UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Maria Kiss

Sedam znamenitih ekvivalentnih tvrđenja iz kombinatorike

- Master rad-

Mentor:

dr Vojislav Petrović

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

Predgovor

U matematici postoje tvrđenja koja naizgled, prema formulaciji i sadržaju, nemaju skoro nikakve međusobne veze. Međutim, iz tačnosti jednog proizlazi tačnost drugog i obratno. S jednog višeg, apstraktnog, stanovišta one predstavljaju jedno te isto. U matematici se kaže da su ekvivalentna. Najpoznatija takva tvrđenja svakako su čuveni ekvivalenti V Euklidovog postulata.

Nekad je pomenuta ekvivalencija prisutna u blažem obliku. Naime, tvrđenje A se može dokazati uz pomoć tvrđenja B, ali postoje i drugi putevi da se taj dokaz izvede. U sličnom odnosu može biti dokaz tvrđenja B prema tvrđenju A. Bez obzira na to, smatraćemo da su tvrđenja A i B ekvivalentna.

U ovom radu bavićemo se upravo takvim tvrđenjima koja su u domenu tzv. diskretne matematike. To u ovom slučaju podrazumeva kombinatoriku, teoriju grafova, teoriju mreža, teoriju $(0-1)$ matrica.

Rad se sastoji iz dva osnovna poglavlja. U prvom delu prezentovano je sedam tvrđenja i njihovi dokazi. U drugom je prikazana njihova ekvivalencija u pomenutom smislu. Na kraju je spisak korišćene literature.

* * *

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru dr Vojislavu Petroviću na svim stručnim savetima, sugestijama i primedbama u toku pripreme ovog master rada. Takođe se zahvaljujem i članovima komisije dr Bojanu Bašiću i dr Borisu Šobotu.

Veliku zahvalnost dugujem i svim mojim profesorima i asistentima, od kojih sam mnogo naučila u toku školovanja i studiranja.

Zahvaljujem se Mariji Kiš, profesorici matematike iz srednje škole koja me je pripremila za fakultet i bila mi je jedna od najvećih podrška od početka mojih studija.

Ovim putem želela bih da se zahvalim mojoj porodici na podršci i ukazanom poverenju, koju su mi pružili tokom mog školovanja.

Na kraju želim da se zahvalim svim mojim prijateljima na nesebičnoj podršci koju mi neprestano pružaju, a posebno Emeši B. Varga.

Rad posvećujem svom ocu, ko nažalost nije doživeo da ga pročita.

Kiss Mária

Uvod

Leonhard Euler[1] je 1736. godine objavio rad u kome je rešio problem o sedam Königsbergskih mostova. Taj rad se smatra prvim pisanim rezultatom iz teorije grafova i samim tim njenim nastankom. Teorija grafova je jedna od matematičkih disciplina koja se burno razvija poslednjih decenija. Razlog ovakvog razvoja su mnogobrojne primene, ne samo u različitim oblastima matematike, nego i u drugim naukama kao što su hemija, informatika, fizika, elektrotehnika, itd. Graf je apstraktni matematički objekat koji se geometrijski predstavlja figurom sastavljenom od tačaka i linija koje ih spajaju.

Teorija tokova u mrežama je interesantan i važan deo teorije grafova. Jedan od fundamentalnih rezultata, svakako je teorema Ford-Fulkerson, koja će i biti prikazana u radu. Rezultati iz ove oblasti nalaze direktne primene u telekomunikacijskim i elektroenergetskim mrežama, u saobraćajnim mrežama, naftovodnim i vodovodnim mrežama, itd.

U ovom radu se posebno posmatraju i koriste neke specijalne klase matrica kao što su $(0-1)$-matrice i bistohastičke matrice.

Rad počinjemo prezentovanjem svih sedam teorema, dok će pojmovi, koji budu bili potrebni, iz oblasti na koje se odnose, biti definisani u trenutku kada se budu koristili.

[1] Leonhard Euler, švajcarski matematičar (1707-1783)

1 Prezentacija teorema

U ovom delu rada predstavićemo i pokazaćemo svaku teoremu posebno. Svaka od njih nosi ime matematičara koji ih je formulisao i dokazao. Navešćemo sledeće teoreme:

- Hallova teorema (1935)
- Teorema König-Egerváry (1931)
- Teorema Birkhoff-Von Neumann (1946)
- Königova teorema (1931)
- Mengerova teorema (1927)
- Dilworthova teorema (1950)
- Teorema Ford-Fulkerson (1962).

Osnovni pojmovi iz oblasti teorije grafova, koji su navedeni u ovoj sekciji, se mogu naći u [2], [13] i [17].

1.1 Hallova teorema

Za formulaciju Hallove teoreme potrebne su nam sledeće definicije:

Definicija 1.1. Dva čvora su susedna ako su povezana granom. Čvorovi grane se nazivaju krajevi. *Skup svih suseda* čvora v u grafu G označavamo sa $N_G(v)$,

$$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}.$$

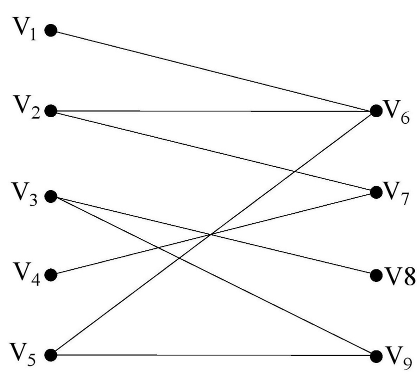
Definicija 1.2. *Stepen čvora* v, u oznaci $d(v)$, je broj grana koje su incidentne sa njim, odnosno

$$d(v) = |N_G(v)|.$$

Minimalni stepen svih čvorova označavamo sa $\delta(G)$, a maksimalan sa $\Delta(G)$. Odnosno $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$ i $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$.

Definicija 1.3. *k-partitan graf* $G(X_1, X_2, ..., X_k)$ je graf čiji je skup čvorova podeljen u k disjunktnih klasa $X_1, X_2, ..., X_k$, tako da svaka grana spaja čvorove koji pripadaju različitim klasama.

Napomena 1.4. 2-partitan graf G se zove bipartitan graf. Bipartitan graf sa klasama X i Y označavaćemo i sa $G(X, Y)$.



Slika 1. Primer bipartitnog grafa

Definicija 1.5. Neka je $G = (A, B)$ bipartitan graf i $X \subseteq A$. Skup svih suseda skupa čvorova X u grafu G označavamo sa $N(X)$,

$$N(X) = \{u \in X, v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}.$$

Definicija 1.6. Neka je $G = (V, E)$ graf. Za skup $M \subseteq E$ kažemo da je *mečing u grafu* G ako nikoje dve grane iz M nemaju zajednički čvor.

Definicija 1.7. Neka je X neprazan skup, i neka je $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ familija podskupova skupa X. Tada je skup $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *sistem različitih predstavnika (SRP)* za skup S, ako važi da $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ gde $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ i $x_i \in S_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Smatra se da originalna ideja za formulaciju ove teoreme potiče iz sledećeg primera.

Posmatraju se dva skupa. U jednom skupu su muškarci, a u drugom skupu su žene. Svaka žena napravi spisak muškaraca za kojeg bi se udala, i pitanje je pod kojim uslovima je moguće izabrati takve kombinacije muškaraca i žena, da bi svaka žena mogla da se uda za nekog muškarca sa svoje liste.

Zbog ovog primera Hallovu teoremu zovemo još i Teorema o venčanjima.

Danas već postoje razne formulacije Hallove teoreme. Originalna teorema se može naći u [12], formulisana je i dokazana u okviru teorije skupova.

Teorema 1.8 (Hall[2] - teorija skupova, 1935)**.** *Familija skupova*

$$S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$$

ima SRP ako i samo ako važi

$$| S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k} | \geq k, \tag{1}$$

za svako $1 \leqslant k \leqslant n$ *i svako* $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Napomena 1.9. Uslov (1) iz gornje teoreme se naziva *Hallov uslov.*

Hallova teorema je danas bar toliko poznata i kao teorema iz teorije grafova, pa ćemo zato ovde prikazati formulaciju i u tom obliku, a dokaz se može naći u [11].

Teorema 1.10 (Hall - teorija grafova)**.** *Neka je* $G = (V, E)$ *bipartitan graf, s particijama* A *i* B*. Graf* G *ima mečing koji sadrži svaki čvor iz* A *ako i samo ako*

$$(\forall X \subseteq A) \ \ |X| \leqslant |N(X)|. \tag{2}$$

[2]Philip Hall, engleski matematičar (1904-1982)

Dokaz Hallove teoreme (teorija skupova). Izvodimo dokaz prema [14]. Neka je $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ familija skupova za koji važi da ima SRP. Pretpostavimo da ova familija ne zadovoljava Hallov uslov. To znači, da postoji podskup $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ skupa $\{1, 2, ..., n\}$ tako da

$$\mid S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k} \mid < k.$$

Iz ovoga zaključujemo, da podskup $\{S_{i_1}, S_{i_2}, ..., S_{i_k}\}$ familije S nema SRP. Tada sledi da ni S nema SRP (jer ako neki podskup od S nema, onda ne može ni S imati SRP). Ovo je u kontradikciji sa početnom pretpostavkom, pa sledi da familija S zadovoljava Hallov uslov.

Dokažimo i drugi smer, da iz (1) sledi da postoji SRP. Neka je sada $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ familija skupova koji zadovojava Hallov uslov. Dokaz radimo indukcijom po broju n.

- Baza: Ako je $n = 1$, imamo da je $S = \{S_1\}$. Kako S zadovoljava uslov (1), znamo da $\mid S_1 \mid \geqslant 1$, što znači da je $S_1 \neq \emptyset$, a onda ima SRP.

- Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo da je tvrđenje iz teoreme tačno, za svako $m < n$, gde $n \geqslant 2$, odnosno da ako $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ zadovoljava (1), tada $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ ima SRP.

- Indukcijski korak: Treba dokazati da ako je $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ familija skupova za koji važi (1), tada S ima SRP. Razlikovaćemo dva slučaja:

  1. $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant n$ i $\forall \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$

  $$\mid S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k} \mid > k, \tag{3}$$

  2. $\exists k, 1 \leqslant k \leqslant n$ i $\exists \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$

  $$\mid S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k} \mid = k. \tag{4}$$

  1. Iz (3) sledi da

  $$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \mid S_i \mid \geqslant 2. \tag{5}$$

  Neka je x_1 element skupa S_1. Posmatrajmo familiju skupova $\{S_2^{'}, S_3^{'}, ..., S_n^{'}\}$ gde je:

  $$S_2^{'} = S_2 - \{x_1\}$$

  $$S_3^{'} = S_3 - \{x_1\}$$

$$\cdots$$

$$S_n^{'} = S_n - \{x_1\}.$$

Iz uslova (3) sledi

$$| S_{i_1}^{'} \cup S_{i_2}^{'} \cup ... \cup S_{i_k}^{'} | \geqslant | S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k} | -1 > k - 1 \geqslant k,$$

gde $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq \{2, ..., n\}$. Odnosno, dobijena familija skupova $\{S_2^{'}, S_3^{'}, ..., S_n^{'}\}$ zadovoljava uslov (1), pa po indukcijskoj hipotezi znamo da ima SRP, neka je to $(x_2, x_3, ..., x_n)$, gde $x_i \in S_i^{'}$. Kako $S_i^{'} \subseteq S_i$, sledi da $x_i \in S_i$ za $i \in \{2, 3, ..., n\}$, tako da je $(x_2, x_3, ..., x_n)$ SRP i za $\{S_2, S_3, ..., S_n\}$, a zajedno sa x_1 dobijamo da je uređena n-torka $(x_1, x_2, ..., x_n)$ SRP za $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$.

2. Neka je k najmanji broj iz $\{1, 2, ..., n\}$ za koji važi uslov (4). Razlikujemo:

   I. $1 \leqslant k < n$. Bez uticaja na opštost, možemo uzeti da je

   $$| S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k | = k.$$

   Tada po indukcijskoj hipotezi sledi da familija skupova $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$ ima SRP, neka je to $(x_1, x_2, ..., x_k)$, gde $x_i \in S_i$. Posmatrajmo familiju skupova $\{S_{k+1}^{'}, S_{k+2}^{'}, ..., S_n^{'}\}$:

   $$S_{k+1}^{'} = S_{k+1} - \{x_1, x_2, ..., x_k\}$$

   $$S_{k+2}^{'} = S_{k+2} - \{x_1, x_2, ..., x_k\}$$

   $$\cdots$$

   $$S_n^{'} = S_n - \{x_1, x_2, ..., x_k\}.$$

   Dokažimo da familija $\{S_{k+1}^{'}, S_{k+2}^{'}, ..., S_n^{'}\}$ zadovoljava Hallov uslov. Pretpostavimo suprotno, da postoji broj m, takav da je $k + 1 \leqslant m < n$ i da Hallov uslov ne bude zadovoljen, tj. $\exists \{i_1, i_2, ..., i_l\} \subseteq \{k + 1, k + 2, ..., n\}$, gde $l = m - k$ i važi

   $$| S_{i_1}^{'} \cup S_{i_2}^{'} \cup ... \cup S_{i_l}^{'} | < l.$$

   Tada, ako posmatramo skup $\{S_1, ..., S_k, S_{i_1}, ..., S_{i_l}\}$, dobijamo:

   $$\begin{array}{rcl} | S_1 \cup ... \cup S_k \cup S_{i_1} \cup ... \cup S_{i_l} | & = & \\ | S_1 \cup ... \cup S_k \cup S_{i_1}^{'} \cup ... \cup S_{i_l}^{'} | & \leqslant & \\ | S_1 \cup ... \cup S_k | + | S_{i_1}^{'} \cup ... \cup S_{i_l}^{'} | & < & k + l. \end{array}$$

Ovo je u kontradikciji sa uslovom (1), pa familija skupova $\{S'_{k+1}, S'_{k+2}, ..., S'_n\}$ zadovoljava Hallov uslov. Po indukcijskoj hipotezi sledi da familija $\{S'_{k+1}, S'_{k+2}, ..., S'_n\}$ ima SRP. Neka je to $(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)$, gde $x_i \in S'_i$. Kako $S'_i \subseteq S_i$, sledi da $x_i \in S_i$ za $i \in \{k+1, k+2, ..., n\}$, tako da je $(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)$ SRP i za $\{S_{k+1}, S_{k+2}, ..., S_n\}$, a zajedno sa $(x_1, x_2, ..., x_k)$ dobijamo da je n-torka $(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ SRP za familiju $\{S_1, ..., S_k, S_{k+1}, ..., S_n\}$.

