



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



Марија Сретеновић

СИМПСОНОВА КВАДРАТУРНА ФОРМУЛА И ПРИМЕНЕ

Мастер рад

Нови Сад, 2012.

Садржај

СИМПСОНОВА КВАДРАТУРНА ФОРМУЛА И ПРИМЕНЕ	1
Предговор	6
1. Уводни део	7
1.1 Историјски осврт.....	7
1.2 Увод.....	9
2. Симпсонова формула	10
2.1 Нумеричка интеграција.....	10
2.2 Симпсонова квадратурна формула.....	13
2.2.1 Први начин извођења Симпсонове формуле.....	13
2.2.2 Други начин извођења Симпсонове формуле.....	15
2.2.3 Дводимензионална Симпсонова квадратурна формула.....	15
2.3 Њутн-Котесове формуле.....	18
2.3.1 Проста Симпсонова квадратурна формула.....	21
2.3.2 Сложена Симпсонова квадратурна формула.....	25
2.3.3 Основни задаци.....	27
2.4 Томас Симпсон (1710-1761.).....	33
3. Примене Симпсонове формуле	35
3.1 Израчунавање запремине неких обртних тела.....	35
3.1.1 Запремина купе.....	35
3.1.2 Запремина зарубљене купе.....	35
3.1.3 Запремина лопте.....	36
3.1.4 Запремина бачве.....	36
3.1.5 Запремина ваљка.....	37

3.1.6	Симпсоново правило или призмонадална формула	37
3.2	Поступак Рунге-Кута	38
3.2.1	Нумеричко решавање почетних проблема.....	38
3.2.2	Опис поступка	39
3.2.3	Конзистенција.....	43
3.2.4	Конвергенција.....	44
3.2.5	Стабилност	44
3.3	Фамилија једнокорачних поступака.....	44
3.3.1	Посебни поступци	45
3.3.2	Ред конвергенције посебних поступака	50
3.4	Неке модификације поступка Рунге-Кута.....	52
3.4.1	Гилова модификација.....	52
3.4.2	Модификације засноване на срединама	52
3.4.3	Вишекорачни поступци који као стартер користе поступак Рунге-Кута.....	54
3.5	Експерименти	55
3.5.1	Поступак Рунге-Кута (Рунге-Кута-AM)	57
3.5.2	Рунге-Кута-Гил	57
3.5.3	Рунге-Кута-GM	58
3.5.4	Рунге-Кута-HM.....	59
3.5.5	Рунге-Кута-HeM.....	60
3.5.6	Рунге-Кута-CoM.....	60
3.5.7	Рунге-Кута-RMS	61
3.5.8	Рунге-Кута-CM.....	62
3.5.9	Рунге-Кута-LM	62
3.5.10	Рунге-Кута-SMR	63
3.5.11	Милне-Симпсон.....	64
3.5.12	Предиктор-коректор поступак 722	64

4. Програми 66

4.1	Поступак Рунге-Кута и његове модификације	66
4.1.1	Рунге-Кута-Гил	66
4.1.2	Рунге-Кута AM.	66

4.1.3	Рунге-Кута GM.....	67
4.1.4	Рунге-Кута HM.....	67
4.1.5	Рунге-Кута NeM.....	67
4.1.6	Рунге-Кута CoM.....	68
4.1.7	Рунге-Кута RMS	68
4.1.8	Рунге-Кута CM.....	69
4.1.9	Логаритамска средина LM.....	69
4.1.10	Квадрат-корен средина SMR	69
4.2	Вишестепени поступци који као стартер користе поступак Рунге-Кута	70
4.2.1	Милне-Симпсонаов поступак.....	70
4.2.2	Предиктор-коректор поступак 722	71
5.	Једноставни поступци	73
5.1	Увод.....	73
5.2	Конзистенција једноставних поступака	75
5.3	Конвергенција једноставних поступака	76
5.4	Стабилност једноставних поступака	78
6.	Закључак	80
7.	Литература	81
8.	Биографија	82

Предговор

Једна од најпопуларнијих формула за приближну (нумеричку) интеграцију је Симпсонова квадратурна формула. Она се може посматрати самостално или као специјалан случај Њутн-Котесових квадратурних формула. У раду посматрамо Симпсонову квадратурну формулу на оба начина. Поред тога наводимо и неке њене примене у приближном израчунавању запремине неких тела и нумеричком решавању почетних проблема обичних диференцијалних једначина.

Класичан поступак Рунге-Кута за решавање почетних проблема заснива се на директној примени Симпсонове квадратурне формуле. Постоје бројне модификације поступка Рунге-Кута. Неке се и данас развијају, [12], [14]. Посматрајући функцију корака поступка Рунге-Кута као аритметичку средину четири вредности првог извода непознате функције у чвору мреже дискретизације, долазимо до могућности да се аритметичка средина замени неком другом средином (геометријском, хармонијском, ...) истих величина. Тиме се добијају нове модификације поступка Рунге-Кута. У раду [14] наведено је седам таквих модификација, које смо кратко приказали и у овом раду. Поред тога дајемо и две своје модификације засноване на логаритамској средини и квадрат-корен средини. За ове модификације направили смо имплементацију у *Mathematica*-и и демонстрирали њихову ефикасност. Поред тога упоредили смо ове резултате са резултатима модификација поступка Рунге-Кута датим у раду [14]. Овај део свог рада сматрам оригиналним доприносом.

Нови Сад, септембар 2012.

Марија Сретеновић

1. Уводни део

1.1 Историјски осврт

Историја интегралног рачуна се развија на интересантан начин. Почиње у старој Грчкој, а завршава се у Европи у 19. веку. Али шта је у ствари интегрални рачун? Интегрални рачун и интеграција користе се за израчунавање површина, запремина тела, дужина криве, тежишта, момента инерције, ...

Многи сматрају да се зачеци интегралног рачуна јављају у старој Грчкој. Интегрални рачун има своје корене још код Еуклида Книдског (408-347. п.н.е.) грчког астронома и математичара и његове методе „исцрпљења“ из периода око 360. године п.н.е. Овом методом површина неке фигуре израчунава се као збир површина многоуглова који на неки начин покривају површину фигуре. Што се више многоуглова убацује тако да све боље покривају посматрану фигуру, добиће се све боља апроксимација површине дате фигуре.

Први који је проучавао проблеме одређивања површине геометријских фигура, на начин који је близак методу интегралног рачуна био је Архимед. У свом делу „Метода“ Архимед је развио начин налажења површина ограничених кривама, разматрајући их подељене многобројним паралелним линијама и проширио идеју на налажење запремине неких тела. Због тога га неки називају оцем интегралног рачуна.

Почетком 17. века, поново се појавио интерес за мерење запремина интегралном методом. Јохан Кеплер (1571-1630.) је користио процедуре налажења запремине тела узимајући их као композицију бесконачног скупа инфинитезимално малих елемената. Ове идеје је поопштио Кавалјери у свом делу *Geometria Indivisibilibus continuorum*, у којем је употребио идеју да се површина састоји из недељивих линија, а запремина од недељивих површина. То је данас познати Кавалјеров принцип, а такође је био и концепт Архимедове Методе.

Појам интеграла у данашњем смислу јавио се у 17. веку са Њутновим и Лајбницовим радовима. Исак Њутн (1642-1722.) и Готфрид Лајбниц (1646-1716.) откили су, независно један од другог, користећи свако своју нотацију (као што су већина математичара то и чинили у то време) инфинитезимални рачун. Мада је Њутн разрадио свој метод годинама пре Лајбница, он није објавио о томе скоро ништа све до 1693, а потпуни увид у свој инфинитезимални рачун пружио је тек 1704. У међувремену, Лајбниц почиње да објављује потпуни опис свог метода. Поврх тога, Лајбницова нотација и „инфинитезимални метод“ постају опште прихваћени на континенту, а после 1820. и у Британској империји. Њутн је тврдио да је он био нерад да објави његов инфинитезимални рачун бојећи се да би због тога могао бити исмеван. Почев од 1699. други чланови краљевског друштва оптужују Лајбница за плагијат, а овај спор избија пуном снагом у 1711. Тако почиње Њутнова расправа са Лајбницом око приоритета открића инфинитезималног рачуна,

који ће их пратити скоро целог живота. Ова расправа створиће поделу између математичара Британије и континенталне Европе, која је читав век успорила напредак математике у Британији. Заправо, данас је познато, обојица су дошли у до истог открића независно један од другог. Савремена нотација дугује Лајбницу dy/dx и симбол $\int$ који асоцира на сумирање, као модификацију слова S .

Са друге стране, као последица сарадње Њутна и Роџера Котеса (1682-1716.) настале су Њутн-Котесове формуле. Котес је био професор на универзитету у Кембриџу. Највећу пажњу посветио је интеграцији неодређених рационалних алгебарских форми, производа логаритама, тригонометријских и хиперболичких функција и функција које већим делом нису препознатљиве.

У 19. веку, интеграција се почела тумачити као операција инверзна диференцирању. Оно што су започели Њутн и Лајбниц у овом периоду наставиће Гаус, Огистен Коши, Берхард Риман, Хенри Лион Лебеск.

Јохан Фридрих Карл Гаус (1777-1855.) је направио прву таблицу интеграла и наставио употребљавати интеграле у математици и физици.

Огистен Луј Коши (1789-1857.) је 1820-тих диференцијални и интегрални рачун ставио на сигурније основе заснивајући их на лимесу. Диференцирање је дефинисао као граничну вредност количника, а интеграње као граничну вредност збира. Примењивао је интеграле у комплексној анализи.

Дефиницију интеграла помоћу граничне вредности уопштио је Берхард Риман (1826-1866.). Наиме, дефинисао је Риманов интеграл у смислу граничне вредности Риманових сума.

У 20. веку, схватање интеграла је проширено. У почетку, интегрирање се односило на елементарну идеју мерења (мерење дужина, површина, запремина) са непрекидним функцијама. Са појавом теорије скупова, функције су се почеле третирали као пресликавање, не обавезно непрекидно, и појавило се општије и апстрактније схватање мере.

Хенри Лебег (1875-1941.) је објавио дефиницију интегрирања на Лебеговој мери скупа. Појавио се Лебегов интеграл.

1955. Вернер Ромберг (1909-2003.), један од оснивача нумеричке анализе, започиње рад на прецизном дефинисању трапезног правила и проналази чувену методу за прецизно израчунавање интеграла функција. Те методе су познате као Ромбергова интеграција.

У 20. веку, пре појаве рачунара, математичари су развијали теорију интеграције и употребљавали је за испитивање таблице интеграла и интегралне трансформације.

Израчунавање одређеног интеграла у данашње време је прилично једноставно. Многи програмски пакети садрже велики број процедура за

израчунавање тачних и приближних вредности одређеног интеграла. Један од тих пакета је и „*Mathematica*“, који сам користила и у изради овог рада.

1.2 Увод

Рад садржи седам поглавља. У првом, уводном поглављу, дат је кратак преглед историје интегралног рачуна и приказана организација рада. У другој глави дат је опис нумеричке интеграције и уводи се појам квадратурне формуле. Описана је Симпсонова квадратурна формула и приказана су њена два извођења. Прво, директно преко интеграције полинома другог степена и, друго, помоћу поступка неодређених коефицијената. Оба ова начина могу се успешно користити и у почетној настави нумеричке математике. Поред тога други део садржи и дводимензионалну варијанту Симпсонове квадратурне формуле, преузету из [3]. Трећи део ове главе посвећен је Њутн-Котесовим формулама и Симпсоновој формули као специјалном случају. Дата је подела Њутн-Котесових формула на формуле отвореног и затвореног типа, као и грешка Њутн-Котесових квадратурних формула. Неколико примера илуструје основне проблеме код примене Симпсонове квадратурне формуле, као што су упоређивање приближног и тачног решења, оцена грешке и избор броја подинтервала да би се добила грешка мања од изабране толеранције. Кратка биографија Симпсона дата је на крају овог дела.

Трећи део садржи примену Симпсонове квадратурне формуле. Прво се посматрају израчунавања запремине неких обртних тела (лопта, ваљак, купа, бачва, ...). Као веома значајну примену Симпсонове формуле издвајамо поступак Рунге-Кута. Овај поступак је описан детаљно, стим да су важни појмови везано за нумеричко решавање почетних проблема обичних диференцијалних једначина издвојени у целину приказани у петом делу. Материја тог дела је преузет у потпуности из књиге [6]. Као интересантну фамилију поступака, различитог реда конвергенције, издвајамо скуп поступака описаних у раду [12]. И овде се поступак Рунге-Кута (и Симпсонова формула) појављују као специјалан случај. Веома кратко су наведени и вишекорачни поступци Милне-Симпсонов и Адамс-Башфорт-Мултонов. Оба ова поступка као стартер користе поступак Рунге-Кута. Један параграф трећег дела односи се на модификације поступка Рунге-Кута засноване на срединама. Приказани су нумерички резултати поступака описаних у раду [14] и два нова поступка засноване на логаритамској средини и квадрат-корен средини. Као веома добро позната и веома ефикасна модификација поступка Рунге-Кута наведена је и Гилова модификација, према радовима [4] и [13].

Четврти део садржи програме писане у *Mathematica*-и, које смо користили у експерименталном раду. Пети део садржи појмове везане за нумеричко решавање почетних проблема обичних диференцијалних једначина. Материја тог дела је преузет у потпуности из књиге [6].

Рад се завршава шестим делом, где се даје закључак и седмим делом који садржи коришћену литературу.

2. Симпсонова формула

2.1 Нумеричка интеграција

Нумеричка интеграција бави се поступцима за приближно израчунавање вредности одређеног интеграла

$$I(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx,$$

где је $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и f ограничена функција на $[a, b]$.

Ако функција f има примитивну функцију F , (функција F је диференцијабилна на интервалу (a, b) и важи $F'(x) = f(x)$), онда на основу Њутн-Лајбницевог теореме важи

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Један од начина за израчунавање одређеног интеграла заснован је на примени Њутн-Лајбницевог формуле. Међутим, у многим случајевима то није могуће. На пример, за одређени интеграл

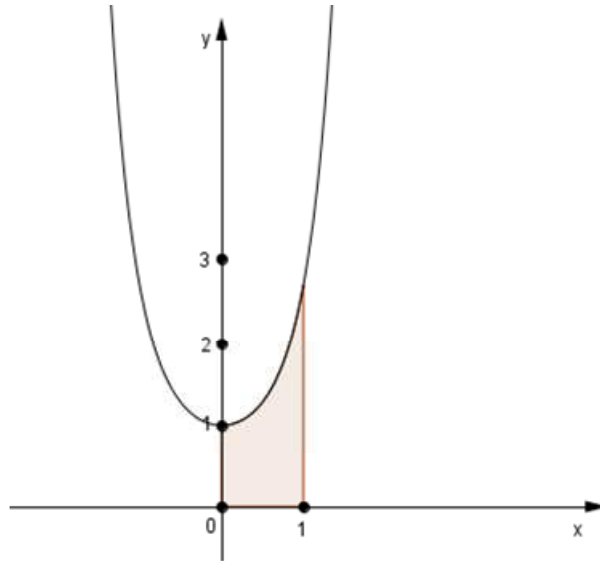
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

не можемо прво одредити примитивну функцију а затим применити Њутн-Лајбницову формулу.

Одређени интеграл интеграбилне функције има своју геометријску интерпретацију, као површину дефинисану кривом $y = f(x)$ и правама $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, па према томе има и своју бројевну вредност. Тако за претходни интеграл налазимо

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1,46265.$$

Према томе, вредност одређеног интеграла може се израчунати независно од наше могућности да нађемо примитивну функцију подинтегралне функције.



Слика 1. Геометријски приказ одређеног интеграла $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

Тачније, у великом броју случајева није могуће одредити примитивну функцију јер је поступак налажења примитивних функција веома компликован или се примитивна функција не може одредити у затвореној форми (као комбинација коначно много једноставних функција).

У наведеним случајевима, као и у случају када је подинтегрална функција задата скупом тачака $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, а њен аналитички израз непознат тражи се приближна вредност за $I(f; a, b)$.

Приближну вредност посматраног одређеног интеграла тражимо као линеарну комбинацију подинтегралне функције f

$$Q_n(f; a, b) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

коју називамо **квадратурна формула**.

За израчунавање вредности $Q_n(f; a, b)$ потребно је познавати тачке x_i , које називамо чворови интеграције и бројеве A_i , које називамо коефицијенти квадратурне формуле.

Избор чворова интеграције x_i , за које важи $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, и коефицијената A_i квадратурне формуле врши се тако да квадратурна формула $Q_n(f; a, b)$ представља што је могуће бољу апроксимацију за $I(f; a, b)$ за што ширу класу подинтегралних функција f .

Грешка апроксимације интеграла квадратурном формулом назива се **грешка квадратурне формуле**, а означава се са $E_n(f; a, b)$ и изражена је разликом

$$E_n(f; a, b) = I(f; a, b) - Q_n(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i).$$

За одређивање грешке нумеричке интеграције користе се разни поступци, а један од начина је помоћу реда тачности.

