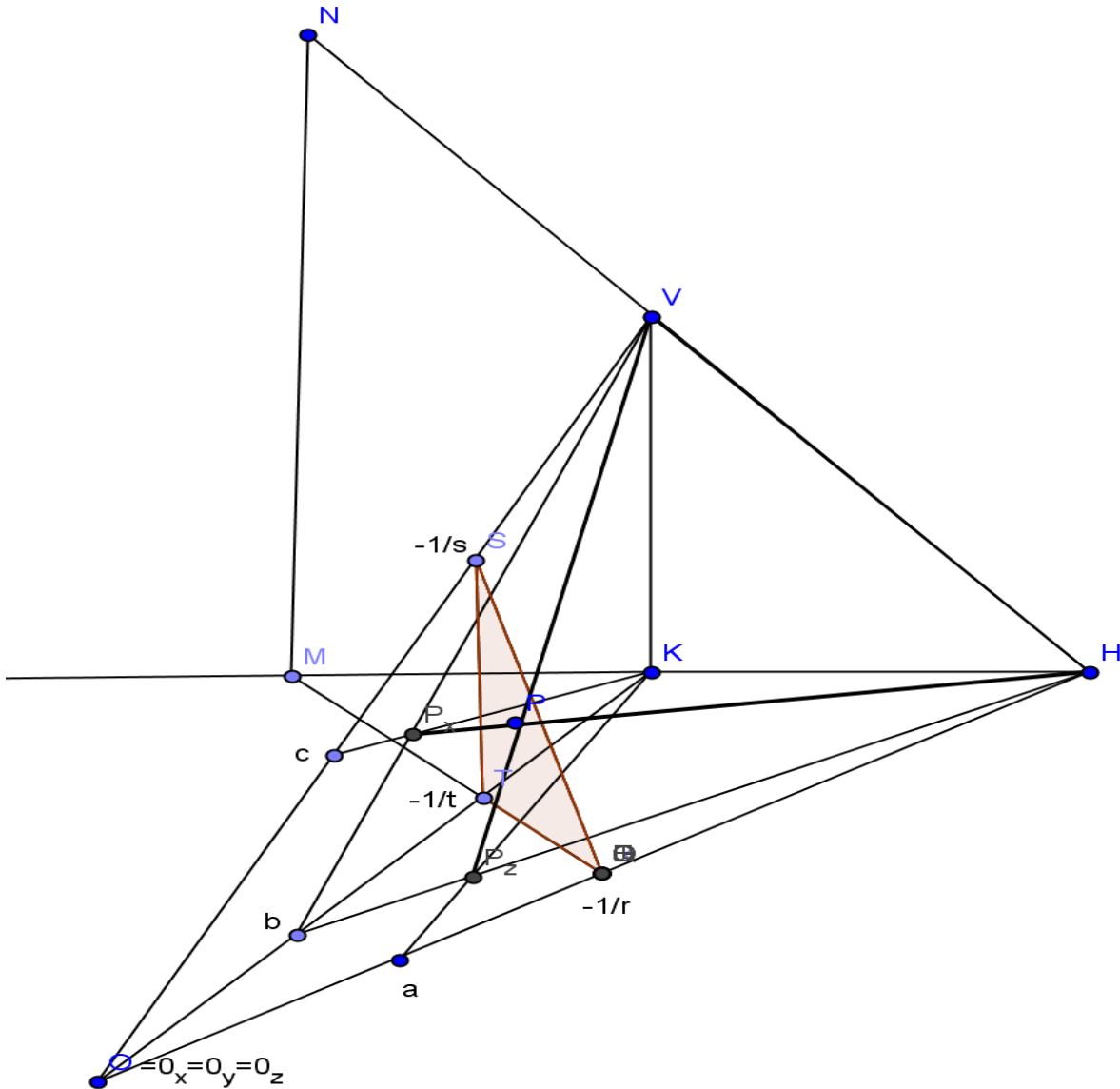
Прво ћемо да одредимо x - координату тачке P . x - координата ће бити број придружен тачки у којој раван PKV сече x - осу. Раван PHV сече y - осу у тачки чија нехомогена координата представља y - координату тачке P . Остало је још да се одреди трећа координата тачке P . Потпуно аналогно претходном поступку, нехомогена координата придружена тачки пресека z - осе и равни PHK представља z - координату тачке P . На овај начин, добијена три броја представљају нехомогене координате тачке P . У уређеној тројци прво место заузима x - координата, друго y -, а треће z - координата дате тачке. Важи и обрнуто. Било која три броја, односно три тачке на координатним осама којима су придружени ти бројеви одређују јединствену тачку у пројективном простору. При томе, та три броја су њене нехомогене координате. Ако су та три броја, односно три тачке на координатним осама дате, тачку чије су они нехомогене координате одређујемо обрнутим поступком од описаног. Тражену тачку добијамо у пресеку одговарајуће три равни.

Тачке и равни су дуални објекти у пројективном простору. Координате праве у простору ће бити објашњене у последњем поглављу рада. Упознаћемо се са шест координата које представљају хомогене координате праве и посветићемо посебну пажњу особинама које за њих важе. О томе више касније. До сада смо се упознали са чињеницом да је свака тачка

одређена са три нехомогене координате. Да бисмо извели релацију која мора да важи уколико тачка припада равни, остало је да уведемо нехомогене координате за равни. Како су тачке и равни дуални објекти, логично је и требало би да свака раван буде представљена са три нехомогене координате. Три нехомогене координате придружене некој равни ћемо сместити у угласте заграде, да би се разликовале од координата придружених тачкама. У пројективној равни смо координате праве одређивали у односу на два координатна центра у којима су репери били одређени на посебан начин. Аналогно дводимензионом случају, у пројективном простору ћемо посматрати три прамена равни и у сваком од њих ћемо изградити репер исто на посебан начин и то све са циљем да изградимо систем координата који ће истовремено важити и за тачке и за равни. Први прамен ћи бити прамен свих равни које садрже сингуларну праву KV . Желимо да одредимо репер у том прамену како бисмо свакој његовој равни придружили h - координату. Улогу нулте равни игра сингуларна раван. Напоменимо сада да ће сингуларна раван у сва три прамена бити нулта раван, односно $0_h = 0_k = 0_v$. Раван која x - осу сече у тачки -1_x ће бити јединична раван у прамену свих равни које садрже праву KV . Остала је још да се одреди бесконачна раван у том прамену. Сасвим је логично да ће то бити раван OKV . Други прамен ће чинити све равни које садрже праву HV . Раван OHV ћемо означити ∞_k , а раван тог прамена која сече y - осу у тачки -1_y игра улогу јединичне равни. Тиме је дефинисан репер $0_k, 1_k, \infty_k$ и на другом прамену. Сада већ није тешко закључити како ћемо се определити шта ће нам бити одговарајућа права која одређује преостали, трећи прамен равни и како ћемо одредити репер. Ивица тог прамена ће бити права HK . Бесконачна раван ће бити раван ONK и означићемо је ∞_v , док ће јединична раван бити раван која z - осу сече у тачки -1_z . Остаје још само да видимо, или, боље рећи, утврдимо како ћемо одредити за неку произвољну раван три нехомогене координате. Нека произвољна раван сече координатне осе редом у тачкама R, T, S респективно. Означимо ту раван са π . Прву нехомогену, односно h - координату равни π добијамо као нехомогену координату придружену равни RKV у прамену са ивицом KV . У прамену равни чија је ивица права HV , одредимо нехомогену координату придружену равни THV и то је k - координата равни π . Другу k - координату равни π ћемо означити са t . Раван SHK у прамену са ивицом HK има нехомогену координату s и то ће бити трећа, односно v - координата равни π . Три броја r, t, s представљају нехомогене координате равни π . Користи се ознака $[r, s, t]$. Даље, слично као у дводимензионом случају и овде желимо да утврдимо да ли важи да уколико знамо рецимо h - координату равни да ли одмах знамо и координату тачке у којој та раван сече x - осу и обрнуто. Показаћемо да важи. Посматрамо пројективно пресликавање које свакој тачки x - осе придружи раван h - прамена која има исту нехомогену координату. Затим, посматрамо пројективно пресликавање које свакој равни h - прамена придружи тачку пресека са x - осом. Композиција та два пројективна пресликавања је пројективно пресликавање које тачке x - осе пресликава опет на тачке x - осе. Овим пресликавањем нула се пресликава у бесконачну тачку, а бесконачна тачка x - осе у нулту тачку. Према дефиницији то пресликавање је инволуција и потпуно је одређена пошто има два пара конјугованих тачака. Аналитички се то пресликавање може представити формулом $x^* = -\frac{1}{x}$. Дакле, раван h - прамена, чија је нехомогена координата r , сече x - осу у тачки $-1/r$.

