UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Marica Babić

Slučajne promenljive sa vrednostima u Banachovim prostorima

- master teza -

Mentor:
Docent dr Dora Seleši

Novi Sad, *2012*.

Sadržaj

Predgovor

Do sada smo imali prilike da se upoznamo sa slučajnim promenljivama kao sa realnim Borelovim merljivim funkcijama definisanim na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Međutim, takodje se mogu posmatrati merljive funkcije na prostoru verovatnoće koje uzimaju vrednosti u opštim algebarsko-topološkim strukturama, kao na primer razne topološke grupe, lokalno-konveksni prostori, Banachovi prostori…

U ovom radu pažnju ćemo posvetiti teoriji verovatnoće za slučajne promenljive sa vrednostima u Banachovim prostorima. U priču uvodimo slabu i jaku merljivost funkcije Banachovog prostora (B) nad skalarnim poljem K ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). One nas dovode do teoreme o Pettis merljivosti koja kaže da je funkcija jako merljiva ako i samo ako je slabo merljiva i uzima svoje vrednosti u separabilnom potprostoru od B.

Posmatraćemo i osnovne osobine slučajnih promenljivih u Banachovim prostorima, kao što su nezavisnost i matematičko očekivanje, ali i nekorelacija slučajnih promenljivih i zakon velikih brojeva za slučajne promenljive sa vrednostima uHilbertovim prostorima, a zatim i u Banachovim prostorima.

Za kraj imamo kontraprimer za slučajne promenljive sa vrednostima u Banachovim prostorima gde ćemo ustanoviti da u slučaju da je B konačan Banachov prostor onda sledi da X zadovoljava i Centralnu graničnu teoremu (CGT) i zakon iteriranih logaritama (ZIL) ako i samo ako je $E(X)=0$ i $E\|X\|^2<\infty$. Stoga možemo reći da su CGT i ZIL za X ekvivalentne u konačno dimenzionalnim prostorima. Medjutim, ako je B beskonačno dimenzionalni prostor, veza izmedju CGT i ZIL je još uvek nejasna.

Ovom prilikom se zahvaljujem svom mentoru, docentu dr Dori Seleši na podršci, poverenju, korisnim sugestijama, primedbama i savetima, a pre svega na strpljenju.

Novi Sad, *jul* 2012. *Marica Babić*

1. Integracija u Banachovim prostorima

Kada integralimo neprekidnu funkciju $f:[a,b]\to B$, gde je B Banachov prostor, obično je dovoljno koristiti Riemannov integral. Mi ćemo se često baviti funkcijama sa vrednostima iz B, definisanim na nekim apstraktnim prostorima sa merom (prostoru verovatnoće), i u ovom kontekstu, pojmovi neprekidnosti i Riemannovog integrala nemaju baš smisla. Iz tog razloga ćemo početi prvo poglavlje uopštavajući Lebesgueov integral na funkcije sa vrednostima u B.

1.1. Uvod

U matematici, metrički prostor je skup u kome je definisan pojam rastojanja između njegovih elemenata.

Definicija: Ako u metričkom prostoru (X,d) za svaki Cauchyjev niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X postoji $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$, kažemo da je (X,d) kompletan metrički prostor.

U klasi metričkih prostora su veoma značajni normirani prostori, koji pored topološke imaju i vektorsku strukturu.

Definicija: Neka je $\|\bullet\|: X \to [0,\infty)$ tako da važe sledeći uslovi:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za sve $\lambda \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ i sve $x \in X$
3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ za sve $x, y \in X$

Tada kažemo da je preslikavanje $\|\bullet\|$ norma nad X, a uređen par $(X,\|\bullet\|)$ normirani prostor.

Definicija: Ako je normiran prostor $(X,\|\bullet\|)$ kompletan metrički prostor kažemo da je Banahov prostor.

Definicija: Skup je kompaktan ako se iz proizvoljnog otvorenog pokrivača skupa može izvući konačan podpokrivač.

Definicija: Skup K je relativno kompaktan ako je njegovo zatvaranje kompaktno.

Definicija: Metrički prostor X je separabilan, ako postoji najviše prebrojiv podskup M od X, takav da je $\overline{M} = X$. (npr. $\mathbb{R}$, c_0, c, i l^p $(1 \le p < \infty)$ su separabilni)

Teorema: (Han-Banach) Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i f nenegativna funkcionela na X za koju važi

$f(x+y) \le f(x) + f(y)$ za sve $x, y \in X$ (subaditivnost)

$f(lx) = lf(x)$ za sve $x \in X$ i $l \ge 0$ (pozitivna homogenost).

Neka je $A \ne \{0\}$ potprostor od X i $f : A \to \mathbb{R}$ linearna funkcionela za koju važi

$$f(x) \le p(x) \text{ za sve } x \in A.$$

Tada postoji linearna funkcionela $F : X \to \mathbb{R}$ za koju važi

$$F|_A = f, \ F(x) \le p(x) \text{ za sve } x \in X.$$

($F|_A$ označava restrikciju funkcije F nad A).

Definicija: Borelova σ-algebra u topološkom prostoru (X, τ) je najmanja σ-algebra koja sadrži τ. Označava se sa B_X ili samo B ako je jasno koji se topološki prostor posmatra.

Definicija: Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa σ-algebrom, (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f : X \to Y$, što ćemo označavati i sa $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \tau)$, je merljiva ako $f^{-1}(\omega) \in \mathcal{M}$ za svako $\omega \in \tau$.

Definicija: N je pseudo-seminorma na X ako:

1. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i svako $x \in X$
2. $N(x+y) \le N(x) + N(y)$ za svako $x, y \in X$.

Definicija: Merljiva pseudo-seminorma $N : (X, \mathcal{M}) \to [0, \infty)$ gde je $\mathcal{M}$ σ-algebra na X i preslikavanje merljivo u odnosu na Borelovu σ-algebru na kodomenu.

Definicija: Neka je dat skup elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$. σ-algebra F je skup podskupova od Ω sa osobinama:

1. $\Omega \in \mathsf{F}$;
2. $A \in \mathsf{F} \Rightarrow A^c \in \mathsf{F}$
3. $A_1, A_2 \in \mathsf{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathsf{F}$.

(Ω, F) je merljiv prostor.

Definicija: Neka je dat merljiv prostor (Ω, F). Funkcija $P : \mathsf{F} \to \mathbb{R}$ je verovatnoća na Ω ako važi:

1. $P(\Omega)=1$ (osobina normiranosti)

2. $P(A)\geq 0$, za svako $A\in \mathcal{F}$ (nenegativnost)

3. ako su $A_1, A_2, ...\in \mathcal{F}$, $A_i A_j = \emptyset$, i $\neq$ j tada važi $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (σ -aditivnost)

<u>Definicija:</u> Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je $\mathcal{F}$ σ -algebra a P verovatnoća naziva se prostor verovatnoće. Elemente $\mathcal{F}$ σ -algebre nazivamo slučajni događaji, a broj $P(A)$ je verovatnoća događaja A

<u>Definicija:</u> Neka je dat prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i data funkcija $X:\Omega\to\mathbb{R}$. Funkcija X je slučajna promenljiva ako za svako $x\in\mathbb{R}$ važi

$$\{\omega; X(\omega)<x\}=X^{-1}((-\infty, x))\in \mathcal{F}$$

<u>Definicija:</u> Slučajna promenljiva je diskretnog tipa ako postoji prebrojiv skup $R_X=\{x_1, x_2, ...\}$ takav da je $P(X\in R_X)=1$. R_X je skup vrednosti slučajne promenljive X.

<u>Definicija:</u> Slučajne promenljive $X_{1,} X_2, ...X_n$ su nezavisne ako su događaji $X_1^{-1}(S_1), X_2^{-1}(S_2), ..., X_n^{-1}(S_n)$ nezavisni za svaki izbor borelovih skupova, tj.za svako $S_1, S_2, ..., S_n\in B$.

<u>Definicija:</u> Zakoni velikih brojeva ispituju konvergenciju ovakvog niza

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

tj. uslove kada ovaj niz centriranih slučajnih promenljivih konvergira ka nuli. Ako je ta konvergencija u verovatnoći, onda je to slabi zakon velikih brojeva, a ako je ta konvergencija skoro sigurno onda je to strogi zakon velikih brojeva.

<u>Definicija:</u> Niz mera verovatnoće P_n definisanih nad $(B, \mathcal{B}_B)$ je gust (eng. tight) ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $M>0$ tako da je za sve $n\in\mathbb{N}$ zadovoljeno $P_n(B\setminus[-M, M])<\varepsilon$.

<u>Teorema:</u> (teorema Prokhorova) Neka je P_n gust niz mera verovatnoća. Tada postoji podniz P_{k_n} koji konvergira u slabom smislu ka nekoj meri verovatnoće P

1.2. Banachov prostor

Neka je B Banachov prostor nad skalarnim poljem $\mathbb{K}$, koje može biti ili $\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$ ukoliko drugačije nije naglašeno. Normu elementa $x \in B$ pišemo oznakom $\|x\|_B$ ili $\|x\|$. Pišemo:

$$L_B = \{x \in B : \|x\| \le 1\}$$

za zatvorenu jediničnu loptu u B.

Banachov dualni prostor je vektorski prostor B^* svih neprekidnih linearnih preslikavanja sa B u $\mathbb{K}$. Ovaj prostor je Banachov prostor u odnosu na normu

$$\|x^*\|_B := \sup_{\|x\| \le 1} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Ovde $\langle x, x^* \rangle := x^*(x)$ označava dualno sparivanje elementa $x \in B$ i $x^* \in B^*$. Pisaćemo jednostavno $\|x^*\|$ umesto $\|x^*\|_B$. Elementi od B^* se često nazivaju linearne funkcionele nad B. Han-Banachova teorema o razdvajanju garantuje obiman izvor funkcionela nad B: za svaki konveksan zatvoren skup $C \subseteq B$ i konveksan kompaktan skup $K \subseteq B$ takav da $C \cap K = \varnothing$ postoji $x^* \in B^*$ i realni brojevi $a < b$ takvi da važi

$$\mathrm{Re}\langle x, x^* \rangle \le a < b \le \mathrm{Re}\langle y, x^* \rangle$$

za sve $x \in C$ i $y \in K$. Kao što je dobro poznato, iz ovoga proizilazi Han-Banachova teorema o produženju: ako je F zatvoren potprostor od B, onda za svako $y^* \in F^*$ postoji $x^* \in B^*$ takvo da važi $x^*|_F = y^*$ i $\|x^*\| = \|y^*\|$. Ovo implicira da za sve $x \in B$ imamo

$$\|x\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Linearni potprostor F od B^* se naziva normirajući za podskup S od B ako za svako $x \in S$ imamo

$$\|x\| = \sup_{\substack{x^* \in F \\ \|x^*\| \le 1}} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Potprostor od B^* koji je normirajući za B se jednostavno naziva normirajući. Sledeću lemu ćemo često koristiti.

<u>Lema 1.1.</u> Ako je B_0 separabilni potprostor od B i F je linearni potprostor od B^* koji je normirajući za B_0, onda F sadrži niz jediničnih vektora koji su normirajući za B_0.

<u>Dokaz:</u> Izaberimo gust niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ u B_0 i izaberimo niz jediničnih vektora $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ u F takav da je $|\langle x_n, x_n^* \rangle| \ge (1-\varepsilon_n)\|x_n\|$ za sve $n \ge 1$, gde brojevi $0 < \varepsilon_n \le 1$ zadovoljavaju $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Niz $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$

je normirajući za B_0. Da bi to pokazali, fiksirajmo proizvoljno $x \in B_0$ i neka je $\delta > 0$. Izaberimo $n_0 \geq 1$ takvo da $0 < \varepsilon_n \leq \delta$ i $\left\| x - x_{n_0} \right\| \leq \delta$. Tada,

$$\left(1-\delta\right)\|x\| \leq \left(1-\varepsilon_{n_0}\right)\|x\| \leq \left(1-\varepsilon_{n_0}\right)\left\|x_{n_0}\right\| + \left(1-\varepsilon_{n_0}\right)\delta$$

$$\leq \left|\left\langle x_{n_0}, x_{n_0}^* \right\rangle\right| + \delta \leq \left|\left\langle x, x_{n_0}^* \right\rangle\right| + 2\delta .$$

Kako je $\delta > 0$ bilo proizvoljno sledi da $\|x\| \leq \sup_{n \geq 1} \left|\left\langle x, x_n^* \right\rangle\right|$.

Za linearni potprostor F od B^* kažemo da razdvaja tačke podskupa S od F ako za svaki par $x, y \in S$ $\left(x \neq y\right)$ postoji $x^* \in F$ sa osobinom da je $\left\langle x, x^* \right\rangle \neq \left\langle y, x^* \right\rangle$. Jasno, normirajući potprostor razdvaja tačke, ali obrnuto ne mora da važi.

<u>Lema 1.2.</u> Ako je B_0 separabilni potprostor od B i neka je F linearni potprostor od B^* koji razdvaja tačke u B_0, tada F sadrži niz koji razdvaja tačke u B_0.

<u>Dokaz:</u> Prema Han-Banachovoj teoremi, za svako $x \in B_0 \setminus \{0\}$ postoji vektor $x^*\left(x\right) \in F$ takav da $\left\langle x, x^*\left(x\right)\right\rangle \neq 0$. Definišući

$$V_x := \left\{ y \in B_0 \setminus \{0\} : \left\langle y, x^*\left(x\right)\right\rangle \neq 0 \right\}$$

dobijamo otvoreni prekrivač $\left\{V_x\right\}_{x \in B_0 \setminus \{0\}}$ od $B_0 \setminus \{0\}$. Kako za svaki otvoreni prekrivač separabilnog metričkog prostora postoji prebrojiv potpokrivač, sledi da postoji niz $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ u $B_0 \setminus \{0\}$ tako da $\left\{V_{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ prekriva $B_0 \setminus \{0\}$. Tada niz $\left\{x^*\left(x_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ razdvaja tačke od B_0. Zaista, svako $x \in B_0 \setminus \{0\}$ pripada nekom V_{x_n}, što znači da je $\left\langle x, x^*\left(x_n\right)\right\rangle \neq 0$.

1.3. Teorema o Pettis merljivosti

Ovde ćemo se baviti pričom o slaboj i jakoj merljivosti funkcija sa vrednostima u Banachovim prostorima koja će nam dati teoremu o Pettis merljivosti koja kaže da je funkcija sa vrednostima u Banachovim prostorima jako merljiva akko je slabo merljiva i uzima svoje vrednosti u separabilnom potprostoru od B.

1.3.1. Jaka merljivost

Kroz ovo poglavlje $(M, \mathcal{M})$ je oznaka za merljiv prostor, tj. M je skup a $\mathcal{M}$ je $\sigma - a\lg ebra$ u M iliti kolekcija podskupova od M sa sledećim osobinama:

1. $M \in \mathcal{M}$
2. $B \in \mathcal{M} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{M}$
3. $B_1 \in \mathcal{M}, B_2 \in \mathcal{M}, \ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$.

Prva osobina garantuje da je $\mathcal{M}$ neprazan, druga izražava da je $\mathcal{M}$ zatvoren u odnosu na komplement, a treća da je $\mathcal{M}$ zatvoren u odnosu na prebrojive unije.

Borelova σ-algebra topološkog prostora T u oznaci $\mathcal{B}(T)$, je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od T. Skupovi u $\mathcal{B}(T)$ su Borelovi skupovi od T.

<u>Definicija 1.3:</u> Funkcija $f : M \to T$ se zove $\mathcal{M}$-merljiva ako $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ za svako $B \in \mathcal{B}(T)$.

Lako se vidi da je kolekcija svih $B \in \mathcal{B}(T)$ koji zadovoljavaju $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ σ-algebra. Kao posledica, f je $\mathcal{M}$-merljiva ako i samo ako $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ za sve otvorene skupove U u T.

Kada su T_1 i T_2 topološki prostori, funkcija $g : T_1 \to T_2$ je Borel merljiva ako $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(T_1)$ za sve $B \in \mathcal{B}(T_2)$ tj. ako je g $\mathcal{B}(T_1)$-merljiva. Primetimo da ako je $f : M \to T$ $\mathcal{M}$-merljiva i ako je $g : T_1 \to T_2$ Borel merljiva, tada je kompozicija $g \circ f : M \to T_2$ je $\mathcal{M}$-merljiva. Iz gore navedenih zapažanja, svaka neprekidna funkcija $g : T_1 \to T_2$ je Borel merljiva.

Naš dojam o $\mathcal{M}$-merljivosti nas ne dovodi do zadovoljavajuće teorije sa gledišta analitičkih funkcija sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$. Zaista, problem je što ova definicija ne obezbeđuje sredstva za aproksimaciju argumenata. Zbog toga ćemo uvesti još jedan pojam merljivosti.

Ograničićemo se na funkcije sa vrednostima u Banachovim prostorima, iako se neki od rezutati dokazani gore mogu proširiti na funkcije sa vrednostima u metričkim prostorima.

Neka je B Banachov prostor i $(M,\mathcal{M})$ merljiv prostor. Funkcija $f: M \to B$ se zove $\mathcal{M}$-jednostavna ako je oblika $f = \sum_{n=1}^{N} 1_{M_n} x_n$ gde $M_n \in \mathcal{M}$ i $x_n \in B$ za sve $1 \le n \le N$. Ovde 1_M označava indikator skupa M, tj. $1_M(\xi) = 1$ ako $\xi \in M$ i $1_M(\xi) = 0$ ako $\xi \notin M$.

Definicija 1.4: Funkcija $f: M \to B$ je jako $\mathcal{M}$-merljiva ako postoji niz $\mathcal{M}$-jednostavnih funkcija $f_n : M \to B$ takvih da $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ tačkasto na M.

Da bi mogli da opišemo jaku $\mathcal{M}$-merljivost funkcija sa vrednostima u B moramo uvesti prvo neku terminologiju.

Definicija 1.5: Funkcija $f: M \to B$ se zove funkcija sa vrednostima u separabilnom prostoru ako postoji separabilan zatvoren potprostor $B_0 \subseteq B$ takav da $f(\xi) \in B_0$, za svako $\xi \in M$. Funkcija $f: M \to B$ je slabo $\mathcal{M}$-merljiva ako su funkcije $\langle f, x^* \rangle : M \to \mathbb{K}, \langle f, x^* \rangle(\xi) := \langle f(\xi), x^* \rangle$ $\mathcal{M}$-merljive za svako $x^* \in B^*$.

Teorema 1.6: (teorema o Pettis merljivosti, prva verzija). Neka je $(M,\mathcal{M})$ merljiv prostor i neka je F normirani potprostor od B^*. Za funkciju $f: M \to B$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(1) f je jako $\mathcal{M}$-merljiva;

(2) f uzima vrednosti u separabilnom prostoru i $\langle f, x^* \rangle$ je $\mathcal{M}$-merljiva za svako $x^* \in B^*$;

(3) f uzima vrednosti u separabilnom prostoru i $\langle f, x^* \rangle$ je $\mathcal{M}$-merljiva za svako $x^* \in F$.

Dokaz: $(1) \Rightarrow (2)$ Neka je $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ niz $\mathcal{M}$-jednostavnih funkcija koje konvergiraju ka f tačkasto i neka je B_0 zatvoren potprostor razapet sa prebrojivo mnogo vrednosti koje uzimaju ove funkcije. Tada je B_0 separabilan i f uzima svoje vrednosti u B_0. Štaviše, svaka $\langle f, x^* \rangle$ je $\mathcal{M}$-merljiva, budući da je tačkasta granica od $\mathcal{M}$-merljivih funkcija $\langle f_n, x^* \rangle$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Ova implikacija je trivijalna.

$(3) \Rightarrow (1)$: Koristeći Lemu 1.1, biramo niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jediničnih vektora u F koji je normirajući za separabilan zatvoren podskup B_0 od B odakle f uzima svoje vrednosti. Na osnovu $\mathcal{M}$-merljivosti funkcija $\langle f, x_n^* \rangle$, za svako $x \in B_0$ funkcija sa vrednostima u realnom prostoru definisana sa

$$\xi \to \| f(\xi) - x \| = \sup_{n \geq 1} \left| \langle f(\xi) - x, x^* \rangle \right|$$

je $\mathcal{M}$-merljiva. Neka je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gust niz u B_0.