II. $k = n$. To znači da

$$| S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n | = n,$$

i da za svako m, $1 \leqslant m < n$,

$$| S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_m} | > m.$$

Iz ovoga sledi da

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\}) \qquad | S_i | \geqslant 2.$$

Kako smo dobili isti uslov kao (5), dalji dokaz se radi analogno dokazu 1. slučaja.

$\blacksquare$

1.2 Teorema König-Egerváry

König Dénes[3] u radu [15] ne samo da je formulisao i dokazao svoju teoremu nego je dao i matričnu formulaciju. Egerváry Jenő[4] je u radu [7] dao matrični dokaz Königove teoreme kao i njeno uopštenje.

Ova teorema je pokazala svoj značaj 1955. godine kada je Harold W. Kuhn[5] objavio rad pod nazivom *The Hungarian Method for the assignment problem*[6]. U radu autor je predstavio algoritam za konstrukciju maksimalnog težinskog (savršenog) mečinga u bipartitnom grafu. A algoritam je dobio naziv Mađarski algoritam u čast Königu i Egerváryju, pošto je rad zasnovan na njihovom rezultatu iz rada [7].

Danas zovemo Königova matrična teorema ili teorema König-Egerváry matričnu formulaciju Königove teoreme. Pratimo već spomenut dokaz, koji je dao Egerváry.

Prvo je potrebno da definišemo sledeće pojmove:

Definicija 1.11. Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrica za koju važi da za $(\forall a_{ij} \in A)$ $a_{ij} \in \{0, 1\}$, tj. *A je* $(0-1)$ *matrica.* Tada:

- zajednički naziv za vrste i kolone matrice je *linija matrice.*
- linija pokriva jedinicu (ili nulu) ako jedinica (nula) pripada toj liniji.
- za dve jedinice (nule) kažemo da su *nezavisne*, ako ne pripadaju istoj liniji.
- za skup jedinica (nula) kažemo da čine nezavisan skup, ako su svake dve nezavisne.

Teorema 1.12 (König-Egerváry, 1931)**.** *Minimalan broj linija koje pokrivaju sve jedinice neke* $(0-1)$ *matrice A jednak je maksimalnom broju nezavisnih jedinica te matrice.*

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po broju jedinica u $(0-1)$ matrici A. Označimo sa H skup "pozicija" jedinica matrice A, tj.

$$H = \{(i, j) \mid a_{i,j} = 1\}.$$

Nadalje skup H sa n elemenata, $|H| = n$, označavaćemo kraće sa H_n.

[3]Dénes König, mađarski matematičar (1884-1944)
[4]Jenö Elek Egerváry, mađarski matematičar (1891-1958)
[5]Harold Williem Kuhn, američki matematičar (1925-2014)
[6]U ovom radu koristi se matrična formulacija, kasnije je predstavljena i u teoriji grafova.

- Baza: Ako imamo samo jednu jedinicu u matrici A, odnosno ako imamo H_1, teorema očigledno važi.
- Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svako H_k, gde je $k \leq n$.
- Indukcijski korak: Dokazujemo teoremu za slučaj kada imamo H_{n+1}.

  Skup H_n dobijamo tako što skupu H_{n+1} oduzmemo jedan elemenat. Oduzeti jedan elemenat skupu H_n znači da jednu jedinicu pretvorimo u nulu.

  Teorema važi za svaki skup H_n. Označimo sa p minimalan broj linija koje su potrebne za pokrivanje svih jedinica i sa q maksimalan broj nezavisnih jedinica matrice.

  U matrici A brojevi p i q ne mogu da se smanje, pa ostaje da pokažemo da ili se istovremeno ne menjaju, ili se istovremeno povećavaju za jedan.

  Mesta na kojima su jedinice u matrici, u odnosu na minimalan pokrivač linija (koji sadrži p linija) za H_n, možemo podeliti u dve klase:

  1. ona koja su pokrivena sa ovim linijama i
  2. ona koja nisu pokrivena sa ovih p linija.

  Dokazaćemo da ako jedinicu koju pretvaramo u nulu uzmemo iz 1. klase, onda se brojevi p i q ne menjaju za skup H_{n+1}, a ako uzmemo iz 2. klase, onda se i p i q povećavaju za jedan.

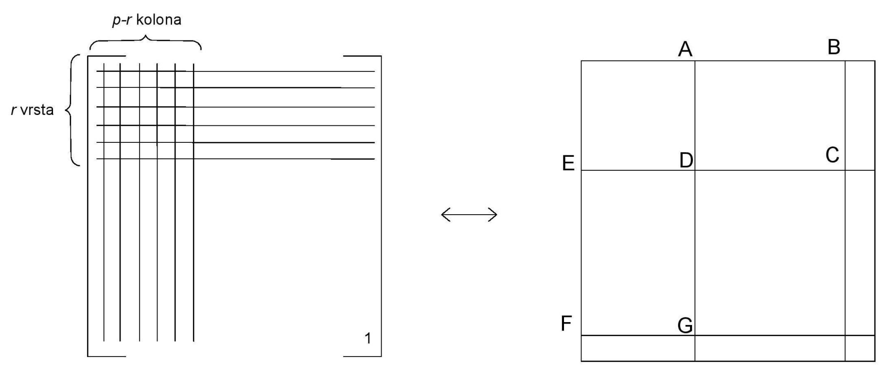
  - Neka je skup H_n dobijen tako da skupu H_{n+1} oduzmemo elemenat iz 1. klase. Znamo da je za skup H_n, minimalan broj linija koji je potreban za pokrivanje jedinica, p i znamo da je nova jedinica u H_{n+1} pokrivena sa ovim linijama. Sledi da se p ne menja u H_{n+1}. Sa druge strane, kako znamo da H_{n+1} možemo pokriti sa p linija, onda po Dirichletovom[7] principu ne možemo izabrati više od $p(= q)$ nezavisnih jedinica, tj. ni q se ne menja.
  - Neka je skup H_n dobijen tako da skupu H_{n+1} oduzmemo elemenat iz 2. klase. Kako za skup H_n minimalni pokrivač sadrži p elemenata, a $(n + 1)$. elemenat smo birali tako da sa ovim linijama ne možemo da ga pokrijemo, onda za H_{n+1} minimalni pokrivač sadrži

[7] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, nemački matematičar (1805-1859)

jednu liniju više (koji će pokriti $(n+1)$. elemenat) od minimalnog pokrivača za H_n. Odnosno minimalni pokrivač za skup H_{n+1} sadrži $p+1$ liniju. Sa druge strane treba da dokažemo da u skupu H_n uvek možemo naći $p(=q)$ jedinica, koje će sa $(n+1)$. elementom činiti nezavisan skup jedinica od $p+1$ elemenata.

Izaberimo jedan minimalni pokrivač za skup H_n, koji onda sadrži p linija. Od tih linija r su vrste, a $p-r$ su kolone. Elementarnim transformacijama[8] matricu tranformišemo u sledeći oblik [Slika 2.]:

* $(n+1)$. elemenat koji je iz 2. klase se nalazi na mestu (n,n) u matrici,
* liinje iz minimalnog pokrivača za H_n su na drugom kraju matrice, tj. čine prvih r vrsta i prvih $p-r$ kolona.



Slika 2.

Sada u $ABCD$ kvadratni deo sa slike spada r vrsta iz minimalnog pokrivača za H_n. Ako bi pretpostavili da jedinice u ovom kvadratu možemo pokriti sa $r-1$ linija, onda dobijamo da tih $r-1$ linija + n. kolona + prvih $p-r$ kolona čine takav minimalni pokrivač od p linija za skup H_n, za koji važi da pokrije i $(n+1)$. dodati element.

[8]elementarna transformacija matrice ovde znači da dve vrste (kolone) zamene mesta

To je u kontradikciji sa izborom $(n+1)$-og elementa. Odnosno kvadratni deo $ABCD$ sadrži r nezavisnih jedinica.

Analogno, dobijamo da kvadratni deo $DEFG$ sadrži $p-r$ nezavisnih jedinica.

Sada, iz $ABCD$ imamo r nezavisnih jedinica, iz $DEFG$ $p-r$ nezavisnih jedinica i na mestu (n,n) u matrici imamo $(n+1)$. elemanat, koji je nazavisan sa ovima. Odnosno, ukupno smo dobili $(p-r)+r+1=p+1$ nezavisnih jedinica, pa kako je $p=q$, dobili smo $q+1$ nezavisnih jedinica.

Tako da u ovom slučaju i p i q se povećavaju za jedan.

$\blacksquare$

1.3 Teorema Birkhoff-Von Neumann

Definicija 1.13. Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ čiji su elementi nenegativni realni brojevi se zove *dvostruko stohastička matrica* ako je zbir elemenata svake vrste i svake kolone jednak t, gde je $t \geqslant 0$, tj. ako je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = t, \quad i = 1, 2, ..., n$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = t, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Napomena 1.14. Dvostruko stohastičke matrice zovemo još i *bistohastičke matrice.*

Definicija 1.15. Kvadratna $(0-1)$ matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ se zove *permutaciona matrica reda n* ako se u svakoj vrsti i svakoj koloni pojavljuje tačno jedna jedinica.

Sledeću teoremu su, nezavisno jedan od drugog, dokazali G. Birkhoff[9] (1946) i J. L. Neumann[10] (1953).

Teorema 1.16. *(Birkhoff-Von Neumann) Svaka bistohastička matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ može se predstaviti kao linearna kombinacija permutacionih matrica reda n, tj.*

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_s P_s,$$

gde je $s \geqslant 1$, $P_1, P_2, ..., P_s$ permutacione matrice reda n i $\lambda_i \geqslant 0$.

Dokaz. Pratimo dokaz dat u [14]. Neka je $A = (a_{ij})_{n\times n}$ bistohastička matrica reda n. Označimo sa $\varphi(A)$ broj pozitivnih elemenata u matrici A, tj.

$$\varphi(A) = |\{a_{ij} \in A | a_{ij} > 0\}|.$$

Dokaz izvodimo indukcijom po broju elemenata $\varphi(A)$.
Baza:

[9] Garrett Birkhoff, američki matematičar (1911-1996)
[10] John von Neumann (János Lajos Neumann), mađarski matematičar (1903-1957)

- $\varphi(A) < n$. Kako je A bistohastička matrica, odnosno važi da

  $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = t, i = 1, 2, ..., n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = t, j = 1, 2, ..., n,$$

  sledi da $t = 0$. To znači da je $\varphi(A) = 0$, odnasno A je nula matrica.

  Tada A možemo predstaviti kao proizvod $A = 0 \cdot P$, gde je P proizvoljna permutaciona matrica reda n.

- $\varphi(A) = n$. Kako je A bistohastička matrica, sledi da svaka vrsta i svaka kolona sadrži tačno jedno $t > 0$.

  Tada matricu A možemo predstaviti kao proizvod $A = t \cdot P^{'}$, gde je $P^{'}$ odgovarajuća permutaciona matrica reda n.

Odnosno, dobili smo, ako je $\varphi(A) \leqslant n$, tada teorema važi.
Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo da je tvrđenje iz teoreme ispunjeno za svaku bistohastičku matricu B reda n, za koju važi da je

$$n \leqslant \varphi(B) < \varphi(A).$$

Indukcijski korak: Dokazujemo za $\varphi(A) > n$. Uvedimo oznake: V_i za i-tu vrstu, C_i za i-tu kolonu i definišimo skup S_i na sledeći način:

$$S_i = \{j | a_{ij} > 0\},$$

gde $i = 1, 2, ..., n$.

Dokažimo da familija skupova $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ ima SRP (sistem različitih predstavnika).

Pretpostavimo suprotno, da $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ nema SRP. Tada po Hallovoj teoremi nije ispunjen Hallov uslov, pa sledi da postoje skupovi $S_{i_1}, S_{i_2}, ..., S_{i_k}$ iz $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ za koje važi da

$$|S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}| = l < k. \tag{6}$$

Odnosno, svi nenula elementi iz vrsta $V_{i_1}, V_{i_2}, ..., V_{i_k}$ će biti u nekih l kolona, tj. u $C_{j_1}, C_{j_2}, ..., C_{j_l}$. Označimo zbirove elemenata u vrsti V_i sa $s(V_i)$ i zbir elemenata u koloni C_i sa $s(C_i)$. Kako je A bistohastička matrica, znamo da je zbir elemenata u vrsti (koloni) jednako sa t. Tako dobijamo da je

$$s(V_{i_1}) + ... + s(V_{i_k}) = kt,$$

i

$$s(C_{i_1}) + ... + s(C_{i_l}) = lt.$$

Kako smo kolone $C_j, j \in \{i_1, i_2, ..., i_l\}$ birali tako da sadrže sve nenula elemente iz vrsta $V_j, j \in \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, sledi da je

$$kt \leqslant lt.$$

Pošto je t pozitivna konstanta, sledi

$$k \leqslant l.$$

Ovo je u kontradikciji sa (6), pa sledi $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ ima SRP.