Дефиниција 1. Квадратурна формула $Q_n(f; a, b)$ је реда тачности k ако је

$$E_n(x^i; a, b) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

$$E_n(x^{k+1}; a, b) \neq 0.$$

При одређивању параметара x_i и A_i уобичајена су два приступа:

- 1) Чворови x_i су унапред познати и фиксирани, а коефицијенти A_i се одређују из услова да се добије максималан степен тачности, тј. да је $E_n(x^i) = 0$ за $i = 0, \dots, n-1$. Овој класи припадају Њутн-Котесове квадратурне формуле.
- 2) Чворови x_i и коефицијенти A_i одређују се тако да је $E_n(x^i) = 0$ за $i = 0, \dots, 2n-1$. Овој класи припадају Гаусове квадратурне формуле.

Пример 1. Известити квадратурне формуле облика

$$\int_0^1 f(x) dx = A_1 f\left(\frac{1}{4}\right) + A_2 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_3 f\left(\frac{3}{4}\right). \quad (2)$$

Решење. За задате чворове, горе наведене квадратурне формуле, треба одредити непознате коефицијенте A_1 , A_2 и A_3 . Узимајући за подинтегралну функцију $f(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$ и из услова $E(x^i) = 0$ на основу (2) добијамо следећи систем

$$\int_0^1 dx = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot 1$$

$$\int_0^1 x dx = A_1 \cdot \frac{1}{4} + A_2 \cdot \frac{1}{2} + A_3 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = A_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + A_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + A_3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

После израчунавања одређених интеграла, добијамо систем

$$A_1 + A_2 + A_3 = 1$$

$$\frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + \frac{3}{4}A_3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{16}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{9}{16}A_3 = \frac{1}{3}.$$

Одавде је решење $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = -\frac{1}{3}$, $A_3 = \frac{2}{3}$ па квадратурна формула (2)

гласи

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Приметимо да су добијени коефицијенти независни од подинтегралне функције и да је формула тачна за све полиноме чији степен није већи од два.

У овом раду биће изучаване само Њутн-Котесове формуле и неки њихови специјални случајеви.

2.2 Симпсонова квадратурна формула

Симпсонова квадратурна формула, као једна од најстаријих формула за нумеричку интеграцију, може се извести на више начина. Овде изложимо два елементарна начина. Први се заснива за апроксимацији подинтегралне функције полиномом другог степена, а други на услову да приближна вредност интеграла буде једнака тачној вредности када је подинтегрална функција било који полином другог степена.

2.2.1 Први начин извођења Симпсонове формуле

Тражимо да буде

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx$$

где је $f_2(x)$ полином другог степена дефинисан са

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Изаберимо следеће три тачке

$$(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right), (b, f(b))$$

да бисмо одредили a_0 , a_1 и a_2 . Добијамо три једначине

$$f(a) = f_2(a) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f_2\left(\frac{a+b}{2}\right) = a_0 + a_1 \left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(b) = f_2(b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2$$

Три непознате, a_0 , a_1 и a_2 добијамо из овог система

$$a_0 = \frac{a^2 f(b) + abf(b) - 4abf\left(\frac{a+b}{2}\right) + abf(a) + b^2 f(a)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_1 = -\frac{af(a) - 4af\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3af(b) + 3bf(a) - 4bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + bf(b)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_2 = \frac{2\left(f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

Сада је

$$\begin{aligned} I &\approx \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \right]_a^b \\ &= a_0(b-a) + a_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + a_2 \frac{b^3 - a^3}{3} \end{aligned}$$

Узимајући у обзир a_0 , a_1 и a_2 добијамо

$$\int_a^b f_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

2.2.2 Други начин извођења Симпсонове формуле

Симпсонову формулу можемо добити и поступком неодређених коефицијената. Нека је

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c_3 f(b)$$

Десна страна би требало да буде тачна за интеграле $\int_a^b 1dx$, $\int_a^b xdx$, и $\int_a^b x^2dx$.

Ово имплицира да је десна страна тачна за сваку линеарну комбинацију та три интеграла, тј. за сваки полином степена не већег од 2.

Имамо

$$\int_a^b 1dx = b - a = c_1 + c_2 + c_3$$

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2} = c_1 a + c_2 \frac{a+b}{2} + c_3 b$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} = c_1 a^2 + c_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + c_3 b^2$$

Непознате c_0 , c_1 и c_2 добијамо из претходног система једначина

$$c_1 = \frac{b-a}{6} \quad c_2 = \frac{2(b-a)}{3} \quad c_3 = \frac{b-a}{6}$$

То нам даје

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{2(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b),$$

односно,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

2.2.3 Двостепенна Симпсонова квадратурна формула

Природно се поставља питање да ли нам Симпсонова квадратурна формула може помоћи при решавању вишеструких интеграла. *Kazuyuki Fujii* се позабавио овом темом у раду [3]. Ми ћемо показати на који начин нам

Симпсонова формула може помоћи у решавању двоструких интеграла, а за општи случај упућујемо читаоце на [3]

Нека је $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R$ и функција f непрекидна на D . Решавамо двоструки интеграл.

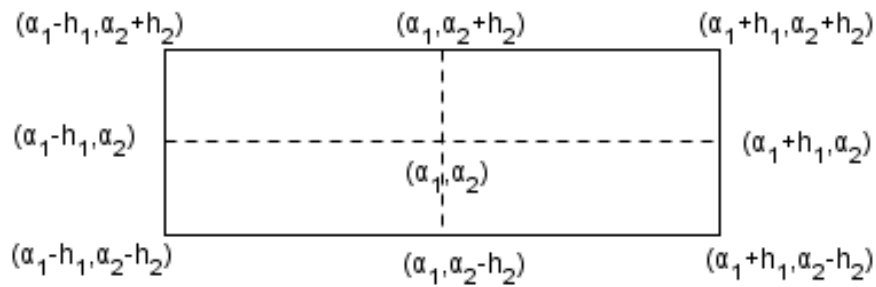
$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Како је тешко израчунати овај интеграл, задовољићемо се апроксимацијом. У ту сврху D ћемо дефинисати на следећи начин.

$$D = [\alpha_1 - h_1, \alpha_1 + h_1] \times [\alpha_2 - h_2, \alpha_2 + h_2]$$

где је

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \alpha_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, h_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} \text{ и } h_2 = \frac{b_2 - a_2}{2}.$$



Апроксимирамо f са квадратном формулом.

$$F(x, y) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x^i y^j$$

тј.

$$F(x, y) = a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00} + (a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01})y + (a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02})y^2.$$

Тада је,

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_1-h_1}^{\alpha_1+h_1} \int_{\alpha_2-h_2}^{\alpha_2+h_2} F(x, y) dx dy = \\
& \int_{\alpha_1-h_1}^{\alpha_1+h_1} \int_{\alpha_2-h_2}^{\alpha_2+h_2} \left[a_{20}x^2 + a_{10}x + a_{00} + (a_{21}x^2 + a_{11}x + a_{01})y + (a_{22}x^2 + a_{12}x + a_{02}) \right] dx dy = \\
& = \left\{ a_{20} \frac{(\alpha_1 + h_1)^3 - (\alpha_1 - h_1)^3}{3} + a_{10} \frac{(\alpha_1 + h_1)^2 - (\alpha_1 - h_1)^2}{2} + a_{00} 2h_1 \right\} 2h_2 \\
& + \left\{ a_{21} \frac{(\alpha_1 + h_1)^3 - (\alpha_1 - h_1)^3}{3} + a_{11} \frac{(\alpha_1 + h_1)^2 - (\alpha_1 - h_1)^2}{2} + a_{01} 2h_1 \right\} \cdot \frac{(\alpha_2 + h_2)^2 - (\alpha_2 - h_2)^2}{2} \\
& + \left\{ a_{22} \frac{(\alpha_1 + h_1)^3 - (\alpha_1 - h_1)^3}{3} + a_{12} \frac{(\alpha_1 + h_1)^2 - (\alpha_1 - h_1)^2}{2} + a_{02} h_1 \right\} \cdot \frac{(\alpha_2 + h_2)^3 - (\alpha_2 - h_2)^3}{3} \\
& = \dots \\
& = 4h_1h_2 \left\{ a_{20}\alpha_1^2 + a_{10}\alpha_1^2 + a_{00} + (a_{21}\alpha_1^2 + a_{11}\alpha_1 + a_{01})\alpha_2 + (a_{22}\alpha_1^2 + a_{12}\alpha_1 + a_{02})\alpha_2^2 \right\} \\
& + \\
& 4 \frac{h_1h_2}{3} (a_{20}h_1^2 + a_{21}h_1^2\alpha_2 + a_{22}h_1^2\alpha_2^2 + a_{02}h_2^2 + a_{12}\alpha_1h_2^2 + a_{22}\alpha_1^2h_2^2) + \frac{4h_1h_2}{9} a_{22}h_1^2h_2^2.
\end{aligned}$$

За $k, l \in \{-1, 0, 1\}$ означимо

$$w_{k,l} = f(\alpha_1 + kh_1, \alpha_2 + lh_2) = F(\alpha_1 + kh_1, \alpha_2 + lh_2)$$

Имамо

$$w_{0,0} = F(\alpha_1, \alpha_2) = a_{20}\alpha_1^2 + a_{10}\alpha_1 + a_{00} + (a_{21}\alpha_1^2 + a_{11}\alpha_1 + a_{01})\alpha_2 + (a_{22}\alpha_1^2 + a_{12}\alpha_1 + a_{02})\alpha_2^2$$

Дакле, заменом добијамо

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_1-h_1}^{\alpha_1+h_1} \int_{\alpha_2-h_2}^{\alpha_2+h_2} w dx dy = \\
& 4h_1h_2\omega_{0,0} + \frac{2h_1h_2}{3} (\omega_{-1,0} + \omega_{1,0} + \omega_{0,-1} + \omega_{0,1} - 4\omega_{0,0}) + \\
& \frac{h_1h_2}{9} (\omega_{-1,-1} + \omega_{-1,1} + \omega_{1,-1} + \omega_{1,1} - 2(\omega_{-1,0} + \omega_{1,0} + \omega_{0,-1} + \omega_{0,1}) + 4\omega_{0,0})
\end{aligned}$$

$$= \frac{h_1 h_2}{9} \{ \omega_{-1,-1} + \omega_{-1,1} + \omega_{1,-1} + \omega_{1,1} + 4(\omega_{-1,0} + \omega_{1,0} + \omega_{0,-1} + \omega_{0,1}) + 16\omega_{0,0} \}.$$

2.3 Њутн–Котесове формуле

Богату класу квадратурних формула добијамо посматрајући интерполационе квадратурне формуле.

Дефиниција 1. Квадратурна формула $Q_n(f; a, b)$ је интерполациона квадратурна формула n – тог реда ако за све $f \in C[a, b]$ важи

$$\sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = \int_a^b P_n(f, x) dx$$

где је $P_n(f, x)$ интерполациони полином n – тог степена за функцију f у односу на међусобно различите чворове x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Теорема 1. Коефицијенти интерполационе квадратурне формуле дати су са

$$A_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ако су чворови интерполације еквилидистантни, добијамо једноставније изразе за коефицијенте. Наиме, важи

$$A_i = A_{n-i} = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (s - j) ds, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Дефиниција 2. Интерполационе квадратурне формуле n – тог реда са еквилидистантним чворовима

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

називају се Њутн–Котесове квадратурне формуле затвореног типа.

Код Њутн–Котесових квадратурних формула затвореног типа сви чворови припадају интервалу $[a, b]$, а $x_0 = a$ и $x_n = b$ су први и последњи чворови интеграције, што означавамо речима „затвореног типа“.

Дефиниција 3. Интерполационе квадратурне формуле n – тог реда са еквилидистантним чворовима

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

називају се Њутн-Котесове квадратурне формуле отвореног типа.

Код Њутн-Котесових квадратурних формула отвореног типа чворови интеграције x_i припадају интервалу (a, b) , а крајне тачке, означене са $x_{-1} = a$ и $x_{n+1} = b$ нису чворови интеграције.

У овом раду биће обрађене само Њутн-Котесове квадратурне формуле затвореног типа.

Теорема 2. *Њутн-Котесова квадратурна формула реда n гласи*

$$N_n(f; a, b) = h \sum_{i=0}^n A_{n,i} f(x_i)$$

Теорема 3. *где је*

$$A_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (t-j) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Доказ. Нека је дата функција $y = f(x)$ за коју треба израчунати $\int_a^b f(x) dx$. Интервал $[a, b]$ поделимо на n једнаких делова помоћу тачака

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Дакле, имамо чворне тачке и одговарајуће вредности функције f у тим тачкама: $f(x_0), \dots, f(x_n)$ на основу чега можемо конструисати Лагранжов интерполациони полином

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Како су чворови интеграције еквилидистантни, сменом $x = x_0 + th$ добија се

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x_0 + th - x_j)}{(x_i - x_j)} =$$

$$\begin{aligned}
& f(x_0) \frac{(x_0 + th - x_1)(x_0 + th - x_2) \cdots (x_0 + th - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \\
& + f(x_1) \frac{(x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_2) \cdots (x_0 + th - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} \\
& + \dots + f(x_n) \frac{(x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_1) \cdots (x_0 + th - x_{n-1})}{(x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Како је $x_i = x_0 + ih$ добија се

$$\begin{aligned}
L_n(x_0 + th) &= f(x_0) \frac{(x_0 + th - x_0 - h) \cdot (x_0 + th - x_0 - 2h) \cdots (x_0 + th - x_0 - nh)}{(x_0 - x_0 - h) \cdot (x_0 - x_0 - 2h) \cdots (x_0 - x_0 - nh)} + \\
& f(x_1) \frac{(x_0 + th - x_0) \cdot (x_0 + th - x_0 - 2h) \cdots (x_0 + th - x_0 - nh)}{(x_0 + h - x_0) \cdot (x_0 + h - x_0 - 2h) \cdots (x_0 + h - x_0 - nh)} + \dots + \\
& f(x_n) \frac{(x_0 + th - x_0) \cdot (x_0 + th - x_0 - h) \cdots (x_0 + th - x_0 - nh)}{(x_0 + nh - x_0) \cdot (x_0 + nh - x_0 - h) \cdots (x_0 + nh - x_0 - nh)} \\
&= \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (t - j).
\end{aligned}$$

Како Лагранжов облик полинома P_n апроксимира функцију f на интервалу $[a, b]$ тада ће и вредности њиховог интеграла бити приближно једнаке. Дакле, имамо да је

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) = h \int_0^n L_n(x_0 + th) dt = h \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (t - j) dt,$$

Одакле непосредно следи тврђење теореме. ■

Теорема 4. За коефицијенте Њутн-Котесових квадратурних формула важи:

$$A_{n,i} = A_{n,n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Теорема 5. Грешка Њутн-Котесових квадратурних формула n -тог реда је

$$E_n(f; a, b) = \begin{cases} h^{n+3} f^{(n+2)}(\tau) \int_0^n \binom{s}{n+2} ds, & f \in C^{n+2}[a, b], \quad n = 2k \\ h^{n+2} f^{(n+1)}(\tau) \int_0^n \binom{s}{n+1} ds, & f \in C^{n+1}[a, b], \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Оцена грешке $E_n(f; a, b)$, на основу теореме је

$$|E_n(f; a, b)| \leq \begin{cases} h^{n+3} M_{n+2} \int_0^n \left| \binom{s}{n+2} \right| ds, & f \in C^{n+2}[a, b], \quad n = 2k \\ h^{n+2} M_{n+1} \int_0^n \left| \binom{s}{n+1} \right| ds, & f \in C^{n+1}[a, b], \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

У овом раду биће детаљније изучавана Симпсонова квадратурна формула као специјални случај Њутн-Котесове квадратурне формуле.

2.3.1 Проста Симпсонова квадратурна формула

Симпсонова квадратурна формула је затворена Њутн-Котесова формула са три тачке. Нека је $[a, b]$ интервал интеграције тада је

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = b.$$

Директном интеграцијом полинома другог степена одређеног тачкама

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)).$$

добива се Симпсонова квадратурна формула:

$$\int_a^b L_2(x) dx = \frac{1}{3} h (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

односно

$$\int_a^b L_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Значи,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_2(x) dx$$

тј.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_2(x)dx + E_2(x)$$

где је E_2 грешка интеграције.

