UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milica Lučić

Slabe topologije i primene

- Master rad -

Novi Sad, 2018.

Predgovor

Suština funkcionalne analize je u uopštavanju pojmova i metoda klasične analize i srodnih grana matematike. Uopštavanja omogućavaju pristup sa jedinstvene tačke gledišta pitanjima za koja se činilo da imaju malo toga zajedničkog.

U svojoj doktorskoj disertaciji matematičar Freše[1] je prvi put uveo pojam metričkog prostora i primetio da konvergencija u metričkim prostorima ne odgovara uvek određenim tipovima konvergencije funkcija. Tada je bilo jasno da je potrebna generalizacija pojma metričkog prostora. Iz tog razloga je matematičar Hauzdorf[2], 1914. godine, uveo pojam koji nam je danas poznat kao opšti topološki prostor. Iako su lokalno konveksne topologije i slaba konvergencija nizova bili implicitno upotrebljavani od strane nekih matematičara, tek je 1934. godine matematičar Džon fon Nojman[3] primenio Hauzdorfovu ideju i eksplicitno definisao slabu topologiju na Hilbertovom prostoru. On je 1935. godine uveo i definiciju lokalno konveksnog prostora. Čitaoce koji su zainteresovani za istoriju funkcionalne analize upućujemo na [6].

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U prvom poglavlju je dat pregled pojmova i tvrđenja vezanih za topološke, metričke, vektorske i normirane prostore, koji će biti potrebni u nastavku rada.

U drugom poglavlju definišemo pojmove filtera i filter baze, koje zatim koristimo u razmatranju jedne od osnovnih struktura u polju istraživanja funkcionalne analize - topološko-vektorskog prostora. Lokalno konveksne prostore uvodimo kao topološko-vektorske prostore u kojima svaka tačka ima bazu konveksnih okolina. Navodimo primere takvih prostora. Dajemo i primer topološko-vektorskog prostora koji nije lokalno konveksan. Zatim predstavljamo lokalno konveksne topologije definisane familijom semi-normi i navodimo primere takvih topologija. Na realnom vektorskom prostoru X definišemo funkcionelu Minkovskog apsorbujućeg skupa $A \subset X$. Uz dodatne pretpostavke za skup A pokazujemo da je funkcionela Minkovskog skupa A semi-norma na X. Tu činjenicu koristimo da bismo pokazali da je lokalno konveksna topologija svakog lokalno konveksnog prostora definisana određenom familijom semi-normi.

U trećem poglavlju razmatramo specijalan tip lokalno konveksnih topologija - slabe topologije. Definišemo pojam uparenih vektorskih prostora X i Y u odnosu na datu bilinearnu formu $B : X \times Y \to \mathbb{R}$. Slabu topologiju $\sigma(X, Y)$ na X uvodimo kao lokalno konveksnu topologiju definisanu uparivanjem dva prostora (definisanu familijom semi-normi koja je određena bilinearnom formom). Zatim na nepraznom skupu X

[1] Maurice Fréchet (1878-1973), francuski matematičar
[2] Felix Haussdorf (1868-1942), nemački matematičar
[3] John von Neumann (1903-1957), mađarski matematičar

uvodimo pojam inicijalne topologije za familiju preslikavanja $\{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$, gde su Y_i, $i \in I$ topološki prostori. Ako je E realan vektorski prostor, $(E\|\cdot\|)$ Banahov prostor i $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ njegov dualni prostor, onda slabu topologiju $\sigma(E, E^*)$ i slabu-* topologiju $\sigma(E^*, E)$ definišemo kao inicijalne topologije, redom na prostorima E i E^*, za određene familije linearnih funkcioneli. Prikazujemo odnose između različitih topologija definisanih na prostoru E (E^*). Bavimo se slabom konvergencijom niza u Banahovom prostoru. Definišemo slabu-* konvergenciju niza u dualnom prostoru Banahovog prostora i navodimo neke njene osobine. Dokazujemo Banah-Alaoglu teoremu: zatvorena jedinična lopta B_{E^*} je kompaktan skup u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$. Zatim se bavimo osobinama refleksivnih Banahovih prostora. Dokazujemo da je Banahov prostor refleksivan ako i samo ako je zatvorena jedinična lopta B_E kompaktan skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Dalje razmatramo osobinu separabilnosti Banahovog prostora, koja je vezana za osobinu metrizabilnosti slabih topologija. Dokazujemo da je Banahov prostor $(E, \|\cdot\|)$ separabilan ako i samo ako je prostor $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$ metrizabilan, gde je $\sigma(E^*, E)_{B_{E^*}}$ topologija na B_{E^*} indukovana slabom topologijom $\sigma(E^*, E)$. Na osnovu tog tvrđenja i Banah-Alaoglu teoreme dalje pokazujemo da svaki ograničen niz u dualnom prostoru separabilnog Banahovog prostora ima slabo-* konvergentan podniz. Rezultate o refleksivnim prostorima i vezu između separabilnosti Banahovih prostora i metrizabilnosti slabih topologija koristimo kako bismo na kraju ovog poglavlja pokazali da ograničen niz u refleksivnom Banahovom prostoru ima slabo konvergentan podniz.

Četvrto poglavlje je posvećeno kratkom prikazu primene prethodnih teorijskih rezultata na L^p prostore. Definišemo L^p, $1 \leq p \leq \infty$ prostore i navodimo osnovne osobine ovih Banahovih prostora. Pomoću Risove teoreme o reprezentaciji za L^p prostore definišemo slabu (slabu-*) konvergenciju niza u prostoru L^p, $1 \leq p < \infty$ (L^∞). U skladu sa predstavljenom teorijom u trećem poglavlju izvodimo zaključke o nekim osobinama L^p prostora. Zatim posmatramo Košijev problem za skalarni zakon održanja i dajemo definiciju slabog rešenja Košijevog problema. Primenu slabe-* konvergencije niza u prostoru L^∞ ilustrujemo na primeru Košijevog problema za skalarni zakon održanja sa početnim uslovom $u_0 \in L^\infty$. Pod odgovarajućim pretpostavkama pokazujemo postojanje slabog rešenja tog problema. U tu svrhu koristimo niz viskoznih rešenja i metodu kompenzovane kompaktnosti, odnosno teoremu o slaboj konvergenciji 2×2 determinanti.

Zahvaljujem se članovima komisije za odbranu ovog rada, dr Stevanu Pilipoviću i dr Marku Nedeljkovu, na prenetom znanju tokom studija, kao i savetima prilikom pisanja ovog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Ivani Vojnović, za velikodušno pruženu pažnju i pomoć prilikom pisanja ovog rada, kao i za preneto znanje, savete i podršku tokom studija.

Veliku zahvalnost dugujem svojim roditeljima, sestri Danki i dragom Marku, za neizmernu podršku, pomoć i razumevanje. Zahvaljujem se i svojim prijateljima na podršci.

Novi Sad, 2018. Milica Lučić

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

U ovom poglavlju navodimo oznake koje ćemo koristiti i dajemo uvodne napomene. Predstavljamo pojmove i tvrđenja vezane za topološke, metričke, vektorske i normirane prostore, koji će nam biti potrebni za definisanje lokalno konveksnih prostora i slabih topologija i njihovo izučavanje. Tvrđenja navodimo bez dokaza. Za dokaze tvrđenja i više osobina predstavljenih pojmova dajemo reference.

1.1 Oznake, uvodne napomene

Podrazumevamo da čitalac dobro poznaje osnovne pojmove - skupovi, relacije, funkcije. Zbog toga ukratko navodimo oznake samo za neke opšte pojmove.

Ako su X i Y skupovi, sa $X \subset Y$ označavamo da je skup X **podskup** skupa Y, pri čemu naglašavamo da ova oznaka dopušta i jednakost skupova. Oznaka $\subsetneq$ ne dopušta jednakost skupova i ako je $X \subsetneq Y$ kažemo da je skup X **pravi podskup** skupa Y.
Skup svih podskupova skupa X je **partitivni skup** skupa X, u oznaci $\mathcal{P}(X)$. Skup bez elemenata obeležavamo sa $\emptyset$ i zovemo ga **prazan skup**.
Ako je $f : X \to Y$ preslikavanje i $A \subset X$ proizvoljan podskup, onda je skup $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ **direktna slika** skupa A.
Za $B \subset Y$ skup $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$ je **inverzna slika** skupa B.
Ako su X i Y neprazni skupovi, $f : X \to Y$ i $A \subset X$, onda za preslikavanje $g : A \to Y$ dato sa $g(x) = f(x)$, za sve $x \in A$, kažemo da je **restrikcija preslikavanja** f na skup A i označavamo ga sa $f|_A$. Za preslikavanje $h : A \to f[A]$, $h(x) = f(x)$, za svako $x \in A$, kažemo da je **sirjektivna restrikcija preslikavanja** f na skup A i označavamo ga sa $f\lceil_A$.
Kardinalni broj skupa A označavamo sa $|A|$. Kardinalni broj $|\mathbb{N}|$ skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ označavamo sa $\aleph_0$ (čitamo: alef-nula). Skup A je **prebrojiv** ako i samo ako je $|A| = \aleph_0$.

Skupove prirodnih, celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva obeležavamo respektivno sa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Pretpostavljamo da čitalac dobro poznaje algebarske strukture ovih skupova. Obeležavamo i $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Takođe, smatramo da čitalac poznaje uobičajene norme i metrike prostora $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{C}$, pa i njihove uobičajene topološke strukture. Dakle, u ovom radu podrazumevamo da je norma realnog broja njegova apsolutna vrednost, a norma kompleksnog broja njegov moduo. Za $n \geq 2$ prostor $\mathbb{R}^n$ je snabdeven Euklidskom normom $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Više o navedenim pojmovima i napomenama u ovom odeljku čitalac može da pronađe u [11].

1.2 Uvodni pojmovi i tvrđenja - topološki prostori

U ovom odeljku navodimo definicije i tvrđenja teorije topoloških prostora, koje ćemo koristiti u nastavku rada. Za dokaze tvrđenja i više detalja o pojmovima ovog odeljka preporučujemo [11].

Definicija 1.2.1. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako važe sledeća tri uslova:

(O1) Prazan skup i skup X su otvoreni, to jest $\emptyset,\ X \in \mathcal{O}$;

(O2) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, to jest za svako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, to jest za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je **topologija** na skupu X, a za uređenu dvojku $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je **topološki prostor**, dok elemente skupa X zovemo **tačke**.
Za skup $F \subset X$ kažemo da je **zatvoren** ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup. Familiju zatvorenih skupova označavamo sa $\mathcal{F}$.

Lema 1.2.2. *Presek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.*

Teorema 1.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada familija $\mathcal{F}$ svih zatvorenih skupova zadovoljava sledeće uslove:*

(F1) Prazan skup i skup X su zatvoreni;

(F2) Unija dva (pa i konačno mnogo) zatvorenih skupova je zatvoren skup;

(F3) Presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Definicija 1.2.4. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ je **baza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi, to jest $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$;

(B2) Svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ može da se prikaže kao unija neke potfamilije familije $\mathcal{B}$ (postoji kolekcija $\{B_j : j \in J\} \subset \mathcal{B}$, da je $O = \bigcup_{j \in J} B_j$).

Definicija 1.2.5. Neka je $X \neq \emptyset$. Kolekcija $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ je **baza neke topologije** na skupu X ako i samo ako je kolekcija $\left\{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\right\}$ topologija na skupu X.

Primer 1.2.6. *(Uobičajena topologija na skupu $\mathbb{R}$) Familija*

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$$

*svih otvorenih intervala je baza neke topologije na skupu $\mathbb{R}$. Topologiju određenu bazom $\mathcal{B}$ zovemo **uobičajena topologija na** $\mathbb{R}$ i označavamo je sa $\mathcal{O}_{uob}$. U prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ skup O je otvoren ako i samo ako je unija neke (konačne ili beskonačne) familije otvorenih intervala.*

Okoline

Koristeći pojam otvorenog skupa definišemo pojam okoline tačke.

Definicija 1.2.7. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je **okolina tačke** $x \in X$ ako i samo ako postoji otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ takav da je $x \in O \subset A$. Familiju svih okolina tačke x označavamo sa $\mathcal{U}(x)$.

Teorema 1.2.8. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada važi: skup $A \subset X$ je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke.*

Teorema 1.2.9. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za svako $x \in X$ važi:*

(U1) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\,(x \in U)$

(U2) $\forall U, V \in \mathcal{U}(x)\,\big(U \cap V \in \mathcal{U}(x)\big)$

(U3) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\,\forall A \subset X\,\big(U \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{U}(x)\big)$

(U4) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\,\exists W \in \mathcal{U}(x)\,\Big(W \subset U \wedge \forall y \in W\big(W \in \mathcal{U}(y)\big)\Big)$

Topološka struktura na nekom skupu X može da se definiše tako što se prvo svakoj tački $x \in X$ pridruži familija $\mathcal{U}(x)$, tako da su zadovoljeni uslovi *(U1)–(U4)*. Tada se otvoren skup definiše kao skup koji je okolina svake svoje tačke. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 1.2.10. *Neka je X neprazan skup i neka je svakoj tački $x \in X$ pridružena neprazna familija $\mathcal{V}(x)$ podskupova skupa X koja zadovoljava uslove (U1)–(U4). Tada:*

1. *Familija $\mathcal{O} = \big\{O \subset X : \forall x \in O\,\big(O \in \mathcal{V}(x)\big)\big\}$ je topologija na skupu X;*
2. *U topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$, za svako $x \in X$, kolekcija $\mathcal{V}(x)$ je upravo familija svih okolina tačke x (to jest $\mathcal{U}(x) = \mathcal{V}(x)$).*

Uslove *(U1)–(U4)* zovemo **aksiome okolina**.

Definicija 1.2.11. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je **baza okolina tačke** x ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(BO1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x, to jest $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$;

(BO2) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\, \exists B \in \mathcal{B}(x)\, (B \subset U)$.

Definicija 1.2.12. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **Hauzdorfov** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da $x \in O_1$ i $y \in O_2$.

Važi da je prostor $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov ako i samo ako svake dve različite tačke imaju disjunktne okoline.

Odnos između topologija, topologija generisana familijom skupova

Neka su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ topologije na skupu X. Ako je $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, onda kažemo da je topologija $\mathcal{O}_2$ **finija** od topologije $\mathcal{O}_1$ ili da je topologija $\mathcal{O}_1$ **grublja** od topologije $\mathcal{O}_2$.

Neka su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ topologije na skupu X. Ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x u prostoru $(X, \mathcal{O}_1)$ postoji okolina U tačke x u prostoru $(X, \mathcal{O}_2)$, takva da važi $U \subset V$, onda sledi da je $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ (to jest topologija $\mathcal{O}_2$ je finija od topologije $\mathcal{O}_1$).

Neka je $\mathcal{S}$ kolekcija podskupova skupa X. Često želimo da definišemo topologiju na skupu X, tako da svi podskupovi skupa X iz kolekcije $\mathcal{S}$ budu otvoreni. Ako pritom kolekcija $\mathcal{S}$ ne predstavlja topologiju, onda je treba dopuniti. Dopuna je uvek moguća, jer je $\mathcal{P}(X)$ topologija koja sadrži sve podskupove skupa X. Međutim, obično tražimo minimalno proširenje kolekcije $\mathcal{S}$.

Definicija 1.2.13. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kolekcija $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ je **podbaza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(P1) Elementi kolekcije $\mathcal{P}$ su otvoreni skupovi, to jest $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$;

(P2) Familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ predstavlja neku bazu topologije $\mathcal{O}$.

Teorema 1.2.14. *Presek proizvoljne familije topologija na skupu X je topologija na skupu X.*

Teorema 1.2.15. *Neka je X neprazan skup i $\mathcal{S}$ neka familija njegovih podskupova. Tada postoji najgrublja topologija na skupu X koja sadrži familiju $\mathcal{S}$.*

Prethodna teorema dokazuje egzistenciju najgrublje topologije. Ona je presek kolekcije topologija $\{\mathcal{O} : \mathcal{O}$ je topologija na X i $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}\}$. Ako tu topologiju označimo sa $\mathcal{O}(\mathcal{S})$, postavlja se pitanje kako se ona dobija od kolekcije $\mathcal{S}$. Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 1.2.16. *Neka je X neprazan skup i kolekcija $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ takva da je $\bigcup \mathcal{S} = X$. Tada važi:*

1. *Familija $\mathcal{B}$ svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{S}$ je baza neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu X, a $\mathcal{S}$ je njena podbaza.*

2. *$\mathcal{O}$ je najmanja topologija na skupu X koja sadrži kolekciju $\mathcal{S}$.*

Dakle, ako je $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ kolekcija skupova takva da je $\bigcup \mathcal{S} = X$, onda se do najgrublje topologije $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ koja sadrži kolekciju $\mathcal{S}$ dolazi na sledeći način:

$$\mathcal{S} \xrightarrow[\text{preseci}]{\text{konačni}} \mathcal{B} \xrightarrow[\text{unije}]{\text{proizvoljne}} \mathcal{O}(\mathcal{S})$$

Potprostor topološkog prostora

Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ proizvoljan neprazan podskup, onda se na skupu A na prirodan način može definisati topologija koju skup A "nasleđuje" od prostora $(X, \mathcal{O})$. Preciznije, važi naredna teorema.

Teorema 1.2.17. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ neprazan skup. Tada je kolekcija $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A.*

Definicija 1.2.18. Za topologiju $\mathcal{O}_A$, definisanu u prethodnoj teoremi, kažemo da je **indukovana topologijom** $\mathcal{O}$. Tada je topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ **potprostor** prostora $(X, \mathcal{O})$. Ako je $A \in \mathcal{O}$ ($A \in \mathcal{F}$), onda je $(A, \mathcal{O}_A)$ **otvoren (zatvoren) potprostor**.

Pri proučavanju podstruktura neke strukture postavlja se pitanje koje se osobine strukture prenose na podstrukturu. Stoga dajemo narednu definiciju.

Definicija 1.2.19. Osobina P topoloških prostora je **nasledna** ako i samo ako za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: ako prostor $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu P, onda svaki njegov potprostor ima tu osobinu.
Osobinu P topoloških prostora **nasleđuju otvoreni (zatvoreni) skupovi** ako i samo ako za svaki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: ako prostor $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu P, onda svaki njegov otvoren (zatvoren) potprostor ima tu osobinu.

Unutrašnjost i adherencija skupa, separabilan prostor

Topološka struktura omogućava uspostavljanje odnosa između elemenata i podskupova skupa X. Proizvoljnom podskupu A topološkog prostora X možemo da pridužimo dva skupa - njegovu unutrašnjost i adherenciju (zatvorenje).

Definicija 1.2.20. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Tačka $x \in X$ je **unutrašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O takav da $x \in O \subset A$. Tačka $x \in X$ je **adherentna tačka** skupa A ako i samo ako je presek svake okoline U tačke x i skupa A neprazan. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A zovemo **unutrašnjost** skupa A i označavamo sa A°. Skup svih adherentnih tačaka skupa A zovemo **adherencija (ili zatvorenje)** skupa A i označavamo sa $\overline{A}$.

Teorema 1.2.21. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve $A, B \subset X$ važi:*

1. *Unutrašnjost skupa A je najveći otvoren podskup skupa A.*

2. *Skup A je otvoren ako i samo ako je $A = A^\circ$.*

3. *Ako je $A \subset B$, onda je $A^\circ \subset B^\circ$.*

4. *$\overline{A}$ je najmanji zatvoren nadskup skupa A.*

5. *Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.*

6. *Ako je $A \subset B$, onda je $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Definicija 1.2.22. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $D \subset X$ je **gust** (u X) ako i samo ako je $\overline{D} = X$. Prostor $(X, \mathcal{O})$ je **separabilan** ako i samo ako postoji skup $D \subset X$ koji je gust i prebrojiv.

Teorema 1.2.23. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}$. Skup $D \subset X$ je gust ako i samo ako je $B \cap D \neq \emptyset$, za svaki neprazan skup $B \in \mathcal{B}$.*

Granica niza

Podsetimo se, **niz** u skupu X je svako preslikavanje $x : \mathbb{N} \to X$. Niz obično označavamo sa $(x_n : n \in \mathbb{N})$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili (x_n).
Niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u X, takav da je $y_k = x_{n_k}$, $n_k \in \mathbb{N}$, za svako $k \in \mathbb{N}$ i $n_1 < n_2 <$ ... je **podniz** niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Navešćemo definiciju i neke od osobina granice niza u topološkom prostoru.

Definicija 1.2.24. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je **granica niza** (x_n) ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji prirodan broj n_0, takav da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Za niz koji ima bar jednu granicu kažemo da je **konvergentan**.

Ako niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima jedinstvenu granicu a, onda kažemo da taj niz konvergira ka a i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ili $x_n \to a$, $n \to \infty$ (ili kraće $x_n \to a$).

Teorema 1.2.25. *U Hauzdorfovom prostoru niz može da ima najviše jednu granicu.*

Teorema 1.2.26. *Ako je tačka x granica nekog niza tačaka skupa A, onda je $x \in \overline{A}$.*

Neprekidna preslikavanja, homeomorfizmi

Neprekidnost je jedan od osnovnih pojmova matematičke analize. Navodimo definiciju neprekidnosti koja se odnosi na preslikavanja između proizvoljnih topoloških prostora.

Definicija 1.2.27. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je **neprekidna u tački** x_0 ako i samo ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 takva da je $f[U] \subset V$.
Funkcija f je **neprekidna** ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački $x \in X$.

Uslov da je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna možemo da zapišemo formulom

$$\big(\forall x \in X\big)\big(\forall V \in \mathcal{U}(f(x))\big)\big(\exists U \in \mathcal{U}(x)\big)\big(f[U] \subset V\big),$$

a u sledećoj teoremi navodimo ekvivalentne uslove neprekidnosti.

Teorema 1.2.28. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *Preslikavanje f je neprekidno.*
2. *Za svaki otvoren skup $O \subset Y$, skup $f^{-1}[O] \subset X$ je otvoren.*
3. *Za svaki zatvoren skup $F \subset Y$, skup $f^{-1}[F] \subset X$ je zatvoren.*

Teorema 1.2.29. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno u tački x ako i samo ako je za svaku okolinu W tačke $f(x)$ skup $f^{-1}[W]$ okolina tačke x.*

Teorema 1.2.30. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topološki prostori, a $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidno preslikavanje.*

Teorema 1.2.31. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori, $A \subset X$ i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada su restrikcija preslikavanja f na skup A ($f|_A : A \to Y$) i sirjektivna restrikcija preslikavanja f na skup A ($f\lceil_A : A \to f[A]$) neprekidna preslikavanja.*

Definicija 1.2.32. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **homeomorfizam** ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. f je bijekcija; 2. f je neprekidno; 3. f^{-1} je neprekidno.

Prostori $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ su **homeomorfni** ako i samo ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$, što označavamo sa $X \cong Y$.

Teorema 1.2.33. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i $(Z, \mathcal{O}_Z)$ proizvoljni topološki prostori. Tada važi:*

$$1.\ X \cong X; \quad 2.\ X \cong Y \Rightarrow Y \cong X; \quad 3.\ X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z.$$

Definicija 1.2.34. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je

- **otvoreno** ako i samo ako je za svaki otvoren skup $O \subset X$ skup $f[O] \subset Y$ otvoren.
- **zatvoreno** ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $F \subset X$ skup $f[F] \subset Y$ zatvoren.

Napomena 1.2.35. Svaki homeomorfizam je i zatvoreno i otvoreno preslikavanje.

Definicija 1.2.36. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je **nizovno (sekvencijalno) neprekidna u tački** x_0 ako i samo ako za svaki niz (x_n) u prostoru X iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Na osnovu date definicije formulišemo narednu teoremu.

Teorema 1.2.37. *Ako je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački $x_0 \in X$, onda je i sekvencijalno neprekidna u toj tački.*

Kompaktnost

Kompaktnost je topološka osobina koja omogućava mnoge konstrukcije u matematičkoj analizi i drugim oblastima matematike. U glavnom delu rada govorićemo o kompaktnosti određenih skupova, pa u ovom delu dajemo osnovne definicije i tvrđenja.

Definicija 1.2.38. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Familija $\{O_i : i \in I\}$ podskupova skupa X je **pokrivač skupa** A ako i samo ako je $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. Ako su pritom skupovi O_i, $i \in I$, otvoreni, onda za pokrivač kažemo da je **otvoren**. Za potkolekciju pokrivača koja je i sama pokrivač kažemo da je **potpokrivač** datog pokrivača.

Definicija 1.2.39. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **kompaktan** ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.

Koristeći pojam kompaktnog prostora definišemo kompaktan podskup topološkog prostora.

Definicija 1.2.40. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je **kompaktan skup** ako i samo ako je prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan topološki prostor.

Teorema 1.2.41. *Skup A je kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa A ima konačan potpokrivač.*

Teorema 1.2.42. *Kompaktnost je nasledna prema zatvorenim podskupovima.*

Teorema 1.2.43. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hauzdorfov prostor i $A \subset X$ kompaktan skup. Tada je A i zatvoren skup.*

Teorema 1.2.44. *Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup.*

Teorema 1.2.45. *Neprekidna realna funkcija nad kompaktnim prostorom dostiže minimalnu i maksimalnu vrednost.*

Topološki proizvod

U nastavku podsećamo na definiciju i neke osobine topologije Tihonova i proizvoda topoloških prostora.

Definicija 1.2.46. **Direktan proizvod** familije skupova $\{X_i : i \in I\}$ definisan je kao skup svih funkcija $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$, takvih da je $x(i) \in X_i$ za sve $i \in I$, kraće zapisano:

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : \forall i \in I\, (x(i) \in X_i) \right\},$$

ili ako x obeležimo sa $(x_i : i \in I)$

$$\prod_{i\in I} X_i = \big\{ (x_i : i \in I) : \forall i \in I\, (x_i \in X_i) \big\}.$$

Ako je $X_i = X$ za sve $i \in I$, onda je $\prod_{i\in I} X_i = X^I$. Ako su skupovi X_i neprazni, onda aksioma izbora garantuje da je i direktan proizvod $\prod_{i\in I} X_i$ neprazan skup.
Direktan proizvod konačno mnogo skupova $X_1, ..., X_n$, $n \in \mathbb{N}$, obeležavamo sa

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \big\{(x_1, ..., x_n) : x_i \in X_i,\ 1 \le i \le n\big\}.$$

Definicija 1.2.47. Za $j \in I$, preslikavanje $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ dato sa $\pi_j(x) = x(j)$ $\big(\pi_j\big((x_i : i \in I)\big) = x_j\big)$ je **projekcija** proizvoda na skup X_j.

Topologiju Tihonova uvodimo na sledeći način.

Teorema 1.2.48. *Neka je I neprazan skup, a $\big\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\big\}$ familija topoloških prostora. Tada važi:*

1. *Kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\prod_{i\in I} X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $i \in I$ proizvoljan indeks, a $O_i \in \mathcal{O}_i$ otvoren skup u prostoru $(X_i, \mathcal{O}_i)$, je podbaza neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu $\prod_{i\in I} X_i$.*

2. *Familija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$,*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] : K \subset I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge \forall i \in K\, (O_i \in \mathcal{O}_i) \right\},$$

je baza topologije $\mathcal{O}$.

Definicija 1.2.49. Topologiju $\mathcal{O}$ na skupu $\prod_{i\in I} X_i$ uvedenu u prethodnoj teoremi zovemo **topologija Tihonova**. Za prostor $\Big(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O}\Big)$ kažemo da je (tihonovski, topološki) **proizvod** familije prostora $\big\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\big\}$.

Lema 1.2.50. *Uz pretpostavke i oznake iz Teoreme 1.2.48 važi:*

$$\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] = \prod_{i\in I} V_i, \ \ \textit{gde je}\ \ V_i = \begin{cases} X_i & \text{za } i \in I \setminus K, \\ O_i & \text{za } i \in K. \end{cases}$$

Teorema 1.2.51. *Neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topološki prostori i $x = (x_i : i \in I) \in \prod_{i\in I} X_i$. Neka je za svako $i \in I$ sa $\mathcal{B}(x_i)$ označena baza oklina tačke x_i u prostoru $(X_i, \mathcal{O}_i)$. Tada je kolekcija*

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ \bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[B_i] : K \subset I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge \forall i \in K\big(B_i \in \mathcal{B}(x_i)\big) \right\}$$

baza okolina tačke x u prostoru $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O})$.

Teorema 1.2.52. *Uz pretpostavke i oznake iz Teoreme 1.2.48 važi:*

1. *Projekcije* $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ *su neprekidne otvorene sirjekcije.*

2. *Ako je* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *topološki prostor, onda je preslikavanje* $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ *neprekidno ako i samo ako je za svako* $i \in I$ *kompozicija* $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ *neprekidna.*

Dokaz naredne propozicije se može naći u [8, Propozicija 17.1].

Propozicija 1.2.53. *Neka je* $(X, \mathcal{O}_X)$ *topološki prostor,* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *Hauzdorfov topološki prostor i* $f : X \to Y$ *neprekidna funkcija. Tada je grafik preslikavanja* f, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *zatvoren skup u topološkom proizvodu prostora* $(X, \mathcal{O}_X)$ *i* $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Teorema 1.2.54 (Tihonov[1])**.** *Proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih prostora je kompaktan prostor.*

1.3 Uvodni pojmovi i tvrđenja - metrički prostori

Definišemo metrički prostor i navodimo pojmove i tvrđenja vezane za metričke prostore koje ćemo koristiti u nastavku rada. Dokaze tvrđenja i detalje o pojmovima ovog poglavlja čitalac može da pronađe u [9] i [11].

Definicija 1.3.1. Neka je $X \neq \emptyset$. Funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$, takva da za sve $x, y, z \in X$ važe uslovi:

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

je **metrika** na skupu X. Par (X, d) je tada **metrički prostor**. Osobinu *(M3)* nazivamo **nejednakost trougla**, a broj $d(x, y)$ **rastojanje tačaka** x i y. Za $x \in X$ i $r > 0$ skup $L(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ zovemo **otvorena lopta** sa centrom u tački x i poluprečnikom r.

Teorema 1.3.2. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Tada je familija svih otvorenih lopti,* $\mathcal{B}_d = \{L(x, r) : x \in X \wedge r > 0\}$, *baza neke topologije* $\mathcal{O}_d$ *na skupu* X.

Definicija 1.3.3. Za topologiju $\mathcal{O}_d$ definisanu u prethodnoj teoremi kažemo da je **određena** (ili **indukovana**) **metrikom** d.
Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **metrizabilan** ako i samo ako postoji neka metrika d na skupu X da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Dakle, svaki metrički je ujedno i topološki prostor, pa za njega važe tvrđenja i definicije navedeni za topološke prostore.

[1] Andrey Nikolayevich Tikhonov (1906-1993), ruski matematičar

Teorema 1.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor i $x \in X$. Familija otvorenih lopti sa centrom u tački x, $\mathcal{B}(x) = \{L(x, r) : r > 0\}$, je baza okolina tačke x. Familija $\left\{L(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ je prebrojiva baza okolina tačke x.*

Teorema 1.3.5. *Svaki metrički prostor je Hauzdorfov prostor.*

Definicija 1.3.6. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Skup A je **ograničen** ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$, tako da je $A \subset L(x, r)$.

Ako je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, onda je preslikavanje $d_A = d|_{A \times A}$, $d_A : A \times A \to [0, \infty)$ metrika na skupu A. Prostor (A, d_A) je **potprostor metričkog prostora** (X, d). Topologija metričkog prostora (A, d_A) je upravo topologija na A indukovana topologijom $\mathcal{O}_d$.

Navodimo i definiciju izometrije i izometričnih metričkih prostora.

Definicija 1.3.7. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je **izometrija** ako i samo ako za svako $x_1, x_2 \in X$ važi

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Prostori X i Y su **izometrični**, u oznaci $X \cong_i Y$, ako i samo ako postoji sirjektivna izometrija $f : X \to Y$.

Teorema 1.3.8. *Ako su (X, d_X), (Y, d_Y) i (Z, d_Z) metrički prostori, onda važi:*

$$1.\ X \cong_i X; \quad 2.\ X \cong_i Y \Rightarrow Y \cong_i X; \quad 3.\ X \cong_i Y \wedge Y \cong_i Z \Rightarrow X \cong_i Z.$$

Nizovi u metričkom prostoru

Mnoga ispitivanja metričkog prostora se mogu svesti na ispitivanje nizova u tom prostoru. Stoga navodimo tvrđenja i definicije vezane za nizove u metričkom prostoru.

Teorema 1.3.9. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$ proizvoljan skup. Tada važi:*

1. *$x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u skupu A čija je granica tačka x.*

2. *Skup A je zatvoren ako i samo ako je granica svakog konvergentnog niza tačaka skupa A element skupa A.*

3. *Skup $D \subset X$ je gust ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ postoji niz $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u skupu D, čija je granica tačka x.*

Definicija 1.3.10. Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u X je **ograničen** ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$, tako da je $d(x, x_n) < r$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.3.11. *Ako je (X, d) metrički prostor, onda važi:*

1. *Ako je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u X i $x \in X$, onda je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ ako i samo ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon).$$

2. *Ako postoji, granica niza je jedinstvena.*

3. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Teorema 1.3.12. *Metrički prostor* (X, d) *je kompaktan ako i samo ako svaki niz u skupu* X *ima konvergentan podniz.*

Navodimo definiciju i neke osobine Košijevih nizova.

Definicija 1.3.13. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u prostoru X kažemo da je **Košijev niz** ako i samo ako važi sledeći uslov:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Teorema 1.3.14. *U proizvoljnom metričkom prostoru* (X, d) *važi da je svaki konvergentan niz Košijev.*

Kompletnost

Definicija 1.3.15. Metrički prostor (X, d) je **kompletan** ako i samo ako je svaki Košijev niz u X konvergentan.

Teorema 1.3.16. *Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor i* $A \subset X$ *zatvoren skup. Tada je metrički prostor* (A, d_A) *kompletan.*

Teorema 1.3.17 (Ber[2])**.** *Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor i neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz zatvorenih skupova, tako da je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. *Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tako da je* $A^\circ_{n_0} \neq \emptyset$.