Neka je $(j_1, j_2, ..., j_n)$ SRP za familiju $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$. Na osnovu definicije skupova $S_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ znamo da su elementi a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n} pozitivni. Označimo sa λ_1 minimum od ovih elemenata, tj.

$$\lambda_1 = \min\{a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n}\},$$

i sa $P_1 = \{p_{ij}\}$ permutacionu matricu reda n, sa elementima

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & j \neq j_i, \\ 1, & j = j_i. \end{cases}$$

Posmatrajmo novu matricu $A^{'}$ dobijenu od A na sledeći način:

$$A^{'} = A - \lambda_1 P_1. \tag{7}$$

Ova matrica je bistohastička, a konstanta $t^{'}$ jednaka je $t - a$. Na osnovu definicije skupova $S_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ znamo da $\lambda_1 > 0$, pa sledi da matrica $A^{'}$ ima manje nenula elemenata od matrice A, tj. važi:

$$\varphi(A^{'}) \leqslant \varphi(A) - 1 < \varphi(A).$$

Tada na osnovu indukcijske hipoteze, matricu $A^{'}$ možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju permutacionih matrica reda n, tj.

$$A^{'} = \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_s P_s. \tag{8}$$

Iz (7) i (8) imamo:

$$A - \lambda_1 P_1 = \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_s P_s,$$

tj.

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_s P_s$$

■

1.4 Königova teorema

Definicija 1.17. Neka je $G = (V, E)$ graf. Za skup $L \subseteq V$ kažemo da je *čvorni pokrivač grafa* G, ako svaka grana iz E ima bar jedan čvor u L. Pokrivač L je minimalan, ako za svaki drugi pokrivač L^* grafa G važi da je $|L| \leqslant |L^*|$.

Definicija 1.18. Mečing M je maksimalan ako ne postoji mečing M' u G takav da je $|M'| > |M|$.

Definicija 1.19. Neka je $G = (V, E)$ graf i M mečing u grafu G. *M-alternirajući put* u G je put čije su grane naizmenično u M i u $E \backslash M$.

Za M-alternirajući put kažemo da je *M-proširen* ako mu krajnji čvorovi nisu pokriveni u M.

Napomena 1.20. Nadalje ćemo M-proširen put označavati sa $\triangleleft M$-put $\triangleright$.

Teorema 1.21 (König, 1931)**.** *Neka je $G = (A, B)$ (konačan) bipartitan graf. Neka je M maksimalni mečing, a L minimalan pokrivač grafa G. Tada važi $|M| = |L|$.*

Dokaz. Pratićemo Königov dokaz iz [15].

Neka je $M = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ maksimalni mečing u grafu G, odnosno $|M| = m$ i neka je $L = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$ minimalni čvorni pokrivač, odnosno $|L| = l$. Tada za svaku granu $e_i \in M, i \in \{1, 2, ..., m\}$ važi da je bar jedan kraj u čvorovima $x_1, x_2, ..., x_l$. Za pokrivanje svake grane iz M potreban je jedan čvor iz L. A to znači da skup L mora sadržati bar m različitih čvorova, tj. $l \geqslant m$.

Dokazaćemo da je $m \leqslant l$, tj. da sa m čvorova možemo da pokrijemo sve grane grafa G. Neka je G bipartitan graf s klasama A i B. Neka je $M = \{u_1v_1, u_2v_2, ..., u_mv_m\}$ maksimalan mečing u grafu G, pri čemu $u_i \in A$ i $v_i \in B$. Neka je $A' = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ i $B' = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Tada je $A' \subseteq A$ i $B' \subseteq B$.

Za dalji dokaz potrebna nam je sledeća lema.

Lema 1.22. *U grafu G ne postoji takav $\triangleleft M$-put $\triangleright$ da povezuje neki čvor iz skupa $A - A'$ sa nekim čvorom iz skupa $B - B'$.*

Dokaz leme. Pretpostavimo suprotno, da postoji takav $\triangleleft M$-put $\triangleright$ P. Tada iz gore definisanog mečinga M možemo dobiti novi mečing M' na sledeći način:

$$M' = M \triangle E(P) = M \setminus E(P) \cup E(P) \setminus M.$$

Ovako dodajemo za jedan više granu nego što smo izvadili, pa dobijeni mečing M' koji sadrži $m+1$ granu za koje važi da nikoje dve nemaju zajednički čvor.

A to je u kontradikciji sa izborom mečinga M. ■

Definišimo podskup W skupa $A^{'} + B^{'}$ na sledeći način. Za $i = 1, ..., m$ neka je

- $w_i = v_i$, ako postoji $\triangleleft M$-put$\triangleright$ koji povezuje neki čvor iz skupa $A - A^{'}$ sa čvorom v_i,
- $w_i = u_i$, ako takav $\triangleleft M$-put$\triangleright$ ne postoji,

Očigledno, skup W sadrži jedan kraj svake grane iz M. Dokazaćemo da je skup W čvorni pokrivač u G. Pokazaćemo da za svaku granu $uv \in E(G)$, gde $u \in A$ i $v \in B$, važi da ili u pripada W ili v pripada W. Posmatraćemo četiri slučaja.

1. $u \in A - A^{'}$ i $v \in B - B^{'}$. Dodajući granu uv mečingu M, dobijamo mečing $M^{'}$ sa $m + 1$ grana. Kontradikcija sa pretpostavkom da je M maksimalan mečing. Drugim rečima ovaj slučaj je nemoguć.

2. $u \in A - A^{'}$ i $v \in B^{'}$. Tada je $v = v_i$, gde $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Tada je grana uv jedan $\triangleleft M$-put$\triangleright$ koji povezuje čvor u iz skupa $A - A^{'}$ sa čvorom v_i. Na osnovu definicije skupa W je $v = v_i$.

3. $u \in A^{'}$ i $v \in B - B^{'}$. Tada je $u = u_i$, gde $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Pretpostavimo da postoji $\triangleleft M$-put$\triangleright$ koji povezuje neki čvor $u^{'}$ iz skupa $A - A^{'}$ sa čvorom v_i. Ako tom putu dodamo grane $v_i u_i$ i $u_i v$ dobijamo $\triangleleft M$-put$\triangleright$ koji povezuje čvor $u^{'}$ iz skupa $A - A^{'}$ sa čvorom v iz skupa $B - B^{'}$. Iz leme 1.22. sledi da je to nemoguće. Dakle, ne postoji ni $\triangleleft M$-put$\triangleright$ koji povezuje neki čvor $u^{'}$ iz skupa $A - A^{'}$ sa čvorom v_i. Stoga $u = u_i$ pripada skupu W.

4. $u \in A^{'}$ i $v \in B^{'}$. Neka je $u = u_i$ i $v = v_j$, $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$. Ako je $i = j$, onda ili $u = u_i$ ili $v = v_i$ pripada skupu W. Pretpostavimo da je $i \neq j$. Tada ili $u = u_i$ pripada skupu W i dokaz je gotov ili postoji $\triangleleft M$-put$\triangleright$ koji povezuje neki čvor $u^{'}$ iz skupa $A - A^{'}$ sa čvorom v_i. Kada $\triangleleft M$-putu$\triangleright$ dodamo grane $v_i u_i$ i $u_i v_j$ dobijamo $\triangleleft M$-put$\triangleright$ koji povezuje čvor $u^{'}$ iz skupa $A - A^{'}$ sa čvorom v_j, pa sledi da $v = v_j$ pripada skupu W.

Sa ovim smo dokazali da ako je M maksimalni mečing u bipartitnom grafu G, gde $|M| = m$, onda sa m čvorova možemo da pokrijemo sve grane grafa G. Tada za minimalni pokrivač L, gde je $|L| = l$, važi da je $l \leqslant m$. ■

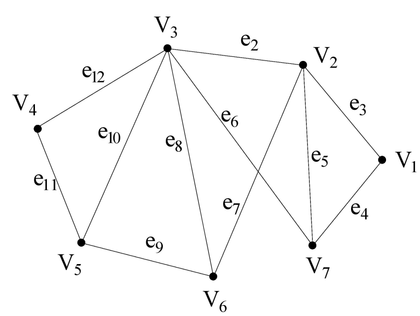
1.5 Mengerova teorema

Mengerova teorema potiče iz topologije. Nosi ime po austrijsko-američkom matematičaru Karlu Mengeru $(1902 - 1985)$. Kasnije se ispostavilo da je to jedna od izuzetno vežnih teorema važnih teorema teorije grafova.

Sledeće definicije su nam potrebne za formulaciju i dokaz Mengerove teoreme.

Definicija 1.23. *Šetnja* u grafu G je niz $v_0e_1v_1e_2v_2...v_{k-1}e_kv_k$ čvorova i grana grafa G takav da je $e_i = v_{i-1}v_i$ za sve $i \in 1,...,k$. Čvorovi v_0 i v_k su krajevi šetnje. *Staza* je šetnja u kojoj su sve grane različite (čvorovi mogu da se ponavljaju). Šetnja kod koje su svi čvorovi različiti zove se *put*. Put sa granom koja spaja krajeve puta naziva se *kontura*.

Primer 1.24. Posmatrajmo sledeći graf $G = (V, E)$, sa Slike 3., koji je zadat sa skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ i skupom grana $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.



Slika 3.

Dajemo primer

- ⋆ šetnje:

$$v_5e_{10}v_3e_6v_7e_4v_1e_4v_7e_6v_3e_8v_6$$

- ⋆ staze:

$$v_5e_{10}v_3e_6v_7e_5v_2e_2v_3e_8v_6$$

- ⋆ puta: $v_5e_{10}v_3e_6v_7e_5v_2e_7v_6$

od čvora v_5 do čvora v_6.

Definicija 1.25. Dva čvora u i v grafa G su povezana ako postoji (u, v)-put u G koji ih spaja. Graf G je *povezan* ako za svaka dva čvora grafa postoji put koji ih povezuje.

Teorema 1.26. *Povezanost čvorova grafa je relacija ekvivalencije na skupu $V(G)$.*

Definicija 1.27. *Komponenta povezanosti grafa* G je klasa ekvivalencije u odnosu na povezanost. Broj komponenti grafa G označavamo sa $\omega(G)$.

Napomena 1.28. Graf G je povezan ako i samo ako ima tačno jednu komponentu, to jest $\omega(G) = 1$.

Definicija 1.29. *Rastojanje između čvorova* u *i* v grafa G je dužina najkraćeg (u, v)-puta u G, a označavamo sa $d_G(u, v)$.

Ako su u grafu G čvorovi u i v u različitim komponentama, onda ne postoji (u, v)-put u G i tada pišemo $d_G(u, v) = \infty$.

Definicija 1.30. *Dijametar* $d(G)$ *(ili poluprečnik)* povezanog grafa G definiše se kao maksimalno rastojanje između dva čvora grafa G. Odnosno $d(G) = max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$.

Definicija 1.31. *Čvorni separator* u grafu G je skup čvorova $P \subseteq V(G)$, takav da je $G - P$ nepovezan graf.

Definicija 1.32. *Granski separator* u grafu G je skup grana $S \subseteq V(G)$, takav da je $G - S$ nepovezan graf.

Definicija 1.33. Neka je $G = (V, E)$ graf i $u, v \in V$. Za (u, v)-puteve P_1 i P_2 u grafu G kažemo da su disjunktni (u, v)-putevi ako osim u i v nemaju nijedan drugi zajednički čvor.

Definicija 1.34. Neka je $G = (V, E)$ graf i $u, v \in V$. Za (u, v)-puteve P_1 i P_2 u grafu G kažemo da su granski disjunktni (u, v)-putevi ako nemaju nijednu zajedničku granu.

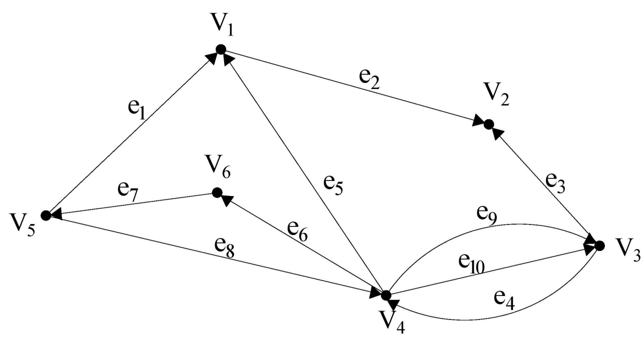
Definicija 1.35. Sa $p(u, v)$ označavamo najveći broj k takav da postoje (u, v)-putevi $P_1, P_2, ..., P_k$ u grafu G koji su (granski) disjunktni.

Definicija 1.36. Neka je $G = (V, E)$ graf, i neka $uv \notin E$. Tada broj elemenata minimalnog čvornog separatora S za koji važi da su čvorovi u i v u različitim komponentama povezanosti grafa $G - S$ označava sa $q(u, v)$.[11] U ovom slučaju kažemo za skup S da je $(u - v)$ *separator.*

Definicija 1.37. *Orijentisan graf ili digraf* $D = (V(D), E(D))$ je uređeni par, gde je $V(D)$ konačan neprezan skup čvorova, a $E(D)$ skup grana. Grane su uređeni parovi čvorovi iz $V(D)$. Ukoliko je $e = (u, v) \in E(D)$ kažemo da je grana e orijentisana od u do v ili da e vodi od u do v.

[11]Ako je $uv \in E$, tada ovakav skup S ne postoji.

Napomena 1.38. Većina pojmova iz teorije neorijentisanih grafova direktno se prenose na orijentisane grafove, kao što su poddigraf, orijentisana staza, orijentisan put, orijentisana kontura, itd. Ali postoje i pojmovi koji se sreću isključivo kod orijentisanih grafova i posledica su orijentacije.