Definišimo sledeće funkcije $s_n : B_0 \to \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Za svako $y \in B_0$ neka je $k(n, y)$ najmanji prirodan broj $1 \leq k \leq n$ sa osobinom da je

$$\| y - x_k \| = \min_{1 \leq j \leq n} \| y - x_j \|$$

i stavimo $s_n(y) := x_{k(n,y)}$. Primetimo da je

$$\lim_{x \to \infty} \| s_n(y) - y \| = 0, \quad \forall y \in B_0$$

Pošto je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gust u B_0. Sada definišimo $f_n : M \to B$ preko

$$f_n(\xi) := s_n(f(\xi)), \quad \xi \in M.$$

Za sve $1 \leq k \leq n$ imamo

$$\{\xi \in M : f_n(\xi) = x_k\} = \{\xi \in M : \| f(\xi) - x_k \|\}$$

$$= \min_{1 \leq j \leq n} \| f(\xi) - x_j \| \cap \left\{ \xi \in M : \| f(\xi) - x_l \| > \min_{1 \leq j \leq n} \| f(\xi) - x_j \|, \ za \ l = 1, ..., k-1 \right\}$$

Primetimo da su skupovi sa desne strane u $\mathcal{M}$. Stoga svaka f_n je $\mathcal{M}$-jednostavna, i za svako $\xi \in M$ imamo

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(\xi) - f(\xi) \| = \lim_{n \to \infty} \| s_n(f(\xi)) - f(\xi) \| = 0$$

<u>Korolar 1.7:</u> Tačkasta granica niza jako $\mathcal{M}$-merljivih funkcija je jako $\mathcal{M}$-merljiva.

<u>Dokaz:</u> Svaka funkcija f_n uzima svoje vrednosti u separabilnom potprostoru od B. Onda f uzima vrednost u zatvorenoj linearnoj obvojnici ovih prostora, koji je separabilan. Merljivost funkcija $\langle f, x^* \rangle$ sledi iz činjenice da svaka $\langle f, x^* \rangle$ je tačkasta granica merljivih funkcija $\langle f_n, x^* \rangle$.

<u>Korolar 1.8:</u> Ako je funkcija f sa vrednostima iz B jako $\mathcal{M}$-merljiva i $\phi : B \to F$ neprekidna, gde je F neki drugi Banachov prostor, tada je i $\phi \circ f$ jako $\mathcal{M}$-merljiva.

<u>Dokaz:</u> Izaberimo jednostavne funkcije f_n koje konvergiraju ka f tačkasto. Tada $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ tačkasto pa rezultat sledi iz prethodnog korolara.

Propozicija 1.9: Za funkciju $f : M \to B$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(1) f je jako $\mathcal{M}$-merljiva

(2) f uzima vrednosti u separabilnom prostoru i za sve $X \in \mathrm{B}(B)$ važi $f^{-1}(X) \in \mathcal{M}$.

Dokaz: $(1) \Rightarrow (2)$ Neka je f jako $\mathcal{M}$-merljiva. Tada f uzima vrednosti u separabilnom prostoru. Da bi smo dokazali da $f^{-1}(X) \in \mathcal{M}$ za sve $X \in \mathrm{B}(B)$ dovoljno je da pokažemo da $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ za sve otvorene skupove U.

Neka je U otvoren i izaberimo niz $\mathcal{M}$-jednostavnih funkcija f_n koje tačkasto konvergiraju ka f. Za $r > 0$ neka je $U_r = \left\{ x \in U : d\left(x, \overline{U}\right) > r \right\}$ gde $\overline{U}$ stoji kao oznaka za komplement od U. Tada $f_n^{-1}(U_r) \in \mathcal{M}$ za sve $n \geq 1$ po definiciji $\mathcal{M}$-jednostavnih funkcija. Kako važi

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} f_k^{-1}\left(U_{\frac{1}{m}} \right)$$

(inkluzija '$\subseteq$' je posledica činjenice da je U otvoren) sledi takođe da $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Pretpostavimo da je f $\mathcal{M}$-merljiva, samim tim i $\left\langle f, x^* \right\rangle$ je takođe $\mathcal{M}$-merljiva za sve $x^* \in B^*$. Dokaz sledi iz teoreme o Pettis merljivosti.

Stoga, ako je B separabilan, tada je funkcija f sa vrednostima u B jako $\mathcal{M}$-merljiva ako i samo ako je $\mathcal{M}$-merljiva.

1.3.2. Jaka μ-merljivost

Do sada smo razmatrali osobine merljivosti funkcija sa vrednostima u B koje su definisane nad merljivim prostorom $(M, \mathcal{M})$. Sada ćemo posmatrati funkcije definisane na σ-konačnom merljivom prostoru $(M, \mathcal{M}, \mu)$ tj. μ je mera na merljivom prostoru $(M, \mathcal{M})$, i postoje skupovi $M^{(1)} \subseteq M^{(2)} \subseteq \ldots$ u $\mathcal{M}$ sa osobinom da je $\mu\left(M^{(n)}\right) < \infty$ za sve $n \geq 1$ i $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^{(n)}$.

μ-jednostavna funkcija sa vrednostima u B je funkcija oblika

$$f = \sum_{n=1}^{N} 1_{M_n} x_n$$

gde $x_n \in B$ i skupovi $M_n \in \mathcal{M}$ zadovoljavaju $\mu\left(M_n\right) < \infty$.

Kažemo da neko svojstvo važi μ-skoro svuda ako postoji skup $N \in \mathcal{M}$ μ- mere nula takav da to svojstvo važi na komplementu $\overline{N}$ od N.

<u>Definicija 1.10:</u> Funkcija $f : M \to B$ je jako μ-merljiva ako postoji niz $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ μ-jednostavnih funkcija koje konvergiraju ka f μ-skoro svuda.

Koristeći σ-konačnost mere μ lako se vidi da je svaka jako $\mathcal{M}$-merljiva funkcija i jako μ-merljiva. Zaista, ako je f jako $\mathcal{M}$-merljiva i $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ tačkasto gde je svaka f_n $\mathcal{M}$-jednostavna funkcija, tada takodje i $\lim_{n\to\infty} 1_{M^{(n)}} f_n = f$ tačkasto, gde je $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^{(n)}$ kao i pre, i svaka $1_{M^{(n)}} f_n$ je μ-jednostavna. Sledeća propozicija pokazuje da u obrnutom smeru, svaka jako μ-merljiva funkcija je jednaka μ-skoro svuda jakoj $\mathcal{M}$-merljivoj funkciji.

Nazovimo dve funkcije koje su jednake μ-skoro svuda μ-verzijama jedna druge.

<u>Propozicija 1.11:</u> Za funkciju $f : M \to B$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(1) f je jako μ-merljiva;

(2) f ima μ-verziju koja je jako $\mathcal{M}$-merljiva.

<u>Dokaz:</u> $(1) \Rightarrow (2)$ Pretpostavimo da $f_n \to f$ van skupa $N \in \mathcal{M}$ mere nula, gde je svaka f_n μ-jednostavna. Tada imamo $\lim_{n\to\infty} 1_{\overline{N}} f_n = 1_{\overline{N}} f$ tačkasto na A, i s obzirom da su funkcije $1_{\overline{N}} f_n$ $\mathcal{M}$-jednostavne, $1_{\overline{N}} f$ je jako $\mathcal{M}$-merljiva. Iz ovoga sledi da je $1_{\overline{N}} f$ jako $\mathcal{M}$-merljiva μ-verzija od f.

$(2) \Rightarrow (1)$ Neka je $\widetilde{f}$ jako $\mathcal{M}$-merljiva μ-verzija od f, i neka je $N \in \mathcal{M}$ skup mere nula takav da je $f = \widetilde{f}$ na $\overline{N}$. Ako je $\left(\widetilde{f_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ niz od $\mathcal{M}$-jednostavnih funkcija koje konvergiraju tačkasto ka $\widetilde{f}$, tada $\lim_{n\to\infty} \widetilde{f_n} = f$ na $\overline{N}$, što znači da je $\lim_{n\to\infty} \widetilde{f_n} = f$ μ-skoro svuda.

Napišimo $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^{(n)}$ tako da $M^{(1)} \subseteq M^{(2)} \subseteq \ldots \in \mathcal{M}$ i $\mu\left(M^{(n)}\right) < \infty$ za sve $n \geq 1$. Funkcije $f_n := 1_{A^{(n)}} \widetilde{f_n}$ su μ-jednostavne i imamo $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-skoro svuda.

Kažemo da je f sa μ-separabilnim vrednostima ako postoji zatvoren separabilni podskup B_0 od B takav da $f(\xi)\in B_0$ za μ-skoro sve $\xi\in M$, i slabo μ-merljiva ako je $\langle f,x^*\rangle$ μ-merljiva za sve $x^*\in B^*$.

<u>Teorema 1.12:</u> (teorema o Pettis merljivosti, druga verzija). Neka je $(M,\mathcal{M},\mu)$ prostor σ-konačne mere, i neka je F normirani potprostor od B^*. Za funkciju $f:M\to B$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(1) f je jako μ-merljiva;

(2) f je sa μ-separabilnim vrednostima i $\langle f,x^*\rangle$ je μ-merljiva za sve $x^*\in B^*$;

(3) f je sa μ-separabilnim vrednostima i $\langle f,x^*\rangle$ je μ-merljiva za sve $x^*\in F$.

<u>Dokaz:</u> Implikacija $(1)\Rightarrow(2)$ sledi iz odgovarajuće implikacije u Teoremi 1.5 kombinovanu sa Propozicijom 1.10, a $(2)\Rightarrow(3)$ je trivijalno. Implikacija $(3)\Rightarrow(1)$ se dokazuje na isti način kao odgovarajuća implikacija iz Teoreme 1.5, uzimajući u obzir da u ovom slučaju funkcije f_n imaju μ-verzije $\widetilde{f_n}$ koje su $\mathcal{M}$-jednostavne. Ako napišemo $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M^{(n)}$ kao pre, i svaka $M^{(n)}$ je konačne μ-mere, funkcije $1_{M^{(n)}}\widetilde{f_n}$ su μ-jednostavne i konvergiraju ka f μ-skoro svuda.

Kombinovanjem propozicije 1.10 sa Korolarom 1.6 i 1.7 dobijamo sledeće tvrđenje:

<u>Korolar 1.13:</u> μ-skoro svuda granica od niza jako μ-merljivih funkcija sa vrednostima u B je jako μ-merljiva.

<u>Korolar 1.14:</u> Ako je funkcija sa vrednostima u B jako μ-merljiva i $\phi:B\to F$ je neprekidna, gde je F neki drugi Banachov prostor, tada je $\phi\circ f$ jako μ-merljiva.

Sledeću osobinu ćemo često koristiti:

<u>Korolar 1.15:</u> Neka su f i g jako μ-merljive funkcije sa vrednostima iz B za koje važi $\langle f,x^*\rangle=\langle g,x^*\rangle$ μ-skoro svuda za sve $x^*\in F$, gde je F potprostor od B^* koji razdvaja tačke u B. Tada $f=g$ μ-skoro svuda.

Dokaz: Obe funkcije, i f i g, uzimaju vrednosti iz separabilnog zatvorenog potprostora B_0 μ-skoro svuda, recimo van μ-nula skupa N. Kako je B_0 separabilan, po Lemi 1.2 neka prebrojiva familija elemenata $\left(x_n^*\right)_{n=1}^{\infty}$ u F razdvaja tačke od B_0. Kako je $\left\langle f, x^* \right\rangle = \left\langle g, x^* \right\rangle$ van μ-nula skupa N_n, možemo zaključiti da se f i g slažu van μ-nula skupa $N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$.

1.4. Bochnerov integral

Bochnerov integral je prirodna generalizacija poznatog Lebesgueovog integrala za funkcije koje uzimaju vrednosti u Banachovom prostoru. Kroz ovo poglavlje, $(M, \mathcal{M}, \mu)$ je prostor σ-konačne mere.

1.4.1. Bochnerov integral

Definicija1.16: Funkcija $f : M \to B$ je μ-Bochner integrabilna ako postoji niz μ-jednostavnih funkcija $f_n : M \to B$ takav da su sledeća dva uslova zadovoljena:

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-skoro svuda;

(2) $\lim_{n\to\infty} \int_M \| f_n - f \| \, d\mu = 0$.

Primetimo da je f jako μ-merljiva. Funkcije $\| f_n - f \|$ su μ-merljive po Korolaru 1.14.

Trivijalno sledi iz definicije da je svaka μ-jednostavna funkcija μ-Bochner integrabilna. Za $f = \sum_{n=1}^{N} 1_{M_n} x_n$ definišemo

$$\int_M f \, d\mu := \sum_{n=1}^{N} \mu(M_n) x_n .$$

Rutinski se proverava nezavisnost definicije od reprezentacije f-a. Ako je f μ-Bochner integrabilna, granica

$$\int_M f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu$$

postoji u B i zove se Bochnerov integral od f u odnosu na μ. Lako se proverava da definicija ne zavisi od izbora niza $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ako je f μ-Bochner integrabilna i g je μ-verzija od f, tada je g μ-Bochner integrabilna i Bochnerovi integrali od f i g se slažu. Čak šta više, u definiciji Bochnerovog integrala funkcija f ne mora da bude definisana svuda, dovoljno je da bude definisana μ-skoro svuda.

Ako je f μ-Bochner integrabilna, tada za sve $x^* \in B^*$ imamo sledeći identitet:

$$\left\langle \int_M f \, d\mu, x^* \right\rangle = \int_M \left\langle f, x^* \right\rangle d\mu .$$

Za μ-jednostavne funkcije ovo je trivijalno, a opšti slučaj sledi iz aproksimacije funkcije f sa μ-jednostavnim funkcijama.

<u>Propozicija 1.17:</u> Jako μ-merljiva funkcija $f : M \to B$ je μ-Bochner integrabilna ako i samo ako je

$$\int_M \|f\| \, d\mu < \infty ,$$

a u ovom slučaju imamo

$$\left\| \int_M f \, d\mu \right\| \leq \int_M \|f\| \, d\mu .$$

<u>Dokaz:</u> Prvo pretpostavimo da je f μ-Bochner integrabilna. Ako μ-jednostavne funkcije f_n zadovoljavaju obe pretpostavke iz Definicije 1.15, tada za dovoljno veliko n dobijamo

$$\int_M \|f\| \, d\mu \leq \int_M \|f - f_n\| \, d\mu + \int_M \|f_n\| \, d\mu < \infty .$$

Obratno, neka je f jako μ-merljiva funkcija za koju važi $\int_M \|f\| \, d\mu < \infty$. Neka g_n budu μ-jednostavne funkcije takve da je $\lim_{n\to\infty} g_n = f$ μ-skoro svuda i definišimo

$$f_n := 1_{\{\|g_n\| \leq 2\|f\|\}} g_n .$$

Tada su f_n μ-jednostavne, i jasno imamo $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-skoro svuda. Kako imamo $\|f_n\| \leq 2\|f\|$ tačkasto, teorema o dominantnoj konvergenciji se može primeniti i dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_M \|f_n - f\| \, d\mu = 0 .$$

Poslednja nejednakost je trivijalna za μ-jednostavne funkcije, a opšti slučaj sledi aproksimacijom.

Kao napomena, primetimo da ako je $f : M \to B$ μ-Bochner integrabilna, tada za sve $P \in \mathcal{M}$ odsečena funkcija $1_P f : M \to B$ je μ-Bochner integrabilna, restrikcija funkcije f $f|_P : P \to B$ je $\mu|_P$-Bochner integrabilna, i imamo

$$\int_M 1_B f \, d\mu = \int_M f|_B \, d\mu|_B .$$

Stoga ćemo oba integrala označavati sa $\int_P f \, d\mu$.

U sledećoj priči, $conv(V)$ označava konveksni omotač podskupa $V \subseteq B$, tj. skup svih konačnih suma $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ sa $\lambda_j \geq 0$ koje zadovoljava $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1$ i $x_j\in V$ za $j=1,...,k$. Zatvaranje ovog skupa označavamo sa $\overline{conv}(V)$.

Propozicija 1.18: Neka je funkcija $f:M\to B$ μ-Bochner integrabilna. Ako je $\mu(M)=1$, onda

$$\int_M f\ d\mu\in\overline{conv}\left\{f(\xi):\xi\in M\right\}.$$

Dokaz: Kažimo da je element $x\in B$ striktno razdvojen od skupa $V\subseteq B$ funkcionelom $x^*\in B^*$ ako postoji broj $\delta>0$ za koji važi

$$\left|\operatorname{Re}\left\langle x,x^*\right\rangle-\operatorname{Re}\left\langle v,x^*\right\rangle\right|\geq\delta\quad\forall v\in V.$$

Han-Banachova teorema o razdvajanju tvrdi da ako je V konveksan skup i $x\notin\overline{V}$, onda postoji funkcional $x^*\in B^*$ koji striktno razdvaja x od V.

Za $x^*\in B^*$, neka je

$$m\left(x^*\right):=\inf\left\{\operatorname{Re}\left\langle f(\xi),x^*\right\rangle:\xi\in M\right\}$$

$$M\left(x^*\right):=\sup\left\{\operatorname{Re}\left\langle f(\xi),x^*\right\rangle:\xi\in M\right\}$$

Ove vrednosti mogu biti $-\infty$ i ∞. Zatim, kako je $\mu(M)=1$,

$$\operatorname{Re}\left\langle\int_M f\ d\mu,x^*\right\rangle=\int_M\operatorname{Re}\left\langle f,x^*\right\rangle d\mu\in\left[m\left(x^*\right),M\left(x^*\right)\right].$$

Ovo pokazuje da $\int_M f\ d\mu$ ne može biti striktno razdvojen od konveksnog skupa $conv\left\{f(\xi):\xi\in M\right\}$ funkcionelama iz B^*. Stoga zaključak sledi primenom Han-Banachove teoreme o razdvajanju.

Lebesgueova teorija integracije sadrži posebne teoreme koje važe za nenegativne funkcije, ali se one gube kod Bochnerovog integrala. Ostale teoreme Lebesgueove integracije koje se odnose na kompleksne funkcije se po analogiji prenose i na Bochnerov integral. Na primer, ne postoji analogija sa Fatouovom teoremom i teoremom o monotonoj konvergenciji, ali imamo sledeću analogiju sa teoremom o dominantnoj konvergenciji:

Propozicija1.19: (Teorema o dominantnoj konvergenciji) Neka je $f_n:M\to B$ niz funkcija, i neka je svaka od njih μ-Bochner integrabilna. Pretpostavimo da postoji funkcija $f:M\to B$ i μ-Bochner integrabilna funkcija $g:M\to\mathbb{K}$ takva da je:

(1) $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ μ-skoro svuda;

(2) $\|f_n\|\leq|g|$ μ-skoro svuda.

Tada je f μ-Bochner integrabilna i imamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_M\|f_n-f\|\,d\mu=0.$$

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n \; d\mu = \int_M f \; d\mu .$$

<u>Dokaz:</u> Imamo $\|f_n - f\| \le 2|g|$ μ-skoro svuda, pa stoga rezultat sledi iz teoreme o skalarno dominantnoj konvergenciji.

Iz definicije Bochnerovog integrala sledi da ako je $f : M \to B$ μ-Bochner integrabilna i T je ograničen linearni operator iz B u neki drugi Banachov prostor F, tada $T \circ f : M \to F$ je μ-Bochner integrabilna i važi

$$T\int_M f \; d\mu = \int_M Tf \; d\mu .$$

Ovaj identitet ima korisno proširenje na odgovarajuću klasu neograničenih operatora. Za linearni operator T, definisan na linearnom potprostoru $\mathcal{D}(T)$ od B i koji uzima vrednosti u drugom Banachovom prostoru F, se kaže da je zatvoren ako mu je graf

$$\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}$$

zatvoreni potprostor od $B \times F$. Ako je T zatvoren, tada $\mathcal{D}(T)$ je Banachov prostor u odnosu na normu grafa

$$\|x\|_{\mathcal{D}(T)} := \|x\| + \|Tx\|$$

i T je ograničen operator iz $\mathcal{D}(T)$ u B.

Teorema o zatvorenom grafu tvrdi da ako je $T : B \to F$ zatvoreni operator sa domenom $\mathcal{D}(T) = B$, tada je T ograničen.