4.3. Услов да тачка припада равни

Нека је дат референтни тетраедар. Претпоставимо да је изграђен систем координата тако да истовремено можемо одредити координате тачке и равни као што је то описано у претходном одељку рада. Даље, нека су дати тачка $P = (a, b, c)$ и раван $\alpha = [r, t, s]$ са својим нехомогеним координатама. Желимо да одредимо релацију која важи за њихове нехомогене координате уколико дата тачка припада датој равни. Нека раван α сече координатне осе редом у тачкама R, T, S . Раван RKV сече x - осу у тачки чија је нехомогена координата $-\frac{1}{r}$. Раван THV сече y - осу у тачки чија је нехомогена координата $-\frac{1}{t}$. Раван SHK сече z - осу у тачки чија је нехомогена координата $-\frac{1}{s}$.



Слика 4.3.1.

Применићемо два перспективна пресликавања. Прво ћемо све тачке OKV равни пресликати на раван α при чему ће центар пресликавања бити сингуларна тачка H , а затим ћемо све тачке равни α пресликати перспективним пресликавањем са центром у тачки V на раван $ОНК$. Првим наведеним перспективним пресликавањем се тачка $P_x = (0, b, c)$ пресликава у тачку $P = (a, b, c)$, која се затим перспективним пресликавањем чији је центар тачка V преслика у тачку $P_z = (a, b, 0)$. Композиција та два перспективна пресликавања је

пројективно пресликавање које све тачке облика $P_x = (0, b, c)$ пресликава у тачке облика $P_z = (a, b, 0)$. Друга координата тачке се уопште не мења овим пројективним пресликавањем. Сингуларна права KV равни OKV се првим перспективним пресликавањем пресликава на праву MN равни α , а затим перспективним пресликавањем са центром у тачки V пресликава на праву MH , односно сингуларну праву NK . Дакле, овим пројективним пресликавањем сингуларна права прве равни се пресликава на сингуларну праву друге равни, стога линеарне једначине за трансформацију нехомогених координата можемо написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} y^* &= y \\ x &= a_1 y + a_2 z + a_3. \end{aligned}$$

Када будемо одредили коефицијенте a_1, a_2, a_3 бићемо сасвим близу одређивања релације која важи за координате тачке која припада равни. Датим пројективним пресликавањем тачка $T = (0, -\frac{1}{t}, 0)$ равни α се пресликава у саму себе. Заменимо координате у аналитички израз и добијемо $0 = -\frac{1}{t}a_1 + a_3$, односно $a_1 = ta_3$. Тачка $S = (0, 0, -\frac{1}{s})$ се пресликава у координатни почетак. Заменом координата у горњи израз добијемо: $0 = +a_2 \cdot (-\frac{1}{s}) + a_3$, односно $a_2 = sa_3$. Координатни почетак се слика у тачку $R = (-\frac{1}{r}, 0, 0)$. Заменом координата добијемо $-\frac{1}{r} = a_3$. Заменом a_3 у прва два коефицијента добијемо: $a_1 = -\frac{t}{r}$, $a_2 = -\frac{s}{r}$. Коефицијенте које смо управо одредили заменимо у једначину $x = a_1 y + a_2 z + a_3$ и добијемо $x = -\frac{t}{r}y - \frac{s}{r}z - \frac{1}{r}$. И леву и десну страну једначине помножимо са r и све чланове пребацимо на леву страну. Након сређивања важи:

$$rx + ty + sz + 1 = 0.$$

Управо смо показали потребан услов да тачка припада равни. Међутим то је и довољан услов. Уколико бисмо описаним поступком покушали да се вратимо уназад, добили бисмо да тачка P припада равни коју одређују праве P_xH и P_zV . Штавише, те две праве се секу у тачки P која мора припадати равни α .

4.4. Хомогене координате тачака и равни у пројективном простору

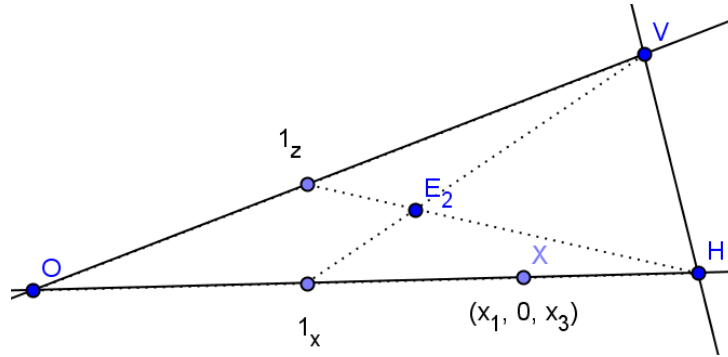
4.4.1. Хомогене координате тачака

У наставку желимо да уведемо прво хомогене координате за сваку тачку у пројективном простору, а затим и за сваку раван. Цела прича која предстоји представља само уопштење свега што је до сада одрађено. За почетак претпоставимо да је систем нехомогених координата већ изграђен, односно да смо свакој тачки и равни у пројективном простору придружили уређену тројку нехомогених координата. Сада посматрамо те исте објекте и желимо да их представимо хомогеним координатама. Како је у питању пројективни простор димензије три, аналогно увођењу хомогених координата у простору мањих димензија, сваком објекту, било да је у питању тачка или раван, придружићемо уређену четворку реалних бројева, од којих је бар један различит од нуле. Уређене четворке $(0,0,0,0)$ и $[0,0,0,0]$ неће бити придружене ниједном од наведених објеката. Референтни оквир за тачке ће чинити исти објекти као и у нехомогеном систему само ћемо их означити са уређеном четворком реалних бројева. Приликом изградње хомогеног система координата посебну пажњу ћемо посветити потреби да пројективни простор буде надоградња простора мањих димензија, односно да исте објекте, ако их посматрамо као елементе простора мањих димензија задовољавају све услове који су претходно изведени у том простору и који ћемо после посматрати као рестриковани простор.

Уочимо три неколинеарне тачке које припадају сингуларној равни и означимо их редом са H, K, V и још једну тачку ван те равни која ће представљати координатни почетак O . Праве OH, OK и OV представљају редом x, y, z координатну осу. Сада ћемо свакој тачки редом O, H, K, V придружити уређену четворку хомогених координата и то редом $(0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0)$ и $(0,0,1,0)$. Да би референтни оквир био потпуно одређен, недостаје још јединична тачка E којој ћемо придружити уређену четворку $(1,1,1,1)$. Ту тачку бирамо тако да никоје четири од тачака O, H, K, V, E не буду компланарне. Сви елементи су испуњени да произвољној тачки придружимо хомогене координате. Поред сингуларне равни, уочимо још три равни одређене паровима координатних оса. У свакој од наведених равни одредићемо референтни оквир као што смо то раније објаснили и у односу на који ћемо свакој тачки тих равни придружити уређену тројку хомогених координата. Дакле, прво ћемо да уведемо хомогене координате тачкама ове четири равни, с тим да ћемо посебну пажњу посветити тачкама које припадају правама пресека две од наведених равни. Подсетимо се да смо у равни имали референтни троугао и да смо свим тачкама одређене координатне осе придружили у уређеној тројци одређену координату једнаку нули, а посебно сингуларној правој трећу, односно последњу координату једнаку нули. Сличан поступак ћемо применити и у простору, свим тачкама сингуларне равни ћемо придружити као четврту координату нулу. Да бисмо поједноставили причу, приметимо да тачке O, H, K, V формирају тетраедар. Под појмом страна тетраедра подразумеваћемо раван одређену страном. Аналогно случају у равни, с тим да ће улогу праве у простору преузети равни, све тачке које припадају одређеној страни тетраедра ће имати одређену хомогену координату једнаку нули. Све тачке сингуларне равни ће имати четврту хомогену координату једнаку нули. Тачкама стране тетраедра наспрам темена H ћемо придружити уређену четворку чија је прва хомогена координата једнака нули, све тачке стране наспрам темена K одликују се особином да им је друга координата једнака нули, док ће трећу хомогену координату у простору једнаку нули имати све тачке које припадају страни тетраедра наспрам темена V . За сада смо утврдили да