1.4 Uvodni pojmovi i tvrđenja - vektorski i normirani prostori

U ovom odeljku definišemo vektorske i normirane prostore. Za dokaze tvrđenja i više detalja o vektorskim i normiranim prostorima čitaoca upućujemo na [3], [9], [10] i [14].

Sa $\mathbb{K}$ obležavamo polje realnih, ili polje kompleksnih brojeva, to jest $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicija 1.4.1. Neka je V neprazan skup. V je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ ako su definisane operacije $+ : V \times V \to V$ (sabiranje) i $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ (množenje vektora skalarom) takve da je $(V, +)$ komutativna grupa i da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $x, y \in V$ važi:

(V1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

(V2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(V3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

[2] René-Louis Baire (1874-1932), francuski matematičar

(V4) $1x = x$.

Sliku para $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times V$ obeležavamo sa αx. Nula vektorskog prostora je neutralni element za sabiranje grupe $(V, +)$. Inverzni element elementa x u grupi $(V, +)$ označavamo sa $-x$. Elemente polja $\mathbb{K}$ nazivamo skalarima. Vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) zovemo **realan (kompleksan) vektorski prostor**.

Vektori $x_1, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}$, su **linearno nezavisni** ako važi

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Skup $\{x_i : i \in I\} \subset V$ linearno nezavisnih vektora (svaki konačan podskup je skup linearno nezavisnih vektora) je **algebarska baza** u V ako za svako $x \in V$ postoje konačan skup $I' \subset I$ i skalari $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i \in I'$, takvi da je $x = \sum_{i \in I'} \alpha_i x_i$. Navedena reprezentacija vektora x je jedinstvena. Poznato je da svaki vektorski prostor $V \neq \{0\}$ ima algebarsku bazu. Ako je ta baza konačan skup, kažemo da je prostor **konačno dimenzionalan**. Broj vektora te baze predstavlja **dimenziju** tog vektorskog prostora i obeležavamo ga sa $\dim(V)$. Za vektorski prostor koji nema konačnu algebarsku bazu kažemo da je **beskonačno dimenzionalan**.
Skup $W \subset V$ je **potprostor** vektorskog prostora V ako je W vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ u odnosu na restrikcije sabiranja i množenja vektora skalarom na W. Takođe, važi da je W potprostor prostora V ako i samo ako za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $x, y \in W$ važi da je $\alpha x + \beta y \in W$.
Ako je S neprazan podskup vektorskog prostora V, onda je skup svih **linearnih kombinacija** elemenata skupa S,

$$L(S) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ x_i \in S, 1 \leq i \leq n\},$$

potprostor prostora V i nazivamo ga **lineal** skupa S. Specijalno, ako je $L(S) = V$ kažemo da S generiše V i da su elementi skupa S **generatori** vektorskog prostora V.
Ako su X i Y vektorski prostori, onda je i $X \times Y$ vektorski prostor, u odnosu na operacije sabiranja i množenja vektora skalarom koje su definisane po komponentama:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

za sve $x_1, x_2, x \in X$, $y_1, y_2, y \in Y$ i $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definicija 1.4.2. Neka je E vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ preslikavanje za koje važe sledeći uslovi:

(N1) $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ za sve $x \in E$ i sve $\lambda \in \mathbb{K}$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za sve $x, y \in E$.

Tada kažemo da je preslikavanje $\|\cdot\|$ **norma** nad E, a uređen par $(E, \|\cdot\|)$ je **normiran prostor**.

Svaki normiran prostor $(E, \|\cdot\|)$ je i metrički (pa i topološki) prostor, sa metrikom d, koja je definisana na sledeći način:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ za sve } x, y \in E.$$

Ako je F potprostor vektorskog prostora E, onda je i prostor $(F, \|\cdot\|)$ normiran prostor (sa $\|\cdot\|$ je označena i restrikcija norme prostora E na prostor F).

Kompletan normiran prostor $(E, \|\cdot\|)$ zovemo **Banahov**[3] **prostor**.

Primer 1.4.3. *Prostor* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *je Banahov prostor, gde je* $|x|$ *apsolutna vrednost realnog broja* x.
Za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *prostor* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *je Banahov, gde je norma* $\|\cdot\|$ *definisana sa*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Prostor $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *je Banahov prostor, gde* $|x|$ *označava moduo kompleksnog broja* x.

Definicija 1.4.4. Neka je $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je **ograničen** ako i samo ako postoji $M > 0$, tako da je $\|x_n\| \leq M$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.4.5. *Neka je* E *realan vektorski prostor i* $(E, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Konačno dimenzionalan potprostor prostora* E *je zatvoren skup.*

Linearna preslikavanja, dualni prostor

Definicija 1.4.6. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **linearno** ako i samo ako je za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i sve $x, y \in X$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Linearno preslikavanje $f : X \to \mathbb{K}$ se naziva **linearna funkcionela** (**ili linearna forma**) na X. Skup svih linearnih funkcioneli na X obeležavamo sa $\mathcal{L}(X)$.

Napomena 1.4.7. Skup $f[X]$ je potprostor vektorskog prostora Y.

Ako su X, Y i Z vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$, onda je kompozicija $g \circ f : X \to Z$, linearnih preslikavanja $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, takođe linearno preslikavanje.

Ako su sabiranje funkcija f i g iz $\mathcal{L}(X)$ i množenje funkcije f iz $\mathcal{L}(X)$ skalarom $\alpha \in \mathbb{K}$ definisani sa

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ za sve } x \in X,$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ za sve } x \in X,$$

onda je skup $\mathcal{L}(X)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$.

Neka je $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Skup svih neprekidnih linearnih funkcioneli na E je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{L}(E)$ i obeležavamo ga sa E^*.

[3] Stefan Banach (1892-1945), poljski matematičar

Definicija 1.4.8. Neka su $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$ normirani prostori. Linearno preslikavanje $f : E \to Y$ je **ograničeno** ako i samo ako postoji $M > 0$, tako da je

$$\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \text{ za sve } x \in E.$$

Teorema 1.4.9. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Linearna funkcionela $f : E \to \mathbb{K}$ je neprekidna ako i samo ako je ograničena.*

Teorema 1.4.10. *Neka je E konačno dimenzionalan, realan vektorski prostor i neka je $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Tada je svaka linearna funkcionela, $f : E \to \mathbb{R}$, neprekidno preslikavanje.*

Neka je E realan vektorski prostor i $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Definišemo preslikavanje $\|\cdot\|_{E^*} : E^* \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$\|f\|_{E^*} = \inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M\|x\|, \text{ za svako } x \in E\}, \; f \in E^*.$$

Teorema 1.4.11. *Za svako $f \in E^*$ važi*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|.$$

Teorema 1.4.12. *Preslikavanje $\|\cdot\|_{E^*} : E^* \to \mathbb{R}$ je norma na E^*.*

Napomena 1.4.13. Na osnovu definicije norme na prostoru E^* imamo da za svako $f \in E^*$ i svako $x \in E$ važi da je $|f(x)| \leq \|f\|_{E^*}\|x\|$.

Teorema 1.4.14. *Prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ je Banahov.*

Prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ nazivamo **dualni prostor** prostora $(E, \|\cdot\|)$.

Propozicija 1.4.15. *Za svako $x \in E$ važi*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|\leq 1}} |f(x)|.$$

Sledi propozicija koja je posledica principa uniformne ograničenosti.

Propozicija 1.4.16. *Neka je E realan vektorski prostor, $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i $B \subset E$. Neka je za svako $f \in E^*$ skup $\{f(x) : x \in B\}$ ograničen. Tada je i skup B ograničen.*

Među najznačajnijim teoremama funkcionalne analize je i Han-Banahova teorema. Navešćemo jednu od njenih posledica.

Teorema 1.4.17. *Neka je E realan vektorski prostor i $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Neka je G potprostor prostora E i $g : G \to \mathbb{R}$ neprekidna linearna funkcionela na G. Tada postoji $f \in E^*$, tako da je $f|_G = g$ ($f(x) = g(x)$, za sve $x \in G$) i $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$.*

Sledeća teorema je geometrijski oblik Han-Banahove teoreme. Njen dokaz se nalazi u [3].

Teorema 1.4.18. *Neka je E realan vektorski prostor i $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Neka je $A \subset E$ neprazan, konveksan i zatvoren skup, a $B \subset E$ neprazan, konveksan i kompaktan skup i neka važi da je $A \cap B = \emptyset$. Tada postoje $f \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$, tako da je*

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon \text{ za svako } a \in A \text{ i } f(b) \geq \alpha + \varepsilon \text{ za svako } b \in B.$$

Sledeća teorema je poznata kao teorema o zatvorenom grafiku.

Teorema 1.4.19. *Neka su $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$ Banahovi prostori, gde su E i F realni vektorski prostori. Neka je $T : E \to F$ linearno preslikavanje. Preslikavanje T je neprekidno ako i samo ako je grafik preslikavanja T, $G(T) = \{(x, T(x)) : x \in E\}$, zatvoren skup u prostoru $(E \times F, \|\cdot\|)$.*[4]

[4]Norma $\|\cdot\| : E \times F \to [0, \infty)$ je definisana sa $(x, y) \mapsto \|x\|_E + \|y\|_F,\ (x, y) \in E \times F$. Prostor $(E \times F, \|\cdot\|)$ je Banahov, pri čemu je topologija indukovana normom $\|\cdot\|$ baš topologija Tihonova (topologija proizvoda) za prostore $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$.

Poglavlje 2

Lokalno konveksni topološko-vektorski prostori

U ovom poglavlju definišemo prostore koji su snabdeveni topološkom i vektorskom strukturom - topološko-vektorske prostore i bavimo se nekim njihovim osobinama. Zatim razmatramo specijalan tip topološko-vektorskih prostora - lokalno konveksne prostore. Za sadržaj ovog poglavlja i druge pojmove i tvrđenja u vezi sa lokalno konveksnim prostorima čitaoca upućujemo na [10].

2.1 Filteri

U ovom odeljku definišemo pojmove filtera i filter baze, koje ćemo koristiti u daljem razmatranju topološko-vektorskih prostora. Za više detalja o sadržaju ovog odeljka preporučujemo [10] i [11].

Definicija 2.1.1. Neka je $X \neq \emptyset$. Neprazna kolekcija $\Phi \subset \mathcal{P}(X)$ podskupova skupa X je **filter** (na X) ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(FI1) Prazan skup nije element kolekcije Φ;

(FI2) Presek proizvoljna dva elementa kolekcije Φ je element Φ, to jest za sve $F_1, F_2 \in \Phi$ važi $F_1 \cap F_2 \in \Phi$;

(FI3) Svaki nadskup proizvoljnog elementa kolekcije Φ je u Φ, to jest ako $F \in \Phi$ i ako je $F \subset A \subset X$, onda $A \in \Phi$.

Iz uslova *(FI3)* možemo da zaključimo da je skup X element svakog filtera na X. Indukcijom se, na osnovu uslova *(FI2)*, pokazuje da je presek konačno mnogo elemenata filtera takođe element filtera.

Primer 2.1.2. *Neka je X neprazan skup i $x \in X$ proizvoljan element. Kolekcija svih podskupova skupa X koji sadrže element x je filter na X.*

Primer 2.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Kolekcija $\mathcal{U}(x)$ svih okolina tačke x je filter na X. Zaista, na osnovu osobina (U1)$-$(U3), iz Teoreme 1.2.9, sledi da važe uslovi (FI1)$-$(FI3).*

Ako su Φ_1 i Φ_2 filteri na X i $\Phi_1 \subset \Phi_2$, onda kažemo da je filter Φ_2 **finiji** od filtera Φ_1 (ili da je filter Φ_1 **grublji** od filtera Φ_2).

Definicija 2.1.4. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X je **filter baza** ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(FB1) $\mathcal{B}$ je neprazna kolekcija i prazan skup nije element kolekcije $\mathcal{B}$.

(FB2) Presek svaka dva elementa kolekcije $\mathcal{B}$ sadrži element kolekcije $\mathcal{B}$, to jest ako $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, onda postoji $B \in \mathcal{B}$, tako da je $B \subset B_1 \cap B_2$.

Lema 2.1.5. *Neka je X neprazan skup, $\mathcal{B}$ kolekcija podskupova skupa X i $\Phi = \{F \subset X : \exists B \in \mathcal{B}\,(B \subset F)\}$. Kolekcija Φ je filter ako i samo ako je kolekcija $\mathcal{B}$ filter baza.*

Definicija 2.1.6. Neka je X neprazan skup, Φ filter na X i $\mathcal{B}$ kolekcija podskupova skupa X. Kolekcija $\mathcal{B}$ je **baza filtera** Φ ako i samo ako je $\mathcal{B}$ filter baza i $\Phi = \{F \subset X : \exists B \in \mathcal{B}\,(B \subset F)\}$. Označavamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\Phi$ i kažemo da je filter Φ generisan bazom $\mathcal{B}_\Phi$.

Za dve filter baze kažemo da su **ekvivalentne** ako i samo ako generišu isti filter.

Ako su $\mathcal{B}_{\Phi'}$ i $\mathcal{B}_\Phi$ redom baze filtera Φ' i Φ, onda važi da je Φ finiji od Φ' ako i samo ako svaki element baze $\mathcal{B}_{\Phi'}$ sadrži element baze $\mathcal{B}_\Phi$.

Važi da su $\mathcal{B}_\Phi$ i $\mathcal{B}_{\Phi'}$ ekvivalentne ako i samo ako svaki element baze $\mathcal{B}_\Phi$ sadrži element baze $\mathcal{B}_{\Phi'}$ i svaki element baze $\mathcal{B}_{\Phi'}$ sadrži element baze $\mathcal{B}_\Phi$.

Lema 2.1.7. *Neka je X neprazan skup, Φ filter na X i $\mathcal{B} \subset \Phi$. Kolekcija $\mathcal{B}$ je baza filtera Φ ako i samo ako svaki element filtera Φ sadrži element kolekcije $\mathcal{B}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $\mathcal{B}$ baza filtera Φ, onda prema definiciji baze filtera imamo da svaki element filtera sadrži element kolekcije $\mathcal{B}$.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da svaki element filtera Φ sadrži element kolekcije $\mathcal{B}$. Dokažimo da je tada kolekcija $\mathcal{B}$ filter baza. Filter Φ je neprazan, pa na osnovu prethodne pretpostavke sledi da je i kolekcija $\mathcal{B}$ neprazna. Prazan skup nije element filtera Φ, pa nije ni element kolekcije $\mathcal{B} \subset \Phi$. Kako je $\mathcal{B} \subset \Phi$ i Φ je filter, sledi da za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ važi $B_1 \cap B_2 \in \Phi$. Prema tome, postoji $B \in \mathcal{B}$, tako da je $B \subset B_1 \cap B_2$. Sada možemo da zaključimo da su ispunjeni uslovi iz definicije filter baze. Filter koji ta filter baza generiše je $\widetilde{\Phi} = \{F \subset X : \exists\, B \in \mathcal{B}\,(B \subset F)\}$. Uočavamo da je $\Phi \subset \widetilde{\Phi}$. Ako $F \in \widetilde{\Phi}$, onda postoji $B \in \mathcal{B}$, tako da je $B \subseteq F$. Kako je $\mathcal{B} \subset \Phi$ i Φ je filter, na osnovu uslova *(FI3)* sledi da $F \in \Phi$. Dakle, $\Phi = \widetilde{\Phi}$ i $\mathcal{B}$ je baza filtera Φ. $\square$

Primer 2.1.8. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Baza okolina tačke x, data Definicijom 1.2.11, je baza filtera $\mathcal{U}(x)$ svih okolina tačke x. Ako su $\mathcal{B}(x)$ i $\mathcal{B}'(x)$ dve baze okolina tačke x, onda važi:*

- *Za svako $B \in \mathcal{B}(x)$ postoji $B' \in \mathcal{B}'(x)$, tako da je $B' \subset B$.*
- *Za svako $B' \in \mathcal{B}'(x)$ postoji $B \in \mathcal{B}(x)$, tako da je $B \subset B'$.*

2.2 Topološko-vektorski prostori

Topološko-vektorski prostori su jedna od osnovnih struktura u polju istraživanja funkcionalne analize. U ovom odeljku predstavljamo njihova osnovna svojstva i neke od primera ovih prostora. Prvo navodimo oznake koje ćemo koristiti.

Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Ako su A i B podskupovi skupa X i $\lambda \in \mathbb{K}$, označavamo skupove:

$$A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}, \qquad A - B = \{a - b : a \in A,\, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Specijalno, za $a \in V$,

$$A + \{a\} = A + a, \qquad A - \{a\} = A - a.$$

Definicija 2.2.1. **Topološko-vektorski prostor** je uređen par (X, τ), gde je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, τ topologija na X i važi:

(T1) Sabiranje $(x, y) \mapsto x + y$ je neprekidno preslikavanje.

(T2) Množenje vektora skalarom $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ je neprekidno preslikavanje.

Na skupovima $X \times X$ i $\mathbb{K} \times X$ podrazumevamo topologije Tihonova date definicijom 1.2.49, pri čemu na skupu X podrazumevamo topologiju τ, a na polju $\mathbb{K}$ uobičajenu topologiju. Drugačije rečeno, otvoren skup u prostoru $X \times X$ je oblika $U_1 \times U_2$, gde $U_1, U_2 \in \tau$, a otvoren skup u prostoru $\mathbb{K} \times X$ je oblika $O \times U$, gde je skup O element uobičajene topologije skupa $\mathbb{K}$ i $U \in \tau$.

Napomena 2.2.2. Ako su uslovi *(T1)* i *(T2)* zadovoljeni kažemo da su vektorska i topološka struktura prostora kompatibilne.

Primer 2.2.3. *Svaki normiran prostor (Definicija 1.4.2) je i topološko vektorski prostor. Dokaz da su operacije sabiranja i množenja vektora skalarom neprekidne zainteresovani čitaoci mogu pogledati u [9].*

U daljem tekstu za topološko-vektorski prostor koristićemo i skraćenicu TVP.

Lema 2.2.4. *U topološko-vektorskom prostoru (X, τ) za svaku okolinu nule V postoji okolina nule U takva da je $U + U \subset V$.*

Dokaz. Neka je V proizvoljna okolina nule u (X, τ). Prema uslovu *(T1)* iz Definicije 2.2.1 sabiranje je neprekidno preslikavanje, pa je neprekidno u tački $(0, 0) \in X \times X$. Kako je $0 + 0 = 0$, sledi da postoje okoline nule U_1 i U_2 takve da je $U1 + U2 \subset V$. Kao presek dve okoline nule skup $U = U_1 \cap U_2$ je okolina nule. Tada je $U + U \subset U_1 + U_2 \subset V$, pa je U tražena okolina nule. □

Lema 2.2.5. *Neka je (X, τ) TVP. Tada važi:*

(i) Za svako $a \in X$ preslikavanje $t_a : X \to X$, dato sa $t_a(x) = x + a$, za svako $x \in X$, je homeomorfizam.

(ii) Za svako $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$ preslikavanje $s_\alpha : X \to X$ dato sa $s_\alpha(x) = \alpha x$, za svako $x \in X$, je homeomorfizam.

Dokaz. Dokažimo da važi *(i)*. Slično se pokazuje i *(ii)*. Neka $a \in X$.
Neka je $x, y \in X$ i $t_a(x) = t_a(y)$. Tada je $x + a = y + a$, odakle sledi da je $x = y$. Ako je $x \in X$ proizvoljna tačka, onda je $t_a(x - a) = x$. Dakle, t_a je bijektivno preslikavanje.
Dokažimo da je t_a neprekidno preslikavanje. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka i U proizvoljna okolina tačke $x_0 + a$. Tada na osnovu uslova *(T1)* iz Definicije 2.2.1 sledi da postoje okolina U_{x_0} tačke x_0 i okolina U_a tačke a, tako da je $U_{x_0} + U_a \subset U$. Važi da je $a \in U_a$. Ako je $x \in U_{x_0}$, onda je $t_a(x) \in U$, to jest važi da je $t_a[U_{x_0}] \subset U$. Dakle, t_a je neprekidno preslikavanje.
Inverzno preslikavanje preslikavanja t_a je t_{-a}, koje je takođe neprekidno.
Dakle, t_a je neprekidna bijekcija, čije je inverzno preslikavanje neprekidno, pa je prema Definiciji 1.2.32 t_a homeomorfizam. □

Ako je (X, τ) TVP i a proizvoljna tačka tog prostora, onda na osnovu Leme 2.2.5 sledi da su okoline tačke a skupovi oblika $V + a$, gde je V proizvoljna okolina nule. Dakle, ako su nam poznate okoline nule, poznata nam je topologija datog topološko-vektorskog prostora.

Definicija 2.2.6. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Skup $A \subset X$ je **apsorbujući** ako i samo ako za svako $x \in X$ postoji skalar $\alpha > 0$ takav da je $x \in \lambda A$ za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \alpha$.

Napomena 2.2.7. Uslov u Definiciji 2.2.6 je ekvivalentan uslovu da $\lambda x \in A$ za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq \alpha^{-1}$.

Lema 2.2.8. *Svaka okolina nule u TVP (X, τ) je apsorbujući skup.*

Dokaz. Neka je U proizvoljna okolina nule. Na osnovu uslova *(T2)* iz Definicije 2.2.1 i činjenice da za svako $x \in X$ važi $0 \cdot x = 0$ sledi da za svako $x \in X$ postoji skalar $\alpha > 0$, takav da za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq \alpha$, važi $\lambda x \in U$. □

Definicija 2.2.9. Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Skup $A \subset X$ je **uravnotežen** ako i samo ako je $\lambda A \subset A$ za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$.

Napomena 2.2.10. Lako se proverava da su presek i unija proizvoljne familije uravnoteženih skupova uravnoteženi skupovi. Ako je $A \subset X$, onda postoji najmanji uravnotežen skup koji sadrži A, to je presek svih uravnoteženih skupova koji sadrže skup A. Njega zovemo **uravnotežen omotač** skupa A. Takođe, postoji najveći uravnotežen skup sadržan u A, to je unija svih uravnoteženih skupova koji su sadržani u skupu A. Taj skup zovemo **uravnoteženo jezgro** skupa A.

Lema 2.2.11. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset V$ i $B \subset V$ uravnoteženo jezgro skupa A. Tada važi: $x \in B$ ako i samo ako $\lambda x \in A$ za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$.*

Dokaz. Neka $x \in V$. Skup $C(x) = \{\lambda x \in X : \lambda \in \mathbb{K} \wedge |\lambda| \leq 1\}$ je uravnotežen. Ako je $C(x) \subset A$, onda prema definiciji uravnoteženog jezgra skupa A imamo da je $C(x) \subset B$. Obratno, neka $x \in B$. B je uravnotežen, pa $\lambda x \in B$ za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$. Kako je $B \subset A$, sledi da je $C(x) \subset A$. □

Napomena 2.2.12. Kako je uslov "$\mu x \in A$ za svako $\mu \in \mathbb{K}$, $|\mu| \leq 1$" ekvivalentan uslovu "$x \in \lambda A$ za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq 1$", sledi da ako je uravnoteženo jezgro $B \neq \emptyset$, onda je

$$B = \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda A. \tag{2.1}$$

Napomena 2.2.13. Na osnovu Leme 2.2.5 *(ii)* i formule (2.1) vidimo da ako je (X, τ) TVP i $A \subset X$ zatvoren skup, onda je i njegovo uravnoteženo jezgro zatvoren skup.

Lema 2.2.14. *Neka je (X, τ) TVP i U okolina nule. Uravnoteženo jezgro V okoline nule U je okolina nule.*

Dokaz. Kako je množenje vektora skalarom neprekidno preslikavanje i važi $0 \cdot 0 = 0$, sledi da postoje okolina nule O u (X, τ) i skalar $\alpha > 0$, tako da za svako $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq \alpha$ i $x \in O$ važi da $\lambda x \in U$. Preslikavanje $x \mapsto \alpha x$ je homeomorfizam, pa je αU okolina nule. Neka je $y \in \alpha U$, $y = \alpha x$, za neko $x \in U$ i $\mu \in \mathbb{K}$, $|\mu| \leq 1$. Tada je $|\mu\alpha| \leq \alpha$, odakle je $\mu(\alpha x) = (\mu\alpha)x \in U$. Na osnovu Leme 2.2.11 sledi da je $\alpha U \subset V$. Dakle, V je okolina nule. $\square$

Pomoću prethodnih lema i napomena dokazaćemo prvi deo sledeće teoreme.

Teorema 2.2.15. *U TVP (X, τ) postoji baza okolina nule $\mathcal{N}$ takva da važi:*

(NO1) Svaka okolina $V \in \mathcal{N}$ je apsorbujući skup.

(NO2) Svaka okolina $V \in \mathcal{N}$ je uravnotežen skup.

(NO3) Za svaku okolinu $V \in \mathcal{N}$ postoji okolina $U \in \mathcal{N}$ takva da je $U + U \subset V$.

Obratno, neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $\mathcal{N}$ filter baza na X koja zadovoljava uslove (NO1)–(NO3). Tada postoji jedinstvena topologija τ na X, takva da je (X, τ) topološko-vektorski prostor u kojem je $\mathcal{N}$ baza okolina nule.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}(0)$ familija svih okolina nule. Prema Lemi 2.2.8, za svaku okolinu nule važi uslov *(NO1)*. Za svaku okolinu $U \in \mathcal{U}(0)$ je, na osnovu Leme 2.2.14, njeno uravnoteženo jezgro takođe okolina nule. Ako je V okolina nule, prema Lemi 2.2.4 postoji okolina nule U takva da je $U + U \subset V$. Tada za uravnoteženo jezgro W okoline U važi da je $W + W \subset V$. Uočavamo da je

$$\mathcal{N} = \{V \subset U : U \in \mathcal{U}(0) \text{ i } V \text{ je uravnoteženo jezgro okoline } U\}$$

tražena baza okolina nule. Ovim je dokazan prvi deo teoreme.

Dokažimo i drugi deo teoreme. Prvo pretpostavimo da postoji topologija τ takva da je (X, τ) TVP i $\mathcal{N}$ baza okolina nule. Primetimo da je u tom TVP skup W okolina tačke $a \in X$ ako i samo ako je $V + a \subset W$, za neko $V \in \mathcal{N}$. Sada možemo da zaključimo da je, ako postoji, tražena topologija jedinstvena.

Dokažimo da za svako $a \in X$ kolekcija

$$\mathcal{V}(a) = \big\{W \subset X : \exists V \in \mathcal{N}\,(V + a \subset W)\big\}$$

zadovoljava aksiome okolina *(U1)–(U4)* iz Teoreme 1.2.9.

Neka $W \in \mathcal{V}(a)$. Tada postoji $V \in \mathcal{N}$, tako da je $V + a \subset W$. Kako je $\mathcal{N}$ filter baza, V

je neprazan skup, pa postoji $x \in V$. Na osnovu uslova *(NO2)* imamo da $0 = 0x \in V$, pa je $a \in W$, to jest važi uslov *(U1)*. Jasno, ako je $W \subset \widetilde{W}$, onda je $V + a \subset \widetilde{W}$, pa $\widetilde{W} \in \mathcal{V}(a)$, odakle zaključujemo da važi uslov *(U3)*. Iz uslova *(NO3)* sledi da postoji $U \in \mathcal{N}$, tako da je $U+U \subset V$. Tada je $U+a \in \mathcal{V}(a)$ i važi $U+a \subset V+a \subset W$. Ako je $b \in U+a$ onda je $U+b \subset U+U+a \subset V+a \subset W$. Sledi da za svako $b \in U+a$ važi $W \in \mathcal{V}(b)$, pa važi uslov *(U4)*. Ako $W_1, W_2 \in \mathcal{V}(a)$, onda postoje $V_1, V_2 \in \mathcal{N}$, tako da je $V_1 + a \subset W_1$ i $V_2 + a \subset W_2$. Kolekcija $\mathcal{N}$ je filter baza, pa postoji skup $\widetilde{V} \in \mathcal{N}$ takav da je $\widetilde{V} \subset V_1 \cap V_2$. Tada važi $\widetilde{V} + a \subset W_1 \cap W_2$, pa je zadovoljen i uslov *(U2)*. Sada na osnovu Teoreme 1.2.10 imamo definisanu topologiju τ na skupu X, $\tau = \{O \subset X : \forall x \in O\,(O \in \mathcal{V}(x))\}$. Kolekcija $\mathcal{V}(x)$ je upravo familija svih okolina tačke x. Iz definicije kolekcije $\mathcal{V}(x)$ i Definicije 1.2.11 vidimo da je kolekcija $\mathcal{B}(x) = \{V + x : V \in \mathcal{N}\}$ baza okolina tačke x, pa je $\mathcal{N}$ baza okolina nule.
Dokažimo da su topološka i vektorska struktura prostora kompatibilne, to jest da važe uslovi *(T1)* i *(T2)* iz Definicije 2.2.1. Neka je $a, b \in X$, $a + b = c$ i neka je W okolina tačke c. Postoje skupovi $V, U \in \mathcal{N}$ takvi da je $V + c \subset W$ i $U + U \subset V$. Tada je $U + a$ okolina tačke a, $U + b$ okolina tačke b i važi

$$(U + a) + (U + b) \subset V + a + b = V + c \subset W.$$

Prema Definiciji 1.2.27 uslov *(T1)* je zadovoljen.
Dokažimo da za dato $V \in \mathcal{N}$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ postoji skup $U \in \mathcal{N}$ takav da je $\lambda U \subset V$. Matematičkom indukcijom se, na osnovu uslova *(NO3)*, može pokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $U \in \mathcal{N}$, tako da važi $2^n U \subset V$. Neka je broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|\lambda| \leq 2^n$. Ako je skup $U \in \mathcal{N}$ takav da je $2^n U \subset V$, onda na osnovu uslova *(NO2)* imamo da je $\lambda 2^{-n} U \subset U$, to jest $\lambda U \subset 2^n U \subset V$.
Neka $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ i neka je W okolina tačke λa. Postoji skup $V \in \mathcal{N}$ takav da je $V + \lambda a \subset W$. Dalje, postoji skup $U \in \mathcal{N}$ takav da je $U + U \subset V$ i postoji skup $O \in \mathcal{N}$ takav da je $O + O \subset U$. Kako je $0 \in O$, imamo da je $O + O + O \subset U + U \subset V$. Na osnovu uslova *(NO1)* postoji skalar $\varepsilon > 0$ takav da $\eta \in \mathbb{K}$, $|\eta| \leq \varepsilon$ implicira $\eta a \in O$. Prema prethodno pokazanom sledi da postoji skup $T \in \mathcal{N}$ takav da je $\lambda T \subset O$. Štaviše, ako je $|\eta| \leq 1$ i $x - a \in O$, onda iz uslova *(NO2)* imamo da je $\eta(x - a) \in O$. Neka je skup $S \in \mathcal{N}$ takav da je $S \subset O \cap T$ (takav skup postoji jer je $\mathcal{N}$ filter baza). Iz jednakosti

$$\xi x - \lambda a = (\xi - \lambda)a + \lambda(x - a) + (\xi - \lambda)(x - a)$$

sledi da $|\xi - \lambda| \leq \min\{1, \varepsilon\}$ i $x \in S + a$ implicira da je $\xi x - \lambda a \in O + O + O \subset V$, pa je $\xi x \in \lambda a + V \subset W$. Time smo dokazali da je zadovoljen uslov *(T2)*. Dakle, topološka i vektorska struktura su kompatibilne, pa je dobijeni prostor (X, τ) topološko-vektorski prostor u kojem je kolekcija $\mathcal{N}$ baza okolina nule, što je i trebalo dokazati.

□

Propozicija 2.2.16. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ kolekcija apsorbujućih, uravnoteženih podskupova skupa X, takva da za svaki skup $V \in \mathcal{S}$ postoji skup $U \in \mathcal{S}$ takav da je $U + U \subset V$. Tada postoji jedinstvena topologija τ na X takva da je (X, τ) topološko-vektorski prostor u kojem je kolekcija $\mathcal{S}'$ svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{S}$ baza okolina nule.*

Dokaz. Neka je V proizvoljan element kolekcije $\mathcal{S}$. Apsorbujući skup je neprazan, pa kako je V i uravnotežen, sledi da je $0 \in V$. Zbog toga imamo da je presek konačno mnogo elemenata kolekcije $\mathcal{S}$ neprazan skup. Dakle, kolekcija $\mathcal{S}'$ je neprazna i $\emptyset \notin \mathcal{S}'$. Kolekcija $\mathcal{S}'$ zadovoljava uslov *(FB2)* iz Definicije 2.1.4, jer za svako $S_1, S_2 \in \mathcal{S}'$ važi da je $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}'$. Zaključujemo da je kolekcija $\mathcal{S}'$ filter baza. Takođe, ona zadovoljava uslove *(NO1)–(NO3)*, pa je na osnovu prethodne Teoreme 2.2.15 propozicija dokazana. □

Navodimo primere koji ilustruju prethodna tvrđenja.