<u>Teorema 1.20:</u> (Hille) Neka je $f : M \to B$ μ-Bochner integrabilna i neka je T ograničen linearni operator sa domenom $\mathcal{D}(T)$ u B koji uzima vrednosti u Banachovom prostoru F. Pretpostavimo da f uzima vrednosti u $\mathcal{D}(T)$ μ-skoro svuda i neka je μ-skoro svuda definisana funkcija $T \circ f : M \to B$ μ-Bochner integrabilna. Tada $\int_M f \; d\mu \in \mathcal{D}(T)$ i

$$T\int_M f \; d\mu = \int_M Tf \; d\mu .$$

<u>Dokaz:</u> Počnimo sa prostim zapažanjem koje je posledica Propozicije 1.17 i činjenice da koordinantna preslikavanja komutiraju sa Bochnerovim integralima: ako su B_1 i B_2 Banachovi prostori i $f_1 : M \to B_1$ i $f_2 : M \to B_2$ su μ-Bochner integrabilne, tada $f = (f_1, f_2) : M \to B_1 \times B_2$ je μ-Bochner integrabilna i

$$\int_M f \; d\mu = \left(\int_M f_1 \; d\mu, \int_M f_2 \; d\mu\right).$$

Vratimo se na dokaz teoreme, prema prethodnom zapažanju funkcija $g : M \to B \times F, g(\xi) := (f(\xi), Tf(\xi))$ je μ-Bochner integrabilna. Šta više, kako g uzima vrednosti iz grafa $\mathcal{G}(T)$ imamo $\int_M g(\xi) \; d\mu(\xi) \in \mathcal{G}(T)$. S druge strane,

$$\int_M g(\xi)\ d\mu(\xi) = \left(\int_M f(\xi)\ d\mu(\xi), \int_M Tf(\xi)\ d\mu(\xi)\right).$$

Rezultat sledi kombinovanjem ove dve činjenice.

Završavamo ovo poglavlje sa teoremom o integraciji funkcija sa vrednostima u B koje mogu da ne budu Bochner integrabilne.

Teorema 1.21: (Pettis) Neka je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor konačne mere i neka je $1 < p < \infty$ fiksiran. Ako je $f : M \to B$ jako μ-merljiva i zadovoljava $\langle f, x^* \rangle \in L^p(M)$ za sve $x^* \in B^*$, onda postoji jedinstveni $x_f \in B$ koje zadovoljava

$$\langle x_f, x^* \rangle = \int_M \langle f, x^* \rangle\ d\mu .$$

Element x_f se zove Pettisov integral od f u odnosu na μ.

Dokaz: Možemo da pretpostavimo da je f jako $\mathcal{M}$-merljiva.

Lako se vidi da je linearno preslikavanje $S : B^* \to L^p(M), Sx^* := \langle f, x^* \rangle$ zatvoreno. Sledi da je S ograničeno po teoremi o zatvorenom grafu.

Stavimo da je $M_n := \{\|f\| \le n\}$. Tada $M_n \in \mathcal{M}$ i po Propoziciji 1.17 integral $\int_{M_n} f\ d\mu$ postoji kao Bochnerov integral u B. Za sve $x^* \in B^*$ i $n \ge m$, po Hölderovoj nejednakosti imamo

$$\left|\left\langle \int_{M_n \setminus M_m} f\ d\mu(x), x^* \right\rangle\right| \le \left(\mu(M_n \setminus M_m)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_M \left|\langle f, x^* \rangle\right|^p\ d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left(\mu(M_n \setminus M_m)\right)^{\frac{1}{q}} \|S\| \|x^*\|, \text{ gde je } \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Ako uzmemo supremum za sve $x^* \in B^*$ sa osobinom da je $\|x^*\| \le 1$ vidimo da je

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\|\int_{M_n \setminus M_m} f\ d\mu\right\| \le \lim_{m,n\to\infty} \left(\mu(M_n \setminus M_m)\right)^{\frac{1}{q}} \|S\| = 0.$$

Stoga granica $x_f := \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f\ d\mu$ postoji u B. Jasno,

$$\langle x_f, x^* \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} \langle f, x^* \rangle\ d\mu = \int_M \langle f, x^* \rangle\ d\mu$$

za sve $x^* \in B^*$. Jedinstvenost sledi iz Han-Banachove teoreme.

1.4.2. Lebesgue-Bochnerovi prostori $L^p(B;M)$

Neka je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor σ-konačne mere. Za $1 \leq p \leq \infty$ definišemo $L^p(B;M)$ kao linearni prostor svih (klasa ekvivalencije) jako μ-merljivih funkcija $f : M \to B$ za koje

$$\int_M \|f\|^p \, d\mu < \infty,$$

pri čemu izjednačavamo funkcije jednake μ-skoro svuda. Snabdeven sa normom

$$\|f\|_{L^p(B;M)} := \left(\int_M \|f\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

prostor $L^p(B;M)$ je Banachov prostor; dokaz je sličan kao i u skalarnom slučaju. Ponavljajući drugi deo dokaza za Propoziciju 1.16 vidimo da su μ-jednostavne funkcije guste u $L^p(B;M)$.

Primetimo da su elementi od $L^1(B;M)$ baš klase ekvivalencije od μ-Bochner integrabilnih funkcija.

Definišimo $L^\infty(B;M)$ kao linearni prostor svih (klasa ekvivalencije) jako μ-merljivih funkcija $f : M \to B$ za koje postoji broj $r \geq 0$ takav da $\mu\{\|f\| > r\} = 0$. Snabdeven sa normom

$$\|f\|_{L^\infty(B;M)} := \inf\left\{r \geq 0 : \mu\{\|f\| > r\} = 0\right\},$$

prostor $L^\infty(B;M)$ je Banachov prostor.

2. Slučajne promenljive sa vrednostima u Banachovim prostorima

U ovom poglavlju ćemo se baviti slučajnim promenljivama sa vrednostima u Banachovim prostorima B. Glavni rezultat je Ito-Nisiova teorema, koja tvrdi da su različiti načini konvergencije suma nezavisnih simetričnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B ekvivalentni. Ovaj rezultat nam daje moćno oružje za proveru skoro sigurno konvergenciju suma nezavisnih simetričnih slučajnih promenljivih i igraće važnu ulogu u predstojećem poglavlju. Dokaz Ito-Nisiove teoreme bazira se na jedinstvenoj osobini Fourierovih transformacija.

Počev od ovog poglavlja pretpostavljaćemo da su svi prostori realni. Ova pretpostavka je zgodna kada se bavimo Fourierovim transformacijama, a i kasnije, kada budemo koristili Rieszovu teoremu o reprezentaciji da odredimo Hilbertove prostore i njihove duale.

2.1. Definicija i osnovna svojstva slučajnih promenljivih u Banachovim prostorima

Neka je prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i B realan Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|$. Neka je $\mathcal{A}_B$ familija svih otvorenih skupova u B i neka je $\mathcal{B}_B = \sigma(\mathcal{A}_B)$. $\mathcal{B}_B$ zovemo σ-algebra Borelovih skupova u B, a njegove elemente Borelovi skupovi (u B).

<u>Definicija2.1:</u> Preslikavanje $X : \Omega \to B$ zovemo slučajna promenljiva (sa vrednostima u B) ako je ona merljiva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_B)$, tj.ako za svako $A \in \mathcal{B}_B$ važi

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Prema tome, X je slučajna promenljiva sa vrednostima u B ako je $X^{-1}(\mathcal{B}_B) \subset \mathcal{F}$.

<u>Propozicija 2.2:</u> Ako je B separabilan Banachov prostor tada je preslikavanje $X : \Omega \to B$ slučajna promenljiva ako i samo ako je $f(X)$ slučajna promenljiva za svako $f \in B^*$.

<u>Dokaz:</u> Neka je B^* dual od B, tj. B^* je Banachov prostor svoh ograničenih (neprekidnih) linearnih funkcionala na B. Ako je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B, tada je za svako $f \in B^*$, $f(X)$ slučajna promenljiva na osnovu Korolara 1.8.

Pretpostavimo sada obrnuto, da je $f(X)$ slučajna promenljiva za svako $f \in B^*$. Stavimo $\mathcal{S} = \sigma\left\{f^{-1}(A); f \in B^*, A \in \mathsf{B}\right\}$ (B - familija Borelovih skupova na $\mathbb{R}$). Kako je

$$X^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) = \left(f(X)\right)^{-1}(A) \in \mathsf{F}$$

za svako $A \in \mathsf{B}$ i svako $f \in B^*$, dovoljno je pokazati $\mathcal{S} = \mathsf{B}_B$. Očigledno je $\mathcal{S} \subset \mathsf{B}_B$, dokažimo da važi druga inkluzija. Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N})$ prebrojiv gust skup u B. Iz Han-Banachove teoreme sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $f_n \in B^*$ takva da je $\|f_n\| = 1$ i $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Za $r > 0$ stavimo

$$C_1 = \left\{x; \|x\| \le r\right\} \text{ i } C_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x; \left|f_n(x)\right| \le r\right\}.$$

Očigledno je $C_1 \subset C_2$. Dokažimo da je $C_1 = C_2$. Pretpostavimo da $x \notin C_1$, a kako je niz $(x_n, n \in \mathbb{N})$ gust u B, postoji x_k takav da je $\|x - x_k\| < \frac{1}{2}\left(\|x\| - r\right)$.

Odavde sledi

$$\|x_k\| \ge \|x\| - \|x - x_k\| > \|x\| - \frac{1}{2}\left(\|x\| - r\right) = \frac{1}{2}\left(\|x\| + r\right), \text{ i}$$

$$\left|f_k(x) - \|x_k\|\right| = \left|f_k(x) - f_k(x_k)\right| \le \|x - x_k\| < \frac{1}{2}\left(\|x\| - r\right).$$

Pri tome imamo

$$f_k(x) = \|x_k\| - \left(\|x_k\| - f_k(x)\right) \ge \|x_k\| - \left|\|x_k\| - f_k(x)\right| > r,$$

dakle $x \notin C_2$. Odavde sledi da je $C_1 = C_2 \in \mathcal{S}$. Kako je skup $\mathcal{S}$ invarijantan na translacije dobijamo da je $\left\{x; \|x - a\| \le r\right\} \in \mathcal{S}$ za svako $a \in B$. Odavde, i iz činjenice da je $\sigma\left\{\left\{x; \|x - a\| \le r\right\}; a \in B, r > 0\right\} = \mathsf{B}_B$ zaključujemo da je $\mathcal{S} = \mathsf{B}_B$.

Korolar 2.3: Ako je B separabilan Banachov prostor i ako su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u B, tada su i $X + Y$ i $X - Y$ takođe slučajne promenljive sa vrednostima u B.

Dokaz: Sledi iz Propozicije 2.2 i činjenice da za svako $f \in B^*$ važi

$$f(X \pm Y) = f(X) \pm f(Y)$$

Propozicija 2.4: Ako je X slučajna promenljiva sa vrednostima u Banachovom prostoru B, tada je $\|X\|$ slučajna promenljiva.

Dokaz: Sledi iz činjenice da je norma $\|\cdot\|$ neprekidna funkcija iz B u $\mathbb{R}$.

Napomena 2.5: Neka je B separabilan Banachov prostor i neka su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u B, tada iz

Korolara 2.3 i Propozicije 2.4 sledi da su $\|X+Y\|$ i $\|X-Y\|$ slučajne promenljive.

Sledeći primer nam pokazuje da suma dve slučajne promenljive sa vrednostima u neseparabilnom Banachovom prostoru ne mora biti slučajna promenljiva.

<u>Primer 2.6:</u> Neka je B vektorski prostor svih ograničenih realnih funkcija na $\mathbb{R}$ i neka je B_1 skup svih funkcija iz $\mathbb{R}$ u $\{0,1\}$. Tada je $Card(B) \geq Card(B_1) = 2^c > c$, gde je c kardinalni broj kontinuuma. Uvedimo u B normu sa $\|x\| = \sup|x(t)|, x \in B$. Za $A \in \mathcal{B}_B \times \mathcal{B}_B$ stavimo

$$P(A) = \begin{cases} 1 & ako\ (0,0) \in A \\ 0 & ako\ (0,0) \notin A \end{cases}$$

Tada je $(B \times B, \mathcal{B}_B \times \mathcal{B}_B, P)$ prostor verovatnoće. Definišimo sada slučajne promenljive X i Y iz $B \times B$ u B sa

$$X(f,g) = f,\ Y(f,g) = \text{g},\ (f,g) \in B \times B.$$

Tada $\|X-Y\|$ nije slučajna promenljiva jer imamo

$$\|X-Y\|^{-1}(\{0\}) = \{(f,g) \in B \times B; |f(t) - g(t)| = 0 \text{ za sve t} \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(f,f); f \in B\} \notin \mathcal{B}_B \times \mathcal{B}_B,$$

jer je $Card(B) > c$ i $\mathcal{B}_B$ sadrži sve jednočlane podskupove od B. Iz Propozicije 2.4 sledi da $X-Y$ nije slučajna promenljiva sa vrednostima u B.

Zbog ovoga ćemo ubuduće uglavnom pričati o separabilnim Banachovim prostorima.

<u>Napomena 2.7:</u> Neka je $(E_n)_{n=1,2,...} \subset \mathcal{F}$ konačna ili prebrojiva particija od Ω i neka je $(x_n)_{n=1,2,...}$ proizvoljan niz u B. Definišimo funkciju $X : \Omega \to B$ tako da za svako n stavimo $X(\omega) = x_n$ ako je $\omega \in E_n$. Lagano je proveriti da je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B, koju zovemo diskretna slučajna promenljiva.

Sledeća propozicija pokazuje da je skup svih slučajnih promenljivih u Banachovom prostoru zatvoren u odnosu na tačkastu konvergenciju.

<u>Propozicija 2.8:</u> Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih promenljivih u Banachovom prostoru B i neka je $X_n(\omega) \to X(\omega)$ za svako $\omega \in \Omega$. Tada je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B.

<u>Dokaz:</u> Dovoljno je pokazati da je $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ za svaki zatvoren skup C. Neka je za svako $k \in \mathbb{N}$

$$C_k = \bigcup_{x \in C} L\left(x, \frac{1}{k}\right) = \bigcup_{x \in C} \left\{ y \in B; \|x - y\| < \frac{1}{k} \right\}.$$

C_k je otvoren skup, a iz zatvorenosti od C sledi $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Sada imamo

$$X^{-1}(C) = \bigcap_{k=1}^{\infty} X^{-1}(C_k) =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; X_n(\omega) \in C_k \text{ za sve osim eventualno konačno mnogo } n \right\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\lim_n X_n^{-1}(C_k) \right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} X_m^{-1}(C_k).$$

Kako su X_m slučajne promenljive imamo $X_m^{-1}(C_k) \in \mathcal{F}$ za sve m i k, a iz toga sledi da je $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$.

<u>Propozicija 2.9:</u> Neka je B separabilan Banachov prostor. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji diskretna Borelova funkcija $T_\varepsilon : B \to B$ takva da je $\|T_\varepsilon(x) - x\| < \varepsilon$ za svako $x \in B$.

<u>Dokaz:</u> Neka je $\{x_1, x_2, ...\}$ prebrojiv gust skup u B. Za $\varepsilon > 0$ familija lopti $L(x_i, \varepsilon) = \{x \in B; \|x - x_i\| < \varepsilon\}$ $(i = 1, 2, ...)$ pokriva B. Definišimo diskretnu Borelovu funkciju T_ε na sledeći način

$$T_\varepsilon(x) = \begin{cases} x_1 & \text{ako } x \in L(x_1, \varepsilon) \\ x_n & \text{ako } x \in L(x_n, \varepsilon) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} L(x_i, \varepsilon), \; n = 2, 3, ... \end{cases}$$

T_ε očigledno ima tražene osobine.

Sledeća teorema daje karakterizaciju slučajnih promenljivih kada je u pitanju separabilan Banachov prostor.

<u>Teorema 2.10:</u> Neka je B separabilan Banachov prostor. Preslikavanje $X : \Omega \to B$ je slučajna promenljiva sa vrednostima u B ako i samo ako postoji niz $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diskretnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B koji konvergira ka X.

<u>Dokaz:</u> Prvi deo teoreme sledi iz Propozicije 2.8. Neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B. Za $n \in \mathbb{N}$ uzmimo da je $X_n = T_{\frac{1}{n}}(X)$ gde je $T_{\frac{1}{n}}$ iz Propozicije 2.9. X_n su diskretne slučajne promenljive sa vrednostima u B i iz konstrukcije od $T_{\frac{1}{n}}$ sledi

$$\|X_n(\omega) - X(\omega)\| < \frac{1}{n} \text{ za svako } \omega \in \Omega.$$

Propozicija 2.11: Neka je $X:\Omega\to B$ slučajna promenljiva sa vrednostima u Banachovom prostoru B, i neka je $W:\Omega\to\mathbb{R}$ slučajna promenljiva. Tada je $WX:\Omega\to B$ slučajna promenljiva sa vrednostima u B.

Dokaz: Neka je $\left(W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednostavnih slučajnih promenljivih koji tačkasto konvergira ka W. Zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda u B, W_nX je slučajna promenljiva sa vrednostima u B. Tvrđenje sada sledi iz Propozicije 2.6 i činjenice da W_nX tačkasto konvergira ka WX.

Veoma često se posmatraju slučajne promenljive sa vrednostima u Banachovim prostorima sa Schauderovom bazom.

Definicija 2.12: Niz $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vektora Banachovog prostora B je Schauderova baza u B ako za svaki vektor $x\in B$ postoji jedinstven niz skalara $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_kb_k\ . \tag{1}$$

Ako je $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauderova baza u B tada možemo definisati niz $\left(f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ linearnih funkcionala na B tako da važi $f_k\left(x\right)=t_k,\ k\in\mathbb{N}$, gde je $x\in B$ i $x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_kb_k$.

Linealne funkcionale $f_k\left(k\in\mathbb{N}\right)$ zovemo koordinatni funkcionali (za bazu $\left(b_n\right)$). Koordinatni funkcionali zavise od baze i budući da je B Banachov prostor oni su neprekidni. Važi

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(x\right)b_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_k\left(x\right)b_k,\ x\in B \tag{2}$$

Banachov prostor sa Schauderovom bazom je separabilan, ali postoji separabilan Banachov prostor koji nema Schauderovu bazu.

Ako je B Banachov prostor sa Schauderovom bazom, tada možemo definisati niz $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ linearnih operatora na B tako da važi

$$U_n\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}f_k\left(x\right)b_k,\ x\in B.$$

Niz $\left(U_n\right)$ zovemo niz operatora parcijalnih suma (za bazu $\left(b_n\right)$). Može se dokazati da postoji konstanta $m>0$ takva da je $\left\|U_n\right\|\le m$ za sve $n\in\mathbb{N}$. Broj m zovemo konstanta baze.

Primer 2.13: Neka je $c_0=\left\{x=\left(x_1,x_2,...\right);x_n\in\mathbb{R},\lim_{n\to\infty}x_n=0\right\}$ i $l_p=\left\{x:\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^p<\infty\right\}$ $\left\|x\right\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^p\right)^{1/p}$. c_0 je separabilan Banachov prostor s normom $\left\|x\right\|=\sup_n\left|x_n\right|$. U Banachovim prostorima c_0 i

l_p $(1 \le p < \infty)$ niz $e_1 = (1,0,0,...)$, $e_2 = (0,1,0,...)$,... je Schauderova baza.

Slučajne promenljive X sa vrednostima u B, gde je B neki prostor nizova (npr, c_0, l_p,...) se mogu identifikovati sa nizom (realnih) slučajnih promenljivih $X = (X_1, X_2, ...)$ gde je $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Primer 2.14:</u> Separabilan Banachov prostor $C[0,1]$ svih realnih neprekidnih funkcija na $[0,1]$ sa normom $\|x\| = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |x(t)|$, $x \in C[0,1]$ takođe ima Schauderovu bazu.

Slučajne promenljive X sa vrednostima u B, gde je B neki prostor funkcija (npr. $C[0,1]$) nazivamo i slučajnim procesima ili stohastičkim procesima i označavamo sa $X = \{X_t : t \in [0,1]\}$. Za svako fiksirano $t \in [0,1]$ je $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva. Odgovarajući prostor funkcija (npr. $C[0,1]$) se naziva prostor trajektorije procesa.