Slika 4. Primer digrafa

Teorema 1.39 (Menger, 1927). *Neka je $G = (V, E)$ graf. Neka su u i v različiti nesusedni čvorovi grafa G. Tada je maksimalan broj disjunktnih (u, v)-puteva jednak broju elemenata minimalnog $(u-v)$ separatora. Odnosno, $p(u, v) = q(u, v)$.*

U zavisnosti od toga da li posmatramo orijentisan ili neorijentisan graf, i u zavisnosti od toga da li posmatramo čvorne ili granske disjunktne puteve, postoje četiri formulacije Mengerove teoreme. Mengerova teorema je publikovana 1927. godine, i ta teorema odgovara formulaciji teoreme za neorijentisan graf, gde posmatramo disjunktne puteve, pa ćemo i mi ovaj slučaj dokazivati. Ove četiri formulacije teoreme su međusobno ekvivalentne, dokaz se može naći u [2].

Dokaz. Pratićemo Diracov [12] dokaz za ovu teoremu koji je objavljen u [6].

Dokažimo prvo da je $p(u, v) \leqslant q(u, v)$. Neka je S proizvoljan $(u - v)$ separator u grafu G. Tada svaki (u, v)-put prolazi kroz neku tačku iz S, pa u G postoji najviše $|S|$ puteva od u do v sa disjunktnim unutrašnjostima. Kako u G postoji minimalni $(u-v)$ separator S (tj. takav da je $|S| = q(u, v)$), sledi navedena nejednakost.

Dokažimo i obrnutu nejednakost, da je $q(u, v) \leqslant p(u, v)$. Neka je M minimalni $(u - v)$ separator (tj. $|M| = q(u, v)$). Dovoljno je dokazati da u G

[12] Gabriel Andrew Dirac, mađarski-engleski matematičar (1925-1984)

postoji $q(u,v)$ disjunktnih (u,v)-puteva. Ako je $q(u,v) = 1$, onda tvrđenje trivijalno važi. Pretpostavimo da nije tačno za neko $q(u,v) > 1$. Neka je h najmanji takav $q(u,v)$, i neka je F graf sa minimalnim brojem čvorova za koji je tvrđenje netačno za h. Uklanjamo grane grafa F dok god dobijemo takav graf G za koji važi da moramo oduzeti minimum h čvora kako bi razdvojili čvorove u i v. Tada za svaku granu $e = xy$ grafa G važi da je u grafu $G - e$ za razdvajanje čvorova u i v potreban $(u - v)$ separator od $h - 1$ čvorova.

Ispitajmo osobine grafa G. Na osnovu definicije grafa G, za svaku granu e postoji skup od $h-1$ čvorova koji je $(u-v)$ separator u grafu $G-e$, označimo taj skup sa $S(e)$. Sada $G - S(e)$ sadrži najmanje jedan (u,v)-put, pošto za razdvajanje čvorova u i v u grafu G treba najmanje h čvorova. Svaki takav (u,v)-put mora da sadrži granu $e = xy$, pošto to nije put u $G - e$. Prema tome $x, y \notin S(e)$. Ako $x \neq u, v$ onda skup $S(e) \cup x$ je $(u - v)$ separator u grafu G.

Ako postoji čvor w, susedna i sa u i sa v u grafu G, onda je u grafu $G - w$ potreban $(u - v)$ separator od $h - 1$ čvorova. Prema tome disjunktnih (u,v)-puteva ima $h - 1$. Vrativši w, u grafu G imamo tačno h disjunktnih (u,v)-puteva. Tako da smo pokazali da:

$$\text{Ne postoji čvor koja je susedna i sa } u \text{ i sa } v \text{ u grafu } G. \tag{9}$$

Neka je W bilo koja kolekcija od h čvorova koja razdvaja čvorove u i v u grafu G. Tada je $(u-W)$-put put koja povezuje čvor u sa nekim čvorom $w_i \in W$ i ne sadrži nijedan drugi čvor iz skupa W. Označimo sa P_u kolekciju svih $(u - W)$-puteva i analogno sa P_v kolekciju svih $(W - v)$-puteva. Onda svaki (u,v)-put započinje sa elementom iz skupa P_u i završava se sa elementom iz skupa P_v, jer svaki takav put sardrži jednu tačku iz W. S druge strane, putevi u P_u i P_v imaju zajedničku tačku sadržanu u W i nemaju nijedan drugi zajednički čvor. Jer je svaki w_i sadržan u najmanje jednom putu u svakoj kolekciji (P_u i P_v) i ako bi još jedna tačka bila i u $(u - W)$-putu i u $(W - v)$-putu, onda bi tu postojala (u,v)-put koja ne sadrži nijedan čvor iz W. Tada je, ili $V(P_u) - W = \{u\}$ ili $V(P_v) - W = \{v\}$. Jer u protivnom, oboje su, i $P_u + \{w_1v, w_2v, ...\}$ i $P_v + \{uw_1, uw_2, ...\}$ grafovi sa manje čvorova od grafa G, u kojima su u i v nesusedni čvorovi koji su povezani sa h disjunktnih puteva i stoga u svakom postoje h disjunktna (u,v)-puta. Kombinovanjem elemenata iz P_u i iz P_v možemo da konstruišemo h disjunktnih (u,v)-puteva u grafu G, i onda imamo kontradikciju. Dakle, dokazali smo:

$$\text{Bilo koja kolekcija } W \text{ od } h \text{ čvorova koja je } (u-v) \text{ separator je susedna ili sa } u \text{ ili sa } v. \tag{10}$$

Neka je $P = \{u, x_1, x_2, ..., v\}$ najkraći (u, v)-put u G i neka je $x_1x_2 = e$. Na osnovu (9), $x_2 \neq v$. Skup $S(e) = \{t_1, t_2, ..., t_{h-1}\}$ je $(u-v)$ separator u grafu $G-e$. Iz (9) imamo da $x_1v \notin G$, pa na osnovu (10) uz $W = S(e) \cup \{x_1\}$ dobijamo da $ut_i \in G$ za svako i. Iz ovoga i prema (9) zaključujemo da je $t_iv \notin G$ za svako i. Međutim, ako umesto toga izaberemo da $W = S(e) \cup \{x_2\}$, onda na osnovu (10) imamo da $ux_2 \in G$, pa smo onda našli kraći put od P, a to je u kontradikciji sa izborom skupa P. ■

1.6 Dilworthova teorema

Definicija 1.40. Neka je ρ binarna relacija na skupu A. Relacija ρ je *relacija poretka (ili relacija parcijalnog uređenja)* na skupu A ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Uređen par (A, ρ) naziva *parcijalno uređen skup.*

Definicija 1.41. Neka je (A, ρ) parcijalno uređen skup.

- Kažemo da je on *totalno uređen (lanac)* ako su svaka dva elementa uporediva, tj. ako za sve elemente $a, b \in A$ važi $(a, b) \in \rho$ ili $(b, a) \in \rho$.
- Kažemo da je on *antilanac* ako nikoja dva elementa nisu uporediva, tj. ako za sve elemente $a, b \in A$ važi $(a, b) \notin \rho$ i $(b, a) \notin \rho$.

Definicija 1.42. Za lanac (antilanac) kažemo da je *maksimalan lanac (maksimalan antilanac)*, ako ne postoji lanac (antilanac) koji ga sadrži.

Definicija 1.43. Neka je (A, ρ) parcijalno uređen skup.

- $a \in A$ je *najmanji element* skupa A, ako za sve $x \in A$ važi $(a, x) \in \rho$.
- $a \in A$ je *najveći element* skupa A, ako za sve $x \in A$ važi $(x, a) \in \rho$.
- $a \in A$ je *minimalni element* skupa A, ako ne postoji element $x \in A$ za koji je $(x, a) \in \rho$ i $x \neq a$.
- $a \in A$ je *maksimalni element* skupa A, ako ne postoji element $x \in A$ za koji je $(a, x) \in \rho$ i $x \neq a$.

Teorema 1.44. *(Dilworth[13], 1950) Neka je $(S, \preccurlyeq)$ konačan parcijalno uređen skup. Ako je n veličina maksimalnog antilanca, onda postoji particija skupa S u tačno n lanaca.*

Za dokaz treba prvo da dokažemo jednu lemu:

Lema 1.45. *Neka je $(S, \preccurlyeq)$ konačan parcijalno uređen skup za koji važi da je $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$ particija skupa S na totalno uređene podskupove (tj. C_i je lanac za svako i). Ako je A antilanac, tada najviše jedan elemenat iz A može biti sadržan u C_i za $\forall i$.*

[13] Robert Palmer Dilworth, američki matematičar (1914-1993)

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji lanac C_i koji sadrži elemente x i y iz antilanca A.

$$\text{Kako } x \text{ i } y \text{ pripadaju } A, \text{ to znači da su oni neuporedivi.} \tag{11}$$

$$\text{Kako } x \text{ i } y \text{ pripadaju } C_i, \text{ to znači da su oni uporedivi.} \tag{12}$$

(11) i (12) daju kontradikciju, pa sledi $|A \cap C_i| \leqslant 1$, za $\forall i$. ■

Dokaz. Pratićemo Galvinov[14] dokaz iz [10]. Radimo indukcijom po broju elemenata skupa S.

- Baza: Ako je $|S| = 0$ ili $|S| = 1$, onda teorema važi.
- Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo da za $2 \leqslant |S| < m$ tvrđenje iz teoreme važi.
- Indukcijski korak: Dokazujemo za $|S| = m$. Neka je x maksimalni element u skupu S. Tada je $(S - \{x\}, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup sa $|S| - 1$ elementa, pa po indukcijskoj hipotezi znamo da u skupu $S - \{x\}$ u kome maksimalni antilanac ima k elemenata, postoji particija skupa $S - \{x\}$ na lance $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$. Tada ima konačan broj antilanaca od k elemenata, neka su to $A_1, A_2, ..., A_r$. Prema gore navedenoj lemi svaki presek oblika $C_i \cap A_j$ sadrži najviše jedan element, gde $i \in \{1, 2, ..., k\}$ i $j \in \{1, 2, ..., r\}$. S obzirom da

  $$(C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k) \cap A_j = k,$$

  zaključujemo da preseci oblika $C_i \cap A_j$ sadrže tačno jedan element, označimo ih sa $C_i \cap A_j = \{a_{ij}\}$. Uvedimo sledeće oznake: $a_i = \max_j a_{ij}$, gde je $j \in \{1, 2, ..., r\}$ i $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

  Dokažimo da je A antilanac. Neka su a_i i $a_{i'}$ iz skupa A. Tada su oni oblika:

  $$(a_i =) a_{ij} = \max_l a_{il} \qquad \text{i} \qquad (a_{i'} =) a_{i'j'} = \max_l a_{i'l}.$$

  Kako je $a_{ij} = \max_l a_{il}$, znamo da $a_{ij'} \preccurlyeq a_{ij}$. Pošto su $a_{ij'}$ i $a_{i'j'}$ u skupu $A_{j'}$, oni su neuporedivi. Imamo tri mogućnosti:

[14] Frederick William Galvin, američki matematičar (1936-)

1. $a_{i'j'} \preccurlyeq a_{ij}$.

   Zajedno sa uslovom $a_{ij'} \preccurlyeq a_{ij}$ dobijamo da mora biti ili $a_{ij'} \preccurlyeq a_{i'j'}$ ili $a_{i'j'} \preccurlyeq a_{ij'}$, a to je kontradikcija sa uslovom da su oni neuporedivi.

2. $a_{ij} \preccurlyeq a_{i'j'}$.

   Zajedno sa uslovom $a_{ij'} \preccurlyeq a_{ij}$, zbog tranzitivnosti relacije dobijamo: $a_{ij'} \preccurlyeq a_{ij} \preccurlyeq a_{i'j'}$, tj. $a_{ij'} \preccurlyeq a_{i'j'}$, a to je kontradikcija, jer su oni neuporedivi.

3. $a_{i'j'}$ i a_{ij} su neuporedivi.

Kako ostaje samo mogućnost da su $a_{i'j'}$ i a_{ij} neuporedivi, sledi da je A antilanac.

Sada, kako smo u $S - \{x\}$ konstruisali antilanac A sa k elemenata, u odnosu na uporedivost elemenata iz A sa x imamo dve mogućnosti:

1. x nije uporediv ni sa jednim elementom iz A.

   Tada je $A' = A \cup \{x\}$ antilanac u S. Ovo je maksimalan antilanac u S, jer ako bismo pretpostavili da nije, i da postoji antilanac sa $k+2$ ili sa više elemenata, onda bismo izvlačenjem x-a iz S, dobili u $S - \{x\}$ antilanac sa $k+1$ elementom, što je nemoguće. Tako da je A' maksimalan antilanac u S, a odgovarajuća particija skupa S na tačno $k+1$ lanaca je:

   $$S = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k \cup \{x\}.$$

2. x je uporediv sa nekim elementom iz A.