Primer 2.2.17. *Neka je* $(E, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Kolekcija* $\mathcal{B} = \{B_\rho \subset E : \rho > 0\}$, *gde je* $B_\rho = \{x \in E : \|x\| \leq \rho\}$, *je filter baza koja zadovoljava uslove (NO1)–(NO3).*

Primer 2.2.18. *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otvoren skup. Sa* $C(\Omega)$ *označavamo realan vektorski prostor neprekidnih funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Za svaki kompaktan skup* $K \subset \Omega$ *i svaki skalar* $\varepsilon > 0$ *definišemo skup*

$$V_{K,\varepsilon} = \{f \in C(\Omega) : |f(x)| \leq \varepsilon, \text{za sve } x \in K\}.$$

Neka su $K_1, K_2 \subset \Omega$ *kompaktni skupovi i* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. *Skup* $K_1 \cup K_2$ *je kompaktan. Ako je* $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, *onda je* $V_{K_1 \cup K_2, \varepsilon} \subset V_{K_1, \varepsilon_1} \cap V_{K_2, \varepsilon_2}$. *Kolekcija ovako definisanih skupova je neprazna, prazan skup nije element te kolekcije i zadovoljen je uslov (FB2) iz Definicije 2.1.4, pa sledi da je kolekcija skupova* $V_{K,\varepsilon}$ *filter baza na* $C(\Omega)$. *Lako se proverava da ta filter baza zadovoljava uslove (NO1)–(NO3). Topologiju na* $C(\Omega)$, *dobijenu u Teoremi 2.2.15, zovemo topologija uniformne konvergencije na kompaktnim skupovima.*

Da bismo predstavili sledeći primer navodimo oznake koje ćemo koristiti. Njih koristimo i u narednim poglavljima.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Skup $\text{supp} f := \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}}$ zovemo **nosač** funcije f. Dakle, nosač funkcije f je zatvorenje skupa tačaka u kojima je vrednost funkcije f različita od nule. Drugim rečima, nosač funkcije f je komplement najvećeg otvorenog skupa na kom je funkcija f identički jednaka nuli.
- Definišemo skup $\mathbb{N}_0^n := \{(p_1, ..., p_n) : p_i \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i \leq n\}$. Element $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ zovemo **multi-indeks**.
- **Red multi-indeksa** p je broj $|p| = p_1 + \cdots + p_n$.
- Sa ∂_j (ili f_{x_j}) označavamo j-ti parcijalni izvod $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$.
- Za $p \in \mathbb{N}_0^n$ je
$$\partial^p := \partial_1^{p_1} ... \partial_n^{p_n} = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} ... \partial x_n^{p_n}},$$
gde je red $|p|$ takođe i red izvoda.

Primer 2.2.19. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup. Sa $\mathcal{D}(K)$ označavamo realan vektorski prostor svih glatkih*[1] *funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za koje je $\operatorname{supp} f \subset K$. Za svaki multi-indeks $p \in \mathbb{N}_0^n$ i svaki skalar $\varepsilon > 0$ definišemo skup*

$$V_{p,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{D}(K) : |\partial^p f(x)| \leq \varepsilon, \text{ za sve } x \in K\}.$$

Kolekcija skupova $V_{p,\varepsilon}$ zadovoljava uslove (NO1)–(NO3), pa je prema Propoziciji 2.2.16 kolekcija svih končnih preseka elemenata te kolekcije filter baza na $\mathcal{D}(K)$ i baza okolina nule za topologiju dobijenu u Teoremi 2.2.15.

Dokažimo i naredne dve propozicije koje ćemo koristiti u nastavku rada.

Propozicija 2.2.20. *Topološko-vektorski prostor (X, τ) je Hauzdorfov ako i samo ako za svako $a \in X$, $a \neq 0$ postoji okolina nule V takva da $a \notin V$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je (X, τ) Hauzdorfov prostor. Tada postoje okolina nule V i okolina U tačke a, takve da je $U \cap V = \emptyset$, pa je V tražena okolina nule koja ne sadrži tačku a. ($\Leftarrow$) Neka je V okolina nule takva da $a \notin V$. Postoji uravnotežena okolina nule U takva da je $U + U \subset V$. Tada je $U + a$ okolina tačke a. Pretpostavimo da je $U \cap (U + a) \neq \emptyset$. Ako $x \in U \cap (U + a)$, onda je $x = y + a$, za neko $y \in U$, odakle je $a = x - y$. Kako je skup U uravnotežen, važi da je $-y \in U$, pa sledi da je $a \in U + U \subset V$. Došli smo do kontradikcije, pa zaključujemo da je $U \cap (U + a) = \emptyset$. Dakle, postoje disjunktne okoline nule i tačke a. Dalje, neka su $a, b \in X$, $a \neq b$, proizvoljne tačke. Važi da je $a - b \neq 0$, pa postoje okolina nule U i okolina W tačke $a - b$, takve da je $U \cap W = \emptyset$. Tada je $W + b$ okolina tačke a, $U + b$ okolina tačke b i važi $(W + b) \cap (U + b) = \emptyset$. Dakle, prostor je Hauzdorfov. □

Propozicija 2.2.21. *U topološko-vektorskom prostoru svaka okolina nule sadrži zatvorenu okolinu nule.*

Dokaz. Neka je V proizvoljna okolina nule. Tada postoji uravnotežena okolina nule U, takva da je $U + U \subset V$. Dokažimo da je $\overline{U} \subset V$. Ako je $x \in \overline{U}$, onda je $(x + U) \cap U \neq \emptyset$, pa postoji tačka $y \in U$ takva da je $x + y \in U$. Znamo da $-y \in U$, jer je U uravnotežen, pa sledi

$$x \in (-y) + U \subset U + U \subset V.$$

Dakle, $\overline{U}$ je tražena zatvorena okolina sadržana u V. □

[1] Postoje parcijalni izvodi proizvoljnog reda i neprekidni su.

2.3 Lokalno konveksni prostori

U ovom odeljku razmatramo specijalan tip topološko-vektorskih prostora, u kojima svaka tačka ima bazu konveksnih okolina. Ako nije drugačije naglašeno, pod topološko-vektorskim prostorom podrazumevamo prostor dat Definicijom 2.2.1, gde je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$.

2.3.1 Konveksnost

Definicija 2.3.1. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Skup $A \subset V$ je **konveksan** ako i samo ako za svako $x, y \in A$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ važi

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in A.$$

Sledeće činjenice o konveksnim skupovima se lako dokazuju, pa ih dajemo u napomenama.

Napomena 2.3.2. Prema definiciji vidimo da je skup A konveksan ako i samo ako za svako $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, važi da je $\alpha A + \beta A \subset A$.

Napomena 2.3.3. Ako je A konveksan skup, onda su konveksni i skupovi $A + a$ i λA, za svako $a \in V$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$.

Napomena 2.3.4. Ako su E i F vektorski prostori nad $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ linearno preslikavanje (Definicija 1.4.6) i $A \subset E$, $B \subset F$ konveksni skupovi, onda su konveksni i skupovi $f[A] \subset F$ i $f^{-1}[B] \subset E$.

Napomena 2.3.5. Presek proizvoljne familije konveksnih skupova je konveksan skup. Dalje, ako je $B \subset V$, onda postoji najmanji konveksan skup koji sadrži skup B, to je presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup B. Taj skup zovemo **konveksni omotač** skupa B. Obeležavamo ga sa $\mathrm{conv}(B)$. Element konveksnog omotača skupa B nazivamo **konveksna kombinacija** elemenata skupa B.

Napomena 2.3.6. Ako je A konveksan skup, onda je na osnovu formule (2.1) uravnoteženo jezgro skupa A konveksan skup.

Sledeće dve propozicije navodimo bez dokaza. Dokazi se nalaze u [10].

Propozicija 2.3.7. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \subset V$ konveksan skup. Ako su $x_1, ..., x_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}$) proizvoljni elementi skupa A i ako su skalari $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ i $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, onda važi da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$.*

Propozicija 2.3.8. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $\{A_i : i \in I\}$ familija konveksnih podskupova vektorskog prostora V. Tada je konveksni omotač skupa $\bigcup_{i \in I} A_i$ skup C svih linearnih kombinacija $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, gde je $x_i \in A_i$, $\lambda_i \geq 0$, za svako $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ i samo konačno mnogo skalara $\lambda_i \neq 0$.*

Posledica 2.3.9. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $A \subset V$. Konveksni omotač skupa A je skup*

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N},\, x_i \in A,\, \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \text{ i } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dokaz posledice sledi na osnovu prethodne propozicije, jer je za $a \in A \subset V$ skup $\{a\} \subset V$ konveksan i $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$.

2.3.2 Konveksnost u topološko-vektorskim prostorima

Propozicija 2.3.10. *U topološko-vektorskom prostoru (X, τ) zatvorenje $\overline{A}$ konveksnog skupa $A \subset X$ je konveksan skup.*

Dokaz. Neka $x, y \in \overline{A}$ i neka su skalari $\alpha, \beta > 0$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Neka je W okolina tačke $\alpha x + \beta y$. Kako je $(u, v) \mapsto \alpha u + \beta v$ neprekidno preslikavanje, sledi da postoje okolina U tačke x i okolina V tačke y, takve da je $\alpha U + \beta V \subset W$. Važi da je $U \cap A \neq \emptyset$ i $V \cap A \neq \emptyset$. Ako je $z \in U \cap A$ i $w \in V \cap A$, onda je $\alpha z + \beta w \in W \cap A$, pa je dokazano da je $\alpha x + \beta y \in \overline{A}$. Dakle, skup $\overline{A}$ je konveksan, što je i trebalo dokazati. $\square$

Definicija 2.3.11. Topološko-vektorski prostor (X, τ) je **lokalno konveksan** ako i samo ako svaka tačka tog prostora ima bazu okolina čiji je svaki element konveksan skup.

Lokalno konveksan topološko-vektorski prostor zovemo **lokalno konveksan prostor**. Za topologiju lokalno konveksnog prostora kažemo da je lokalno konveksna. Kako je topologija topološko-vektorskog prostora određena bazom okolina nule, topološko-vektorski prostor je lokalno konveksan ako nula ima bazu konveksnih okolina.

Ako kolekcija $\mathcal{S}$ podskupova vektorskog prostora X zadovoljava uslove Propozicije 2.2.16 i pritom je svaki skup $S \in \mathcal{S}$ konveksan, onda je topološko-vektorski prostor (X, τ) iz te propozicije lokalno konveksan prostor.

Primer 2.3.12. *Normiran prostor $(E, \|\cdot\|)$ je lokalno konveksan prostor. Skupovi $V_{K,\varepsilon}$ i $V_{p,\varepsilon}$ iz Primera 2.2.18 i 2.2.19 su konveksni, pa su date topologije na prostorima $\mathcal{C}(\Omega)$ i $\mathcal{D}(K)$ lokalno konveksne.*

Sledi primer topološko-vektorskog prostora koji nije lokalno konveksan.

Primer 2.3.13. *(Topološko-vektorski prostor koji nije lokalno konveksan) Posmatramo realan vektorski prostor $\mathcal{C}([0,1])$, neprekidnih funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Za sve $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ takve da je $\varepsilon > 0$ i $0 < \delta < 1$ definišemo skup $V_{\varepsilon,\delta} \subset \mathcal{C}([0,1])$ na sledeći način:*

$$f \in V_{\varepsilon,\delta} \text{ ako i samo ako je}$$

$$|f(t)| \leq \varepsilon, \text{ za svako } t \in [0,1] \setminus A,$$

$$\text{za neki skup } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i) \subset [0,1], \text{ takav da je } \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) \leq \delta.$$

Dokažimo da je kolekcija skupova $V_{\varepsilon,\delta}$ filter baza na $\mathcal{C}\big([0,1]\big)$. Posmatrana kolekcija je neprazna. Funkcija $f \equiv 0$ data sa $f(t) = 0$, za sve $t \in [0,1]$, je element skupa $V_{\varepsilon,\delta}$ za svako $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, pa prazan skup nije element kolekcije. Prema tome, zadovoljen je uslov (FB1) iz Definicije 2.1.4. Ako su $V_{\varepsilon',\delta'}$ i $V_{\varepsilon'',\delta''}$ elementi kolekcije, onda za $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$ i $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ važi da je $V_{\varepsilon,\delta} \subset V_{\varepsilon',\delta'} \cap V_{\varepsilon'',\delta''}$, pa je ispunjen i uslov (FB2).

Dokažimo i da su za kolekciju skupova $V_{\varepsilon,\delta}$ zadovoljeni uslovi (NO1)$-$(NO3) iz Teoreme 2.2.15.

(NO1) Neka je $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ i $f \in \mathcal{C}\big([0,1]\big)$. Kako je f realna neprekidna funkcija nad kompaktnim prostorom $[0,1]$ ona dostiže minimalnu i maksimalnu vrednost (Teorema 1.2.45). Zbog toga postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(t)| \leq M$, za sve $t \in [0,1]$. Neka je $\varepsilon >$ i $0 < \delta < 1$. Tada važi da je $\left|\dfrac{\varepsilon}{M} f(t)\right| \leq \varepsilon$, za sve $t \in [0,1]$. Dalje, za svako $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ važi $|\lambda f(t)| \leq \left|\dfrac{\varepsilon}{M} f(t)\right| \leq \varepsilon$, za sve $t \in [0,1]$. Dakle, za proizvoljan skup $A \subset [0,1]$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ važi da je $|\lambda f(t)| \leq \varepsilon$, za sve $t \in [0,1] \setminus A$. Prema tome, za sve $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ važi $\lambda f \in V_{\varepsilon,\delta}$, pa je $V_{\varepsilon,\delta}$ apsorbujući skup.

(NO2) Neka je $\varepsilon > 0$ i $0 < \delta < 1$. Ako je $f \in V_{\varepsilon,\delta}$, onda postoji skup $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i) \subset [0,1]$ takav da je $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) \leq \delta$ i važi $|f(t)| \leq \varepsilon$, za svako $t \in [0,1] \setminus A$. Tada je $|\lambda f(t)| \leq \varepsilon$, za svako $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq 1$ i svako $t \in [0,1] \setminus A$. Dakle, $V_{\varepsilon,\delta}$ je uravnotežen skup.

(NO3) Za svako $\varepsilon > 0$ i $0 < \delta < 1$ važi da je $V_{\frac{\varepsilon}{2},\delta} + V_{\frac{\varepsilon}{2},\delta} \subset V_{\varepsilon,\delta}$, pa je zadovoljen i uslov (NO3).

Prema Teoremi 2.2.15 postoji jedinstvena topologija τ, takva da je $\big(\mathcal{C}\big([0,1]\big), \tau\big)$ TVP u kome je kolekcija skupova $V_{\varepsilon,\delta}$ baza okolina nule.

Pokažimo da dobijena topologija τ nije lokalno konveksna. Dovoljno je da pokažemo da skup $U \subset \mathcal{C}\big([0,1]\big)$ takav da je $V_{\varepsilon',\delta'} \subset U \subset V_{\varepsilon,\delta}$, za neke $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ i $\delta, \delta' \in (0,1)$, ne može biti konveksan. U tom slučaju sledi da u (X, τ) ne postoji baza konveksnih okolina nule (pogledati Primer 2.1.8). Pretpostavimo da je $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, $0 < \delta' < \delta < \dfrac{1}{2}$ i $V_{\varepsilon',\delta'} \subset U \subset V_{\varepsilon,\delta}$. Neka su $I_i = (\alpha_i, \beta_i) \subset [0,1]$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, međusobno disjunktni otvoreni intervali, takvi da za sve $1 \leq i \leq n$ važi $\beta_i - \alpha_i = \delta'$ i $\sum\limits_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) > 2\delta$. Za svako i označimo sa J_i interval dužine $\dfrac{\delta'}{2}$ u sredini intervala I_i. Neka je $f_i \in \mathcal{C}\big([0,1]\big)$ $(0 \leq i \leq n)$ nenegativna funkcija, takva da je $f_i(t) = 0$ za $t \in [0,1] \setminus I_i$ i $f_i(t) > n\varepsilon$ za $t \in J_i$. Kako je $\beta_i - \alpha_i = \delta'$, sledi da je $f_i \in V_{\varepsilon',\delta'} \subset U$, za $0 \leq i \leq n$. Međutim , pokazaćemo da $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} f_i \notin V_{\epsilon,\delta}$.

Pretpostavimo suprotno, da je $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} f_i \in V_{\epsilon,\delta}$. Tada postoji skup $O = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\gamma_i, \xi_i) \subset$

$[0,1]$ takav da je $\sum_{i=1}^{\infty}(\gamma_i,\xi_i) \leq \delta$ i $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i(t) = \left|\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i\right)(t)\right| \leq \varepsilon$, za svako $t \in [0,1]\setminus O$. Znamo da je $\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i-\alpha_i}{2} = n\frac{\delta'}{2} > \delta$, odakle sledi da postoji $t' \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} J_i\right)\setminus O$. Tada $t' \in J_{i'}$ za neko $0 \leq i' \leq n$. Dalje važi $f_{i'}(t') > n\varepsilon$, pa je

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i(t')\right| = \sum_{i\neq i'}\frac{1}{n}f_i(t') + \frac{1}{n}f_{i'}(t') > \frac{1}{n}n\varepsilon = \varepsilon.$$

Kako $t' \notin O$, dolazimo do kontradikcije, pa sledi da $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i \notin V_{\epsilon,\delta}$. Stoga $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i \notin U$, pa prema Propoziciji 2.3.7 skup U nije konveksan.

Slede tvrđenja i primeri vezani za bazu okolina nule lokalno konveksnog prostora.

Propozicija 2.3.14. *U lokalno konveksnom prostoru postoji baza okolina nule takva da je svaki njen element uravnotežen, zatvoren i konveksan skup.*

Dokaz. Neka je W proizvoljna okolina nule. Prema Propoziciji 2.2.21 W sadrži zatvorenu okolinu nule V. Kako postoji baza konveksnih okolina nule, svaka okolina nule sadrži konveksnu okolinu nule, pa i okolina V sadrži konveksnu okolinu nule U. Skup V je zatvoren, pa važi $\overline{U} \subset V$. Konačno, uravnoteženo jezgro skupa $\overline{U}$ je okolina nule, uravnotežen, zatvoren i konveksan skup (pogledati Lemu 2.2.14 i Napomene 2.2.13 i 2.3.6). Dakle, svaka okolina nule lokalno konveksnog prostora sadrži okolinu nule koja je uravnotežen, zatvoren i konveksan skup. □

Propozicija 2.3.15. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ filter baza na X, čiji je svaki element apsorbujući, uravnotežen i konveksan skup. Neka je $\mathcal{N} = \{\lambda V : \lambda > 0 \text{ i } V \in \mathcal{V}\}$. Tada postoji jedinstvena topologija τ na X takva da je (X,τ) lokalno konveksan prostor, u kojem je kolekcija $\mathcal{N}$ baza okolina nule.*

Dokaz. Neka $V, U \in \mathcal{V}$ i neka su skalari $\alpha, \beta > 0$ takvi da je $\alpha V, \beta U \in \mathcal{N}$. Kolekcija $\mathcal{V}$ je filter baza, pa postoji skup $T \in \mathcal{V}$ takav da je $T \subset V \cap U$. Bez umanjenja opštosti možemo da pretpostavimo da je $\beta > \alpha$. Tada je $\frac{\alpha}{\beta} < 1$. Skup βU je uravnotežen, pa važi $\alpha U = \frac{\alpha}{\beta}(\beta U) \subset \beta U$. Tada je $\alpha T \subset \alpha(V \cap U) \subset \alpha V \cap \alpha U \subset \alpha V \cap \beta U$, pa zaključujemo da za kolekciju $\mathcal{N}$ važi uslov *(FB2)* iz Definicije 2.1.4. Kolekcija $\mathcal{N}$ je neprazna i $\emptyset \notin \mathcal{N}$, te je $\mathcal{N}$ filter baza. Elementi kolekcije $\mathcal{N}$ su apsorbujući i uravnoteženi skupovi, pa su ispunjeni uslovi *(NO1)* i *(NO2)*. Svaki skup $W \in \mathcal{N}$ je konveksan, pa važi $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W \subset W$, što znači da je zadovoljen i uslov *(NO3)*. Dakle, ispunjeni su svi uslovi iz Teoreme 2.2.15 i pritom je svaki skup $W \in \mathcal{N}$ konveksan, pa je propozicija dokazana. □

Primer 2.3.16. *Podskupovi $V_K = V_{K,1}$ prostora $\mathcal{C}(\Omega)$, iz Primera 2.2.18, zadovoljavaju uslove Propozicije 2.3.15. Važi $V_{K,\varepsilon} = \varepsilon V_K$, odakle takođe vidimo da je kolekcija skupova $V_{K,\varepsilon}$ baza okolina nule za dobijenu lokalno konveksnu topologiju na prostoru $\mathcal{C}(\Omega)$.*

Propozicija 2.3.17. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ kolekcija čiji je svaki element apsorbujući, uravnotežen i konveksan skup. Neka je $\mathcal{N}$ kolekcija svih konačnih preseka skupova oblika λV, gde je $\lambda > 0$ i $V \in \mathcal{S}$. Tada postoji jedinstvena topologija τ na X, takva da je (X, τ) lokalno konveksan prostor u kojem je $\mathcal{N}$ baza okolina nule.*

Dokaz. Svaki skup oblika λV ($\lambda > 0$, $V \in \mathcal{S}$) je apsorbujući, uravnotežen i konveksan, pa su i elementi kolekcije $\mathcal{N}$ apsorbujući, uravnoteženi i konveksni skupovi. Na osnovu dokaza Propozicije 2.2.16 znamo da je $\mathcal{N}$ filter baza. Ako je $V \in \mathcal{N}$, onda je i $\lambda V \in \mathcal{N}$, za sve $\lambda > 0$. Dakle, važi da je $\mathcal{N} = \{\lambda V : \lambda > 0 \text{ i } V \in \mathcal{N}\}$. Stoga je propozicija dokazana na osnovu Propozicije 2.3.15. □

Propozicija 2.3.18. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ kolekcija čiji je svaki element apsorbujući, uravnotežen i konveksan skup. Neka je $\mathcal{G}$ kolekcija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{M}$ kolekcija svih skupova oblika λV, gde je $\lambda > 0$ i $V \in \mathcal{G}$. Tada je $\mathcal{M}$ baza okolina nule u prostoru (X, τ) iz Propozicije 2.3.17.*

Dokaz. Neka je V proizvoljan element kolekcije $\mathcal{N}$ iz prethodne propozicije. Tada je $V = \lambda_1 V_1 \cap \lambda_2 V_2 \cap \cdots \lambda_n V_n$, za neke $\lambda_i > 0$ i $V_i \in \mathcal{S}$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Ako je $\lambda = \min\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$, onda za $1 \leq i \leq n$ važi $\dfrac{\lambda}{\lambda_i} \leq 1$, pa kako su V_i uravnoteženi skupovi, sledi da je $\lambda \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \right) \subset \lambda_i V_i$, za svako $1 \leq i \leq n$. Dakle, za proizvoljan skup V baze okolina nule $\mathcal{N}$ postoji skup $U \in \mathcal{M}$ takav da je $U \subset V$. Stoga je u lokalno koveksnom prostoru (X, τ) kolekcija $\mathcal{M}$ baza okolina nule. □

Primer 2.3.19. *Podskupovi $V_p = V_{p,1}$ prostora $\mathcal{D}(K)$, iz Primera 2.2.19, su apsorbujući, uravnoteženi i konveksni. Kako važi $V_{p,\varepsilon} = \varepsilon V_p$, na osnovu Propozicije 2.3.17 ponovo dolazimo do zaključka da kolekcija svih konačnih preseka skupova $V_{p,\varepsilon}$ čini bazu okolina nule date lokalno konveksne topologije na prostoru $\mathcal{D}(K)$.*

2.3.3 Lokalno konveksan prostor definisan familijom semi-normi

Definicija 2.3.20. Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. **Semi-norma** na X je preslikavanje $q : X \to [0, \infty)$ koje zadovoljava sledeće uslove:

(S1) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$, za sve $\lambda \in \mathbb{K}$ i sve $x \in X$;

(S2) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$, za sve $x, y \in X$.

Napomena 2.3.21. Iz uslova *(S1)* sledi da je $q(0) = 0$. Ako, obratno, $q(x) = 0$ implicira da je $x = 0$, onda je preslikavanje q norma.

Lema 2.3.22. *Neka je X realan vektorski prostor i preslikavanje $q : X \to [0, \infty)$ semi-norma na X. Tada je skup $V = \{x \in X : q(x) \leq 1\}$ apsorbujući, uravnotežen i konveksan.*

Dokaz. Neka je $x \in X$. Ako je $q(x) = \alpha \neq 0$, onda sledi da je $q(\alpha^{-1}x) = 1$ i za $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq \alpha^{-1}$ je $q(\lambda x) \leq 1$, pa za $|\lambda| \leq \alpha^{-1}$ važi $\lambda x \in V$. Ovim smo dokazali da je V apsorbujući skup. Ako je $x \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leq 1$, onda je $q(\lambda x) \leq q(x) \leq 1$, pa $\lambda x \in V$, te smo dokazali da je V uravnotežen skup. Dokažimo i da je konveksan. Neka $x, y \in V$ i neka su skalari $\alpha, \beta \geq 0$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Tada je

$$q(\alpha x + \beta y) \leq \alpha q(x) + \beta q(y) \leq \alpha + \beta = 1,$$

pa sledi da je $\alpha x + \beta y \in V$. □

Dokazima Propozicije 2.3.17 i Leme 2.3.22 dokazali samo i narednu teoremu.

Teorema 2.3.23. ***(Lokalno konveksna topologija definisana familijom semi-normi)*** *Neka je $\{q_i : i \in I\}$ familija semi-normi na realnom vektorskom prostoru X i $\mathcal{S} = \{V_i \subset X : i \in I\}$, gde je $V_i = \{x \in X : q_i(x) \leq 1\}$, $i \in I$. Neka je $\mathcal{N}$ kolekcija svih konačnih preseka skupova oblika εV, gde je $\varepsilon > 0$ i $V \in \mathcal{S}$. Tada postoji jedinstvena topologija τ na X takva da je (X, τ) lokalno konveksan prostor u kojem je $\mathcal{N}$ baza okolina nule. Za tu lokalno konveksnu topologiju τ kažemo da je* ***definisana familijom semi-normi*** *$(q_i)_{i \in I}$.*

Napomena 2.3.24. ***(Baza okolina nule u lokalno konveksnoj topologiji koja je definisana familijom semi-normi)***
Ako označimo $V_{i,\varepsilon} = \varepsilon V_i = \{x \in X : q_i(x) \leq \varepsilon\}$, onda su skupovi baze okolina nule oblika

$$V_{i_1,\ldots,i_n,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \{x \in X : q_{i_k}(x) \leq \varepsilon_k, \text{ za svako } 1 \leq k \leq n\},$$

gde je $n \in \mathbb{N}$, $\{i_1, \ldots, i_n\}$ konačan podskup skupa I i $\varepsilon_k > 0$ za sve $1 \leq k \leq n$. Takođe, na osnovu Propozicije 2.3.18 sledi da bazu okolina nule u istom lokalno konveksnom prostoru čine i skupovi oblika

$$V_{i_1,\ldots,i_n,\varepsilon} = \{x \in X : q_{i_k}(x) \leq \varepsilon, \text{ za svako } 1 \leq k \leq n\}, \tag{2.2}$$

gde je $n \in \mathbb{N}$, $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ konačan skup i $\varepsilon > 0$.

Navodimo primere lokalno konveksnih prostora definisanih na prethodno opisan način, pomoću neke familije semi-normi.

Primer 2.3.25. *Na prostoru $\mathcal{C}(\Omega)$ iz Primera 2.2.18 za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ definišemo semi-normu*

$$q_K(f) = \max_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega).$$

Topologija definisana pomoću ove familije semi-normi je ista topologija koja je predstavljena u Primeru 2.2.18, jer je $V_K = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : q_K(f) \leq 1\}$.

Primer 2.3.26. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $m \in \mathbb{N}$. Sa $\mathcal{E}^m(\Omega)$ označavamo realan vektorski prostor svih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ takvih da za sve $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| \leq m$ postoje neprekidni parcijalni izvodi $\partial^p f$. Za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ i svaki multi-indeks $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| \leq m$ definišemo semi-normu $q_{K,p}$, na sledeći način:*

$$q_{K,p}(f) = \max_{x \in K} |\partial^p f(x)|, \quad f \in \mathcal{E}^m(\Omega).$$

Familija semi-normi $(q_{K,p})$ definiše lokalno konveksnu topologiju na prostoru $\mathcal{E}^m(\Omega)$. Za $m = 0$ je $\mathcal{E}^m(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$, pa dobijamo lokalno konveksan prostor iz prethodnog primera.

Primer 2.3.27. *Ako je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, sa $\mathcal{E}(\Omega)$ (ili $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$) označavamo realan vektorski prostor svih glatkih fukcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Familija semi-normi $(q_{K,p})$ definisanih u prethodnom primeru, gde je $K \subset \Omega$ kompaktan skup i $p \in \mathbb{N}_0^n$, definiše lokalno konveksnu topologiju na $\mathcal{E}(\Omega)$.*

Primer 2.3.28. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $m \in \mathbb{N}$. Sa $\mathcal{D}^m(K)$ označavamo realan vektorski prostor svih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, takvih da postoje neprekidni parcijalni izvodi $\partial^p f$ za $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| \leq m$ i da je* supp*$f \subset K$. Za svako $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| \leq m$ definišemo semi-normu*

$$q_p(f) = \max_{x \in K} |\partial^p f(x)|, \quad f \in \mathcal{D}^m(K). \tag{2.3}$$

Prostor $\mathcal{D}^m(K)$ je snabdeven lokalno konveksnom topologijom definisanom familijom semi-normi (q_p).
Za $m = 0$ je $\mathcal{D}^0(K) = \mathcal{K}(K)$ i topologija na $\mathcal{K}(K)$ je definisana normom q_0, $q_0(f) = \max\limits_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{K}(K)$.

Primer 2.3.29. *Topologija na prostoru $\mathcal{D}(K)$ iz Primera 2.2.19 je definisana familijom semi-normi (q_p), koje su definisane sa (2.3), za sve $p \in \mathbb{N}_0^n$. Za skup V_p iz Primera 2.2.19 važi $V_p = \{f \in \mathcal{D}(K) : q_p(f) \leq 1\}$.*

Primer 2.3.30. *Za $m \in \mathbb{N}$ sa $\mathcal{S}^m$ označavamo realan vektorski prostor svih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, takvih da postoje neprekidni parcijalni izvodi $\partial^p f$ za sve $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| \leq m$ i da važi: za svako $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0^n$, $|p| \leq m$ i $\varepsilon > 0$ postoji $\rho > 0$, tako da je*

$$|(1 + |x|^2)^k \partial^p f(x)| \leq \varepsilon, \;\; \textit{za}\; |x| > \rho.$$

Na prostoru $\mathcal{S}^m$ je familijom semi-normi $(q_{k,p})$, $k \in \mathbb{N}$, $|p| \leq m$,

$$q_{k,p}(f) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^k \partial^p f(x)|, \quad f \in \mathcal{S}^m \tag{2.4}$$

defiinsana lokalno konveksna topologija.

Napomena 2.3.31. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Funkcija f je **brzo opadajuća** ako važi: za svako $k \in \mathbb{N}$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji $\rho > 0$, tako da je

$$|(1 + |x|^2)^k f(x)| \leq \varepsilon, \;\; \text{za}\; |x| > \rho.$$

Prema tome, funkcija $f \in \mathcal{S}^m$ je brzo opadajuća, kao i parcijalni izvodi $\partial^p f$, $|p| \leq m$.

Primer 2.3.32. *Sa $\mathcal{S}^\infty$ obeležavamo realan vektorski prostor svih glatkih funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, koje su brzo opadajuće zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima. Familija semi-normi $(q_{k,p})$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0^n$ definisanih sa (2.4) određuje lokalno konveksnu topologiju na $\mathcal{S}^\infty$.*

Primer 2.3.33. *Neka je* $\mathcal{O}_M$ *realan vektorski prostor svih glatkih funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *takvih da je za svako* $\varphi \in \mathcal{S}^\infty$ *i* $p \in \mathbb{N}_0^n$ *funkcija* $\varphi \partial^p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ograničena*[2]. *Za funkcije prostora* $\mathcal{O}_M$, *kao i njihove parcijalne izvode, kažemo da su sporo rastuće. Lokalno konveksna topologija na ovom prostoru je definisana familijom semi-normi* $(q_{\varphi,p})$, $\varphi \in \mathcal{S}^\infty$, $p \in \mathbb{N}_0^n$,

$$q_{\varphi,p}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x) \partial^p f(x)|, \quad f \in \mathcal{O}_M.$$

U nastavku ćemo pokazati da je lokalno konveksna topologija svakog lokalno konveksnog prostora definisana određenom familijom seminormi. Preciznije, važi naredna teorema.

Teorema 2.3.34. *Neka je* (X, τ) *lokalno konveksan prostor. Tada postoji familija semi-normi na prostoru* X, *takva da je topologija* τ *upravo topologija definisana tom familijom semi-normi.*

Da bismo dokazali ovu teoremu biće nam potrebna definicija funkcionele Minkovskog i nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Definicija 2.3.35. Neka je X realan vektorski prostor i $A \subset X$ apsorbujući skup. **Funkcionela Minkovskog** $\mu_A : X \to [0, \infty)$ skupa A je definisana na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \ x \in X.$$

Napomena 2.3.36. Skup A je apsorbujući, pa za svako $x \in X$ postoji skalar $\lambda > 0$ takav da je $x \in \lambda A$. Dakle, za svako $x \in X$ skup $\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ je neprazan. Stoga je funkcionela Minkovskog μ_A dobro definisano preslikavanje.

Lema 2.3.37. *Za* $\lambda > 0$ *važi* $\mu_A(\lambda x) = \lambda \mu_A(x)$.

Dokaz. Prema definiciji je

$$\mu_A(\lambda x) = \inf\{\rho > 0 : \lambda x \in \rho A\} = \inf\left\{\rho > 0 : x \in \frac{\rho}{\lambda} A\right\}.$$

Neka je $t = \dfrac{\rho}{\lambda}$. Tada je

$$\mu_A(\lambda x) = \inf\{\lambda t > 0 : x \in tA\} = \lambda \inf\{t > 0 : x \in tA\} = \lambda \mu_A(x).$$

□

Ako je, dodatno, skup A konveksan i uravnotežen, funkcionela Minkovskog skupa A ima dodatne osobine, što dokazujemo u lemi koja sledi.

Lema 2.3.38. *Neka je* X *realan vektorski prostor i* $A \subset X$ *apsorbujući, uravnotežen i konveksan skup. Funkcionela Minkovskog* μ_A *skupa* A *ima sledeće osobine:*

(i) $\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x)$, *za svako* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i svako* $x \in X$;

[2] Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je ograničena ako i samo ako postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| \leq M$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$, *za sve* $x, y \in X$.