Ako je B Banachov prostor sa Schauderovom bazom (b_n) i koordinatnim funkcionalima (f_n) i ako je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B tada iz (2) sledi

(3) $$X = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(X) b_k,$$

po tačkama, pri čemu su $f_k(X)$ slučajne promenljive za svako k.

Specijalno za prostore c_0 i l_p $(1 \le p < \infty)$ važi $X = (f_1(X), f_2(X), ...)$,

gde je Schauderova baza data sa $e_1 = (1,0,0,...)$, $e_2 = (0,1,0,...)$,...

Osnovna ideja prilikom proučavanja slučajnih promenljivih sa vrednostima u Banachovim prostorima sa Schauderovom bazom je da se iskoristi reprezentacija (3).

2.2. Nezavisnost i matematičko očekivanje slučajnih promenljivih

Neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u Banachovom prostoru B i neka je P_x funkcija na $\mathcal{B}_B$ definisana sa

(1) $$P_X(A) = P\left(X^{-1}(A)\right), \ A \in \mathcal{B}_B.$$

Imamo $P_X : \mathcal{B}_B \to [0,1]$ i P_X je mera verovatnoće na $\mathcal{B}_B$ koju zovemo distribucija verovatnoće ili zakon raspodele od X.

Napomena 2.15: Važi da ako je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B, i ako je $g : B \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija tj. g je $\left(\mathcal{B}_B, \mathcal{B}\right)$-merljiva i ako je $E \in \mathcal{B}_B$ tada važi

$$\int_{X^{-1}(E)} g\left(X\right) dP = \int_E g \; dP_X ,$$

u smislu da ako jedan od integrala postoji, tada postoji i drugi i vrednosti su im jednake. Specijalno ako stavimo $E = B$ dobijamo

$$E\left[g\left(X\right)\right] = \int_B g \; dP_X .$$

Definicija 2.16: Neka su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u B. Kažemo da su X i Y sa jednakom raspodelom ako je $P_X = P_Y$. Familija slučajnih promenljivih sa vrednostima u B ima jednaku raspodelu ako svaki par iz te familije ima jednaku raspodelu.

Napomena 2.17: Ako je $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ familija slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom u B i ako je T Borel merljivo preslikavanje sa B u Banachov prostor B_0 (T je merljivo u paru σ-algebri $\left(\mathcal{B}_B, \mathcal{B}_{B_0}\right)$) tada je očigledno $\left\{T\left(X_\alpha\right), \alpha \in A\right\}$ familija slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom u B_0.

Definicija 2.18: Kažemo da je slučajna promenljiva X u B simetrična ako X i $-X$ imaju jednaku raspodelu.

Definicija 2.19: Kažemo da je konačan skup $\left\{X_1, X_2, ..., X_n\right\}$ slučajnih promenljivih sa vrednostima u B nezavisan ako za proizvoljne $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}_B$ važi

$$(2) \qquad P\left\{X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n\right\} = \prod_{j=1}^{n} P\left\{X_j \in A_j\right\}.$$

Za proizvoljnu familiju slučajnih promenljivih sa vrednostima u B kažemo da je nezavisna, ako je proizvoljan konačan podskup te familije nezavisan.

Propozicija 2.20: Neka je $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ familija nezavisnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B i neka je $\left\{T_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ familija Borel merljivih preslikavanja sa B u Banachov prostor B_0. Tada je $\left\{T_\alpha\left(X_\alpha\right)\right\}_{\alpha \in A}$ familija nezavisnih slučajnih promenljivih u B_0.

Napomena 2.21: U slučaju separabilnog Banachovog prostora B, slično kao Propozicija 2.2, dokazuju se sledeće dve teoreme:

Familija $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ slučajnih promenljivih u B ima jednaku raspodelu ako i samo ako za svako $f \in B^*$ familija slučajnih promenljivih $\{f(X_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ima jednaku raspodelu.

Familija $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ slučajnih promenljivih u B je nezavisna ako i samo ako je za svaki izbor funkcionala $f_\alpha \in B^*, \alpha \in A$ familija slučajnih promenljivih $\{f_\alpha(X_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ nezavisna.

Potreban uslov u ove dve teoreme sledi iz Napomene 2.13 tj. Propozicije 2.15.

Matematičko očekivanje ili očekivanje slučajne promenljive se definiše pomoću Pettisovog integrala.

Definicija 2.22: Neka je B separabilan Banachov prostor i neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B. Kažemo da X ima očekivanje EX ako postoji element $EX \in B$ takav da za sve $f \in B^*$ važi

$$f(EX) = E\left[f(X)\right] = \int_\Omega f(X)\ dP .$$

Ovako definisano očekivanje je jedinstveno zbog posledice Han-Banachove teoreme imamo da dualni prostor B^* razdvaja tačke u B.

Definicija 2.23: Neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B koja ima očekivanje EX. Disperzija ili varijansa od X se definiše na sledeći način

$$VarX = E\left[\|X - EX\|^2\right] = \int_\Omega \|X - EX\|^2\ dP$$

(pretpostavljamo da je $VarX < \infty$). Nenegativni kvadratni koren iz $VarX$ označavamo sa σ_X i zovemo standardna devijacija slučajne promenljive X.

Napomena 2.24: Iz Napomene 2.15 sledi da ako su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u B sa jednakom raspodelom i ako X ima varijansu (samim tim ima i očekivanje) tada važi $EX = EY,\ VarX = VarY$.

Osnovne osobine matematičkog očekivanja su date u sledećoj teoremi.

Teorema 2.25: Neka je B separabilan Banachov prostor i neka su X, X_1 i X_2 slučajne promenljive sa vrednostima u B koje imaju očekivanje. Tada važi:

(1) za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ je $E(\alpha X) = \alpha EX$

(2) $E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2$

(3) ako je za neko $x \in B, P\{X = x\} = 1$ tada je $EX = x$.

Osim toga, ako je još W slučajna promenljiva sa osobinom da je $E|W| < \infty$, tada je $E(WX) = x(EW)$

(4) ako je T ograničen (neprekidan) linearan operator iz B u separabilan Banachov prostor B_0, tada $ET(X)$ postoji i važi $ET(X) = T(EX)$

(5) važi $\|EX\| \le E\|X\|$, pri čemu $E\|X\|$ može biti beskonačno.

Dokaz: Osobine $(1),(2)$ i (3) važe po definiciji očekivanja i linearnosti $f \in B^*$

(4) za svako $g \in B_0^*$ je $g(T) \in B^*$. Prema tome važi

$$g(T(EX)) = (g(T))(EX) = E[(g(T))(X)] = E[g(TX)]$$

dakle važi $ET(X) = T(EX)$.

(5) ako je $EX = 0$ (nula element u B), tvrđenje je očigledno. Ako je $EX \ne 0$, tada prema posledici Han-Banachove teoreme postoji $f \in B^*$ takva da je $\|f\| = 1$ i $f(EX) = \|EX\|$. Sada važi

$$\|EX\| = |f(EX)| = |E[f(X)]| \le E|f(X)| \le E\|X\|.$$

Sledeća propozicija daje važan kriterijum za egzistenciju očekivanja.

Propozicija 2.26: Neka je B separabilan Banachov prostor i neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B. Ako je $E\|X\| < \infty$ tada postoji EX .

Dokaz: Neka je X diskretna i neka uzima vrednosti $x_i \in B$ $(i = 1, 2, ...)$. Iz $E\|X\| < \infty$ sledi da red $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| P\{X = x_i\}$ konvergira. Kako je B kompaktan prostor, red $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{X = x_i\}$ konvergira prema nekom vektoru $y \in B$. Za $f \in B^*$ važi

$$f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) P\{X = x_i\} = E[f(X)]$$

Dakle $EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{X = x_i\}$. Neka je sada X proizvoljna slučajna promenljiva iz B. Prema Teoremi 2.10 postoji niz $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diskretnih slučajnih promenljivih, koji uniformno konvergira ka X. Odavde sledi da EX_n postoji za svako n. Prema Teoremi 2.25 $(1),(2)$ i (5) za proizvoljne m i n imamo

$$\|EX_n - EX_m\| = \|E(X_n - X_m)\| \le E\|X_n - X_m\|.$$

Zbog uniformne konvergencije niza (X_n) ka X sledi da je $(EX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u B, dakle postoji $z\in B$ takav da je $z=\lim\limits_{n\to\infty}EX_n$. Sada za $f\in B^*$ imamo

$$f(z)=f\left(\lim_{n\to\infty}EX_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(EX_n)=\lim_{n\to\infty}E\left[f(X_n)\right]=E\left[f(X)\right]$$

Poslednja jednakost sledi iz Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji. Zaključujemo da je $z=EX$.

<u>Primer 2.27:</u> Pretpostavka o kompaktnosti u Propoziciji 2.26 je bitna. Neka je $\tilde{c}$ potprostor od c_0 koji se sastoji od svih nizova realnih brojeva koji su jednaki nuli osim za konačan broj koordinata. Sa normom $\|x\|=\sup|x_n|$, $\tilde{c}$ je nekompaktan normiran prostor. Neka je $e_1=(1,0,0,...)$, $e_2=(0,1,0,...)$,... i definišimo slučajnu promenljivu X sa vrednostima u $\tilde{c}$ tako da je $X=e_n$ sa verovatnoćom $\frac{1}{2^n}(n\in\mathbb{N})$. Tada imamo $E\|X\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$. Ako bi postojalo EX, trebao bi biti oblika $EX=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},...,\frac{1}{2^n},...\right)$, ali to nije element od $\tilde{c}$.

Sa druge strane, neka je B separabilan Hilbertov prostor l_2 i neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B definisana sa $X=ne_n$ sa verovatnoćom $\frac{c}{n^2}$ $\left(c\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=c\frac{\pi^2}{6}=\frac{6}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}=1\right)$. Tada važi

$$E\|X\|=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{c}{n^2}=\infty,\text{ ali } EX=\left(\frac{c}{1},\frac{c}{2},...,\frac{c}{n},...\right)\in l_2.$$

Dakle EX postoji iako je $E\|X\|=\infty$.

<u>Primer 2.28:</u> Neka je $B=C[0,1]$ sa normom $\|x\|=\sup\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$. B je separabilan Banachov prostor. Neka je $X=\{X_t,t\in[0,1]\}$ slučajni proces sa vrednostima u B. Pretpostavimo da je

$$E\|X\|=E\left(\sup_{0\le t\le 1}|X_t|\right)<\infty.$$

Pokažimo da je $EX=\{EX_t,t\in[0,1]\}$. Pre svega, za proizvoljno fiksno $t\in[0,1]$ definišimo preslikavanje $\pi_t:B\to\mathbb{R}$ sa $\pi_t(x)=x(t),x\in B$. Lako se proverava da je π_t neprekidno preslikavanje, a kako je $X_t=\pi_t(X)$ zaključujemo da je X_t slučajna promenljiva za svako t. Iz Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\lim_{h\to 0}\left|EX_{t+h}-EX_t\right|\leq \lim_{h\to 0}E\left|X_{t+h}-X_t\right|=0,$$

dakle $\left\{EX_t, t\in[0,1]\right\}\in B$. B^* se sastoji od konačnih uopštenih mera na $[0,1]$ (uopštena mera je razlika dve mere). Za $\mu\in B^*$ važi

$$\mu(EX)=\int_0^1 EX_t\, d\mu(t)=E\int_0^1 X_t\, d\mu(t)=E\left[\mu(X)\right],$$

dakle $EX=\left\{EX_t, 0\leq t\leq 1\right\}$.

Neka je B Banachov prostor sa Schauderovom bazom $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i koordinatnim funkcionalima $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ako je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B koja ima očekivanje EX, tada zbog $f_k\in B^*$ imamo $f_k(EX)=E\left[f_k(X)\right]$ za sve k. Prema tome važi

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(EX)b_k=\sum_{k=1}^{\infty}E\left[f_k(X)\right]b_k.$$

<u>Napomena 2.29:</u> Neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B. Koristeći Propoziciju 2.4 lako dobijemo da važi Markovljeva nejednakost: ako je $r>0$ takvo da je $E\left(\|X\|^r\right)<\infty$, tada za svako $\varepsilon>0$ važi

$$P\left\{\|X\|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{E\left(\|X\|^r\right)}{\varepsilon^r}. \tag{4}$$

Ako X ima varijansu, tada iz (4) za $r=2$ lako sledi Čebiševljeva nejednakost: za svako $\varepsilon>0$ važi

$$P\left\{\|X-EX\|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{VarX}{\varepsilon^2} \tag{5}$$

Sada ćemo dati definicije različitih tipova konvergencije slučajnih promenljivih.

<u>Definicija 2.30:</u> Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih promenljivih sa vrednostima u separabilnom Banachovom prostoru B.

(a) Kažemo da niz (X_n) konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X sa vrednostima u B ako za svako $\varepsilon>0$ važi

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\|X_n-X\|\geq\varepsilon\right\}=0.$$

Označavamo ovu konvergenciju sa $X_n\xrightarrow{v}X$ za $n\to\infty$.

(b) Kažemo da niz (X_n) konvergira skoro sigurno (s.s.) ili sa verovatnoćom 1 ka slučajnoj promenljivoj X sa vrednostima u B ako važi

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\|X_n-X\|=0\right\}=1$$

i koristimo oznaku $X_n \xrightarrow{s.s.} X$ za $n \to \infty$.

(c) Neka je $1 \leq p < \infty$. Kažemo da niz (X_n) konvergira srednje reda p ka slučajnoj promenljivoj X u B ako važi

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\|X_n - X\|^p\right) = 0$$

To ćemo označavati sa $X_n \xrightarrow{s^p} X$ za $n \to \infty$.

(d) Kažemo da niz (X_n) konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj X sa vrednostima u B ako niz $\left(P_{X_n}\right)$ zakona raspodele od X_n slabo konvergira ka PX (to znači da $\int_B g\ dP_{X_n} \to \int_B g\ dP_X$ $(n \to \infty)$ za svaku ograničenu realnu neprekidnu funkciju g na B).

Koristimo oznaku $X_n \xrightarrow{r} X$ za $n \to \infty$.

<u>Napomena 2.31</u>: Lako sledi $(b) \Rightarrow (a)$ i $(c) \Rightarrow (a)$. Pokažimo da važi $(a) \Rightarrow (d)$.

Može se pokazati da $X_n \xrightarrow{r} X$ ako i samo ako je

$$\int_B g\ dP_{X_n} \to \int_B g\ dP_X$$

za svako $g \in U(B)$, gde je $U(B)$ skup svih ograničenih realnih uniformno neprekidnih funkcija na B. Neka $X_n \xrightarrow{v} X$ i neka je $g \in U(B)$ proizvoljan. Tada postoji $M \in \mathbb{R}^+$ takav da je $|g(x)| \leq M$ za sve $x \in B$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da $x, y \in B$ i $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Iz Napomene 2.11 sledi

$$\left|\int_B g\ dP_X \to \int_B g\ dP_{X_n}\right| = \left|\int_\Omega \left[g(X) - g(X_n)\right]\ dP\right| \leq$$

$$\leq \int_{\{\|X - X_n\| \geq \delta\}} |g(X) - g(X_n)|\ dP + \int_{\{\|X - X_n\| < \delta\}} |g(X) - g(X_n)|\ dP \leq$$

$$\leq 2MP\left\{\|X - X_n\| \geq \delta\right\} + \varepsilon .$$

Odavde važi $X_n \xrightarrow{r} X$.

Druge implikacije među konvergencijama uopšteno ne važe.

2.3. Nekorelacija slučajnih promenljivih. Zakoni velikih brojeva za slučajne promenljive sa vrednostima u Hilbertovim prostorima

Definicija 2.32: Neka je B Banachov prostor i neka su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u B takve da je $E\left[f(X)^2\right]<\infty$ i $E\left[f(Y)^2\right]<\infty$ za svako $f\in B^*$. Kažemo da su X i Y u slaboj nekorelaciji ako za svako $f\in B^*$ važi

$$\operatorname{cov}\left(f(X), f(Y)\right)=0$$

Familija slučajnih promenljivih u B je u slaboj nekorelaciji ako je svaki par iz te familije u slaboj nekorelaciji.

Definicija 2.33: Neka je B Banachov prostor sa Schauderovom bazom (b_k) i koordinatnim funkcionalima (f_k). Ako su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u B takve da slučajne promenljive $f_k(X)$ i $f_k(Y)$ imaju konačne momente drugog reda za svako k tada kažemo da su X i Y koordinatno nekorelirani (u odnosu na bazu (b_k)) ako za svako k važi

$$\operatorname{cov}\left(f_k(X), f_k(Y)\right)=0$$

Familija slučajnih promenljivih u B je koordinatno nekorelirana ako je svaki par iz te familije koordinatno nekoreliran

Kako su koordinatni funkcionali u B^*, slaba nekorelacija povlači i koordinatnu nekorelaciju. Iz definicije takođe očigledno sledi da ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa vrednostima u B takve da je $E\left(\|X\|^2\right)<\infty$ i $E\left(\|Y\|^2\right)<\infty$, tada su X i Y slabo nekorelirani. Za slučajne promenljive nezavisnost povlači nekorelaciju.

Sledeća teorema daje karakterizaciju slabe nekorelacije za slučajne promenljive sa vrednostima uBanachovom prostoru sa Schauderovom bazom u izrazima koordinatnih funkcionala.

Teorema 2.34: Neka je B Banachov prostor sa Schauderovom bazom (b_n) i koordinatnim funkcionalima (f_n), i neka su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u B takve da je $E\left(\|X\|^2\right)<\infty$ i $E\left(\|Y\|^2\right)<\infty$. X i Y su slabo nekorelirani ako i samo ako za svako n i k važi

$$(1)\qquad \operatorname{cov}\left(f_n(X)+f_k(X), f_n(Y)+f_k(Y)\right)=0$$

Dokaz: Uslov (1) je očigledno potreban, jer je $f_n + f_k \in B^*$. Da bismo dokazali dovoljnost uslova, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $EX = EY = 0$ jer u suprotnom prelazimo na slučajne promenljive $X - EX$ i $Y - EY$ (EX i EY postoje, jer je $E\left(\|X\|^2\right) < \infty$ i $E\left(\|Y\|^2\right) < \infty$). Sada treba pokazati da za proizvoljno $g \in B^*$ važi

$$(2) \qquad E\left[g(X)g(Y)\right] = 0.$$

Neka je (U_n) niz operatora parcijalnih suma i neka je m konstanta baze. Za svako n stavimo $g_n = g(U_n)$. Tada $g_n \in B^*$ i za svako n i za svako $x \in B$ važi

$$(3) \qquad \left|g_n(x)\right| \le \|g_n\| \|U_n(x)\| \le m\|g\| |X\|.$$

Pored toga $g_n(x) \to g(x)$ za svako $x \in B$. Iz (3) sledi

$$(4) \qquad \left|g_n(X)g_n(Y)\right| \le m^2 \|g\|^2 \|X\| \|Y\|,$$

i to uniformno po n i $\omega \in \Omega$. Takođe važi i

$$E\left(m^2 \|g\|^2 \|X\| \|Y\|\right) \le m^2 \|g\|^2 \left[E\left(\|X\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[E\left(\|Y\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Odavde, koristeći Lebesgueovu teoremu o dominantnoj konvergenciji dobijamo

$$(5) \qquad E\left[g(X)g(Y)\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[g_n(X)g_n(Y)\right].$$

Imamo

$$g_n(X) = g\left(U_n(X)\right) = g\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(X) b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(X) g(b_k),$$

i analogno

$$g_n(Y) = g\left(U_n(Y)\right) = g\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(Y) b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(Y) g(b_k).$$

Prema tome, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$(6) \qquad E\left[g_n(X)g_n(Y)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} g(b_k) g(b_j) E\left[f_k(X) f_j(Y) + f_j(X) f_k(Y)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[g(b_k)\right]^2 E\left[f_k(X) f_k(Y)\right].$$

Koristeći (1) lako dobijemo da je svaki član desne strane u (6) jednak nuli, dakle $E\left[g_n(X)g_n(Y)\right] = 0$ za sve n. Teorema sada sledi iz (5).