Симпсонова квадратурна формула се може добити и на лакши начин, директно из Њутн-Котесове формуле за $n = 2$. Њутн-Котесова формула другог реда гласи

$$N_2(f; a, b) = h(A_{2,0}f(x_0) + A_{2,1}f(x_1) + A_{2,2}f(x_2)),$$

где је

$$A_{2,0} = A_{2,2} = \frac{1}{2} \int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{3}$$

$$A_{2,1} = -\int_0^2 t(t-2)dt = \frac{4}{3}.$$

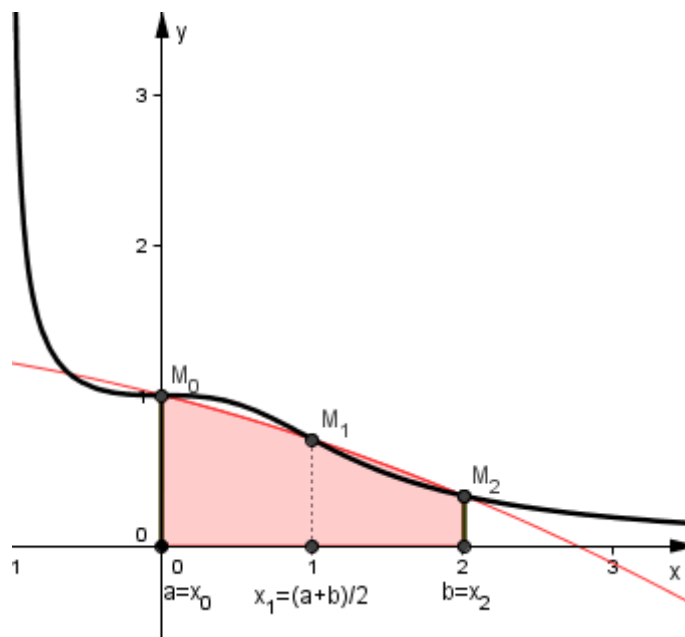
Добијамо

$$N_2(f; a, b) = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)),$$

тј.

$$N_2(f; a, b) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Геометријски, интерпретација ове формуле је следећа: крива $y = f(x)$ апроксимирана је параболом кроз тачке $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$, као што је приказано, Слика 2.



Слика 2 . Геометријски приказ Симпсонове формуле, $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$

Одговарајућа грешка је

$$E_2(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Теорема 6. Нека је функција $f \in C^4[a, b]$. Тада постоји $\tau \in (a, b)$ такво да је

$$E_2(f; a, b) = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\tau).$$

Доказ. Одговарајућа грешка је

$$E_2(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

ИЛИ

$$E_2(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

Како је $x_0 = a$, $x_1 = a + h$ и $x_2 = a + 2h$, на основу Тејлоровог развоја функције f имамо,

$$f(x_1) = f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(a) + \dots$$

$$f(x_2) = f(a + 2h) = f(a) + 2hf'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4}{3} h^3 f^{(3)}(a) + \frac{2^4}{4!} h^4 f^{(4)}(a) + \dots$$

На основу ова два развоја добијамо

$$\begin{aligned} \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) &= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a + h) + f(a + 2h)) \\ &= 2hf'(a) + 2h^2 f''(a) + \frac{4}{3} h^3 f''(a) + \frac{2}{3} h^4 f^{(3)}(a) + \frac{20}{3 \cdot 4!} h^5 f^{(4)}(a) + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Са друге стране, ако означимо

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Имамо Тејлоров развој

$$F(x_2) = F(a + 2h) = F(a) + 2hF'(a) + 2h^2 F''(a) + \frac{4}{3} h^3 F^{(3)}(a) + \frac{2}{3} h^4 F^{(4)}(a) + \dots$$

Како је $F' = f$, $F'' = f'$, $F''' = f''$ и тако даље, и $F(a) = 0$, следи да је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+2h} f(x) dx = 2hf' + 2h^2 f'' + \frac{4}{3} h^3 f'' + \frac{2}{3} h^4 f^{(3)} + \frac{2^5}{5 \cdot 4!} h^5 f^{(4)} + \dots \quad (4)$$

Одузимањем релације (3) од релације (4) добијамо

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \\ = \int_a^{a+2h} f(x) dx - \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a + h) + f(a + 2h)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(a) - \dots \end{aligned}$$

Бесконачан ред на десној страни добијане једнакости може се апроксимирати само првим сабирком

$$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau),$$

где је $\tau \in (a, b)$. Овим смо добили процену грешке при израчунавању одређеног интеграла $I(f; a, b)$ помоћу Симпсонове формуле.

2.3.2 Сложена Симпсонова квадратурна формула

Симпсонова квадратурна формула је Њутн-Котесова квадратурна формула другог реда, која се заснива на интеграцији интерполационог полинома другог степена. Геометријски, ово значи да функцију $f(x)$ апроксимирамо на интервалу интерполације $[a, b]$, параболом која пролази кроз три еквилидистантне тачке.

Ако је интервал $[a, b]$ велик, интерполационе квадратурне формуле настале интеграцијом интерполационог полинома нижег степена не дају увек добре резултате. Са друге стране, коришћење интерполационих полинома вишег степена не мора довести до квадратурних формула задовољавајуће тачности. Такође, формирање формула великог реда тачности доводи до компликованог израчунавања коефицијената интеграције. Сви ови проблеми могу се избећи формирањем сложене Симпсонове формуле.

Посматрајмо интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Ако Симпсонова формула не даје добру апроксимацију посматраног интеграла, можемо на сваком од интервала $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ применити Симпсонову квадратурну формулу и добијене апроксимације сабрати. У том случају је приближна вредност траженог интеграла једнака том збиру.

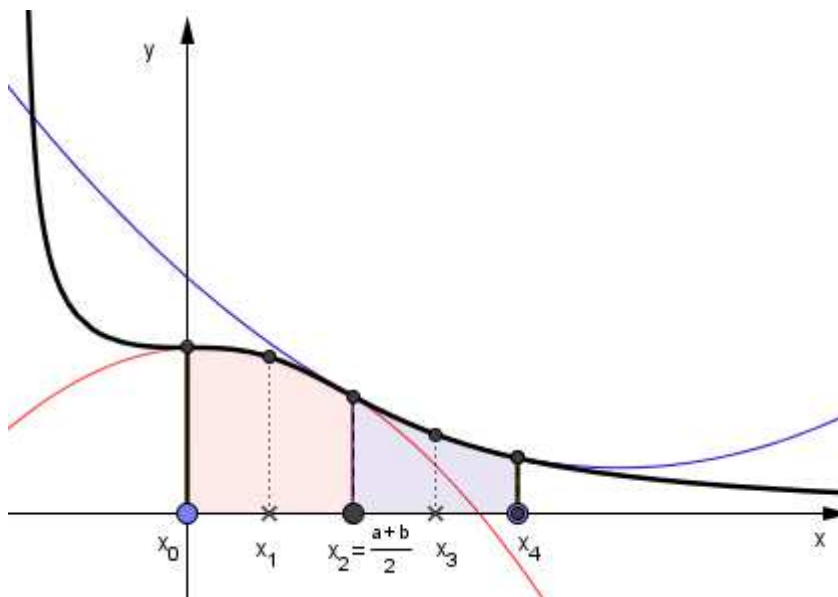
Нека је

$$x_0 = a, \quad x_2 = \frac{a+b}{2}, \quad x_4 = b$$

Добијамо,

$$S_4 = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{3} (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)),$$

$$S_4 = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_4)]$$



Слика 3. Геометријски приказ сложене Симпсонове формуле,

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

Уколико ни у овом случају нисмо добили жељену апроксимацију наставимо поступак и сваки од интервала у претходној интеграцији поделимо на још два интервала на којима примењујемо Симпсонову квадратурну формулу.

Поделом интервал $[a, b]$ на паран број $n = 2m$ подинтервала помоћу тачака x_i за које важи

$$x_i = a + iH, \quad i = 0, \dots, n$$

где је корак $H = \frac{b-a}{2m}$, добија се

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{H}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] + E(f) \end{aligned}$$

односно,

$$I(f; a, b) = S_n + E(f)$$

где је

$$E(f) = -\frac{b-a}{180} H^4 f^{(4)}(\tau), \quad \tau \in (a, b),$$

$$S_n(f; a, b) = \frac{H}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right].$$

Формула $S_n(f; a, b)$ је еквидистантна сложена Симпсонова формула, или краће сложена Симпсонова формула. Приметимо да у сложеној Симпсоновој формули коефицијенти изражени као производ $H/3$ и чланова низа 1, 4, 2, 4, ..., 4, 1. Због тога се овај метод зове и **Симпсоново правило 1/3**.

2.3.3 Основни задаци

Као и код осталих нумеричких поступака, тако и код нумеричке интеграције посматрају се следећи проблеми: дати геометријску интерпретацију (ако је могуће), израчунати апроксимацију и упоредити је са тачном вредношћу (ако је позната), израчунати апроксимацију и оценити грешку, израчунати апроксимацију тако да грешка по апсолутној вредности буде мања од унапред задате толеранције.

Пример 1. *Израчунати приближну вредност интеграла*

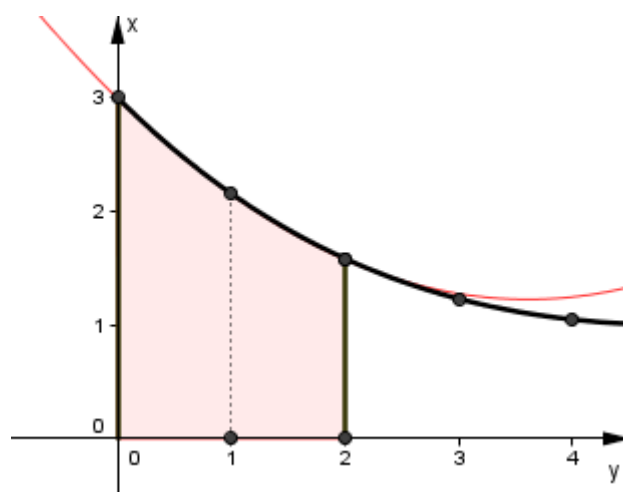
$$I = \int_0^2 (2 + \cos \sqrt{2x}) \, dx$$

помоћу Симпсонове квадратурне формуле за $n = 2, 4, 6, 8, 10$.

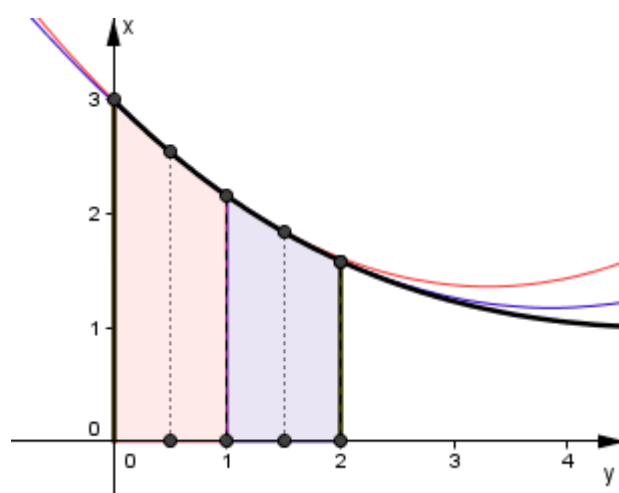
Решење. Приближну вредност овог интеграла израчунавамо применом Симпсоновог правила редом на интервалима:

- $[0, 2]$, (једна парабола)
- $[0, 1]$ и $[1, 2]$, (две параболе)
- $[0, 2/3]$, $[2/3, 4/3]$ и $[4/3, 2]$ (три параболе)
- $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[1, 3/2]$ и $[3/2, 2]$ (четири параболе)
- $[0, 2/5]$, $[2/5, 4/5]$, $[4/5, 6/5]$, $[6/5, 8/5]$ и $[8/5, 2]$ (пет параболоа)

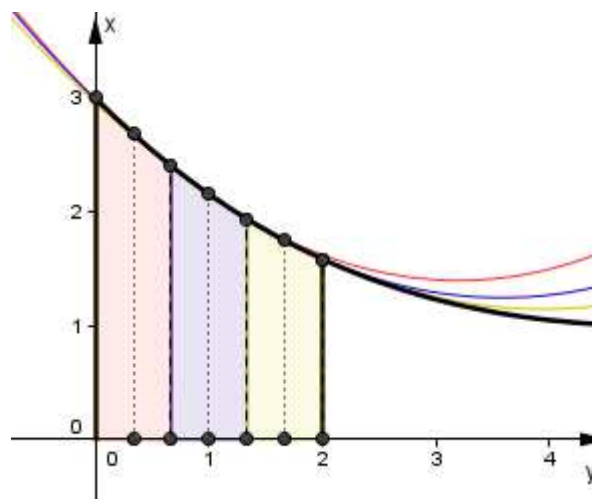
Директном интеграцијом одговарајућих полинома другог реда (парабола) у пакету *GeoGebra* добијамо:



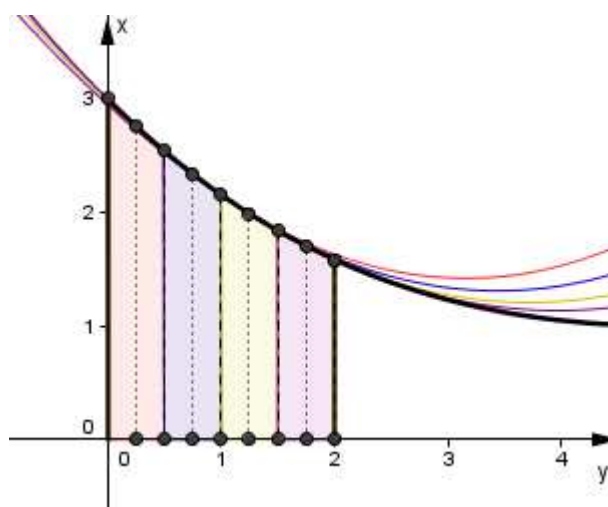
Слика 4. $n = 2$, $I \approx 4,40254$.



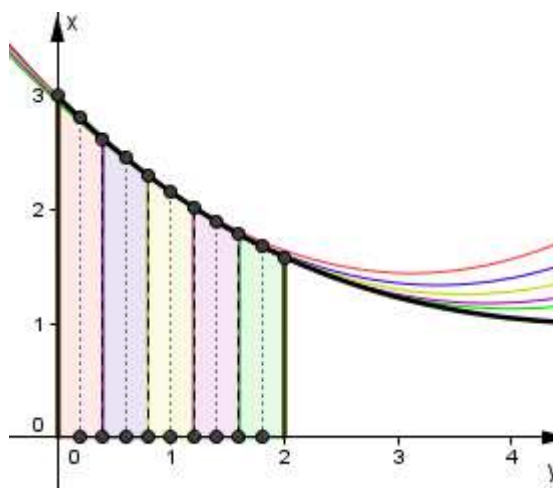
Слика 5. $n = 4$, $I \approx 4,40245$



Слика 6. $n = 6$, $I \approx 4,40245$



Слика 7. $n = 8$, $I \approx 4,54519$



Слика 8. $n = 10$, $I \approx 4,59326$

Пример 2. Израчунати приближну вредност интеграла

$$I = \int_0^1 (1+x)^{-1} dx$$

за $n = 4, 8, 10, 12, 16$ помоћу Симпсонове формуле, и упоредити их са тачном вредношћу интеграла.

Решење. Тачна вредност интеграла је $\int_0^1 (1+x)^{-1} dx = 0,693147$. У Табели 1. приказане су приближне вредности S_n интеграла добијене помоћу Симпсонове формуле за $n = 4, 8, 10, 12, 16$, и апсолутна вредност стварне грешке. Приближна решења, добијена су помоћу *Mathematica*-е.

n	S_n	Грешка
4	0.693254	0.000106788
8	0.693155	$7.35009 \cdot 10^{-6}$
10	0.69315	$3.05013 \cdot 10^{-6}$
12	0.693149	$1.48165 \cdot 10^{-6}$
16	0.693148	$4.72259 \cdot 10^{-7}$

Табела 1 .Приближне вредности интеграла

Пример 3. Користећи Симпсонову квадратурну формулу израчунати приближну вредност интеграла

$$I = \int_0^3 (3e^{-x} \sin(x^2) + 1) dx$$

за $n=160$ и оценити грешку.

Решење. Приближну вредност овог интеграла израчунавамо у пакету *Mathematica* и добијамо 3.83087. Грешку оцењујемо преко

$$\left| -\frac{b-a}{180} \cdot H^4 \cdot M_4 \right|$$

где је $a=0$, $b=3$, $H = \frac{3}{160}$, и

$$\left| f^{(4)}(x) \right| \leq M_4 = 175, \quad x \in [0, 3].$$

Тако добијамо

$$|I - 3.83087| \leq \frac{3}{180} \left(\frac{3}{160} \right)^4 \cdot 175 < 3.161 \cdot 10^{-7}.$$

Пример 4. Израчунати елиптички интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} \, dx$ помоћу Симпсонове формуле са тачношћу 0,001.