Dokaz. *(i)* Skup A je uravnotežen, pa za $\lambda > 0$ i $\gamma \in \mathbb{R}$, $|\gamma| = 1$ važi da je $\gamma(\lambda A) = \lambda A$. Na osnovu toga imamo da za $x \in X$ važi

$$|\gamma|\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} = \inf\{\lambda > 0 : \gamma x \in \lambda A\} = \mu_A(\gamma x).$$

Sada za $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda = |\lambda| \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$ važi

$$\mu_A(\lambda x) = \mu_A\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}|\lambda| x\right) = \mu_A(|\lambda| x).$$

Dalje, na osnovu prethodne leme možemo da zaključimo da je $\mu_A(\lambda x) = |\lambda|\mu_A(x)$. Za $\lambda = 0$ i $x \in X$ je $\mu_A(\lambda x) = \mu_A(0) = 0 = 0\mu_A(x)$.
(ii) Neka je $\lambda > 0$ i $\gamma > 0$. Važi da je $(\lambda + \gamma)A \subset \lambda A + \gamma A$. Kako je A konveksan skup važi i

$$\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}A + \frac{\gamma}{\lambda+\gamma}A \subset A,$$

pa je $\lambda A + \gamma A \subset (\lambda + \gamma)A$. Dakle, za konveksan skup A je $\lambda A + \gamma A = (\lambda + \gamma)A$. Neka $x, y \in X$. Neka je $\mu_A(x) = \xi$ i $\mu_A(y) = \eta$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoje $\rho > 0$ i $\sigma > 0$, tako da je $\xi \leq \rho < \xi + \varepsilon$, $\eta \leq \sigma < \eta + \varepsilon$, $x \in \rho A$ i $y \in \sigma A$. Tada je $x + y \in \rho A + \sigma A = (\rho + \sigma)A$, odakle sledi da je $\mu_A(x + y) \leq \xi + \eta + 2\varepsilon$. Kako je ε proizvoljno, imamo da je $\mu_A(x + y) \leq \xi + \eta = \mu_A(x) + \mu_A(y)$, što je i trebalo dokazati. □

Dokazom Leme 2.3.38 dokazali smo i sledeću propoziciju.

Propozicija 2.3.39. *Neka je* X *realan vektorski prostor. Funkcionela Minkovskog* $\mu_A : X \to [0, \infty)$ *skupa* A *je semi-norma na* X.

Lema 2.3.40. *Neka je* (X, τ) *TVP i* $A \subset X$ *apsorbujući, uravnotežen i konveksan skup. Skup* A *je okolina nule ako i samo ako je funkcionela Minkovskog* $\mu_A : X \to [0, \infty)$ *skupa* A *neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je skup A okolina nule. Na osnovu osobine *(ii)* funkcionele Minkovskog iz Leme 2.3.38 znamo da za $x, y \in X$ važi da je

$$\mu_A(x) = \mu_A(x + y - y) \leq \mu_A(x - y) + \mu_A(y) \text{ i } \mu_A(y) \leq \mu_A(x - y) + \mu_A(x),$$

pa je dalje

$$|\mu_A(x) - \mu_A(y)| \leq \mu_A(x - y).$$

Neka je dato $\varepsilon > 0$ i $x \in X$ proizvoljna tačka. Dokazujemo da je μ_A neprekidno u tački x. Tražimo okolinu tačke x, takvu da za sve tačke y te okoline važi da je $|\mu_A(x) - \mu_A(y)| \leq \varepsilon$. Ako $y \in x + \varepsilon A$, onda je $y = x + \varepsilon a$, za neko $a \in A$, pa je

$$|\mu_A(y) - \mu_A(x)| \leq \mu_A(x + \varepsilon a - x) = \mu_A(\varepsilon a) \leq \varepsilon,$$

odakle sledi da je $x + \varepsilon A$ tražena okolina tačke x.
($\Leftarrow$) Obratno, pretpostavimo da je μ_A neprekidno preslikavanje. Tada možemo da

zaključimo da je skup $\{x \in X : \mu_A(x) < 1\} = \mu_A^{-1}\big[[0,1)\big]$ otvoren. Znamo da je $\mu_A(0) = 0$ i da za $0 < \rho < 1$ važi da je $\rho A \subset A$, jer je A uravnotežen skup. Sada imamo

$$0 \in \{x \in X : \mu_A(x) < 1\} \subset A,$$

pa sledi da je A okolina nule. $\square$

Lema 2.3.41. *Neka je (X,τ) TVP, $V \subset X$ okolina nule koja je uravnotežen i konveksan skup i μ_V funkcionela Minkovskog skupa V. Tada je*

$$\overline{V} = \{x \in X : \mu_V(x) \leq 1\}.$$

Dokaz. Neprekidnost preslikavanja μ_V, dokazana u prethodnoj lemi, implicira zatvorenost skupa $\{x \in X : \mu_V(x) \leq 1\}$. Važi da je $V \subset \{x \in X : \mu_V(x) \leq 1\}$, pa sledi da je $\overline{V} \subset \{x \in X : \mu_V(x) \leq 1\}$. Dokažimo i da je $\{x \in X : \mu_V(x) \leq 1\} \subset \overline{V}$. Neka je $x \in X$, $\mu_V(x) \leq 1$ i W proizvoljna okolina tačke x. Za $0 < \rho < 1$ važi $\mu_A(\rho x) < 1$, odakle sledi da za svako $0 < \rho < 1$ važi $\rho x \in V$. Vazi uslov *(T2)* iz Definicije 2.2.1 i $1 \cdot x = x$, pa postoji broj $\varepsilon > 0$ takav da je $1 - \varepsilon > 0$ i $\rho x \in W$ za svako $1 - \varepsilon < \rho < 1 + \varepsilon$. Tada je $\rho x \in V \cap W$, za svako $1 - \varepsilon < \rho < 1$, pa možemo da zaključimo da je $x \in \overline{V}$. $\square$

Sada možemo da dokažemo Teoremu 2.3.34.

Dokaz. (*Teorema 2.3.34*) Posmatrajmo sada lokalno konveksan prostor (X,τ). Neka je $\mathcal{U}(0)$ familija svih okolina nule. Prema Propoziciji 2.3.14 postoji baza okolina nule čiji je svaki element uravnotežen, zatvoren i konveksan skup. Stoga je i kolekcija

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{V \in \mathcal{U}(0) : V \text{ je uravnotežen, zatvoren i konveksan skup}\}$$

baza okolina nule.
Prema Propoziciji 2.3.39 i Lemi 2.3.40 funkcionela Minkovskog svakog skupa $V \in \widetilde{\mathcal{B}}$ je neprekidna semi-norma na X. Na osnovu toga je skup $\{x \in X : \mu_V(x) \leq 1\}$ zatvoren. Dalje, prema Lemi 2.3.41, za $V \in \widetilde{\mathcal{B}}$ važi

$$V = \{x \in X : \mu_V(x) \leq 1\}.$$

Postoji jedinstvena lokalno konveksna topologija na X, takva da kolekcija $\mathcal{N}$ svih konačnih preseka skupova oblika εV ($V \in \widetilde{\mathcal{B}}$, $\varepsilon > 0$) čini bazu okolina nule, to je topologija definisana familijom semi-normi $\{\mu_V : V \in \widetilde{\mathcal{B}}\}$ (Teorema 2.3.23). Kolekcija $\mathcal{N}$ sadrži sve elemente kolekcije $\widetilde{\mathcal{B}}$ ($\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{N}$), pa je baza okolina nule u lokalno konveksnom prostoru (X,τ). Prema tome, lokalno konveksna topologija definisana familijom semi-normi $\{\mu_V : V \in \widetilde{\mathcal{B}}\}$ je upravo topologija τ. Time smo dokazali da je svaka lokalno konveksna topologija definisana nekom familijom semi-normi. $\square$

Preciznije, svaka lokalno konveksna topologija je definisana familijom svih semi-normi koje su neprekidne za tu lokalno konveksnu topologiju. Da bismo to dokazali, prvo dokazujemo pomoćno tvrđenje.

Lema 2.3.42. *Neka je X realan vektorski prostor i $q : X \to [0,\infty)$ semi-norma na X. Tada je q funkcionela Minkovskog svakog skupa $A \subset X$ takvog da važi*

$$\{x \in X : q(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X : q(x) \leq 1\}.$$

Dokaz. Neka je $x \in X$ i $q(x) = C \neq 0$. Tada za proizvoljno $\alpha > C$ važi

$$\frac{1}{\alpha}q(x) = \frac{C}{\alpha} < 1, \text{ pa je } q(\frac{1}{\alpha}x) < 1.$$

Sledi da je $\frac{1}{\alpha}x \in \{x \in X : q(x) < 1\} \subset A$, pa $x \in \alpha A$. Dakle, $x \in \alpha A$ za svako $\alpha > C$. Sada možemo da zaključimo da je $\mu_A(x) \leq C$. Dokažimo da je $\mu_A(x) = C$. Pretpostavimo da je $\mu_A(x) < C$. Neka je

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} = \beta \text{ i } \beta < C.$$

Tada postoji $\gamma > 0$, tako da je $\beta \leq \gamma < C$ i $x \in \gamma A$, pa je $x = \gamma a$, za neko $a \in A$. Kako je $A \subset \{x \in X : q(x) \leq 1\}$, sledi da je $q(x) = q(\gamma a) = \gamma q(a) \leq \gamma < C$. Došli smo do kontradikcije, jer je $q(x) = C$. Zaključujemo da je $q(x) = C = \mu_A(x)$, za sve $x \in X$ za koje je $q(x) \neq 0$.
Neka je sada $x \in X$ i $q(x) = 0$. Tada je $x \in \lambda A$ za svako $\lambda > 0$, pa je i $\mu_A(x) = 0$. Dakle, važi da je $q(x) = \mu_A(x)$ za sve $x \in X$. □

Sada možemo da dokažemo da je lokalno konveksna topologija generisana familijom svih neprekidnih semi-normi za tu lokalno konveksnu topologiju. To činimo dokazom sledeće leme.

Lema 2.3.43. *Neka je (X, τ) lokalno konveksan prostor i $q : X \to [0, \infty)$ neprekidna semi-norma na X. Neka je $\mathcal{U}(0)$ familija svih okolina nule i*

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{U \in \mathcal{U}(0) : U \textit{ je uravnotežen, zatvoren i konveksan skup}\}.$$

Tada postoji skup $V \in \widetilde{\mathcal{B}}$ takav da je $q(x) = \mu_V(x)$, za sve $x \in X$, gde je μ_V funkcionela Minkovskog skupa V.

Dokaz. Dokazaćemo da je $V = \{x \in X : q(x) \leq 1\}$ traženi skup. Zbog neprekidnosti semi-norme q skup $\{x \in X : q(x) < 1\}$ je otvoren, a skup V je zatvoren. Znamo da je $q(0) = 0$. Dakle, $0 \in \{x \in X : q(x) < 1\} \subset V$, pa sledi da je V okolina nule. Prema Lemi 2.3.22 V je apsorbujući, uravnotežen i konveksan skup. Zaključujemo da je $V \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Na osnovu Leme 2.3.42 sledi da je $q(x) = \mu_V(x)$, za sve $x \in X$, pa je lema dokazana. □

Napomena 2.3.44. Neka je (X, τ) lokalno konveksan prostor. Prema Lemi 2.3.43 familija semi-normi $\{\mu_V : V \in \widetilde{\mathcal{B}}\}$ je upravo familija svih neprekidnih semi-normi za lokalno konveksnu topologiju τ.

Neka je $\{q_i : 1 \leq i \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ konačna familija semi-normi na realnom vektorskom prostoru X. Tada je funkcija $q = \max q_i$, data sa

$$q(x) = \max_{1 \leq i \leq n} q_i(x), \ x \in X,$$

takođe semi-norma na X. Važi

$$\{x \in X : q(x) \leq \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : q_i(x) \leq \varepsilon\} = \{x \in X : q_i(x) \leq \varepsilon, \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Definicija 2.3.45. Neka je X realan vektorski prostor. Familija $\mathcal{Q}$ semi-normi na X je **zasićena** ako i samo ako za svaku familiju $\{q_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ važi da je $\max q_i \in \mathcal{Q}$.

Napomena 2.3.46. Ako je X TVP i ako su q_i, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ neprekidne semi-norme na X, onda je neprekidna i semi-norma q. Svaka lokalno konveksna topologija može biti definisana zasićenom familijom semi-normi (na primer familijom svih neprekidnih semi-normi za tu lokalno konveksnu topologiju).

Dve familije semi-normi na realnom vektorskom prostoru X su **ekvivalentne** ako i samo ako definišu istu lokalno konveksnu topologiju na X.

Ako je $\{q_i : i \in I\}$ familija semi-normi na realnom vektorskom prostoru X, onda je familija $\left\{ \max\limits_{1\leq k\leq n} q_{i_k} : i_k \in I, 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N} \right\}$ njoj ekvivalentna zasićena familija semi-normi na X.

Naredna propozicija daje potreban i dovoljan uslov da lokalno konveksan prostor bude Hauzdorfov.

Propozicija 2.3.47. *Neka je topologija τ lokalno konveksnog prostora (X, τ) definisana familijom seminormi $(q_i)_{i\in I}$. Prostor (X, τ) je Hauzdorfov ako i samo ako za svako $x \in X$, $x \neq 0$ postoji $i \in I$, tako da je $q_i(x) \neq 0$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je prostor Hauzdorfov i $x \in X$, $x \neq 0$. Prema Propoziciji 2.2.20 postoji okolina nule W takva da $x \notin W$. Na osnovu Napomene 2.3.24 okolina W sadrži neki skup oblika

$$\{x \in X : q_{i_k}(x) \leq \varepsilon,\ 1 \leq k \leq n\},$$

odakle sledi da za neko $1 \leq k \leq n$ važi $q_{i_k}(x) \neq 0$.
($\Leftarrow$) Neka je $x \in X$, $x \neq 0$ i $q_i(x) = \varepsilon > 0$ za neko $i \in I$. Tada je $\left\{x \in X : q_i(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ okolina nule koja ne sadrži x. Sada, na osnovu Propozicije 2.2.20, sledi da je (X, τ) Hauzdorfov prostor.

□

2.3.4 Neprekidna linearna preslikavanja

Predstavljamo nekoliko tvrđenja koja se odnose na neprekidna linearna preslikavanja između topološko-vektorskih prostora (lokalno konveksnih prostora).

Propozicija 2.3.48. *Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološko-vektorski prostori. Linearno preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je neprekidno u nuli.*

Dokaz. Implikacija ($\Rightarrow$) je jasna.
($\Leftarrow$) Neka je W proizvoljna okolina nule u prostoru (Y, τ_Y) i $a \in X$ proizvoljna tačka. Na osnovu neprekidnosti u nuli postoji okolina nule V u prostoru (X, τ_X) takva da je $f[V] \subset W$. Dalje važi da je $f[a + V] \subset f(a) + W$. Dakle, f je neprekidno preslikavanje. □

Propozicija 2.3.49. *Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) lokalno konveksni prostori, gde je topologija τ_X definisana zasićenom familijom semi-normi $(q_i)_{i \in I}$ i topologija τ_Y definisana familijom semi-normi $(r_\lambda)_{\lambda \in L}$. Linearno preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svako $\lambda \in L$ postoji $i_\lambda \in I$ i broj $M_\lambda > 0$, tako da je*

$$r_\lambda(f(x)) \leq M_\lambda q_{i_\lambda}(x), \text{ za sve } x \in X \tag{2.5}$$

Posebno, ako je $Y = \mathbb{R}$, linerna funkcionela $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidno preslikavanje ako i samo ako postoji $i \in I$ i broj $M > 0$, tako da je

$$|f(x)| \leq M q_i(x), \text{ za sve } x \in X.$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da je linearno preslikavanje f neprekidno. Neka je $\lambda \in L$ i $\{y \in Y : r_\lambda(x) \leq 1\}$ okolina nule u prostoru (Y, τ_Y). Kako je familija semi-normi $(q_i)_{i \in I}$ zasićena, sledi da postoje $i \in I$ i $\gamma > 0$, tako da je

$$f\big[\{x \in X : q_i(x) \leq \gamma\}\big] \subset \{y \in Y : r_\lambda(y) \leq 1\},$$

to jest $q_i(x) \leq \gamma$ implicira da je $r_\lambda\big(f(x)\big) \leq 1$. Dokažimo da važi da je

$$r_\lambda(f(x)) \leq \frac{1}{\gamma} q_i(x), \text{ za sve } x \in X. \tag{2.6}$$

Neka je $x \in E$ i $q_i(x) = 0$. Tada za svako $\mu > 0$ važi da je $q_i(\mu x) = 0 < \gamma$, pa je $\mu r_\lambda(f(x)) \leq 1$ za svako $\mu > 0$, odakle sledi da je $r_\lambda(f(x)) = 0$. Dakle, za $x \in E$, $q_i(x) = 0$ važi (2.6).
Neka je $x \in E$, i $q_i(x) \neq 0$. Tada je $q_i\left(\dfrac{\gamma x}{q_i(x)}\right) = \gamma$, odakle sledi da je

$$r_\lambda\left(f\left(\frac{\gamma x}{q_i(x)}\right)\right) = \frac{\gamma}{q_i(x)} r_\lambda(f(x)) \leq 1,$$

pa i u ovom slučaju važi (2.6). Dakle, traženi i_λ i M_λ su $i_\lambda = i$ i $M_\lambda = \dfrac{1}{\gamma}$.
$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo da za svako $\lambda \in L$ postoje $i_\lambda \in I$ i $M_\lambda > 0$, tako da važi (2.5). Prema Propoziciji 2.3.48 je dovoljno da dokažemo da je preslikavanje f neprekidno u nuli. Neka je W proizvoljna okolina nule u prostoru (Y, τ_Y). Tada je na osnovu Napomene 2.3.24

$$\{y \in Y : r_{\lambda_k}(y) \leq \varepsilon, \ 1 \leq k \leq n\} \subset W,$$

za neki konačan skup $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset L$, $n \in \mathbb{N}$ i neko $\varepsilon > 0$. Prema (2.5) za svako λ_k, $1 \leq k \leq n$ postoje $i_{\lambda_k} \in I$ i $M_{\lambda_k} > 0$, tako da je

$$r_{\lambda_k}(f(x)) \leq M_{\lambda_k} q_{i_{\lambda_k}}(x), \text{ za sve } x \in X.$$

Tada za okolinu nule $V = \left\{x \in X : q_{i_{\lambda_k}}(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{M_{\lambda_k}}, \ 1 \leq k \leq n\right\}$ važi da je $f[V] \subset W$. Dakle, f je neprekidno preslikavanje. $\square$

Propozicija 2.3.50. *Neka je (X, τ) lokalno konveksan prostor, M zatvoren potprostor prostora X i $z \in X \setminus M$. Tada postoji neprekidna linearna forma f na X takva da je $f(z) = 1$ i $f(x) = 0$ za sve $x \in M$.*

Za dokaz ove propozicije upućujemo na knjigu [10].

Definicija 2.3.51. Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološko-vektorski prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **izomorfizam** ako i samo ako je f linearno preslikavanje i homeomorfizam topoloških prostora (X, τ_X) i (Y, τ_Y).

Poglavlje 3

Slabe topologije

Nakon što smo u prethodnom poglavlju izložili osnove teorije lokalno konveksnih prostora, u ovom poglavlju se bavimo posebnim tipom lokalno konveksnih topologija - slabim topologijama. Za više detalja o sadržajima ovog poglavlja i dodatne pojmove i tvrđenja vezana za slabe topologije preporučujemo [3], [5], [10] i [14].

3.1 Uparivanje prostora

U prvom odeljku uvodimo pojam uparenih vektorskih prostora u odnosu na datu bilinearnu formu. Slabe topologije definišemo kao lokalno konveksne topologije definisane uparivanjem dva prostora. Za više detalja o sadržaju ovog odeljka preporučujemo [10].

Definicija 3.1.1. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$. Preslikavanje $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ se naziva **bilinearna forma** ako i samo ako je za svako $x \in X$ preslikavanje $y \mapsto B(x, y)$ linearna forma (Definicija 1.4.6) na Y i za svako $y \in Y$ preslikavanje $x \mapsto B(x, y)$ linearna forma na X.

Definicija 3.1.2. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$. Ako je $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinearna forma, onda kažemo da su prostori X i Y **upareni** u odnosu na bilinearnu formu B.
Bilinearna forma B **razdvaja tačke prostora** X ako i samo ako za svako $x \in X$, $x \neq 0$ postoji $y \in Y$, tako da je $B(x, y) \neq 0$.
Bilinearna forma B **razdvaja tačke prostora** Y ako i samo ako za svako $y \in Y$, $y \neq 0$ postoji $x \in X$, tako da je $B(x, y) \neq 0$.

Primer 3.1.3. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i $\mathcal{L}(X)$ vektorski prostor linearnih formi na X. Preslikavanje $B : X \times \mathcal{L}(X) \to \mathbb{K}$ definisano sa*

$$B(x, f) = f(x), \; x \in X, \; f \in \mathcal{L}(X)$$

*je bilinearna forma koju zovemo **kanonička bilinearna forma**. Za kanoničku bilinearnu formu B obeležavamo*

$$B(x, f) = \langle x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Kanonička bilinearna forma B razdvaja tačke prostora X i $\mathcal{L}(X)$.

Primer 3.1.4. *Neka je (X, τ) TVP. Sa X^* označavamo skup svih neprekidnih linearnih formi na X. Skup X^* je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{L}(X)$.*
Preslikavanje $(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle$, $x \in X$, $f \in X^*$, predstavlja restrikciju kanoničke bilinearne forme na $X \times X^*$ i ono je bilinearna forma na $X \times X^*$, koju takođe zovemo kanonička bilinearna forma.
Kanonička bilinearna forma razdvaja tačke prostora X^*.

Neka su X i Y vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$, upareni u odnosu na bilinearnu formu $B : X \times Y \to \mathbb{R}$.
Za svako $y \in Y$ je definisano preslikavanje $q_y : X \to [0, \infty)$,

$$q_y(x) = |B(x, y)|, \ x \in X.$$

Za sve $x, x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ i sve $\alpha \in \mathbb{R}$ važi

$$q_y(\alpha x) = |B(\alpha x, y)| = |\alpha||B(x, y)| = |\alpha| q_y(x),$$

$$q_y(x_1 + x_2) = |B(x_1 + x_2, y)| \leq |B(x_1, y)| + |B(x_2, y)| = q_y(x_1) + q_y(x_2).$$

Dakle, za svako $y \in Y$ preslikavanje q_y je semi-norma na X. Sada možemo da definišemo slabu topologiju na prostoru X.

Definicija 3.1.5. Neka su X i Y realni vektorski prostori, upareni u odnosu na bilinearnu formu $B : X \times Y \to \mathbb{R}$. Lokalno konveksna topologija na prostoru X, definisana familijom semi-normi $(q_y)_{y \in Y}$, naziva se **slaba topologija** definisana uparivanjem prostora X i Y u odnosu na bilinearnu formu B. Označavamo je sa $\sigma(X, Y)$.

Napomena 3.1.6. Baza okolina nule za slabu topologiju $\sigma(X, Y)$ je data skupovima

$$U_{y_1, \dots, y_n, \varepsilon} = \{x \in X : |B(x, y_k)| \leq \varepsilon, \ \text{za svako } 1 \leq k \leq n\},$$

gde je $n \in \mathbb{N}$, $\{y_k : 1 \leq k \leq n\} \subset Y$ i $\varepsilon > 0$.

Napomena 3.1.7. Analogno se definiše slaba topologija $\sigma(Y, X)$ na prostoru Y.

Propozicija 3.1.8. *Neka su X i Y realni vektorski prostori upareni u odnosu na bilinearnu formu $B : X \times Y \to \mathbb{R}$. Bilinearna forma B razdvaja tačke prostora X ako i samo ako je prostor $(X, \sigma(X, Y))$ Hauzdorfov.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka B razdvaja tačke prostora X i neka je $x \in X$, $x \neq 0$. Tada postoji $y \in Y$, tako da je $q_y(x) = |B(x, y)| \neq 0$. Prema Propoziciji 2.3.47 prostor $(X, \sigma(X, Y))$ je Hauzdorfov.
($\Leftarrow$) Neka je $x \in X$, $x \neq 0$. Prema Propoziciji 2.3.47 postoji $y \in Y$, tako da je $|B(x, y)| = q_y(x) \neq 0$. Dakle, postoji $y \in Y$, tako da je $B(x, y) \neq 0$, pa B razdvaja tačke prostora X. □

Neka su X i Y vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$, upareni u odnosu na bilinearnu formu $B : X \times Y \to \mathbb{R}$.
Za svako $y \in Y$ preslikavanje $y^* : X \to \mathbb{R}$,

$$y^*(x) = B(x, y), \ x \in X$$

je linearna forma na X.

Lema 3.1.9. *Neka su X i Y realni vektorski prostori, upareni u odnosu na bilinearnu formu $B : X \times Y \to \mathbb{R}$. Za svako $y \in Y$ preslikavanje $y^* \in \mathcal{L}(X)$, $y^* : (X, \sigma(X,Y)) \to \mathbb{R}$,*

$$y^*(x) = B(x,y), \text{ za sve } x \in X$$

je neprekidno.

Dokaz. Neka je $y \in Y$ proizvoljna tačka. Važi da je

$$|y^*(x)| = |B(x,y)| = q_y(x), \text{ za sve } x \in X.$$

Primenom Propozicije 2.3.49 lema je dokazana. □

Tačno je i obratno tvrđenje. Svaka linearna forma na X koja je neprekidno preslikavanje za topologiju $\sigma(X,Y)$ je oblika $x \mapsto B(x,y)$, za neko $y \in Y$. Da bismo to dokazali prvo definišemo pojam jezgra linearnog preslikavanja i dokazujemo pomoćno tvrđenje.

Definicija 3.1.10. Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$ i $f : X \to Y$ linearno preslikavanje. **Jezgro linearnog preslikavanja** f je skup

$$\text{Ker}(f) := f^{-1}[\{0\}] = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

U napomenama navodimo činjenice o jezgru lineranog preslikavanja koje ćemo koristiti.

Napomena 3.1.11. Jezgro linearnog preslikavanja f je potprostor vektorskog prostora X.

Napomena 3.1.12. Ako preslikavanje f nije identički jednako nuli, onda postoji $a \in X \setminus \text{Ker}(f)$. Tada za svaki element $x \in X$ postoje $h_x \in \text{Ker}(f)$ i $\lambda_x \in \mathbb{K}$, tako da je $x = \lambda_x a + h_x$. Navedena reprezentacija je jedinstvena.

Lema 3.1.13. *Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ i neka je $\{u_1, ..., u_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, konačna familija linearnih formi na X. Ako je $u : X \to \mathbb{K}$ linearna forma na X i ako važi*

$$\bigcap_{k=1}^{n} \text{Ker}(u_k) \subset \text{Ker}(u),$$

onda postoje skalari $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $1 \leq k \leq n$, takvi da je

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k.$$

Dokaz. Dokaz sprovodimo indukcijom po n.
Za $n = 1$ bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $u_1 \not\equiv 0$. Tada postoji $a \in X \setminus \text{Ker}(u_1)$. Ako je $u \equiv 0$, onda je $u = 0 \cdot u_1$. Pretpostavimo da je $u \not\equiv 0$. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Tada je $x = h_x + \lambda_x a$, za neke $h_x \in \text{Ker}(u_1)$ i $\lambda_x \in \mathbb{K}$. Sledi da je

$$u(x) = u(h_x + \lambda_x a) = \lambda_x u(a), \quad u_1(x) = \lambda_x u_1(a).$$

Sada imamo da za svako $x \in X$ važi

$$u(x) = \frac{u(a)}{u_1(a)} u_1(x).$$

Prema tome, $u = \lambda_1 u_1$, za $\lambda_1 = \dfrac{u(a)}{u_1(a)}$.

Pretpostavimo da lema važi za $n-1$ i dokažimo da važi za n. Neka su $u_1, ..., u_n, u$ linearne forme na X i $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_k) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $u_k \not\equiv 0$, za sve $1 \leq k \leq n$. Neka je $H_k = \mathrm{Ker}(u_k)$, $1 \leq k \leq n$. Važi $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_k|_{H_n}) \subset \mathrm{Ker}(u|_{H_n})$. Kako je $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_k|_{H_n}) = \bigcap_{k=1}^{n-1} \mathrm{Ker}(u_k|_{H_n})$, iz indukcijske hipoteze sledi da postoje skalari $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ takvi da je

$$u(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k u_k(x) = 0, \text{ za sve } x \in H_n.$$

Sada imamo da je $\mathrm{Ker}(u_n) \subset \mathrm{Ker}(u - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k u_k)$. Na osnovu dokaza za $n = 1$ sledi da postoji skalar λ_n, takav da je

$$u - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k u_k = \lambda_n u_n.$$

□

Propozicija 3.1.14. *Neka su X i Y realni vektorski prostori, upareni u odnosu na bilinearnu formu $B : X \times Y \to \mathbb{R}$. Neka je $f : (X, \sigma(X, Y)) \to \mathbb{R}$ neprekidna linearna forma na X. Tada postoji $y \in Y$, tako da je*

$$f(x) = B(x, y) = y^*(x), \text{ za sve } x \in X.$$

Dokaz. Prema Propoziciji 2.3.49 postoje $n \in \mathbb{N}$ i $\{y_1, ..., y_n\} \subset Y$, tako da je

$$|f(x)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |B(x, y_k)|, \text{ za sve } x \in X.$$

Dakle, ako je $x \in X$ i $B(x, y_k) = 0$, za sve $1 \leq k \leq n$, onda je $f(x) = 0$, to jest važi da je

$$\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(y_k^*) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

Prema Lemi 3.1.13 postoje skalari $\lambda_1, ..., \lambda_n$ takvi da je

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^*.$$

Ako je $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$, onda je

$$f(x) = B(x, y) = y^*(x), \text{ za sve } x \in X.$$

□

3.2 Inicijalne topologije

Neka je $X \neq \emptyset$, $\{(Y_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ kolekcija topoloških prostora i $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$. Na skupu X ćemo opisati najgrublju topologiju za koju su preslikavanja $(f_i)_{i\in I}$ neprekidna. Označićemo je sa $\mathcal{T}$.

Topologija $\mathcal{P}(X)$ je takva da su preslikavanja $(f_i)_{i\in I}$ neprekidna. Međutim, želimo topologiju sa što manje otvorenih skupova. Posmatramo kolekciju skupova

$$\mathcal{S} = \left\{ f_i^{-1}[\omega_i] : \omega_i \in \mathcal{O}_i,\ i \in I \right\}.$$

Preslikavanja $(f_i)_{i\in I}$ su neprekidna za neku topologiju $\mathcal{O}$ na X ako i samo ako je $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$. Sada, prema Teoremi 1.2.16, do topologije $\mathcal{T}$ dolazimo na sledeći način:

$$\mathcal{S} \xrightarrow[\text{preseci}]{\text{konačni}} \mathcal{B} \xrightarrow[\text{unije}]{\text{proizvoljne}} \mathcal{T}$$

Topologiju $\mathcal{T}$ nazivamo **inicijalna topologija** na X za familiju preslikavanja $(f_i)_{i\in I}$.

Napomena 3.2.1. Za svako $x \in X$ baza okolina tačke x je kolekcija svih konačnih preseka skupova oblika $f_i^{-1}[V_i]$, gde je $V_i \in \mathcal{B}_i(f_i(x))$ i $\mathcal{B}_i(f_i(x))$ baza okolina tačke $f_i(x)$ u prostoru $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ (pogledati i Teoremu 1.2.29).

Za topologiju $\mathcal{T}$ važe osobine predstavljene u naredne dve propozicije.

Propozicija 3.2.2. *Neka je (x_n) niz u X. Tada $x_n \to x$ u prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako $f_i(x_n) \to f_i(x)$ u prostoru $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, za svako $i \in I$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je (x_n) niz u X i $x_n \to x$ u $(X, \mathcal{T})$. Za svako $i \in I$ preslikavanje f_i je neprekidno za topologiju $\mathcal{T}$, pa prema Teoremi 1.2.37 važi da $f_i(x_n) \to f_i(x)$ za svako $i \in I$.

($\Leftarrow$) Neka za svako $i \in I$ važi $f_i(x_n) \to f_i(x)$. Neka je U okolina tačke x u prostoru $(X, \mathcal{T})$. Prema Napomeni 3.2.1 možemo da pretpostavimo da je U oblika $U = \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}[V_i]$, gde je $J \subset I$ konačan skup i za svako $i \in J$ skup V_i okolina tačke $f_i(x)$ u prostoru $(Y_i, \mathcal{O}_i)$. Za svako $i \in J$ postoji $n_i \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_i$ važi da je $f_i(x_n) \in V_i$. Neka je $n_0 = \max\limits_{i\in J} n_i$. Tada za svako $i \in J$ i svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ važi da je $f_i(x_n) \in V_i$, odakle sledi da je $x_n \in U$, za svako $n \geq n_0$. Dakle, $x_n \to x$. $\square$

Propozicija 3.2.3. *Neka je $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topološki prostor i $f : Z \to X$. Preslikavanje f je neprekidno ako i samo ako je za svako $i \in I$ preslikavanje $f_i \circ f : Z \to Y_i$ neprekidno.*

Dokaz. Napomenimo da posmatramo topološke prostore $(X, \mathcal{T})$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ i $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$.

($\Rightarrow$) Ako je preslikavanje f neprekidno, onda je kao kompozicija neprekidnih preslikavanja neprekidno i preslikavanje $f_i \circ f$, za svako $i \in I$.

($\Leftarrow$) Neka je za svako $i \in I$ preslikavanje $f_i \circ f$ neprekidno. Neka je $U \in \mathcal{T}$ proizvoljan otvoren skup. Znamo da je U oblika $U = \bigcup\limits_{\textit{proizvoljna}} \left(\bigcap\limits_{\textit{konačan}} f_i^{-1}[\omega_i] \right)$, gde je $\omega_i \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$. Stoga je

$$f^{-1}[U] = \bigcup_{\textit{proizvoljna}} \left(\bigcap_{\textit{konačan}} f^{-1}\left[f_i^{-1}[\omega_i]\right] \right) = \bigcup_{\textit{proizvoljna}} \left(\bigcap_{\textit{konačan}} (f_i \circ f)^{-1}[\omega_i] \right).$$

Iz neprekidnosti preslikavanja $f_i \circ f$ sledi da je $(f_i \circ f)^{-1}[\omega_i] \in O_Z$, pa važi da je $f^{-1}[U] \in \mathcal{O}_Z$. Dakle, preslikavanje f je neprekidno.