Neka je H realan Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Neka su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u H, takve da je $E\left(\|X\|^2\right) < \infty$ i $E\left(\|Y\|^2\right) < \infty$. Tada važi

$$\langle X,Y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2 - \|X-Y\|^2\right),$$

pa je prema Korolaru 2.3 i Propoziciji 2.4 $\langle X,Y\rangle$ slučajna promenljiva. Pored toga, iz osobine

$$E\left|\langle X,Y\rangle\right| \le E\left(\|X\|\|Y\|\right) \le \left[E\left(\|X\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\left(\|Y\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

sledi da postoji $E\langle X,Y\rangle$. Takođe $E\left(\|X\|^2\right) < \infty$ povlači $E\left(\|X\|\right) < \infty$, dakle postoji EX (Propozicija 2.20).

<u>Definicija 2.35:</u> Za slučajne promenljive X i Y sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H za koje važi $E\left(\|X\|^2\right) < \infty$ i $E\left(\|Y\|^2\right) < \infty$ kažemo da su nekorelirane ako je $E\langle X,Y\rangle = \langle EX, EY\rangle$. Familija slučajnih promenljivih sa vrednostima u H je nekorelirana ako je svaki par iz te familije nekoreliran.

Kovarijansa slučajnih promenljivih X i Y u H definiše se sa

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\langle X-EX, Y-EY\rangle.$$

Za svako $x \in H$ je $f_x(y) = \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ $(y \in H)$ neprekidan linearan funkcional, pa imamo

$$E\langle X-EX,Y-EY\rangle = E\langle X,Y\rangle - E\langle EX,Y\rangle - E\langle X,EY\rangle + \langle EX,EY\rangle =$$
$$E\langle X,Y\rangle - \langle EX,EY\rangle - \langle EX,EY\rangle + \langle EX,EY\rangle = E\langle X,Y\rangle - \langle EX,EY\rangle,$$

dakle važi

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\langle X,Y\rangle - \langle EX,EY\rangle.$$

Iz poslednje jednakosti sledi da su X i Y nekorelirane samo ako je $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Varijansa slučajne promenljive X sa vrednostima u H definisana je sa

$$VarX = E\left(\|X-EX\|^2\right) = E\langle X-EX, X-EX\rangle, \quad \left(\text{pp. } E\left(\|X\|^2\right) < \infty\right)$$

<u>Teorema 2.36:</u> Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nekoreliranih slučajnih promenljivih sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru, takvih da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} VarX_k = 0.$$

Tada
$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - EX_k\right)\right\| \xrightarrow{v} 0 \text{ za } n\to\infty.$$

<u>Dokaz:</u> Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Iz Markovljeve nejednakosti sledi

$$P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-EX_k\right)\right\|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2n^2}E\left(\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-EX_k\right)\right\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}E\left\langle\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-EX_k\right),\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-EX_j\right)\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\left\langle X_k-EX_k,X_j-EX_j\right\rangle=\text{ (zbog nekoreliranosti)}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left\langle X_k-EX_k,X_k-EX_k\right\rangle=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=1}^{n}VarX_k\to 0,\text{ za } n\to\infty .$$

Bitna osobina koju smo ovde koristili je da je varijansa sume nekoreliranih slučajnih promenljivih jednaka sumi njihovih varijansi.

Propozicija 2.37: Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, takve da je $E\left(\|X\|^2\right)<\infty$ i $E\left(\|Y\|^2\right)<\infty$, tada su X i Y nekorelirane.

Dokaz: Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $EX=EY=0$, jer u suprotnom prelazimo na slučajne promenljive $X-EX$ i $Y-EY$. Pošto je H separabilan u njemu postoji ortonormirana baza (e_n). Prema Parsevalovoj jednakosti važi

$$(1)\qquad \left\langle X,Y\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle X,e_n\right\rangle\left\langle Y,e_n\right\rangle .$$

Za svako $m\in\mathbb{N}$ važi

$$(2)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\left\langle X,e_n\right\rangle\left\langle Y,e_n\right\rangle\right|\leq\sum_{n=1}^{m}\left|\left\langle X,e_n\right\rangle\left\langle Y,e_n\right\rangle\right|\leq\left(\sum_{n=1}^{m}\left|\left\langle X,e_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{m}\left|\left\langle Y,e_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle X,e_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle Y,e_n\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\text{(zbog ortonormiranosti baze } (e_n)\text{)}$$

$$=\|X\|\|Y\|$$

Kako važi

$$E\left(\|X\|\|Y\|\right)\leq\left[E\left(\|X\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\left(\|Y\|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}<\infty ,$$

Primenom Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji iz (1) i (2) sledi

$$(3)\qquad E\left\langle X,Y\right\rangle=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}E\left(\left\langle X,e_n\right\rangle,\left\langle Y,e_n\right\rangle\right).$$

Za svako n je preslikavanje $x\mapsto\left\langle x,e_n\right\rangle$ u H^*, pa iz Propozicije 2.20 sledi da su $\left\langle X,e_n\right\rangle$ i $\left\langle Y,e_n\right\rangle$ nezavisne slučajne promenljive. Zato važi

$$E\left(\left\langle X,e_n\right\rangle,\left\langle Y,e_n\right\rangle\right)=E\left\langle X,e_n\right\rangle E\left\langle Y,e_n\right\rangle=\left\langle EX,e_n\right\rangle\left\langle EY,e_n\right\rangle=0 .$$

Sada iz (3) sledi $E\langle X,Y\rangle=0$, dakle X i Y su nekorelirane.

<u>Propozicija 2.38:</u> Neka je H separabilan Hilbertov prostor i neka su X i Y slučajne promenljive sa vrednostima u H takve da je $E\left(\|X\|^2\right)<\infty$ i $E\left(\|Y\|^2\right)<\infty$. Ako su X i Y koordinatno nekorelirane u odnosu na neku ortonormiranu bazu (e_n), tada su X i Y nekorelirane. (U teoremi ne važi obratno, tj.nekorelirane slučajne promenljive ne moraju biti koordinatno nekorelirane u odnosu na svaku ortonormiranu bazu.)

<u>Dokaz:</u> Ponovo možemo pretpostaviti da važi $EX=EY=0$. Prema pretpostavci za svako n važi

$$E\left(\langle X,e_n\rangle,\langle Y,e_n\rangle\right)=0. \tag{4}$$

Analogno kao u Propoziciji 2.30 dobijamo da važi (3). Iz (3) i (4) sledi $E\langle X,Y\rangle=0$, dakle X i Y su nekorelirane.

Sada ćemo videti kako se Kolmogorovljev dovoljan uslov za jak zakon velikih brojeva može proširiti na separabilne Hilbertove prostore.

<u>Teorema 2.39:</u> Ako je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih u separabilnom Hilbertovom prostoru H, takav da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{VarX_n}{n^2}<\infty, \tag{1}$$

tada

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-EX_k\right)\right\|\xrightarrow{s.s.}0 \text{ za } n\to\infty.$$

<u>Dokaz:</u> Pošto za $a\in\mathbb{R}$ i $y\in H$ važi $Var\left(aX_n+y\right)=a^2VarX_n$ iz (1) sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty}Var\left(\frac{X_n-EX_n}{n}\right)<\infty.$$

Iz poslednje nejednakosti dobijamo da red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n-EX_n}{n}$ konvergira (s.s.) i to u topologiji indukovanoj sa normom u H.

Uopštenje Kolmogorovljeve nejednakosti glasi: za svako $\varepsilon>0$ važi

$$\mathrm{P}\left\{\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{i=1}^{k}\left(X_i-EX_i\right)\right\|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}VarX_i.$$

Kako Kroneckerova lema važi za Hilbertove prostore iz (s.s.) konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n-EX_n}{n}$ u H sledi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-EX_k\right)\xrightarrow{s.s.}0 \text{ za } n\to\infty.$$

Bitna osobina koju smo koristili u dokazu ove teoreme jeste da je varijansa suma nezavisnih slučajnih promenljivih u H jednaka sumi njihovih varijansi.

2.4. Zakoni velikih brojeva za slučajne promenljive sa jednakom raspodelom

Teorema 2.40: (Mourier) Ako je B separabilan Banachov prostor i ako je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom u B, takav da $E\left(\|X_1\|\right)<\infty$, tada

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - EX_1\right\| \xrightarrow{s.s.} 0 \text{ za } n\to\infty .$$

Dokaz: Iz Propozicije 2.26 sledi da postoji EX_1, a zbog jednake raspodele važi $EX_n = EX_1$ za sve n (Napomena 2.24).

Pretpostavimo prvo da slučajne promenljive X_n $(n=1,2,...)$ mogu uzeti samo prebrojivo mnogo vrednosti $x_1, x_2, ...$ Za svako $m\in\mathbb{N}$ i svako k neka važi

$$X_k^m = \sum_{i=1}^{m} x_i 1_{\{X_k = x_i\}}, \tag{1}$$

i $Y_k^m = X_k - X_k^m$. Slučajne promenljive $\left(1_{\{X_k=x_i\}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ su nezavisne i sa jednakom raspodelom za svako i. Osim toga, za svako k važi (zbog Teoreme 2.25)

$$EX_k^m = \sum_{i=1}^{m} x_i P\{X_1 = x_i\} = EX_1^m .$$

$\left(X_k^m\right)_{k\in\mathbb{N}}$ su nezavisne i sa jednakom raspodelom. Dobijamo

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^m - EX_1^m\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i 1_{\{X_k=x_i\}} - \sum_{i=1}^{m} x_i P\{X_1 = x_i\}\right\| \tag{2}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\left|\sum_{k=1}^{m} 1_{\{X_k=x_i\}} - P\{X_1=x_i\}\right| \xrightarrow{s.s} 0,\ n\to\infty$$

za svako m.

Niz $\left(\|Y_k^m\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ je niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom i to za svako m. Pored toga važi $E\|Y_1^m\| \le E\|X_1\| < \infty$. Sada sledi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|Y_k^m\| \xrightarrow{s.s.} E\|Y_1^m\| \text{ za } n\to\infty \text{ za svako } m . \tag{3}$$

Kako $\|Y_1^m\|\to 0$ tačkasto za $m\to\infty$ i kako je $\|Y_1^m\|\le\|X_1\|$ za svako m iz Lebesgueove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi $\lim_{m\to\infty} E\|Y_1^m\| = 0$.

Neka je S prebrojiva unija događaja verovatnoće nula za koje (2) i (3) ne važe. Tada je događaj S verovatnoće nula. Neka $\omega \notin S$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Izaberimo dovoljno veliko m da važi

$$(4) \qquad E\left\|Y_1^m\right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Prema (2) i (3) postoji $n_0(\varepsilon,\omega) \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n > n_0(\varepsilon,\omega)$ važe relacije

$$(5) \qquad \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^m(\omega) - EX_1^m\right\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$(6) \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|Y_k^m(\omega)\right\| < E\left\|Y_1^m\right\| + \frac{\varepsilon}{4} < \left(zbog\,(4)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iz Teoreme 2.25 (2) i (5) sledi

$$(7) \qquad \left\|EX_1^m - EX_1\right\| \le E\left\|X_1^m - X_1\right\| = E\left\|Y_1^m\right\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

dakle za $\omega \notin S$ i $n > n_0(\varepsilon,\omega)$ imamo

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) - EX_1\right\| \le \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^m(\omega) - EX_1^m\right\| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|Y_k^m(\omega)\right\| + \left\|EX_1^m - EX_1\right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon .$$

Sledi da teorema važi za diskretne slučajne promenljive.

Dokažimo sada opšti slučaj. Prema Propoziciji 2.9 za svako $m \in \mathbb{N}$ postoji $T_m : B \to B$ koja je Borel merljiva i diskretna i za koju važi $\left\|T_m x - x\right\| < \frac{1}{m}$ za sve $x \in B$. Sada u opštem slučaju za proizvoljne m i n važi

$$(8) \qquad \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - EX_1\right\| \le \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k - T_m X_k\right\| +$$
$$+\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_m X_k - E\left(T_m X_1\right)\right\| + \left\|E\left(T_m X_1\right) - EX_1\right\|.$$

Za svako m je $\left(T_m X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih diskretnih slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom u B i važi

$$E\left\|T_m X_1\right\| \le E\left\|X_1\right\| + \frac{1}{m} < \infty,$$

pa iz upravo dokazanog sledi

$$(9) \qquad \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_m X_k - E\left(T_m X_1\right)\right\| \xrightarrow{s.s.} 0 \;\; (n \to \infty) \text{ za svako } m.$$

Osim toga za svako n važi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|T_m X_k - X_k\right\| \le \frac{1}{m}$$

i

$$\left\| E\left(T_m X_1\right) - EX_1 \right\| \le E\left\| T_m X_1 - X_1 \right\| \le \frac{1}{m}.$$

Tvrđenje teoreme sada sledi iz (8) i (9) tako što izdvojimo nula događaj koji je unija prebrojivo mnogo nula događaja za koje ne važi (9).

Sledeća teorema je uopštenje teoreme za Banachove prostore sa Schauderovom bazom.

<u>Teorema 2.41:</u> (Taylor) Neka je B Banachov prostor sa Schauderovom bazom $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih promenljivih sa vrednostima u B sa jednakom raspodelom takav da je $E\left(\|X_1\|\right) < \infty$. Tada za svaki koordinatni funkcional f_k važi slabi zakon velikih brojeva za niz slučajnih promenljivih $\left(f_k\left(X_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ako i samo ako važi

$$(1) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{v} EX_1 \text{ za } n \to \infty$$

<u>Dokaz:</u> pretpostavimo prvo da važi (1), tj. za svako $\varepsilon > 0$ imamo

$$P\left\{\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - EX_1 \right\| \ge \varepsilon \right\} \to 0 \text{ za } n \to \infty.$$

Tvrđenje sledi iz činjenice da konvergencija po normi povlači konvergenciju u slaboj topologiji.

Pretpostavimo sada da slabi zakon važi za $\left(f_k\left(X_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ i to za svako k, pa imamo

$$(2) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_k\left(X_i\right) \xrightarrow{v} E\left[f_k\left(X_1\right)\right] \text{ za } n \to \infty$$

Kako je $E\left(\|X_1\|\right) < \infty$, postoji EX_1 (možemo koristiti Propoziciju 2.26, jer je B separabilan). Možemo pretpostaviti da je $EX_1 = 0$ (u suprotnom koristimo niz $Y_n = X_n - EX_1$). Prema tome, dovoljno je pokazati da za proizvoljne $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ takav da za $n \ge n_0$ važi

$$(3) \qquad P\left\{\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \right\| \ge \varepsilon \right\} < \delta.$$

Neka je $m > 0$ konstanta baze (b_n), važi $\|U_k\| \le m$ za sve k. Za $k \in \mathbb{N}$ neka je definisan operator $Q_k : B \to B$, sa $Q_k(x) = x - U_k(x)$, $x \in B$. Q_k je ograničen linearni operator i važi $\|Q_k\| \le 1 + m$ za sve k. Za sve k i n važi

$$(4) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_k\left(X_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_k\left(X_i\right),$$

i

$$(5)\ P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_k\left(X_i\right)\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leq P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|Q_k\left(X_i\right)\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leq \text{(Markovljeva}$$

$$\text{nejednakost)}\leq\frac{2}{\varepsilon n}\sum_{i=1}^{n}E\left\|Q_k\left(X_i\right)\right\|=\frac{2}{\varepsilon}E\left\|Q_k\left(X_1\right)\right\|.$$

Ali $\left\|Q_k\left(X_1\right)\right\|\to 0$ tačkasto za $k\to\infty$ i

$$\left\|Q_k\left(X_1\right)\right\|\leq\left(1+m\right)\left\|X_1\right\|\Rightarrow E\left\|Q_k\left(X_1\right)\right\|\to 0 \text{ za } k\to\infty .$$

Prema tome možemo izabrati dovoljno veliko k da važi

$$(6)\qquad P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_k\left(X_i\right)\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}<\frac{\delta}{2}.$$

Dalje imamo

$$(7)\ P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_k\left(X_i\right)\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}=P\left\{\left\|\sum_{j=1}^{k}f_j\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)b_j\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$\leq P\left\{\sum_{j=1}^{k}\left|f_j\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right|\left\|b_j\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leq\sum_{j=1}^{k}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_j\left(X_i\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2k\left\|b_j\right\|}\right\},$$

gde su $\left(f_j\right)$ koordinatni funkcionali za bazu $\left(b_n\right)$ i $U_k\left(x\right)=\sum_{i=1}^{k}f_i\left(x\right)b_1,\ x\in B$. Budući da slabi zakon velikih brojeva važi za svaki niz $\left(f_j\left(X_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ i pošto važi $E\left[f_j\left(X_1\right)\right]=0$, imamo

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_j\left(X_i\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2k\left\|b_j\right\|}\right\}\to 0 \text{ za } n\to\infty, \text{ za svako } j .$$

Prema tome iz (7) sledi da postoji $n_0=n_0\left(\varepsilon,\delta\right)\in\mathbb{N}$ takvo da važi

$$(8)\qquad P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_k\left(X_i\right)\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}<\frac{\delta}{2}, \text{ za } n\geq n_0 .$$

Iz (4), (6) i (8) sledi da za $n\geq n_0$ važi

$$P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right\|\geq\varepsilon\right\}\leq P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_k\left(X_i\right)\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_k\left(X_i\right)\right\|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta ,$$

dakle važi (3).

<u>Korolar 2.42:</u> Neka je B Banachov prostor sa Schauderovom bazom i neka je $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ niz koordinatno nekoreliranih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B sa jednakom raspodelom takav da je $E\left(\left\|X_1\right\|\right)<\infty$. Tada važi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{\ v\ }EX_1 \text{ za } n\to\infty .$$

Dokaz: Neka je (b_n) Schauderova baza u odnosu na koju je niz (X_n) koordinatno nekoreliran i neka je (f_n) pridruženi niz koordinatnih funkcionala. Tada za svako k važi $E\left[\left(f_k(X_n)\right)^2\right] < \infty$ za sve n i $\operatorname{cov}\left(f_k(X_n), f_k(X_m)\right) = 0$ za svaki par $m, n, m \neq n$. I za svako k važi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_k(X_i) \xrightarrow{v} E\left[f_k(X_1)\right] \text{ za } n \to \infty.$$

Tvrđenje sada sledi iz Teoreme 2.41.

Sledeća teorema je uopštenje Teoreme 2.41 za separabilne normirajuće prostore.

Teorema 2.43: Neka je B separabilan normirajući prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih promenljivih sa vrednostima u B sa jednakim raspodelama takav da je $E(\|X_1\|) < \infty$ i da postoji EX_1. Za svako $f \in B^*$ slabi zakon velikih brojeva važi za niz $\left(f(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ako i samo ako važi

$$(1) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{v} EX_1 \text{ za } n \to \infty.$$

Dokaz: Dovoljno je pokazati samo potreban uslov jer konvergencija po normi povlači konvergenciju u slaboj topologiji.

Neka je $\widehat{B}$ kompletiranje prostora B. Tada je $\widehat{B}$ izometrijski izomorfan zatvorenom potprostoru Banachovog prostora $C[0,1]$, dakle postoji bijektivno, obostrano neprekidno, linearno preslikavanje $h: B \to C[0,1]$.

Iz Napomene 2.17 sledi da je $\left(h(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih promenljivih sa vrednostima u $C[0,1]$ sa jednakom raspodelom i $E\|h(X_1)\| \leq \|h\| E\|X_1\| < \infty$. Neka je $g \in C[0,1]^*$ i neka je h^* adjungovan operator od h ($h^*: C[0,1]^* \to B^*$).

Važi

$$(2) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(h(X_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(h^* \circ g\right)(X_i)$$
$$\to E\left[\left(h^* \circ g\right)(X_1)\right] = E\left[h\left(g(X_1)\right)\right]$$

Prema tome, za svako $g \in C[0,1]^*$ važi slabi zakon velikih brojeva za niz $\left(g\left(h(X_n)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Kako prostor $C[0,1]$ ima Schauderovu bazu, (2) specijalno važi za svaki koordinatni funkcional, pa iz Teoreme 2.41 sledi

$$(3) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) \xrightarrow{v} E\left[h(X_1)\right] \text{ za } n \to \infty.$$

Prema Teoremi 2.25 (4) imamo $E\left[h(X_1)\right] = h(EX_1)$ pa (1) sledi iz (3), pošto je h bijektivna, linearna i obostrano neprekidna.