Решење. Из услова задатка имамо $\left| -\frac{b-a}{180} \cdot H^4 \cdot f^{(4)}(\tau) \right| \leq 10^{-3}, \quad \tau \in (a, b)$ и

$H = \frac{b-a}{2m}$ па је

$$\left| -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 16 \cdot m^4} \cdot f^{(4)}(\tau) \right| \leq 10^{-3}.$$

Како је

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x}$$

имамо

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(8\cos^2(x) - 8\sin^2(x)).$$

Осим тога је $|f^{(4)}(x)| \leq 4$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Сада добијамо

$$\left| -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot 16 \cdot m^4} \cdot f^{(4)}(\tau) \right| \leq \frac{\pi^5}{23040 \cdot m^4}$$

Како се у задатку захтева да се израчуна приближна вредност интеграла са тачношћу 10^{-3} , следи да треба одредити m тако да важи

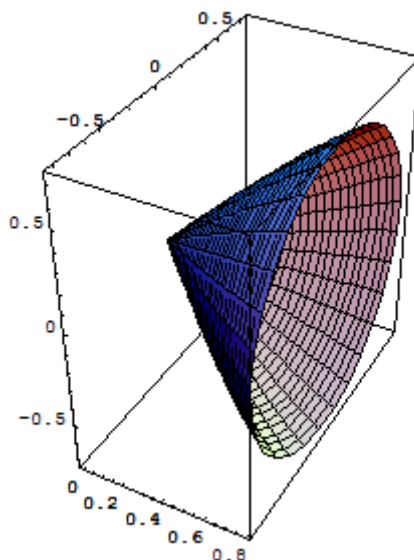
$$\frac{\pi^5}{23040 \cdot m^4} \leq 10^{-3}.$$

Добијамо $m \geq 1,90905$, односно довољно је узети $m \geq 2$. За $m = 2$ број подеока је $n = 2 \cdot m = 4$, па је приближно решење $Sn = 1.35067$.

Пример 5. Помоћу Симпсонове квадратурне формуле наћи приближну вредност запремине тела добијеног ротацијом криве $y = \sin x$ $0 \leq x \leq 0,8$ око x -осе. Узети за корак $h = 0,2$.

Решење. Запремина тела добијеног ротацијом криве $y = f(x)$ око x -осе у интервалу $[a, b]$ израчунава се помоћу интеграла

$$V = \pi \int_a^b (y(x))^2 dx.$$



Слика 9. Тело добијено ротацијом криве $y = \sin x$ $0 \leq x \leq 0,8$ око x -осе.

Приближну вредност овог интеграла израчунавамо применом Симпсоновог правила. Имамо да је $h = 0.2$, тј. $2m = 4$. Добили смо да је $V \approx 0.47146$.

2.4 Томас Симпсон (1710–1761.)

Томас Симпсон је рођен у малој породици која се бавила ткањем. Поседовао је скромно образовање, похађао је школу у родном месту, али се у почетку бавио ткањем. Био је самоук математичар, што и није била реткост за занатлије у то време. 1725. напустио је своје родно место како би прихватио место директора школе у Нунитону, округ Ворвик. Од 1725, када је имао петнаест година, до 1733. предавао је математику у Нунитону. У Нунитону је живео код госпође Свинфилд, којом се и оженио 1730. Имао је двоје деце Елизабету и Томаса. Међутим, није се дуго задржао на месту директора. Морао је са женом да побегне из Нунитона, јер су он или његов асистент на часу астрономије уплашили девојчицу прерушивши се у ђавола. 3 године је живео у Дербију, а потом се сели у Лондон. Симпсон је био почасни члан математичког удружења у Спиталфилдсу, кога су чиниле занатлије, већином ткаље. Такође је припадао и истакнутој групи путујућих предавача који су предавали у Лондонским кафетеријама, на различите теме, као што су математика, уметност, право итд. Ово можда изгледа чудно, али у то време, кафетерије су се називале Пени универзитетима, због тога што су нудиле јефтино образовање. Наиме, улаз се плаћао један пени, и док су гости пили кафу имали су могућност да слушају предаваче.



Од 1743. био је шеф катедре за математику на Краљевској војној академији у Вулвику. Академија је основана 2 године пре него што је Симпсон прихватио место шефа катедре, а његов рад на академији је имао велики утицај на математичке теме које је истраживао. Своје истраживање је започео у области инжењерства и архитектуре. Две године после именовања изабран је за члана краљевског друштва. Био је такође и члан Шветске краљевске академије наука. 1737. године објавио је тезу посвећену *Calculus of fluxions* (Њутнов израз за диференцијални рачун), која је била Њутнова верзија инфитезималног рачуна.

Симпсон је остао запамћен по свом раду на интерполацији и нумеричкој интеграцији. Иако је његов метод интеграције, познат је под именом „Симпсоново правило“, преузео га је од Њутна, што је и сам признао. Такође се бавио и теоријом вероватноће и 1740. објавио књигу „Природа и закони вероватноће“. На његов рад у овој области, утицао је Де Моавре. 1743. Објавио је дисертацију која се бавила телима насталим ротацијом елипсе око својих оса. 1754. Симпсон је постао уредник часописа *Ladies Diary*, где је објављивао чланке под псеудонима као што су Marmaduke Hodgson, Hurllothrumbo, Kubernetes, Patrick O'Cavannah, and Anthony Shallow, а потом је уређивао часописе *Gentleman's Magazine*, *Miscellanea Curiosa Mathematica* и *Gentleman's Diary*.

3. Примене Симпсонове формуле

3.1 Израчунавање запремине неких обртних тела

Запремина тела добијеног ротацијом криве $y = f(x)$ око x -осе у интервалу $[a, b]$ израчунава се помоћу интеграла

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Ако је подинтегрална функција полином степена не већег од 3 грешка апроксимације посматраног интеграла помоћу Симпсонове формуле једнака је нули. У том случају важи

$$V = \pi \frac{b-a}{6} \left(f(a)^2 + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + f(b)^2 \right).$$

3.1.1 Запремина купе

Посматрајмо тело настало ротацијом дела праве

$$f(x) = R \left(1 - \frac{x}{H} \right)$$

од 0 до H . Овде је $a = 0$, $b = H$ и добијамо

$$V = \pi \frac{H}{6} \left(R^2 + 4 \left(\frac{R}{2} \right)^2 + 0 \right) = \frac{1}{3} R^2 \pi H.$$

3.1.2 Запремина зарубљене купе

Посматрајмо тело настало ротацијом дела праве

$$f(x) = \frac{r-R}{h} x + R$$

од 0 до h . Овде је $a = 0$, $b = h$ и добијамо

$$V = \pi \frac{h}{6} \left(R^2 + 4 \left(\frac{r+R}{2} \right)^2 + r^2 \right) = \frac{1}{3} (R^2 + Rr + r^2) \pi h.$$

3.1.3 Запремина лопте

Посматрајмо тело настало ротацијом криве

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

од $-R$ до R . Овде је $a = -R$, $b = R$ и добијамо

$$V = \pi \frac{2R}{6} \left(0 + 4 \left(\sqrt{R^2} \right)^2 + 0 \right) = \frac{4}{3} R^3 \pi h.$$

3.1.4 Запремина бачве

Посматрајмо ротацију полинома одређеног тачкама

$$\left(-\frac{h}{2}, r \right), (0, R), \left(\frac{h}{2}, r \right),$$

тј. полинома

$$p_2(x) = \frac{4x^2(r-R)}{h^2} + R$$

$-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$. Овде је $a = -\frac{h}{2}$, $b = \frac{h}{2}$ и добијамо

$$V = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_2(x)^2 dx = \frac{1}{15} h \pi (3r^2 + 4rR + 8R^2).$$

Према Симпсоновој формули је

$$V = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_2(x)^2 dx = \pi \left(p_2\left(-\frac{h}{2}\right)^2 + 4p_2(0)^2 + p_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 \right) + \pi R$$

где је

$$R = -\frac{\frac{d^4}{dx^4} p_2(x)^2}{90} \left(\frac{h}{2} \right)^5 = -\frac{384(r-R)^2}{90h^4} \left(\frac{h}{2} \right)^5 = -\frac{2}{15} h \pi (r-R)^2.$$

Као приближну вредност запремине бачве можемо узети

$$V^* = \pi \left(p_2 \left(-\frac{h}{2} \right)^2 + 4p_2(0)^2 + p_2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + 2R^2),$$

са грешком

$$V - V^* = -\frac{2}{15} h \pi (r - R)^2.$$

Формула

$$V^* = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + 2R^2)$$

се у литератури често наводи као формула за израчунавање запремине бачве.

3.1.5 Запремина ваљка

Ако се у формули за запремину бачве узме $r = R$ добија се ротационо тело ваљак и његова запремина

$$V = \pi R^2 h.$$

Очигледно, грешка је у овом случају једнака нули.

3.1.6 Симпсоново правило или призмаидална формула

Нека је тело висине H чије су основе паралелне и пресечено на два дела тако да је пресечна раван паралелна равнима основа. Ако је површина једне основе P_d , друге основе P_g и пресека P_m онда се за запремину тог тела узима

$$V = \frac{H}{6} (P_d + 4P_m + P_g).$$

Ова формула се назива призмаидална формула или Симпсоново правило.

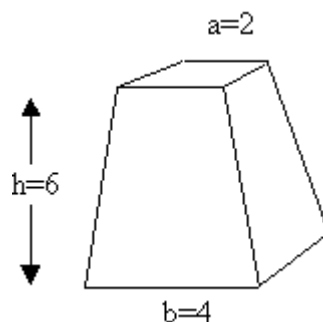
Према Симпсоновом правилу очигледно добијамо тачне вредности за запремину купе, лопте, крње купе и ваљка. Лако се можемо уверити да се по овом правилу можемо добити запремине коцке, призме, пирамиде и крње пирамиде.

Симпсоново правило примењену на израчунавање запремине бачве приписују и Кеплеру. Саму Симпсонову формулу публиковао је и Грегори 1668. године. Међутим, ово правило је још старије. У Московском папирусу, написаном у Египту око 1890. године п.н.е. јавља се следећи задатак.

Запремину пирамиде висине 6, доње базе 4 и горње базе 2 добићете тако што ћете квадрати доњу базу сабрати овај број са квадратом горње базе и све то увећати за производ база да бисте добили 28. Овај број помножите са трећином висине и добићете тачну вредност 56.

У данашњој нотацији интерпретација овог текста даје

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$



У <http://www.mathpages.com/home/kmath189/kmath189.htm> можемо наћи више о призмоналној формули. Призмоналне формуле нису увек тачне, као што то показује запремина бачве. О корекцијама ових формула још увек се пишу радови, као на пример [1].

3.2 Поступак Рунге–Кута

3.2.1 Нумеричко решавање почетних проблема

Под **диференцијалном једначином** подразумева се једначина у којој се поред непознате функције и њеног аргумента појављује и један или више њених извода. **Решење** диференцијалне једначине је функција која задовољава ту једначину. На пример, решење диференцијалне једначине $y' - y = e^x$ је $y(x) = xe^x + Ce^x$, решење диференцијалне једначине $y'' + 9y = 0$ је $y(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$ и решење диференцијалне једначине $y' + \frac{1}{2y} = 0$ је $y(x) = \sqrt{C - x}$.

Са C је означена произвољна бројна константа што указује на то да диференцијална једначина нема у општем случају јединствено решење. Зато су при решавању диференцијалних једначина од интереса неки посебни услови помоћу којих се одређују непознате константе. За диференцијалне једначине првог реда задају се такозвани **почетни услови** облика $y(x_0) = y_0$.

Диференцијална једначина са почетним условом чини почетни проблем

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha,$$

који називамо и Кошијев проблем.

Постоји велики број аналитичких метода за решавање диференцијалних једначина али су ти методи ограничени на специјалне случајеве. Међутим, код великог броја проблема (који су често повезани са математичким моделима неких процеса и појава у техници, физици,

биологији и другим дисциплинама или природним појавама) није могуће применити аналитичке методе, па је потребно приступити нумеричком одређивању приближног решења. Нумеричко решење је пожељно чак и у случају када постоји решење али је врло компликовано. Нумеричко решење диференцијалне једначине често је задато у облику табеле тако да аналитички израз за функцију остаје и даље непознат.

Посматраћемо почетни проблем

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha.$$

У овом раду посматраће се поступци засновани на дискретизацији. Код ових поступака се добијају приближне вредности решења на скупу $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, при чему су најчешће вредности x_i еквидистантне тј.

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Где је h дужина корака или корак дискретизације.

Нумерички поступак састоји се у томе да се свакој тачки x_i додели вредност y_i која се затим посматра као апроксимација вредности $y(x_i)$ тачног решења у тачки x_i . Поступци за нумеричко решавање почетних проблема деле се на **једнокорачне** и **вишекорачне**. Код једнокорачних поступака за израчунавање вредности y_{i+1} довољно је познавање вредности y_i . Вишекорачни поступци за израчунавање вредности y_{i+1} захтевају познавање одређеног броја претходно израчунатих вредности $y_i, y_{i-1}, \dots$. Поступак је k -корачан ако захтева k претходних вредности.

Код једнокорачних поступака свака тачка скупа $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ може се посматрати као почетна. То омогућава да се корак дискретизације може мењати од тачке до тачке. Поступци који су k -корачни поступци захтевају специјално рачунање у првих k тачака $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$. Исти такав начин рачунања је потребан и при промени дужине корака дискретизације. Рачунање са вишекорачним поступцима је нешто сложеније, али зато тачније у односу на једнокорачне.

3.2.2 Опис поступка

У овом делу посматраћемо једнакорачни поступак Рунге-Кута за решавање почетног проблема обичних диференцијалних једначина. Поступак у литератури познат као поступак Рунге-Кута развили су заједно немачки математичари Карл Рунге и Мартин Кута.

Поступак Рунге-Кута припада једној широј класи једнакорачних поступака високог реда тачности. Често се цела ова класа назива именом

поступци Рунге-Кута. Унутар те класе поступци се разликују по реду тачности, односно реду конзистенције.

Претпоставља се да је $f \in C^4(G)$, што има за последицу да је $y \in C^5[a, b]$, и да је $h \in (0, h_0]$. Полази се од апроксимације интеграла

$$\frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(s, y(s)) ds = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} y'(s) ds$$

Симпсоновом квадратурном формулом. За неко $\tau \in (x, x + \frac{h}{2})$ важи

$$\frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} y'(s) ds = \frac{1}{6} \cdot \left(y'(x) + 4 \cdot y'(x + \frac{h}{2}) + y'(x+h) \right) - \frac{h^4}{2880} \cdot y^{(5)}(\tau).$$

За

$$f_h(x, y(x)) = \frac{1}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3),$$

где је

$$k_0 = f(x, y(x)),$$

$$k_1 = f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} \cdot k_0\right),$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} \cdot k_1\right),$$

$$k_3 = f(x+h, y(x) + h \cdot k_2),$$

важи

$$f_h(x, y(x)) = \frac{1}{6} \cdot \left(y'(x) + 4 \cdot y'(x + \frac{h}{2}) + y'(x+h) \right) + O(h^4).$$

На тај начин, са функцијом $f_h(x, s)$ дефинисаном као горе се добија поступак који се може записати као

$$u(a) = \alpha_h$$

$$u(x+h) = u(x) + h \cdot f_h(x, u(x)), \quad x \in I'_h,$$

а за локалну грешку одсецања

$$T_h(x) = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} y'(s) ds - f_h(x, y(x))$$

важи

$$|T_h(x)| \leq K_1 \cdot h^4,$$

где је K_1 константа независна од h .