$\square$

Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ kolekcija topološko-vektorskih prostora, pri čemu su X_i, $i \in I$ vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$. Neka su $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, linearna preslikavanja. Na prethodno opisan način dobijamo inicijalnu topologiju $\mathcal{T}$ za familiju preslikavanja $(f_i)_{i \in I}$. Baza okolina tačke $x \in X$ je kolekcija skupova oblika $x + \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[U_k]$, gde je $\{i_1, ..., i_n\} \subset I$, $n \in \mathbb{N}$, $U_k \in \mathcal{B}_{i_k}$ i $\mathcal{B}_{i_k}$ baza okolina nule u $(X_{i_k}, \mathcal{T}_{i_k})$, $1 \leq k \leq n$. Za ovako definisan prostor $(X, \mathcal{T})$ važi naredna propozicija.

Propozicija 3.2.4. *Prostor $(X, \mathcal{T})$ je topološko-vektorski prostor.*

Dokaz. Dokazujemo da je topologija $\mathcal{T}$ kompatibilna sa vektorskom strukturom skupa X. Dokazaćemo da važi uslov *(T1)* iz Definicije 2.2.1. Da važi uslov *(T2)* dokazuje se na sličan način.

Neka je $a, b \in X$, $\bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[W_k]$ okolina nule u $(X, \mathcal{T})$, gde je W_k okoline nule u (X_{i_k}, τ_{i_k}), za $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Obeležimo $a_k = f_{i_k}(a)$ i $b_k = f_{i_k}(b)$, $1 \leq k \leq n$. Na osnovu osobine *(T1)* za TVP (X_{i_k}, τ_{i_k}) postoje okoline nule U_k i V_k u (X_{i_k}, τ_{i_k}), takve da za sve $u \in a_k + U_k$ i sve $v \in b_k + V_k$ važi

$$u + v \in a_k + b_k + W_k \ (1 \leq k \leq n).$$

Tada za sve $x \in a + \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[U_k]$ i sve $y \in b + \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[V_k]$ važi

$$x + y \in a + b + \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[W_k].$$

$\square$

Za kolekciju lokalno konveksnih prostora $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ i prostor $(X, \mathcal{T})$ je lokalno konveksan. Preciznije, važi sledeća propozicija.

Propozicija 3.2.5. *Neka je X realan vektorski prostor i $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ kolekcija lokalno konveksnih prostora. Neka su $f_i : X \to X_i$, $i \in I$ linearna preslikavanja i $\mathcal{T}$ inicijalna topologija na X za familiju preslikavanja $(f_i)_{i \in I}$. Tada je $(X, \mathcal{T})$ lokalno konveksan prostor. Ako je za $i \in I$ lokalno konveksna topologija τ_i definisana familijom seminormi $(q_{i\lambda})_{\lambda \in L_i}$, onda je topologija $\mathcal{T}$ definisana familijom seminormi $(q_{i\lambda} \circ f_i)_{\lambda \in L_i, i \in I}$.*

Dokaz. U prethodnoj propoziciji je dokazano da je $(X, \mathcal{T})$ topološko-vektorski prostor. Treba još dokazati da ima bazu konveksnih okolina nule.

Za svako $i \in I$ postoji baza konveksnih okolina nule u prostoru (X_i, τ_i). Ako su U_k konveksne okoline nule u (X_{i_k}, τ_{i_k}), $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}[U_k]$ konveksna

okolina nule u $(X,\mathcal{T})$. Prema tome, prostor $(X,\mathcal{T})$ ima bazu konveksnih okolina nule, pa je lokalno konveksan prostor.
Za dato $i\in I$, $\lambda\in L_i$ i $\varepsilon>0$ važi

$$f_i^{-1}\big[\{x\in X_i : q_{i\lambda}(x)\le\varepsilon\}\big]=\{x\in X : (q_{i\lambda}\circ f_i)(x)\le\varepsilon\}.$$

Prema tome, ako je za svako $i\in I$ topologija τ_i definisana familijom seminormi $(q_{i\lambda})_{\lambda\in L_i}$, onda je topologija $\mathcal{T}$ na X definisana familijom seminormi

$$\{q_{i\lambda}\circ f_i : \lambda\in L_i,\ i\in I\}.$$

□

Primer 3.2.6. *Neka je (X,τ) topološko-vektorski prostor, Y potprostor vektorskog prostora X i $f:Y\to X$, $f(y)=y$, za sve $y\in Y$. Inicijalna topologija na Y za preslikavanje f je upravo topologija na Y indukovana topologijom τ.*

Primer 3.2.7. *Neka je $\{(X_i,\tau_i): i\in I\}$ familija topološko-vektorskih prostora i $X=\prod\limits_{i\in I}X_i$ proizvod vektorskih prostora X_i, $i\in I$. Neka je za svako $i\in I$ preslikavanje $\pi_i: X\to X_i$ projekcija proizvoda na prostor X_i, dato Definicijom 1.2.47. Inicijalna toplogija na X za familiju preslikavanja $(\pi_i)_{i\in I}$ je upravo topologija Tihonova data Definicijom 1.2.49.*

Primer 3.2.8. *Neka su X i Y realni vektorski prostori, upareni u odnosu na bilinearnu formu $B: X\times Y\to\mathbb{R}$. Dokažimo da je slaba topologija $\sigma(X,Y)$ na X upravo inicijalna topologija za familiju preslikavanja $(f_y)_{y\in Y}$, $f_y(x)=B(x,y)$, za sve $x\in X$. Prema Lemi 3.1.9 je za svako $y\in Y$ preslikavanje $f_y: X\to\mathbb{R}$ neprekidno za topologiju $\sigma(X,Y)$. Neka je τ topologija na X takva da su preslikavanja $(f_y)_{y\in Y}$ neprekidna. Tada za dato $x_0\in X$, $\varepsilon>0$ i $\{y_1,\dots,y_n\}\subset Y$, $n\in\mathbb{N}$ postoji okolina V tačke x_0 u (X,τ), takva da za sve $x\in V$ važi*

$$|f_{y_k}(x)-f_{y_k}(x_0)|=|B(x-x_0,y_k)|\le\varepsilon,\ \ 1\le k\le n.$$

Drugim rečima, važi da je $V\subset x_0+U_{y_1,\dots,y_n,\varepsilon}$. Ovim smo pokazali da za svaku okolinu U tačke x_0 u $(X,\sigma(X,Y))$ postoji okolina V tačke x_0 u (X,τ) takva da je $V\subset U$. Kako je x_0 proizvoljna tačka prostora X, pokazali smo da je topologija τ finija od slabe topologije $\sigma(X,Y)$ (pogledati i Napomenu 3.1.6).

Na osnovu Primera 3.2.8 možemo dokazati sledeću propoziciju.

Propozicija 3.2.9. *Neka su X i Y realni vektorski prostori, upareni u odnosu na bilinearnu formu B, koja razdvaja tačke prostora Y. Neka je N pravi potprostor prostora Y ($N\subsetneq Y$). Tada je topologija $\sigma(X,Y)$ na X strogo finija od topologije $\sigma(X,N)$ ($\sigma(X,N)\subsetneq\sigma(X,Y)$).*

Dokaz. Za svako $y\in N$ je linearna forma $x\mapsto B(x,y)$ na X neprekidna za topologiju $\sigma(X,Y)$, pa je $\sigma(X,N)\subset\sigma(X,Y)$.
Neka je $y\in Y\setminus N$. Linearna forma $x\mapsto B(x,y)$ na X je neprekidna za topologiju $\sigma(X,Y)$. Dokažimo da ta linearna forma nije neprekidna za topologiju $\sigma(X,N)$. Pretpostavimo suprotno, da je linearna forma $x\mapsto B(x,y)$ na X neprekidna za topologiju $\sigma(X,N)$. Tada prema Propoziciji 3.1.14 postoji $z\in N$, tako da je $B(x,y)=B(x,z)$, za sve $x\in X$. Dalje je $B(x,y-z)=0$, za sve $x\in X$, pa kako B razdvaja tačke prostora Y, sledi da je $y=z\in N$. Dolazimo do kontradikcije, jer je $y\in Y\setminus N$.
Prema tome je $\sigma(X,N)\subsetneq\sigma(X,Y)$. □

3.3 Slaba topologija $\sigma(E, E^*)$

Neka je E realan vektorski prostor, $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ njegov dualni prostor. Topologiju na E indukovanu normom nazivamo **jaka topologija** i obeležavamo sa $\mathcal{O}_E$. Za svako $f \in E^*$ preslikavanje $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle = f(x), x \in E,$$

je linearna funkcionela na E.

Prethodno navedene činjenice podrazumevamo u nastavku.

Definicija 3.3.1. Slaba topologija $\sigma(E, E^*)$ na realnom vektorskom prostoru E je inicijalna topologija na E za familiju linearnih preslikavanja $(\varphi_f)_{f\in E^*}$.

Napomena 3.3.2. Posmatrajmo vektorske prostore E i E^* uparene u odnosu na kanoničku bilinearnu formu $(x, f) \mapsto \langle f, x\rangle$, $x \in E$, $f \in E^*$. Prema Primeru 3.2.8 slaba topologija $\sigma(E, E^*)$ na E je upravo slaba topologija definisana uparivanjem prostora E i E^* u odnosu na kanoničku bilinearnu formu. Dakle, slaba topologija $\sigma(E, E^*)$ je lokalno konveksna topologija, definisana familijom semi-normi $(q_f)_{f\in E^*}$,

$$q_f(x) = |\langle f, x\rangle|, x \in E.$$

Napomena 3.3.3. Primetimo da je za svako $f \in E^*$ preslikavanje φ_f neprekidno za jaku topologiju na E. Prema tome, jaka topologija je finija od slabe topologije $\sigma(E, E^*)$.

Na osnovu definicije slabe topologije imamo narednu propoziciju.

Propozicija 3.3.4. *Neka je $x_0 \in E$ proizvoljna tačka. Bazu okolina tačke x_0 u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ čine skupovi oblika*

$$V_{f_1,\dots,f_k,\varepsilon} = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \text{ za svako } 1 \le i \le k\}, \tag{3.1}$$

gde je $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ i $\{f_1, \dots f_k\} \subset E^*$.

Dokaz. Važi da je $V_{f_1,\dots,f_k,\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{k} \varphi_{f_i}^{-1}\big((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)\big)$, gde je $a_i = \langle f_i, x_0\rangle$, $k \in \mathbb{N}$ i $f_1, \dots, f_k \in E^*$. Prema tome, $V_{f_1,\dots,f_k,\varepsilon}$ je otvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ i sadrži tačku x_0, pa je i okolina tačke x_0.
Neka je U proizvoljna okolina nule u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Tada postoji okolina $W \subset U$ tačke x_0 oblika $W = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, gde je $f_1, \dots, f_n \in E^*$, $n \in \mathbb{N}$ i ω_i okolina tačke $\langle f_i, x_0\rangle$, $1 \le i \le n$. Za svako $1 \le i \le n$ postoji $\varepsilon_i > 0$, tako da je $(a_i - \varepsilon_i, a_i + \varepsilon_i) \subset \omega_i$. Ako je $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : 1 \le i \le n\}$, onda je $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \subset \omega_i$, za svako $1 \le i \le n$. Sledi da je $x_0 \in V_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset W \subset U$. Dakle, svaka okolina nule U u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ sadrži okolinu nule oblika (3.1). □

Napomena 3.3.5. Dokaz ovog tvrđenja mogli smo izvesti i na osnovu Napomene 3.1.6 i činjenice da za tačku $x_0 \in E$ važi $x_0 + U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon_1} \subset V_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset x_0 + U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$, gde je $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Propozicija 3.3.6. *Topološki prostor* $(E, \sigma(E, E^*))$ *je Hauzdorfov.*

Dokaz. Neka je $x_1, x_2 \in E$ i $x_1 \neq x_2$. Treba da pokažemo da postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 ($O_1, O_2 \in \sigma(E, E^*)$), takvi da je $x_1 \in O_1$ i $x_2 \in O_2$. Prema Teoremi 1.4.18 postoje $f \in E^*$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\langle f, x_1 \rangle < \alpha < \langle f, x_2 \rangle.$$

Neka je

$$O_1 = \{x \in E : \langle f, x \rangle < \alpha\} = \varphi_f^{-1}\big((-\infty, \alpha)\big),$$
$$O_2 = \{x \in E : \langle f, x \rangle > \alpha\} = \varphi_f^{-1}\big((\alpha, +\infty)\big).$$

Jasno, skupovi O_1 i O_2 su disjunktni, $x_1 \in O_1$ i $x_2 \in O_2$. Otvoreni su jer su inverzne slike otvorenih skupova. Dakle, ovako odabrani skupovi O_1 i O_2 su traženi skupovi. □

Neka je (x_n) niz u E, $x \in E$, (f_n) niz u E^* i $f \in E^*$. Da bismo predstavili osobine konvergencije nizova u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$, prvo navodimo različite tipove konvergencije nizova.

- Niz (x_n) **slabo konvergira** ka x u E ako (x_n) konvergira ka x u lokalno konveksnom prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Pišemo $x_n \rightharpoonup x$, ili $x_n \rightharpoonup x$ slabo u E.
- Niz (x_n) **jako konvergira** ka x u E, ako važi $\|x_n - x\| \to 0$. Pišemo $x_n \to x$, ili $x_n \to x$ jako u E.
- Niz (f_n) **jako konvergira** ka f u E^* ako važi $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$. Pišemo $f_n \to f$, ili $f_n \to f$ jako u E^*.

Propozicija 3.3.7. *Neka je* (x_n) *niz u* E*,* $x \in E$*,* (f_n) *niz u* E^* *i* $f \in E^*$*. Tada važi:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *slabo u* E *ako i samo ako* $\big(\forall f \in E^*\big)\big(\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle\big)$.

(ii) Ako (x_n) *jako konvergira ka* x*, onda* (x_n) *i slabo konvergira ka* x *u* E.

(iii) Ako $x_n \rightharpoonup x$ *slabo u* E*, onda je* $\big(\|x_n\|\big)$ *ograničen niz u* $[0, \infty)$ *i važi da je* $\|x\| \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \|x_n\|$[1].

(iv) Ako $x_n \rightharpoonup x$ *slabo u* E *i* $f_n \to f$ *jako u* E^**, onda* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Dokaz.

(i) Topologija $\sigma(E, E^*)$ je inicijalna topologija na E za familiju linearnih preslikavanja $(\varphi_f)_{f \in E^*}$. Prema Propoziciji 3.2.2 važi da $x_n \rightharpoonup x$ ako i samo ako $\varphi_f(x_n) \to \varphi_f(x)$ za svako $f \in E^*$. Kako je $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$, za sve $x \in E$ i sve $f \in E^*$, imamo da $x_n \rightharpoonup x$ ako i samo ako $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$.

[1] Za niz realnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n := \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \left(\inf\limits_{n \geq m} a_n \right)$.

(ii) Neka (x_n) jako konvergira ka x u E. Za proizvoljno $f \in E^*$, $f \not\equiv 0$ važi

$$|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{E^*}\|x_n - x\|.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako $x_n \to x$, sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, važi $\|x_n - x\| < \dfrac{\varepsilon}{\|f\|_{E^*}}$. Sada sledi da za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, važi

$$|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| < \varepsilon.$$

Dakle, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, za svako $f \in E^*$, pa na osnovu osobine (i) imamo da $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Prema osobini (i) za svako $f \in E^*$ niz $\big(\langle f, x_n\rangle\big)$ je konvergentan, pa je i ograničen. Na osnovu Propozicije 1.4.16 važi da je niz $\big(\|x_n\|\big)$ ograničen niz u $[0, \infty)$. Važi nejednakost

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|_{E^*}\|x_n\|,$$

odakle kada $n \to \infty$ dobijamo

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{E^*} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|,$$

što prema Propoziciji 1.4.15 implicira da je

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_{E^*}\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(iv) Važi nejednakost

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leq |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\ &\leq \|f_n - f\|_{E^*}\|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle|. \end{aligned}$$

Na osnovu jake konvergencije niza (f_n) imamo da $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$. Kako $x_n \rightharpoonup x$, prema osobini (iii) sledi da je niz $\big(\|x_n\|\big)$ ograničen. Proizvod nula niza[2] i ograničenog niza je nula niz. Prema tome $\|f_n - f\|_{E^*}\|x_n\| \to 0$. Iz osobine (i) sledi da $|\langle f, x_n - x\rangle| \to 0$. Sada na osnovu date nejednakosti imamo da $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$, čime je dokazano da $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

□

Propozicija 3.3.8. *Ako je E konačno dimenzionalan vektorski prostor, onda je slaba topologija $\sigma(E, E^*)$ upravo topologija indukovana normom $\|\cdot\|$ na E.*

Dokaz. Neka je $\dim(E) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Već smo napomenuli da je jaka topologija $\mathcal{O}_E$ finija od slabe topologije $\sigma(E, E^*)$ na E. Dakle, $\sigma(E, E^*) \subset \mathcal{O}_E$.

Neka je $x_0 \in E$ proizvoljna tačka i U proizvoljna okolina tačke x_0 u prostoru $(E, \mathcal{O}_E)$. Tražimo okolinu nule V tačke x_0 u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$, takvu da je $V \subset U$. Prema Teoremi 1.3.4 znamo da postoji broj $r > 0$ takav da je $L(x_0, r) \subset U$.

Neka je $\{e_1, ..., e_n\} \subset E$ baza vektorskog prostora E, takva da je $\|e_i\| = 1$, za sve

[2] Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je nula niz ako $a_n \to 0$.

$i = 1, ..., n$. Tada je svako $x \in E$ moguće na jedinstven način reprezentovati u formi $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, gde je $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Na osnovu toga je $x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i$.
Za svako $1 \leq i \leq n$ definišemo preslikavanje $f_i : E \to \mathbb{R}$,

$$f_i(x) = x_i, \text{ za sve } x \in E.$$

Preslikavanja $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ su linearne funkcionele definisane na konačno dimenzionalnom prostoru, pa su prema Teoremi 1.4.10 i neprekidne za jaku topologiju na E. Posmatrajmo skup

$$V = \left\{ x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \frac{r}{n}, i = 1, ..., n \right\}.$$

Ovako definisan skup V je prema Propoziciji 3.3.4 okolina tačke x_0 u lokalno konveksnom prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Za svako $x \in V$ važi

$$\|x - x_0\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < n \cdot \frac{r}{n} = r.$$

Prema tome je $V \subset U$, pa je V okolina koju smo tražili. Kako je $x_0 \in E$ proizvoljna tačka i U njena proizvoljna okolina, sledi da je $\mathcal{O}_E \subset \sigma(E, E^*)$. $\square$

U narednim primerima pokazujemo da je za beskonačno dimenzionalan vektorski prostor E jaka topologija strogo finija od slabe topologije $\sigma(E, E^*)$. Za proizvoljan skup $A \subset E$ sa $\overline{A}^{\sigma(E,E^*)}$ označavamo zatvorenje skupa A u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$, dok sa $\overline{A}$ označavamo zatvorenje skupa A u prostoru $(E, \|\cdot\|)$.

Primer 3.3.9. *Neka je E beskonačno dimenzionalan vektorski prostor. Jedinična sfera*

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

nije zatvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.
Preciznije, pokazaćemo da važi $\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = B_E$, gde je

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

zatvorena jedinična lopta u prostoru $(E, \|\cdot\|)$.
Neka je tačka $x_0 \in E$ takva da je $\|x_0\| < 1$. Pokazaćemo da $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$. Neka je V proizvoljna okolina tačke x_0 u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Prema Propoziciji 3.3.4 možemo pretpostaviti da je

$$V = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, \ 1 \leq i \leq k\},$$

gde je $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ i $f_1, ..., f_k \in E^*$. Postoji tačka $y_0 \in E$, $y_0 \neq 0$ takva da je $\langle f_i, y_0 \rangle = 0$, za sve $1 \leq i \leq k$. (U suprotnom, ako takva tačka ne bi postojala, linearno preslikavanje $\varphi : E \to \mathbb{R}^k$ definisano sa $\varphi(x) = (\langle f_i, x \rangle)_{1 \leq i \leq k}$, za sve $x \in E$, bi bilo injektivno, pa i izomorfizam vektorskih prostora E i $\varphi[E]$. Tada bi važilo da je $\dim(E) \leq k$, što je nemoguće jer je E beskonačno dimenzionalan vektorski *prostor.) Funkcija $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definisana sa $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$, $t \in [0,\infty)$, je neprekidna na $[0,\infty)$, pri čemu je $g(0) < 1$ i $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. Prema tome, postoji broj $t_0 > 0$ takav da je $\|x_0 + t_0y_0\| = 1$. Tada je $x_0 + t_0y_0 \in V \cap S$. Dakle, važi*

$$B_E \subset \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}.$$

Kako je $S \subset B_E$, za jednakost skupova je sada dovoljno da pokažemo da je B_E zatvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.
Za svako $x \in E$ i svako $f \in E^*$ važi da je $\|x\| = \sup\limits_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|\le 1}} |\langle f, x\rangle|$ i $|\langle f, x\rangle| \le \|f\|_{E^*}\|x\|$, pa sledi da je

$$B_E = \bigcap_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|\le 1}} \{x \in E : |\langle f, x\rangle| \le 1\}.$$

Za $f \in E^*$ skup $\{x \in E : |\langle f, x\rangle| \le 1\}$ je zatvoren u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ (kao inverzna slika zatvorenog skupa, pri čemu je f neprekidno preslikavanje za topologiju $\sigma(E, E^*)$, jer je ona inicijalna topologija za familiju preslikavanja $(\varphi_f)_{f\in E^*}$). Kao presek zatvorenih skupova B_E je zatvoren skup. Dakle, $B_E = \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$. Prema tome, S nije zatvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.

Primer 3.3.10. *Ako je E beskonačno dimenzionalan vektorski prostor, onda jedinična lopta $L_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ nije otvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.*
Pretpostavimo suprotno, da je L_E otvoren skup u $(E, \sigma(E, E^*))$. Tada je komplement skupa L_E, $E \setminus L_E = \{x \in E : \|x\| \ge 1\}$, zatvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Prema tome je skup $S = B_E \cap (E \setminus L_E)$ zatvoren u istom prostoru, pa na osnovu prethodnog primera dolazimo do kontradikcije. Dakle, L_E nije otvoren skup u $(E, \sigma(E, E^*))$.

Skup S je zatvoren, a L_E otvoren u prostoru $(E, \|\cdot\|)$, pa smo u prethodnim primerima pokazali da je jaka topologija na E strogo finija od slabe topologije $\sigma(E, E^*)$.

3.3.1 Konveksni skupovi i linearna preslikavanja

Znamo da je svaki zatvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ zatvoren i u prostoru $(E, \|\cdot\|)$. U slučaju beskonačno dimenzionalnog prostora E obratno ne važi, što smo i pokazali. Međutim, za konveksne skupove važi naredna teorema.

Teorema 3.3.11. *Neka je $C \subset E$ konveksan skup. Skup C je zatvoren u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ ako i samo ako je zatvoren u prostoru $(E, \|\cdot\|)$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ova implikacija važi na osnovu toga što je jaka topologija finija od slabe topologije.
($\Leftarrow$) Neka je C zatvoren skup u prostoru $(E, \|\cdot\|)$. Pokazaćemo da je komplement $E \setminus C$ otvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Neka je $x_0 \in E \setminus C$ proizvoljna tačka. Prema Teoremi 1.4.18 postoje $f \in E^*$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle, \quad \text{za sve} \quad y \in C.$$

Sada je skup $V = \{x \in E : \langle f, x\rangle < \alpha\}$ takav da je $x_0 \in V$ i $V \cap C = \emptyset$ ($V \subset (E \setminus C)$). Skup V je otvoren u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$, pa je skup $E \setminus C$ okolina svake svoje tačke i na osnovu toga otvoren skup. Prema tome, C je zatvoren skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. □

Slede dve posledice Teoreme 3.3.11. Prvo definišemo pojmove konveksne i odozdo poluneprekidne funkcije.

Definicija 3.3.12. Neka je X realan vektorski prostor. Funkcija $f : X \to (-\infty, +\infty]$ je **konveksna** ako i samo ako za sve $x, y \in X$ i svako $t \in (0, 1)$ važi

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{3.2}$$

Definicija 3.3.13. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Funkcija $f : X \to (-\infty, +\infty]$ je **odozdo poluneprekidna** ako i samo ako je za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ skup $\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ zatvoren u prostoru $(X, \mathcal{O})$.

Posledica 3.3.14. *Neka je (x_n) niz u E i $x \in E$. Ako (x_n) slabo konvergira ka x u E, onda postoji niz (y_n) u* conv$(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ *koji jako konvergira ka x u E.*

Dokaz. Neka je $C = \operatorname{conv}\big(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\big)$. Kako (x_n) slabo konvergira ka x, prema Teoremi 1.2.26 sledi da je $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{C}^{\sigma(E,E^*)}$.
Neka je A proizvoljan konveksan podskup skupa E. U prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ skup $\overline{A}^{\sigma(E,E^*)}$ je najmanji zatvoren nadskup skupa A. Kako je $\overline{A}$ konveksan skup (Propozicija 2.3.10), on je na osnovu Teoreme 3.3.11 zatvoren i u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Sledi da je $\overline{A}^{\sigma(E,E^*)} \subset \overline{A}$. Analogno se pokazuje da važi i $\overline{A} \subset \overline{A}^{\sigma(E,E^*)}$. Dakle, $\overline{A}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{A}$, za svaki konveksan $A \subset E$.
Prema tome je $\overline{C}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{C}$, pa je $x \in \overline{C}$. Kako je $(E, \|\cdot\|)$ normiran prostor, na osnovu Teoreme 1.3.9 (1) sledi da postoji niz (y_n) u C koji jako konvergira ka x, što je i trebalo dokazati. □

Posledica 3.3.15. *Neka je $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ konveksna, odozdo poluneprekidna funkcija za jaku topologiju na E. Tada je funkcija φ odozdo poluneprekidna i za slabu topologiju $\sigma(E, E^*)$.*

Dokaz. Funkcija φ je odozdo poluneprekidna ako i samo ako je za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ skup

$$A_\lambda = \{x \in E : \varphi(x) \leq \lambda\}$$

zatvoren u prostoru $(E, \|\cdot\|)$. Funkcija φ je konveksna, pa je za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ navedeni skup i konveksan. Prema Teoremi 3.3.11 sledi da je za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ skup A_λ zatvoren i u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$, pa je φ odozdo poluneprekidna i za topologiju $\sigma(E, E^*)$. □

Teorema 3.3.16. *Neka su $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$ Banahovi prostori i $T : E \to F$ linearno preslikavanje. Preslikavanje $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ je neprekidno ako i samo ako je preslikavanje $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ neprekidno.*

Dokaz. (⇒) Prema Propoziciji 3.2.3 dovoljno je proveriti da je za svako $f \in F^*$ preslikavanje $f \circ T : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{R}$ neprekidno. Neka je $f \in F^*$. Na osnovu pretpostavke da je $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ neprekidno preskikavanje sledi da je i preslikavanje $f \circ T : (E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{R}$ neprekidno, kao kompozicija neprekidnih preslikavanja. Ono je i linearno, kao kompozicija linearnih preslikavanja. Dakle, $f \circ T \in E^*$, pa je $f \circ T : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje.
(⇐) Neka je preslikavanje $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ neprekidno.
Može se pokazati da je $\sigma(E \times F, (E \times F)^*) = \sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*)$. Ovde ćemo pokazati da važi $\sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*) \subset \sigma(E \times F, (E \times F)^*)$.
Neka je $(x_1^0, x_2^0) \in E \times F$ proizvoljna tačka. Elementi baze okolina tačke (x_1^0, x_2^0) u prostoru $(E \times F, \sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*))$ su oblika $V_1 \times V_2$, gde je

$$V_1 = \{x_1 \in E : |\langle f_i, x_1 \rangle - \langle f_i, x_1^0 \rangle| < \varepsilon_1, \ 1 \leq i \leq n\},$$

$$V_2 = \{x_2 \in F : |\langle g_i, x_2 \rangle - \langle g_i, x_2^0 \rangle| < \varepsilon_2, \ 1 \leq i \leq m\},$$

za neke $n, m \in \mathbb{N}$, $f_1, ..., f_n \in E^*$, $g_1, ..., g_m \in F^*$ i $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.
Neka su $\pi_1 : E \times F \to E$ i $\pi_2 : E \times F \to F$ projekcije date Definicijom 1.2.47. Prema Teoremi 1.2.52 (1.) preslikavanja $\pi_1 : (E \times F, \mathcal{O}) \to (E, \|\cdot\|_E)$ i $\pi_2 : (E \times F, \mathcal{O}) \to (F, \|\cdot\|_F)$ su neprekidna, gde je sa $\mathcal{O}$ označena topologija Tihonova (topologija proizvoda) za prostore $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$. Ta preslikavanja su i linearna. Ako je $f \in E^*$, onda je $f \circ \pi_1 : (E \times F, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ neprekidno, linearno preslikavanje ($f \circ \pi_1 \in (E \times F)^*$[3]). Takođe, ako je $g \in F^*$, onda je $g \circ \pi_2 : (E \times F, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ neprekidno, linearno preslikavanje ($f \circ \pi_2 \in (E \times F)^*$).
Neka je

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in E \times F : |\langle f_i \circ \pi_1, (x_1, x_2) - (x_1^0, x_2^0) \rangle| < \varepsilon_1, \ 1 \leq i \leq n\},$$

$$U_2 = \{(x_1, x_2) \in E \times F : |\langle g_j \circ \pi_2, (x_1, x_2) - (x_1^0, x_2^0) \rangle| < \varepsilon_2, \ 1 \leq j \leq m\}.$$

Skup $U_1 \cap U_2$ je okolina tačke (x_1^0, x_2^0) u prostoru $\big(E \times F, \sigma(E \times F, (E \times F)^*)\big)$. Važi $V_1 \times V_2 = U_1 \cap U_2$. Na osnovu toga možemo da zaključimo da je

$$\sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*) \subset \sigma(E \times F, (E \times F)^*).$$

Na osnovu Propozicije 1.2.53 sledi da je grafik preslikavanja T,

$$G(T) = \{(x, T(x)) : x \in X\},$$

je zatvoren skup u prostoru $(E \times F, \sigma(E, E^*) \times \sigma(F, F^*))$. Prema pokazanom odnosu topologija sledi da je zatvoren i u prostoru $\big(E \times F, \sigma(E \times F, (E \times F)^*)\big)$, pa je zatvoren i u prostoru $(E \times F, \mathcal{O})$. Na osnovu Teoreme o zatvorenom grafiku 1.4.19 sledi da je $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ neprekidno preslikavanje. □

Napomena 3.3.17. Iz dokaza prethodne teoreme možemo da zaključimo da za linearno preslikavanje $T : E \to F$ važi $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ je neprekidno ako i samo ako je $T : (E, \sigma(E, E^*)) \to (F, \sigma(F, F^*))$ neprekidno ako i samo ako je $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \sigma(F, F^*))$ neprekidno.

[3]Na proizvodu $E \times F$ je sa $(x, y) \mapsto \|x\|_E + \|y\|_F$, $(x, y) \in E \times F$, definisana norma i prostor $E \times F$ sa tako definisanom normom je Banahov prostor, pri čemu je topologija indukovana tom normom upravo topologija Tihonova za prostore $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$.

3.4 Slaba-* topologija $\sigma(E^*, E)$

Neka je E realan vektorski prostor, $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ njegov dualni prostor. Sa $(E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}})$ označavamo dualni prostor prostora $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$. Do sada smo kroz rad predstavili dve topologije definisane na skupu E^*, jaku topologiju (topologiju indukovanu normom $\|\cdot\|_{E^*}$, koju označavamo sa $\mathcal{O}_{E^*}$) i slabu topologiju $\sigma(E^*, E^{**})$, dobijenu na način opisan u prethodnom odeljku. U ovom odeljku predstavljamo i treću topologiju definisanu na skupu E^* - slabu-* topologiju, koja je grublja od prethodne dve.

Razlog za posmatranje treće topologije na prostoru E^* je taj što grublja topologija ima više kompaktnih skupova.

Za svako $x \in E$ preslikavanje $\varphi_x : E^* \to \mathbb{R}$, definisano sa

$$\varphi_x(f) = \langle \varphi_x, f\rangle = f(x) = \langle f, x\rangle, \text{ za sve } f \in E^*,$$

je linearno preslikavanje.

Navedene činjenice podrazumevamo u nastavku.

Definicija 3.4.1. Slaba-* topologija $\sigma(E^*, E)$ na E^* je inicijalna topologija na E^* za familiju linearnih preslikavanja $(\varphi_x)_{x\in E}$.