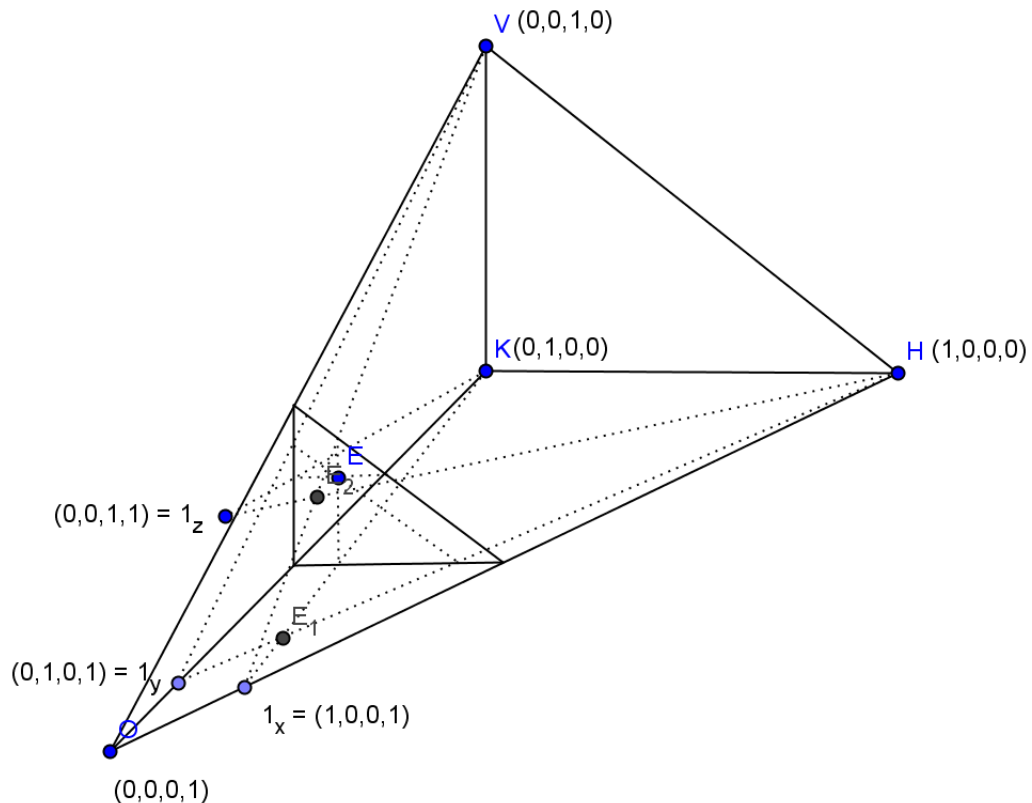
је тачкама страна референтног тетраедра једна координата једнака нули, остало је још да се утврде преостале три координате. На свакој страни референтног тетраедра смо дефинисали по три праве чије тачке пресека одређују референтни троугао у односу на који ћемо свакој тачки на одговарајућој страни тетраедра одредити три хомогене координате, које ћемо затим распоредити на преостала три места у уређеној четворци. У свакој од тих равни улогу јединичне тачке ће играти тачка добијена пројектовањем јединичне тачке E из темена тетраедра наспрам те стране, односно тачка у којој права одређена са E и наспрамним теменом сече ту страну тетраедра. Дакле, на пример, јединична тачка на страни тетраедра наспрам темена H ће имати хомогене координате у простору облика $(0,1,1,1)$, односно хомогене координате $(1,1,1)$ у тој равни, кад се уклони прва координата. У свакој од три равни OKV, OHV, OHK , улогу координатног почетка ће играти тачка O , док ће бесконачна права бити права пресека са сингуларном равни. Јасно је како је изграђен референтни оквир у ове три равни и која тачка ће играти коју улогу и која права ће бити која координатна оса, све потпуно аналогно ситуацији у равни. Доделимо такве улоге одговарајућим елементима и у сингуларној равни, на основу којих ћемо тачкама те равни придружити три хомогене координате, пошто знамо да ће четврта хомогена координата у простору бити једнака нули. У сингуларној равни улогу координатног почетка игра тачка V , бесконачна права је права HK . На правима VH и VK , које играју улогу прве и друге координатне осе, бесконачне тачке су тачке H и K . Јединичне тачке у реперима тих координатних оса добијамо пројектовањем на њих јединичне тачке придружене сингуларној равни из поменутих бесконачних тачака. Као што је већ речено, јединична тачка сингуларне равни се добија у пресеку те равни са правом OE . Тој јединичној тачки су придружене хомогене координате у простору $(1,1,1,0)$, односно брисањем четврте координате добијамо хомогене координате $(1,1,1)$ у систему хомогених координата у сингуларној равни. Аналогно, брисањем четврте координате тачкама $H = (1,0,0,0), K = (0,1,0,0), V = (0,0,1,0)$ добијамо уређену тројку хомогених координата тачака референтног троугла у систему координата у сингуларној равни $H = (1,0,0), K = (0,1,0), V = (0,0,1)$. Сада је јасно која од ових тачака игра коју улогу. Применимо резултате из претходног поглавља и свакој тачки у тој равни придружимо три хомогене координате x_1, x_2, x_3 , а као четврту напишемо нулу. Дакле, све тачке у сингуларној равни имају хомогене координате у простору облика $(x_1, x_2, x_3, 0)$. Тачке у равни OKV имају хомогене координате у простору облика $(0, x_2, x_3, x_4)$, тачкама равни OHV се придружују уређене четворке облика $(x_1, 0, x_3, x_4)$, док су хомогене координате тачака равни OHK облика $(x_1, x_2, 0, x_4)$.

Увели смо хомогене координате за тачке које припадају једној од страна референтног тетраедра. Намеће се после свега неколико веома логичних питања која гласе: „Шта ће бити са тачкама које припадају правој пресеку двеју страна референтног тетраедра? Да ли ће се координате придружене некој тачки те праве у односу на једну раван поклопити, наравно до на производ константом, са уређеном четворком придруженој тој тачки у односу на репер друге равни?“ Ускоро ћемо добити потврдан одговор на претходно питање. Идеја приликом изграђивања било ког координатног система је да свакој тачки једнозначно буде додељена уређена n -торка која ће опет једнозначно одређивати њену позицију. Посматрајмо рецимо праву добијену у пресеку равни OHV и OHK , односно x -осу. Прво ћемо одредити хомогене координате произвољне тачке X те праве у равни OHV , а затим у равни OHK и упоредити да ли су те две уређене четворке пропорционалне. Како тачка X припада равни OHV , њена друга хомогена координата у простору ће бити једнака нули, па преостаје да одредимо три хомогене координате у односу на систем у равни.



Слика 4.4.1.1.

Нехомогена координата тачке X на правој OH је $\frac{x_1}{x_3}$, одакле следи да је њена хомогена координата једнака уређеној тројци $(x_1, 0, x_3)$. Та три броја распоредимо на преостала места у уређеној четворци и добијамо хомогене координате тачке X у простору $(x_1, 0, 0, x_3)$. Приметимо и трећа хомогена координата је једнака нули што указује да припада и равни ONK . У равни ONK , тачка X ће имати хомогене координате облика $(x_1, 0, x_3)$, које распоређујемо на преостала три места у уређеној четворци, при чему је место треће координате заузето за нулу и добијамо уређену четворку $(x_1, 0, 0, x_3)$. Дакле, дата тачка у односу и на једну и на другу раван има исте координате. Приметимо да тачке које припадају правама у којима се секу две стране референтног тетраедра имају две координате једнаке нули и то баш на оним позицијама на којима све тачке датих равни имају координате једнаке нули. Једини проблем у претходном разматрању може да прави јединична тачка репера на x -оси. Јединичну тачку на x -оси у равни ONV добијамо у пресеку праве VE_2 и x -осе, док ако посматрамо раван ONK , јединичну тачку на x -оси добијамо у пресеку праве KE_3 и x -осе. У претходном разматрању ми смо претпоставили априори да је то једна те иста тачка. Међутим, питање је да ли праве VE_2 и KE_3 секу x -осу у истој тачки. Како раван KVE садржи и тачку E_2 и тачку E_3 по конструкцији описаној раније, следи да дате праве припадају тој равни која у једној тачки сече x -осу. Тиме је доказано да је јединична тачка репера на x -оси у обе равни једна те иста тачка.



Слика 4.4.1.2.