   Odnosno, postoji $a_i \in A$, takav da su a_i i x uporedivi. Kako je x maksimalan elemenat u S ne može biti $x \preccurlyeq a_i$, pa mora biti $a_i \preccurlyeq x$. Na osnovu definicije elementa a_i, znamo da je a_i najveći elemenat u lancu C_i, koji je sadržan u nekom od antilanaca sa k elemenata u skupu $S - \{x\}$. Neka je:

   $$C = \{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir}\} \cup \{x\}.$$

   S obzirom da je

   $$\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir}\} \subseteq C_i,$$

   to je lanac, i kako za $\forall j$ važi da $a_{ij} \preccurlyeq a_i \preccurlyeq x$, dobijamo da je i C lanac. Posmatrajmo parcijalno uređen skup $(S - C, \preccurlyeq)$. U ovom skupu nemamo antilanaca sa k elemenata (jer svaki antilanac A_j iz $S-\{x\}$ sadrži tačno jedan elemenat a_{ij} iz C). Međutim, u $S-C$ je sadržano nekoliko antilanaca sa $k-1$ elemenata, s obzirom da svaki $A_j - \{a_{ij}\}$ leži u $S - C$. Kako skup $S - C$ ima maksimalan antilanac sa $k-1$ elemenata, na osnovu indukcijske hipoteze skup $S - C$ možemo rastaviti na particiju u tačno $k - 1$ lanaca:

$$S - C = C_1^{'} \cup C_2^{'} \cup ... \cup C_{k-1}^{'}.$$

Onda, skup S možemo rastaviti na particiju u k lanaca:

$$S = C_1^{'} \cup C_2^{'} \cup ... \cup C_{k-1}^{'} \cup C.$$

Po gornjoj lemi sledi da u S ne postoji antilanac sa više od k elemenata, tj. A je maksimalan antilanac.

∎

1.7 Teorema Ford-Fulkerson

Definicije koje su ovde nevedene se mogu naći u [4].

Definicija 1.46. Neka je $G = (V, E)$ orijentisan graf sa osobinama:

- svakoj grani $(u, v) \in E$ pridružen je nenegativan realan broj $c(u, v)$ koji se zove kapacitet grane (u, v). Zapravo, kapacitet c je funkcija

  $$c : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

  Ako $(u, v) \in E$, onda $(v, u) \notin E$. Ako $(u, v) \notin E$, onda uzimamo da je $c(u, v) = 0$, tako da možemo pisati

  $$c : V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

- u orijentisanom grafu G izdvojimo dva čvora: $s-$izvor i $t-$ponor.

Uređenu četvorku $(G; c; s; t)$ zovemo *mreža.*

Kapacitet grane (u, v) je mera toka koji može biti propušten kroz granu. Za svaki čvor $v \in V \setminus \{s, t\}$ pretpostavlja se da postoji put $s...v...t$ u grafu. U ovom radu bavićemo se samo slučajem kada imamo jedan izvor i jedan ponor.

Definicija 1.47. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža. *Tok (protok) u mreži* je funkcija $f : V \times V \to \mathbb{R}$ sa osobinama:

- *ograničenje kapaciteta* $-$ tok kroz granu (u, v) ne može biti veće od kapaciteta te grane, tj.

  $$(\forall u, v \in V) \qquad f(u, v) \leqslant c(u, v), \tag{13}$$

- *konzervacija protoka* $-$ za svaki čvor (osim izvora i ponora) ukupan tok koji ulazi jednak je toku koji izlazi iz tog čvora, tj.

  $$(\forall u, v \in V \setminus \{s, t\}) \qquad \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v). \tag{14}$$

  U izvor s ne ulazi nijedna grana, tako da imamo samo protok iz s. Slično, iz ponora t ne izlazi nijedna grana, pa imamo samo protok u t. Za svaka dva čvora u i v važi da je

  $$f(u, v) = -f(v, u).^{15}$$

[15] Iz ovoga sledi da uslov (14) možemo pisati i u sledećem obliku: za svako $u \in V \setminus \{s, t\}$ važi $\sum_{u,v \in V} f(u, v) = 0$.

Ako $(u, v), (v, u) \notin E$, onda u mreži ne postoji tok iz u u v, pa je $f(u, v) = 0$.

Definicija 1.48. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža i funkcija $f(u, v)$ protok u mreži. *Vrednost protoka u mreži* definišemo kao:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s), \tag{15}$$

tj. kao razliku ukupnog protoka iz i u izvor s. Kako izvor u mreži nema protok u sebe,[16] dobijamo da je

$$\sum_{v \in V} f(v, s) = 0.$$

Napomena 1.49.

- Zbog (14) znamo da čvorovi iz $V \setminus \{s, t\}$ ne mogu biti početni čvorovi protoka, jer tok koji izlazi iz čvora može biti samo onoliko koliko uđe u čvor. Tako da je izvor jedini čvor u grafu u kojem kreće protok.
- Na osnovu prethodne definicije vrednost protoka u mreži $|f|$ jednak je ukupnom protoku iz izvora.

Teorema 1.50. *Neka je $(G; c; s; t)$ mreža i $f(u, v)$ protok u mreži. Vrednost protoka u mreži jednak je sa*

$$|f| = \sum_{v \in V} f(v, t). \tag{16}$$

Dokaz. Po definiciji, vrednost protoka[17] jednak je sa

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v).$$

To možemo zapisati u sledećem obliku

$$|f| = f(s, V) = f(V, V) - f(V \setminus \{s\}, V).$$

[16]Druga suma u jednačini postaje različita od nule kada se uvodi pojam reziduuma u protoku mreža, jer tada imamo i protok u izvor.

[17]Nadalje umesto $\sum_{v \in V} f(s, v)$ pišemo samo $f(s, V)$.

Kako je $f(V,V) = 0$, dobijamo da je $|f| = -f(V \setminus \{s\}, V)$, što je jednako sa

$$|f| = -f(V \setminus \{s\}, V) = f(V, V \setminus \{s\}).$$

A ovo možemo zapisati u obliku

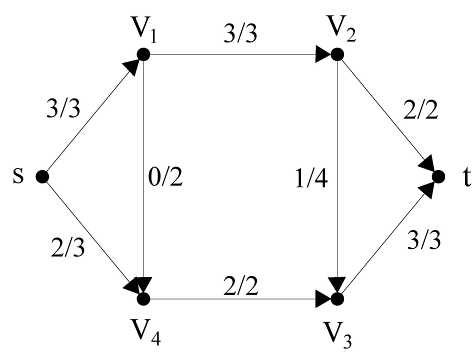
$$|f| = f(V,t) - f(V, V \setminus \{s,t\}),$$

tj.

$$|f| = f(V,t) + f(V \setminus \{s,t\}, V),$$

a odavde, zbog konzervacije protoka sledi da je $f(V \setminus \{s,t\}, V) = 0$, pa dobijamo da važi (16). ■

Primer 1.51. Neka je na slici prikazan orijentisan graf $G = (V,E)$, gde je $(G;c;s;t)$ mreža i funkcija $f(u,v)$ protok u mreži:



Slika 5.

Svaka grana (u,v) je označena sa brojevima oblika $f(u,v)/c(u,v)$. Vrednost maksimalnog protoka u ovoj mreži jednak je sa

$$|f| = 3 + 2 = 5.$$

Definicija 1.52. Neka je $G = (V,E)$ graf i $(G;c;s;t)$ mreža. *Rez* je particija skupa V na podskupove S i T, tako da $s \in S$ i $t \in T$.

Ako je f protok u G, onda je *ukupan tok* $f(S,T)$ *preko reza* (S,T)*:*

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u).$$

Kapacitet reza (S, T) definišemo na sledeći način:

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v).$$

Minimalni rez je rez čiji je kapacitet minimalan nad svim rezovima u mreži.

Narednu teoremu su dokazali L. R. Ford[18], Jr. i D. R. Fulkerson[19] u radu [9].

Teorema 1.53. *(Ford-Fulkerson,* 1962*) Neka je* $(G; c; s; t)$ *mreža i funkcija* $f(u, v)$ *protok u mreži. Maksimalna vrednost protoka u mreži jednaka je minimalnom kapacitetu reza, tj.*

$$\max_f |f| = \min_{(S,T)} c(S,T).$$

Osnovu ove teoreme daje jedan izveštaj iz 1955. godine napravljen za američko vazduhoplovstvo, gde je modelirana tadašnja evropska železnička mreža, u kojoj železničke uprave su predstavljene čvorovima, a železničke pruge između njih sa granama. U modelu svaka grana dobija kapacitet od 1 tone.

U modelu se tražilo minimalni kapacitet reza i maksimalna vrednost protoka. To što je za vazduhoplovstvo bilo bitno je minimalni kapacitet reza, koji je nađen i dokazano je da nema boljeg od predstavljenog. Za američko vazduhoplovstvo ova informacija je bila značajna, jer ovako su efikasnije mogli planirati vazdušne napade u hladnom ratu.

U ovom izveštaju je istovremeno dat i metod kako u mreži naći minimalni rez.

Za prethodnu teoremu koristi se još naziv Max-flow min-cut teorema ili MFMC teorema. Za dokaz teoreme trebaju nam sledeći pojmovi i rezultati koje izlažemo na osnovu [4].

Prvo dokazujemo da postoji maksimalan protok. Za to koristimo Ford-Fulkersonov algoritam, koji radi tako što iterativno povećava vrednost protoka. Počinje sa tokom $f(u, v) = 0$, za svako u i v iz V, i u svakoj iteraciji dopunjuje tok preko dopunjujuće putanje koju nalazimo u mreži reziduuma G_f, sve dok takva putanja u G_f više ne postoji.

[18]Lester Randolph Ford, američki matematičar (1886-1967)

[19]Delbert Ray Fulkerson, američki matematičar (1924-1976)

Definicija 1.54. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža i funkcija $f(u, v)$ protok u mreži. *Kapacitet reziduuma* definišemo na sledeći način: za svako $u, v \in V$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), & (u,v) \in E, \\ f(v,u), & (v,u) \in E, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 1.55. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža, funkcija $f(u, v)$ protok u mreži i $c_f(u, v)$ kapacitet reziduuma. *Mrežu reziduuma za mrežu* $(G; c; s; t)$ definišemo kao $(G_f; c_f; s; t)$, gde je G_f graf definisan sa $G_f = (V, E_f)$ i

$$E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}.$$

Napomena 1.56. Kako grane u G_f mogu biti grane iz G ili paralelne grane suprotnog smera, zaključujemo da $|E_f| \leqslant 2|E|$.

Definicija 1.57. Neka je $(G_f; c_f; s; t)$ dopunjujuća mreža reziduuma za mrežu $(G; c; s; t)$, funkcija f tok u mreži G, i funkcija f' tok u mreži G_f. *Funkciju dopunjujućeg toka* $f \uparrow f' : V \times V \to \mathbb{R}$ definišemo na sledeći način:

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u), & (u,v) \in E, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Lema 1.58. *Neka je $(G; c; s; t)$ mreža i $f(u, v)$ funkcija protoka u G. Neka je $(G_f; c_f; s; t)$ dopunjujuća mreža reziduuma za G sa funkcijom toka $f'(u, v)$. Tada je funkcija $f \uparrow f'$ tok u G i vrednost tog toka je*

$$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|.$$

Dokaz. Treba da dokažemo da je $f \uparrow f'$ funkcija toka, tj. da važi ograničenje kapaciteta i konzervacija protoka. Posle treba još dokazati jednakost zadatu za vrednost protoka.

- Ograničenje kapaciteta:

  Ako $(u, v) \in E$, onda $f(u, v) = c_f(v, u)$, pa zbog ovoga imamo da važi $f'(v, u) \leqslant c_f(v, u) = f(u, v)$. Donje ograničenje za $f \uparrow f'$:

$$\begin{aligned}(f \uparrow f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \\ &\geqslant f(u,v) + f'(u,v) - f(u,v) \\ &= f'(u,v) \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Gornje ograničenje za $f \uparrow f'$:

$$\begin{aligned}(f \uparrow f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u)\\ &\leqslant f(u,v) + f'(u,v)\\ &\leqslant f(u,v) + c_f(u,v)\\ &= f(u,v) + c(u,v) - f(u,v)\\ &= c(u,v).\end{aligned}$$

- Konzervacija protoka:

  Kako funkcije $f(u,v)$ i $f'(u,v)$ zadovoljavaju uslov konzervacije protoka, za svako $u, v \in V = \{s,t\}$ važi:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}(f \uparrow f')(u,v) &= \sum_{v\in V}(f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u))\\ &= \sum_{v\in V} f(u,v) + \sum_{v\in V} f'(u,v) - \sum_{v\in V} f'(v,u)\\ &= \sum_{v\in V} f(v,u) + \sum_{v\in V} f'(v,u) - \sum_{v\in V} f'(u,v)\\ &= \sum_{v\in V}(f(v,u) + f'(v,u) - f'(u,v))\\ &= \sum_{v\in V}(f \uparrow f')(v,u).\end{aligned}$$

- Vrednost protoka:

  Kako u G nemamo antiparalelnih grana[20], možemo da konstruišemo dva disjunkta skupa čvorova

$$V_1 = \{v \mid (s,v) \in E\},\ \ V_2 = \{v \mid (v,s) \in E\}.$$

  Jasno, $V_1 \cup V_2 \subseteq V$.

[20] antiparalelna grana = paralelna grana sa suprotnim smerom

$$
\begin{aligned}
|f \uparrow f'| &= \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(s, v) - \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(v, s) \\
&= \sum_{v \in V_1} (f \uparrow f')(s, v) - \sum_{v \in V_2} (f \uparrow f')(v, s) \\
&= \sum_{v \in V_1} (f(s, v) + f'(s, v) - f'(v, s)) \\
&\quad - \sum_{v \in V_2} (f(v, s) + f'(v, s) - f'(s, v)) \\
&= \sum_{v \in V_1} f(s, v) + \sum_{v \in V_1} f'(s, v) - \sum_{v \in V_1} f'(v, s) \\
&\quad - \sum_{v \in V_2} (f(v, s) - \sum_{v \in V_2} f'(v, s) + \sum_{v \in V_2} f'(s, v) \\
&= \sum_{v \in V_1} f(s, v) - \sum_{v \in V_2} (f(v, s) + \sum_{v \in V_1} f'(s, v) + \sum_{v \in V_2} f'(s, v) \\
&\quad - \sum_{v \in V_1} f'(v, s) - \sum_{v \in V_2} f'(v, s) \\
&= \sum_{v \in V_1} f(s, v) - \sum_{v \in V_2} (f(v, s) + \sum_{v \in V_1 \cup V_2} f'(s, v) - \sum_{v \in V_1 \cup V_2} f'(v, s).
\end{aligned}
$$

U gornjoj jednačini kod sume možemo pisati $v \in V$, jer kada je $v \in V \setminus (V_1 \cup V_2)$ vrednost će biti 0, tako da imamo:

$$
\begin{aligned}
|f \uparrow f'| &= \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} (f(v, s) + \sum_{v \in V} f'(s, v) - \sum_{v \in V} f'(v, s) \\
&= |f| + |f'|.
\end{aligned}
$$

■

Definicija 1.59. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža, $f(u, v)$ funkcija protoka u G, i $(G_f; c_f; s; t)$ mreža reziduuma za G. *Put dopunjujućeg toka* p je putanja od s do t u G_f.