Сада ћемо доказати релацију

$$f_h(x, y(x)) = \frac{1}{6} \cdot \left(y'(x) + 4 \cdot y'\left(x + \frac{h}{2}\right) + y'(x+h) \right) + O(h^4).$$

У доказу ове релације уводи се скраћено обележавање. Нека је за фиксну вредност $x \in I'_h$

$$x_0 = x, \quad x_1 = x_2 = x + \frac{h}{2}, \quad x_3 = x + h,$$

и

$$y_i = y(x_i), \quad y'_i = y'(x_i), \quad y''_i = y''(x_i), \dots, \quad y^{iv}_i = y^{iv}(x_i), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Прво се добија

$$k_0(x, y(x)) = f(x, y(x)) = y'(x) = y'_0.$$

Тејлорови развоји за y и y' у тачки $x_1 = x_2 = x + \frac{h}{2}$ дају

$$y_0 = y(x) = y_1 - \frac{h}{2} \cdot y'_1 + \frac{h^2}{8} \cdot y''_1 - \frac{h^3}{48} \cdot y'''_1 + \frac{h^4}{384} \cdot y^{iv}_1(\tau_1), \quad \tau_1 \in \left(x, x + \frac{h}{2}\right),$$

$$y'_0 = y'(x) = y'_1 - \frac{h}{2} \cdot y''_1 + \frac{h^2}{8} \cdot y'''_1 - \frac{h^3}{48} \cdot y^{iv}_1(\tau_2), \quad \tau_2 \in \left(x, x + \frac{h}{2}\right),$$

$$z_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot y'_0 = y_1 - \frac{h^2}{8} \cdot y''_1 + \frac{h^3}{24} \cdot y'''_1 + O(h^4).$$

Очигледно се може писати

$$z_1 = y_1 + O(h^2).$$

сада је за неко $(x_1, \sigma_1) \in G$

$$\begin{aligned}
k_1(x, y(x)) &= f(x_1, z_1) = \\
&= f(x_1, y_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (z_1 - y_1) + \frac{1}{2} \cdot f_{yy}(x_1, \sigma_1) \cdot (z_1 - y_1)^2
\end{aligned}$$

па следи

$$k_1(x, y(x)) = y_1' - \left(\frac{h^2}{8} \cdot y_1'' - \frac{h^3}{24} \cdot y_1''' \right) \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4).$$

Овде се претпоставља да тачка (x_1, z_1) и дуж одређена тачкама (x_1, y_1) и (x_1, z_1) припадају скупу G за $0 < h \leq h_0$. На основу добијеног резултата следи

$$z_2 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1, z_1) = y_1 + \frac{h^2}{8} \cdot y_1'' - \frac{h^3}{48} \cdot y_1''' - \frac{h^3}{16} \cdot y_1'' \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4).$$

Како је

$$z_2 = y_1 + O(h^2),$$

поступајући као раније, добија се да постоји $(x_1, \sigma_2) \in G$ тако да важи

$$\begin{aligned}
k_2(x, y(x)) &= f(x_2, z_2) = \\
&= f(x_1, y_1) + f_y(x_1, y_1) \cdot (z_2 - y_1) + \frac{1}{2} \cdot f_{yy}(x_1, \sigma_2) \cdot (z_2 - y_1)^2
\end{aligned}$$

па за $0 < h \leq h_0$ следи

$$k_2(x, y(x)) = y_1' + \left(\frac{h^2}{8} \cdot y_1'' - \frac{h^3}{48} \cdot y_1''' - \frac{h^3}{16} \cdot y_1'' \cdot f_y(x_1, y_1) \right) \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4).$$

Сада се истом техником добија

$$y_3 = y(x+h) = y_1 + \frac{h}{2} \cdot y_1' + \frac{h^2}{8} \cdot y_1'' + \frac{h^3}{48} \cdot y_1''' + \frac{h^4}{384} \cdot y_1^{iv}(\tau_3), \quad \tau_3 \in (x, x+h).$$

Даље је

$$\begin{aligned}
z_3 &= y_0 + h \cdot f(x_2, z_2) = y_0 + h \cdot y_1' + \frac{h^3}{8} \cdot y_1'' \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4) = \\
&= y_3 - \frac{h^3}{24} \cdot y_1''' + \frac{h^3}{8} \cdot y_1'' \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4),
\end{aligned}$$

јер је

$$y_0 + hy'_1 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot y'_1 + \frac{h^2}{8} \cdot y''_1 - \frac{h^3}{48} \cdot y'''_1 + O(h^4).$$

За $0 < h \leq h_0$ и $(h_3, \sigma_3) \in G$, добија се

$$\begin{aligned} k_3(x, y(x)) &= f(x_3, z_3) = \\ &= f(x_3, y_3) + f_y(x_3, y_3) \cdot (z_3 - y_3) + \frac{1}{2} \cdot f_{yy}(x_3, \sigma_3) \cdot (z_3 - y_3)^2 = \\ &= y'_3 - \left(\frac{h^3}{24} \cdot y'''_1 - \frac{h^3}{8} \cdot y''_1 \cdot f_y(x_1, y_1) \right) \cdot f_y(x_3, y_3) + O(h^4). \end{aligned}$$

Како је за $(\tau_4, y_3), (x_1, \sigma_4) \in G$,

$$\begin{aligned} f_y(x_3, y_3) &= f_y(x_1, y_1) + f_{yx}(\tau_4, y_3) \cdot (x_3 - x_1) + f_{yy}(x_1, \sigma_4) \cdot (y_3 - y_1) \\ &= f_y(x_1, y_1) + O(h), \end{aligned}$$

следи

$$k_3(x, y(x)) = y'_3 - \left(\frac{h^3}{24} \cdot y'''_1 - \frac{h^3}{8} \cdot y''_1 \cdot f_y(x_1, y_1) \right) \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4).$$

Овде се користи чињеница да са тачкама (x_1, y_1) , (x_3, y_3) и дуж одређена њима припада области G за $h \leq h_0$. Сада је

$$\begin{aligned} 6 \cdot f_h(x, y_0) &= k_0(x, y_0) + 2 \cdot k_1(x, y_0) + 2 \cdot k_2(x, y_0) + k_3(x, y_0) = \\ &= y'_0 + 2 \cdot \left(y'_1 - \left(\frac{h^2}{8} \cdot y''_1 - \frac{h^3}{24} \cdot y'''_1 \right) \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4) \right) \\ &+ 2 \cdot \left(y'_1 + \left(\frac{h^2}{8} \cdot y''_1 - \frac{h^3}{48} \cdot y'''_1 - \frac{h^3}{16} \cdot y''_1 \cdot f_y(x_1, y_1) \right) \cdot f_y(x_1, y_1) \right) + O(h^4) \\ &+ y'_3 - \left(\frac{h^3}{24} \cdot y'''_1 - \frac{h^3}{8} \cdot y''_1 \cdot f_y(x_1, y_1) \right) \cdot f_y(x_1, y_1) + O(h^4) = \\ &= y'_0 + 4 \cdot y'_1 + y'_3 + O(h^4). \end{aligned}$$

3.2.3 Конзистенција

Теорема 7. Нека је $f \in C(G)$ и $|f(x, y)| \leq M$, $(x, y) \in G$, и $\lim_{h \rightarrow 0} |\alpha_h - \alpha| = 0$. Тада је једнокорачни поступак Рунге-Кута конзистентан са почетним проблемом $y' = f(x, y)$, $y(a) = \alpha$.

Теорема 8. За $f \in C^4(G)$ и $|\alpha_h - \alpha| = O(h^4)$ поступак Рунге-Кута је реда конзистенције $p = 4$.

3.2.4 Конвергенција

Конвергенција поступака Рунге-Кута следи из опште теореме о конвергенцији и претпоставке да посматрани почетни проблем задовољава Липшицов услов

$$|f(x, z) - f(x, z')| \leq L_0 |z - z'|, \quad (x, z), (x, z') \in G.$$

Теорема 9. Нека је $f \in C^4(G)$ и нека f задовољава Липшицов услов. Ако је $|\alpha - \alpha_h| \leq Kh^4$, онда је поступак Рунге-Кута реда конвергенције $p = 4$.

3.2.5 Стабилност

На основу опште теореме о стабилности једнокорачних поступака и теореме о конвергенцији поступака Рунге-Кута добија се стабилност поступака Рунге-Кута.

Теорема 10. Ако је поступак Рунге-Кута конзистентан са почетним проблемом

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha,$$

и ако $f(x, y)$ задовољава Липшицов услов, онда је тај поступак стабилан.

3.3 Фамилија једнокорачних поступака

Код нумеричких поступака за решавање почетних проблема основни проблем је апроксимација интеграла

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt \quad (7)$$

неким од поступака нумеричке интеграције. Код поступка Рунге-Кута за апроксимацију тог интеграла коришћена је Симпсонова формула. Уместо Симпсонове формуле, као специјалног случаја Њутн-Котесових формула, могу се користити и друге Њутн-Котесове формуле. Један преглед таквих апроксимација дат је у раду [12], где су апроксимацијом интеграла Њутн-Котесовим формулама добијени различити нумерички поступци за решавање почетног проблема. Да би се добила коначна форма ових поступака користи се иста техника као и код основног поступка Рунге-Кута, описаног раније. То значи да се Тејлорови развоји разних функција комбинују да би се одредио ред конвергенције поступака. Овде наводимо те резултате без доказа, са напоменом да су многи поступци познати већ од раније.

3.3.1 Посебни поступци

3.3.1.1 Побољшани Ојлеров поступак

Апроксимацијом интеграла из формуле (7) формулом средњих правоугаоника

$$\int_a^b f(t, y(t)) dt \approx hf \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

добивамо

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \right). \quad (8)$$

Ако вредност $y \left(x_i + \frac{h}{2} \right)$ апроксимирамо Тејлоровим развојем добија се једнакорачни поступак

$$y_{i+1} = y_i + hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right).$$

Овај поступак назива се **Побољшани Ојлеров поступак**. Док формула,

$$y_{i+2} = y_i + 2hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad (9)$$

представља 2-корачну експлицитну формулу добијену применим формуле средњег правоугаоника на интеграл из формуле (7).

3.3.1.2 Побољшани Ојлер-Кошијев поступак

Ако се интеграл у (7) апроксимира трапезном формулом

$$\int_a^b f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{2} [f(a) + f(b)],$$

добивамо

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]. \quad (10)$$

Апроксимирањем вредности $y(x_{i+1})$ Тејлоровим развојем добија се једнокорачни поступак

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right) \right].$$

Добијени једнокорачни поступак назива се **Побољшани Ојлер-Кошијев поступак**.

3.3.1.3 Трокорачни експлицитни поступак

Апроксимирањем интеграла у (7) отвореном Њутн-Котесовом формулом са две тачке

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right]$$

добиа се формула

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f\left(x_i + \frac{h}{3}, y\left(x_i + \frac{h}{3}\right)\right) + f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)\right) \right] \quad (11)$$

која постаје једнокорачна формула ако вредност $y\left(x_i + \frac{h}{3}\right)$ и $y\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)$ апроксимирамо Тејлоровим развојем.

Поступак

$$y_{i+3} = y_i + \frac{3h}{2} \left[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2}) \right] \quad (12)$$

је 3-корачни експлицитни поступак.

3.3.1.4 3- корачни експлицитни поступак

Њутн- Котесова, затворено-отворена формула са три тачке има облик

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{4} \left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right].$$

Апроксимирањем интеграла у (7) Њутн- Котесовом, затворено-отвореном формулом са три тачке добијамо формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left[f(x_i, y(x_i)) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)\right) \right] \quad (13)$$

која постаје једнокорачна ако апроксимирамо вредности $y\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)$ Тејлоровим развојем.

Док је 3- корачни експлицитни поступак дат са

$$y_{i+3} = y_i + \frac{h}{4} \left[f(x_i, y(x_i)) + 3f\left(x_i + \frac{2}{3}h, y\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)\right) \right] \quad (14)$$

3.3.1.5 3-корачни имплицитни поступак

Њутн- Котесова, отворено-затворена формула са три тачке има облик

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{4} \left[3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f(b) \right].$$

Апроксимацијом интеграла у (7) Њутн-Котесовом, отворено-затвореном формулом са три тачке добијамо формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left[3f\left(x_i + \frac{1}{3}h, y\left(x_i + \frac{1}{3}h\right)\right) + f(x_i + h, y(x_i + h)) \right] \quad (15)$$

која постаје једнокорачна формула ако се вредности $y\left(x_i + \frac{1}{3}h\right)$ и $y(x_i + h)$ апроксимирају Тејлоровим развојем.

Поступак

$$y_{i+3} = y_i + \frac{3}{4}h \left[3f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+3}, y_{i+3}) \right] \quad (16)$$

представља 3-корачни имплицитни поступак.

3.3.1.6 Поступак Рунге-Кута

Ако се интеграл у (7) апроксимира Симпсоновом квадратурном формулом добијамо

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[f(x_i, y(x_i)) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \right] \quad (17)$$

Апроксимацијом вредности $y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ и $y(x_{i+1})$ Тејлоровим развојем добијамо једнокорачни поступак за нумеричко решавање почетног проблема. Овај поступак називамо **Поступак Рунге-Кута**. Док је поступак

$$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3} \left[f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2}) \right] \quad (18)$$

2-корачни имплицитни поступак.

3.3.1.7 4-корачни експлицитни поступак

Отворена Њутн-Котесова формула кроз три тачке је облика

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3} \left[2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right].$$

Апроксимацијом интеграла у (7) отвореном Њутн-Котесовом формулом кроз три тачке добија се формула

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} \left[2f\left(x_i + \frac{h}{4}, y\left(x_i + \frac{h}{4}\right)\right) - f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) + 2f\left(x_i + \frac{3h}{4}, y\left(x_i + \frac{3h}{4}\right)\right) \right] \quad (19)$$

Апроксимацијом вредности $y\left(x_i + \frac{h}{4}\right)$, $y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ и $y\left(x_i + \frac{3h}{4}\right)$

Тејлоровим развојем добијамо једнокорачни поступак за нумеричко решавање почетног проблема.

Поступак

$$y_{i+4} = y_i + \frac{4h}{3} \left[2f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_{i+2}, y_{i+2}) + 2f(x_{i+3}, y_{i+3}) \right] \quad (20)$$

је 4-корачни експлицитни поступак.

3.3.1.8 3-корачни имплицитни поступак

Затворена Њутн-Котесова формула са четири тачке је облика

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right]$$

Апроксимацијом интеграла у (7) затвореном Њутн-Котесовом формулом кроз четири тачке добија се формула

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8} \left[f(x_i, y_i) + 3f\left(x_i + \frac{h}{3}, y\left(x_i + \frac{h}{3}\right)\right) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)\right) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) \right] \quad (21)$$

која постаје једнокорачна ако апроксимирамо вредности $y\left(x_i + \frac{h}{3}\right)$, $y\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)$ и $y(x_{i+1})$ Тејлоровим развојем.

Док је поступак

$$y_{i+3} = y_i + \frac{3h}{8} \left[f(x_i, y_i) + 3f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 3f(x_{i+2}, y_{i+2}) + f(x_{i+3}, y_{i+3}) \right] \quad (22)$$

3-корачни имплицитни поступак.

3.3.1.9 5-корачни експлицитни поступак

Отворена Њутн-Котесова формула кроз четири тачке је облика

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{24} \left[11f\left(\frac{4a+b}{5}\right) + f\left(\frac{3a+2b}{5}\right) + f\left(\frac{2a+3b}{5}\right) + 11f\left(\frac{a+4b}{5}\right) \right]$$

Апроксимацијом интеграла у (7) отвореном Њутн-Котесовом формулом кроз четири тачке добија се

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left[\begin{aligned} &11f\left(x_i + \frac{h}{5}, y\left(x_i + \frac{h}{5}\right)\right) \\ &+ f\left(x_i + \frac{2h}{5}, y\left(x_i + \frac{2h}{5}\right)\right) \\ &+ f\left(x_i + \frac{3h}{5}, y\left(x_i + \frac{3h}{5}\right)\right) \\ &+ 11f\left(x_i + \frac{4h}{5}, y\left(x_i + \frac{4h}{5}\right)\right) \end{aligned} \right] \quad (23)$$

која постаје једнокорачна ако апроксимирамо вредности $y\left(x_i + \frac{h}{5}\right)$, $y\left(x_i + \frac{2h}{5}\right)$, $y\left(x_i + \frac{3h}{5}\right)$ и $y\left(x_i + \frac{4h}{5}\right)$ Тејлоровим развојем.

Поступак

$$y_{i+5} = y_i + \frac{5h}{24} \left[11f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2}) + f(x_{i+3}, y_{i+3}) + 11f(x_{i+4}, y_{i+4}) \right] \quad (24)$$

је 5-корачни експлицитни поступак.

3.3.2 Ред конвергенције посебних поступака

Поступци описани у претходном параграфу могу се посматрати заједно и на тај начин се за све њих може утврдити и доказати конзистенција, стабилност а самим тим и конвергенција. Дајемо кратак опис резултата преузетих из рада [12].

Видимо да је вишекорачна формула облика

$$a_k y_m + a_{k-1} y_{m-1} + \dots + a_0 y_{m-k} = h [b_k f_m + b_{k-1} f_{m-1} + \dots + b_0 f_{m-k}]$$

где је

$$f_j = f(x_j, y_j).$$

Нека је

$$p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$q(z) = b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_1 z + a_0$$

$$d_0 = \sum_{i=0}^k a_i,$$

$$d_1 = \sum_{i=0}^k (i a_i - b_i)$$

$$d_2 = \sum_{i=0}^k \left(\frac{i^2}{2} a_i - i b_i \right)$$

$$d_3 = \sum_{i=0}^k \left(\frac{i^3}{6} a_i - \frac{i^2}{2} b_i \right)$$

$\vdots$

$$d_j = \sum_{i=0}^k \left(\frac{i^j}{j!} a_i - \frac{i^{j-1}}{(j-1)!} b_i \right)$$

и

$$Ly = \sum_{i=0}^k [a_i y(ih) - h b_i y'(ih)].$$

Теорема 11. Следећи услови су еквивалентни:

(1) $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 0$

(2) $Lp = 0$ за сваки полином степена мањег или једнаког n

(3) Ly је $O(h^{n+1})$ за свако $y \in C^{n+1}$.

Дефиниција 4. Метод је стабилан ако се сви корени полинома $p(z)$ налазе унутар диска $|z| \leq 1$ а сваки корен модула један и прост.

Дефиниција 5. Метод је конзистентан ако је $p(1) = 0$ и $p'(1) = q(1)$.

Теорема 12. Вишекорачни метод из једнакости (21) је конвергентан ако и само ако је стабилан и конзистентан.

Теорема 13. Метод $y_{i+2} = y_i + 2hf(x_{i+1}, y_{i+1})$ је конвергентан са редом конвергенције 3.

Теорема 14. Метод $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$ је конвергентан са редом конвергенције 3.

Теорема 15. Метод $y_{i+3} = y_i + \frac{3h}{2}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2})]$ је конвергентан са редом конвергенције 3.

Теорема 16. Метод $y_{i+3} = y_i + \frac{3}{4}h[f(x_i, y_i) + 3f(x_{i+2}, y_{i+2})]$ је конвергентан са редом конвергенције 4.