Прелазимо на одређивање хомогених координата за тачке које нису инцидентне ни са једном страном референтног тетраедра. Уочимо у простору ван страна тетраедра произвољну тачку X . Хоћемо тој тачки да придружимо четири реална броја који ће представљати њене хомогене координате у простору. Нека су нехомогене координате те тачке $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$. Сва три броја су различита од нуле, пошто тачка није ни на једној страни тетраедра. Пројектујемо тачку X из темена H, K, V тетраедра на супротне стране и добијамо три тачке које ћемо означити са P_1, P_2, P_3 респективно. Хоћемо да одредимо хомогене координате прво тачке P_3 у равни $ОНК$. У ту сврху приметимо да раван XKV садржи тачку P_3 и сече x - осу у тачки чија је нехомогена координата $\frac{x_1}{x_4}$. Дакле, раван XKV сече раван $ОНК$ по правој KP_3 , па закључујемо да је прва нехомогена координата тачке P_3 у равни $ОНК$ једнака $\frac{x_1}{x_4}$. Међутим, раван XHV садржи тачку P_3 и сече y - осу у тачки чија је нехомогена координата $\frac{x_2}{x_4}$. Дакле, права HP_3 сече y - осу у тачки чија је нехомогена координата $\frac{x_2}{x_4}$. Уређен пар $(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4})$ представља нехомогене координате тачке P_3 у равни $ОНК$, па ће њене хомогене координате у тој равни бити облика (x_1, x_2, x_4) . На основу разматрања са почетка, хомогене координате тачке P_3 у простору ће бити $(x_1, x_2, 0, x_4)$. Аналогним разматрањем долазимо до хомогених координата тачака P_1, P_2 у простору, односно $P_1 = (0, x_2, x_3, x_4)$ и $P_2 = (x_1, 0, x_3, x_4)$. Тачки X ћемо придружити четири реална броја x_1, x_2, x_3, x_4 , од којих ниједан није једнак нули и уређену четворку (x_1, x_2, x_3, x_4) прогласити хомогеним координатама тачке X у простору. Уређена четворка $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$, где је $\lambda \neq 0$ представља исту тачку. Важи и обрнуто, ако су дата четири броја, од којих је бар један различит од нуле, можемо одредити јединствену тачку у простору чије ће они бити хомогене координате. Тачку чије су координате дата четири броја x_1, x_2, x_3, x_4 одређујемо у пресеку две праве. Рецимо, једна од њих је одређена тачкама K и $(x_1, 0, x_3, x_4)$, а друга тачкама V и $(x_1, x_2, 0, x_4)$. Да се наведене две праве заиста секу у тачки која има координате (x_1, x_2, x_3, x_4) следи из чињенице да тачке $(x_1, 0, x_3, x_4), (x_1, x_2, 0, x_4)$ припадају равни $KV(x_1, 0, 0, x_4)$.

4.4.2. Хомогене координате равни

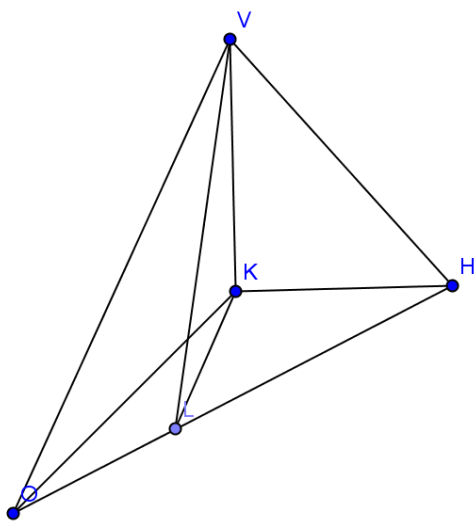
Као што је то на више места у самом раду већ поменуто, тачке и равни у простору су дуални објекти. Улогу коју су у равни играле праве у простору преузимају равни, тако да ћемо хомогене координате за равни увести аналогно увођењу хомогених координата правих у равни. Сваку раван у простору ћемо означавати са четири хомогене координате које ћемо сместити у угласте заграде. Прво ћемо да одредимо референтни оквир у односу на који ћемо да извршимо додељивање уређених четворки свакој равни. Како су тачке и равни дуални објекти, поступак ћемо извршити дуално. Подсетимо се, у равни смо имали две координатне осе и дуално два координатна центра у систему нехомогених координата и три координатне осе и три центра у систему хомогених координата, односно стране референтног троугла су биле координатне осе, а темена одговарајући центри. У пројективном простору имамо референтни тетраедар. Систем нехомогених координата за равни смо вешто изградили. Три сингуларне праве су биле осе три прамена равни, у сваком смо дефинисали репер и у односу на њега одређивали нехомогене координате произвољне равни у простору. Међутим, из разматрања смо искључили равни које садрже координатни почетак. За њих не постоје

нехомогене координате. Због тога уводимо хомогене координате, да бисмо могли да разматрамо и ове равни, јер се ни по чему другом не разликују од осталих равни у простору. Прво ћемо да доделимо хомогене координате странама референтног тетраедра, редом странама наспрам темена O, H, K, V придружићемо хомогене координате облика $[0,0,0,1]$, $[1,0,0,0]$, $[0,1,0,0]$, $[0,0,1,0]$ респективно. Да би референтни оквир био потпуно одређен недостаје још јединична раван коју ћемо означити са $[1,1,1,1]$. Ту раван бирамо произвољно тако да не садржи ниједно теме референтног тетраедра. Аналогно одабирају јединичне праве $[1,1,1]$ у равни, ипак јединичну раван у простору бирамо тако да садржи три тачке којима је придружена нехомогена координата -1 у односу на репере дефинисане на координатним осама. Одређена јединична раван сече све четири стране референтног тетраедра у четири праве. Свака права заједно са теменом референтног тетраедра које се налази наспрам стране која садржи дату праву одређује раван. Редом равнима које су одређене са овим правима и теменима O, H, K, V додељујемо хомогене координате облика $[1,1,1,0]$, $[0,1,1,1]$, $[1,0,1,1]$, $[1,1,0,1]$. Свакој равни која садржи тачку O придружићемо уређену четворку хомогених координата чија је четврта координата једнака нули, затим прва хомогена координата сваке равни која садржи тачку H у простору је једнака нули, у уређеној четворци хомогених координата придружених равнима кроз тачку K друга координата је једнака нули и свака раван кроз V има трећу хомогену координату једнаку нули. Остаје да видимо како ћемо одредити преостале три координате.

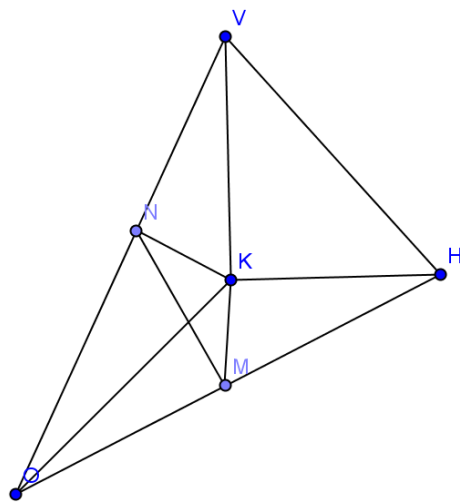
Прво ћемо да разматрамо равни које садрже само једно теме референтног тетраедра, затим оне које садрже само два, а после тога оне које не садрже ниједно теме референтног тетраедра. Нека произвољна раван MNK сече x - осу у тачки M , а z - осу у тачки N (погледати слику на следећој страни). Нека тачка M има нехомогену координату $-\frac{1}{m}$ у односу на репер x - осе. Нека тачка N има нехомогену координату $-\frac{1}{n}$ у односу на репер z - осе. Претпоставимо да је систем нехомогених координата за равни дефинисан на начин како је објашњено у претходној теми овог поглавља. Нехомогене координате равни MNK у простору су $[m, 0, n]$. Како раван MNK садржи тачку K , на основу претходног разматрања, та раван ће имати другу хомогену координату у простору једнаку нули. Остаје да се одреде преостале три координате. Да бисмо њих одредили потребно је дефинисати референтни оквир за све равни које садрже тачку K . Посматраћемо у ту сврху равни које су нам већ дате својим хомогеним координатама у простору, односно равни $[0,0,0,1]$, $[1,0,0,0]$, $[0,0,1,0]$, $[1,0,1,1]$. Приметимо да свака од ових равни има другу координату једнаку нули; ако је уклонимо добијамо четири равни $[0,0,1]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[1,1,1]$ које представљају референтни оквир у снопу свих равни тачке K . Датој равни MNK у односу на описани референтни оквир одредимо три хомогене координате и запишемо их затим на преостала места у уређеној четворци тачака. Те три хомогене координате су заправо хомогене координате праве MN у равни OHV . Коначно, хомогене координате равни MNK у простору су облика $[m, 0, n, 1]$. Дакле, за било коју раван која садржи једно теме референтног троугла знамо да ће једна хомогена координата у простору бити једнака нули, а преостале три хомогене координате су једнаке хомогеним координатама праве коју та раван одређује у пресеку са страном тетраедра која не садржи дато теме, односно са наспрамном страном тетраедра.