2.5. Zakoni velikih brojeva i geometrijska svojstva Banachovih prostora

Da bi se dobila nova uopštenja zakona velikih brojeva u Banachovim prostorima potrebno je zahtevati dodatne uslove na geometriju Banachovih prostora. U ovom odeljku ćemo dokazati strogi zakon velikih brojeva za takozvane B-konveksne Banachove prostore, a zatim ćemo samo spomenuti neke pravce daljeg razvoja teorije.

Definicija 2.44: Banachov prostor B je konveksan tipa (B) (ili B je B-konveksan) ako postoji $k \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ tako da za proizvoljne $x_1, ..., x_k \in B$ sa osobinom $\|x_i\| \leq 1, i = 1, ..., k$ važi

$$(1) \qquad \|\pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_k\| < k(1-\varepsilon)$$

za neki izbor predznaka $+$ i $-$.

Konačno-dimenzionalni normirani prostori, L_p-prostori, l_p-prostori $1 < p < \infty$ i unitarni prostori su primeri B-konveksnih prostora. l_1 i l_∞ nisu B-konveksni.

Teorema 2.45: (Beck) Neka je B separabilan B-konveksan Banachov prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B takav da je $EX_n = 0$ i $E\left(\|X_n\|^2\right) \leq M$ za sve n, gde je M pozitivna konstanta. Tada važi

$$(2) \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{s.s.} 0 \text{ za } n \to \infty.$$

Pre dokaza teoreme treba nam još nekoliko pojmova.

Definicija 2.46: Slučajna promenljiva $X : \Omega \to B$ sa vrednostima u Banachovom prostoru B je simetrična ako postoji funkcija $\varphi : \Omega \to \Omega$ koja čuva meru (tj. $P\left(\varphi^{-1}(A)\right) = P(A)$ za svako $A \in \mathcal{F}$) takva da je $P\{X \circ \varphi = -X\} = 1$.

Očigledno je ova definicija sličnosti opštija od one uvedene u poglavlju 2.2.

Sa $\beta(\|X\|)$ označavamo esencijalni supremum slučajne promenljive $\|X\|$, dakle važi

$$\beta(\|X\|) = \inf\left\{\delta \in \mathbb{R}^+; \|X\| \le \delta(s.s.)\right\}$$

Ako je (X_n) niz slučajnih promenljivih u B neka je

$$(3) \qquad c(X_n) := \beta\left(\lim_{n\to\infty} \sup \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|\right).$$

Očigledno važi: $c(X_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{s.s.} 0$ za $n \to \infty$ (u topologiji indukovanoj sa normom u B).

Kažemo da je niz slučajnih promenljivih tipa (A) ako su oni simetrični, nezavisni, po normi ograničeni sa 1 i ako im je očekivanje nula-element u B (ova zadnja osobina sledi iz Leme 2.47 koja je dokazana dole).
Definišimo

$$(4) \qquad C(B) := \sup\left\{c(X_n); (X_n) \text{ je tipa } (A) \text{ u } B\right\}$$

Važi $0 \le C(B) \le 1$. Zaista, za svaki niz (X_n) tipa (A) u B važi

$$c(X_n) \le \beta\left(\lim_n \sup \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|\right) \le \beta\left(\lim_n \sup 1\right) = 1.$$

<u>Lema 2.47:</u> Ako je X simetrična slučajna promenljiva sa vrednostima u Banachovom prostoru B, tada je $EX = 0$.

<u>Dokaz:</u> Za proizvoljno $f \in B^*$ važi

$$E\left[f(X)\right] = \int_\Omega f(X)\, dP = \int_\Omega f(X)\, d\left(P \circ \varphi^{-1}\right) =$$

$$= \int_\Omega f(X \circ \varphi)\, dP = \int_\Omega f(-X)\, dP = -E\left[f(X)\right]$$

dakle važi $E\left[f(X)\right] = 0 \Rightarrow E(X) = 0$.

<u>Dokaz Teoreme 2.46:</u> Sprovešćemo dokaz u nekoliko koraka.

(a) Dokažimo da je činjenica da je B B-konveksan povlači da je $C(B) = C = 0$. Pretpostavimo da je $C > 0$. Tada za proizvoljno $\eta > 0$ postoji niz slučajnih promenljivih (W_n) sa vrednostima u B, koji je tipa (A) i takav da je $c(W_n) > C - \eta$. Stavimo

$$(1) \qquad Z_n = \frac{W_{kn} + W_{kn-1} + \ldots + W_{kn-k+1}}{k}$$

Gde je $k \in \mathbb{N}$ iz definicije B-konveksnosti.
$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su simetrične slučajne promenljive i neka su $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odgovarajuće funkcije koje čuvaju meru. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da važi

$$(2) \qquad W_m \circ \varphi_n = W_m\,(s.s.) \text{ za } m \ne n$$

(3) $\qquad W_n \circ \varphi_n = W_n\,(s.s.)$ za sve n.

Ako ne, posmatramo prostor verovatnoće $\left(\Omega', \mathsf{F}', P'\right) = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \prod_{i=1}^{\infty} \mathsf{F}_i, \prod_{i=1}^{\infty} P_i\right)$, gde je $\Omega_i = \Omega, \mathsf{F}_i = \mathsf{F}, P_i = P$ za svako i. Neka je $p_i : \Omega' \to \Omega$ i-ta projekcija tj. $p_i\left(\omega'\right) = \omega_i$, $\omega' = \left(\omega_1, \omega_2, ...\right)\left(i = 1, 2, ...\right)$. p_i su merljive i stavimo $W_i' = W_i \circ p_i \left(i \in \mathbb{N}\right)$.

Lako se proveri da je $\left(W_i'\right)$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih. Kako su W_i simetrične, postoje funkcije $\varphi_i : \Omega \to \Omega$ koje čuvaju meru, takve da je $W_i \circ \varphi_i = -W_i\,(s.s.)\left(i \in \mathbb{N}\right)$. Definišimo funkcije $\varphi_i' : \Omega' \to \Omega'$ sa

$$\varphi_i'\left(\omega'\right) = \left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{i-1}, \varphi_i\left(\omega_i\right), \omega_{i+1}, ...\right)$$

Lako se proverava da funkcije φ_i' čuvaju meru. Za sve i važi

$W_i'\left(\omega'\right) = W_i\left(\omega_i\right)$,

$W_i'\left(\varphi_i'\left(\omega'\right)\right) = W_i\left(\varphi_i\left(\omega_i\right)\right) = -W_i\left(\omega_i\right) = -W_i'\left(\omega'\right)(s.s.)$, a za $i \neq j$ imamo $W_j'\left(\varphi_i'\left(\omega'\right)\right) = W_j\left(\omega_j\right) = W_j'\left(\omega'\right)(s.s.)$.

Prema tome, možemo pretpostaviti da važe (2) i (3). Dalje imamo $EZ_n = 0$, $\|Z_n\| \leq 1$ i $\left(Z_n\right)$ su nezavisni. Pored toga Z_n je simetrična promenljiva za svako n (uzmemo funkciju $\varphi_{Z_n} = \varphi_{kn} \circ \varphi_{kn-1} \circ ... \circ \varphi_{kn-k+1}$, koja čuva meru; zbog (2) i (3) imamo $Z_n \circ \varphi_{Z_n} = -Z_n\,(s.s.)$). Prema tome niz $\left(Z_n\right)$ je tipa (A) i važi

$$(3)\; c\left(Z_n\right) = \beta\left(\lim_n \sup\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right\|\right) = \beta\left(\lim_{kn} \sup\left\|\frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{kn} Z_i\right\|\right) = c\left(W_n\right)$$

Jer je

$$\|W_n\| \leq 1 \text{ za sve } n.$$

Nakon eventualnog izbacivanja prebrojive unije nula događaja i eventualnog uvođenja ekvivalentnog prostora verovatnoće koji je prebrojiv proizvod $\left(\Omega, \mathsf{F}, P\right)$ sa samim sobom, uslovi (2) i (3) važe za svako $\omega \in \Omega$. Definišimo sada funkcije

$$\varphi_{kn}^{a_k} \circ \varphi_{kn-1}^{a_{k-1}} \circ ... \circ \varphi_{kn-k+1}^{a_1}$$

Gde je $a_j = 0$ ili 1 za $j = 1, ..., k$. Sve ove funkcije čuvaju meru, a ukupno ih ima 2^k. Kako je B B-konveksan, za svako $\omega \in \Omega$ postoji jedna među tim funkcijama, označimo je sa φ_ω, takva da važi

$$(4) \qquad \left\|\sum_{i=kn-k+1}^{kn} W_i\left(\varphi_\omega\left(\omega\right)\right)\right\| < k\left(1 - \varepsilon\right).$$

Označimo ovih 2^k funkcija sa $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{2^k}$. Tada za svako n i svako $\omega \in \Omega$ važi

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{2^k} \left\| \sum_{i=kn-k+1}^{kn} W_i\left(\varphi_j\left(\omega\right)\right) \right\| < k\left(2^k-1\right)+k\left(1-\varepsilon\right)=k\left(2^k-\varepsilon\right).$$

Funkcije $\varphi_j\left(j=1,2,...,2^k\right)$ čuvaju meru pa iz (5) sledi (vidi dokaz Leme2.47)

$$(6) \qquad 2^k E\left(\left\| \sum_{i=kn-k+1}^{kn} W_i \right\|\right) = E\left(\sum_{j=1}^{2^k} \left\| \sum_{i=kn-k+1}^{kn} W_i \circ \varphi_j \right\|\right) \le k\left(2^k-\varepsilon\right).$$

Iz (6) dobijema da za svako n važi

$$(7) \qquad E\|Z_n\| = \frac{1}{k} E\left(\left\| \sum_{i=kn-k+1}^{kn} W_i \right\|\right) \le \frac{1}{k} \frac{k\left(2^k-\varepsilon\right)}{2^k} = 1-\frac{\varepsilon}{2^k}$$

Neka je $s \in \mathbb{N}$ takav da je $s > \dfrac{1}{\eta^3}$ i za svako n stavimo

$$(8) \qquad Y_n = \frac{Z_{sn}+Z_{sn-1}+...+Z_{sn-s+1}}{s}$$

Slično kao gore, dokažemo da je $\left(Y_n\right)$ tipa (A) i da važi $c\left(Z_n\right)=c\left(Y_n\right)$. Slično kao (7) dokaže se da je $E\left(\|Z_n\|^2\right)<1$, dakle važi da je $VarZ_n<1$. Osim toga $\left(\|Z_n\|\right)$ je niz nezavisnih slučajnih promenljivih, pa imamo

$$(9) \qquad Var\left(\sum_{i=sn-s+1}^{sn} \left\|\frac{Z_i}{s}\right\|\right) < \frac{1}{s}.$$

Sad iz (7) zaključujemo da važi

$$(10) \qquad P\left\{\|Y_n\| > 1-\frac{\varepsilon}{2^k}+\eta\right\} \le P\left\{\sum_{i=sn-s+1}^{sn} \left\|\frac{Z_i}{s}\right\| > 1-\frac{\varepsilon}{2^k}+\eta\right\}$$

$$\le prema(12) \le P\left\{\sum_{i=sn-s+1}^{sn} \left(\left\|\frac{Z_i}{s}\right\| - E\left\|\frac{Z_i}{s}\right\|\right) > \eta\right\} \le \frac{\frac{1}{s}}{\eta^2} > \eta$$

Za svako n stavimo

$$(11) \qquad T_n = Y_n K_{\left\{\|Y_n\| \le 1-\frac{\varepsilon}{2^k}+\eta\right\}},$$

$$(12) \qquad Q_n = Y_n - T_n.$$

Slučajne promenljive $\left(T_n\right)$ su nezavisne i uniformno ograničene po normi sa $1-\dfrac{\varepsilon}{2^k}+\eta$. Simetričnost T_n sledi iz simetričnosti Y_n, pa važi $ET_n=0$ za sve n (Lema 2.47). Prema tome $\left(T_n\right)$ je tipa (A) i važi

$$c\left(T_n\right) \le C\left(1-\frac{\varepsilon}{2^k}+\eta\right).$$

Slučajne promenljive $\left(\|Q_n\|\right)$ su nezavisne, $\|Q_n\| \le 1$ i prema (10) važi $P\left\{\|Q_n\|=0\right\} > 1-\eta \Rightarrow E\|Q_n\| < \eta$ za sve n. Iz jakog zakona velikih brojeva primenjenog na niz $(\|Q_n\|)$ sledi $c(Q_n) \le c(\|Q_n\|) \le \eta$. Osim toga očigledno važi

$$c(Y_n) \le c(T_n) + c(Q_n) \le c(T_n) + \eta$$

Sada imamo

$$(13) \quad C - \eta < c(W_n) = c(Z_n) = c(Y_n) \le c(T_n) + \eta \le C\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^k} + \eta\right) + \eta$$

Sada iz (13) zbog $0 < C \le 1$ sledi

$$\frac{\varepsilon}{2^k} \le \frac{3\eta}{C}$$

I to za proizvoljno $\eta > 0$, što je kontradikcija. Prema tome zaključujemo da je $C = 0$.

(b) Neka je (X_n) proizvoljan niz nezavisnih, simetričnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B, takav da je $VarX_n \le M$ za svako n, gde je M pozitivna konstanta. Dokazaćemo da tvrđenje teoreme važi za niz (X_n).

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $M = 1$ (u suprotnom pređemo na $X_n' = \dfrac{X_n}{\sqrt{M}}$). Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan i za svako n definišimo slučajne promenljive Y_n i Z_n

$$Y_n = X_n K_{\{\|X_n\| \le m\}}, \ Z_n = X_n - Y_n = X_n K_{\{\|X_n\| > m\}}$$

Imamo

$$(14) \quad E\|Z_n\| = \frac{1}{m} E(m\|Z_n\|) \le \frac{1}{m} E\left(\|Z_n\|^2\right) \le \frac{1}{m} E\left(\|X_n\|^2\right)$$
$$= (zbog\ EX_n = 0) = \frac{1}{m} VarX_n \le \frac{1}{m}$$

Za svako n. Iz jakog zakona velikih brojeva primenjenog na niz $(\|Z_n\|)$ i (14) sledi

$$c(Z_n) \le c(\|Z_n\|) \le \frac{1}{m}.$$

Prema (a) imamo $c(Y_n) = 0$, dakle važi

$$c(X_n) \le c(Y_n) + c(Z_n) \le \frac{1}{m}.$$

Zbog proizvoljnosti m, zaključujemo da je $c(X_n) = 0$ tj.

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right\| \xrightarrow{s.s.} 0 \text{ za } n \to \infty.$$

(c) Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B, takav da je $EX_n = 0$ i $VarX_n \le M$ za svako n, gde je M pozitivna konstanta. Posmatrajmo novi prostor verovatnoće

$(\Omega, \mathrm{F}, P)\times(\Omega, \mathrm{F}, P)$ i definišimo na njemu niz slučajnih promenljivih (Y_n) sa

$$Y_n((\omega_1)(\omega_2)) = X_n(\omega_1) - X_n(\omega_2),\ (\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega,\ n\in\mathbb{N}.$$

(Y_n) je niz nezavisnih slučajnih promenljivih i za svako n važi $EY_n = EX_n - EX_n = 0$. Osim toga Y_n su simetrični (za svako n koristimo funkciju $\varphi(\omega_1,\omega_2)=(\omega_2,\omega_1)$, koja očigledno čuva meru $P\times P$). Dalje imamo

$$VarY_n = E\left(\|Y_n\|^2\right)\le 4E\left(\|X_n\|^2\right)\le 4M \text{ za svako } n.$$

Prema tome, niz (Y_n) zadovoljava (b), pa važi

$$(15)\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega_1)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega_2)\xrightarrow{s.s.}0\quad n\to\infty.$$

Relacijom (15) zadata je jedna relacija ekvivalencije na Ω (kažemo da je $\omega_1\sim\omega_2$ ako uređen par (ω_2,ω_1) zadovoljava (15)) . odavde sledi da postoji $\Omega_0\subset\Omega, P(\Omega_0)=1$, takav da (15) važi za sve $\omega_1,\omega_2\in\Omega_0$. Teorema će biti dokazana ako pokažemo da za svako $\omega_0\in\Omega_0$ važi

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega_0)\right\|\to 0,\ n\to\infty$$

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno i neka je $\omega_0\in\Omega_0$. Stavimo

$$E_n=\left\{\omega\in\Omega;\ \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega_0)\right\|<\varepsilon\right\}.$$

Iz definicije skupova (E_n) sledi $\lim\limits_n P(E_n)=1$, dakle postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takvo da $P(E_n)>\frac{1}{2}$ za $n>n_0$. Za svako $f\in B^*$, $(f(X_n))$ je niz nezavisnih slučajnih promenljivih, $E[f(X_n)]=0$ za svako n i $Var[f(X_n)]\le\|f\|^2 VarX_n\le M\|f\|$ za svako n. Za svako $f\in B^*$ takvo da je $\|f\|\le 1$ i za $n>\frac{2M}{\varepsilon^2}$ važi

$$(16)\qquad P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(X_i)\right|>\varepsilon\right\}\le\frac{1}{(\varepsilon n)^2}\sum_{i=1}^{n}Var[f(X_i)]<\frac{1}{2}.$$

Neka je

$$D_{n,f}=\left\{\omega\in\Omega;\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(X_i(\omega))\right|\le\varepsilon\right\}$$

Za $n>\max\left\{n_0,\frac{2M}{\varepsilon^2}\right\}$ prema (16) imamo

$$P\left(E_n \cap D_{n,f}\right) = P\left(E_n\right) + P\left(D_{n,f}\right) - P\left(E_n \cup D_{n,f}\right) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

Prema tome, za svako $f \in B^*$ takvo da je $\|f\| \le 1$ i za svako $n > \max\left\{n_0, \frac{2M}{\varepsilon^2}\right\}$ postoji $\omega_n \in E_n \cap D_{n,f}$, a odavde dobijamo

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(X_i\left(\omega_0\right)\right)\right| \le \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(X_i\left(\omega_0\right) - X_i\left(\omega_n\right)\right)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(X_i\left(\omega_n\right)\right)\right|$$

$$\le \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\left(\omega_0\right) - X_i\left(\omega_n\right)\right)\right\| + \varepsilon < 2\varepsilon .$$

Iz korolara Han-Banachove teoreme sledi

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\omega_0\right)\right\| \le 2\varepsilon \text{ za } n > \max\left\{n_0, \frac{2M}{\varepsilon^2}\right\}.$$

Može se dokazati da teorema 2.45 generalno ne važi ako B nije B-konveksan. Osim toga, može se pokazati da i u slučaju B-konveksnog prostora B uslov uniformne ograničenosti promenljivih u Teoremi 2.45 ne možemo zameniti sa Kolmogorovljevim uslovom.

Da bi se dobila nova uopštenja jakog zakona velikih brojeva potrebno je zadati nove geometrijske uslove za Banachov prostor. Daćemo neke osnovne defiicije u tom smeru i izneti neke poznate teoreme.

<u>Definicija 2.48:</u> Separabilan Banachov prostor B je tipa p, $1 \le p \le 2$ ako postoji $K \in \mathbb{R}^+$ tako da važi

$$E\left[\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\|^p\right] \le K \sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n\right\|^p ,$$

za sve nizove $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ u B takve da $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ konvergira u verovatnoći, a $\left(\varepsilon_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ je Bernoullijev niz (tj. niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa osobinom da $P\left\{\varepsilon_n = 1\right\} = P\left\{\varepsilon_n = -1\right\} = \frac{1}{2}$).

Može se pokazati da je B B-konveksan ako i samo ako je on tipa p za neko p, $1 \le p \le 2$.

Važi sledeća teorema.