Теорема 17. Метод $y_{i+3} = y_i + \frac{3}{4}h[3f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+3}, y_{i+3})]$ је конвергентан са редом конвергенције 4.

Теорема 18. Метод $y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3}[f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2})]$ је конвергентан са редом конвергенције 4.

Теорема 19. Метод $y_{i+4} = y_i + \frac{4h}{3}[2f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_{i+2}, y_{i+2}) + 2f(x_{i+3}, y_{i+3})]$ је конвергентан са редом конвергенције 5.

Теорема 20. *Метод*

$$y_{i+3} = y_i + \frac{3h}{8} \left[f(x_i, y_i) + 3f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 3f(x_{i+2}, y_{i+2}) + f(x_{i+3}, y_{i+3}) \right] \quad \text{je}$$

конвергентан са редом конвергенције 5.

Теорема 21. *Метод*

$$y_{i+5} = y_i + \frac{5h}{24} \left[11f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_{i+2}, y_{i+2}) + f(x_{i+3}, y_{i+3}) + 11f(x_{i+4}, y_{i+4}) \right]$$

је конвергентан са редом конвергенције 5.

3.4 Неке модификације поступка Рунге–Кута

3.4.1 Гилова модификација

У раду [13] приказана је Гилова модификација поступка Рунге-Кута, публикована у раду [4]. Ова модификација је

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[k_1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k_2 + 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k_3 + k_4 \right],$$

где је

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1 \right),$$

$$k_3 = f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) h k_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) h k_2 \right),$$

$$k_4 = f \left(x_i + h, y_i - \frac{1}{\sqrt{2}} h k_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) h k_3 \right).$$

Код Гилове модификације константе су биране тако да ред поступка остане 4 али да се смањи константа у изразу за грешку у односу на одговарајућу код поступка Рунге-Кута.

3.4.2 Модификације засноване на срединама

Функција корака поступка Рунге-Кута је

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{6} \left[k_1(x_i, y_i) + 2k_2(x_i, y_i) + 2k_3(x_i, y_i) + k_4(x_i, y_i) \right]$$

коју ћемо кратко записати као

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Очигледно, $f_h(x_i, y_i)$ се може посматрати као аритметичка средина за k_1 , $2k_2$, $2k_3$ и k_4 . Имајући то у виду, у раду се [14] посматрају се модификације поступка Рунге-Кута засноване на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ одговарајућим изразима у којима се користе средине AM , GM , HM , NeM , CoM , RMS , SeM , које су дефинисане са

- Аритметичка средина $AM(a, b) = \frac{a+b}{2}$

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Геометријска средина $GM(a, b) = \sqrt{ab}$

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{3}(\sqrt{|k_1 k_2|} + \sqrt{|k_2 k_3|} + \sqrt{|k_3 k_4|})$$

- Хармонијска средина $HM(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{2}{3} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} \right)$$

- Херонска средина $NeM(a, b) = \frac{1}{3}(a + \sqrt{ab} + b)$

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{9}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4 + \sqrt{|k_1 k_2|} + \sqrt{|k_2 k_3|} + \sqrt{|k_3 k_4|})$$

- Контрахармонијска средина $CoM(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2^2 k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 k_4^2}{k_3 + k_4} \right)$$

- Корен-квадрат средина $RMS(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

$$f(x_i, y_i) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}} + \sqrt{\frac{k_2^2 + k_3^2}{2}} + \sqrt{\frac{k_3^2 + k_4^2}{2}} \right)$$

- Центроидална средина $CM(a, b) = 2 \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}$

$$f(x_i, y_i) = \frac{2}{9} \left(\frac{k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2^2 + k_2 k_3 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_3 k_4 + k_4^2}{k_3 + k_4} \right)$$

У овом раду дефинишемо још две нове модификације поступка Рунге-Кута засноване на логаритамској средини и корен-квадрат средини.

- Логаритамска средина $LM(a, b) = \frac{a - b}{\log a - \log b}$

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{|k_1| - |k_2|}{\log|k_1| - \log|k_2|} + \frac{|k_2| - |k_3|}{\log|k_2| - \log|k_3|} + \frac{|k_3| - |k_4|}{\log|k_3| - \log|k_4|} \right)$$

- Квадрат-корен средина $SMR(a, b) = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2$

$$f_h(x_i, y_i) = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\sqrt{|k_1|} + \sqrt{|k_2|}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|k_2|} + \sqrt{|k_3|}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{|k_3|} + \sqrt{|k_4|}}{2} \right)^2 \right).$$

3.4.3 Вишекоражни поступци који као стартер користе поступак Рунге-Кута

Милне-Симпсонов и Адамс-Башфорт-Мултонов поступак припадају класи вишекоражних поступака за нумеричко решавање почетних проблема. Оба ова поступка као стартер користе поступак Рунге-Кута.

Код једнокоражних поступака за решавање почетних проблема довољно је било само познавање вредности y_i за израчунавање вредности y_{i+1} . Док, Милне-Симпсонов и Адамс-Башфорт-Мултонов поступак користе $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}$ и y_i за израчунавање вредности y_{i+1} . Стога, да би се стартовала ова два поступак, потребно је узрачунати прве три вредности. Почетне вредности y_1, y_2, y_3 код оба поступка рачунају се помоћу методе Рунге-Кута.

Теорема 21. Нека је $f(x, y)$ непрекидна на $[a, b]$ и задовољава Липшицов услов по y и нека је дат почетни проблем

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0 = \alpha, \quad x \in [a, b].$$

Милне-Симпсонова формула задата је формулом

$$p_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h \left(f(x_{i-2}, y_{i-2}) - f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_i, y_i) \right),$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} \left(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, p_{i+1}) \right), \text{ за } i = 3, 4, \dots, n-1.$$

Теорема 22. Нека је $y = y(x)$ решење почетног проблема $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0 = \alpha, x \in [a, b]$. Ако је $y(x) \in C^5[a, b]$ и $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ низ генерисан Милне-Симпсоновим поступком, тада је у сваком кораку локална грешка реда $O(h^5)$, док је глобална грешка реда $\varepsilon_i = |y(x_i) - y_i| = O(h^4)$.

Теорема 23. Нека је $f(x, y)$ непрекидна на $[a, b]$ и задовољава Литшицов услов и нека је дат почетни проблем

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0 = \alpha, \quad x \in [a, b].$$

Адамс-Башифорт-Милтонова формула дата је формулом

$$p_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left(-9f(x_{i-3}, y_{i-2}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 55f(x_i, y_i) \right),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left(f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 19f(x_i, y_i) + 9f(x_{i+1}, p_{i+1}) \right) \text{ за}$$

$$i = 3, 4, \dots, n-1.$$

Теорема 24. Нека је $y = y(x)$ решење почетног проблема $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0 = \alpha, x \in [a, b]$. Ако је $y(x) \in C^5[a, b]$ и $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ низ генерисан Адам-Башиворд-Милтоновим поступком, тада је у сваком кораку локалан грешка реда $O(h^5)$, док је глобална грешка реда $\varepsilon_i = |y(x_i) - y_i| = O(h^4)$.

3.5 Експерименти

Посматрамо два почетна проблема:

- $y' = 30 - y, \quad y(0) = 1$ на интервалу $[0, 1]$. Решење је $y(x) = (6 - 5e^{-5x})$.

- $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0)=1$ на интервалу $[0,1]$. Решење је

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}.$$

На мрежи дискретизација

$$I_h = \{a + i \cdot h : i = 0, 1, \dots, n\}$$

са $a=0$, $b=1$ и $h = \frac{b-a}{n}$ решавамо посматране проблеме. Узимамо да је $n = 2^k, k=3, 4, \dots, 11$ и после сваког израчунавања приближног решења y_h рачунамо грешку

$$\delta_n = \max \{|y(x) - y_h(x)| : x \in I_h\},$$

где је y решење посматраног почетног проблема, y_h је апроксимација тог решења добијена примењеним поступком. Ред конвергенције је приближно једнак количнику coc

$$\text{coc} = \frac{\ln\left(\frac{\delta_n}{\delta_{n+1}}\right)}{\ln 2}.$$

У следећим табелама приказујемо δ_n и coc за нумеричка решења добијено поступцима описаним у поглављу 3 (програми су дати у поглављу 4).

3.5.1 Поступак Рунге–Кута (Рунге–Кута–АМ)

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	$\cos$	δ_n	$\cos$
8	$3.85 \cdot 10^{-3}$		$2.18 \cdot 10^{-3}$	
16	$1.89 \cdot 10^{-4}$	4.34485	$1.46 \cdot 10^{-4}$	3.90295
32	$1.04 \cdot 10^{-5}$	4.18892	$7.14 \cdot 10^{-6}$	4.35497
64	$6.09 \cdot 10^{-7}$	4.09142	$3.07 \cdot 10^{-7}$	4.53969
128	$3.69 \cdot 10^{-8}$	4.04703	$1.32 \cdot 10^{-8}$	4.54099
256	$2.27 \cdot 10^{-9}$	4.02334	$6.07 \cdot 10^{-10}$	4.44011
512	$1.41 \cdot 10^{-10}$	4.01175	$3.07 \cdot 10^{-11}$	4.30509
1024	$8.75 \cdot 10^{-12}$	4.00631	$1.72 \cdot 10^{-12}$	4.15761
2048	$5.49 \cdot 10^{-13}$	3.99401	$9.73 \cdot 10^{-14}$	4.14557

Табела 2.

3.5.2 Рунге–Кута–Гил

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	$\cos$	δ_n	$\cos$
8	$1.22 \cdot 10^{-7}$		$3.85 \cdot 10^{-3}$	
16	$7.42 \cdot 10^{-9}$	4.03761	$1.89 \cdot 10^{-4}$	4.34485
32	$4.58 \cdot 10^{-10}$	4.01879	$1.04 \cdot 10^{-5}$	4.18892
64	$2.84 \cdot 10^{-11}$	4.00939	$6.09 \cdot 10^{-7}$	4.09142
128	$1.77 \cdot 10^{-12}$	4.00485	$3.69 \cdot 10^{-8}$	4.04703

256	$1.11 \cdot 10^{(-13)}$	3.99982	$2.27 \cdot 10^{(-9)}$	4.02334
512	$6.44 \cdot 10^{(-15)}$	4.10347	$1.41 \cdot 10^{(-10)}$	4.01175
1024	$1.33 \cdot 10^{(-15)}$	2.27302	$8.75 \cdot 10^{(-12)}$	4.00631
2048	$1.11 \cdot 10^{(-15)}$	0.26303	$5.49 \cdot 10^{(-13)}$	3.99401

Табела 3.

3.5.3 Рунге–Кута–ГМ

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	cos	δ_n	cos
8	$7.07 \cdot 10^{(-4)}$		$3.88 \cdot 10^{(-2)}$	
16	$2.28 \cdot 10^{(-4)}$	1.63299	$5.59 \cdot 10^{(-3)}$	2.79327
32	$5.26 \cdot 10^{(-5)}$	2.11566	$1.12 \cdot 10^{(-3)}$	2.32416
64	$1.1 \cdot 10^{(-5)}$	2.25851	$2.54 \cdot 10^{(-4)}$	2.13475
128	$3.25 \cdot 10^{(-6)}$	1.75911	$6.09 \cdot 10^{(-5)}$	2.06253
256	$9.65 \cdot 10^{(-7)}$	1.75044	$1.49 \cdot 10^{(-5)}$	2.02955
512	$3.94 \cdot 10^{(-7)}$	1.29183	$3.69 \cdot 10^{(-6)}$	2.01447
1024	$1.17 \cdot 10^{(-7)}$	1.75053	$9.18 \cdot 10^{(-7)}$	2.00713
2048	$1.95 \cdot 10^{(-8)}$	2.58378	$2.29 \cdot 10^{(-7)}$	2.00355

Табела 4.

3.5.4 Рунге–Кута–НМ

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$5.02 \cdot 10^{-1}$		$7.34 \cdot 10^{-2}$	
16	$5.17 \cdot 10^{-1}$	-0.04127	$1.1 \cdot 10^{-2}$	2.74057
32	$5.24 \cdot 10^{-1}$	-0.02030	$2.22 \cdot 10^{-3}$	2.30520
64	$5.28 \cdot 10^{-1}$	-0.01008	$5.08 \cdot 10^{-4}$	2.12954
128	$5.3 \cdot 10^{-1}$	-0.00503	$1.22 \cdot 10^{-4}$	2.06120
256	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00251	$2.98 \cdot 10^{-5}$	2.02922
512	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00125	$7.38 \cdot 10^{-6}$	2.01439
1024	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00063	$1.84 \cdot 10^{-6}$	2.00711
2048	$5.32 \cdot 10^{-1}$	-0.00031	$4.58 \cdot 10^{-7}$	2.00354

Табела 5.

3.5.5 Рунге–Кута–НеМ

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$2.74 \cdot 10^{(-1)}$		$2.13 \cdot 10^{(14)}$	
16	$2.76 \cdot 10^{(-1)}$	-0.01001	$2.52 \cdot 10^{(6)}$	26.33322
32	$2.77 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00517	$3.55 \cdot 10^{(-1)}$	22.75640
64	$2.78 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00262	$5.26 \cdot 10^{(-2)}$	2.75466
128	$2.78 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00139	$4.74 \cdot 10^{(-3)}$	3.47302
256	$2.78 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00067	$7.87 \cdot 10^{(-4)}$	2.59081
512	$2.78 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00033	$1.67 \cdot 10^{(-4)}$	2.23420
1024	$2.78 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00017	$3.91 \cdot 10^{(-5)}$	2.09819
2048	$2.78 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00008	$9.47 \cdot 10^{(-6)}$	2.04382

Табела 6.

3.5.6 Рунге–Кута–СоМ

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$5.05 \cdot 10^{(-1)}$		$1.69 \cdot 10^{(18)}$	
16	$5.18 \cdot 10^{(-1)}$	-0.03616	$8.46 \cdot 10^{(8)}$	30.89223
32	$5.24 \cdot 10^{(-1)}$	-0.01909	$1.04 \cdot 10^{(18)}$	-30.18919
64	$5.28 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00979	Indeterminate	Indeterminate
128	$5.3 \cdot 10^{(-1)}$	-0.00495	$2.31 \cdot 10^{(-2)}$	Indeterminate

256	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00249	$4.44 \cdot 10^{-3}$	2.37880
512	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00125	$9.88 \cdot 10^{-4}$	2.16867
1024	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00063	$2.33 \cdot 10^{-4}$	2.08083
2048	$5.32 \cdot 10^{-1}$	-0.00031	$5.68 \cdot 10^{-5}$	2.03939

Табела 7.

3.5.7 Рунге–Кута–RMS

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$1.41 \cdot 10^{-3}$		$2.97 \cdot 10^{17}$	
16	$2.19 \cdot 10^{-4}$	2.68628	$2.65 \cdot 10^{16}$	3.48798
32	$6.3 \cdot 10^{-5}$	1.79434	1.81	53.70398
64	$1.86 \cdot 10^{-5}$	1.76331	$8.46 \cdot 10^{-2}$	4.41569
128	$5.87 \cdot 10^{-6}$	1.66114	$1.11 \cdot 10^{-2}$	2.92332
256	$2.29 \cdot 10^{-6}$	1.35653	$2.2 \cdot 10^{-3}$	2.34134
512	$3.03 \cdot 10^{-7}$	2.92068	$4.93 \cdot 10^{-4}$	2.15891
1024	$7.73 \cdot 10^{-8}$	1.96992	$1.17 \cdot 10^{-4}$	2.07830
2048	$3.03 \cdot 10^{-8}$	1.34997	$2.84 \cdot 10^{-5}$	2.03875

Табела 8.

3.5.8 Рунге–Кута–СМ

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$5.04 \cdot 10^{-1}$		$2.03 \cdot 10^{16}$	
16	$5.17 \cdot 10^{-1}$	-0.03786	$2.47 \cdot 10^7$	29.61845
32	$5.24 \cdot 10^{-1}$	-0.01949	$4.63 \cdot 10^{11}$	-14.19617
64	$5.28 \cdot 10^{-1}$	-0.00989	Indeterminate	Indeterminate
128	$5.3 \cdot 10^{-1}$	-0.00498	$7.22 \cdot 10^{-3}$	Indeterminate
256	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00250	$1.46 \cdot 10^{-3}$	2.31066
512	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00125	$3.28 \cdot 10^{-4}$	2.15047
1024	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00063	$7.77 \cdot 10^{-5}$	2.07611
2048	$5.32 \cdot 10^{-1}$	-0.00031	$1.89 \cdot 10^{-5}$	2.03820

Табела 9.