Равни које садрже два темена референтног тетраедра имају две хомогене координате у простору једнаке нули. Које ће две координате бити једнаке нули зависи од тога која два темена референтног тетраедра дата раван садржи. Уочимо у простору раван KVL , где је L тачка у којој та раван сече x - осу, која узгред има у односу на репер на x - оси нехомогену

координату $-\frac{1}{l}$. Прво ћемо да одредимо хомогене координате те равни у простору у односу на репер у снопу темена K , а затим и у снопу темена V . Треба у оба случаја да добијемо исте хомогене координате. Прво, раван KVL припада снопу равни одређеним тачком K , што значи да ће друга хомогена координата бити једнака нули. Преостале три хомогене координате одређујемо као хомогене координате праве у којој раван KVL сече наспрамну страну референтног тетраедра, односно као хомогене координате праве VL у односу на репер у равни OHV . Та права, како садржи бесконачну тачку у равни OHV има другу нехомогену координату једнаку нули, док је прва нехомогена координата једнака l . Њене хомогене координате у равни OHV су $[l, 0, 1]$. Хомогене координате праве LH у равни OHV су исте као и хомогене координате равни одређене са том правом и тачком K у односу на референтни оквир дефинисан за сноп равни тачке K . Дакле, хомогене координате полазне равни KVL су $[l, 0, 0, 1]$. Сада ћемо координате те исте равни у простору одредити и на други начин тако што ћемо ту раван посматрати као раван кроз тачку V . Одмах знамо да ће трећа хомогена координата за ту раван у простору бити једнака нули. Преостале три координате ћемо одредити као хомогене координате праве коју та раван одређује на наспрамној страни тачке V . Желимо да одредимо хомогене координате праве KL у односу на репер дефинисан у равни ONK . Права KL има хомогене координате у тој равни облика $[l, 0, 1]$, па ће хомогене координате равни KVL бити једнаке $[l, 0, 0, 1]$. На два различита начина смо одредили координате ове равни. То је могуће искључиво захваљујући систему координата који смо на адекватан начин изградили. Приметимо да ништа од претходно реченог не би било могуће да раван $[1, 1, 1, 1]$ није одабрана тако да садржи не само тачке на координатним осама чије су нехомогене координате једнаке -1 , већ све тачке на ивицама референтног тетраедра које имају нехомогену координату -1 .



Слика 4.4.2.1.



Слика 4.4.2.2.

На сличан начин описаном поступку ћемо одредити и хомогене координате за равни које не садрже ниједно теме референтног тетраедра. Уочимо у простору неку такву раван. Дата раван на свакој страни референтног тетраедра одређује по једну праву. Свака таква права са теменом тетраедра које не припада страни која садржи дату праву одређује по једну раван. Свакој таквој равни одредимо хомогене координате на начин како је то описано малопре, односно одредимо уређену тројку хомогених координата у односу на репер у снопу сваког темена референтног тетраедра, што није ништа друго до одређивање хомогених координата

придружених датим правама у односу на репере на свакој страни тетраедра која је садржи. Дуално поступку за тачке, добићемо да четири равни одређене на овај начин имају хомогене координате у простору облика $[0, x_2, x_3, x_4]$, $[x_1, 0, x_3, x_4]$, $[x_1, x_2, 0, x_4]$ и $[x_1, x_2, x_3, 0]$. Дуално, координате полазне равни ће бити $[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Показали смо да су хомогене координате произвољне равни уређена четворка реалних бројева $[m_1, m_2, m_3, m_4]$ од којих је бар један различит од нуле. Уређена четворка $[\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda m_3, \lambda m_4]$, $\lambda \neq 0$, такође чини хомогене координате исте равни.

Потребан и довољан услов да тачка $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ припада равни $m = [m_1, m_2, m_3, m_4]$ је да буде задовољена једначина $x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 = 0$.

Ако су координате тачке $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ фиксиране, онда све координате облика $m = [m_1, m_2, m_3, m_4]$ које задовољавају једначину $x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 = 0$ те тачке представљају равни које садрже ту тачку и обрнуто, ако су фиксиране координате равни $m = [m_1, m_2, m_3, m_4]$, онда све координате облика $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ које задовољавају једначину $x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 = 0$ те равни представљају тачке које припадају наведеној равни.

Нека су дате три неколинеарне тачке $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ и $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Дефинишемо једначину равни m одређену са те три тачке.

$$m = \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_1 \\ y_3 & y_4 & y_1 \\ z_3 & z_4 & z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_4 & x_1 & x_2 \\ y_4 & y_1 & y_2 \\ z_4 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \right]$$

Нека је $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ произвољна тачка у равни XYZ . Тада следећа детерминанта има вредност нула.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

Ако бисмо развили горњу детерминанту по првој врсти добили бисмо једначину равни и тачку A која задовољава ту једначину. Наведена детерминанта такође представља услов компланарности четири тачке.

Аналогно тврђење важи и за равни.

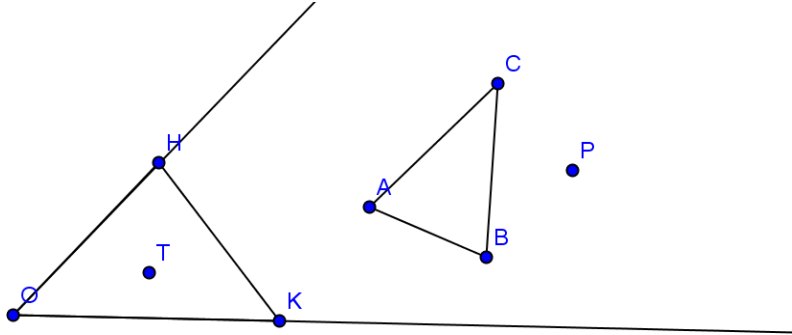
Нека су дате три равни $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ и $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ својим хомогеним координатама. Дефинишемо једначину тачке X одређене са те три равни.

$$X = \left[\begin{vmatrix} m_2 & m_3 & m_4 \\ n_2 & n_3 & n_4 \\ k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m_3 & m_4 & m_1 \\ n_3 & n_4 & n_1 \\ k_3 & k_4 & k_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_4 & m_1 & m_2 \\ n_4 & n_1 & n_2 \\ k_4 & k_1 & k_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} \right]$$

5. Барицентричне координате

August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) је први увео барицентричне координате у својој књизи *The barycentric calculus* која је објављена 1827.

Нека су $A = \left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}\right)$, $B = \left(\frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3}\right)$, $C = \left(\frac{c_1}{c_3}, \frac{c_2}{c_3}\right)$ темена произвољног троугла и $P = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ произвољна тачка у систему нехомогених координата у равни у којем следеће три тачке представљају референтни троугао $O = (0,0)$, H и K . Сада напишемо хомогене координате, тј. $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $P = (x, y, z)$.



Слика 5.1.

Ако нека тачка $Y = (p_1, p_2, p_3)$ није ни на једној страни троугла ABC , онда постоји пројективно пресликавање које тачку Y пресликава у тачку $E = (1,1,1)$, а тачке A, B, C пресликава у тачке K, H, O респективно. Датим пројективним пресликавањем тачка $P = (x, y, z)$ се пресликава у неку тачку $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Затим дефинишемо три броја на следећи начин

$$d_1 = \begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, d_2 = \begin{vmatrix} a_1 & x & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \\ a_3 & z & c_3 \end{vmatrix}, d_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix}.$$

Хоћемо да покажемо да је $d_1 = x$, $d_2 = y$ и $d_3 = z$, односно да су та три броја тј. детерминанте уствари хомогене координате тачке P . То ћемо да урадимо користећи особину да су бројеви k_{12}, k_{23} инваријантни за пет тачака A, B, C, P, Y , тј. не мењају се ако се координате произвољне тачке помноже са константом или ако се свих пет тачака замени одговарајућом петорком тачака добијених применом исте линеарне трансформације. Бројеви k_{12}, k_{23} представљају дворазмеру и дефинисани су на следећи начин:

$$k_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & x & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \\ a_3 & z & c_3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$k_{23} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & x & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \\ a_3 & z & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}}$$

Поступак сада поновимо са тачкама

$K = (1,0,0), H = (0,1,0), O = (0,0,1), P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $E = (1,1,1)$ које су у пројективној кореспонденцији са тачкама A, B, C, P и Y , што значи да ће дворазмера одговарајућих тачака и дворазмера њихових слика имати исту вредност. Одредимо бројеве k_{12}, k_{23} :

$$k_{12} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ y_1 & 1 & 0 \\ z_1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & z_1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1}{y_1}$$

$$k_{23} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & z_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & z_1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y_1}{z_1}$$

Тим поступком смо показали да је $x = \frac{\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_1 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_1 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & x & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \\ a_3 & z & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & x & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \\ a_3 & z & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix}}.$$

Када смо то доказали можемо да наставимо даље са изградњом барицентричног координатног система. Да резимирамо, имамо троугао ABC чија су темена дата у хомогеним координатама и настојимо да одредимо како изгледају и који услов морају да испуњавају барицентричне координате тачке $P = (x, y, z)$. Ипак, пре него што то урадимо било би збиља корисно да уведемо аналитички израз за израчунавање површине троугла и видимо како су координате тачке P повезане са њим.