Napomena 1.60. Po definiciji G_f, tok na grani (u, v) u p možemo povećati za maksimum $c_f(u, v)$ (jer inače se prekrši ograničenje kapaciteta nad (u, v)

ili (v, u) u G). Zato, maksimalnu vrednost sa kojom možemo da dopunimo tok na putanji p, možemo zapisati kao

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in p\}.$$

Posledica 1.61. *Neka je $(G; c; s; t)$ mreža, $f(u, v)$ funkcija toka u G i neka je $(G_f; c_f; s; t)$ mreža reziduuma za G. Neka je p put dopunjujućeg toka u G_f. Ako funkciju $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$ definišemo kao*

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p), & (u, v) \in p, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

tada je f_p tok u G_f i vrednost toka $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Posledica 1.62. *Neka je $(G; c; s; t)$ mreža i $f(u, v)$ funkcija toka u G. Neka je $(G_f; c_f; s; t)$ mreža reziduuma za G, p put dopunjujućeg toka u G_f i f_p gore definisana funkcija. Tada je $f \uparrow f_p$ tok u G i vrednost toka je $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$.*

Napomena 1.63. Na osnovu prethodne posledice ako tok f dopunimo tokom f_p, dobijamo novi tok u G čija je vrednost veća od f.

Lema 1.64. *Neka je $(G; c; s; t)$ mreža, $f(u, v)$ funkcija toka u G i (S, T) neki rez nad G. Tada je ukupan tok nad rezom (S, T) dat sa $f(S, T) = |f|$.*

Dokaz. Zbog (14) i (15) $|f|$ možemo zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} |f| &= \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) + \sum_{u \in S - \{s\}} \left(\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right) \\ &= \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s) + \sum_{u \in S - \{s\}} \sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{u \in S - \{s\}} \sum_{v \in V} f(v, u) \\ &= \sum_{v \in V} \left(f(s, v) + \sum_{u \in S - \{s\}} f(u, v) \right) - \sum_{v \in V} \left(f(v, s) + \sum_{u \in S - \{s\}} f(v, u) \right) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(u, v) - \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(v, u) \end{aligned}$$

Kako je (S,T) particija skupa V, tj. $S \cup T = V$ i $S \cap T = \emptyset$, prethodnu jednakost možemo zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
|f| &= \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(u,v) + \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\
&= \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) + \left(\sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u)\right) \\
&= \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\
&= f(S,T).
\end{aligned}$$

U sumama u zagradi za svako $u, v \in S$, $f(u,v)$ se pojavljuje jednom i u prvoj i u drugoj sumi, pa je u zbiru zagrada jednaka sa 0. ■

Posledica 1.65. *U mreži $(G;c;s;t)$ vrednost bilo kog toka f je odozgo ograničen kapacitetom bilo kog reza nad G, tj.*

$$|f| \leqslant c(S,T),$$

gde je (S,T) bilo koji rez.

Dokaz. Neka je (S,T) neki rez nad G i f neki tok nad G.

$$\begin{aligned}
|f| &= f(S,T) \\
&= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u) \\
&\leqslant \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \\
&\leqslant \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) \\
&= c(S,T).
\end{aligned}$$

■

Dokaz teoreme Ford-Fulkerson. Na osnovu prethodne posledice znamo da je u mreži $(G;c;s;t)$ vrednost bilo kog toka f odozgo ograničen kapacitetom bilo kog reza nad G, odnosno

$$|f| \leqslant c(S,T). \tag{17}$$

Ostaje da dokažemo da za maksimalni tok važi jednakost. Neka je f maksimalni tok u G. Tada G_f ne sadrži putanju dopunjujućeg toka od s do t. Definišimo skupove:

$$S = \{v | v \in V, \text{ postoji put od } s \text{ do } v \text{ u } G_f\}$$

i

$$T = V - S.$$

Particija (S, T) je rez nad G, jer $S \cup T = V$, $S \cap T = \emptyset$ i $s \in S$, $t \notin S$. Posmatrajmo sledeće čvorove $u \in S$ i $v \in T$.

- Ako $(u, v) \in E$, znamo da je $f(u, v) = c(u, v)$ (jer inače $(u, v) \in E_f$, iz čega bi sledilo da je $v \in S$).
- Ako $(v, u) \in E$, onda $f(v, u) = 0$. (jer inače dobijamo $c_f(u, v) = f(v, u) > 0$ i $(u, v) \in E_f$, pa bi sledilo da je $v \in S$).
- Ako $(u, v), (v, u) \notin E$, važi $f(u, v) = f(v, u) = 0$.

Pa iz ovoga dobijamo:

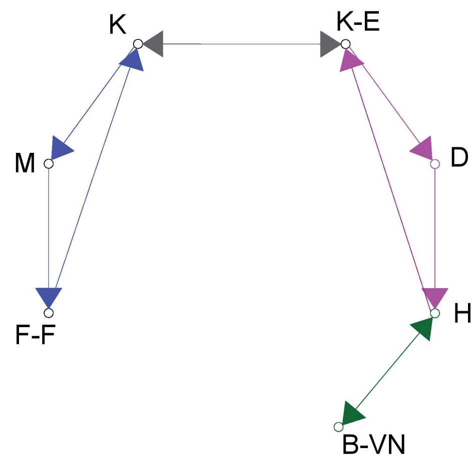
$$\begin{aligned} f(S, T) &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} 0 \\ &= c(S, T). \end{aligned}$$

■

2 Ekvivalencije datih teorema

Dokazi prikazani u ovom poglavlju se mogu naći u sledećim knjigama: [1], [2], [13] i [7].

Ekvivalenciju teorema, predstavljenih u prethodnom poglavlju, dokazaćemo na sledeći način:



Slika 6.

Skraćenice koristimo za: F-F: Teorema Ford-Fulkerson, M: Mengerova teorema, K: Königova teorema, K-E: Teorema König-Egerváry, D: Dilworthova teorema, H: Hallova teorema, B-VN: Teorema Birkhoff-Von Neumann.

Odnosno, ekvivalenciju datih teorema dobijamo iz sledećih implikacija:

- K $\Rightarrow$ M $\Rightarrow$ F-F $\Rightarrow$ K,
- K $\Leftrightarrow$ K-E,
- K-E $\Rightarrow$ D $\Rightarrow$ H $\Rightarrow$ K-E,
- H $\Leftrightarrow$ B-VN.

2.1 K $\Rightarrow$ M $\Rightarrow$ F-F $\Rightarrow$ K

Teorema 2.1. *Iz Königove teoreme sledi Mengerova teorema.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ graf sa n čvorova i neka su x i y nesusedni čvorovi u G. Neka je $N(x)$ skup suseda čvora x i $N(y)$ skup suseda čvora y. Neka je $T = N(x) \cap N(y)$, $X = N(x) - T$ i $Y = N(y) - T$. Ovim smo dobili particiju skupa V na četiri podskupa: T, X, Y i U, gde je $U = V - T - X - Y$. Ako je skup S $(x - y)$ separator, onda $T \subseteq S$. Neka je k broj elemenata minimalnog $(x - y)$ separatora. Ako je $|T| = t$, tada disjunktnih (x, y)-puteva, gde su čvorovi iz T, ima t. Treba da dokažemo da u G postoji k disjunktnih $(x - y)$ puteva. Razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je $S \cap U = \emptyset$.

   Neka je $G' = (V', E')$ bipartitan graf, gde je $V' = X \cup Y$ i E' skup onih grana iz E koji spajaju čvorove iz X i Y. Kako je onda skup čvorova $S - T$ minimalne kardinalnosti u bipartitnom grafu, i kako oduzimanjem bilo kog čvora iz skupa $S - T$, skup S više ne bi bio $(x - y)$ separator, tako dobijamo da skup $S - T$ mora biti minimalni pokrivač bipartitnog grafa G'. Na osnovu Königove teoreme postoji maksimalni mečing M u G' takav da je $|M| = |S - T| = k - t$. Tako smo dobili $k - t$ disjunktnih (x, y)-puteva koristeći čvorove iz $S - T$. Osim njih, imamo još t puteva xvy, gde je v čvor iz T. Sve zajedno, to daje k disjunktnih $(x - y)$ puteva u G.

2. Ako je $S \cap U \neq \emptyset$.

   Dokazujemo indukcijom po broju čvorova u grafu G.

   - Baza: Ako je $n = 1$, onda tvrđenje očigledno važi.
   - Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaki graf sa m čvorova, gde $m < n$.
   - Indukcijski korak: Neka je $G(x)$ podgraf grafa G, takav da su mu grane, one grane iz G, koji spajaju čvor x sa čvorovima iz skupa S, sa osobinom da nikoje dve grane nemaju zajedničke čvorove, osim čvora x. Konstruišimo graf $G'(x)$, uvođenjem novog čvora x', koji povezujemo sa svakim čvorom iz skupa S. Broj elemenata minimalnog $(x - x')$ separatora u grafu $G'(x)$ ne može biti više od k. A ako bi bio manji od k, narušio bi uslov minimalnosti za

skup S. Pošto su grane koje smo birali kada smo konstruisali graf $G(x)$ po parovima disjunktne (osim čvora x), sledi da postoji bar jedan čvor u $N(x)$ koji nije sadržan u grafu $G^{'}(x)$. Odnosno, $G^{'}(x)$ ima manje od n čvorova. Pa po indukcijskoj hipotezi postoji k disjunktnih $(x, x^{'})$-puteva. Sledi da postoji k međusobno disjunktnih grana između x i čvorova skupa S. Analogno se dobija da i u $G(y)$ postoji k međusobno disjunktnih grana između y i čvorova skupa S. Kada povežemo ova dva rezultata, imamo da dobijenih k grana iz x u grafu $G(x)$ i dobijenih k grana iz y u grafu $G(y)$, čine k disjunktnih (x, y)-puteva.

■

Teorema 2.2. *Iz Mengerove teoreme sledi Teorema Ford-Fulkerson.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ graf, neka je $(G; c; s; t)$ mreža i funkcija $f(u, v)$ protok u mreži. U grafu G kapacitet grane uv označimo sa c_{uv}. Konstruišemo novi graf $G^{'}$ tako što svaku granu uv sa kapacitetom c_{uv} iz G zamenimo sa c_{uv} uv granom kapaciteta jedan. Na ovaj način dobijemo multigraf $G^{'}$ za koji važi da su mu sve grane kapaciteta jedan. Maksimalna vrednost protoka u grafu G (označimo ga sa p) je jednaka sa maksimalnim brojem granski disjunktnih (s, t)-puteva u grafu $G^{'}$. Minimalni kapacitet reza u grafu G (označimo ga sa q) jednak je minimalnom broju grana, koje kada izvadimo iz grafa $G^{'}$ ne postoji (s, t)-putanja. Po Mengerovoj teoremi[21] sledi da $p = q$, tj. važi Teorema Ford-Fulkerson. ■

Teorema 2.3. *Iz Teoreme Ford-Fulkerson sledi Königova teorema.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ bipartitan graf, gde $V = A \cup B$. Konstruišimo orijentisan graf $G^{'}$ na sledeći način:

- Svaka grana iz E postaje orijentisana grana koja povezuje čvor iz skupa A sa čvorom iz skupa B.
- Dodamo nove čvorove s i t.
- Iz s povučemo grane u svaki čvor u skupu A.
- Iz svakog čvora u skupu B povučemo granu u čvor t.

[21] Koristimo formulaciju Mengerove teoreme za orijentisan graf, gde posmatramo granske disjunktne puteve.

Da bismo dobili mrežu, treba još da definišemo kapacitet: grane koje kreću iz čvora s i grane koje se završavaju u čvoru t neka imaju kapacitet 1, a ostale grane beskonačan kapacitet. I posmatrajmo ovako definisanu mrežu $(G; c; s; t)$.

U grafu G, uslov da postoji mečing od k elemenata, ekvivalentno je sa uslovom da u mreži $(G; c; s; t)$ postoji protok f vrednosti k. Odnosno, maksimalna vrednost protoka u mreži $(G; c; s; t)$ jednaka je broju elemenata skupa maksimalnog mečinga u grafu G.