3.5.9 Рунге–Кута–LM

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$8.79 \cdot 10^{-4}$		$2.71 \cdot 10^{-2}$	
16	$1.48 \cdot 10^{-4}$	2.56939	$3.79 \cdot 10^{-3}$	2.83753
32	$3.25 \cdot 10^{-5}$	2.18833	$7.48 \cdot 10^{-4}$	2.34152
64	$7.33 \cdot 10^{-6}$	2.14953	$1.7 \cdot 10^{-4}$	2.13966

128	$2.16 \cdot 10^{-6}$	1.75912	$4.06 \cdot 10^{-5}$	2.06381
256	$6.43 \cdot 10^{-7}$	1.75035	$9.94 \cdot 10^{-6}$	2.02988
512	$3.04 \cdot 10^{-7}$	1.07944	$2.46 \cdot 10^{-6}$	2.01455
1024	$9.87 \cdot 10^{-8}$	1.62459	$6.12 \cdot 10^{-7}$	2.00715
2048	$1.3 \cdot 10^{-8}$	2.92205	$1.53 \cdot 10^{-7}$	2.00355

Табела 10.

3.5.10 Рунге–Кута–SMR

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$5.03 \cdot 10^{-1}$		$2.13 \cdot 10^{-2}$	
16	$5.17 \cdot 10^{-1}$	-0.03935	$2.89 \cdot 10^{-3}$	2.87887
32	$5.24 \cdot 10^{-1}$	-0.01984	$5.64 \cdot 10^{-4}$	2.35842
64	$5.28 \cdot 10^{-1}$	-0.00997	$1.27 \cdot 10^{-4}$	2.14453
128	$5.3 \cdot 10^{-1}$	-0.00500	$3.05 \cdot 10^{-5}$	2.06508
256	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00250	$7.46 \cdot 10^{-6}$	2.03020
512	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00125	$1.85 \cdot 10^{-6}$	2.01463
1024	$5.31 \cdot 10^{-1}$	-0.00063	$4.59 \cdot 10^{-7}$	2.00717
2048	$5.32 \cdot 10^{-1}$	-0.00031	$1.14 \cdot 10^{-7}$	2.00356

Табела 11.

3.5.11 Милне–Симпсон

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$7.54 \cdot 10^{-8}$		$8.09 \cdot 10^{-3}$	
16	$4.99 \cdot 10^{-9}$	3.91859	$3.75 \cdot 10^{-4}$	4.43093
32	$3.1 \cdot 10^{-10}$	4.00970	$1.52 \cdot 10^{-5}$	4.62529
64	$1.91 \cdot 10^{-11}$	4.01594	$6.59 \cdot 10^{-7}$	4.52707
128	$1.19 \cdot 10^{-12}$	4.01105	$3.22 \cdot 10^{-8}$	4.35490
256	$7.46 \cdot 10^{-14}$	3.99152	$1.74 \cdot 10^{-9}$	4.20799
512	$5. \cdot 10^{-15}$	3.90046	$1.01 \cdot 10^{-10}$	4.11202
1024	$2. \cdot 10^{-15}$	1.32193	$6.05 \cdot 10^{-12}$	4.05764
2048	$2. \cdot 10^{-15}$	0.00000	$3.72 \cdot 10^{-13}$	4.02390

Табела 12.

3.5.12 Предиктор–коректор поступак 722

Поступак припада групи вишекорачних поступака који користе поступак Рунге-Кута као стартер. Предиктор-коректор поступак 722 је реда конвергенције 3 и приказан је у раду [12].

Пример 1.			Пример 2.	
n	δ_n	coc	δ_n	coc
8	$5.12 \cdot 10^{-2}$		$6.84 \cdot 10^{-2}$	
16	$4.9 \cdot 10^{-3}$	3.38505	$1.53 \cdot 10^{-2}$	2.15576
32	$5. \cdot 10^{-4}$	3.29265	$2.55 \cdot 10^{-3}$	2.58996
64	$5.57 \cdot 10^{-5}$	3.16674	$3.57 \cdot 10^{-4}$	2.83534
128	$6.52 \cdot 10^{-6}$	3.09395	$4.66 \cdot 10^{-5}$	2.93835
256	$7.89 \cdot 10^{-7}$	3.04860	$5.92 \cdot 10^{-6}$	2.97574
512	$9.69 \cdot 10^{-8}$	3.02514	$7.46 \cdot 10^{-7}$	2.98961
1024	$1.2 \cdot 10^{-8}$	3.01272	$9.35 \cdot 10^{-8}$	2.99524
2048	$1.49 \cdot 10^{-9}$	3.00641	$1.17 \cdot 10^{-8}$	2.99773

Табела 13.

Резултате добијене решавањем примера 1 и 2 смо приказали у истој табели за сваки од посматраних поступака. Видимо да код неких поступака нема разлике у квалитету добијених резултата. У примеру 1. видимо да се код поступака Рунге-Кута-СоМ, Рунге-Кута-СМ, Рунге-Кута-SMR и Рунге-Кута-НМ добиле исте грешке. Док су се у овом примеру као најтачније показале Гилова метода и Милне-Симпсонова метода

У примеру 2. видимо да код поступака Рунге-Кута-СоМ, Рунге-Кута-СМ грешке за $n = 64$ нису дефинисане. Такође као најтачније методе су се показале Гилова и Милне-Симпсонова.

4. Програми

4.1 Поступак Рунге–Кута и његове модификације

Поступак Рунге-Кута за решавање почетног проблема обичних диференцијалних једначина, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```
RK[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
h=N[ $\frac{b-a}{n}$ ];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$  k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$  k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h, y+ $\frac{h}{6}$  (k1 + 2 k2+2 k3+ k4)}];
RungeKutaPostupak[f_,a_, $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RK,{a, $\alpha$ },n]]
```

4.1.1 Рунге–Кута–Гил

```
RKGill[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
k1=f[t,y];
k2=f[t+h/2,y+h/2 k1];
k3=f[t+h/2,y+h/2 (-1+Sqrt[2])k1+h(1-Sqrt[2]/2)k2];
k4=f[t+h,y-h Sqrt[2]/2 k2+h(1+Sqrt[2]/2) k3];
{t+h, y+h/6 Sign[k1 + 2k2+2k3+k4](k1 + (2-
Sqrt[2])k2+(2+Sqrt[2])k3+k4)}];
RungeKutaPostupakGill[f_,a_, $\backslash$ [Alpha]_,n_,b_]:=Module[{ },h=N[(b-a)/n];
NestList[RKGill,{a, $\backslash$ [Alpha] },n]]
```

4.1.2 Рунге–Кута АМ.

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ аритметичком средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```
RKAM[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ , y+ $\frac{h}{2}$  · k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$  · k2];
k4=f[t+h,y+h · k3];
```

```

{t+h, y+  $\frac{h}{6}$  (k1 + 2k2+2k3+k4)}}];
RungeKutaPostupakAM[f_,a_, $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKAM,{a,  $\alpha$  },n]]

```

4.1.3 Рунге–Кута GM.

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ геометријско средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```

RKGM[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+  $\frac{h}{2}$ ,y+  $\frac{h}{2}$  k1];
k3=f[t+  $\frac{h}{2}$ ,y+  $\frac{h}{2}$  k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h, y+  $\frac{h}{3}$  (Sqrt[Abs[k1 k2]]+ Sqrt[Abs[k2 k3]]+Sqrt[Abs[k3 k4]])}];
RungeKutaPostupakGM[f_,a_, $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKGM,{a, $\alpha$  },n]]

```

4.1.4 Рунге–Кута HM

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ хармонијском средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```

RKHM[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+  $\frac{h}{2}$ ,y+  $\frac{h}{2}$  k1];
k3=f[t+  $\frac{h}{2}$ ,y+  $\frac{h}{2}$  k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h, y+  $\frac{2h}{3}$  ((k1 k2)/(k1+ k2) + (k2 k3)/(k2+k3)+(k3 k4)/(k3+k4))}];
RungeKutaPostupakHM[f_,a_, $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKHM,{a,  $\alpha$  },n]]

```

4.1.5 Рунге–Кута NeM

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ херонском средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```

RKHeM[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h,y+ $\frac{h}{9}$ (k1+2k2+2k3+k4+Sqrt[Abs[k1k2]]+Sqrt[Abs[k2k3]]+
Sqrt[Abs[k3k4]]));
RungeKutaPostupakHeM[f_,a_, $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKHeM,{a, $\alpha$ },n]]

```

4.1.6 Рунге–Кута CoM

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ контрахармонијском средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```

RKCoM[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h,y+h/3((k12k22)/(k1+k2)+(k22k32)/(k2+k3)+(k32k42)/(k3+k4))});
RungeKutaPostupakCoM[f_,a_, $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKCoM,{a, $\alpha$ },n]]

```

4.1.7 Рунге–Кута RMS

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ корен-квадрат средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*

```

RKRMS[{t_,y_}]:=Module[{k1,k2,k3,k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h,y+ $\frac{h}{3}$ (Sqrt[(k12+k22)/2]+Sqrt[(k22+k32)/2]+Sqrt[(k32+k42)/2])});
RungeKutaPostupakRMS[f_,a_, $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },

```

```
NestList[RKRMS,{a,α},n]]
```

4.1.8 Рунге–Кута CM

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ центоидалном средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*

```
RKCM[{t_,y_}]:=Module[{k1, k2, k3, k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$  k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$  k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h, y+ $\frac{2h}{9}$  ((k12 + k1 k2+ k22)/( k1+ k2) + (k22+ k2k3+ k32)/( k2+ k3)+( k32+
k3 k4+ k42)/( k3+ k4))});
RungeKutaPostupakCM[f_,a_,α_,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKCM,{a,α},n]]
```

4.1.9 Логаритамска средина LM

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ логаритамском средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```
RKLM[{t_,y_}]:=Module[{k1, k2, k3, k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$  k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$  k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h, y+ $\frac{h}{3}$  ((Abs[k1]-Abs[k2])/(Log10[Abs[k1]]-Log10[Abs[k2]]) +
(Abs[k2]-Abs[k3])/(Log10[Abs[k2]]-Log10[Abs[k3]])+(Abs[k3]-
Abs[k4])/(Log10[Abs[k3]]-Log10[Abs[k4]]))});
RungeKutaPostupakLM[f_,a_, α_,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKLM,{a, α },n]]
```

4.1.10 Квадрат–корен средина SMR

Модификација поступка Рунге-Кута заснована на апроксимацији израза $k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$ логаритамском средином, може се добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```

RKSMR[{t_,y_}]:=Module[{k1, k2, k3, k4},
h=N[(b-a)/n];
k1=f[t,y];
k2=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k1];
k3=f[t+ $\frac{h}{2}$ ,y+ $\frac{h}{2}$ k2];
k4=f[t+h,y+h k3];
{t+h,y+ $\frac{h}{3}$ ((Sqrt[Abs[k1]]+Sqrt[Abs[k2]])/2)^2+
((Sqrt[Abs[k2]]+Sqrt[Abs[k3]])/2)^2+((Sqrt[Abs[k3]]+Sqrt[Abs[k4]])/2)^2)}];
RungeKutaPostupakSMR[f_,a_,  $\alpha$ _,n_,b_]:=Module[{ },
NestList[RKSMR,{a,  $\alpha$  },n]]

```

4.2 Вишекораџни поступци који као стартер користе поступак Рунге–Кута

4.2.1 Милне–Симпсонов поступак

Милне-Симпсонов поступак, вишекораџни потупак који користи поступак Рунге-Кута као стартер, можемо добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```

Off[General::"spell1"];
Clear[MilneSimpson];
MilneSimpson[F0_,a_,y0_,b_,m_]:=
Module[{f,f0,f1,f2,f3,h,j,k},
Set@@{f[t_,y_],F0};
h=N[(b-a)/m];
T=Table[0,{m+1}];
Y=Table[0,{m+1}];
T[[1]]=N[a];
Y[[1]]=N[y0];
For[j=1,j<=3,j++,
TJ=T[[j]];
YJ=Y[[j]];
K1=N[h f[TJ,YJ]];
K2=N[h f[TJ+ $\frac{h}{2}$ ,YJ+ $\frac{K1}{2}$ ]];
K3=N[h f[TJ+ $\frac{h}{2}$ ,YJ+ $\frac{K2}{2}$ ]];
K4=N[h f[TJ+h,YJ+K3]];
Y[[j+1]]=N[YJ+ $\frac{1}{6}$ (K1+2 K2+2 K3+K4)];
T[[j+1]]=N[a+h j]];
f1=f[T[[2]],Y[[2]]];
f2=f[T[[3]],Y[[3]]];
f3=f[T[[4]],Y[[4]]];

```

```

Pold=0;
Yold=0;
For[k=4,k<=m,k++,
    Pnew=Y[[k-3]]+ $\frac{4}{3}$  h (2 f1-f2+2 f3);
    Pmod=Pnew+0 (28 (Yold-Pold))/29;
    T[[k+1]]=a+h k;
    f4=f[T[[k+1]],Pmod];
    Y[[k+1]]=Y[[k-1]]+ $\frac{1}{3}$  h (f2+4 f3+f4);
    Pold=Pnew;
    Yold=Y[[k+1]];
    f1=f2;
    f2=f3;
    f3=f[T[[k+1]],Y[[k+1]]];
sol=Transpose[{T,Y}];
    Return[sol];
On[General::"spell1"];

```

4.2.2 Предиктор–коректор поступак 722

Предиктор-коректор поступак 722, вишекоражни потупак који користи поступак Рунге-Кута као стартер, можемо добити помоћу низа наредби одрађених у пакету *Mathematica*.

```

Off[General::"spell1"];
Clear[PredKor722];
PredKor722[f_,a_,y0_,m_,b_]:=
Module[{f0,f1,f2,f3,h,j,k},
    h=N[(b-a)/m];
    T=Table[0,{m+1}];
    Y=Table[0,{m+1}];
    T[[1]]=N[a];
    Y[[1]]=N[y0];
    For[j=1,j<=m,j++,
        TJ=T[[j]];
        YJ=Y[[j]];
        K1=N[h f[TJ,YJ]];
        K2=N[h f[TJ+h/2,YJ+K1/2]];
        K3=N[h f[TJ+h/2,YJ+K2/2]];
        K4=N[h f[TJ+h,YJ+K3]];
        Y[[j+1]]=N[YJ+1/6 (K1+2 K2+2 K3+K4)];
        T[[j+1]]=N[a+h j];
    f1=f[T[[1]],Y[[1]];
    f2=f[T[[2]],Y[[2]];