Дефиниција 5.1. Нека су O, M, N и A, B, C две тројке неколинеарних тачака. Нека троугао OMN представља јединицу мере; његова темена можемо посматрати као уређену тројку тачака која имају позитиван математички смер. Меру троугла ABC , при чему троугао ABC такође посматрамо као уређену тројку тачака и водимо рачуна да ли његова темена имају исти или различит математички смер у односу на троугао OMN , пошто ако имају супротан смер мера постаје негативна и тиме је дозвољено увођење негативне површине троугла.

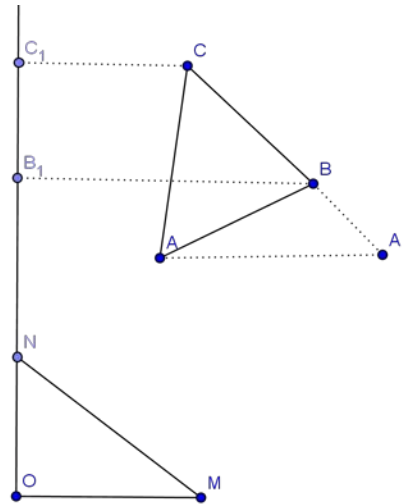
Дакле, меру троугла ABC , у ознаци $m(ABC)$, израчунавамо тако да ако права BC није паралелна са

ОМ, нека B_1 и C_1 буду тачке у којима праве кроз B и C паралелне са ОМ секу праву ОН и

нека A_1 буде тачка пресека праве BC и праве кроз A паралелне са ОМ. Нека AA_1

представља дужину дужи AA_1 у односу на јединичну дуж ОМ и B_1C_1 дужину дужи B_1C_1

у односу на јединичну дуж ОН. Мера троугла ABC се израчунава $m(ABC) = AA_1 \cdot B_1C_1$. Ако је права BC паралелна са ОМ, мера троугла ABC је дефинисана као $m(BCA)$. По договору прихватамо да је $m(ABC) = 0$ кад год су тачке A, B, C колинеарне.



Слика 5.2.

Пошто је у претходној дефиницији коришћен појам паралелности правих у равни, а познато је да се пројективна геометрија заснива на чињеници да су сваке две праве конкурентне, па ћемо под појмом паралелних правих подразумевати праве које се секу у сингуларној тачки.

Код коришћења претходне дефиниције треба бити веома опрезан и водити рачуна о редоследу тачака у ознаци $m(ABC)$, заправо треба имати на уму да рецимо дужине дужи AB и BA немају исте вредности и да је $AB = -BA$. Пошто се на свакој правој може извршити координатизација тачака у односу на утврђени репер, рецимо дужина AB ће бити позитивна ако је координата тачке a мања од координате тачке b .

Следећих неколико особина ће нам бити потребно приликом извођења израза за меру произвољног троугла па би било добро да их баш сада споменемо.

За произвољне четири тачке A, B, C, D важи:

1. $m(ABC) + m(ACB) = 0$;
2. $m(DAB) + m(DBC) + m(DCA) = m(ABC)$.

Коначно можемо да изведемо аналитички израз за површину троугла или боље рећи меру уређене тројке тачака пошто дати број може бити и негативан.

Нека темена троугла $O = (0,0)$, $U = (0,1)$, $V = (1,0)$ дата у нехомогеним координатама истовремено представљају и јединицу мере, тј. $m(OVU) = 1$. Нека су $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ темена троугла чију меру желимо да израчунамо и нека је l_∞ сингуларна права.

Пошто је OV јединична дуж, у односу на њу одређујемо дужину дужи AA_1 , а како су координате тачака $A = (a_1, a_2)$ и $A_1 = (a_1 + k, a_2)$ дате, следи да је $AA_1 = k$.

Сад када смо израчунали дужине дужи

$$B_1C_1 = c_2 - b_2 \text{ и}$$

$$AA_1 = \frac{-1}{b_2 - c_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

уврстимо их у израз за меру $m(ABC) = AA_1 \cdot B_1C_1$ и добијамо

$$m(ABC) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Вратимо се сада поново на почетак овог поглавља. Укратко да се подсетимо да су биле три дате тачке $A = \left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}\right)$, $B = \left(\frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3}\right)$, $C = \left(\frac{c_1}{c_3}, \frac{c_2}{c_3}\right)$ и тачка $P = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ у нехомогеном систему координата. Затим смо темена троугла ABC пресликали на темена референтног троугла и у односу на њега видели да за хомогене координате тачке $P = (x, y, z)$ важи

$$x = \begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & x & c_1 \\ a_2 & y & c_2 \\ a_3 & z & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix}.$$

Сада нас занима како изгледају барицентричне координате и каква је њихова веза са претходно уведеном мером троугла.

Није тешко приметити да за прву координату тачке P важи $x = m(PBC)$, односно прва колона, у којој су смештене координате првог темена троугла ABC , замењена је координатама тачке P ; аналогно закључујемо да је $y = m(APC)$ и $z = m(ABP)$.

Пошто је $m(PBC) + m(APC) + m(ABP) = m(ABC)$, следи да за координате тачке P важи $x + y + z = m(ABC)$. Како су тачке A, B, C темена троугла, знамо да нису колинеарне па је $m(ABC) \neq 0$, па претходну једначину можемо поделити са тим бројем.

Важи

$$\frac{x}{m(ABC)} + \frac{y}{m(ABC)} + \frac{z}{m(ABC)} = 1$$

за сваку обичну тачку P .

Дефиниција 5.2. Нека је ABC референтни троугао, барицентричне координате тачке P су три броја B_0, B_1, B_2 за које важи $B_0 + B_1 + B_2 = 1$, где је $B_0 = \frac{m(PBC)}{m(ABC)}$, $B_1 = \frac{m(APC)}{m(ABC)}$ и $B_2 = \frac{m(ABP)}{m(ABC)}$.

6. Plücker - ове координате праве

Нека су тачке и равни у пројективном простору димензије три представљене хомогеним координатама. Циљ је да прикажемо и праве са хомогеним координатама.

Дефиниција 6.1. Нека је l права кроз две тачке $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Дефинишемо следеће бројеве помоћу координата датих тачака:

$$p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad p_{13} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \quad p_{14} = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} \\ p_{34} = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}, \quad p_{42} = \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}, \quad p_{23} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Уређена шесторка $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ је позната као Plücker - ове координате праве l .

У следећој теореми ћемо придружити основне особине Plücker - овим координатама праве.

Теорема 6.2.

- а) Plücker - ове координате праве су добро дефинисане, тј. Plücker - ове координате праве l су независне од избора две тачке те праве до на производ константом различитом од нуле.
- б) Plücker - ове координате праве су хомогене јер су одређене до на производ константом.
- в) Plücker - ове координате $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ праве l задовољавају следећу квадратну једначину:

$$\phi(l) := p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

- г) Ако шест бројева $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$, од којих је бар један различит од нуле, задовољавају једначину
$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$
онда постоји права у простору која има Plücker - ове координате $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$.

Доказ: а) Нека је права l одређена са две тачке чије су координате $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Дакле, Plücker - ове координате праве l су $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$. Нека је $Z = a(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4)$ произвољна тачка праве $l = XY$, различита од X . Plücker - ове координате праве одређене са X и Z се према дефиницији добијају на следећи начин:

$$n_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ ax_1 + y_1 & ax_2 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = p_{12},$$

$$n_{13} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ ax_1 + y_1 & ax_3 + y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = p_{13},$$

$$n_{14} = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ ax_1 + y_1 & ax_4 + y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} = p_{14},$$

$$n_{34} = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ ax_3 + y_3 & ax_4 + y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} = p_{34},$$

$$n_{42} = \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ ax_4 + y_4 & ax_2 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix} = p_{42},$$

$$n_{23} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ ax_2 + y_2 & ax_3 + y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = p_{23}.$$

Дакле, Plücker - ове координате одређене са X и Z су исте као и координате одређене са X и Y . Закључујемо да су Plücker - ове координате праве l независне од избора две тачке.