Ako je L pokrivač u grafu G, onda ne postoji grana u mreži iz skupa čvorova $A \backslash L$ u skup čvorova $B \backslash L$. Onda možemo posmatrati sledeće skupove:

$$S = \{s\} \cup A \setminus L \cup (B \cap L)$$

i

$$T = \{t\} \cup B \setminus L \cup (A \cap L),$$

koji čine rez (S, T) u mreži kapaciteta k. Odnosno, svaki pokrivač od k elemenata u grafu G određuje rez u mreži, gde je kapacitet reza jednak sa k. Sa druge strane, svaki rez (S, T) u mreži sa kapacitetom reza k, sastoji se od k grana, gde je svaki kapaciteta 1. Neka je L_1 skup onih čvorova iz A, koji su susedni sa s u ovom rezu, i neka je L_2 skup onih čvorova iz B, koji su susedni sa t u ovom rezu. Dokažimo da je unija $L_1 \cup L_2$ pokrivač grafa G. Pretpostavimo suprotno, da nije i da postoje $a \in A \setminus L_1$ i $b \in B \setminus L_2$, tako da $(a, b) \in E$. Ali tada u mreži postoji putanja $s - a - b - t$, odnosno postoji grana (neki od ova tri: sa, ab, bt) između S i T u rezu, ali to je nemoguće, jer su grane u rezu već zasićene, pa smo dobili, da svaki minimalni rez u mreži određuje minimalni pokrivač u grafu G.

Kako po Teoremi Ford-Fulkerson maksimalna vrednost protoka u mreži je jednaka minimalnom kapacitetu reza, sledi da važi Königova teorema. ■

2.2 K $\Leftrightarrow$ K-E

Teorema 2.4. *Königova teorema i Teorema König-Egerváry su ekvivalentni.*

Dokaz. Neka je graf $G = (V, E)$ bipartitan graf. Neka je $V = X \cup Y$, gde $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ i $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Konstruišemo za graf G matricu susedstva $A(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$, gde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji } x_i y_j \in E, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada je maksimalan broj nezavisnih jedinica ove matrice jednak broju elemenata skupa, koji je maksimalni mečing za graf G. Minimalan broj linija koje pokrivaju sve jedinice matrice $A(G)$ jednak je broju elemenata skupa minimalnog pokrivača grafa G. Iz ovoga sledi da važi implikacija

Teorema König-Egerváry$\rightarrow$Königova teorema.

Kako svaka $(0-1)$ matrica može biti interpretirana kao matrica susedstva nekog bipartitnog grafa, sledi da važi i implikacija

Königova teorema$\rightarrow$Teorema König-Egerváry.

$\blacksquare$

2.3 K-E $\Rightarrow$ D $\Rightarrow$ H $\Rightarrow$ K-E

Teorema 2.5. *Iz Teoreme König-Egerváry sledi Dilworthova teorema.*

Dokaz. Neka je $(S, \preccurlyeq)$, gde je $S = \{x_1, x_1, ..., x_n\}$ konačan parcijalno uređen skup. Parcijalno uređenje možemo predstaviti kao $(0-1)$ matricu reda n, na sledeći način:

$$A(S) = [a_{ij}]_{n \times n},$$

gde je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako važi relacija } x_i \prec x_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Iz ovoga sledi, ako imamo da je $a_{ij} = 1$, onda je $a_{ji} = 0$. Nazovimo nezavisnim skupom, skup jedinica u matrici $A(S)$ za koje važi da nikoje dve nisu u istoj vrsti ili u istoj koloni. Onda svaki lanac u $(S, \preccurlyeq)$ definiše jedan nezavisan skup (sa dva ili više elemenata) u matrici $A(S)$.[22] Pretpostavimo da particija skupa S na lance sadrži s_i lanaca dužine k_i, gde je $i = 1, 2, ..., r$ i $k_i > 1$ i q lanaca dužine 1. Tada je

$$n = \sum s_i k_i + q.$$

Ova particija određuje jedan nezavisan skup sa m elemenata, gde je

$$m = \sum s_i(k_i - 1) = \sum s_i k_i - \sum s_i = n - q - \sum s_i.$$

Kako je

$$q + \sum s_i$$

broj lanaca u skupu S, dobijamo da je broj elemenata skupa S jednak zbiru broja lanaca u particiji skupa S i broja jedinica u dobijenom nezavisnom skupu.

Iz toga sledi da, ako postoji maksimalan nezavisan skup sa brojem elemenata t, tada postoji particija skupa S na minimalan broj lanaca. I to, na q lanaca dužine 1 i na $n - q - t$ lanaca dužina većih od 1. Na osnovu teoreme König-Egerváry, sve jedinice u matrici $A(S)$ mogu biti pokrivene sa t linija, dok sa manje od t ne mogu. Taj minimalan broj linija odgovara skupu D koji ima $|D| = n - t - q$ elemenata skupa S; po jedan iz svakog lanca dužine veće od 1. Skup D' sastoji se od q lanaca dužine 1. Tada je $D \cup D'$

[22] Primer: Ako je $n = 10$, onda za lanac $x_2 - x_3 - x_7 - x_8 - x_9$ dužine 5 dobijamo nazavisan skup $\{a_{23}, a_{37}, a_{78}, a_{89}\}$ sa $5 - 1 = 4$ elemenata.

skup neuporedivih elemenata kojih ima $n - t$. Tako smo dobili da u skupu S postoji particija na $n - t$ lanaca. Po jedan element iz svakog od njih je antilanac dužine $n - t$. ■

Teorema 2.6. *Iz Dilworthove teoreme sledi Hallova teorema.*

Dokaz. Pretpostavimo da je

$$\{A_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$$

familija podskupova skupa $E = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ za koji važi Hallov uslov (1). Posmatrajmo skup

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_m, A_1, A_2, ..., A_n\}.$$

Neka je relacija $\preccurlyeq$ definisana sa

$$x_i \preccurlyeq A_j \Leftrightarrow x_i \in A_j.$$

Tada je $(X, \preccurlyeq)$ konačno parcijalno uređenje. Tada je skup E je jedan antilanac veličine m. Neka je D proizvoljan antilanac koji sadrži p elemenata skupa E i q elemenata iz familije $\{A_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$. Bez gubljenja opštosti uzeti da je

$$D = \{x_1, x_2, ..., x_p, A_1, A_2, ..., A_q\}.$$

Kako nijedan od elemenata $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ ne može biti u uniji

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_q,$$

ova unija, eventualno, sadrži samo elemente $x_{p+1}, ..., x_m$, pa je

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_q| \leqslant m - p.$$

S druge strane, na osnovu Hallovog uslova (1) ova unija ima najmanje q elemenata, pa mora da važi $q \leqslant m - p$. Sledi

$$q + p \leqslant m,$$

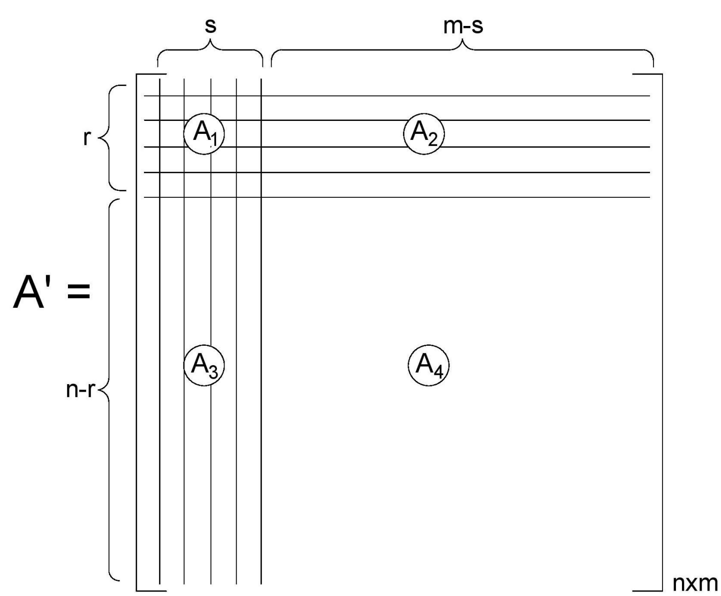
što znači da je E maksimalan antilanac u X. Na osnovu Dilworthove teoreme postoji particija skupa X u tačno m lanaca. Svaki od tih m lanaca sastoji se od dva elementa, jedan je iz skupa E, a drugi iz familije skupova $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Pritom $x_i \in A_i$, $i = 1, 2, ..., n$. To znači da familija skupova $\{A_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ ima SRP i to je $(x_1, x_2, ..., x_n)$. ■

Teorema 2.7. *Iz Hallove teoreme sledi Teorema König-Egerváry.*

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ $(0-1)$ matrica. Neka je p minimalan broj linija koje pokrivaju sve jedinice u A, a q maksimalan broj nezavisnih jedinica u A. Treba da dokažemo da je $p = q$.

- Kako svaka linija pokriva najviše jednu od q nezavisnih jedinica, potrebno je bar q linija za pokrivanje q nezavisnih jedinica. Odnosno, sledi da je $p \geqslant q$.

- Neka se minimalan broj linija koje pokrivaju sve jedinice u A sastoji od r vrsta i s kolona, tj.
$$p = r + s.$$
Kako se elementarnim transformacijama broj nezavisnih jedinica ne menja, matricu A možemo transformisati u matricu
$$A' = [a'_{ij}]_{n\times m}$$
u kojoj se sve jedinice nalaze u prvih r vrsta i prvih s kolona.



Slika 7.

Razmotrimo podmatrice matrice $A^{'}$ označene na slici.

A_1: svaka jedinica je dvaput pokrivena.

A_2: svaka jedinica je jednom pokriven.

A_3: svaka jedinica je jednom pokrivena.

A_4: same nule, nema nijedne jedinice.

Tvrdimo da podmatrica A_2 sadrži r nezavisnih jedinica. Posmatrajmo matricu A_2 kao matricu incidencije za r skupova $\{S_1, S_2, ..., S_r\}$ koji odgovaraju vrstama iz A_2, a čiji su elementi iz $m-s$ kolona matrice A_2. Tada je r nezavisnih jedinica u A_2 ekvivalentno s postojanjem SRP u familiji $\{S_1, S_2, ..., S_r\}$. Po Hallovoj teoremi familija ima SRP ukoliko je zadovoljen Hallov uslov (1). U matričnom obliku to znači da su jedinice u svakih k vrsta matrice A_2 raspoređene u bar k kolona te matrice. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji k vrsta u A_2 čije su sve jedinice u l kolona, gde je $l < k$. Tada, ako ovih k vrsta isključimo iz skupa linija koji čine minimalni pokrivač i umesto njih ubacimo pomenutih l kolona, dobijamo novi pokrivač matrice $A^{'}$ sa $p^{'}$ linija. Kako je $l < k$, imamo da je

$$p^{'} = (r-k) + (s+l) = r + s - k + l < r + s = p.$$

To je u kontradikciji s pretpostavkom da minimalni pokrivačmatrice A ima p linija. Otuda u A_2 imamo r nazavisnih jedinica.

Analogno, podmatrica A_3 ima s nezavisnih jedinica.

Kako r nezavisnih jedinica iz A_2 zajedno sa s nezavisnih jedinica iz A_3 čine skup od $r+s$ nezavisnih jedinica u matrici $A^{'}$, sledi

$$q \geqslant r + s = p.$$

■

2.4 H $\Leftrightarrow$ B-VN

Implikacija H $\Rightarrow$ B-VN je već dokazana u trećem delu rada, pošto smo Teoremu Birkhoff-Von Neumann dokazali primenom Hallove teoreme. Ostaje još da se pokaže:

Teorema 2.8. *Iz Teoreme Birkhoff-Von Neumann sledi Hallova teorema.*

Definicija 2.9. Graf G je *regularan* ako je stepen svakog čvora isti, odnosno ako i samo ako je $\delta(G) = \Delta(G)$.

Ako je u regularnom grafu stepen svakog čvora jednak k onda kažemo da je graf k-regularan.

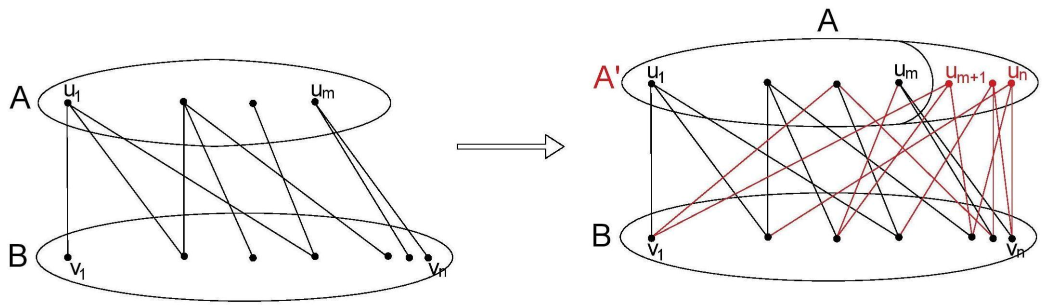
Dokaz. Koristićemo grafovsku interpretaciju Hallove teoreme. Neke je $G = (V, E)$ bipartitan graf, gde je $V = A \cup B$, $|A| = |\{u_1, u_2, ..., u_m\}| = m$, $|B| = |\{v_1, v_2, ..., v_n\}| = n$ i $m \leqslant n$. Tada Hallov uslov (2) glasi

$$(\forall X \subseteq A) \ \ |X| \leqslant |N(X)|.$$

Treba dokazati da u grafu G postoji mečing koji pokriva svaki čvor iz A.

Neka je k maksimalan stepen u grafu. Konstruišemo k-regularan bipartitan nadgraf $G' = (V', E')$ grafa G na sledeći način:

- $V' = A' \cup B$, gde je $A' = A \cup \{u_{m+1}, u_{m+2}, ..., u_n\}$.
- Skup E' čine grane E grafa G + nove grane koje se uvode na sledeći način: sukcesivno spajamo čvor u iz A' i čvor v iz B za koje je $d^*(u) < k$ i $d^*(v) < k$. Pritom je sa $d^*(u)$ označen stepen čvora u trenutku pre spajanja. Dobijeni graf G' je bipartitan i k-regularan, ali ne mora da bude prost; može da sadrži paralelne grane. Međutim to ne utiče na dokaz.