<u>Teorema 2.49:</u> Neka je B Separabilan Banachov prostor i neka $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le 2$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(1) B je tipa p

(2) Postoji $C > 0$ takav da važi

$$E\left[\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j\right\|^p\right] \le C \sum_{j=1}^{n} E\left[\left\|X_j\right\|^p\right]$$

Za proizvoljno n i proizvoljne nezavisne slučajne promenljive $X_1,...,X_n$ u B, takve da je $EX_j = 0$ i $E\left[\left\|X_j\right\|^p\right] < \infty$ $(j = 1,...,n)$

(3) Za proizvoljan niz (X_n) nezavisnih slučajnih promenljivih u B, koji zadovoljava $EX_n = 0$ za svako n i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left[\left\|X_n\right\|^p\right]}{n^p} < \infty \text{ (Chungov uslov)}$$

važi jak zakon velikih brojeva tj.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{s.s.} 0, \text{ za } n \to \infty$$

(d) Ako je $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left\|X_j\right\|^p}{j^p} < \infty$ i ako je $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Bernoullijev niz tada

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \xrightarrow{v} 0, \text{ za } n \to \infty$$

Definicija 2.50: Banachov prostor B je G_α-prostor za neko α, $0 < \alpha \le 1$ ako postoji preslikavanje $G : B \to B^*$ takvo da važi:

(1) $\left\|G(x)\right\| = \left\|x\right\|^\alpha$

(2) $\left\|\langle G(x), x\rangle\right\| = \left\|x\right\|^{\alpha+1}$

(3) $\left\|G(x) - G(y)\right\| \le K_1 \left\|x - y\right\|^\alpha$,

Za svako $x, y \in B$ i neku pozitivnu konstantu K_1.

Svaki G_α-prostor jeste tipa p za neko $p = \alpha + 1$. Međutim, postoji nerefleksivan, B-konveksan prostor (dakle on je i tipa $(1+\alpha)$ za neko α) koji nije G_α-prostor.

Sledeće upštenje Chungove teoreme važi za G_α-prostore.

Teorema 2.51: Neka je B separabilan Banachov G_α-prostor za neko α, $0 < \alpha \le 1$ i neka je $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ neprekidna funkcija takva da su $\frac{\varphi(t)}{t}$ i $\frac{t^{1+\alpha}}{\varphi(t)}$ neopadajuće funkcije. Ako je (X_n) niz nezavisnih slučajnih promenljivih u B, takav da $EX_n = 0$ za svako n i da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} E\left[\varphi\left(\left\|X_n\right\|\right)\right] < \infty$$

Tada važi $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{s.s.} 0$ za $n \to \infty$.

Napomena 2.52: Prostori L_p i l_p $(p \geq 2)$ su G_α-prostori za svako α, $0 < \alpha \leq 1$. Hilbertov prostor je G_1-prostor (dakle tipa je 2). Ako za ove prostore u Teoremu 2.51 stavimo $\alpha = 1$ i $\varphi(t) = t^2$, dobijamo da za ove prostore važi Kolmogorovljev dovoljan uslov za jak zakon velikih brojeva.

2.6. Karkteristični funkcionali. Sume nezavisnih slučajnih promenljivih u Banachovim prostorima

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće, neka je B separabilan Banachov prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih promenljivih u B. Označimo $B_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $(n \in \mathbb{N})$. U ovom odeljku ćemo posmatrati problem konvergencije niza slučajnih promenljivih (B_n).

Pre toga ćemo uvesti pojam i ispitati osnovna svojstva karakterističnih funkcionala, koji su za slučaj konačnog Banachovog prostora analogni karakterističnim funkcijama.

Sa $\mathcal{M}(B)$ označimo familiju svih mera verovatnoća na $\mathcal{B}_B$.

Definicija 2.53: Neka je $P \in \mathcal{M}(B)$. Fourierova transformacija od P je funkcija $\widehat{P} : B^* \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$(1) \qquad \widehat{P}(f) = \int_B e^{if(x)}\, dP(x), \quad f \in B^*$$

Slično se definiše Fourierova transformacija konačne mere na $\mathcal{B}_B$.

Definicija 2.54: Neka je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B i neka je P_X zakon raspodele od X. Karakteristični funkcional od X je Fourierova transformacija od P_X.

Po Napomeni 2.15 imamo

$$(2) \qquad \widehat{P}_X(f) = \int_B e^{if(x)}\, dP_X(x) = E\left[e^{if(X)}\right], \quad f \in B^*$$

Definicija 2.55: Kažemo da je skup $E \subset B$ Borelov cilindar (u B) ako je on oblika

$$(3) \qquad E = \left\{x \in B; \left(f_1(x), \dots, f_n(x)\right) \in M\right\},$$

za neko $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in B^*$ i neko $M \in \mathcal{B}^n$.

Sa $\mathcal{C}$ označimo familiju svih Borelovih cilindara u B. Jasno je da je $\mathcal{C} \in \mathcal{B}_B$ ($(f_1, \dots, f_n)$ je $\left(\mathcal{B}_B, \mathcal{B}^n\right)$-merljiva funkcija).

Lema 2.56: $\mathcal{C}$ je algebra na B i važi $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_B$.

Dokaz: Lako se pokazuje da je $\mathcal{C}$ algebra na B. Pored toga $\mathcal{C} \subset \mathsf{B}_B \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathsf{B}_B$. Kako je B separabilan, iz dokaza Propozicije 2.2 sledi da postoji niz (f_n) u B^*, takav da za svako $r > 0$ važi

$$\{x \in B; \|x\| \le r\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in B; |f_n(x)| \le r\} \in \sigma(\mathcal{C})$$

Zbog translacije invarijantnosti od $\sigma(\mathcal{C})$ odavde zaključujemo $\{x \in B; \|x-a\| \le r\} \in \sigma(\mathcal{C})$ za sve $a \in B$, pa slično kao u Propoziciji 2.2 dobijemo $\mathsf{B}_B = \sigma(\mathcal{C})$.

Sledeća propozicija daje osnovna svojstva Fourieovih transformacija.

Propozicija 2.57: Fourierova transformacija $\widehat{P}$ od $P \in \mathcal{M}(B)$ ima sledeće osobine:

(a) $\widehat{P}(0) = 1$

(b) $|\widehat{P}(f)| \le 1$, za sve $f \in B^*$

(c) $\widehat{P}(-f) = \overline{\widehat{P}(f)}$, za sve $f \in B^*$

(d) $\widehat{P}$ je uniformno neprekidna na B^* u uobičajenoj norma-topologiji

(e) $\widehat{P}$ je pozitivno semidefinitna na B^*

(f) (Jedinstvenost) Neka su $P_1, P_2 \in \mathcal{M}(B)$. Tada je $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2 \Leftrightarrow P_1 = P_2$

(g) $\widehat{P_1 * P_2}(f) = \widehat{P}_1(f)\widehat{P}_2(f)$, za sve $f \in B^*$.

(konvolucija od $P_1, P_2 \in \mathcal{M}(B)$ definiše se analogno kao u slučaju mera verovatnoće na $(\mathbb{R}, \mathsf{B})$: $P_1 * P_2(E) = \int_B P_1(E-x)\, dP_2(x)$, $E \in \mathsf{B}_B$. Ako sa $C(B)$ označimo skup svih realnih ograničenih neprekidnih funkcija na B, onda se konvolucija može definisati i preko relacije

$$\int_B g(x)\, d(P_1 * P_2)(x) = \int_B \int_B g(x+y)\, dP_1(x) dP_2(y) \text{ za svako } g \in C(B)).$$

Dokaz: (a), (b), (c), (d) se lako pokazuje.

(e) za proizvoljno n, proizvoljne $f_1, ..., f_n \in B^*$ i proizvoljne $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ važi

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \widehat{P}(f_j - f_k) \alpha_j \overline{\alpha}_k = \int_B \left| \sum_{j=1}^{n} e^{i f_j(x)} \alpha_j \right|^2 dP(x) \ge 0.$$

(f) Dovoljno je pokazati da $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2 \Rightarrow P_1 = P_2$, jer je drugi smer trivijalan. Prema Lemi 2.56 i osnovnoj teoremi o jedinstvenosti proširenja verovatnoće dovoljno je dokazati da je $P_1 = P_2$ na algebri cilindara $\mathcal{C}$. Neka je $E \in C$ proizvoljan. Tada je prema (3), $E = (f_1, ..., f_n)^{-1}(M)$, gde su $f_1, ..., f_n \in B^*$ i $M \in \mathcal{B}^n$. Definišimo verovatnoće mere P_1' i P_2' na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ sa $P_i' = P_i \circ (f_1, ..., f_n)^{-1} \ (i = 1,2)$ $\qquad P_i'(M) = P_i \circ \left((f_1, ..., f_n)^{-1}(M)\right)$, $M \in \mathcal{B}^n$). Tada je $P_i(E) = P_i'(M)$ $(i = 1,2)$, gde su E i M povezani preko (3). Neka je φ_i karakteristična funkcija od P_i' $(i = 1,2)$. Tada za proizvoljno $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\varphi_1(t_1, ..., t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} \, dP_i'(x) = \int_B e^{i(t_1 f_1(y) + ... + t_n f_n(y))} \, dP_1(y) = \left(\sum_{k=1}^n t_k f_k = f \in B^* \right)$$

$$= \int_B e^{if(y)} \, dP_1(y) = \widehat{P}_1(f) = \widehat{P}_1(f) = \varphi_2(t_1, ..., t_n).$$

Iz teoreme o višedimenzionalnoj inverziji sledi $\widehat{P}_1 = \widehat{P}_2$, dakle važi da je $P_1 = P_2$ na $C \quad \Rightarrow P_1 = P_2$.

<u>Korolar 2.58:</u> Neka je $P \in \mathcal{M}(B)$ i neka je $\widehat{P}(f) = 1$ za svako $f \in B^*$ takvo da je $\|f\| < \varepsilon$ za neko $\varepsilon > 0$. Tada je P degenerisana u nuli (tj. $P(\{0\}) = 1$).

<u>Dokaz:</u> Neka je $f \in B^*$, $f \neq 0$ fiksan. Definišimo funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa

$$\varphi(t) = \widehat{P}(tf), \ t \in \mathbb{R}$$

Iz Propozicije 2.57 (a),(d) i (e) sledi da je φ karakteristična funkcija verovatnoće mere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Osim toga iz uslova korolara sledi da je $\varphi(t) = 1$ za $|t| < \dfrac{\varepsilon}{\|f\|}$. Sledi da je $\varphi(t) = 1$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Za $t = 1$, odavde dobijamo $\widehat{P} \equiv 1$. Neka je $P_0 \in \mathcal{M}(B)$ degenerisana u nuli. Tada je $\widehat{P} = \widehat{P}_0$, pa iz Propozicije 2.57 (f) sledi $P = P_0$.

<u>Definicija 2.59:</u> Niz (P_n) u $\mathcal{M}(B)$ slabo konvergira ka $P \in \mathcal{M}(B)$ ako važi

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_B g \, dP_n = \int_B g \, dP \ \text{ za svako } g \in C(B)$$

Označavaćemo to sa $P_n \xrightarrow{w} P$ za $n \to \infty$.

Propozicija 2.60: (a) Neka je (P_n) niz u $\mathcal{M}(B)$ takav da $P_n \xrightarrow{w} P \in \mathcal{M}(B)$ za $n \to \infty$. Tada $\widehat{P}_n \to \widehat{P}$ (za $n \to \infty$) na B^*.

(b) Obrnuto, neka je (P_n) gust niz u $\mathcal{M}(B)$ takav da $(\widehat{P}_n)$ konvergira za $n \to \infty$ prema nekoj funkciji θ na B^*. Tada postoji $P \in \mathcal{M}(B)$ takav da $P_n \xrightarrow{w} P$. Pored toga je $\theta = \widehat{P}$.

Dokaz: (a) sledi direktno iz (4).

(b) Kako je (P_n) gust, iz teoreme Prokhorova sledi da je (P_n) relativno kompaktan, dakle postoji podniz $(P_{n_k}) \subset (P_n)$ takav da $P_{n_k} \xrightarrow{w} P \in \mathcal{M}(B)$ (za $k \to \infty$). Iz (a) sledi $\widehat{P}_{n_k} \to \widehat{P}$ za $k \to \infty$. Iz pretpostavki propozicije zaključujemo $\theta = \widehat{P}$. Ako niz (P_n) sadrži neki drugi podniz koji slabo konvergira ka $Q \in \mathcal{M}(B)$, tada analogno sledi $\theta = \widehat{Q}$, pa iz Propozicije 2.57 (f) zaključujemo $P = Q$. Sada sledi da $P_n \xrightarrow{w} P$ za $n \to \infty$. Pored toga, imamo i $\theta = \widehat{P}$.

Teorema 2.61: (Ito i Nisio) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa vrednostima u B i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $(n \in \mathbb{N})$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(a) S_n konvergira $(s.s.)$;

(b) S_n konvergira u verovatnoći;

(c) S_n konvergira u raspodeli.

Dokaz: Iz Napomene 2.31 sledi $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$. Prema tome, dovoljno je pokazati $(b) \Rightarrow (a)$. Dokazuje se analogno kao za slučajne promenljive, jer se može pokazati da, kao i u realnom slučaju, za svako $\varepsilon > 0$ važi nejednakost

$$(5)\quad P\left\{\max_{m<k\le n}\|S_k - S_m\| > 2\varepsilon\right\} \le \frac{P\left\{\|S_n - S_m\| > \varepsilon\right\}}{1 - \max\limits_{m<k\le n} P\left\{\|S_n - S_k\| > \varepsilon\right\}}.$$

$(c) \Rightarrow (b)$ Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $P_n \in \mathcal{M}(B)$ zakon raspodele za S_n, a za $m < n$ neka je $P_{mn} \in \mathcal{M}(B)$ zakon raspodele za $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} X_k$. Po pretpostavci, niz (P_n) slabo konvergira ka nekom $Q \in \mathcal{M}(B)$. Specijalno, niz (P_n) je relativno kompaktan, pa iz teoreme Prokhorova sledi da je on gust. Dakle, za dato $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan podskup $K = K_\varepsilon \subset B$ takav da je

$$P_n(K) > 1 - \varepsilon \text{, za svako } n.$$

Neka je $K_1 = \{x - y;\ x, y \in K\}$. Zbog neprekidnosti preslikavanja $(x, y) \mapsto x - y$, K_1 je kompaktan u B. Kako $S_n, S_m \in K$ to povlači da $S_n - S_m \in K_1$ pa imamo

$$P_{mn}(K_1) \geq P\{S_n \in K, S_m \in K\} \geq 1 - P\{S_n \in \overline{K}\} - P\{S_m \in \overline{K}\} =$$

$$= 1 - P_n(\overline{K}) - P_m(\overline{K}) > 1 - 2\varepsilon,$$

dakle, niz $(P_{mn})_{m<n, n=1,2\ldots}$ je gust, pa iz teoreme Prokhorova zaključujemo da je on i relativno komapaktan. Za kraj dokaza nam još treba da dokažemo da niz (P_{mn}) slabo konvergira ka $P_0 \in \mathcal{M}(B)$ koja je degenerisana u nuli, a to je ekvivalentno sa sledećim: za svako $\varepsilon > 0$ postoji $N_0 = N_0(\varepsilon)$ takvo da važi

$$(6) \qquad n > m > N_0 \Rightarrow P_{mn}(U_\varepsilon) > 1 - \varepsilon,$$

gde je U_ε ε-okolina nule u B. Pretpostavimo da to nije istina, tada postoji $\varepsilon_0 > 0$ takvo da za svako N postoji prirodni brojevi $m(N)$ i $n(N)$, $n(N) > m(N) > N$ takvi da je

$$P_{m(N)n(N)}(U_{\varepsilon_0}) \leq 1 - \varepsilon_0.$$

Kako je niz (P_{mn}) relativno kompaktan, možemo pretpostaviti da niz $(P_{m(N)n(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ slabo konvergira prema $Q_0 \in \mathcal{M}(B)$. Sledi

$$(7) \qquad Q_0(U_{\varepsilon_0}) \leq \liminf_{N \to \infty} P_{m(N)n(N)}(U_{\varepsilon_0}) \leq 1 - \varepsilon_0.$$

Zbog nezavisnosti niza (X_n) za svako $f \in B^*$ važi

$$E\left[e^{if(S_{n(N)})}\right] = E\left[e^{if(S_{m(N)})}\right] E\left[e^{if(S_{n(N)} - S_{m(N)})}\right].$$

Zbog (2) to povlači da

$$(8) \qquad \widehat{P}_{n(N)} = \widehat{P}_{m(N)} \widehat{P}_{m(N)n(N)}, \text{ za svako } N \in \mathbb{N}.$$

Sada, kada pustimo da $N \to \infty$, iz (8) i uz Propoziciju 2.60 (a) dobijamo

$$(9) \qquad \widehat{Q} = \widehat{Q}\widehat{Q}_0.$$

Kako je $\widehat{Q}$ neprekidna i $\widehat{Q}(0) = 1$, zaključujemo da postoji $r > 0$ takvo da je $\widehat{Q}(f) \neq 0$ za svako $f \in B^*$ za koje je $\|f\| < r$. Iz (9) sledi $\widehat{Q_0}(f) = 1$ za svako $f \in B^*$, $\|f\| < r$. Iz Korolara 2.58 sledi da je $Q_0 = P_0$, a to je kontradikcija sa (7). Prema tome, (P_{mn}) slabo konvergira ka $P_0 \in \mathcal{M}(B)$ koja je degenerisana u nuli.

3. Kontraprimer za slučajne promenljive sa vrednostima u Banachovim prostorima

Postoji niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom koje uzimaju vrednosti u beskonačno dimenzionalnom Banachovom prostoru c_0 koje zadovoljavaju zakon iteriranog logaritma, ali ne ispunjavaju uslove Centralne granične teoreme.

3.1. Uvod

Neka je B oznaka za realni separabilni Banachov prostor sa normom $\|\bullet\|$, i pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom koje uzimaju vrednosti iz B sa osobinom da $E(X_k) = 0$ i $E\|X_k\|^2 < \infty$. Kao i obično, $S_n = X_1 + \ldots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, za $n \geq 1$, i pišimo $Lx = \begin{cases} \ln x, & x \geq e \\ 1 \;, & 0 < x < e \end{cases}$.

Mera μ na Borelovim podskupovima od B se zove centrirana Gaussova mera ako svaka neprekidna linearna funkcija f na B ima centriranu Gaussovu raspodelu sa varijansom $\int_B \left| f(x) \right|^2 \, d\mu(x)$.

Ako je X slučajna promenljiva sa vrednostima u B, onda $\mathcal{L}(X)$ označava raspodelu od X na B. Ako su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne kopije od X, npr. $\mathcal{L}(X_k) = \mathcal{L}(X)$ za $k \geq 1$, onda kažemo da X zadovoljava Centralnu graničnu teoremu (CGT) na B ako postoji centrirana Gaussova mera μ na B takva da niz verovatnoća mera $\mathcal{L}\left(S_n / n^{\frac{1}{2}}\right)$ slabo konvergira ka μ na B. Dalje, koristeći CGT u konačnim dimenzijama, lako se vidi da je granična mera μ jedinstveno određena kovarijansnom strukturom od X_1, npr. funkcijom $T(f, g) = E\left(f(X_1), g(X_1)\right)$ za $f, g \in B^*$.

Kažemo da X zadovoljava zakon iteriranog logaritma (ZIL) ako za nezavisne kopije $X_1, X_2, \ldots$ od X imamo granični skup K u B takav da

$$(1) \qquad P\left\{ \omega : \lim_n d\left(\frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}}, K \right) = 0 \right\} = 1$$

$$(2) \qquad P\left\{ \omega : C\left(\left\{ \frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n \geq 1 \right\} \right) = K \right\} = 1$$

gde je

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

i

$C(\{a_n\}) =$ skup svih tačaka nagomilavanja niza $\{a_n\}$ u B.

U ZIT je granični skup K jedinstveno određen kovarijansnom strukturom od X_1.

Sledeću teoremu nećemo dokazivati, ali treba napomenuti da ona implicira, između ostalog, da K mora biti kompaktan podskup od B kad god važi da je $E\|X_k\|^2 < \infty$.