- б) Ако се (x_1, x_2, x_3, x_4) замени са $a(x_1, x_2, x_3, x_4)$, онда су Plücker - ове координате праве l одређене са (x_1, x_2, x_3, x_4) и (y_1, y_2, y_3, y_4) једнаке $a(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$.

$$\begin{aligned} \text{в) } \phi(l) &:= p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \\ &= (x_1y_2 - y_1x_2)(x_3y_4 - y_3x_4) + (x_1y_3 - y_1x_3)(x_4y_2 - y_4x_2) + \\ &\quad + (x_1y_4 - y_1x_4)(x_2y_3 - y_2x_3) = x_1x_3y_2y_4 - x_1x_4y_2y_3 - \\ &\quad - x_2x_3y_1y_4 + x_2x_4y_1y_3 + x_1x_4y_2y_3 - x_1x_2y_3y_4 - x_3x_4y_1y_2 + \\ &\quad + x_2x_3y_1y_4 + x_1x_2y_3y_4 - x_1x_3y_2y_4 - x_2x_4y_1y_3 + x_3x_4y_1y_2 = 0. \end{aligned}$$

- г) Нека су дати следећи бројеви $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$ за које важи $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ при чему бар један од њих различит од нуле, не умањујући општост нека је то p_{12} . Даље, пажљиво дефинишемо тачке X и Y и хоћемо да покажемо да права XY има за Plücker - ове координате баш датих шест бројева. Нека је $X := (0, p_{12}, p_{13}, p_{14})$ и $Y := (-p_{12}, 0, p_{23}, -p_{42})$. $X \neq Y$, пошто је $p_{12} \neq 0$. Plücker - ове координате праве XY су :

$$n_{12} = \begin{vmatrix} 0 & p_{12} \\ -p_{12} & 0 \end{vmatrix} = p_{12}p_{12}$$

$$n_{13} = \begin{vmatrix} 0 & p_{13} \\ -p_{12} & p_{23} \end{vmatrix} = p_{12}p_{13}$$

$$n_{14} = \begin{vmatrix} 0 & p_{14} \\ -p_{12} & -p_{42} \end{vmatrix} = p_{12}p_{14}$$

$$n_{34} = \begin{vmatrix} p_{13} & p_{14} \\ p_{23} & -p_{42} \end{vmatrix} = -p_{13}p_{42} - p_{23}p_{14} \doteq p_{12}p_{34}, \text{ на основу услова}$$

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

$$n_{42} = \begin{vmatrix} p_{14} & p_{12} \\ -p_{42} & 0 \end{vmatrix} = p_{42}p_{12}$$

$$n_{23} = \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{23} \end{vmatrix} = p_{12}p_{23}, \text{ добијамо}$$

$$(n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{34}, n_{42}, n_{23}) = p_{12}(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}).$$

Дакле, постоји права (права XY) која има Plücker - ове координате $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$. ■

Претходна теорема говори да свака права у простору одређује и да је одређена са шест бројева $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$ за које важи $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$, ако су $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ две произвољне тачке дате праве,

$$p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad p_{13} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \quad p_{14} = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$p_{34} = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}, \quad p_{42} = \begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}, \quad p_{23} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 6.3. (Потребан и довољан услов пресека две праве)

Две праве $l = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ и $m = (n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{34}, n_{42}, n_{23})$ секу се ако и само ако је

$$\phi(l, m) := p_{12}n_{34} + p_{13}n_{42} + p_{14}n_{23} + p_{34}n_{12} + p_{42}n_{13} + p_{23}n_{14} = 0.$$

Доказ: Ако права l садржи две тачке $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, а права m тачке $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, онда ће се те две праве сећи ако и само ако су дате тачке компланарне, а тај услов је испуњен ако и

$$\text{само ако важи } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Треба показати да је } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = \phi(l, m).$$

Развијањем дате детерминанте по првој врсти добијамо

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_4 \end{vmatrix} -$$

$$- x_4 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3t_4 + y_3z_4t_2 + y_4z_2t_3 - y_4z_3t_2 - y_2z_4t_3 - y_3z_2t_4) -$$

$$\begin{aligned}
& -x_2(y_1z_3t_4 + y_3z_4t_1 + y_4z_1t_3 - y_4z_3t_1 - y_1z_4t_3 - y_3z_1t_4) + \\
& +x_3(y_1z_2t_4 + y_2z_4t_1 + y_4z_1t_2 - y_4z_2t_1 - y_1z_4t_2 - y_2z_1t_4) - \\
& -x_4(y_1z_2t_3 + y_2z_3t_1 + y_3z_1t_2 - y_3z_2t_1 - y_1z_3t_2 - y_2z_1t_3) = \\
& = x_1(y_2n_{34} + y_3n_{42} + y_4n_{23}) - x_2(y_1n_{34} - y_3n_{14} + y_4n_{13}) + \\
& + x_3(-y_1n_{42} - y_2n_{14} + y_4n_{12}) - x_4(y_1n_{23} - y_2n_{13} + y_3n_{12}) = \\
& = p_{12}n_{34} + p_{13}n_{42} + p_{14}n_{23} + p_{34}n_{12} + p_{42}n_{13} + p_{23}n_{14}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Теорема 6.4. Нека су $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ и $(n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{34}, n_{42}, n_{23})$ Plücker - ове координате две праве l и m респективно. Тада важи

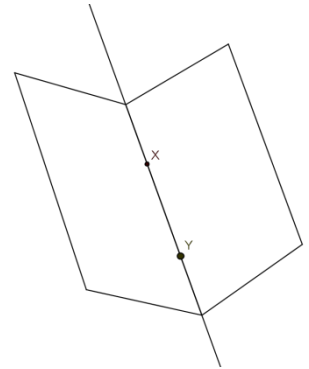
$$\phi(a \cdot l + b \cdot m) = a^2 \cdot \phi(l) + b^2 \cdot \phi(m) + ab \cdot \phi(l, m).$$

$$\begin{aligned}
\text{Доказ: } \phi(a \cdot l + b \cdot m) &= \Phi(ap_{12} + bn_{12}, \dots, ap_{23} + bn_{23}) = \\
&= (ap_{12} + bn_{12})(ap_{34} + bn_{34}) + (ap_{13} + bn_{13})(ap_{42} + bn_{42}) + \\
&+ (ap_{14} + bn_{14})(ap_{23} + bn_{23}) = \\
&= a^2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}) + b^2(n_{12}n_{34} + n_{13}n_{42} + n_{14}n_{23}) \\
&+ ab(p_{12}n_{34} + n_{12}p_{34} + p_{13}n_{42} + n_{13}p_{42} + p_{14}n_{23} + n_{14}p_{23}) \\
&= a^2 \cdot \phi(l) + b^2 \cdot \phi(m) + ab \cdot \phi(l, m). \blacksquare
\end{aligned}$$

На сличан начин две равни (u_1, u_2, u_3, u_4) и (v_1, v_2, v_3, v_4) одређују шест бројева

$$\begin{aligned}
q_{12} &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, & q_{13} &= \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, & q_{14} &= \begin{vmatrix} u_1 & u_4 \\ v_1 & v_4 \end{vmatrix} \\
q_{34} &= \begin{vmatrix} u_3 & u_4 \\ v_3 & v_4 \end{vmatrix}, & q_{42} &= \begin{vmatrix} u_4 & u_2 \\ v_4 & v_2 \end{vmatrix}, & q_{23} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

који су такође Plücker - ове $\mathbf{q}$ координате $(q_{34}, q_{42}, q_{23}, q_{12}, q_{13}, q_{14})$ праве одређене са те две равни.