Slika 8. Konstrukcija grafa $G' = (A', B)$ iz grafa $G = (A, B)$

Neka je $A(G')$ matrica susedstva grafa G'. Tada je $A(G') = [a_{ij}]_{n\times n}$, gde u svakoj vrsti i koloni imamo tačno k jedinica i $n-k$ nula. Ovo je bistohastička matrica, jer važi uslov da je za neko $k \geqslant 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k, \quad i = 1, 2, ..., n$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = k, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Iz Teoreme Birkhoff-Von Neumann znamo da ovu bistohastičku matricu možemo zapisati na sledeći način:

$$A(G') = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_t P_t, t \geqslant 1,$$

gde su $P_1, P_2, ..., P_t$ permutacione matrice reda n i $\lambda_i \geqslant 0$.

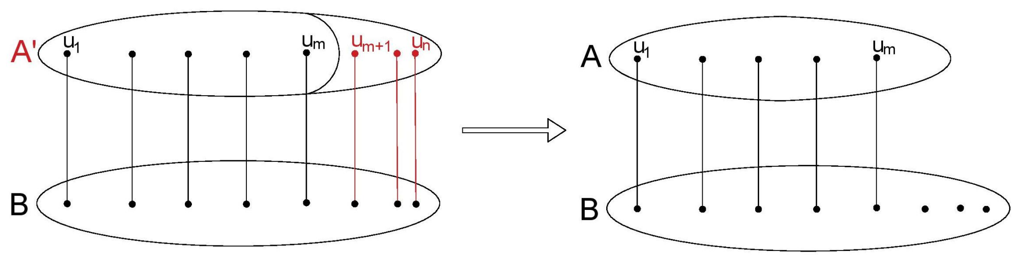
Kako je G' bipartitan k-regularan graf, on je k-faktorabilan (granski disjunktna unija k savršenih mečinga). Stoga je $A(G')$ zbir k permutacionih matrica, tj.

$$A(G') = P_1 + P_2 + ... + P_k.$$

Svaka permutaciona matrica P_i predstavlja jedan savršeni mečing M_i u grafu G'.

Treba da dokažemo da uvek možemo naći savršeni mečing u G' takav da grane koje pokrivaju čvorove iz A budu iz $E(G)$. Imamo dve mogućnosti:

1. Za neko $i \in 1, 2, ..., k$ postoji takav savršeni mečing M_i. Njegova restrikcija na G je traženi mečing u G koji pokriva A. (Slika 14. Crnim linijama su označene grane iz G.)



Slika 9.

2. Za svaki mečing M_i, $i = 1, 2, ..., k$, postoji čvor u iz A, takav da grana iz M_i koja pokriva u nije grana u G. (Za takav čvor u rećićemo da nije G-pokriven u M_i). U ovom slučaju konstruisaćemo novi mečing u G koji pokriva A.

   Od svih mečinga M_i, $i = 1, 2, ..., k$, uočimo onaj koji sadrži najviše grana grafa G. Bez uticaja na opštost, možemo uzeti da je

$$M = \{u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n\},$$

   pri čemu

$$\{u_1v_1, u_2v_2, ..., u_sv_s\} \in E$$

   i

$$\{u_{s+1}v_{s+1}, u_{s+2}v_{s+2}, ..., u_nv_n\} \in E^{'} - E,$$

   gde je $0 \leqslant s < m$. Neka je $A_1 = \{u_1, u_2, ..., u_s\}$ i $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_s\} = N_M(A_1)$.

   Kako je $s < m$, postoji čvor $u \in A - A_1$. Ovaj čvor u nije G-pokriven u M.

Zbog Hallovog uslova (2) sledi da u ima suseda v u G. Može se uzeti da je v van B_1[23].

Uočimo savršeni mečing M_1 koji sadrži granu uv. Granu uv dodamo restrikciji $M(A_1)$ i tako ga povećamo za 1. Dodamo i ostale grane iz M_1 (ako ih ima) čiji je jedan kraj u $A - A_1$ a drugi u $B - B_1 - v$.

Skup svih čvorova iz $A - A_1$ koji su G-pokriveni u mečingu M_1 i čiji su odgovarajući susedi u $B - B_1$, označimo sa A_2. Njihove susede u mečingu M_1 označavamo sa B_2. Primetimo da su skupovi B_1 i B_2 disjunktni.

Ako je $A_2 = A - A_1$, tada je $M(A_1) + M_1(A_2)$ traženi mečing iz A u B.

Pretpostavimo da je $A_2 \neq A - A_1$. Tada postoji čvor u' iz $A - A_1 - A_2$. S obzirom na maksimalnost mečinga M, čvor u' nije G-pokriven u M. Međutim, može da bude pokriven u mečingu M_1. Karakteristična su sledeća dva slučaja.

- Čvor u' je G-pokriven u M_1. Neka je $u'v'$ grana iz M_1 koja je istovremeno iz G. S obzirom na definiciju A_2, v' pripada skupu B_1.

  Tada se, kao gore, mečing $M(A_1) + M_1(A_2)$ može proširiti za jednu novu granu. Nakon toga nastavljamo na sličan način.

- Čvor u' nije G-pokriven u M_1. Tada, kao gore, zbog Hallovog uslova (2) iz njega izlazi grana $u'v'$ koja je u G. Kao gore, možemo uzeti da je v' van $B_1 + B_2$, tj. iz skupa $B - B_1 - B_2$. Grana $u'v'$ pripada trećem savršenom mečingu M_2 u G'. Dodamo granu $u'v'$ restrikcijama $M(A_1) + M_1(A_2)$, čime ih povećamo za 1. Kao u slučaju mečinga M_1, dodamo ostale "pogodne" grane iz M_2 i tako formiramo skup A_3, koji je disjunktan sa $A_1 + A_2$.

  Ako je $A_3 = A - A_1 - A_2$, tada je $M(A_1) + M_1(A_2) + M_2(A_3)$ traženi mečing i dokaz je gotov.

  U protivnom nastavimo sa sličnom procedurom sve dok ne iscrpemo sve čvorove iz A.

[23] Ako je čvor v u B_1 može se, uz pomoć Hallovog uslova primenjenog na $A_1 + u$ dobiti takav čvor iz A_1. Tada dobijeni čvor preimenujemo na u, i u daljem taj čvor igra ulogu čvora u.

Ako se to desi u $i+1$ koraka, gde je $i \geqslant 1$, traženi mečing je:

$$M(A_1) + M_1(A_2) + ... + M_i(A_{i+1}),$$

gde je $A_{i+1} = A - A_1 - ... - A_i$.

$\blacksquare$

Literatura

[1] V. K. Balakrishnan, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics*, McGraw-Hill (1995).

[2] V. K. Balakrishnan, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory*, McGraw-Hill (1997).

[3] G. Birkhoff, Tres observaciones sobre el algebra lineal, Rev. Fac. Ci. Exactas, Puras y Aplicadas Univ. Nac. Tucuman, [Ser. A] **5** (1946), 147-151.

[4] T. Cormen, C. Leiserson, R. Riverst, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Third Ediction, The MIT Press (2009).

[5] R. P. Dilworth, A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets, Ann. Math., Vol. **51** (1950), 161-166.

[6] G. A. Dirac, Short proof of Menger's graph theorem, Mathematika **13** (1966), 42-44.

[7] J. Egerváry, Matrixok kombinatorius tulajdonságairól, Matematikai és fizikai lapok **38** (1931), 16-28.

[8] T. Fiala, *Kombinatorikus optimalizálás*, BCE Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék, Budapest (2010).

[9] L. R. Ford, Jr. i D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1962).

[10] F. Galvin, A proof of Dilworth's chain decomposition theorem, Amer. Math. Monthly **101:4** (1994), 352-353.

[11] R. Gould, *Graph Theory*, Dover Publications, INC., Mineola, New York (2012).

[12] P. Hall, On representatives of subsets, J. London Math. Soc. **10** (1935), 26-30.

[13] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley (1969).

[14] S. Jukna, *Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science*, Second Edition, Springer (2011).

[15] D. König, Graphok és matrixok, Matematikai és fizikai lapok **38** (1931), 116-119.

[16] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. **10** (1927), 96-115.

[17] V. Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad (1998).

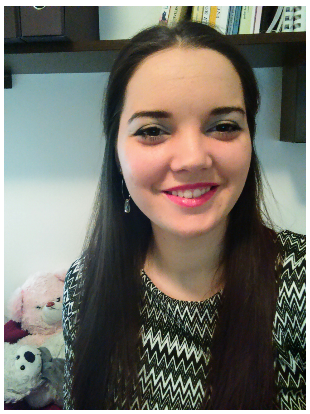
[18] J. Von Neumann, A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem, in: Contributions to the Theory of Games, Vol. II, H.W. Kuhn (ed.), Ann. of Math. Stud. **28** (1953), 5-12.

Zaključak

U ovom radu je prikazano sedam čuvenih teorema iz diskretne matematike, mahom iz kombinatorike i teorije grafova. Svaka je propraćena jednim od poznatih dokaza. Drugi, glavni deo rada, posvećen je određenoj ekvivalenciji tih tvrđenja koja predstavlja svojevrstan fenomen.

Svih sedam teorema su novijeg datuma, prva je iz 1927. godine. Neke od njih imaju značaj i primene i van matematike. Sve skupa, učinilo je da mi ta tematika bude posebno interesantna i inspirativna.

Biografija



Maria Kiss je rođena 28. decembra 1991. godine u Zrenjaninu. Osnovnu školu Ady Endre je završila u Tordi. 2006. godine upisuje srednju školu Zrenjaninska gimnazija u Zrenjaninu. Školske 2010/2011 upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika. U oktobru 2013. godine je završila osnovne studije sa prosečnom ocenom 9,22 i upisala master studije teorijske matematike. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom sa prosečnom ocenom 9,55 i time stekla pravo na odbranu ovog master rada. Pored toga je položila ispite psiholoških, pedagoških i metodičkih disciplina 30 bodova i 6 bodova prakse u nastavi. Od januara 2014. do oktobra 2015. bila je zaposlena kao nastavnik matematike u Zrenjaninskoj gimnaziji u Zrenjaninu. Od oktobra 2015. zaposlena je kao saradnik u nastavi na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu.

Novi Sad, 2018. Maria Kiss

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Maria Kiss
AU
Mentor: dr Vojislav Petrović
MN
Naslov rada: Sedam znamenitih ekvivalentnih tvrđenja iz kombinatorike
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2018.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 2/56/18/0/9/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Kombinatorika
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: teorija grafova, bistohastička matrica, $(0-1)$ matrica, parcijalno uređen skup, Mengerova teorema, Königova teorema, Teorema König-Egerváry, Hallova teorema, Teorema Birkhoff-Von Neumann, Dilworthova teorema, Teorema Ford-Fulkerson
PO

UDK:

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog master rada je ekvivalencija sedam teorema. Ove teoreme predstavljaju vezu između oblasti teorije grafova, teorije mreža, bistohastičkih i $(0-1)$ matrica, kao i teorije skupova. Rad se sastoji od dva dela. U prvom delu rada su prikazane prezentacije teorema, kao i ideje i primeri, koji su bili motivacija za nastanak sledećih teorema: Mengerova teorema (1927), Königova teorema (1931), Teorema König-Egerváry (1931), Hallova teorema (1935), Teorema Birkhoff-Von Neumann (1946), Dilworthova teorema (1950), Teorema Ford-Fulkerson (1962). Svaka teorema nosi ime matematičara koji ga je dokazao. Mengerova, Königova i Hallova teorema su teoreme iz teorije grafova. Dilworthova teorema je teorema o parcijalno uređenim skupovima. Teorema König-Egerváry i Teorema Birkhoff-Von Neumann su teoreme o matricama, gde u prvoj radimo sa $(0-1)$ matricama, a u drugoj sa dvostruko stohastičkim matricama. Teorema Ford-Fulkerson je iz oblasti teorije mreže. U drugom delu rada pokazane su ekvivalencije teorema navedenih u prvom

delu rada.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 4. 10. 2017.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:

Predsednik: dr Bojan Bašić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Vojislav Petrović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Maria Kiss
AU
Mentor: Vojislav Petrović, PhD
MN
Title: Seven remarkable equivalent theorems in combinatorics
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2018.
PY
Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 2/56/18/0/9/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Combinatorics
SD

Subject / Key words: graph theory, partially ordered sets, doubly stochastic matrix, $(0-1)$ matrix, Menger's theorem, König's theorem, König-Egerváry theorem, Hall's theorem, Birkhoff-Von Neumann theorem, Dilworth's theorem, Ford-Fulkerson theorem
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The main topic of this master thesis is the equivalence of seven theorems. These theorems represent the link between the following fields: graph theories, network theories, bistochastic matrices, $(0-1)$ matrices and set theory. The thesis has two parts. The first part of this thesis contains the presentation of the theorems and we write about the ideas and examples which motivated the creation of the following theorems: Menger's theorem (1927), König's theorem (1931), König-Egerváry's theorem (1931), Hall's theorem (1935), Birkhoff-von Neumann's theorem (1946), Dilworth's theorem (1950), Ford-Fulkerson's theorem (1962). Every theorem derives its name from the mathematician who proved it. Menger's, König's and Hall's theorems are from the graph theory. Dilworth's is a theorem about partially arranged sets. The theorems of König-Egerváry and Birkhoff-von Neumann are about networks, in the first one we deal with $(0-1)$ matrices while in the second one with doubly stochastic matrices. The Ford-Fulkerson theorem is part of the field of network theory. In the second part of this thesis we showed

the equivalence of the theorems we presented in the first part.
AB

Accepted by Scientific Board on: October 4, 2017
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:

President: Bojan Bašić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Vojislav Petrović, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Boris Šobot, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
DB