Za svako $x \in E$ važi:

$$|\varphi_x(f)| = |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|\|f\|_{E^*}, \quad \text{za sve } f \in E^*.$$

Na osnovu toga je za svako $x \in E$ presikavanje φ_x neprekidno, to jest $\varphi_x \in E^{**}$. Definišemo preslikavanje $J : E \to E^{**}$,

$$J(x) = \varphi_x, \quad \text{za sve } x \in E.$$

Tada važi

$$\langle J(x), f\rangle = \langle \varphi_x, f\rangle = \langle f, x\rangle, \text{ za sve } x \in E \text{ i sve } f \in E^*.$$

Dalje je

$$\|J(x)\|_{E^{**}} = \|\varphi_x\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*}\leq 1}} |\langle \varphi_x, f\rangle| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|_{E^*}\leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

Prema tome, preslikavanje J je izometrija, na osnovu čega je injektivno i neprekidno. Pritom je J i linearno preslikavanje. Prostori $(E, \|\cdot\|)$ i $(J[E], \|\cdot\|_{E^{**}})$ su tada izometrični kao metrički prostori i izmorfni kao lokalno konveksni prostori ($J[E]$ je potprostor prostora E^{**}, a sa $\|\cdot\|_{E^{**}}$ označavamo i normu koja je restrikcija norme $\|\cdot\|_{E^{**}} : E^{**} \to [0, \infty)$ na potprostor $J[E]$).
Na taj način prostor $(E, \|\cdot\|)$ možemo identifikovati sa prostorom $(J[E], \|\cdot\|_{E^{**}})$. Tako skup E možemo posmatrati kao podskup skupa E^{**} i na osnovu toga zaključiti da je topologija $\sigma(E^*, E)$ grublja od topologije $\sigma(E^*, E^{**})$. Dakle, važi

$$\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**}) \subset \mathcal{O}_{E^*}.$$

Napomena 3.4.2. Ako je E konačno dimenzionalan prostor, onda je na osnovu Teoreme 1.4.10 svako linearno preslikavanje $f : E \to \mathbb{R}$ neprekidno, to jest $\mathcal{L}(E) = E^*$. Ako je $\dim(E) = n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\{e_1, ..., e_n\}$ baza prostora E, onda je $\{e^1, ..., e^n\} \subset E^*$ baza prostora E^*, gde je linearno preslikavanje $e^i : E \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

za sve $1 \leq i, j \leq n$. Prema tome je $\dim(E) = \dim(E^*) = \dim(E^{**})$, pa je preslikavanje J sirjektivno i važi $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**}) = \mathcal{O}_{E^*}$.

Napomena 3.4.3. Posmatrajmo vektorske prostore E i E^* uparene u odnosu na kanoničku bilinearnu formu $(x, f) \mapsto \langle f, x \rangle$, $x \in E$, $f \in E^*$. Prema Primeru 3.2.8 slaba-* topologija $\sigma(E^*, E)$ na E^* je upravo slaba topologija definisana uparivanjem prostora E i E^* u odnosu na kanoničku bilinearnu formu. Dakle, slaba-* topologija $\sigma(E^*, E)$ je lokalno konveksna topologija, definisana familijom semi-normi $q_x : E^* \to [0, \infty)$,

$$q_x(f) = |\langle f, x \rangle| \; f \in E^*.$$

Propozicija 3.4.4. *Neka je $f_0 \in E^*$ proizvoljna tačka. Bazu okolina tačke f_0 u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$ čine skupovi oblika*

$$V_{x_1,...,x_k,\varepsilon} = \{f \in E^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, \; \forall i = 1, ..., k\},$$

gde je $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ i $\{x_1, ...x_k\} \subset E$.

Za dokaz pogledati dokaz Propozicije 3.3.4.

Propozicija 3.4.5. *Prostor $(E^*, \sigma(E^*, E))$ je Hauzdorfov.*

Dokaz. Neka je $f_1, f_2 \in E^*$ i $f_1 \not\equiv f_2$. Tada postoji $x \in E$, tako da je $\langle f_1, x \rangle \neq \langle f_2, x \rangle$. Pretpostavimo da je $\langle f_1, x \rangle < \langle f_2, x \rangle$ i broj $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\langle f_1, x \rangle < \alpha < \langle f_2, x \rangle.$$

Neka je

$$O_1 = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle < \alpha\} = \varphi_x^{-1}((-\infty, \alpha)),$$
$$O_2 = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle > \alpha\} = \varphi_x^{-1}((\alpha, +\infty)).$$

Skupovi O_1 i O_2 su otvoreni u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$ (kao inverzne slike otvorenih skupova). Važi da je $f_1 \in O_1$, $f_2 \in O_2$ i $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Dakle, postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $f_1 \in O_1$ i $f_2 \in O_2$, pa je prema tome prostor Hauzdorfov. $\square$

Neka je (f_n) niz u E^* i $f \in E^*$. Da bismo naveli propoziciju o konvergenciji nizova, navodimo različite tipove konvergencije.

- Kažemo da niz (f_n) **slabo-* konvergira** ka f u E^* ako niz (f_n) konvergira ka f u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$ i pišemo

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ (u } \sigma(E^*, E) \text{).}$$

- Ako niz (f_n) u konvergira ka f u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E^{**}))$ pišemo

$$f_n \rightharpoonup f \text{ (u } \sigma(E^*, E^{**}) \text{).}$$

Propozicija 3.4.6. *Neka je (f_n) niz u E^* i (x_n) niz u E. Tada važi:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *u* $\sigma(E^*, E)$ *ako i samo ako* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, *za svako* $x \in E$.

(ii) Ako $f_n \to f$, *onda* $f_n \rightharpoonup f$ *u* $\sigma(E^*, E^{**})$.
Ako $f_n \rightharpoonup f$ *u* $\sigma(E^*, E^{**})$, *onda* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *u* $\sigma(E^*, E)$

(iii) Ako $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *u* $\sigma(E^*, E)$, *onda je* $\big(\|f_n\|_{E^*}\big)$ *ograničen niz u* $[0, \infty)$
i $\|f\|_{E^*} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{E^*}$.

(iv) Ako $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *u* $\sigma(E^*, E)$ *i* $x_n \to x$ *u* E, *onda* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Dokaz se izvodi kao i dokaz Propozicije 3.3.7.

Ako prostore E i E^* posmatramo uparene u odnosu na kanoničku bilinearnu formu, onda na osnovu Propozicije 3.1.14 važi naredno tvrđenje.

Propozicija 3.4.7. *Neka je $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$ linearna funkcionela, neprekidna za slabu-* topologiju na E^*. Tada postoji $x_0 \in E$, tako da je*

$$\varphi(f) = \varphi_{x_0}(f) = \langle f, x_0\rangle, \ \textit{za sve } f \in E^*.$$

Posledica 3.4.8. *Neka je $\varphi \in E^{**}$, $\varphi \not\equiv 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i skup*

$$H = \{f \in E^* : \varphi(f) = \alpha\}$$

zatvoren u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$. Tada postoji $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, tako da je

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x_0\rangle = \alpha\}.$$

Dokaz. Neka $f_0 \notin H$. Tada postoji okolina V tačke f_0 u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$, takva da je $V \subset (E^* \setminus H)$. Na osnovu Propozicije 3.4.4 možemo da pretpostavimo da je

$$V = \{f \in E^* : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, \ \text{za svako } i = 1, ..., k\},$$

gde je $k \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_k \in E$ i $\varepsilon > 0$. Kako je V konveksan skup i φ linearno preslikavanje, sledi da je i $\varphi[V]$ konveksan skup, pa važi da je

$$\varphi(f) < \alpha, \ \text{za sve } f \in V \tag{3.3}$$

ili

$$\varphi(f) > \alpha, \ \text{za sve } f \in V \tag{3.4}$$

Pretpostavimo da važi (3.3). Tada je

$$\varphi(g) < \alpha - \varphi(f_0), \ \text{za sve } g \in W = V - f_0.$$

Skup V je uravnotežen, pa je $-V = V$ i $-W = W$, odakle sledi da je

$$-\varphi(g) = \varphi(-g) < \alpha - \varphi(f_0), \text{ za sve } g \in W = V - f_0.$$

Zaključujemo da je

$$|\varphi(g)| < |\alpha - \varphi(f_0)|, \text{ za sve } g \in W.$$

Kako je W okolina nule u lokalno konveksnom prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$, sledi da za dato $\gamma > 0$ postoji okolina nule $U = \dfrac{\gamma}{|\alpha - \varphi(f_0)|} W$, takva da za sve $g \in U$ važi da je $|\varphi(g)| < \gamma$. Dakle, φ je linearna funkcionela definisana na lokalno konveksnom prostoru, koja je neprekidna u nuli. Ona je prema Propoziciji 2.3.48 neprekidna za slabu-* topologiju. Sada na osnovu Propozicije 3.4.7 sledi da postoji $x_0 \in E$, tako da je $\varphi(f) = \langle f, x_0 \rangle$, za sve $f \in E^*$, pa je

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x_0 \rangle = \alpha\}.$$

$\square$

Napomena 3.4.9. Pretpostavimo da definisana izometrija $J : E \to E^{**}$ nije sirjekcija. Neka je $\xi \in E^{**} \setminus J[E]$. Tada je $H = \{f \in E^* : \langle \xi, f \rangle = 0\}$ zatvoren skup u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E^{**}))$. Pretpostavimo da je zatvoren i u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$. Tada prema Posledici 3.4.8 sledi da je

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle = 0\},$$

za neko $x \in E$. Prema tome, važi $\mathrm{Ker}(\xi) = \mathrm{Ker}(\varphi_x)$, pa sledi da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ da je $\xi = \lambda\varphi_x = \varphi_{\lambda x} \in J[E]$ (pogledati dokaz Leme 3.1.13 za n=1). Dolazimo do kontradikcije, jer je $\xi \in E^{**} \setminus J[E]$, pa zaključujemo da H nije zatvoren skup u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$. Dakle, ako J nije sirjektivno preslikavanje, topologija $\sigma(E^*, E^{**})$ je strogo finija od topologije $\sigma(E^*, E)$.

Iz prethodne napomene primetimo da konveksan skup koji je zatvoren u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E^{**}))$(to jest zatvoren u jakoj topologiji prostora E^*, prema Propoziciji 3.3.11) ne mora biti zatvoren u prostoru E^* koji je snabdeven slabom-* topologijom.

Zatvorena jedinična lopta B_{E^*} je kompaktan skup u prostoru $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ ako i samo ako je prostor E konačno dimenzionalan. Narednom teoremom (koja je data u [3]) pokazujemo da je zatvorena jedinična lopta B_{E^*} kompaktan skup u prostoru koji je snabdeven slabom-* topologijom.

Teorema 3.4.10 (Banah-Alaoglu[4]). *Zatvorena jedinična lopta*

$$B_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\|_{E^*} \leq 1\}$$

je kompaktan skup u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$.

[4]Leonidas Alaoglu (1914-1981), grčki matematičar

Dokaz. Posmatramo skup $Y = \mathbb{R}^E$, svih preslikavanja $g : E \to \mathbb{R}$. Elemente skupa Y označavamo sa $\omega = (\omega_x)_{x\in E}$, gde je $\omega_x \in \mathbb{R}$. Na skupu Y je definisana topologija Tihonova, to jest inicijalna topologija za familiju preslikavanja $(h_x)_{x\in E}$, $h_x(\omega) = \omega_x$, $\omega \in Y$ (pogledati Primer 3.2.7). Označavamo je sa $\mathcal{O}_Y$. Sada definišemo preslikavanje $\Phi : E^* \to Y$, za svako $f \in E^*$ je

$$\Phi(f) = (w_x)_{x\in E}, \text{ gde je } w_x = \langle f, x\rangle.$$

Ako je $f_1, f_2 \in E^*$,$f_1 \not\equiv f_2$, onda postoji $x \in E$, tako da je $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$, pa je $\Phi(f_1) \neq \Phi(f_2)$. Dakle, preslikavanje Φ je injekcija.
Za sve $f_1, f_2 \in E^*$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi

$$\Phi(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\langle \alpha f_1 + \beta f_2, x\rangle)_{x\in E} = \alpha(\langle f_1, x\rangle)_{x\in E} + \beta(\langle f_2, x\rangle)_{x\in E},$$

pa je Φ linearno preslikavanje.
Za svako $x \in E$ je definisano preslikavanje $h_x \circ \Phi : E^* \to \mathbb{R}$ i važi

$$(h_x \circ \Phi)(f) = (\Phi(f))_x = \langle f, x\rangle, \text{ za sve } f \in E^*,$$

pa je $(h_x \circ \Phi) = \varphi_x$, za svako $x \in E$. Sledi da je za svako $x \in E$ preslikavanje $h_x \circ \Phi$ neprekidno za topologiju $\sigma(E^*, E)$, pa je na osnovu Propozicije 3.2.3 preslikavanje $\Phi : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ neprekidno. Prema Teoremi 1.2.31 neprekidno je i preslikavanje $\Phi\lceil_{E^*}= \widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Phi} : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to (\Phi[E^*], \mathcal{O}_{\Phi[E^*]})$, gde sa $\mathcal{O}_{\Phi[E^*]}$ označavamo topologiju na $\Phi[E^*]$ indukovanu topologijom $\mathcal{O}_Y$.
Inverzno preslikavanje $\widetilde{\Phi}^{-1} : \Phi[E^*] \to E^*$ je takođe linearno.
Za svako $x \in E$ je definisano preslikavanje $\varphi_x \circ \widetilde{\Phi}^{-1} : \Phi[E^*] \to \mathbb{R}$ i važi

$$(\varphi_x \circ \widetilde{\Phi}^{-1})(\Phi(f)) = \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle, \text{ za sve } f \in E^*,$$

pa je $\varphi_x \circ \widetilde{\Phi}^{-1} = h_x|_{\Phi[E^*]}$, za svako $x \in E$. Prema tome, za svako $x \in E$ preslikavanje $\varphi_x \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$ je neprekidno za topologiju $\mathcal{O}_{\Phi[E^*]}$. Prema Propoziciji 3.2.3 preslikavanje $\widetilde{\Phi}^{-1} : (\Phi[E^*], \mathcal{O}_{\Phi[E^*]}) \to (E^*, \sigma(E^*, E))$ je neprekidno.
Sada možemo da zaključimo da su preslikavanja $\widetilde{\Phi}$ i $\widetilde{\Phi}^{-1}$ homeomorfizmi prostora $(E^*, \sigma(E^*, E))$ i $(\Phi[E^*], \mathcal{O}_{\Phi[E^*]})$.
Definišemo skup $K \subset Y$,

$$K = \left\{ \omega \in Y \;\middle|\; \begin{array}{c} |\omega_x| \leq \|x\| \\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \\ \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x \end{array} \quad \text{za sve} \quad x, y \in E \quad \text{i svako} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pokazaćemo da važi $\Phi[B_{E^*}] = K$. Neka je $f \in B_{E^*}$ ($\|f\|_{E^*} \leq 1$). Tada za sve $x, y \in E$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$ važi:

$$|(\Phi(f))_x| = |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{E^*}\|x\| \leq \|x\|,$$

$$(\Phi(f))_{x+y} = \langle f, x + y\rangle = \langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle = (\Phi(f))_x + (\Phi(f))_y,$$
$$(\Phi(f))_{\lambda x} = \langle f, \lambda x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle = \lambda(\Phi(f))_x,$$

pa sledi da je $\Phi(f) = \big((\Phi(f))_x\big)_{x\in E} \in K$. Dakle, važi da je $\Phi[B_{E^*}] \subset K$.
Neka $\omega \in K$. Definišemo funkciju $f : E \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \omega_x, \; x \in E.$$

Na osnovu osobina elemenata skupa K sledi da je za svako $x, y \in E$ i svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ispunjeno

$$f(\alpha x + \beta y) = \omega_{\alpha x+\beta y} = \alpha\omega_x + \beta\omega_y = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

i

$$|f(x)| = |\omega_x| \leq \|x\|.$$

Prema tome, f je neprekidno linearno preslikavanje i $\|f\|_{E^*} \leq 1$, to jest $f \in B_{E^*}$. Pritom važi da je $\Phi(f) = \omega$. Prema tome je $K \subset \Phi[B_{E^*}]$.
Neka je

$$K_1 = \{\omega \in Y : |\omega_x| \leq \|x\|, \text{ za sve } x \in E\},$$

$$K_2 = \{\omega \in Y : \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y \;\wedge\; \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x, \text{ za sve } x, y \in E, \; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Tada je $K = K_1 \cap K_2$. Takođe, važi i

$$K_1 = \prod_{x\in E} [-\|x\|, \|x\|].$$

Prema Teoremi Tihonova 1.2.54 K_1 je kompaktan skup u prostoru $(Y, \mathcal{O}_Y)$, pa je i zatvoren.
Za sve $x, y \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ skupovi

$$A_{x,y} = \{\omega \in Y : (h_{x+y} - h_x - h_y)(\omega) = \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\},$$

$$B_{\lambda,x} = \{\omega \in Y : (h_{\lambda x} - \lambda h_x)(\omega) = \omega_{\lambda x} - \lambda\omega_x = 0\},$$

su zatvoreni u prostoru $(Y, \mathcal{O}_Y)$ (kao inverzne slike zatvorenog skupa, jer su $h_{x+y} - h_x - h_y$ i $h_{\lambda x} - \lambda h_x$ neprekidna preslikavanja za topologiju $\mathcal{O}_Y$). Važi

$$K_2 = \Big[\bigcap_{x,y\in E} A_{x,y}\Big] \cap \Big[\bigcap_{\substack{x\in E\\ \lambda\in\mathbb{R}}} B_{\lambda,x}\Big].$$

Kao presek zatvorenih skupova i K_2 je zatvoren skup u prostoru $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Sada je, kao presek dva zatvorena skupa, skup K zatvoren. Kompaktnost je nasledna prema zatvorenim podskupovima (videti Definiciju 1.2.19 i Teoremu 1.2.42), pa je i K ($K \subset K_1$) kompaktan skup u prostoru $(Y, \mathcal{O}_Y)$.
Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup (Teorema 1.2.44) i $\widetilde{\Phi}^{-1}$ je homeomorfizam prostora $(\Phi[E^*], \mathcal{O}_{\Phi[E^*]})$ i $(E^*, \sigma(E^*, E))$, pa je i $\widetilde{\Phi}^{-1}[\Phi[B_{E^*}]] = B_{E^*}$ kompaktan skup u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$.

$\square$

3.5 Refleksivni prostori

U skladu sa pretpostavkama i definicijama u Odeljku 3.4 navodimo sledeću definiciju.

Definicija 3.5.1. Banahov prostor $(E, \|\cdot\|)$ je **refleksivan** ako i samo ako je preslikavanje $J : E \to E^{**}$ sirjektivno ($J[E] = E^{**}$).

Sa $(\psi_f)_{f \in E^*}$ obeležavamo familiju linearnih funkcioneli za koju je $\sigma(E^{**}, E^*)$ inicijalna topologija na E^{**}. Funkcionela $\psi_f : E^{**} \to \mathbb{R}$ je definisana sa

$$\psi_f(g) = \langle \psi_f, g \rangle = g(f) = \langle g, f \rangle, \; g \in E^{**}.$$

Posebno, za $x \in E$ važi

$$\psi_f(\varphi_x) = \langle \psi_f, \varphi_x \rangle = \varphi_x(f) = \langle \varphi_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Primer 3.5.2. *Svaki konačno dimenzionalan prostor je refleksivan.*
Svaki Hilbertov prostor je refleksivan (pogledati poglavlje 5 u [3]).

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov za refleksivnost Banahovog prostora.

Teorema 3.5.3 (Kakutani[5])**.** *Banahov prostor $(E, \|\cdot\|)$ je refleksivan ako i samo ako je zatvorena jedinična lopta*

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

kompaktan skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je prostor $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan. Tada je $J[B_E] = B_{E^{**}}$. Prema Teoremi 3.4.10 skup $B_{E^{**}}$ je kompaktan u prostoru $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$. Sada ćemo dokazati da je $J^{-1} : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \to (E, \sigma(E, E^*))$ neprekidno preslikavanje. Neka je $f \in E^*$. Tada je definisano preslikavanje $f \circ J^{-1} : E^{**} \to \mathbb{R}$. Za svako $x \in E$ i svako $\varphi_x \in E^{**}$ važi:

$$(f \circ J^{-1})(\varphi_x) = \langle f, J^{-1}(\varphi_x) \rangle = \langle f, x \rangle = \langle \varphi_x, f \rangle = \psi_f(\varphi_x).$$

Prema tome, za svako $f \in E^*$ je $f \circ J^{-1} = \psi_f$, pa je $f \circ J^{-1} : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Na osnovu Propozicije 3.2.3 sledi da je i preslikavanje $J^{-1} : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \to (E, \sigma(E, E^*))$ neprekidno. Prema tome, skup $J^{-1}[B_{E^{**}}] = B_E$ je kompaktan u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.
Da bismo dokazali obratno, biće nam potrebne dve naredne leme. $\square$

Lema 3.5.4 (Heli[6])**.** *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor, $f_1, f_2 ..., f_k \in E^*$ i $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) Za svako $\varepsilon > 0$ postoji x_ε, $\|x_\varepsilon\| \leq 1$, tako da važi

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \gamma_i| < \varepsilon, \; \textit{za sve } i = 1, 2, ..., k.$$

[5] Shizuo Kakutani (1911-2004), japanski matematičar
[6] Eduard Helly (1884-1943), austrijski matematičar

(ii) $\left|\sum_{i=1}^{k}\beta_i\gamma_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{k}\beta_i f_i\right\|_{E^*}$, *za sve* $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{R}$.

Dokaz Leme 3.5.4 čitalac može da pronađe u [3].

Lema 3.5.5 (Goldstin[7])**.** *Neka je* $(E, \|\cdot\|)$ *Banahov prostor. Tada važi da je*

$$\overline{J[B_E]}^{\sigma(E^{**},E^*)} = B_{E^{**}},$$

gde je $\overline{J[B_E]}^{\sigma(E^{**},E^*)}$ *zatvorenje skupa* $J[B_E]$ *u prostoru* $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$*. Stoga je i skup* $J[E]$ *gust u* E^{**} *u prostoru* $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$*.*

Dokaz. Neka $\xi \in B_{E^{**}}$ ($\|\xi\|_{E^{**}} \leq 1$) i neka je V proizvoljna okolina tačke ξ u prostoru $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$. Treba da dokažemo da je $V \cap J[B_E] \neq \emptyset$. Prema Propoziciji 3.4.4 možemo da pretpostavimo da je

$$V = \{\eta \in E^{**} : |\langle \eta - \xi, f_i\rangle| < \varepsilon, \text{ za sve } i = 1, 2, ..., k\},$$

za $f_1, f_2, ..., f_k \in E^*$, $k \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$. Tražimo $x \in B_E$, tako da važi $J(x) \in V$. Neka je $\gamma_i = \langle \xi, f_i\rangle$, $1 \leq i \leq k$. Za proizvoljno $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k) \in \mathbb{R}^k$ važi

$$\left|\sum_{k=1}^{k}\beta_i\gamma_i\right| = \left|\left\langle \xi, \sum_{i=1}^{k}\beta_i f_i\right\rangle\right| \leq \|\xi\|_{E^{**}} \left\|\sum_{i=1}^{k}\beta_i f_i\right\|_{E^*} \leq \left\|\sum_{i=1}^{k}\beta_i f_i\right\|_{E^*},$$

pa je ispunjen uslov (ii) iz Leme 3.5.4. Tada je ispunjen i uslov (i) iz iste leme, pa postoji $x_\varepsilon \in B_E$, tako da važi

$$|\langle f_i, x_\varepsilon\rangle - \langle \xi, f_i\rangle| < \varepsilon, \text{ za sve } i = 1, 2, ..., k,$$

to jest $J(x_\varepsilon) \in V$. Dakle, važi da je $B_{E^{**}} \subset \overline{J[B_E]}^{\sigma(E^{**},E^*)}$. Na osnovu Teoreme 3.4.10 skup $B_{E^{**}}$ je kompaktan u prostoru $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$, pa je i zatvoren u istom prostoru. Kako je $J[B_E] \subset B_{E^{**}}$, sledi da je $B_{E^{**}} = \overline{J[B_E]}^{\sigma(E^{**},E^*)}$. Dokaz da je $J[E]$ gust u E^{**} sledi na osnovu prethodno dokazanog i činjenice da za $\xi \in E^{**}$, $\xi \neq 0$ važi da je $\xi/\|\xi\|_{E^{**}} \in B_{E^{**}}$. □

Napomena 3.5.6. Skup $J[B_E] \subset B_{E^{**}}$ je zatvoren u prostoru $(E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}})$. Zaista, ako $(\xi_n) = (J(x_n))$ jako konvergira ka ξ ($\|\xi_n - \xi\|_{E^{**}} \to 0$), onda je (x_n) Košijev niz u B_E (jer je J izometrija), pa postoji $x \in B_E$ da $x_n \to x$. Kako je J neprekidno preslikavanje, sledi da je $\xi = J(x)$. Prema tome, $J[B_E]$ je gust u $B_{E^{**}}$, u prostoru $(E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}})$, ako i samo ako je prostor $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan.

Sada možemo završiti dokaz Teoreme 3.5.3.

Dokaz. (*Teorema 3.5.3* ($\Leftarrow$))
Neka je B_E kompaktan skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Za svako $f \in E^*$ je definisano preslikavanje $\psi_f \circ J : E \to \mathbb{R}$, za svako $x \in E$ važi

$$(\psi_f \circ J)(x) = \psi_f(\varphi_x) = \langle f, x\rangle = \varphi_f(x).$$

[7] Herman Heine Goldstine (1913-2004), američki matematičar

Iz Propozicije 3.2.3 sledi da je preslikavanje $J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ neprekidno. Kako je prema pretpostavci B_E kompaktan skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$, na osnovu Teoreme 1.2.44 sledi da je $J[B_E]$ kompaktan, pa i zatvoren skup u prostoru $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$. Pored toga, prema Lemi 3.5.5, važi $\overline{J[B_E]}^{\sigma(E^{**},E^*)} = B_{E^{**}}$. Sada možemo da zaključimo da je $J[B_E] = B_{E^{**}}$ i $J[E] = E^{**}$. Dakle, prostor $(E, \|\cdot\|)$ je refleksivan. □

U nastavku navodimo još neke karakteristike refleksivnih Banahovih prostora.

Propozicija 3.5.7. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan Banahov prostor i $M \subset E$ zatvoren potprostor prostora E. Tada je prostor $(M, \|\cdot\|)$ refleksivan (sa $\|\cdot\|$ je označena i restrikcija norme $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ na potprostor M).*

Dokaz. Skup M je zatvoren, pa je prema Teoremi 1.3.16 i prostor $(M, \|\cdot\|)$ Banahov. Na M možemo da posmatramo topologiju indukovanu topologijom $\sigma(E, E^*)$ (obeleženu sa $\sigma(E, E^*)_M$) i topologiju $\sigma(M, M^*)$. Prema Teoremi 1.4.17 svaka neprekidna linearna funkcionela $g : M \to \mathbb{R}$ je restrikcija na M neke neprekidne linearne funkcionele $f : E \to \mathbb{R}$. Prema tome važi da je $\sigma(E, E^*)_M = \sigma(M, M^*)$. Na osnovu Teoreme 3.5.3 skup B_E je kompaktan u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Skup M je potprostor, pa je i konveksan skup. Prema tome, M je zatvoren i konveksan skup u prostoru $(E, \|\cdot\|)$, odakle na osnovu Teoreme 3.3.11 sledi da je zatvoren i u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Važi $B_M = M \cap B_E \subset B_E$, pa je B_M zatvoren podskup kompaktnog skupa u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Kompaktnost je nasledna prema zatvorenim podskupovima, pa možemo da zaključimo da je B_M kompaktan skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. Stoga je B_M kompaktan skup u prostoru $(M, \sigma(M, M^*))$, pa je na osnovu Teoreme 3.5.3 prostor $(M, \|\cdot\|)$ refleksivan. □

Posledica 3.5.8. *Banahov prostor $(E, \|\cdot\|)$ je refleksivan ako i samo je njegov dualni prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ refleksivan.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan prostor. Tada je $J[E] = E^{**}$. Pokazaćemo da je $\widetilde{J} : E^* \to (E^{**})^* = E^{***}$,

$$\widetilde{J}(f) = \psi_f, \ f \in E^*,$$

sirjektivno preslikavanje.
Neka je $\eta \in E^{***}$. Preslikavanje $\eta \circ J : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ je neprekidna linearna funkcionela na E, to jest $\eta \circ J \in E^*$. Za svako $x \in E$ i $\varphi_x \in E^{**}$ važi

$$\eta(\varphi_x) = \eta(J(x)) = \langle \eta \circ J, x \rangle = \langle \varphi_x, \eta \circ J \rangle = \varphi_x(\eta \circ J) = \psi_{\eta \circ J}(\varphi_x).$$

Dakle, $\widetilde{J}(\eta \circ J) = \eta$, pa je $\widetilde{J}$ sirjekcija, čime smo dokazali da je Banahov prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ refleksivan.
($\Leftarrow$) Neka je $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ refleksivan prostor. Na osnovu prethodno dokazanog smera sledi da je i prostor $(E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}})$ refleksivan. Skup $J[E]$ je potprostor prostora E^{**} i zatvoren skup u prostoru $(E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}})$. Prema Propoziciji 3.5.7 prostor $(J[E], \|\cdot\|_{E^{**}})$ je refleksivan (pri čemu posmatramo restrikciju norme $\|\cdot\|_{E^{**}}$ na $J[E]$). Kako je J linearna izometrija, sledi da je i prostor $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan[8]. □

[8] Neka su $(E, \|\cdot\|_E)$ i $(F, \|\cdot\|_F)$ Banahovi prostori i $T : E \to F$ linearna sirjektivna izometrija. Prostor $(E, \|\cdot\|_E)$ je refleksivan ako i samo ako je prostor $(F, \|\cdot\|_F)$ refleksivan.

Dokazi naredna dva tvrđenja se nalaze u [3].

Posledica 3.5.9. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan Banahov prostor i $K \subset E$ ograničen, zatvoren i konveksan skup. Tada je K kompaktan skup u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.*

Naredna posledica je razlog zašto su refleksivni prostori i konveksne funkcije važni za mnoge probleme varijacionog računa i optimizacije.

Posledica 3.5.10. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan Banahov prostor i $A \subset E$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Neka je $\varphi : A \to (-\infty, +\infty]$ konveksna, odozdo poluneprekidna funkcija, $\varphi \not\equiv +\infty$, takva da važi*

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \varphi(x) = +\infty \text{ (bez ove pretpostavke ako je } A \text{ ograničen skup).} \tag{3.5}$$

Tada funkcija φ dostiže minimalnu vrednost, to jest postoji $x_0 \in A$, tako da je

$$\varphi(x_0) = \min_{x \in A} \varphi(x).$$

U nastavku razmatramo tvrđenja vezana za separabilne prostore.

3.6 Separabilni prostori

Propozicija 3.6.1. *Neka je (X, d) separabilan metrički prostor i $Y \subset X$ proizvoljan podskup. Tada je (Y, d_Y) takođe separabilan metrički prostor (metrika d_Y je restrikcija metrike d na $Y \times Y$).*

Dokaz. Neka je skup $\{u_n \in X : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ prebrojiv i gust u X. Kolekcija

$$\mathcal{B} = \left\{ L(u_n, \frac{1}{m}) : m,\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

gde je

$$L(u_n, \frac{1}{m}) = \left\{ x \in X : d(x, u_n) < \frac{1}{m} \right\},\ m,\, n \in \mathbb{N},$$

je baza topologije indukovane metrikom d. Ako je $L(u_n, \frac{1}{m}) \cap Y \neq \emptyset$ izaberimo proizvoljno $a_{m,n} \in L(u_n, \frac{1}{m}) \cap Y$. Skup $\{a_{m,n} : m,\, n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojiv i gust u Y. □

Teorema 3.6.2. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i neka je prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ separabilan. Tada je i $(E, \|\cdot\|)$ separabilan prostor.*

Dokaz. Neka je $\{f_n \in E^* : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv, gust skup u E^*. Kako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\|f_n\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \langle f_n, x \rangle,$$

sledi da postoji $x_n \in E$, tako da je

$$\|x_n\| = 1 \text{ i } \langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{E^*}.$$

Označimo sa L_0 vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$ generisan sa $\{x_n \in E : n \in \mathbb{N}\}$, to jest

$$L_0 = \left\{\sum_{i \in J} q_i x_i : J \subset \mathbb{N} \wedge |J| < \aleph_0 \wedge (\forall i \in J)(q_i \in \mathbb{Q})\right\}.$$

Neka je za svako $n \in \mathbb{N}$ sa Λ_n označen vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$, generisan sa $\{x_k \in E : 1 \leq k \leq n\}$. Λ_n je prebrojiv skup za svako $n \in \mathbb{N}$. Važi da je

$$L_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n,$$

pa je L_0 prebrojiv skup. Označimo sa L vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ generisan sa $\{x_n \in E : n \in \mathbb{N}\}$. Neka je $\alpha_1 x_{i_1} + \cdots + \alpha_k x_{i_k} \in L$ proizvoljan element, gde je $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ i $x_{i_1}, ..., x_{i_k} \in E$. Tada postoje nizovi $(q_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq k$, takvi da

$$q_n^i \to \alpha_i, \ 1 \leq i \leq k.$$

Sledi da

$$q_n^1 x_{i_1} + \cdots q_n^k x_{i_k} \to \alpha_1 x_{i_1} + \cdots + \alpha_k x_{i_k}.$$

Dakle $\overline{L_0}^L = L$, gde je $\overline{L_0}^L$ zatvorenje skupa L_0 u prostoru $(L, \|\cdot\|)$. Važi $\overline{\overline{L_0}^L} \subset \overline{\overline{L_0}} = \overline{L_0}$ i $\overline{L_0} \subset \overline{\overline{L_0}^L}$, pa je $\overline{L_0} = \overline{\overline{L_0}^L} = \overline{L}$.

Dokazaćemo da je L gust u E. Neka je $f \in E^*$ neprekidna linearna fukcionela takva da je $f(x) = 0$, za sve $x \in L$ (pa i za sve $x \in \overline{L}$). Za dato $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$, tako da je $\|f - f_N\|_{E^*} < \varepsilon$. Tada važi:

$$\frac{1}{2}\|f_N\|_{E^*} \leq \langle f_N, x_N\rangle = \langle f_N - f, x_N\rangle < \varepsilon,$$

odakle sledi

$$\|f\|_{E^*} \leq \|f - f_N\|_{E^*} + \|f_N\|_{E^*} < 3\varepsilon.$$

Nejednakost važi za proizvoljno $\varepsilon > 0$, pa sledi da je $f \equiv 0$. Na osnovu Propozicije 2.3.50 možemo da zaključimo da je $\overline{L} = \overline{L_0} = E$, pa je L_0 prebrojiv, gust skup u E i $(E, \|\cdot\|)$ je separabilan prostor. □

Na osnovu Posledice 3.5.8 i Teoreme 3.6.2 možemo da dokažemo sledeću posledicu.

Posledica 3.6.3. *Banahov prostor $(E, \|\cdot\|)$ je refleksivan i separabilan ako i samo ako je prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ refleksivan i separabilan.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ova implikacija važi na osnovu Posledice 3.5.8 i Teoreme 3.6.2.
($\Rightarrow$) Ako je prostor $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan i separabilan, onda je i prostor $(E^{**}, \|\cdot\|_{E^{**}})$ refleksivan i separabilan, jer je J sirjektivna linearna izometrija i $J[E] = E^{**}$. Prema prethodnoj implikaciji je i prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ refleksivan i separabilan. □

Osobina separabilnosti Banahovih prostora je vezana za osobinu metrizabilnosti slabih topologija. Stoga dokazujemo narednu teoremu.

Teorema 3.6.4. *Neka je* $(E, \|\cdot\|)$ *Banahov prostor i*

$$B_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\|_{E^*} \leq 1\}.$$

Prostor $(E, \|\cdot\|)$ *je separabilan ako i samo ako je prostor* $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$[9] *metrizabilan.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $(E, \|\cdot\|)$ separabilan prostor. Neka je $\{x_n \in B_E : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv, gust skup u B_E. Definišemo preslikavanje $\big[\cdot\big] : E^* \to [0, \infty)$,

$$\big[f\big] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, x_n \rangle|, \ \ f \in E^*.$$

Jednostavno se proverava da je ovako definisano preslikavanje norma na E^*. Neka je $d : E \times E \to [0, \infty)$ odgovarajuća metrika,

$$d(f, g) = \big[f - g\big], \ \ f, g \in E^*.$$

Dokazaćemo da je topologija $\mathcal{O}_d$, indukovana metrikom d (preciznije, metrikom koja je restrikcija metrike d na $B_{E^*} \times B_{E^*}$) na B_{E^*}, upravo topologija $\sigma(E^*, E)_{B_{E^*}}$.
(1) Neka je $f_0 \in B_{E^*}$ i V okolina tačke f_0 u prostoru $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$. Prema Propoziciji 3.4.4 možemo da pretpostavimo da je

$$V = \{f \in B_{E^*} : |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \varepsilon, \text{ za sve } i = 1, ..., k\},$$

gde je $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ i $y_1, ..., y_k \in E$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti i da je $\|y_i\| \leq 1$, za sve $i = 1, ..., k$. Skup $\{x_n \in B_E : n \in \mathbb{N}\}$ je gust u B_E, pa za svako $1 \leq i \leq k$ postoji $n_i \in \mathbb{N}$, tako da je

$$\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.6}$$

Neka je broj $r > 0$ takav da je

$$2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za sve } 1 \leq i \leq k. \tag{3.7}$$

Neka je

$$U = \{f \in B_{E^*} : d(f, f_0) < r\},$$

okolina tačke f_0 u prostoru (B_{E^*}, d). Dokazaćemo da važi $U \subset V$. Neka je $f \in B_{E^*}$ i $d(f, f_0) < r$. Tada važi

$$\frac{1}{2^{n_i}} |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n \rangle| = \big[f - f_0\big] < r. \tag{3.8}$$

Na osnovu nejednakosti (3.6), (3.7) i (3.8) sledi da je za svako $1 \leq i \leq k$ ispunjeno

[9] $\sigma(E^*, E)_{B_{E^*}}$ je topologija na B_{E^*} indukovana topologijom $\sigma(E^*, E)$.

$$\begin{aligned}
|\langle f - f_0, y_i\rangle| &= |\langle f - f_0, y_i - x_{n_i}\rangle + \langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| \\
&\leq (\|f\|_{E^*} + \|f_0\|_{E^*})\|y_i - x_{n_i}\| + |\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| \\
&\leq 2\frac{\varepsilon}{4} + 2^{n_i} r \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Prema tome, sledi da je $f \in V$, pa je $U \subset V$.

(2) Neka je $f_0 \in B_{E^*}$ i $r > 0$. Tražimo okolinu V tačke f_0 u prostoru $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$, takvu da važi

$$V \subset U = \{f \in B_{E^*} : d(f, f_0) < r\}.$$

Neka je $\varepsilon = \dfrac{r}{2}$ i broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\dfrac{1}{2^{k-1}} < \dfrac{r}{2}$. Dokažimo da tada za okolinu V tačke f_0 u prostoru $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$,

$$V = \{f \in B_{E^*} : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, \text{ za sve } 1 \leq i \leq k\},$$

važi $V \subset U$. Ako je $f \in V$, onda je

$$\begin{aligned}
d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}|\langle f - f_0, x_n\rangle| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f - f_0, x_n\rangle| \\
&< \varepsilon + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\|f\|_{E^*} + \|f_0\|_{E^*})\|x_n\| \\
&\leq \varepsilon + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} \\
&< \frac{r}{2} + \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

Sada iz (1) i (2) sledi da je $\sigma(E^*, E)_{B_{E^*}} = \mathcal{O}_d$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je prostor $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$ metrizabilan. Neka je d metrika koja indukuje navedenu topologiju. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ i okolinu nule

$$U_n = \left\{ f \in B_{E^*} : d(f, 0) < \frac{1}{n} \right\}$$

postoji okolina nule V_n u prostoru $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$, takva da je $V_n \subset U_n$. Prema Propoziciji 3.4.4 možemo da pretpostavimo da je

$$V_n = \{f \in B_{E^*} : |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_n, \text{ za sve } x \in \Phi_n\},$$

gde je $\varepsilon_n > 0$ i $\Phi_n \subset E$, $|\Phi_n| < \aleph_0$. Neka je $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, prebrojiv podskup skupa E. Tvrdimo da je skup $L(D)$[10] gust u E. Neka je $f \in E^*$ neprekidna linearna funkcionela,

[10] Skup $L(D)$ je lineal skupa D (potprostor prostora E, generisan elementima skupa D).

takva da je $f(x) = 0$, za sve $x \in D$ (pa i za sve $x \in \overline{L(D)}$). Dokazaćemo da je $f \equiv 0$. Pretpostavimo suprotno, da je $f \not\equiv 0$. Tada važi da je $\frac{f}{\|f\|_{E^*}} \in V_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Sledi da je $\frac{f}{\|f\|_{E^*}} \in U_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, što je nemoguće. Prema Propoziciji 2.3.50 je skup $L(D)$ gust u E. Neka je $L_0(D)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$ generisan elementima skupa D. Prema dokazu Teoreme 3.6.2 važi da je $\overline{L_0(D)} = \overline{L(D)}$. Dakle, skup $L_0(D)$ je prebrojiv i gust u E, pa je $(E, \|\cdot\|)$ separabilan prostor. □

Važi i teorema "dualna" Teoremi 3.6.4, koju nećemo dokazati.

Teorema 3.6.5. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor. Prostor $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ je separabilan ako i samo ako je prostor $(B_E, \sigma(E, E^*)_{B_E})$*[11] *metrizabilan.*

Dokaz. Dokaz implikacije $(\Rightarrow)$ se izvodi kao dokaz iste implikacije u Teoremi 3.6.4, sa zamenjenim ulogama E i E^*. □

Posledica 3.6.6. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ separabilan Banahov prostor i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen niz u E^*. Tada postoji podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti možemo da pretpostavimo da je $\|f_n\|_{E^*} \leq 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Prema Teoremi 3.4.10 skup B_{E^*} je kompaktan u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$, to jest $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E)_{B_{E^*}})$ je kompaktan prostor. Na osnovu Teoreme 3.6.4 taj prostor je i metrizabilan. Sada je posledica dokazana, jer prema Teoremi 1.3.12 svaki niz u kompaktnom metričkom prostoru ima konvergentan podniz. □

Propozicija 3.6.7. *Neka je E beskonačno dimenzionalan vektorski prostor. Tada prostor $(E, \sigma(E, E^*))$ nije metrizabilan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $d : E \times E \to [0, \infty)$ metrika koja indukuje topologiju $\sigma(E, E^*)$ na E, odnosno $\sigma(E, E^*) = \mathcal{O}_d$. Tada za svako $k \in \mathbb{N}$ i okolinu nule u prostoru (E, d),

$$L_k = \left\{ x \in E : d(x, 0) < \frac{1}{k} \right\},$$

postoji okolina nule V_k u istom prostoru, za koju prema Propoziciji 3.3.4 možemo da pretpostavimo da je oblika

$$V_k = \{x \in E : |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_k, \text{ za sve } f \in F_k\},$$

gde je $\varepsilon_k > 0$ i $F_k \subset E^*$, $|F_k| < \aleph_0$, takva da je $V_k \subset L_k$.
Neka je $F = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$ i $g \in E^*$. Posmatrajmo okolinu nule V u prostoru (E, d),

$$V = \{x \in E : |\langle g, x\rangle| < 1\}.$$

Postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $V_{k_0} \subset L_{k_0} \subset V$.
Neka je $x \in \bigcap\limits_{f\in F_{k_0}} \mathrm{Ker}(f)$. Tada za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i svako $f \in F_{k_0}$ važi

$$|\langle f, \lambda x\rangle| = 0 < \varepsilon_{k_0},$$

[11] Topologija $\sigma(E, E^*)_{B_E}$ je topologija indukovana na B_E topologijom $\sigma(E, E^*)$.

odakle sledi da je $\lambda x \in V_{k_0} \subset V$, pa je

$$|\lambda||\langle g, x\rangle| < 1, \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sledi da je $\langle g, x\rangle = 0$, pa je $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Dakle, $\bigcap\limits_{f \in F_{k_0}} \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Prema Lemi 3.1.13 sledi da je $g = \sum\limits_{f \in F_{k_0}} \lambda_f f$, gde je $\lambda_f \in \mathbb{R}$, za $f \in F_{k_0}$.

Možemo da zaključimo da je $E^* = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} L(F_k)$, gde je $L(F_k)$ lineal skupa F_k definisan u Odeljku 1.4. Za svako $k \in \mathbb{N}$ prostor $L(F_k)$ je konačno dimenzionalan, pa je na osnovu Teoreme 1.4.5 zatvoren skup u prostoru $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$. Prema Teoremi 1.3.17 sledi da postoji $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$, tako da važi

$$\left(L(F_{\widetilde{k}})\right)^{\circ} \neq \emptyset.$$

Dalje sledi da postoje $\widetilde{f} \in L(F_{\widetilde{k}})$ i $r > 0$, tako da je

$$L(\widetilde{f}, r) = \{f \in E : \|f - \widetilde{f}\|_{E^*} < r\} \subset L(F_{\widetilde{k}}).$$

Tada za proizvoljno $f \in E^*$, $f \not\equiv 0$ važi

$$\left\|\widetilde{f} + \frac{r}{2\|f\|_{E^*}} f - \widetilde{f}\right\| = \frac{r}{2\|f\|_{E^*}} \|f\|_{E^*} < r.$$

Dakle, $\widetilde{f} + \frac{r}{2\|f\|_{E^*}} f \in L(\widetilde{f}, r) \subset L(F_{\widetilde{k}})$, za svako $f \in E^*$. Kako je $L(F_{\widetilde{k}})$ potprostor prostora E^*, sledi da je

$$f = \frac{2\|f\|_{E^*}}{r}\left(\widetilde{f} + \frac{r}{2\|f\|_{E^*}} f - \widetilde{f}\right) \in L(F_{\widetilde{k}}).$$

Prema tome je $E^* = L(F_{\widetilde{k}})$, pa je E^* konačno dimenzionalan. Tada važi da je $\dim(E^*) = \dim(E^{**})$, pa je i E^{**} konačno dimenzionalan. Na ovaj način smo došli do kontradikcije, jer je preslikavanje $J : E \to E^{**}$ injekcija, a prostor E beskonačno dimenzionalan. Sada možemo da zaključimo da prostor $(E, \sigma(E, E^*))$ nije metrizabilan, što je i trebalo dokazati. $\square$

Na osnovu tvrđenja o separabilnosti i metrizabilnosti možemo da dokažemo narednu teoremu, koju smo izostavili u delu o refleksivnim prostorima.

Teorema 3.6.8. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan Banahov prostor i $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen niz u E. Tada postoji podniz $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ koji slabo konvergira u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$.*

Dokaz. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $\|x_n\| \leq 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je M_0 vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$ generisan sa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ i M_1 vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ generisan sa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Neka je $M = \overline{M_1}$. Važi $\overline{M_0}^{M_1}$ [12]$= M_1$,

[12] $\overline{M_0}^{M_1}$ je zatvorenje skupa M_0 u prostoru $(M_1, \|\cdot\|)$, gde je $\|\cdot\|$ norma koja je restrikcija na M_1 norme prostora E.

pa je $M = \overline{M_0}$ (pogledati dokaz Teoreme 3.6.2). Prema tome je $\overline{M_0}^M = M$[13]. Skup M_0 je prebrojiv, pa je prostor $(M, \|\cdot\|)$ separabilan. Prema Propoziciji 3.5.7 on je i refleksivan (M je zatvoren potprostor prostora E, kao zatvorenje potprostora prostora E). Na osnovu Posledice 3.6.3 je i prostor $(M^*, \|\cdot\|_{M^*})$ separabilan i refleksivan. Prema Teoremi 3.5.3 je B_M kompaktan skup u prostoru $(M, \sigma(M, M^*))$, a na osnovu Teoreme 3.6.5 sledi da je prostor $(B_M, \sigma(M, M^*)_{B_M})$ metrizabilan.
Kako je $(B_M, \sigma(M, M^*)_{B_M})$ metrizabilan, kompaktan prostor, sledi da postoji podniz niza (x_n) koji slabo konvergira u prostoru $(M, \sigma(M, M^*))$. Važi da je $\sigma(M, M^*) = \sigma(E, E^*)_M$ (pogledati dokaz Propozicije 3.5.7), pa isti podniz slabo konvergira i u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$. $\square$

Važi i naredno tvrđenje, za čiji dokaz upućujemo na reference koje su za to tvrđenje date u [3].

Teorema 3.6.9. *Neka je $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i neka svaki ograničen niz u E ima slabo konvergentan podniz. Tada je prostor $(E, \|\cdot\|)$ refleksivan.*

[13] $\overline{M_0}^M$ je zatvorenje skupa M_0 u prostoru $(M, \|\cdot\|)$, gde je $\|\cdot\|$ norma koja je restrikcija na M norme prostora E.

Poglavlje 4

L^p prostori i skalarni zakoni održanja

4.1 Uvodne napomene - mera i integral

Definicija 4.1.1. Neka je $X \neq \emptyset$. Familiju skupova $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ sa osobinama

1. $X \in \mathcal{M}$
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$
3. $A_n \in \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$,

nazivamo **$\boldsymbol{\sigma}$-algebra** na X. Par $(X, \mathcal{M})$ nazivamo prostor sa σ-algebrom. Elementi σ-algebre $\mathcal{M}$ su **merljivi skupovi**.

Definicija 4.1.2. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom. **Mera** na $\mathcal{M}$ je funkcija $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ za koju važi:

Ako je $\{A_i \in \mathcal{M} : i \in \mathbb{N}\}$ familija disjunktnih skupova, onda je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma \text{ aditivnost}).$$

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ nazivamo **merljiv prostor** ili **prostor sa merom**. Skup $A \in \mathcal{M}$ za koji je $\mu(A) = 0$ nazivamo **skup mere nula**.

Mera μ je **$\boldsymbol{\sigma}$-konačna** ako je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathcal{M}$, $\mu(E_i) < \infty$, za svako $i \in \mathbb{N}$.

Definicija 4.1.3. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom. Kažemo da je mera μ na $\mathcal{M}$ **kompletna**, to jest da je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa kompletnom merom, ako je svaki podskup merljivog skupa mere nula takođe merljiv skup. Drugačije zapisano,

$$B \subset A,\ A \in \mathcal{M},\ \mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{M}.$$

Za prostor sa (nekompletnom) merom $(X, \mathcal{M}, \mu)$ postoji najmanji prostor sa kompletnom merom koji ga sadrži. Taj prostor nazivamo **kompletiranje od $\mathcal{M}$ u odnosu na meru μ**.

Značaj kompletnih mera je u tome što se u teoriji mera tvrđenja često formulišu da važe za **skoro svako (s.s)** $x \in X$, a ne za svako $x \in X$. Ako je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ proizvoljan prostor sa merom, kažemo da neko tvrđenje važi za skoro svako $x \in X$ ako postoji skup $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, tako da tvrđenje važi za svako $x \in (X \setminus N)$. U tom smislu možemo, na primer, definisati jednakost skoro svuda ili konvergenciju skoro svuda.

Definicija 4.1.4. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom i (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f : X \to Y$ (ili $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \tau)$) je **merljiva** ako i samo ako je $f^{-1}[\omega] \in \mathcal{M}$, za svako $\omega \in \tau$.

Za detaljne sadržaje o prethodno navedenim i drugim pojmovima i tvrđenjima teorije mera upućujemo na knjige [7] i [16]. U navedenim knjigama su predstavljene konstrukcija, definicija i osobine **integrala merljive funkcije**, koje podrazumevamo u nastavku rada.

Na skupovima $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ podrazumevamo **Lebegove σ-algebre** i **Lebegove mere**, koje su σ-konačne i kompletne mere. Detaljno o njihovim konstrukcijama i osobinama čitalac takođe može da pronađe u [7] i [16].

Navodimo teoremu Fubinija, koju ćemo koristiti u nastavku, a čiji se dokaz nalazi u navedenim knjigama [7] i [16].

Teorema 4.1.5. *(Fubini[1]) Neka su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ prostori sa σ-algebrama i σ-konačnim merama, $Z = X \times Y$ i neka je π proizvod mera na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Ako je $F : Z \to \mathbb{R}$ integrabilna u odnosu na π, onda su funkcije sa vrednostima u $\overline{\mathbb{R}}$[2]*

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu, \ x \in X \quad i \quad g(y) = \int_X F^y d\mu, \ y \in Y,$$

merljive, imaju konačne integrale i važi

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu,$$

to jest važi

$$\int_X \left[\int_Y F_x d\nu \right] d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left[\int_X F^y d\mu \right] d\nu.$$

4.2 L^p prostori

U ovom odeljku upućujemo na [3], [7] i [16].

Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa σ-konačnom, kompletnom merom μ, što u nastavku podrazumevamo.

Sa $L^1(\mu)$ obeležavamo skup svih realnih merljivih funkcija, $f : X \to \mathbb{R}$, za koje važi

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

[1] Guido Fubini (1879-1943), italijanski matematičar

[2] $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}; \quad F_x(y) = F(x, y), \ y \in Y; \quad F^y(x) = F(x, y), \ x \in X$

Na skupu $L^1(\mu)$ možemo uvesti relaciju ekvivalencije $\sim$: Za $f, g \in L^1(\mu)$ je

$$f \sim g \text{ ako i samo ako } f = g \text{ s.s.}$$

Tada možemo definisati i klase ekvivalencije te relacije. Za $f \in L^1(\mu)$ je

$$\big[f\big]_\sim = \{g \in L^1(\mu) : f = g \text{ s.s.}\}.$$

Odgovarajući faktor prostor obeležavamo sa $L^1(X)$. Na njemu je definisana vektorska struktura, za $\big[f\big]_\sim, \big[g\big]_\sim \in L^1(X)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$\big[f+g\big]_\sim = \big[f\big]_\sim + \big[g\big]_\sim, \quad \big[\lambda f\big]_\sim = \lambda\big[f\big]_\sim,$$

gde podrazumevamo uobičajene operacije sabiranja funkcija i množenja funkcije realnim brojem. Preslikavanje $\|\cdot\|_1 : L^1(X) \to [0, \infty)$,

$$\big\|\big[f\big]_\sim\big\|_1 = \int_X |f| d\mu, \;\; \big[f\big]_\sim \in L^1(X),$$

je dobro definisano, jer klasu relacije ekvivalencije čine funkcije jednake skoro svuda. Elemenat $\big[f\big]_\sim$ možemo označavati sa f, vodeći računa o tome da se radi o klasi funkcija jednakih skoro svuda (identifikovane su sve funkcije jednake skoro svuda). U tom kontekstu faktor prostor možemo identifikovati sa početnim prostorom $L^1(\mu)$ i zvati ga prostor Lebeg-integrabilnih funkcija (u kom su prethodno identifikovane sve funkcije jednake skoro svuda).

Uz prethodno navedene pretpostavke i uzimajući u obzir identifikaciju skoro svuda jednakih funkcija (na način koji je opisan za $L^1(\mu)$) dajemo naredne definicije.

Definicija 4.2.1. Za $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, prostor $L^p(X)$ je skup realnih merljivih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ za koje važi

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

i u kojem identifikujemo funkcije jednake skoro svuda. Drugačije zapisano,

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ je merljiva i } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Definicija 4.2.2. Prostor esencijalno ograničenih funkcija, u oznaci $L^\infty(X)$, je skup realnih merljivih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ za koje važi da postoje $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ i $C > 0$, tako da je

$$|f(x)| \leq C, \text{ za sve } x \in (X \setminus A)$$

i u kojem identifikujemo funkcije jednake skoro svuda. Drugačije zapisano,

$$L^\infty(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ je merljiva,} \\ \text{postoje } C > 0 \text{ i } A \in \mathcal{M}, \; \mu(A) = 0, \text{ tako da je} \\ |f(x)| \leq C, \text{ za sve } x \in (X \setminus A) \end{array} \right\}.$$

Sa uobičajenim operacijama sabiranja funkcija i množenja funkcije realnim brojem $L^p(X)$ je realan vektorski prostor, za svako $1 \leq p \leq \infty$. U narednim tvrđenjima predstavićemo i norme na ovim prostorima.

Lema 4.2.3. *Neka je $1 \leq p < \infty$. Preslikavanje $\|\cdot\|_p : L^p(X) \to [0, \infty)$,*

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}, \ f \in L^p(X),$$

je norma na $L^p(X)$.

Lema 4.2.4. *Preslikavanje $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X) \to [0, \infty)$,*

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}, \ f \in L^\infty(X),$$

je norma na $L^\infty(X)$.

Teorema 4.2.5. *Za svako $1 \leq p \leq \infty$ prostor $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ je Banahov.*

Teorema 4.2.6. *Za svako $1 < p < \infty$ Banahov prostor $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ je refleksivan.*

Napomena 4.2.7. Prostori $(L^1(X), \|\cdot\|_1)$ i $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ nisu refleksivni, osim u trivijalnom slučaju, kada je X konačan skup.

Teorema 4.2.8. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za svako $1 \leq p < \infty$ prostor $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ je separabilan.*

Definicija 4.2.9. Neka je $1 < p < \infty$. Ako je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

onda p' nazivamo **konjugovani eksponent** eksponenta p. Za $p = \infty$ ($p = 1$) konjugovani eksponent je $p' = 1$ ($p' = \infty$).

Teorema 4.2.10 (Helderova nejednakost[3])**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^{p'}(\Omega)$. Tada je $fg \in L^1(\Omega)$ i važi*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{4.1}$$

Naredna teorema opisuje neprekidne linearne funkcionele na prostorima $L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 4.2.11 (Risova[4] teorema o reprezentaciji)**.**

1. *Neka je $1 < p < \infty$ i $\phi \in (L^p(X))^*$. Tada postoji jedinstvena funkcija $u \in L^{p'}(X)$, tako da važi*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_X u f d\mu, \ \text{za svako } f \in L^p(X).$$

Štaviše, $\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p(X))^*}$.

[3]Otto Ludwig Hölder (1859-1937), nemački matematičar
[4]Frigyes Riesz (1880-1956), mađarski matematičar

2. *Neka je* $\phi \in (L^1(X))^*$. *Tada postoji jedinstvena funkcija* $u \in L^\infty(X)$, *tako da važi*

$$\langle \phi, f\rangle = \int_X uf d\mu, \quad \textit{za svako } f \in L^1(X).$$

Štaviše, $\|u\|_\infty = \|\phi\|_{(L^1(X))^*}$.

Napomena 4.2.12. Zbog identifikacije skoro svuda jednakih funkcija, funkcija u iz prethodne teoreme je jedinstvena do na skup mere nula.

Teorema 4.2.11 nam daje odgovor na to kako mogu biti predstavljene neprekidne linearne funkcionele definisane na prostorima $L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$. Linearna sirjektivna izometrija $\phi \mapsto u$ nam dozvoljava da "apstraktan" prostor $(L^p(X))^*$ identifikujemo sa prostorom $L^{p'}(X)$, $1 \leq p < \infty$.

Na prostoru $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$ je definisana slaba topologija $\sigma(L^p(X), (L^p(X))^*)$ (na način koji je predstavljen u Odeljku 3.3). Takođe, na prostoru $(L^p(X))^*$ je definisana slaba-* topologija $\sigma\big((L^p(X))^*, L^p(X)\big)$, $1 \leq p \leq \infty$ (na način koji je predstavljen u Odeljku 3.4).

Na osnovu Risove teoreme o reprezentaciji 4.2.11 i Propozicija 3.3.7 i 3.4.6 možemo da definišemo slabu konvergenciju niza u prostorima $L^p(X)$ $(1 \leq p < \infty)$ i slabu-* konvergenciju niza u prostoru $L^\infty(X)$.

Definicija 4.2.13. Neka je $1 \leq p < \infty$, (f_n) niz u $L^p(X)$ i $f \in L^p(X)$.

Niz (f_n) slabo konvergira ka f u $L^p(X)$ (označavamo: $f_n \rightharpoonup f$ u $L^p(X)$)

ako i samo ako

$$\int_X f_n g\, d\mu \to \int_X fg\, d\mu, \text{ za svako } g \in L^{p'}(X).$$

Na osnovu identifikacije prostora $(L^1(X))^*$ sa prostorom $L^\infty(X)$ definišemo slabu-* konvergenciju u $L^\infty(X)$.

Definicija 4.2.14. Neka je (f_n) niz u $L^\infty(X)$ i $f \in L^\infty(X)$.

Niz (f_n) slabo-* konvergira ka f u $L^\infty(X)$ (označavamo: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ u $L^\infty(X)$)

ako i samo ako

$$\int_X f_n g\, d\mu \to \int_X fg\, d\mu, \text{ za svako } g \in L^1(X).$$

Za slabu i slabu-* konvergenciju nizova korisna je i naredna lema, koju navodimo u uopštenoj formi, za proizvoljan Banahov prostor. Dokaz leme se nalazi u [15] (Lema 8.16).

Lema 4.2.15. *Neka je* $(E, \|\cdot\|)$ *Banahov prostor,* (x_n) *ograničen niz u* E, $x \in E$, (f_n) *ograničen niz u* E^* *i* $f \in E^*$.

(i) *Ako je* $\widetilde{D} \subset E^*$ *i ako je* $L(\widetilde{D})$[5] *gust u* E^*, *onda važi:* $x_n \rightharpoonup x$ *ako i samo ako* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, *za svako* $f \in \widetilde{D}$.

[5]Skup $L(\widetilde{D})$ je lineal skupa $\widetilde{D}$.

(ii) Ako je $D \subset E$ i ako je $L(D)$ gust u E onda važi: $f_n \xrightarrow{*} f$ ako i samo ako $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, za svako $x \in D$.

U nastavku rada koristićemo sledeće oznake.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup.

- Sa $\mathcal{C}(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih realnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Sa $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ označavamo prostor k-puta neprekidno diferencijabilnih[6]realnih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Sa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ označavamo prostor glatkih realnih funkcija na Ω, odnosno $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^k(\Omega)$.
- Sa $\mathcal{C}_c(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih realnih funkcija sa kompaktnim nosačem.
- Sa $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ označavamo prostor glatkih realnih funkcija na Ω, koje imaju kompaktan nosač, to jest $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$.
- Sa $\mathcal{C}_0(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih realnih funkcija koje konvergiraju ka nuli u beskonačnosti.

Za primenu Leme 4.2.15, u slučaju slabe kovergenicije nizova u $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, korisna je sledeća propozicija. Njen dokaz se nalazi u [3] (Posledica 4.23.).

Propozicija 4.2.16. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Prostor $C_c^\infty(\Omega)$ je gust u $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$.*

U skladu sa teorijom koju smo predstavili u drugom poglavlju, možemo prestaviti još neke osobine prostora $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

- Zatvorena jedinična lopta $B_{L^p(X)} = \{f \in L^p(X) : \|f\|_p \leq 1\}$ je kompaktan skup u prostoru $(L^p(X), \sigma(L^p(X), L^{p'}(X)))$, za $1 < p < \infty$ (pogledati Teoremu 3.5.3).
- Svaki ograničen niz (f_n) u prostoru $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$, ima slabo konvergentan podniz (pogledati Teoremu 3.6.8).
- Zatvorena jedinična lopta $B_{L^\infty(X)} = \{f \in L^\infty(X) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ je prema Teoremi 3.4.10 kompaktan skup u prostoru $(L^\infty(X), \sigma(L^\infty(X), L^1(X)))$.
- Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Ako je (f_n) ograničen niz u Banahovom prostoru $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, onda postoje podniz (f_{n_k}) i $f \in L^\infty(\Omega)$ tako da $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$ u $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ (pogledati Teoreme 3.6.6 i 4.2.8).

Sledi primer ograničenog niza u prostoru $L^1(\mathbb{R})$, koji nema slabo konvergentan podniz. Primer se nalazi u [12].

[6]Postoje parcijalni izvodi do reda k i neprekidni su.

Primer 4.2.17. *Neka je $\kappa_{[0,\frac{1}{n}]}$ karakteristična funkcija intervala $[0,\frac{1}{n}]$, $n\in\mathbb{N}$.*

$$\kappa_{[0,\frac{1}{n}]}(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{n}]\\ 0, & x\in(-\infty,0)\cup(\frac{1}{n},+\infty)\end{cases}$$

Posmatrajmo niz funkcija $\left(n\kappa_{[0,\frac{1}{n}]}\right)$. Za svako $n\in\mathbb{N}$ je

$$\left\|n\kappa_{[0,\frac{1}{n}]}\right\|_1=\int_{\mathbb{R}}\left|n\kappa_{(0,\frac{1}{n})}\right|dx=1, \tag{4.2}$$

pa je niz $\left(n\kappa_{[0,\frac{1}{n}]}\right)$ ograničen u prostoru $(L^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$. Ako bi dati niz imao slabo konvergentan podniz $\left(n_k\kappa_{[0,\frac{1}{n_k}]}\right)$, onda bi moralo da važi $n_k\kappa_{[0,\frac{1}{n_k}]}\rightharpoonup 0$. Međutim, to nije moguće, jer za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, datu sa $f(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$ važi da je $f\in L^\infty(\mathbb{R})$ i $\int_{\mathbb{R}}n_k\kappa_{[0,\frac{1}{n_k}]}f\,dx=1\not\to 0$. Dakle, posmatrani niz $\left(n\kappa_{[0,\frac{1}{n}]}\right)$ nema slabo konvergentan podniz.

4.3 Skalarni zakoni održanja

Prilikom rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina možemo rešavati niz aproksimativnih problema i na taj način dobiti niz aproksimativnih rešenja. Cilj je da pronađemo podniz tog niza koji konvergira ka rešenju problema, ali je često jedino moguće pokazati da je niz ograničen u odgovarajućem Banahovom prostoru. To nije dovoljno za izdvajanje konvergentnog podniza, jer je zatvorena jedinična lopta u Banahovom prostoru kompaktan skup samo ako je prostor konačno dimenzionalan. Zbog toga je korisno posmatrati slabe topologije i slabu konvergenciju niza. Pokazali smo da svaki ograničen niz u prostoru L^p, $1<p<\infty$ (L^∞) ima slabo (slabo-*) konvergentan podniz. Taj rezultat je koristan upravo za niz aproksimativnih rešenja u nekom od L^p, $1<p\leq\infty$ prostora. Primenu slabe-* konvergencije niza islustrovaćemo na primeru Košijevog problema za skalarni zakon održanja. Većina sadržaja ovog odeljka se nalazi u [13].

Razmatraćemo problem postojanja **slabog rešenja** Košijevog problema za skalarni zakon održanja. Motivaciju za uvođenje slabog rešenja ćemo ilustrovati sledećim primerom. Za detaljnija objašnjenja upućujemo na [2].

Primer 4.3.1. *(Burgersova[7] jednačina) Posmatrajmo početni problem za Burgersovu jednačinu oblika*

$$\begin{aligned}u_t+\left(\frac{u^2}{2}\right)_x&=0\\ u(x,0)&=\phi(x).\end{aligned} \tag{4.3}$$

U opštem slučaju, primenom metode karakteristika, dolazimo do zaključka da se nakon određenog vremenskog trenutka T karakteristike (oblika $\{(x,t):x=\phi(\xi)t+\xi\}$, $\xi\in$

[7] Johhanes (Jan) Martinus Burgers (1895-1981), holandski fizičar

$\mathbb{R}\}$) seku, što impicira da iza tačke preseka ne postoji klasično rešenje ove jednačine. Da bismo definisali rešenje za $t > T$ (odnosno za sve $t \geq 0$) moramo uzeti u obzir rešenja koja nisu neprekidna. Na taj način dolazimo do potrebe proširenja rešenja u ***slabom*** *smlislu i definisanja slabog rešenja jednačine.*

U nastavku dajemo definicije skalarnog zakona održanja i slabog rešenja Košijevog problema za skalarni zakon održanja.

Posmatramo jednačinu oblika

$$u_t + [f(u)]_x = 0, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \tag{4.4}$$

gde je $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data funkcija. Jednačinu ovog oblika nazivamo **skalarni zakon održanja**.

Primer 4.3.2. *(Kretanje u saobraćaju) Posmatrajmo ulicu koja počinje u tački x_1 i završava se u tački x_2. Neka $u(x,t)$ predstavlja gustinu automobila u tački x i trenutku t. Ukupan broj automobila između tačaka x_1 i x_2 je dat sa*

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx.$$

Brzina promene broja automobila između tačaka x_1 i x_2 u trenutku t je data sa

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t)),$$

gde f predstavlja brzinu protoka automobila koji ulaze u ulicu i onih koji izlaze iz ulice. Pretpostavljajući da su u i f neprekidno diferencijabilne funkcije vidimo da je

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)dx = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t)),$$

odakle sledi da je

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = \frac{f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))}{x_2 - x_1}.$$

Prema tome, kada $x_2 \to x_1$ dobijamo da važi

$$u_t = -[f(u)]_x.$$

Drugim rečima, veličina u nije ni stvorena ni uništena. Totalna količina veličine u , koja je sadržana unutar datog intervala $[x_1, x_2]$, se menja samo zahvaljujući protoku u preko graničnih tačaka.