Теорема 6.5. $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ координате праве су повезане са једначинама

$$p_{12} \cdot p_{13} \cdot p_{14} \cdot p_{34} \cdot p_{42} \cdot p_{23} = q_{34} \cdot q_{42} \cdot q_{23} \cdot q_{12} \cdot q_{13} \cdot q_{14}.$$

Доказ:

Нека тачке $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ одређују $\mathbf{p}$ координате, а две равни (u_1, u_2, u_3, u_4) и (v_1, v_2, v_3, v_4) $\mathbf{q}$ координате. Пошто тачке X и Y припадају и једној и другој равни, њихове координате задовољавају четири једначине

$$\begin{aligned}
u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 &= 0, \\
u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4 &= 0, \\
v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 &= 0, \\
v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3 + v_4y_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Множимо прву једначину са $-v_4$, а трећу са u_4 и добијамо

$$\begin{aligned}
-u_1v_4x_1 - u_2v_4x_2 - u_3v_4x_3 - u_4v_4x_4 &= 0, \\
u_4v_1x_1 + u_4v_2x_2 + u_4v_3x_3 + u_4v_4x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Саберемо те две једначине и добијемо

$$-q_{14}x_1 + q_{42}x_2 - q_{34}x_3 = 0. \quad (*)$$

Затим множимо другу једначину са $-v_4$, а четврту са u_4 и добијамо

$$\begin{aligned}
-u_1v_4y_1 - u_2v_4y_2 - u_3v_4y_3 - u_4v_4y_4 &= 0, \\
u_4v_1y_1 + u_4v_2y_2 + u_4v_3y_3 + u_4v_4y_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Сабирањем те две једначине добијамо

$$-q_{14}y_1 + q_{42}y_2 - q_{34}y_3 = 0. \quad (**)$$

Комбинујемо (*) и (**) на сличан начин, тј.

$$\begin{aligned}
-q_{14}x_1 + q_{42}x_2 - q_{34}x_3 &= 0, \\
-q_{14}y_1 + q_{42}y_2 - q_{34}y_3 &= 0,
\end{aligned}$$

прву једначину помножимо са $-y_1$, а другу са x_1

$$\begin{aligned}
q_{14}x_1y_1 - q_{42}x_2y_1 + q_{34}x_3y_1 &= 0, \\
-q_{14}x_1y_1 + q_{42}x_1y_2 - q_{34}x_1y_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Када се те две једначине саберу и први чланови испотиру добија се

$$\begin{aligned}
q_{42}p_{12} - q_{34}p_{13} &= 0 \\
p_{12}q_{42} &= p_{13}q_{34}, \text{ што је еквивалентно са}
\end{aligned}$$

$$\frac{p_{12}}{p_{13}} = \frac{q_{34}}{q_{42}}$$

Сличним комбиновањем прве четири једначине добијамо

$$p_{12}:p_{13}:p_{14}:p_{34}:p_{42}:p_{23} = q_{34}:q_{42}:q_{23}:q_{12}:q_{13}:q_{14}. \blacksquare$$

ЗАКЉУЧАК

У овом раду смо се упознали са координатама у пројективној геометрији. Видели смо да аналитички приступ може бити итекако занимљив. Сама помисао да поред еуклидског простора за који се веома дуго сматрало да је једини, не само на Земљи већ и у читавом свемиру, постоје и други модели, даје подстрек и наду будућим математичарима и другим научницима да се баве истраживањем нових простора и развојем нових теорија и да у геометрији има још много ствари које треба открити и повезати са другим областима живота.

У првој глави је дат преглед дефиниција и теорема пројективне геометрије, без доказа, на које смо се позивали више пута у самом раду, као и кратка историја настанка и развоја пројективне геометрије.

У другој глави су уведене хомогене и нехомогене координате на једнодимензионим многострукостима; успостављена је кореспонденција између скупа рационалних бројева и скупа рационалних тачака која се може проширити до узајамно једнозначне кореспонденције између скупа свих реалних бројева и скупа свих тачака пројективне праве из којег је искључена бесконачна тачка. Стандардне алгебарске операције описане су геометријским конструкцијама; уведена је дворамера; њене особине су коришћене за добијање потребног и довољног услова да тачка припада правој.

У трећој глави рада уведене су хомогене и нехомогене координате за тачке и праве у равни; наведен је услов који мора бити испуњен да би тачка припадала правој. Трансформацијом координата смо показали да можемо променити угао гледања, да можемо померати објекте са једне на другу позицију.

У четвртој глави детаљно су уведене хомогене и нехомогене координате тачака и равни у пројективном простору. Упознали смо се са референтним тетраедром и улогом коју имају његова темена и странице. Видели смо да се све особине које важе у простору мањих димензија могу пренети на просторе већих димензија. Пројективни простор смо тако обогатили новим својствима.

У петој глави уведене су барицентричне координате. Основна идеја која је довела до настанка ових координата је тражење тачке ослонца за полугу на чијим крајевима су закачени тегови различите тежине или тражење тачке у којој би се успоставила равнотежа код троугла на чијим теменима су закачени тегови различите тежине. Барицентричне координате се одликују особином да је збир координата сваке тачке једнак 1.

У шестој глави рада описане су Plücker - ове координате праве. То су координате праве изведене за праве у простору димензије три. Показали смо да се координате праве у простору могу добити на два различита начина. Извели смо координате праве ако су дате хомогене координате две тачке које је одређују, а затим и ако су дате хомогене координате две равни које се секу по тој правој.

Овом приликом се захваљујем свом ментору проф. др. Невени Пушић на саветима и несебичној подршци коју ми је пружила приликом израде мастер рада.

Литература

- [1] Oswald Veblen и J.W. Young, *Projective geometry*, Vol. I, Blaisdell Publishing Company, New York, 1966.
- [2] Oswald Veblen и J.W. Young, *Projective geometry*, Vol. II, Blaisdell Publishing Company, New York, 1966.
- [3] Albrecht Beutelspacher и Ute Rosenbaum, *Projective geometry: From Foundations to Applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] H.S.M. Coxeter, *Projective geometry, second edition*, Springer - Verlag, New York, 1987.
- [5] Jürgen Richter - Gebert, *Perspectives on Projective Geometry, A Guided Tour through Real and Complex Geometry*, Springer, October 3, 2010.
- [6] R. Hartley, A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Geometry in Computer Vision*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2004.
- [7] Herbert Busemann, Paul J. Kelly, *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press INC., Publishers New York, 1953.
- [8] Б. Шешелја и А. Тепавчевић, *Алгебра 1 са логичким уводом, теорија и задаци*, Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику, 2004.
- [9] Јоже Улчар, *Пројективна и диференцијална геометрија - збирка проблема*, Научна књига, Београд, 1969.
- [10] Милева Првановић, *Пројективна геометрија*, Научна књига, Београд, 1986.
- [11] Seidenberg A., *Lectures in Projective geometry*, Dover Publications, inc Mineola, New York.
- [12] Duncan Marsh, *Applied Geometry for Computer Graphics and Cad*, Springer-Verlag London Limited 2005.
- [13] W.W. Rouse Ball, *History of Mathematics*, Trinity College, Cambridge, April 21 , 1893.
- [14] A.N.Colmogorov, A.P.Yushkevich, *Mathematics of the 19th Century*, Birkhauser, 2001.

Биографија

Милорад Ерор је рођен 1.6.1987. године у Руми, где је 2002. године завршио основну школу „Змај Јова Јовановић“ и уписао гимназију „Стеван Пузић“ . Средњу школу је завршио 2006. године и исте године уписао Природно-математички факултет у Новом Саду, департман за математику, смер професор математике. Основне студије је завршио у августу 2010. године са просечном оценом 9,80. Од септембра 2010. ради у основној школи „Змај Јова Јовановић“ у Руми на радном месту наставника математике. 2012. године уписује мастер академске студије на матичном факултету, смер дипломирани математичар - настава математике. Положио је све испите предвиђене наставним планом и програмом на мастер студијама и тиме стекао услов за одбрану мастер рада.

Нови Сад, фебруар 2014.

Милорад Ерор

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Мастер рад

ВР

Аутор: Милорад Ерор

АУ

Ментор: др Невена Пушић, ред. проф ПМФ-а

МН

Наслов рада: Хомогене и нехомогене координате у пројективној геометрији

НР

Језик публикације: српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода: српски и енглески

ЈИ

Земља публикавања: Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2014.

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно -
математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 4

МА

Физички опис рада: (6, 86, 20, 0, 33, 0, 0)

(број поглавља, број страна, број литерарних цитата, број табела, број слика, број графика,
број прилога)

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Пројективна геометрија

НД

Предметна одредница / Кључне речи: хомогене и нехомогене координате

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику Природно - математичког факултета Универзитета у Новом Саду

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод: У раду су уведене хомогене и нехомогене координате у пројективну геометрију

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 24.10.2013.

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: проф. др Ђура Паунић, Природно - математички факултет,
Универзитет у Новом Саду

Ментор: проф. др Невена Пушић, Природно - математички факултет,
Универзитет у Новом Саду

Члан: проф. др Олга Бодрожа - Пантић, Природно - математички факултет,
Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Eror Milorad

AU

Mentor: Nevena Pušić, Ph.D.

MN

Title: Homogeneous and nonhomogeneous coordinates in projective geometry

TI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (6, 86, 20, 0, 33, 0, 0)

(chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Projective geometry

SD

Subject / Key words: Homogeneous and nonhomogeneous coordinates

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This paper presents homogeneous and nonhomogeneous coordinates in projective geometry.

AB

Accepted by Scientific Board on: 24.10.2013.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Đura Paunić, Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad

Mentor: Nevena Pušić, Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad

Member: Olga Bodroža Pantić, Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics,
University of Novi Sad