    For[k=2,k<=m,k++,
        Pnew=Y[[k-1]]+2 h f2;

```

```

T[[k+1]]=a+h k;
f3=f[T[[k+1]],Pnew];
Y[[k+1]]=Y[[k-1]]+1/3 h (f1+4 f2+f3);
f1=f2;
f2=f[T[[k+1]],Y[[k+1]]];
];
sol=Transpose[{T,Y}];
Return[sol];
On[General::"spell1"];

```


5. Једнокорачни поступци

5.1 Увод

Претпоставимо да посматрани почетни проблем

$$(0.1) \quad y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha$$

има једнозначно одређено решење y из класе $C^1[a, b]$, тј. да постоји решење y диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ које има непрекидан први извод и које задовољава почетни услов $y(a) = \alpha$. Следећа теорема садржи довољне услове за егзистенцију таквог решења почетног проблема (0.1).

Теорема 22. *Нека је функција $f(x, y)$ дефинисана и непрекидна у области*

$$S = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$$

и нека за свако $(x, y_1), (x, y_2) \in S$ важи

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Тада за произвољан број $\alpha \in \mathbb{R}$ постоји једна и само једна функција $y(x)$ са следећим особинама: $y(x)$ је непрекидна и диференцијабилна функција за $x \in [a, b]$, $y' = f(x, y(x))$ за неко $x \in [a, b]$, $y(a) = \alpha$.

Следе основни појмови који се користе при дефинисању једнокорачних поступака.

За изабрани корак дискретизације $h \in (0, b - a]$, одредимо природан број n из услова

$$\frac{b-a}{h} - 1 < n \leq \frac{b-a}{h}$$

и дефинишемо мрежу дискретизације

$$I_h = \{a + i \cdot h : i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Тачке $x \in I_h$ се називају *чворови дискретизације* и означавају се са x_i . За чворове дискретизације важи

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b < x_{n+1} + h.$$

Нека је $I'_h = I_h \setminus \{x_n\} = \{a + i \cdot h : i = 0, 1, \dots, n-1\}$. Интеграцијом једначине

$$y' = f(x, y(x))$$

од x до $x+h$, за $x \in I'_h$ и дељењем добијеног резултата са h добија се

$$(0.2) \quad \frac{1}{h}(y(x+h) - y(x)) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s, y(s)) ds, \quad x \in I'_h.$$

Поступци за решавање почетног проблема (0.1) добијају се апроксимацијом одређеног интеграла у (0.2). Једнокорачни поступци се добијају апроксимацијом наведеног интеграла функцијом $f_h(x, z)$, $(x, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, тако да вредности решења $y(x)$ почетног проблема (0.1) задовољавају једначине

$$\frac{1}{h}(y(x+h) - y(x)) = f_h(x, y(x)) + T_h(x), \quad x \in I'_h$$

$$y(a) = \alpha.$$

Величина

$$T_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s, y(s)) ds - f_h(x, y(x)), \quad x \in I'_h$$

је *грешка одсецања*, односно *локална грешка одсецања*, јер се мења у зависности од тачке $x \in I'_h$. Очигледно локална грешка одсецања се може записати као

$$T_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} y'(s) ds - f_h(x, y(x)), \quad x \in I'_h$$

$$T_h(x) = \frac{1}{h}(y(x+h) - y(x)) - f_h(x, y(x)), \quad x \in I'_h.$$

Када формирамо једнокорачни поступак захтевамо да локална грешка одсецања за свако $x \in I'_h$ тежи нули када $h \rightarrow 0$. Када узмемо то у обзир могу се као апроксимације за $y(x)$ узети $u(x)$ дефинисане као решења система једначина

$$(0.3) \quad \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)) = f_h(x, u(x)), \quad x \in I'_h$$

$$u(a) = \alpha_h,$$

где је α_h апроксимација за α за коју важи

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\alpha - \alpha_h| = 0.$$

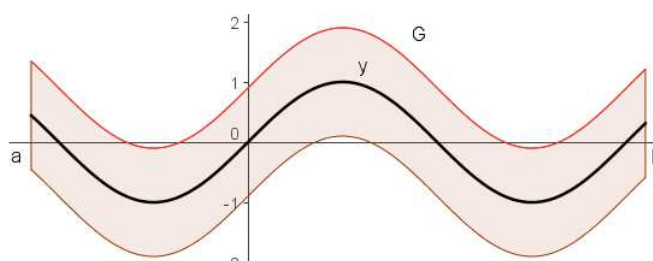
Дати систем се назива *дискретни почетни проблем* и очигледно има јединствено решење

$$u(a) = \alpha_h,$$

$$u(x+h) = u(x) + h \cdot f_h(x, u(x)), \quad x \in I'_h.$$

За само дефинисање једнокорачних поступака, а и касније, за испитивање њихове конзистенције, потребно је да решење у почетног проблема $y' = f(x, y)$ има непрекидне изводе вишег реда на интервалу $[a, b]$. За то је довољно да је функција f непрекидна и да има непрекидне парцијалне изводе по обе променљиве x и y у некој погодном изабраној области $G \subset [a, b] \times \mathbb{R}$ решења у почетног проблема. У току даљег рада посматраћемо област

$$G = \{(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} : |u - y(x)| \leq \rho\},$$



Слика 10.

где је ρ позитиван реалан број.

5.2 Конзистенција једнокорачних поступака

Да би решења дискретног почетног проблема била добра апроксимација за вредност тачног решења почетног проблема у чворовима мреже дискретизације потребно је да дискретни почетни проблем добро апроксимира почетни проблем. То значи да α_h треба да добро апроксимира α , а $f_h(x, u(x))$ треба добро да апроксимира

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s, y(s)) ds.$$

Прецизније, тражи се да буде задовољен следећи услов конзистенције

$$(0.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (|\alpha - \alpha_h| + \max \{|T_h(x)| : x \in I'_h\}) = 0.$$

Услов конзистенције се састоји из два дела. Први се односи на апроксимацију почетне вредности, а други на апроксимацију диференцијалне једначине из (0.1) диференцијалним количницима из (0.3) у чворовима мреже дискретизације.

Дефиниција 6. Дискретни почетни проблем (0.3) је конзистентан са почетним проблемом (0.1) ако је испуњен услов конзистенције (0.4).

Теорема 23. Дискретни почетни проблем (0.3) је конзистентан са почетним проблемом (0.1) ако и само ако за решење у почетног проблема важи

$$(0.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha_h = \alpha, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \max \{ |f(x, y(x)) - f_h(x, y(x))| : x \in I'_h \} = 0.$$

Да би се добила добра апроксимација решења почетног проблема мора се при формирању дискретног почетног проблема захтевати конзистенција. О квалитету конзистенције суди се на основу њеног реда.

Дефиниција 7. Дискретни почетни проблем је реда конзистенције p ако постоје константе h_0 и K такве да за свако $h \leq h_0$ важи

$$|\alpha - \alpha_h| + \max \{ |T_h(x)| : x \in I'_h \} \leq K \cdot h^p$$

Константа K у претходној дефиницији зависи само од константи које су границе апсолутних вредности функције $f(x, y)$ и коначног броја њених извода за $(x, y) \in G$.

5.3 Конвергенција једнокорачних поступака

Посматра се поново почетни проблем

$$(0.6) \quad y' = f(x, y(x)), \quad y(a) = \alpha.$$

За фиксно $h \in (0, b-a]$ дискретни почетни проблем за дати почетни проблем има облик

$$(0.7) \quad \frac{1}{h} (y_h(x+h) - y_h(x)) = f_h(x, y(x)), \quad x \in I'_h, \\ y_h(a) = \alpha_h.$$

У претходним разматрањима изостављен је индекс h код обележавања решења $u(x)$ дискретног почетног проблема. Сада се наглашава зависност тог решења од h и то се чини тако што се индекс h пише, а решење дискретног почетног проблема означава са $y_h(x)$. Ако се h понаша као нула низ, тј. ако се посматра као низ вредности корака дискретизације који тежи нули, поставља се питање да ли се добијају све боље апроксимације решења почетног проблема у чворовима мреже I_h . Другим речима, да ли низ нумеричких решења конвергира ка тачном решењу ако $h \rightarrow 0$.

Дефиниција 8. *Једнокорачни поступак (0.7) је конвергентан ако важи*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max \{ |y(x) - y_h(x)| : x \in I_h \} = 0,$$

где је y решење почетног проблема (0.6), y_h је апроксимација тог решења добијена једнокорачним поступком.

Поред конвергенције низа решења y_h почетног проблема посматра се и конвергенција диференцијалних количника

$$\frac{1}{h}(y_h(x+h) - y_h(x))$$

када $h \rightarrow 0$. Нека је за функцију v диференцијални количник дефинисан са

$$D_h v(x) = \frac{1}{h}(v(x+h) - v(x)), \quad x \in I'_h.$$

Конвергенција се посматра под претпоставком да функција $f_h(x, s)$ задовољава Липшицов услов у некој области.

Дефиниција 9. *Једнокорачни поступак (0.7) задовољава Липшицов услов у околини*

$$G_1 = \{(x, s) \in [a, b] \times \mathbb{R} : |s - y(x)| \leq \rho_1\}$$

решења у почетног проблема (0.6) ако постоји константа L и позитиван број h_1 тако да за свако $h \in (0, h_1]$ и свако

$$(x, s), (x, s') \in G_1 \cap (I'_h \times \mathbb{R})$$

важи

$$|f_h(x, s) - f_h(x, s')| \leq L|s - s'|. \quad (4.3)$$

За једнокорачне поступке који задовољавају Липшицов услов важи општа теорема о конвергенцији.

Теорема 24. *Нека је једнокорачни поступак (0.7) конзистентан са почетним проблемом (0.6) и нека задовољава Липшицов услов у околини G_1 решења почетног проблема (0.6). Тада постоји $h_0 > 0$ такво да за свако $0 < h \leq h_0$ и свако $x \in I'_h$ важи*

$$|y(x) - y_h(x)| \leq \left\{ |\alpha - \alpha_h| + (x - a) \cdot \max_{x \in I'_h} |T_h(x)| \right\} \cdot e^{L(x-a)}.$$

Теорема 25. *Последица. Нека једнокорачни поступак (0.7) задовољава Липшицов услов у околини G_1 и нека је конзистентан са почетним проблемом (0.6) са редом конзистенције p . Тада постоји $h_0 > 0$ такво да за свако $0 < h \leq h_0$ важи*

$$(0.8) \quad |y(x) - y_h(x)| \leq Kh^p (1+x-a)e^{L(x-a)}, \quad x \in I'_h.$$

Теорема 26. *Нека једнокорачни поступак (0.7) задовољава Липшицов услов у околини G_1 решења почетног проблема (0.6). Тада је конзистенција дискретног почетног проблема са почетним проблемом потребан и довољан услов за конвергенцију тог једнокорачног поступка и одговарајућег низа диференцијалних количника.*

Из (0.8) је очигледно да је конвергенција једнокорачног поступка утолико бржа уколико је ред конзистенције већи. Може се рећи да је ред конвергенције једнак реду конзистенције.

Дефиниција 10. *Ако постоји h_0 такво да за свако $0 < h \leq h_0$ за неко $K > 0$ и $p \geq 1$ важи*

$$\max \{|y(x) - y_h(x)| : x \in I_h\} \leq Kh^p$$

каже се да је једнокорачни поступак реда конвергенције p .

Конвергенција једнокорачних поступака заснива се на Липшицовом услову који они задовољавају у околини G_1 . Испуњеност овог услова за специјалне једнокорачне поступке: Ојлер-Кошијев, побољшани Ојлеров, побољшани Ојлер-Кошијев и поступак Рунге-Кута следи на основу претпоставке да функција $f(x, y)$ задовољава Липшицов услов

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_0 |y_1 - y_2|, \quad (x, y_1), (x, y_2) \in G.$$

Наиме, ако функција $f(x, y)$ задовољава овај услов, онда постоји h_0 такво да за свако $h < h_0$, постоји околина G_1 у којој једнокорачни поступак задовољава свој Липшицов услов.

5.4 Стабилност једнокорачних поступака

При нумеричком решавању почетних проблема јављају се грешке заокруживања и грешке израчунавања функција. Поставља се питање какав је утицај ових грешака које су присутне и код израчунавања почетне вредности и код израчунавања осталих приближних вредности $y_h(x)$ за $x \in I'_h$. У пракси је веома важно да мале промене почетне вредности α_h и мале грешке израчунавања $y_h(x)$ у чворовима мреже дискретизације имају за последицу мале промене у решењу и то равномерно по h . Ово се прецизира појмом *стабилности* поступка за одређивање приближног решења, који гарантује

непрекидну зависност приближног решења почетног услова и десне стране диференцне једначине приближног поступка, равномерно по h .

Посматрају се једнокорачни поступци облика

$$(0.9) \quad \begin{aligned} y_h(a) &= \alpha_h + \sigma_h, \\ \frac{1}{h}(y_h(x+h) - y_h(x)) &= f_h(x, y_h(x)), \quad x \in I'_h. \end{aligned}$$

Поред тога посматра се и измењени једнокорачни поступак

$$(0.10) \quad \begin{aligned} u_h(a) &= \alpha_h + \sigma_h, \\ \frac{1}{h}(u_h(x+h) - u_h(x)) &= f_h(x, u_h(x)) + S_h(x), \quad x \in I'_h, \end{aligned}$$

где су σ_h и $S_h(x)$ промене почетног услова и десне стране једнокорачног поступка у тачки $x \in I'_h$.

Дефиниција 11. *Једнокорачни поступак (0.9) је стабилан ако постоји број $h_0 > 0$ и за свако $\varepsilon > 0$ постоји број δ такав да за решење y_h једнокорачног поступка (0.9) и решење u_h измењеног једнокорачног поступка (0.10) важи*

$$\max_{x \in I_h} |u_h(x) - y_h(x)| + \max_{x \in I'_h} |D_h u_h(x) - D_h y_h(x)| < \varepsilon,$$

ако је $h \in (0, h_0]$ и

$$|\sigma_h| + \max_{x \in I'_h} |S_h(x)| < \delta.$$

Следи општа теорема о стабилности једнокорачних поступака. На основу те теореме и теореме о конвергенцији посебних поступака добиће се затим стабилност ових поступака.

Теорема 27. *Нека је једнокорачни поступак (0.9) конзистентан са почетним проблемом*

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha,$$

и нека задовољава Липшицов услов у некој околини G_1 решења у почетног проблема. Тада је једнокорачни поступак стабилан.

Сада се може доказати теорема која повезује конзистенцију, стабилност и конвергенцију.

Теорема 28. *Ако је једнокорачни поступак стабилан и конзистентан онда је и конвергентан.*

6. Закључак

У раду се посматра веома популарна Симпсонова формула за нумеричку интеграцију. Ова формула је се може посматрати као посебан случај, као што је урађено и у књигама [5] и [7]. Тада се и грешка апроксимације одређеног интеграла Симпсоновом формулом такође изводи на посебан начин. Међутим, Симпсонова формула је специјалан случај Њутн-Котесових формула и може се проучавати и на тај начин, као што је урађено у књигама [6] и [11]. У раду смо посматрали Симпсонову формулу и посебно и као специјалан случај Њутн-Котесових квадратурних формула.

Двострука Симпсонова формула изведена је у раду [3] и може послужити за апроксимацију двоструких интеграла.

Примену Симпсонове формуле срећемо код нумеричког решавања почетних проблема обичних диференцијалних једначина. Обрадили смо детаљно поступак Рунге-Кута. Код многих вишекорачних поступака поступак Рунге-Кута се појављује као стартер за израчунавање неколико почетних апроксимација, то смо илустровали са два поступка Милне-Симпсоновим и поступком 722 из рада [12].

У раду [14] приказане су неке модификације поступка Рунге-Кута које смо посматрали и са њима извели одређене експерименте. Показало се да су све те модификације спустиле ред конвергенције на 2, док је ред конвергенције поступка Рунге-Кута и његове модификације назване Гиловa 4.

У овом делу смо дефинисали још две модификације поступка Рунге-Кута, засноване на логаритамској средини и квадрат-корен средини, што представља оригинални допринос овог рада. И ове модификације спустиле су ред конвергенције на 2.

Као још једну примену Симпсонове формуле приказали смо израчунавање запремина неких обртних тела и описали Симпсоново правило.

7. Литература

- [1] Deakin, R.E. and Hunter, M. N.: "The prismoidal correction revisited, Presented at the 22nd Victorian Regional Survey Conference, Beechworth, 20-21 February, 2009, The Institution of Surveyors, Victoria.
- [2] Foresta, S., Goldman, L.: Principia Mathematica Historallis Integratus: <http://www.math.rutgers.edu/~mjraman/Hist%20of%20Integrals.pdf>
- [3] Fujii, K.: A Multidimensional Analogue of the Simpson's Formula of Integral Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 7(2010) 471-483.
- [4] Gill, S.: A process for step-by-step integration of a differential equation in an automatic digital computing machine, Proc Cambridge Philos. Soc, v. 47, 1951, 96-108.
- [5] Herceg, D. Herceg, Đ.: Numerička matematika, Stylos, Novi Sad 2009.
- [6] Herceg, D., Krejić, N.: Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.
- [7] Herceg, D., Vulcanović, R.: *Numerička analiza, Teorija, zadaci i programiranje*. VŠOR, Novi Sad, 1994.
- [8] Kendall, A.: Elementary numerical analysis, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [9] Mathews, J.H.: Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd Ed. Prentice Hall, Inc., 1992.
- [10] Numerical Analysis-Numerical Methods Project: <http://math.fullerton.edu/mathews/numerical.html>
- [11] Петковић, Љ.: Нумеричка математика са програмирањем, Ниш, 1994.
- [12] Podisuk, M., Chundang, U., Sanprasert, W.: Single step formulas and multi step formulas of the integration method for solving the initial value problem of ordinary differential equation. Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 1438–1444.
- [13] Ralston, A.: Runge-Kutta Methods with Minimum Error Bounds, Mathematics of Computation, Vol. 16, 1962, 431-437.
- [14] Senthilkumar, S., RK Starters For Multistep Methods On Hole-Filler CNN Simulation, Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 4(2)(2008), 170-177.
- [15] <http://www.mathpages.com/home/kmath189/kmath189.htm>

8. Биографија

Рођена сам 13. марта 1985. у Сремској Митровици. Основну школу завршила сам у Ноћају. Године 2004. завршила сам Гимназију у Сремској Митровици и исте уписала Природно-математички факултет у Новом Саду, одсек за математику и информатику, смер професор математике. 2009. године дипломирала сам и исте године уписала мастер студије, смер настава математике. Положила сам све испите предвиђене наставним планом и програмом.

Нови Сад, септембар 2012.

Марија Сретеновић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Мастер рад

ВР

Аутор: Марија Сретеновић

АУ

Ментор: Др Драгослав Херцег

МН

Наслов рада: Симпсонова квадратурна формула и примене

МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода: српски и енглески

ЈИ

Земља публикавања: Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2012.

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3

МА

Физички опис рада: 8/ 85/ 0/13/10/0

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Нумеричка математика

НД

Кључне речи:

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод: У раду се посматра Симпсонова квадратурна формула за приближно израчунавање одређених интеграла и њене примене у поступцима за нумеричко трешавање почетних проблема обичних диференцијалних једначина и израчунавање запремина неких обртних тела.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 30.6.2011.

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: Др Зорана Лужанин, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: Др Ђурђица Такачи, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: Др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Marija Sretenović

AU

Mentor: dr. Dragoslav Herceg

MN

Title: Simpson rule and π tc applications

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty
of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description 8/ 85/ 0/13/10/0

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words:

SKW UC:

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract: The paper discusses the Simpson's quadrature formula for the approximate calculation of definite integrals and its application in numerical methods for

solving the initial problems of ordinary differential equations and calculating the volume of some rotating bodies.

AB

Accepted by the Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr Zorana Lužanin, Full Professor, Faculty of Science,
University of Novi Sad

Member: dr, Đurđica Takači, Full Professor, Faculty of Science,
University of Novi Sad

Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science,
University of Novi Sad