Primer sličan prethodnom se nalazi u [2].

Pretpostavimo da je u klasično (neprekidno diferencijabilno[8]) rešenje jednačine (4.4), koje zadovoljava početni uslov

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{4.5}$$

Sa $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ označavamo prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija $f : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, koje imaju kompaktan nošac. Neka je $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.
Pomnožimo jednačinu (4.4) sa ϕ. Koristeći parcijalnu integraciju, činjenicu da ϕ ima kompaktan nosač i Fubinijevu teoremu 4.1.5 imamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Big(u_t + [f(u)]_x\Big)\phi \, dxdt \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u_t\phi \, dxdt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [f(u)]_x\phi \, dxdt \\
&= -\int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)\, dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\phi_t \, dxdt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)\phi_x \, dxdt.
\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\phi_t + f(u)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)dx = 0. \tag{4.6}$$

Na osnovu dobijene jednakosti formulišemo definiciju slabog rešenja.

Definicija 4.3.3. Neka je $1 < p \leq \infty$ i $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$. Funkcija $u \in L^p(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ je **slabo rešenje** Košijevog problema

$$\begin{aligned}
&u_t + [f(u)]_x = 0, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) \\
&u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ako je uslov (4.6) ispunjen za svako $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

Da bi se dobilo globalno slabo rešenje (uopšteno rešenje) za dati zakon održanja, uobičajeno je da se na desnu stranu jednačine (4.4) doda parabolički perturbacioni izraz. Preciznije, posmatramo jednačinu:

$$u_t + [f(u)]_x = \varepsilon u_{xx}, \;\; (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty), \tag{4.8}$$

gde je $\varepsilon > 0$ konstanta.

Pretpostavimo da je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Za fiksirano $\varepsilon > 0$, koristeći opštu teoremu za paraboličke jednačine (Teorema 1.0.2 u [13]) dobijamo glatko rešenje u^ε Košijevog problema

[8]Postoje parcijalni izvodi prvog reda i neprekidni su.

$$u_t + [f(u)]_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Dobijeno rešenje zovemo **viskozno rešenje**. Za svako viskozno rešenje je ispunjen uslov (4.6), to jest važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_\varepsilon \phi_t + f(u_\varepsilon)\phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)dx = 0. \tag{4.10}$$

Na opisani način dobijamo niz viskoznih rešenja (u_ε), $\varepsilon > 0$. Pretpostavimo da je dobijeni niz uniformno ograničen u nekom od prostora $L^p(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, $1 < p \le \infty$ (postoji konstanta $M > 0$, tako da je $\|u^\varepsilon\|_p \le M$, za sve $\varepsilon > 0$). Tada, prema Propoziciji 3.6.8 (3.6.6), postoji slabo (slabo-*) konvergentan podniz tog niza u prostoru $L^p(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, $1 < p < \infty$ ($L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$). Dakle, ako $\varepsilon \to 0$, onda

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ slabo u } L^p(\mathbb{R} \times [0,\infty)) \ (u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ slabo- * u } L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty)),$$

gde je podniz obeležen kao i niz.
Pod odgovarajućim pretpostavkama za funkciju f postoji i slabo (slabo-*) konvergentan podniz niza $(f(u^\varepsilon))$,

$$f(u^\varepsilon) \rightharpoonup l \ (f(u^\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} l), \text{ kada } \varepsilon \to 0.$$

Ako važi

$$l(x,t) = f(u(x,t)) \text{ s.s.} \tag{4.11}$$

i $\varepsilon \to 0$, onda na osnovu Definicija 4.2.13 i 4.2.14, Leme 4.2.15, Propozicije 4.2.16 i oblika uslova (4.10) možemo da zaključimo da je $u(x,t)$ slabo rešenje problema (4.7).

Postavlja se pitanje kako možemo dobiti slabu neprekidnost (4.11) nelinearne funkcije f u odnosu na niz viskoznih rešenja (u^ε). Teorija kompenzovane kompaktnosti je jedan od načina da se odgovori na ovo pitanje.

4.3.1 Kompenzovana kompaktnost

Motivaciju za naziv kompenzovana kompaktnost možemo objasniti u sledećem primeru.
Neka je niz funkcija (w^ε) slabo konvergentan,

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w$$

i neka važi bilo koja od sledećih slabih konvergencija

$$(w^\varepsilon)^2 + (w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2 + w^3 \text{ ili } (w^\varepsilon)^2 - (w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2 - w^3. \tag{4.12}$$

U opštem slučaju ne možemo da zaključimo da je niz (w^ε) "kompaktan", to jest da za neprekidnu funkciju f postoji podniz ovog niza, tako da važi slaba konvergencija

$$f(w^\varepsilon) \rightharpoonup f(w).$$

Međutim, ako važe obe konvergencije, onda (sabiranjem) možemo da zaključimo da važi slaba konvergencija

$$(w^\varepsilon)^2 \rightharpoonup w^2. \tag{4.13}$$

Prema tome, ako je funkcija f data sa $f(x) = x^2$, onda uslovi (4.12) kompenzuju nedostatak "kompaktnosti" niza (w^ε).

U nastavku ćemo definisati prostore funkcija koji su neophodni za dalji rad. Definicije i tvrđenja se nalaze u [1] i [3].

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup.

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \left| \begin{array}{l} f \text{ je merljiva,} \\ \text{za svaki kompaktan } K \subset \Omega \text{ je } \displaystyle\int_K |f| dx < \infty \end{array} \right. \right\}$$

je **prostor lokalno integrabilnih funkcija**.

Za svako $1 \leq p \leq \infty$ važi inkluzija $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Definicija 4.3.4. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $p \in \mathbb{N}_0^n$ multi-indeks i $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Kažemo da je funkcija $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ **slabi parcijalni izvod** reda $|p|$ funkcije f, ako za svako $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ važi:

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|p|} \int_\Omega f(x)(\partial^p \phi)(x)dx.$$

Pišemo $g = \partial^p f$. Ovako definisana funkcija g je jedinstvena do na skup mere nula.

Ako funkcija f ima parcijalni izvod reda $|p|$ u klašičnom smislu, onda je to izvod reda $|p|$ i u slabom (distributivnom) smislu.

Sada možemo uvesti definiciju prostora Soboljeva $H^1(\Omega)$.

Definicija 4.3.5. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. **Prostor Soboljeva**[9] $H^1(\Omega)$ je definisan sa

$$H^1(\Omega) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, .., g_n \in L^2(\Omega), \text{ tako da je} \\ \displaystyle\int_\Omega f(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx, \\ \text{za svako } \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \text{ i svako } 1 \leq i \leq n \end{array} \right. \right\}$$

Dakle, $f \in H^1(\Omega)$ ako i samo ako su funkcija f i svi njeni slabi parcijalni izvodi prvog reda elementi prostora $L^2(\Omega)$.
Za $f \in H^1(\Omega)$ obeležavamo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$, $1 \leq i \leq n$.

Prostor $H^1(\Omega)$ je snabdeven normom

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_2, \quad f \in H^1(\Omega).$$

[9] Sergei Lvovich Sobolev (1908-1989), ruski matematičar

Može se posmatrati i njoj ekvivalentna norma

$$\|f\|_{H^1} = \left(\|f\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ f \in H^1(\Omega).$$

Propozicija 4.3.6. *Prostor* $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ *je Banahov.*

Propozicija 4.3.7. *Banahov prostor* $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ *je refleksivan i separabilan.*

Definicija 4.3.8. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Prostor $H_0^1(\Omega)$ je definisan kao zatvorenje skupa $C_c^1(\Omega)$ u prostoru $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Dakle,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{H^1}.$$

Takođe važi $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1}$.

Prostor $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ je Banahov. Sa $H^{-1}(\Omega)$ označavamo dualni prostor prostora $H_0^1(\Omega)$.

Definicija 4.3.9. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Definišemo prostor

$$H_{loc}^{-1}(\Omega) := \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \varphi v \in H^{-1}(\Omega), \text{ za svako } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\},$$

gde je $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$[10] dualni prostor prostora $\mathcal{D}(\Omega)$.

Teoriju kompenzovane kompaktnosti su razvili matematičari Mura[11] i Tartar[12]. Tvrđenje od koga je ova teorija počela da se razvija je divergencija-rotor lema (div-curl lemma). Vremenom su se razvijale različite verzije ove leme. Uopštavanjem divergencija-rotor leme razvijala se teorija kompenzovane kompaktnosti. Detaljnije o razvoju različitih verzija divergencija-rotor leme i teorije kompenzovane kompaktnosti čitalac može da pronađe u [17].

Naredna teorema koju ćemo navesti je jedan od rezultata spomenutog uopštavanja divergencija-rotor leme i razvoja teorije kompenzovane kompaktnosti. Za njen dokaz upućujemo na [13] i reference koje su za nju navedene u toj knjizi, ili na [17]. U radu smo se odlučili za prikaz metode kompenzovane kompaktnosti koji je dat u [13] i pomoću naredne teoreme ćemo dalje dokazati teoremu o slaboj konvergenciji 2×2 determinanti.

Neka su fiksirani brojevi $q, n, d \in \mathbb{N}$ i neka je $a_{ijk} \in \mathbb{R}$, za $i = 1, ..., q$, $k = 1, ..., n$ i $j = 1, ..., d$. Neka je

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^d : \exists \xi \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \text{ tako da je } \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} \lambda_j \xi_k = 0, \text{ za svako } i = 1, ..., q \right\}.$$

Uz navedene oznake formulišemo teoremu.

[10] Za više detalja o prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$ pogledati [10].
[11] François Murat (rođen 1947.), francuski matematičar
[12] Luc Tartar (rođen 1946.), francuski matematičar

Teorema 4.3.10. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup, $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ niz u $\left(L^2(\Omega)\right)^d$ i neka važe sledeće pretpostavke:*

(H1) $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, ..., u_d^\varepsilon) \rightharpoonup u = (u_1, ..., u_d)$ *slabo u* $\left(L^2(\Omega)\right)^d$,

(H2) Postoji kompaktan skup K u jakoj topologiji prostora $H_{loc}^{-1}(\Omega)$, takav da za sve $i = 1, 2, ..., q$ i $\varepsilon > 0$ važi

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_k} \in K.$$

Ako je Q kvadratna forma na $\mathbb{R}^d$, takva da je $Q(\lambda) \geq 0$, za svako $\lambda \in \Lambda$ i ako važi

$$Q(u^\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} l \;\; \textit{slabo-* u} \;\; \mathcal{M}(\Omega), \;\; \textit{gde je } l \textit{ Radonova mera},$$

onda je

$$l \geq Q(u) \textit{ u distributivnom smislu.}$$

Napomena 4.3.11. Kako je Q kvadratna forma i $u_i^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, za svako $\varepsilon > 0$ i svako $i = 1, ..., d$, na osnovu Helderove nejednakosti (4.1) sledi da je $Q(u^\varepsilon) \in L^1(\Omega)$, za svako $\varepsilon > 0$.

Napomena 4.3.12. Sa $\mathcal{M}(\Omega)$ je označen prostor Radonovih mera (sa određenim dodatnim osobinama). Prostor $\mathcal{M}(\Omega)$ se može identifikovati sa dualnim prostorom prostora $\mathcal{C}_0(\Omega)$, pa u njemu možemo posmatrati slabu-* konvergenciju. Nedostatak slabe kompaktnosti u prostoru $L^1(\Omega)$, odnosno nedostatak osobine da svaki ograničeni niz u tom prostoru ima slabo konvergentan podniz, se prevazilazi ako se prostor $L^1(\Omega)$ identifikuje sa potprostorom prostora $\mathcal{M}(\Omega)$. Precizna definicija Radonovih mera i objašnjenja navedenih pojmova se nalaze u [7]. Kratka objašnjenja navedenih pojmova i načina identifikacije prostora $L^1(\Omega)$ sa potprostorom prostora Radonovih mera čitalac može da pronađe i u [3].

Posledica 4.3.13. *Neka su ispunjene sve pretpostavke iz Teoreme 4.3.10. Ako je Q kvadratna forma na $\mathbb{R}^d$, takva da je $Q(\lambda) = 0$, za svako $\lambda \in \Lambda$, onda važi konvergencija*

$$Q(u^\varepsilon) \rightharpoonup Q(u) \textit{ u distributivnom smislu.}$$

Na osnovu navedene posledice možemo dokazati teoremu o slaboj konvergenciji 2×2 determinanti.

Teorema 4.3.14 (Slaba konvergencija 2×2 determinanti)**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ otvoren i ograničen skup i $\{u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^4 : \varepsilon > 0\}$ niz merljivih funkcija, za koji važi*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \textit{slabo u} \;\; (L^2(\Omega))^4.$$

Neka je K kompaktan skup u jakoj topologiji prostora $H_{loc}^{-1}(\Omega)$, takav da za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x}, \;\; \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_4^\varepsilon}{\partial x} \in K.$$

Tada postoji podniz niza (u^ε) (označen kao i početni niz), takav da važi

$$\begin{vmatrix} u_1^\varepsilon & u_2^\varepsilon \\ u_3^\varepsilon & u_4^\varepsilon \end{vmatrix} \rightharpoonup \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{vmatrix} \textit{ u distributivnom smislu.}$$

Dokaz. Pretpostavke ove teoreme su pretpostavke iz Teoreme 4.3.10, gde je

$$n = 2,\ d = 4,\ q = 2,$$

$a_{111} = a_{122} = a_{231} = a_{242} = 1$, dok su ostali koeficijenti a_{ijk} jednaki nuli. Prema tome je

$$\Lambda = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^4 : \exists \xi \in [\mathbb{R} \times [0,\infty)] \setminus \{(0,0)\} \left(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = 0,\ \ \lambda_3\xi_1 + \lambda_4\xi_2 = 0\right)\right\}.$$

Neka je $\lambda \in \Lambda$. Tada je za neko $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [\mathbb{R} \times [0,\infty)] \setminus \{(0,0)\}$ ispunjeno

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = 0,$$

$$\lambda_3\xi_1 + \lambda_4\xi_2 = 0.$$

Ako prvu jednakost pomnožimo sa λ_4, a drugu sa $-\lambda_2$ i zatim tako dobijene jednakosti saberemo, dobijamo jednakost

$$\xi_1(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3) = 0.$$

Ako je $\xi_1 \neq 0$, onda sledi da je $\lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 = 0$. Ako je $\xi_1 = 0$, onda iz prve dve jednakosti sledi da je $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ (jer je $\xi_2 \neq 0$), pa ponovo važi $\lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 = 0$. Dakle, važi da je $\Lambda \subset \{\lambda \in \mathbb{R}^4 : \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 = 0\}$.
Ako je Q kvadratna forma na $\mathbb{R}^4$ data sa $Q(\lambda) = \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3$, onda važi da je $Q(\lambda) = 0$, za svako $\lambda \in \Lambda$. Sada je teorema dokazana na osnovu Posledice 4.3.13. $\square$

4.3.2 Košijev problem za skalarni zakon održanja

Vratimo se na Košijev problem

$$\begin{aligned} &u_t + [f(u)]_x = 0,\ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) \\ &u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Važi naredna teorema.

Teorema 4.3.15. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0,\infty)$ ograničen i otvoren skup i $\{u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}\}$ niz funkcija u $L^\infty(\Omega)$, takav da važi:*

$$w^* - \lim u^\varepsilon = u, \quad w^* - \lim f(u^\varepsilon) = v, \tag{4.15}$$

gde je $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Neka je K kompaktan skup u jakoj topologiji prostora $H^{-1}_{loc}(\Omega)$, takav da za $i = 1, 2$ i svako $\varepsilon > 0$ važi

$$[\eta_i(u^\varepsilon)]_t + [q_i(u^\varepsilon)]_x \in K, \tag{4.16}$$

gde je

$$(\eta_1(\theta), q_1(\theta)) = (\theta - k, f(\theta) - f(k)), \tag{4.17}$$

$$(\eta_2(\theta), q_2(\theta)) = (f(\theta) - f(k), \int_k^\theta (f'(s))^2 ds) \tag{4.18}$$

i k konstanta. Tada je

$$v = f(u) \text{ skoro svuda }.$$

Dokaz. Na osnovu uslova (4.16) i Teoreme 4.3.14 imamo da je

$$w^* - \lim \begin{vmatrix} \eta_1(u^\varepsilon) & q_1(u^\varepsilon) \\ \eta_2(u^\varepsilon) & q_2(u^\varepsilon) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{\eta_1(u^\varepsilon)} & \overline{\eta_2(u^\varepsilon)} \\ \overline{\eta_2(u^\varepsilon)} & \overline{q_2(u^\varepsilon)} \end{vmatrix}, \tag{4.19}$$

gde je $w^* - \lim \eta_i(u^\varepsilon) = \overline{\eta_i(u^\varepsilon)}$, $w^* - \lim q_i(u^\varepsilon) = \overline{q_i(u^\varepsilon)}$, za $i = 1, 2$. Sa $w^* - \lim$ je označena granica niza za slabu-* konvergenciju.

Važi da je

$$\begin{vmatrix} \overline{\eta_1(u^\varepsilon)} & \overline{\eta_2(u^\varepsilon)} \\ \overline{\eta_2(u^\varepsilon)} & \overline{q_2(u^\varepsilon)} \end{vmatrix} = \overline{u^\varepsilon - k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} - \Big(\overline{f(u^\varepsilon) - f(k)}\Big)^2, \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \eta_1(u^\varepsilon) & q_1(u^\varepsilon) \\ \eta_2(u^\varepsilon) & q_2(u^\varepsilon) \end{vmatrix} &= (u^\varepsilon - k) \int_k^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds - \big(f(u^\varepsilon) - f(k)\big)^2 \\ &= (u^\varepsilon - u + u - k) \left(\int_k^u (f'(s))^2 ds + \int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds \right) \\ &\quad - \big(f(u^\varepsilon) - f(u) + f(u) - f(k)\big)^2 \\ &= (u^\varepsilon - u) \int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds - \big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)^2 \\ &\quad + (u - k) \int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds + (u^\varepsilon - k) \int_k^u (f'(s))^2 ds \\ &\quad - \big(f(u) - f(k)\big)^2 - 2\big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)\big(f(u) - f(k)\big). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Na osnovu jednakosti (4.19)–(4.21) sledi da je

$$
\begin{aligned}
&\overline{u^\varepsilon - k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} - \left(\overline{f(u^\varepsilon) - f(k)}\right)^2 \\
&= \overline{u^\varepsilon - k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} - \left(\overline{f(u^\varepsilon) - f(u) + f(u) - f(k)}\right)^2 \\
&= \overline{u^\varepsilon - k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} - \left(\overline{f(u^\varepsilon) - f(u)}\right)^2 \\
&\quad -\big(f(u) - f(k)\big)^2 - 2\overline{\big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)}(f(u) - f(k)) \\
&= \overline{(u^\varepsilon - u) \int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds - \big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)^2} \\
&\quad +(u-k)\overline{\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} + \overline{u^\varepsilon - k} \int_k^u (f'(s))^2 ds \\
&\quad -\big(f(u) - f(k)\big)^2 - 2\overline{\big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)}\big(f(u) - f(k)\big).
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Važi da je

$$
\begin{aligned}
&\overline{u^\varepsilon - k}\,\overline{\int_k^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} \\
&= \overline{(u^\varepsilon - u + u - k)} \left(\overline{\int_k^u (f'(s)) ds + \int_u^{u^\varepsilon} (f'(s)) ds}\right) \\
&= \overline{u^\varepsilon - u}\,\overline{\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} \\
&\quad +(u-k)\overline{\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} + \overline{u^\varepsilon - k} \int_k^u (f'(s))^2 ds \\
&= (u-k)\overline{\int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds} + \overline{u^\varepsilon - k} \int_k^u (f'(s))^2 ds.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Na osnovu jednakosti (4.22) i (4.23) sledi da je

$$
\overline{(u^\varepsilon - u) \int_u^{u^\varepsilon} (f'(s))^2 ds - \big(f(u^\varepsilon) - f(u)\big)^2} + \left(\overline{f(u^\varepsilon) - f(u)}\right)^2 = 0. \tag{4.24}
$$

Kako su oba člana leve strane jednakosti (4.24) nenegativna, imamo da je

$$\left(\overline{f(u^\varepsilon) - f(u)}\right)^2 = 0,$$

odakle sledi da je

$$v = f(u).$$

□

Teorema 4.3.16. *Neka je* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *i* $f \in \mathcal{C}^2\big((-\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty)\big)$. *Tada niz viskoznih rešenja* $\{u^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$*, određenih Košijevim problemom*

$$\begin{aligned} &[u^\varepsilon]_t + [f(u^\varepsilon)]_x = \varepsilon[u^\varepsilon]_{xx}, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) \\ &u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.25}$$

zadovoljava uslov kompaktnosti (4.16).

Sada na osnovu Teorema 4.3.15 i 4.3.16 sledi glavna teorema u ovom odeljku.

Teorema 4.3.17. *Neka je* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *i* $f \in \mathcal{C}^2\big((-\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty)\big)$. *Tada Košijev problem* (4.14) *ima slabo rešenje* $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ *u smislu Definicije 4.3.3.*

Dokaz za egzistenciju slabog rešenja problema (4.14), kao slabe-* granice podniza niza viskoznih rešenja u prostoru $L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, se može sprovesti i ako se prvo definiše pojam Jangovih[13] mera. Pomoću njih se definiše klasa rešenja tog problema (measure-valued solutions), koja je šira od klase slabih rešenja. Zatim se putem istraživanja te klase rešenja i primenom teorije kompenzovane kompaktnosti dolazi do slabog rešenja posmatranog problema. Detaljan sadržaj o primeni Jangovih mera i teorije kompenzovane kompaktnosti se nalazi u [4].

Za slaba rešenja problema (4.14) u prostorima L^p, $1 < p < \infty$, upućujemo na [13].

[13] Laurence Chisholm Young (1905-2000), američki matematičar

Zaključak

U radu smo se bavili lokalno konveksnim topološko-vektorskim prostorima, jednim tipom lokalno konveksnih topologija - slabim topologijama i primenama predstavljenih teorijskih rezultata na L^p prostore i skalarne zakone održanja.

Dokazali smo da u lokalno konveksnom prostoru postoji baza okolina nule takva da je svaki njen element uravnotežen, zatvoren i konveksan skup. Pokazali smo da je lokalno konveksna topologija svakog lokalno konveksnog prostora definisana familijom svih neprekidnih semi-normi za tu lokalno konveksnu topologiju. Zaključili smo da je svaki normiran prostor ujedno i lokalno konveksan prostor. Naveli smo i druge primere lokalno konveksnih prostora, koji imaju važnu ulogu u *teoriji distribucija* (Primeri 2.3.25 $-$ 2.3.33). Primerom 2.3.13 smo pokazali da postoji topološko-vektorski prostor koji nije lokalno konveksan.

Slabu topologiju $\sigma(E, E^*)$ na realnom vektorskom prostoru E (pri čemu je prostor E snabdeven normom $\|\cdot\|$) smo predstavili kao inicijalnu topologiju za familiju linearnih funkcioneli $(\varphi_f)_{f\in E^*}$, gde je $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ dualni prostor prostora $(E, \|\cdot\|)$ i $\varphi_f(x) = f(x)$, za svako $x \in E$. Slabu-* topologiju na prostoru E^* smo predstavili kao inicijalnu topologiju za familiju linearnih funkcioneli $(\varphi_x)_{x\in E}$ definisanih sa $\varphi_x(f) = f(x)$, za sve $f \in E^*$. Ove dve topologije smo prikazali i kao lokalno konveksne topologije redom na prostorima E i E^* definisane uparivanjem vektorskih prostora E i E^* u odnosu na kanoničku bilinearnu formu $B : E \times E^* \to \mathbb{R}$, datu sa $B(x, f) = f(x)$, za svako $x \in E$ i svako $f \in E^*$. Na taj način su slaba i slaba-* topologija definisane redom familijom semi-normi $(q_f)_{f\in E^*}$, $q_f(x) = |B(x, f)|$, $x \in E$ i familijom semi-normi $(q_x)_{x\in E}$, $q_x(f) = |B(x, f)|$, $f \in E^*$. Dokazali smo da su prostori $(E, \sigma(E, E^*))$ i $(E^*, \sigma(E^*, E))$ Hauzdorfovi. Zaključili smo da je jaka topologija prostora E (topologija indukovana normom $\|\cdot\|$, obeležena sa $\mathcal{O}_E$) finija od slabe topologije $\sigma(E, E^*)$ i da jednakost tih topologija važi ako i samo ako je prostor E konačno dimenzionalan. Pokazali smo da je konveksan skup $C \subset E$ zatvoren u prostoru $(E, \sigma(E, E^*))$ ako i samo ako je zatvoren u prostoru $(E, \|\cdot\|)$. Na prostoru E^* smo posmatrali tri topologije i zaključili da između njih važi odnos $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**}) \subset \mathcal{O}_{E^*}$, da u slučaju konačno dimenzionalnog prostora E važi jednakost tih topologija, kao i da u slučaju Banahovog prostora koji nije refleksivan važi da je topologija $\sigma(E^*, E^{**})$ strogo finija od topologije $\sigma(E^*, E)$. Pokazali smo da se ispitivanje slabe (slabe-*) konvergencije nizova u prostoru E (E^*) svodi na ispitivanje konvergencije nizova realnih brojeva i ukazali na odnose između slabe (slabe-*) i drugih tipova konvergencije u prostorima E i E^*. Dokazali smo da je zatvorena jedinična lopta B_{E^*} kompaktan skup u prostoru $(E^*, \sigma(E^*, E))$ (Banah-Alaoglu teorema 3.4.10). Dali smo potreban i dovoljan uslov da Banahov prostor bude refleksivan (Teorema 3.5.3). Predstavili smo vezu između osobine separabilnosti Banahovog prostora i metrizabilnosti slabih topologija (Teorema 3.6.4). Banah-Alaoglu teoremu, rezultate o refleksivnim Banahovim prostorima i vezu između separabilnosti Banahovog prostora i metrizabilnosti slabih topologija smo iskoristili da bismo pokazali da svaki ograničen niz u refleksivnom Banahovom prostoru ima slabo konvergentan podniz, kao i da svaki ograničen niz u dualnom prostoru sparabilnog Banahovog prostora ima slabo-* konvergentan podniz. Dokazali smo da za beskonačno dimenzionalan prostor E ne postoji metrika koja indukuje slabu topologiju $\sigma(E, E^*)$.

Rezultate predstavljene u trećem poglavlju i Risovu teoremu o reprezentaciji (Teorema 4.2.11) smo iskoristili da definišemo slabu (slabu-*) konvergenciju niza u prostoru L^p, $1 \leq p < \infty$ (L^∞). Pod određenim uslovima smo pokazali postojanje slabog rešenja $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ Košijevog problema za skalarni zakon održanja, sa početnim uslovom $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. To rešenje je uz primenu metoda kompenzovane kompaktnosti (teoreme o slaboj konvergenciji 2×2 determinanti) dobijeno kao granica slabo-* konvergentnog podniza ograničenog niza viskoznih rešenja $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ u prostoru $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Na taj način je prikazana jedna od mnogobrojnih primena rezultata prethodno predstavljene teorije.

Literatura

[1] R. ADAMS AND J. FOURNIER, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 2003.

[2] A. BRESSAN, *Hyperbolic Conservation Laws An Illustrated Tutorial*, Department of Mathematics, Penn State University, USA, 2009.

[3] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer New York, 2010.

[4] C. DAFERMOS, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[5] C. DEVITO, *Functional Analysis*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1978.

[6] J. DIEUDONNE, *History of Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science, 1983.

[7] G. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, Wiley, 2013.

[8] T. FRANCOIS, *Topological Vector Spaces Distributions and Kernels*, Academic Press Incorporated, 1967.

[9] O. HADŽIĆ I S. PILIPOVIĆ, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 1996.

[10] J. HORVATH, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2013.

[11] M. KURILIĆ, *Osnovi opšte topologije*, Edicija "Univerzitetski udžbenik", Univerzitet, 1998.

[12] E. LIEB, M. LOSS, *Analysis*, Crm Proceedings & Lecture Notes, American Mathematical Society, 2001.

[13] Y. LU, *Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, CRC Press, 2002.

[14] R. MEGGINSON, D. BROOKS, S. AXLER, F. GEHRING, AND P. HALMOS, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1998.

[15] S. MÜLER, *Summary of the course Functional analysis and partial differential equations*, Bonn University, 2016-2017.

[16] S. PILIPOVIĆ I D. SELEŠI, *Mera i integral - fundamenti teorije verovatnoće*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[17] L. TARTAR, *The General Theory of Homogenization: A Personalized Introduction*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer Berlin Heidelberg, 2009.

Biografija

Milica Lučic je rođena 7.5.1995. u Somboru. Osnovnu školu "20. oktobar" je završila u Sivcu, 2009. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Veljko Petrović" u Somboru, prirodno-matematički smer, koju završava 2013. godine. Po završetku gimnazije, 2013. godine, upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Matematika, koje je završila 2016. godine, sa prosečnom ocenom 9.62. Iste godine je upisala master akademske studije - Matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junskom roku 2018. godine. Školske 2015/16. godine je bila stipendista Fonda za mlade talente Republike Srbije - stipendija Dositeja.

Novi Sad, septembar 2018. Milica Lučić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Milica Lučić
AU

Mentor: dr Ivana Vojnović
MN

Naslov rada: Slabe topologije i primene
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2018
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 4/94/17/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: lokalno konveksan prostor, slaba topologija, slaba-* topologija, inicijalna topologija, skalarni zakon održanja, kompenzovana kompaktnost
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

U ovom master radu se bavimo lokalno konveksnim prostorima, jednim tipom lokalno konveksnih topologija - slabim topologijama i primenama predstavljenih teorijskih rezultata na L^p prostore i skalarne zakone održanja.
U prvom poglavlju dajemo pregled pojmova i tvrđenja vezanih za topološke, metričke, vektorske i normirane prostore, koji će biti potrebni u nastavku rada. U drugom poglavlju predstavljamo lokalno konveksne topološko-vektorske prostore (lokalno konveksne prostore). Predstavljamo lokalno konveksne topologije koje su definisane nekom familijom semi-normi, a zatim pokazujemo da je lokalno konveksna topologija svakog lokalno konveksnog prostora definisana familijom sviih neprekidnih semi-normi za tu lokalno konveksnu topologiju. U trećem poglavlju definišemo pojam uparenih vektorskih prostora u odnosu na datu bilinearnu formu i pojam inicijalne topologije na nepraznom skupu X za datu familiju preslikavanja. Na osnovu njih definišemo slabu topologiju na realnom vektorskom prostoru E (pri čemu je on i Banahov prostor) i slabu-* topologiju na prostoru E^* (dualnom prostoru prostora E). Razmatramo osobine linearnih preslikavnja i podskupova skupa E (E^*) u odnosu na definisane topologije. Uvedene topologije upoređujemo sa drugim topologijama definisanim na prostoru E (E^*). Definišemo slabu konvergenciju niza u prostoru E i slabu-* konvergenciju niza u prostoru E^* i razmatramo tvrđenja za njih vezana. Predstavljamo refleksivne Banahove prostore, a zatim se bavimo osobinom separabilnosti Banahovog prostora, koja je vezana za osobinu metrizabilnosti slabih topologija. Četvrto poglavlje je posvećeno kratkom prikazu primene prethodno predstavljenjih teorijskih rezultata na L^p, $1 \leq p \leq \infty$ prostore i skalarne zakone održanja. Pod odgovarajućim pretpostavkama pokazujemo postojanje slabog L^∞ rešenja Košijevog problema za skalarni zakon održanja sa početnim uslovom $u_0 \in L^\infty$. U tu svrhu koristimo niz viskoznih rešenja i metodu kompenzovane kompaktnosti, odnosno teoremu u slaboj konvergenciji 2×2 determinanti.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP 26.6.2018.

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Ivana Vojnović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Milica Lučić
AU

Mentor: Ivana Vojnović, Ph.D.
MN

Title: Weak topologies and applications
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian (latin)
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2018
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/94/17/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional Analysis
SD

Subject/Key words: locally convex space, weak topology, weak* topology, initial topology, scalar conservation law, compensated compactness
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
In this master thesis we deal with locally convex spaces, weak topologies and applications of the presented theoretical results on L^p spaces and scalar conservation laws.
The first chapter has an introductory character, and gives a review of concepts and theorems which are related to topological, metric, vector, and normed spaces. In the second chapter locally convex topological vector spaces (locally convex spaces) are presented. In this chapter we consider locally convex topologies which are defined by some family of semi-norms. We prove that locally convex topology of every locally convex space can be defined by the family of all semi-norms which are continuous for the given locally convex topology. In the third chapter concepts of paired vector spaces with respect to some bilinear form and initial topology on nonempty set for given family of maps are introduced. With respect to this concepts weak topology on real vector space E (which is also a Banach space) and weak-* topology on the space E^* (dual space of E) are defined. Properties of linear maps and subsets of E (E^*) are considered according to these topologies. Introduced topologies are compared with other topologies defined on the space E (E^*). Weak convergence of the sequence in E and weak-* convergence of the sequence in E^* are defined and theoretical results which are related to these convergence are examined. Reflexive Banach spaces are examined, and then separability of Banach space which is related to metrizability of weak topologies is considered. The fourth chapter is dedicated to applications of the presented theoretical results on L^p spaces. Under the appropriate conditions we prove existence of the weak L^∞ solution of the Cauchy problem for scalar conservation law with initial data $u_0 \in L^\infty$. For that purpose sequence of viscosity solutions and method of compensated compactness (weak convergence of 2×2 determinant) are used.
Accepted by the Scientific Board on:
ASB 26.6.2018.

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Ivana Vojnović, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Member:	Dr. Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,