<u>Teorema 3.1:</u> Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa jednakom raspodelom koje uzimaju vrednosti iz B sa osobinom da $E(X_k) = 0$ i $E\|X_k\|^2 < \infty$. Tada:

(a) Postoji kompaktan, simetrični, konveksni skup $K \subseteq B$ takav da

$$(3) \qquad P\left\{\omega : C\left(\left\{\frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n \geq 1\right\}\right) \not\subset K\right\} = 0.$$

(b) Postoji kompaktan, simetričan konveksan skup K koji zadovoljava (3), takav da važe (1) i (2) akko

(4)

$$P\left\{\omega : \left\{\frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n \geq 1\right\} \text{ je relativno kompaktan u B}\right\} = 1.$$

U slučaju da je B konačno dimenzionalni Banachov prostor onda Teorema 3.1 (a) implicira da X zadovoljava CGT i ZIL akko $E(X) = 0$ i $E\|X\|^2 < \infty$. Stoga su CGT i ZIL ekvivalentne na konačno dimenzionalnim prostorima. Ipak, ako je B beskonačno dimenzionalan, veza između CGT i ZIL je još uvek nejasna.

Svrha ovog poglavlja je da prikaže primer slučajne promenljive X za koju važi ZIL ali ne zadovoljava CGT. Za neke slučajne promenljive ne važi CGT, ali ni ZIL takođe, stoga je sledeći primer u stvari kontraprimer prirodnog zaključka da su CGT i ZIL ekvivalentne čak i na beskonačno dimenzionalnim skupovima.

3.2. Modifikacija Jeanovog i Marcusovog primera

Neka je c_0 separabilan Banachov prostor svih realnih nizova $\{x_k\}$ takvih da je $\lim_k x_k = 0$ normiran sa

$$(1) \qquad \|x_k\| = \sup_k |x_k|.$$

Neka je $e_1 = (1,0,0,...)$, $e_2 = (0,1,0,...)$,... Schauderova baza.
Sada definišimo

$$(2) \qquad X(\omega) = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j(\omega) a_j e_j$$

gde su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ nezavisne slučajne promenljive sa osobinom $P(\varepsilon_j = \pm 1) = \frac{1}{2}$ i $a_j = (2Lj)^{-\frac{1}{2}}$.

Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz c_0 sa verovatnoćom 1, i u novijoj formi nam je predstavljena od strane N.Jaina i M.Marcusa kao kontraprimer za CGT. Iznenađujuća činjenica je da X zadovoljava ZIL.

Teorema 3.2: Neka je X definisano kao u (2). Tada važe sledeća tvrđenja:

(a) $P(X \in c_0) = 1$

(b) $P\left(\|X\| = 2^{-\frac{1}{2}}\right) = 1$

(c) X ne zadovoljava CGT

(d) X zadovoljava ZIL sa graničnim skupom

$$K = \left\{ x_k \in c_0 : \sum_{k\geq 1} (x_k / a_k)^2 \leq 1 \right\}.$$

Dokaz: Ako je X definisano kao u (2), tada pošto je $\lim_j a_j = 0$ jasno se vidi da važi (a). Slično, iz (1) i $Lx = \begin{cases} \ln x, & x \geq e \\ 1, & 0 < x < e \end{cases}$, lako sledi (b).

Da bi pokazali da važi (c) i (d) pretpostavimo da su $X_1, X_2, ...$ nezavisne kopije od X takve da važi

$$(3) \qquad X_k = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j^{(k)} a_j e_j$$

gde su $\left\{e_j^{(k)} : j \geq 1\right\}$ su nezavisne slučajne promenljive sa osobinom $P\left(\varepsilon_j^{(k)} = \pm 1\right) = \frac{1}{2}$ za $j \geq 1$, $k \geq 1$.

Tada

$$(4) \qquad \frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{j \geq 1} \frac{\left(\varepsilon_j^{(1)} + \ldots + \varepsilon_j^{(n)}\right)}{n^{\frac{1}{2}}} a_j e_j$$

sa verovatnoćom jedan. Sada je $\left\{e_j^{(k)}\right\}_{j\geq 1}$ nezavisan niz i zato $\mathcal{L}\left(\left(\varepsilon_j^{(1)} + \ldots + \varepsilon_j^{(n)}\right) \big/ n^{\frac{1}{2}}\right)$ slabo konvergira ka Gaussovoj slučajnoj promenljivoj g_j sa očekivanjem nula i varijansom jedan za svako $j = 1, 2, \ldots$ Sada se niz $\left\{g_j : j \geq 1\right\}$ neophodno sastoji od nezavisnih slučajnih promenljivih, i samim tim je nemoguće da CGT važi.

Da bi smo videli da CGT ne može da važi, dovojno je primetiti da nezavisne Gaussove slučajne promenljive $\left\{g_j : j \geq 1\right\}$ sa očekivanjem nula i varijansom jedan impliciraju da $P\left(\lim_j \sup g_j a_j = 1\right) = 1$. Dakle, ne postoji Gaussova mera μ na c_0 čije su konačno dimenzionalne distribucije granice konačno dimenzionalnih distribucija od $\mathcal{L}\left(S_n \big/ n^{\frac{1}{2}}\right)$, i ovim je dokaz za (c) gotov.

Za dokaz tvrđenja pod (d) će nam trebati jedna lema:

<u>Lema 3.3:</u> Ako je $\left\{e_j : j \geq 1\right\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa osobinom $P\left(\varepsilon_j = \pm 1\right) = \frac{1}{2}$ za $j = 1, 2, \ldots$, i ako

$$(5) \qquad M = \sup_n \frac{\left|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n\right|}{\left(2nLLn\right)^{\frac{1}{2}}},$$

tada za svako $\alpha > 0$

$$(6) \qquad E\left(\exp\left\{\alpha M^2\right\}\right) < \infty.$$

<u>Dokaz:</u> Fiksirajmo α. Kako su ε_j-ovi uniformno ograničeni sa jedan, (6) važi ako za neko Λ

$$E\left(\exp\left\{\alpha M_\Lambda^2\right\}\right) < \infty$$

gde je

$$M_\Lambda = \sup_{n > \Lambda} \frac{\left|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n\right|}{\left(2nLLn\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \Lambda = 1, 2, \ldots .$$

Neka su $Y_1, Y_2, \ldots$ nezavisne Gaussove slučajne promenljive sa očekivanjem nula i varijansom jedan. Neka je

$$(7) \qquad N_\Lambda = \sup_{n > \Lambda} \frac{\left|Y_1 + \ldots + Y_n\right|}{\left(2nLLn\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \Lambda = 0, 1, \ldots .$$

Sada $P\left(N_\Lambda < \infty\right) = 1$ sledi iz ZIL primenjen na niz $\left\{Y_j\right\}$. U stvari, zbog ZIL imamo

$$(8) \qquad P\left(N_\Lambda \downarrow 1\right) = 1.$$

Kako je $\alpha > 0$ dato, sada biramo $h(\alpha)$ takvo da važi $\frac{1}{2} < h(\alpha) < 1$ i

$$(9) \qquad \alpha \le \tfrac{1}{48}\log\left[\frac{h(\alpha)}{1-h(\alpha)}\right].$$

Dalje, po (8) postoji Λ_0 takvo da za $\Lambda \ge \Lambda_0$ važi

$$(10) \qquad P\left(N_\Lambda \le 2^{\frac{1}{2}}\right) \ge h(\alpha)$$

Sada imamo

$$(11) \qquad E\left(\exp\left\{\alpha N_\Lambda^2\right\}\right) < \infty,\ \Lambda \ge \Lambda_0 .$$

Neka je $Z_n = (Y_1 + ... + Y_n)\big/ n^{\frac{1}{2}}$ za $n \ge 1$. Tada je $\mu = \mathcal{L}(Z_1, Z_2, ...)$ centrirana Gaussova mera na $\mathbb{R}^\infty$ i

$$\mu\left(\left\{z_j\right\} \in \mathbb{R}^\infty : \sup_n \frac{|z_n|}{(2LLn)^{\frac{1}{2}}} < \infty\right) = 1 .$$

Neka je $\widetilde{N}_\Lambda\left(\left\{z_n\right\}\right) = \sup\limits_{n>\Lambda} |z_n| \big/ (2LLn)^{\frac{1}{2}}$ za $\Lambda = 0,1,...$ i $\left\{z_n\right\} \in \mathbb{R}^\infty$. Tada je $\widetilde{N}_\Lambda$ merljiva pseudo seminorma na $\mathbb{R}^\infty$ i kako je raspodela $\widetilde{N}_\Lambda$ ista kao i kod N_Λ imamo da važi (11) ako

$$(12) \qquad \int_{\mathbb{R}^\infty} \exp\left\{\alpha \widetilde{N}_\Lambda^2\right\}\ d\mu < \infty .$$

Poslednja nejednakost sledi odmah zato što važi (9) a (10) implicira

$$\mu\left(\widetilde{N}_\Lambda \le 2^{\frac{1}{2}}\right) \ge h(\alpha) .$$

Sada pretpostavimo da je $\left\{e_j : j \ge 1\right\}$ dato kao u teoremi i definisano na prostoru verovatnoće $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$. Neka su $\left\{Y_j : j \ge 1\right\}$ nezavisne Gaussove slučajne promenljive sa očekivanjem nula i varijansom jedan definisane na $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$. Iz proizvoda prostora verovatnoće $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$ i primetimo da $\left\{e_j |Y_j| : j \ge 1\right\}$ može da se posmatra kao niz nezavisnih Gaussovih slučajnih promenljivih sa očekivanjem nula i varijansom jedan definisane na $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$.

Stoga, zbog (11) i Fubinijevoj teoremi, za $\Lambda \ge \Lambda_0$ imamo

$$(13) \qquad \infty > E\left(\exp\left\{\alpha N_\Lambda^2\right\}\right)$$
$$= E_1\left\{E_2\left\{\exp\left(\alpha \sup_{n>\Lambda}\left|\frac{\varepsilon_1|Y_1| + ... + \varepsilon_n|Y_n|}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}}\right|^2\right)\right\}\right\}.$$

Kako je $\exp\{\alpha u\}$ rastuća i konveksna na $[0,\infty)$ za $\alpha > 0$, Jensenova nejednakost primenjena na desnu stranu (13) nam daje

$$(14)\qquad \infty > E_1\left\{\exp\left[\alpha E_2\left(\sup_{n>\Lambda}\left|\frac{\varepsilon_1|Y_1|+\ldots+\varepsilon_n|Y_n|}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}}\right|^2\right)\right]\right\}$$

$$\geq E_1\left\{\exp\left[\alpha\sup_{n>\Lambda}E_2\left|\frac{\varepsilon_1|Y_1|+\ldots+\varepsilon_n|Y_n|}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}}\right|^2\right]\right\}$$

$$\geq E_1\left\{\exp\left[\alpha\sup_{n>\Lambda}\left|\frac{\varepsilon_1E_2|Y_1|+\ldots+\varepsilon_nE_2|Y_n|}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}}\right|^2\right]\right\}$$

$$= E_1\left\{\exp\left[\frac{2\alpha}{\pi}\sup_{n>\Lambda}\left|\frac{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}}\right|^2\right]\right\}.$$

Kako je $\alpha > 0$ proizvoljno, (14) implicira (6) i time je lema dokazana.

Vratimo se na dokaz tvrđenja pod (d) i pustimo da $X_1, X_2, \ldots$ budu nezavisne slučajne promenljive kao u (3). Neka K označava granični skup određen kovarijansnom strukturom od X, i primetimo da je K označen u (d).

Tada po Teoremi 3.1 slučajna promenljiva X zadovoljava ZIL sa graničnim skupom K akko možemo da pokažemo da važi

$$(15)\ P\left\{\omega : \left\{\frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n\geq 1\right\} \text{ je relativno kompaktan u } c_0\right\} = 1.$$

Kako događaj u (15) predstavlja rep niza $X_1, X_2, \ldots$ iz zakona nula-jedan sledi da važi (15) akko za svako $\varepsilon > 0$

$$(16)\ P\left\{\omega : \left\{\frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n\geq 1\right\} \text{je prekriven sa konačno mnogo } \varepsilon\text{-sfera}\right.$$

centriranih u tačkama u prebrojivo gustom podskupu skupa $\left.c_0\right\} > 0$.

tj. ako događaj iz (16) ima pozitivnu verovatnoću, onda ima verovatnoću jedan, i stoga se lako vidi da su (16) i (15) ekvivalentni.

Da pokažemo (16), fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Biramo $\alpha > 0$ takvo da važi $\alpha\varepsilon^2 > 2$ i neka je $c(\alpha) = M\left(\exp\left\{\alpha M^2\right\}\right)$. Po Lemi 3.3 imamo da je $c(\alpha) < \infty$. Neka je $Q_N(\{x_n\}) = \sum_{k\geq N} x_k e_k$ i $\Pi_N(\{x_n\}) = \sum_{k<N} x_k e_k$ za svako $N = 1, 2, \ldots$ i $\{x_k\}\in c_0$, i izaberimo N takvo da za $k\geq N$ sledi $2c(\alpha)\leq k^{\alpha\varepsilon^2/2}$.

Koristeći ZIL u konačno dimenzionalnim prostorima imaćemo (16) ako pokažemo $P(\Omega_1) > 0$ gde je

$$(17) \qquad \Omega_1 = \left\{ \omega : \sup \left\| Q_n \frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} \right\| \leq \varepsilon/2 \right\}.$$

Tj. Koristeći ZIL u konačno dimenzionalnim prostorima imamo $P(\Omega_0) = 1$ gde je

$$(18) \ \Omega_0 = \left\{ \omega : \left\{ \Pi_N \frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n \geq 1 \right\} \text{je uslovno kompaktan u } \Pi_N c_0 \right\}$$

Stoga, ako je $\{b_j\}$ fiksno gust niz u c_0 i $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ tada

$$(19) \qquad \left\{ \frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n \geq 1 \right\} \subseteq \bigcup_{j \in I(\omega)} \left\{ x \in c_0 : \left\| x - \Pi_N b_j \right\| \leq \varepsilon \right\}$$

gde je $I(\omega)$ konačan podskup celih brojeva takvih da

$$(20) \left\{ \Pi_N \frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} : n \geq 1 \right\} \subseteq \bigcup_{j \in I(\omega)} \left\{ x \in \Pi_N c_0 : \left\| x - \Pi_N b_j \right\| \leq \varepsilon/2 \right\},$$

i egzistencija $I(\omega)$ sledi pošto $\omega \in \Omega_0$. Sada (19) važi za svako $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, i pošto važi $P(\Omega_0) = 1$ dobijamo (16) ako je $P(\Omega_1) > 0$.

Da bi pokazali $P(\Omega_1) > 0$ posmatrajmo sledeće

$$\sup_n \left\| Q_N \frac{S_n(\omega)}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} \right\| = \sup_n \sup_{k \geq n} \frac{\left| \varepsilon_k^{(1)} + \ldots + \varepsilon_k^{(n)} \right|}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} a_k$$

$$= \sup_{k \geq n} \sup_n \frac{\left| \varepsilon_k^{(1)} + \ldots + \varepsilon_k^{(n)} \right|}{(2nLLn)^{\frac{1}{2}}} a_k = \sup_{k \geq n} M^{(k)} a_k$$

gde su $M^{(k)} = \sup_n \left| \varepsilon_k^{(1)} + \ldots + \varepsilon_k^{(n)} \right| / (2nLLn)^{\frac{1}{2}}$ nezavisne identično raspoređene slučajne promenljive. Dalje, zbog Leme 3.3 imamo

$$\infty > c(\alpha) = E\left(\exp\left(\alpha \left[M^{(k)} \right]^2 \right) \right) \text{ za } k = 1, 2, \ldots$$

Tako sada

$$P(\Omega_1) = P\left(\sup_{k \geq n} M^{(k)} a_k \leq \varepsilon/2 \right) = \Pi_{k \geq N} P\left(M^{(k)} a_k \leq \varepsilon/2 \right)$$

$$\geq \Pi_{k \geq N} \left[1 - c(\alpha) \exp\left\{ -\alpha \left(\varepsilon/2a_k \right)^2 \right\} \right] = \Pi_{k \geq N} \left[1 - c(\alpha) / k^{\alpha\varepsilon^2/2} \right] > 0.$$

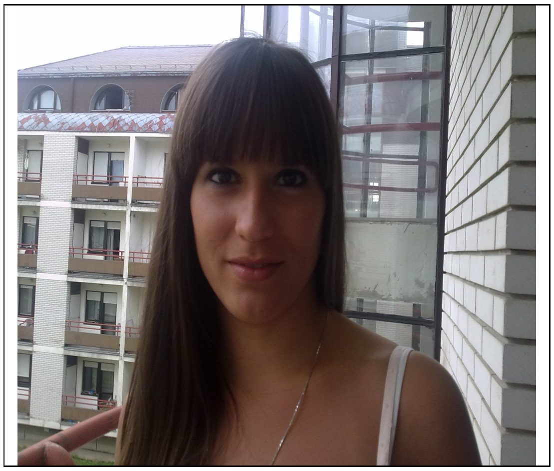
pošto je $2c(\alpha) \leq k^{\alpha\varepsilon^2/2}$ i $\alpha\varepsilon^2/2 > 1$.

Kako (16) važi, onda kao što smo i gore spomenuli, ona implicira (15). Stoga X zadovoljava ZIL i dokaz teoreme je završen.

Literatura

- I. M. Bomze, A functional analytic approach to statistical experiments, Longman Scientific & Tehnical, 1990
- J. Van Neerven, Stochastic Evolution Equations, ISEM Lecture Notes 2007/08
- R. Sarapa, Teorija verojatnosti, Školska knjiga Zagreb, 1987
- S. Pilipović, D. Seleši: Mera i integral-fundamenti teorije verovatnoće, skripte, 2011.
- J. Kuelbs, A Counterexample for Banach Space Valued Random Variables, The Annals of Probability, vol. 4, 1976, 684-989

Biografija



Marica Babić rođena je 18.11.1987. u Šapcu. Osnovnu školu „Vuk Karadžić” završila je u Šapcu. Šabačku gimnaziju, prirodno-matematički smer, završila je u Šapcu.

Prirodno-matematički fakultet, odsek za matematiku, smer profesor matematike, upisala je 2006. godine i završila 2010. sa prosečnom ocenom 9,24. Iste godine, upisala je master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer matematika.Položila je sve ispite previđene nastavnim planom i programom master studija i tako stekla pravo na odbranu master rada.

Od januara 2012. radi kao profesor matematike u Gimnaziji Bečej.

Novi Sad, *jul* 2012.

Ime i prezime
Marica Babić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Marica Babić
AU

Mentor: Docent dr Dora Seleši
MN

Naslov rada: Slučajne promenljive sa vrednostima u Banachovim prostorima
NR

Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *s / e*
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2012.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3/69/0/0/0/0/0)

FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Verovatnoća
ND

Ključne reči: Slučajne promenljive, Banachov prostor, jaka merljivost, Bochnerov integral, nezavisnost i matematičko očekivanje slučajnih promenljivih
KR

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena: nema
VN

Izvod: Tema ovog rada su slučajne promenljive sa vrednostima u Banahovim prostorima. Bavićemo se takođe i njihovim osobinama, kao što su nezavisnost i matematičko očekivanje ali i nakorelacija slučajnih promenljivih i zakon velikih brojeva za slučajne promenljive u Hilbertovim, a kasnije i u Banachovim prostorima. Govorićemo i o neekvivalentnosti ZIL i CGT u beskonačno dimenzionalnim prostorima.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.05.2012.
DP

Datum odbrane: Jul 2012.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Stevan Pilipović, redovni profesor Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Dora Seleši, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE KEY
WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification umber:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master’s thesis
CC

Author: Marica Babić
AU

Mentor: Dora Seleši, Ph.D.
MN

Title: Banach space valued random variables
XI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2012
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3/69/0/0/0/0/0)
PD

Scientific field:
Mathematics
SF

Scientific discipline: Probability
SD

Key words: Random variables, Banach spaces, strong measurability, the Bochner integral, independence and mathematical expectation of random variables
UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note: none
NT

Abstract:
This master thesis deals with Banach space valued random variables. We shall also be dealing with theirs properties, such as independence and mathematical expectation, and non-correlation of random variables. We'll discuss about the law of large numbers for Hilbert space valued random variables, and later for the Banach space valued random variables. Brief discussion about non-equivalence between the central limit theorem and the law of the iterated logarithm for the infinity dimension spaces is also given.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.05.2012.

Defended: July 2012

Thesis defend board:

President: Dr. Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr. Danijela Rajter-Ćirić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Dr. Dora Seleši, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad