Departman za matematiku i informatiku

Prirodno matematički fakultet

Univerzitet u Novom Sadu

Master rad

Semilinearne talasne jednačine i primeri

Kandidat: Milena Mandić

Mentor: dr Marko Nedeljkov

Decembar, 2015.

Novi Sad, Srbija

Sažetak

U ovom radu ćemo proučavati početne probleme semilinearnih talasnih jednačina tipa

$$u_{tt} - \Delta u + g(u) = 0, \text{ na } R^3 \times [0, \infty), \tag{0.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{0.2}$$

gde je $g : R \to R$ dovoljno glatka funkcija.

Kako ne bismo išli u širinu ograničićemo se samo na one funkcije $g(u)$ koje zavise samo od u (odgovaraju modelima u homogenim sredinama). U uvodnom delu ćemo dati najpoznatije praktične probleme koji se svode na gornji tip jednačine.

Sledeći deo rada će biti posvećen rešenjima jednačina sa globalno Lipšicovskim nelinearnostima. Potom ćemo razmatrati takozvane dobre nelinearnosti. Najpoznatiji predstavnik je kubna Klajn-Gordonova jednačina koja se koristi za opisivanje kretanja relativističkih čestica uz prisutne međusobne interakcije tih čestica. Na kraju ovog dela ćemo prezentovati dokazane rezultate regularnosti za u^5 Klajn-Gordonovu jednačinu od Grilakisa i predstavićemo pojednostavljen dokaz od Struvea.

Potom ćemo dati Raučov rezultat postojanja globalnih C^2-rešenja za neke kritične slučajeve gde je integral energije dovoljno mali.

Svaki od ovih rezultata propratićemo primerima koji će ilustrovati rešenja koja imaju fizičkog smisla i koja su mala nezavisna i naivna provera fizičkog modela.

Jelena Mandić

Hvala mojoj majci što je uvek bila uz mene i omogućila mi da stignem dovde. Ovaj rad posvećujem njoj, mom najvećem uzoru i prijatelju.

Sadržaj

Predgovor

Inspiracija za ovaj rad proizilazi iz kvantne mehanike. Problem koji proučavamo u ovom radu i onaj koji se često javlja u kvantnoj mehanici jeste nelinearna talasna jednačina tipa

$$u_{tt} - \Delta u + g(u) = 0, \text{ na } R^3 \times [0, \infty), \tag{0.3}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{0.4}$$

Različiti nelinearni članovi daju različite fizičke pojave. U drugom delu ovog rada se bavimo takvim pitanjem i dajemo motivaciju za ovaj rad kroz razne fizičke praktične probleme. Posmatraćemo relativističku teoriju čestica kada je $g(u) = -m^2 u$, gde m predstavlja masu čestice. Potom ćemo objasniti na koji način se naša jednačina pojavljuje u nelinearnoj mezon teoriji nuklearnih sila. Nelinearnost $g(u) = m^2 u + t|u|^2 u$ je detaljno proučavana u [12]. U poslednjem delu ovog poglavlja ćemo dati primer kada je nelinearan član periodičan, tj. $g(u) = \sin u$, i objasnćemo njegovu primenu u geometrijskog teoriji polja. Takođe ćemo objasniti da σ-model, važan primer geometrijske teorije polja mora biti podvrgnut određenim ograničenjima, kako bi imao fizičkog smisla. Neki od ovih uslova su predstavljeni u [25].

Na samom početku, u prvom delu ovog rada ćemo se osvrnuti na osnovne pojmove iz parcijalnih diferencijalnih jednačina. Posebno potpoglavlje ćemo posvetiti prostorima Soboljeva zbog njihovog značaja u ovoj oblasti.

U trećem delu ćemo detaljno opisati problem. Na početku ćemo dati neke pretpostavke u vezi g, kao i motivaciju za iste. Potom ćemo dati primer koji pokazuje zašto uslov da su početni uslovi glatki nije dovoljan. Takođe ćemo primetiti da odgovor na postojanje rešenja zavisi od dimenzije prostora n, no mi ćemo se ograničiti samo na fizički interesantan slučaj kada je $n = 3$. Rauč je pokazao globalno postojanje C^2-rešenja, i mi ćemo u poslednjem delu ovog poglavlja dati neke njegove rezultate.

U četvrtom delu ćemo primeniti Raučov rezultat o regularnosti na sledeću klasu parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - V\big(u(x,t)\big), \qquad x \in [-l, l], t \in [0, t_{max}) \tag{0.5}$$

gde je $V(u)$ opšti oblik, ali u primerima ćemo se baviti samo $V\big(u(x,t)\big) = u(x,t)^5$ sa početnim uslovima

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = 0, \tag{0.6}$$

gde je u_0 različita delta funkcija za različite primere. Izvešćemo numerički metod za rešavanje navedene parcijalne diferencijalne jednačine sa opštim oblikom nelinearnog člana. Proverićemo da li početni uslovi zadovoljavaju Raučovu teoremu. Na kraju ovog poglavlja ćemo dati grafičke prikaze rešenja tih jednačina izvedenim metodom, propraćene komentarima u vezi sa prenošenjem informacija po karakteristikama. Posebno je značajna napomena da je tumačenje ovih rezultata otvoren problem. U Apendiksu A su dati kodovi za svaku od datih jednačina.

Ovom prilikom želim da se zahvalim svom mentoru, dr Nedeljkov Marku, koji mi je veoma pomogao kroz rad predlažući moguće pravce za ovaj rad i uvek upućujući me u pravom smeru, Krisu* koji mi je pomogao da za kratko vreme savladam LaTeX i Slobodanu Mitroviću koji je rad pročitao i ukazao mi na neke greške u sintaksi. Zahvaljujem se svim profesorima i asistentima sa kojima sam sarađivala.Takođe, zahvaljujem prijateljima, dedi Vojinu i baki Milenki(†) na podršci koju su mi pružili.

Milena Mandić

*Christoph Sadée

1 Pregled važnih pojmova

Na samom početku podsetimo se najvažnijih pojmova iz oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina. Posebno navodimo najvažnije pojmove i tvrđenja, za ovaj rad, iz Soboljevih prostora. Rezultati su preuzeti iz [6], [20] kao i iz skripti sa kursa Parcijalnih diferencijalnih jednačina, [17].

1.1 Parcijalne diferencijalne jednačine

Definicija 1.1. *Neka su V_1 i V_2 dva vektorska prostora. Preslikavanje $L : V_1 \to V_2$ naziva se operator.*

Standardno R^n je n-dimenzionalan realan Euklidski prostor.
Ako je k nenegativan ceo broj, skup svih parcijalnih izvoda reda k označavamo sa

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) \big| |\alpha| = k\}. \tag{1.1}$$

Pri čemu je vektor $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, sa svim nenegativnim komponentama, multiindeks reda $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Za taj multiindeks α je definisan operator D^α na sledeći način

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{1.2}$$

Definicija 1.2. *Za $k \geq 1$ izraz tipa*

$$F\big(D^k u(x), D^{k-1} u(x), ..., Du(x), u(x), x\big) = 0, \ x \in U \subset R^n \tag{1.3}$$

nazivamo parcijalna diferencijalna jednačina k-tog reda, gde je

$$F : R^{n^k} \times R^{n^{k-1}} \times \cdots \times R^n \times R \times U \to R \tag{1.4}$$

dato i

$$u : U \to R \tag{1.5}$$

je nepoznata.

Definicija 1.3. *Parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ) je:*

1. *linearna ako je oblika*
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{1.6}$$
za date funkcije $a_\alpha(|\alpha| \leq k)$, f. Ona je homogena ako je $f \equiv 0$.

2. *semilinearna ako je oblika*
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, ..., Du, u, x) = 0. \tag{1.7}$$

3. *kvazilinearna ako je oblika*
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1}u, ..., Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, ..., Du, u, x) = 0. \tag{1.8}$$

4. *potpuno nelinearna ako nelinearno zavisi od izvoda najvećeg reda.*

Košijev problem se sastoji od potrage za rešenjem u PDJ koje zadovoljava određene uslove postavljene na domenu.

1.2 Prostor Soboljeva

Ovo poglavlje posvećujemo prostoru Soboljeva, postavci koja će biti od značaja u velikom delu ovog rada.

Definicija 1.4. *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa merom μ na σ - algebri $\mathcal{M}$. $L^1(\mu)$ je skup svih kompleksnih merljivih funkcija $f = u + iv, u, v : X \to R$, za koje važi $\int_X |f| d\mu < \infty$. Takve funkcije se nazivaju Lebeg integrabilne funkcije ili sumabilne funkcije. Skup funkcija $f : X \to C$ sa osobinom $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ u kom identifikujemo funkcije jednake skoro svuda, sa uobičajenim operacijama sabiranja i množenja kompleksnim brojem, je vektorski prostor $L^p(X)$, kraće L^p ako je iz konteksta jasno na kom domenu su definisane funkcije.*

Lema 1.5. *Preslikavanje*

$$f \mapsto \|f\|_p \in R_+, \qquad f \in L^p(X), \tag{1.9}$$

gde je

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu} \tag{1.10}$$

je norma na $L^p(X)$.

Sa C_c^∞ označavamo prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija $\phi : U \to R$, sa kompaktnim nosačem u X. Funkciju ϕ koja pripada $C_c^\infty(X)$ zvaćemo test funkcija.

Definicija 1.6. *Neka su $u, v \in L^1_{loc}(X)$ i α multiindeks. Kažemo da je v α-slabi parcijalni izvod od u, u zapisu*

$$D^\alpha u = v \tag{1.11}$$

ako važi

$$\int_X u D^\alpha \phi \, d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_X v\phi \, d\mu \tag{1.12}$$

za sve test funkcije $\phi \in C_c^\infty(X)$.

To jest, ako postoji funkcija v koja za datu funkciju u zadovoljava (1.12) za svako ϕ, tada kažemo da je $D^\alpha u = v$ u slabom smislu.

Lema 1.7. *Slab α-slabi izvod od u, ako postoji, je jedinstven do na skup mere 0.*

Definicija 1.8. *Soboljev prostor*

$$W^{k,p}(X) \tag{1.13}$$

se sastoji od svih lokalno sumabilnih funkcija $u : X \to R$ takvih da za svaki multiindeks α sa $|\alpha| \le k$, $D^\alpha u$ postoji u slabom smislu i pripada $L^p(X)$.

Ako je $p = 2$, obično pišemo

$$H^k(X) = W^{k,2}(X), \qquad (k = 0, 1, ...) \tag{1.14}$$

Definicija 1.9. *Ako je $u \in W^{k,p}(X)$, definišemo normu*

$$\|u\|_{W^{k,p}(X)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_X |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \le k} ess \ \sup_X |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.15}$$

2 Praktični problemi

Glavni problem u radu sa Košijevim problemom za nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine tipa koji se pojavljuje u kvantnoj mehanici je monotono rastuća funkcija reda rasta interakcije dok intenzitet električnog polja raste bez granice. Važan slučaj i onaj kojim ćemo se mi baviti u ovom radu, za koji se veruje da je fundamentalan, najjednostavniji, netrivijalan slučaj jeste semilinearna talasna jednačina tipa

$$u_{tt} - \Delta u + g(u) = 0, \text{ na } R^3 \times [0, \infty), \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{2.2}$$

gde su $g : R \to R$ i početni uslovi dovoljno glatke funkcije, $u_t = \frac{\partial}{\partial t}u, u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u$ i Δu predstavlja Laplas operator funkcije u na Euklidskom prostoru R^3, tj.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \nabla^2 u. \tag{2.3}$$

U većini primena je prostor reda 3, ali redovi veći od 3 su od interesa za singularitete koji se pojavljuju u algebri za polja većeg spina [26].

Funkcija g je obično polinomnog rasta u u, kako bi fizički bilo jasno. Red rasta $|g(u)|$ za $u \to \infty$ je glavni za određivanje težine rešenja Košijevog problema za datu jednačinu.

2.1 Relativistička teorija čestica

Fizika čestica je grana fizike koja proučava prirodu čestica od kojih se sastoji materija (čestice sa masom) i radijacija (čestice bez mase). Iako se reč čestica može odnositi na različite veoma male objekte kao što su čestica prašine, čestica gasa, proton, boson i slično, fizika čestica obično proučava najmanje uočljive čestice i nedeljivo fundamentalna polja sile koja su potrebne da bi se one opisale. Teorija fizičkih čestica pokušava da razvije modele, teoretske okvire i matematičke alate kako bi se razumeli trenutni eksperimenti i napravila predviđanja za buduće eksperimente. Konvencionalna klasična mehanika je dovoljna kada govorimo o našem svakodnevnom iskustvu. Kada se počne govoriti o brzinama koje se približavaju brzini svetlosti ili o česticama čija je kinetička energija približna proizvodu mase m i kvadrata brzine svetlosti, mc^2, prelazimo iz nerelativističke u relativističku fiziku. Kvantna mehanika se pojavljuje kada gledamo ponašanje materije i čestica na atomskom i subatomskom nivou, ali koje se kreću brzinom približnom brzini svetlosti [14].

Engleski fizičar Paul A.M. Dirak je 1928. izveo talasnu jednačinu za elektron koja je spojila relativnost sa kvantnom mehanikom.

U fizici, posebno relativističkoj kvantnoj mehanici (RKM) i primenama na fiziku čestica, relativističke talasne jednačine predviđaju ponašanje čestica sa velikim energijama i brzinama u poređenju sa brzinom svetlosti. Talasna jednačina daje informaciju o verovatnoj poziciji, količini kretanja i drugim fizičkim svojstvima čestice.

U kvantnoj mehanici, u trodimenzionalnom prostoru, odgovarajući operator količine kretanja i operator energije se identifikuju na sledeći način

$$p \to -i\hbar\nabla, \ E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.4}$$

gde je $\hbar$ Plankova konstanta [11].

Primenom ovih operatora na relativističku jednačinu za energiju

$$E^2 = c^2\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + (mc^2)^2 \tag{2.5}$$

dobijamo

$$-\hbar^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2\nabla^2 u + c^4m^2u. \tag{2.6}$$

Nakon potiranja svega sa $\hbar^2c^2$ i promene znaka

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}u. \tag{2.7}$$

Kako bi se video ključni pojam za ovaj rad, u nastavku će se podrazumevati prirodne jedinice, $c = \hbar = 1$.
I dobijamo Klasičnu Klajn-Gordonovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u - m^2u \tag{2.8}$$

koja odgovara linearnom slučaju $g(u) = m^2u$, jednačine (2.1), gde $m \in R$. U tri dimenzije, m je masa čestice.

Rešenje Klajn-Gordonove jednačine pronađeno proverom je

$$u(\mathbf{x}, t) = Ve^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}. \tag{2.9}$$

Kada čestica nema masu, kao što je to slučaj sa fotonom, govorimo samo o relativnom slučaju. Momenat i energija će imati neke vrednosti i oni će se posmatrati relativistički.

Sa druge strane ukoliko čestica ima masu, posmatraće se vrednost količine kretanja u odnosu na proizvod mase i brzine svetlosti, te više nije moguće posmatrati samo relativan slučaj, mora se preći na ne-relativnost.

Jednačinu (2.8) je prvo napisao Šrodinger, koji je naravno dobro poznavao teoriju relativiteta. I otišao je dalje, on ju je rešio za tada interesantan slučaj atom vodonika, ali rešenje se nije slagalo sa eksperimentima. Kako ova jednačina uključuje i relativistički i ne-relativistički slučaj, a ne radi, razočaran Šrodinger ostavlja ovaj rezultat po strani. No, ako jedna jednačina ne radi pokuša se sa drugom, on uzima ne-relativistički limit za ovu jednačinu

$$E = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2(1+\frac{p^2}{2m^2c^2}) \tag{2.10}$$

i ponovo je rešava za atom vodonika. Sada rešenje tačno predviđa događaje u eksperimentima i odgovarajuća jednačina je danas poznata kao Šrodingerova jednačina [18].

2.2 Nelinearna mezon teorija nuklearnih sila

U fizici, polje je fizička veličina koja ima vrednost u svakoj tački u vremenu i prostoru. Na primer, na karti vremenskih uslova, svakoj tački na mapi je dodeljen vektor koji predstavlja brzinu vetra. U novijim proučavanjima kvantne teorije polja, polje obuhvata prostor, ima energiju i njegovo prisustvo znači nepostojanje vakuma. Kvantovanje je proces prelaska sa klasičnog razumevanja fizičkih fenomena na novija razumevanja poznata kao Kvantna mehanika. U nastavku ćemo pokušati da opišemo neke osnovne pojmove iz teorije čestica.

Spin je osnovna osobina elementarne čestice. Najpribližnije se može shvatiti kao unutrašnji oblik ugaonog impulsa koju nosi elementarna čestica. Radi pojednostavljivanja uvodi se spinski kvantni broj koji opisuje ugaoni momenat elektrona. Ako čestica ima ceolobrojan spin, ona se naziva bozon. Mezon je bozon na koji deluje jaka nuklearna sila [23].

Sledeći predstavnik nelinearnih Klajn-Gordonovih jednačina je jednačina sa nelinearnostima tipa

$$g(u) = m^2 u + t|u|^2 u, \ m \geq R \tag{2.11}$$

ona je predložena za model mezona.

Rešenja bi mogla biti realne ili kompleksne funkcije, ali mi ćemo se u ovom radu kako zbog jednostavnosti, a i kako se čini da su sve bitne karakteristike našeg problema u ovom slučaju, posvetiti proučavanju realnih rešenja jednačine (2.1). U ovom slučaju, g se može izraziti kao

$$g(u) = uf(|u|^2), \tag{2.12}$$

što daje jednačinu (2.1), koju je proučavao Jorgens [12].

2.3 Geometrijska teorija polja

Mnogi drugi modeli su proučavani, oni koji uključuju nelinearnosti g koje zavise i od u_t i od ∇u, prostorni gradijent od u.

Nelinearni "σ-modeli" su jednostavni ali važni primeri geometrijske teorije polja. Neki predstavnici su $O(k)$ σ-modeli [25]. $O(k)$ je jedan veoma pojednostavljen model iz statističke mehanike, koji predstavlja k-dimenzionalne spinove u rešetki proizvoljne dimenzije.

1. U $(1+1)$-oj dimenziji, $O(2)$ model opisuje ponašanje niti sa n-dimezionalnim obrtajima.

2. $O(3)$ model je u vezi sa sinus-Klajn-Gordonovom jednačinom.

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0 \tag{2.13}$$

Ova jednačina je izvedena za dosta fizičkih sistema koji nisu u vezi sa relativnošću, na primer kristalna dislokacija. No, u skorije vreme je našla svoju primenu i u kvantnoj teoriji polja i string teoriji.

σ model uključuje jednačine tipa (2.1) za vektorsko-vrednosne funkcije podvrgnute određenom linearnom ograničenju. U ovom slučaju

$$g(u) = u(|u_t|^2 - |\nabla u|^2) \tag{2.14}$$

i rešenje $u = (u_1, ..., u_n)$ je ograničeno da zadovoljava uslov

$$|u|^2 = 1. \tag{2.15}$$

3 Regularnost

Vidimo da je klasa nelinearnih talasnih jednačina širok pojam. Ovaj rad ćemo ograničiti na proučavanje samo onih nelinearnosti koje zavise samo od u, to jest semilinearan slučaj. Praktični primeri koje smo naveli, sugerišu da treba pretpostaviti $g(0) = 0$, da bi važio princip konačne brzine prostiranja talasa, kao i da nelinearnost zadovoljava

$$|g(u)| \leq C|u|(1 + |u|^{p-2}), \text{ za neko p} \geq 2, C \in R. \tag{3.1}$$

Označimo sa $G(u) = \int_0^u g(v)dv$.
Još više, kao u [27], pretpostavićemo da su uslovi sledeće teoreme zadovoljeni.

Teorema 3.1. *Posmatrajmo nelinearnu talasnu jednačinu. Pretpostavimo*

$$\frac{G(u)}{2} \geq -c|u|^2, \text{ za neku konstantu } c \in R \tag{3.2}$$

i

$$\frac{|G(u)|}{|g(u)|} \to \infty, \text{ kada } |u| \to \infty. \tag{3.3}$$

Tada za bilo koje početne uslove gde $E\big(u(0)\big) < \infty$ i $u(0) \in L^2$, postoji slabo neprekidno rešenje $u : R \to X$ jednačine tako da $E\big(u(t)\big) \leq E\big(u(0)\big)$ za svako $t \in R$.

Jedinstvenost ovog rešenja je otvoren problem. Uslov (3.2) je obavezan za nelinearni član, jer uključuje slučaj Lipšicove nelinearnosti. (3.3) zahteva od G da raste sporije od eksponencijalne funkcije kada $|u| \to \infty$. Ova dva uslova mogu da se zamene sa $ug(u) \geq 0$.

Nasuprot, lako je konstruisati rešenje za (2.1) sa glatkim početnim uslovima koja eksplodiraju u konačnom vremenu, npr. za $\alpha > 0$ funkcija

$$u(x, t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha} \tag{3.4}$$

je rešenje jednačine

$$u_{tt} - \Delta u = \alpha(1 + \alpha)u|u|^{\frac{2}{\alpha}} = A|u|^p \tag{3.5}$$

i eksplodira u $t = 1$ [29].

Fritz John je u svom radu [7] pokazao da je za $A > 0$ i $1 < p < 1+\sqrt{2}$ nosač od u kompaktan i sadržan u konusu $0 \leq t \leq t_0 - |x - x^0|$, ako početni uslovi $u(x, 0), u_t(x, 0)$ imaju nosač u lopti $|x - x^0| \leq t_0$. Pokazano je i više, globalna rešenja su jedinstvena ako su početni uslovi sa kompaktnim nosačem.

Sa druge strane, za $A > 0$, $p > 1 + \sqrt{2}$ globalna rešenja postoje ako su početni uslovi sa kompaktnim nosačem i dovoljno mali.

Na primer, neka je $\{x \big| |x| < 2\}$ kompaktan nosač za C^∞-početne uslove, dobijamo jedinstveno rešenje za (3.5).

Klasa (3.1) - (3.3) uključuje i sledeće specijalne slučajeve

$$g(u) = mu|u|^{q-2} + u|u|^{p-2}, \quad m \geq 0, 2 \leq q < p. \tag{3.6}$$

Kao što ćemo videti, za nelinearnosti ove vrste odgovor na problem egzistencije za (2.1), (2.2) na bitan način zavisi od dimenzije prostora n i eksponenta p. Mi se ograničavamo na fizički interesantan slučaj $n = 3$.

Za $p < 6$ postojanje globalnog rešenja se može ustanoviti relativno jednostavno, dok odgovor na isto pitanje za $p > 6$ nije poznato do sad. Kritičan slučaj $p = 6$ je rešen u [9].

Očigledno postojanje "kritičnog stepena" za (2.1) je zaintrigirao mnoge matematičare, i probudio interes za u^5 - Klajn-Gordonovu jednačinu. "Kritičan stepen" se često pojavljuje u nelinearnostima kroz Soboljevo preslikavanje. Posebno, $p = 6$ je kritičan stepen za Soboljevo preslikavanje $H^{1,2}_{loc}(R^3) \to L^p_{loc}(R^3)$.

Posmatrajmo sada sledeći slučaj

$$u_{tt} - \Delta u + u|u|^{p-2} = 0, \; p > 2. \tag{3.7}$$

Jorgens je 1961. godine u [12] ustanovio da za $n = 3, p < 6$ postoji globalno i regularno rešenje. Za proizvoljno veliko p pokazao je da postoji lokalno regularno rešenje za problem (3.7), (2.2). Takođe je redukovao problem postojanja globalnog, regularnog rešenja za (2.1) na procenu L^∞-norme rešenja.

Za $n > 3$ ovi rezultati su pokazani, no oni izlaze van okvira našeg rada [19].

Za $n = 3, p = 6$, u [21] Rauč je dobio globalno postojanje C^2-rešenja, pretpostavljajući da je početna energija

$$E\big(u(0)\big) = \int_{R^3} \left(\frac{|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2}{2} + \frac{|u|^6}{6} \right) dx \tag{3.8}$$

mala.

Mi ćemo posmatrati jednačinu

$$u_{tt} - \Delta u + u^5 + u|u|^{p-2} = 0, \quad \text{na } \; R^3 \times [0, \infty), \tag{3.9}$$

i pokazati da se dovoljno male početne uslove i $p > 2$ postojanje globalnog regularnog rešenja dobija iz Raučovog rezultata.

Neke interesantne kvalitativne osobine ovog slučaja mogu se pogledati u [36].

Za veliku početnu energiju Rauč je 1987, pokazao da postoje globalna C^2-rešenja u radijalno simetričnom slučaju $u_0(x) = u_0(|x|), \; u_1(x) = u_1(|x|)$.

Grilakis je u [9] uklonio pretpostavku o simetriji, dobijajući sledeći rezultat:

Teorema 3.2. *Za bilo koje $u_0 \in C^3(R^3)$, $u_1 \in C^2(R^3)$ postoji jedinstveno rešenje $u \in C^2\big(R^3 \times [0, \infty)\big)$ Košijevog problema*

$$u_{tt} - \Delta u + u^5 = 0, \tag{3.10}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \; u_t|_{t=0} = u_1. \tag{3.11}$$

Neke rezultate ćemo i mi prikazati u narednim poglavljima.

Istraživanja o kritičnom slučaju u velikim dimenzijama su u progresu. No, do ovog momenta rezultati na ovu temu su nepotpuni. Napredak u ovim slučajevima može da zahteva korišćenje osobina fundamentalnog rešenja talasne jednačine.

3.1 Priprema

Počinjemo naše proučavanje jednačine (2.1) sa nekim generalnim komentarima o lokalnoj rešivosti i globalnoj neprekidnosti rešenja za (2.1), (2.2).

Fundamentalno rešenje

Za bilo koje $f \in C^\infty$, u_0, $u_1 \in C^\infty$ postoji jedinstveno C^∞-rešenje Košijevog problema

$$u_{tt} - \Delta u = f(u)\ , \text{ na } R^n \times [0, \infty), \tag{3.12}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1. \tag{3.13}$$

U $n = 3$, najinteresantnijem slučaju, rešenje dobijeno metodom sfernih usrednjavanja je

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} u_0(y)\, dS_y\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} u_1(y)\, dS_y \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial B_{t-s}(x)} \frac{f(y,s)}{t-s} dS_y\, ds. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Gde je $B_r(x) = \{y \in R^n \big| |x-y| < r\}$ [15]. Informacija talasne jednačine se prenosi kroz prostor brzinom koja je manja ili jednaka od koeficijenta uz prostorni faktor. Iz (3.12) vidimo da informacija propagira sa brzinom ≤ 1.

Iz (3.14) vidimo da ako u_0, u_1 i f imaju kompaktne nosače ima ga i $u(t)$ za bilo koje $t \geq 0$. Primetimo da će tada za bilo koje $u_0 \in C^3$, $u_1 \in C^2$, $f \in C^2$, rešenje u biti samo u C^2. To jest, srećemo se sa gubitkom diferencijabilnosti, što je ujedno i najveća mana fundamentalnog rešenja.

Sa druge strane, neće doći do gubitka diferencijabilnosti ako umesto sa C^k funkcijama po obe promenljive, radimo sa integralnim normama. Osnovno zapažanje je sledeće.

Nejednakost energije

Nakon množenja (3.12) sa u_t dobijamo

$$u_t\, u_{tt} - u_t\, (\nabla \cdot \nabla u) = \frac{d}{dt}\left(\frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2}\right) - \nabla \cdot (u_t \nabla u) = f u_t \tag{3.15}$$

gde se

$$e_0(u) = \frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2} \tag{3.16}$$

i $p(u) = u_t \nabla u$ mogu protumačiti kao gustina energije i količina kretanja rešenja u. Semilinearnoj talasnoj jednačini možemo da dodelimo energetsku normu

$$\|u(t)\|_0^2 := E_0\big(u(t)\big) = \int_{R^n} e_0\big(u(\cdot, t)\big) dx. \tag{3.17}$$

Primetimo da na osnovu teoreme o divergenciji važi

$$\int_{B_t(x)} \big(\nabla \cdot (u_t \nabla u)\big) dV = \int_{\partial B_t(x)} (u_t \nabla u) d\mathbf{S} \tag{3.18}$$

gde je V zapremina, koja je kompaktna i ima po delovima glatak rub $S = \partial V$. Zatvorena površ ∂V je granica V orijentisana sa normalama koje pokazuju izvan, a $\mathbf{n}$ je jedinično polje normala. Kako je u zatvorenim sistemima ukupna količina kretanja konstantna imamo da važi

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial B_t(x)} (u_t \nabla u) d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} C = 0. \tag{3.19}$$

Lema 3.3. *[6] (**Helderova nejednakost**) Pretpostavimo da je* $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tada ako je* $f \in L^p(X), g \in L^q(X)$, *imamo*

$$\|f\, g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3.20}$$

Lema 3.4. *[6] (**Koši Švarcova nejednakost**) Pretpostavimo da je* $1 \leq p, q \leq \infty$. *Tada za* $f, g \in L^2(X)$ *važi*

$$\int_X |f\, g| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \tag{3.21}$$

Integraleći (3.16) po x, ako $u(t)$ ima kompaktan nosač, iz Helderove nejednakosti i (3.19) dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_0\big(u(t)\big) &= \int_{R^n} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2} \right) - \nabla \cdot (u_t \nabla u) \right) dx \\
&\leq \left(\int_{R^n} |f(\cdot, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{R^n} |u_t(\cdot, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(2E_0\big(u(t)\big) \Big)^{\frac{1}{2}} \|f(\cdot, t)\|_2 \\
&\leq \sqrt{2} \|u(t)\|_0 \, \|f(\cdot, t)\|_2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Diferenciranjem energetske norme i koristeći prethodne nejednakosti dobijamo

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f(\cdot, t)\|_2 \leq \|f(\cdot, t)\|_2. \tag{3.23}$$

Posebno, ako je $f = 0$, energija E_0 je očuvana.

Razni drugi zakoni o očuvanju mogu da se dobiju koristeći razne množitelje koji su u vezi sa simetričnim talasnim operatorom. Veoma suptilni identiteti i procene integrala su pronađeni na ovaj način [27].

Ovde ih nećemo koristiti, ali navešćemo jedan. Kada se nelinearna talasna jednačina pomnoži sa u, dobijamo

$$\frac{d^2}{dt^2} \int \frac{u^2}{2} dx = \int \big(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u f(u) \big) dx. \tag{3.24}$$

Do sada je (3.23) ustanovljena strogo samo za C^∞ uslove u_0, u_1 i f sa kompaktnim prostornim nosačem. U nastavku ćemo pokušati da proširimo validnost (3.23) na distributivna rešenja od (3.12) za konačne početne uslove energije, to jest, za u_0, $u_1 \in L^2(R^n)$, $\nabla u_0 \in L^2(R^n)$ i funkcije f koje pripadaju $L^2\big(R^n \times [0, T]\big)$ za bilo koje $T > 0$.

Ovo proširenje ćemo ostvariti koristeći činjenicu da je C_0^∞ gusto u prostoru $L^2(R^n)$, na dole opisan način. Funkcije u_0 i u_1 možemo da aproksimiramo funkcijama u_0^m, $u_1^m \in C_0^\infty$ koje će u energetskoj normi konvergirati ka u_0, u_1 kada $m \to \infty$. Slično za bilo koje $T > 0$ možemo naći glatke funkcije f^m sa kompaktnim nosačem koje konvergiraju ka f u $L^2\big(R^n \times [0, T]\big)$.

Definicija 3.5. *Za niz funkcija* $\{f_n\}$ *iz skupa* S *kažemo da su Koši uniformne ako za svako* $\epsilon > 0$ *postoji* $N > 0$ *takvo da za sve* $x \in S$

$$d\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \epsilon, \ \textit{kad god } m, n > N. \tag{3.25}$$

Lema 3.6. *[35] Neka je* S *topološki prostor i* M *kompletan metrički prostor. Tada svaki Koši uniforman niz neprekidnih funkcija* $\{f_n\}$, *gde* $f_n : S \to M$, *teži uniformno ka jedinstvenoj neprekidnoj funkciji* $f : S \to M$.

Neka je $\{u^m\}_{m\in N}$ odgovarajući niz rešenja za (3.12), (3.13) datih klasičnom fundamentalnom formulom. Onda primenjujući (3.23) na razliku $v = u^m - u^l$ za bilo koja dva rešenja, vidimo da je $\{u^m(\cdot,t)\}_{m\in N}$ Košijev niz sa energetskom normom, uniforman na $t \in [0,T]$.

Limit u konstruisanog niza je distributivno rešenje za (3.12) (3.13) sa uniformnom konačnom energijom na intervalu $[0,T]$, koje zadovoljava u malo slabijem smislu

$$\frac{d}{dt}\big(\|u(t)\|_0 - \|u(0)\|_0\big) \leq \frac{d}{dt}\|u(t) - u(0)\|_0 \leq \|f(\cdot,\tau)\|_{L^2(R^n)} \tag{3.26}$$

to jest,

$$\|u(t)\|_0 \leq \|u(0)\|_0 + \int_0^t \|f(\cdot,\tau)\|_2 d\tau \tag{3.27}$$

za sve $t \leq T$. Pri tom, u je jedinstveno.

Na sličan način, sada koristimo (3.27) da konstruišemo rešenja za nelinearnu talasnu jednačinu (2.1), (2.2), za glatke, početne uslove sa kompaktnim nosačem i glatkim nelinearnostima koje zadovoljavaju Lipšicov uslov skraćivajući mapirani argument.

Globalna rešenja za Lipšicove nelinearnosti

Definicija 3.7. *Pretpostavimo da je $U \subset R^n$ otvoren i $0 < \gamma \leq 1$. Klasa Lipšic neprekidnih funkcija $u : U \to R$, zadovoljava sledeću nejednakost*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \qquad (x, y \in U). \tag{3.28}$$

Ako je $g : R \to R$ glatka, globalno Lipšicova, za bilo koje $v \in C_0^\infty\big(R^n \times [0,\infty)\big)$ dobijamo C^∞-rešenje $u = K(v)$ za početni problem

$$u_{tt} - \Delta u = -g(v) \tag{3.29}$$

sa početnim uslovima u_0, u_1. Na osnovu (3.27), za sve $T > 0$ imamo

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq T} \|\big(K(v) - K(\hat v)\big)(t)\|_0 &\leq \int_0^T \|\big(g(v) - g(\hat v)\big)(t)\|_2 dt \\ &\leq L\int_0^T \|(v-\hat v)(t)\|_2 dt \\ &\leq TL \sup_{0\leq t\leq T} \|(v-\hat v)(t)\|_2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Gde L predstavlja Lipšicovu konstantu za g. Šta više, ako u_0, u_1 imaju nosač u $B_R(0)$, i ako $v(t)$ ima nosač u $B_{R+t}(0)$, imaće i $u(t)$.

Lema 3.8. *[6] (**Poenkarova nejednakost**) Neka je p, takvo da $1 \leq p < \infty$ i Ω podskup sa bar jednom granicom. Tada postoji konstanta C, koja zavisi samo od Ω i p, tako da, za svaku funkciju u iz $W_0^{1,p}(\Omega)$ Soboljevog prostora važi*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.31}$$

Optimalnu konstantu C je teško odrediti, a ona se naziva Poenkarova konstanta za domen Ω. Određeni specijalni slučajevi su poznati. Na primer ako je Ω ograničen, konveksan, Lipšicovski domen prečnika d, tada je Poenkarova konstanta najviše $\frac{d}{2}$ za $p = 1$, $\frac{d}{\pi}$ za $p = 2$.

Iz Poenkarove nejednakosti, za v, $\hat{v}$ koji zadovoljavaju (3.30), možemo da procenimo

$$\|(v-\hat{v})(t)\|_2 \leq \frac{R+t}{\pi}\|\nabla(v-\hat{v})(t)\|_2. \tag{3.32}$$

Iz (3.16) i (3.17) imamo

$$\|\nabla u(t)\|_2 = \Big(\int \nabla u^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int 2\frac{u_t^2+\nabla u^2}{2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\|u(t)\|_0. \tag{3.33}$$

Koristeći prethodno za $t \leq 1$ imamo

$$\frac{R+t}{\pi}\|\nabla(v-\hat{v})(t)\|_2 \leq \sqrt{2}(R+1)\|(v-\hat{v})(t)\|_0 \tag{3.34}$$

odakle konačno imamo za $T \leq \min\{1, \frac{1}{\sqrt{2}(R+1)L}\} = y$

$$TL \sup_{0\leq t\leq T}\|(v-\hat{v})(t)\|_2 \leq \begin{cases} L \sup\|(v-\hat{v})(t)\|_{L^2} \leq L\sqrt{2}(R+1)\|(v-\hat{v})(t)\|_0, & y=1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}(R+1)}\sup\|(v-\hat{v})(t)\|_2 \leq \|(v-\hat{v})(t)\|_0, & y=\frac{1}{\sqrt{2}(R+1)L},. \end{cases} \tag{3.35}$$

to jest

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\big(K(v)-K(\hat{v})\big)(t)\|_0 \leq q\|(v-\hat{v})(t)\|_0 \tag{3.36}$$

gde je $q \leq 1$.

Definicija 3.9. *Neka je (X,d) metrički prostor. Tada se preslikavanje $T : X \to X$ zove **kontrakovano preslikavanje** na X ako postoji $q \in [0,1)$ takvo da je*

$$d\big(T(x),T(y)\big) \leq q\, d(x,y) \tag{3.37}$$

za svako $x, y \in X$.

Dakle, K se može proširiti na prostor

$$\begin{aligned} V = \big\{v \in L^2\big(R^n \times [0,T]\big)\big|\, &supp\big(v(t)\big) \subset B_{R+t}(0), \\ &v_t(t), \nabla v(t) \in L^2(R^n) \text{ za skoro svako } t \\ &\text{i} \sup_{0\leq t\leq T}\|v(t)\|_0 < \infty\big\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

snabdevena sa normom

$$\|v\|_V = \sup_{0\leq t\leq T}\|v(t)\|_0. \tag{3.39}$$

Teorema 3.10. *[10] (**Banahova teorema o fiksnoj tački**) Neka je (X,d) neprazan kompletan metrički prostor sa kontrakovanim preslikavanjem $T : X \to X$. Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku $x*$ u X (to jest $T(x*) = x*$).*

$x*$ se može naći na sledeći način: izabere se proizvoljan element $x_0 \in X$ i definiše se niz $\{x_n\}$ sa $x_n = T(x_{n-1})$, tada $x_n \to x*$.

Neka je u jedinstvena fiksna tačka preslikavanja K u V. Tada je u slabo rešenje (2.1), (2.2) u distributivnom smislu.

Kako je $0 < T_0$ *i* $T \leq \min\Big\{1, \frac{1}{\sqrt{2}L(R+1)}\Big\}$, iteracijom gornje konstrukcije konačan broj puta dobijamo konačno rešenje na intervalu $[0, T_0]$ za bilo koje konačne početne uslove sa nosačem u lopti poluprečnika R. Kako je R proizvoljno, a time i T_0 proizvoljno, rešenje se može proširiti globalno.

Primetimo da je brzina širenja ≤ 1, odakle možemo ukloniti pretpostavke o kompaktnom nosaču. Zaista, ako u i v daju rešenje (2.1) za kompaktan nosač, sa početnim uslovima konačne energije koje se nalaze na lopti $B_R(0)$, njihova razlika $\hat{u}$ će dati rešenje jednačine (2.1) sa Lipšic nelinearnosti $\hat{g}$, gde je $\hat{g} = g(u) - g(v)$, i početnim uslovima koji nestaju na $B_R(0)$.

Na osnovu gore navedenih rezultata o postojanju i jedinstvenosti rešenja, $\hat{u}$ je rešenje i van konusa $K = \big\{(x,t)\big||x| < R - t\big\}$ iznad $B_R(0)$. Dakle rešenje za (2.1) na K je potpuno određeno svojim početnim uslovima u $B_R(0)$.

Za proizvoljne u_0, u_1 sa lokalno konačnim energijama i $k \in N$, dopuštamo da u_0^k, u_1^k budu sa kompaktnim nosačem koji odgovaraju u_0, u_1 na $B_k(0)$. Za bilo koje $k \in N$ odgovarajuća globalna rešenja $u^{(k)}, k \geq k_0$ odgovaraju konusu iznad $B_{k_0}(0)$. Dakle niz $u^{(k)}$ lokalno konvergira u energetskoj normi ka globalnom rešenju u za (2.1), (2.2).

Na isti način, u vezi sa postojanjem globalnog rešenja, možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti i zbog jednostavnosti, da početni uslovi imaju kompaktan nosač. Šta više, za našu narednu temu zahtevamo da su uslovi u_0, u_1 glatki.

Jaka rešenja

Uzimajući razlike kvocijenata $u^{(h)} = \frac{u(*)-u(*+he)}{h}$ u bilo kom prostornom pravcu e imamo da je $\lim\limits_{h\to 0} u^{(h)} = v$ slabo rešenje za

$$v_{tt} - \Delta v + g'(u)v = 0 \tag{3.40}$$

i zadovoljava

$$\begin{aligned} \|v(T)\|_0 - \|v(0)\|_0 &\overset{3.27}{\leq} \int_0^T \|(g'(u)v)(t)\|_2 dt \\ &\leq L\int_0^T \|v(t)\|_2 dt \\ &\leq CL\int_0^T \|v(t)\|_0 dt \end{aligned} \tag{3.41}$$

za bilo koje $T > 0$. Dakle $\nabla u_t(t), \nabla^2 u(t) \in L^2(R^n)$, uniformno na $t \in [0,T]$, i iz jednačine (2.1) takođe dobijamo da $u_{tt} \in L^2$, uniformno u $t \in [0,T]$, za bilo koje $T > 0$. Ovo je klasa ¨jakih¨ rešenja za nelinearne talasne jednačine. Za jaka rešenja možemo da izvedemo jaku formu nejednakosti energije (3.12). Kako je $g(u)u_t = \frac{d}{dt}G(u)$, nakon množenja (3.12) sa u_t dobijamo zakon o održanju

$$\frac{d}{dt}\bigg(\frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2} + G(u)\bigg) - div(u_t \nabla u) = 0, \tag{3.42}$$

gde član

$$e\big(u(t)\big) = \frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2} + G(u) = e_0(u) + G(u) \tag{3.43}$$

sada takođe sadrži gustinu potencijalne energije $G(u)$. Neka je

$$E\big(u(t)\big) = \int_{R^n} e\big(u(t)\big) dx. \tag{3.44}$$

Integralenjem nad R^n, kako je $u(t)$ sa kompaktnim nosačem, dobijamo da je energija očuvana.

$$\frac{d}{dt}E\big(u(t)\big) = 0. \tag{3.45}$$

Primedba. Iteriranjem gornje procedure, možda ćemo želeti da izvedemo L^2 - granice za sve veće i veće izvode $D^k(u)$, $k \in N_0$. Na primer, u slučaju $k = 3$, bilo koji prostorni izvod drugog reda $w = \nabla^2 u$ zadovoljava

$$w_{tt} - \Delta w + g'(u)w + g''(u)|\nabla u|^2 = 0. \tag{3.46}$$

Dalje se nastavlja kao za osnovnu jednačinu.

Lokalna rešenja za semilinearne jednačine

Zaista, za dato proizvoljno preslikavanje $g : R \to R$ možemo da aproksimiramo g sa funkcijama $g^{(k)}$ zadovoljavajući Lipšicove uslove i poklapajući se sa g za $\|u\| \leq k$.

Iz prethodne diskusije, za date bilo koje glatke početne uslove sa kompaktnim nosačem, za bilo koje $k \in N$ dobijamo globalno jako rešenje $u^{(k)}$ približne jednačine

$$u_{tt} - \Delta u + g^{(k)}(u) = 0 \tag{3.47}$$

sa $\|D^l u^{(k)}(t)\|_0 \leq C$ za bilo koje $l \in \{0, ..., l_0\}$ na nekom intervalu $0 \leq t \leq T = T(t_0)$, gde C zavisi od Lipšicove konstane za $g^{(k)}, l_0, T$ i veličine nosača početnih uslova.

Ako je $n = 3$, na osnovu Soboljeve teoreme o ulaganju imamo

$$\|D^l u^{(k)}(t)\|_\infty \leq C\|D^{2+l} u^{(k)}(t)\|_2 \leq C\|D^{1+l} u^{(k)}(t)\|_0 \tag{3.48}$$

za $l = 0, 1, 2$. Posebno za velike $k \in N$ i dovoljno male $T > 0$, dobijamo $|u^{(k)}(x, t)\| \leq k$ u $R^3 \times [0, T]$, i $u^{(k)}$ će biti rešenje za (2.1). Slično, ako je $n > 3$ možemo da ograničimo

$$\|D^l u^{(k)}(t)\|_\infty \tag{3.49}$$

u smislu $\|D^{m+l} u^{(k)}(t)\|_0$, gde $m > \frac{n}{2} - 1$, i možemo da zaključimo isto kao pre.

Zbog konačnosti brzine prostiranja možemo ukloniti pretpostavku da su početni uslovi sa kompaktnim nosačem. U ovom slučaju, možemo samo utvrditi postojanje rešenja za (2.1) (2.2) u okolini $R^n \times \{0\}$.

Globalno slaba rešenja

Sada ćemo se skoncentrisati na nelinearnosti g koje su oblika (2.1), (2.2), (3.1), (3.2) i (3.2). Na osnovu pretpostavke (3.2) postoji niz $r_k^\pm \to \infty$ kada $k \to \infty$ takav da

$$r_k^\pm g(r_k^\pm) \geq -C|r_k^\pm|^2. \tag{3.50}$$

Aproksimiramo g sa Lipšicovom funkcijom

$$g^{(k)}(u) = \begin{cases} g(r_k^-), & \text{ako } u < r_k^-, \\ g(u), & \text{ako } r_k^- \leq u \leq r_k^+, \\ g(r_k^+), & \text{ako } u > r_k^+. \end{cases}$$

Sa primitivnom funkcijom $G^{(k)}(u)$. Primetimo da aproksimirana funkcija $g(k)$ zadovoljava (3.2) sa uniformnom konstantom C. Sada, za bilo koje $k \in N$ i glatkim uslovima, sa kompaktnim nosačem dobijamo jedinstveno globalno jako rešenje $u^{(k)}$ za aproksimirani problem (2.1), (2.2) sa $D^2 u^{(k)}(t) \in L^2(R^n)$ za svako t.

Očuvanje energije (3.45) implicira uniformne granice za $u = u^{(k)}$. Neka je

$$E^{(k)}\big(u(t)\big) = E_0\big(u(t)\big) + \int_{R^n} G^{(k)}\big(u(t)\big)dx. \tag{3.51}$$

Na osnovu (3.2), (3.45), za bilo koje $t \geq 0$ imamo

$$E_0\big(u(t)\big) - C\|u(t)\|_2^2 \leq E^{(k)}\big(u(t)\big) = E^{(k)}\big(u(0)\big) \leq C \leq \infty \tag{3.52}$$

uniformno za $k \in N$. Kako bismo iskontrolisali $\|u(t)\|_2$, za fiksirano $x \in R^n$ procenjujemo

$$|u(x,t) - u_0(x)|^2 = \left| \int_0^t u_t(x,s)ds \right|^2 \leq t \int_0^t |u_t(x,s)|^2 ds. \tag{3.53}$$

Lema 3.11. *[17] (**Nejednakost Minkovskog**) Pretpostavimo $1 \leq p \leq \infty$ i $f, g \in L^p(X)$. Tada*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{3.54}$$

Integracijom po x i primenom nejednakosti Minkovskog na (3.52) dobijamo

$$E_0\big(u(t)\big) \leq C + CT \int_0^t E_0\big(u(s)\big)ds \tag{3.55}$$

za $E_0\big(u(t)\big)$.

Lema 3.12. *[30] (**Lema Gronvala**) Ako je $f : R_+ \to R_+$ ograničeno odozgo na svakom zatvorenom intervalu $[0,T]$ i zadovoljava*

$$f(T) \leq a(T) + \int_0^T b(T)f(T)dt \tag{3.56}$$

za rastuću funkciju $a(t)$ i pozitivnu(integrabilnu) funkciju $b(t)$ tada

$$f(T) \leq a(T)e^{\int_0^T b(t)dt}. \tag{3.57}$$

Definicija 3.13. *Neka su X i Y Banahovi prostori, $X \subset Y$ Kažemo da je X kompaktno uložen u Y, u oznaci*

$$X \subset\subset Y \tag{3.58}$$

ako važe sledeći uslovi.

1. *$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ $(x \in X)$ za neku konstantu C i*
2. *svaki ograničen niz u X je prekompaktan u Y.*

Teorema 3.14. *[6] (**Teorema Relih-Kondrakova**) Pretpostavimo da je U ograničen otvoren podskup od R^n, i da je $\partial U, C^1$. Pretpostavimo $1 \leq p < n$ i neka je $p* = \frac{pn}{n-p}$. Tada*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U) \tag{3.59}$$

za svako $1 \leq q < p*$.

Dokaz ove teoreme se može pronaći u [6], malo je komplikovanije pa ga nećemo ovde navoditi.

Teorema 3.15. *[20] (**Lema Fatua**) Neka su f_n merljive nenegativne s.s. funkcije na X ($f_n : X \to [0,\infty]$ s.s. na X), $n \in N$. Tada važi*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{3.60}$$

Dokaz. Poznato je da važi $\lim_{n\to\infty}\inf\ f_n = \sup_{k\in N}\big(\inf_{n\geq k} f_n\big)$. Neka je

$$g_k(x) = \inf_{i\geq k} f_i(x), \quad x \in X \tag{3.61}$$

$\{g_k\}_{k\in N}$ je rastući niz funkcija koji konvergira ka $\sup_{k\in N} g_k$.

Jasno $g_k \leq f_n$, za $k \leq n$ te imamo

$$\int_X g_k d\mu \leq \inf_{n\geq k}\int_X f_n d\mu \leq \sup_{k\in N}\inf_{n\geq k}\int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\inf\int_X f_n d\mu. \tag{3.62}$$

Sa druge strane iz $\lim_{k\to\infty} g_k = \sup_{k\in N} g_k$ i činjenice da je $\{g_k\}_{k\in N}$ rastući niz merljivih funkcija konačno dobijamo

$$\int_X \lim_{n\to\infty}\inf f_n d\mu \leq \int_X \lim_{k\to\infty} g_k d\mu = \int_X \sup_{k\in N} g_k d\mu \ \leq \lim_{n\to\infty}\inf\int_X f_n d\mu. \tag{3.63}$$

□

Iz Gronvalove leme zaključujemo da je $u(t) = u^{(k)}(t)$ uniformno ograničeno sa energetskom normom na intervalu $[0,T]$, uniformno na $k \in N$.

Dakle, $\big(u^{(k)}\big)_{k\in N}$ je slabo relativno kompaktno u energetskoj normi. Šta više, nosač od $u^{(k)}(t)$ je uniformno ograničen u k, za sve $t \leq T$. Na osnovu teoreme Relih-Kondrakova, možemo pretpostaviti da $u^{(k)} \to u$ strogo u $L^2(Q)$ na bilo kom kompaktnom prostorno-vremenskom regionu Q i konvergira tačkasto skoro svugde. Limes u ima konačnu energiju

$$E_0\big(u(t)\big) \leq \lim_{k\to\infty}\inf E_0\big(u^{(k)}(t)\big), \tag{3.64}$$

i

$$\int_{R^n} G\big(u(t)\big)dx \leq \lim_{k\to\infty}\inf\int_{R^n} G^{(k)}\big(u^{(k)}(t)\big)dx, \tag{3.65}$$

za skoro svako $t > 0$, na osnovu Fatuove leme.

Definicija 3.16. *Karakterističnu funkciju skupa A je definišemo na sledeći način*

$$\mathcal{K}_A = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

Teorema 3.17. *[20] (**Vitalijeva teorema**) Dat je merljiv prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Neka je $(f_n)_{n\in N}$ niz u $L^p(X)$, $p \in [1,\infty)$ Tada, $f_n \to f$ u $L^p(X), n \to \infty$ ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $f_n \to f$ *u meri,* $n \to \infty$,
2. $(\forall\epsilon > 0)(\exists E_\epsilon \in \mathcal{M})(\mu(E_\epsilon) < \infty)$
$\Big(\big((F \in \mathcal{M}) \wedge (F \in E_\epsilon) = \emptyset\big) \Rightarrow (\forall n \in N)\big(\int_F |f_n|^p d\mu > \epsilon^p\big)\Big)$,
3. $(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta(\epsilon) > 0)$
$\Big(\Big((E \in \mathcal{M}) \wedge \big(\mu(E) < \delta(\epsilon)\big)\Big) \Rightarrow (\forall n \in N)\big(\int_E |f_n|^p d\mu > \epsilon^p\big)\Big)$.

Dokažimo prvo sledeću pomoćnu lemu.

Lema 3.18. *Neka je dat* $\{f_n\}_{n\in N}$*, niz merljivih funkcija iz* $L^p(X)$ *koji konvergira u* $L^p(X)$ *ka* f*. Tada* $f_n \to f$*,* $n \to \infty$ *u meri.*

Dokaz. Neka niz $\{f_n\}_{n\in N}$ konvergira u $L^p(X)$ ka f i neka je $\alpha > 0$. Definišimo

$$E_n(\alpha) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}. \tag{3.66}$$

Tada je

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \geq \int_{E_n(\alpha)} |f_n - f|^p d\mu \geq \alpha^p \mu\big(E_n(\alpha)\big) \geq 0, \tag{3.67}$$

dakle $\mu\big(E_n(\alpha)\big) \to 0$, kada n $\to \infty$. □

Sledeću Lemu dajemo bez dokaza, jer nam je potrebna za dokaz teoreme, ali želimo da ograničimo dokaz na razumnu dužinu

Lema 3.19. ***(Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji)*** *Neka je* f_n *niz kompleksnih merljivih funkcija i*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \ s.s. \ x \in X. \tag{3.68}$$

Ako postoji $g \in L^1(\mu)$*, Lebegova dominanta, tako da važi*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \ s.s. \ x \in X, n \in N. \tag{3.69}$$

Tada $f \in L^1(\mu)$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0, \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \tag{3.70}$$

Dokaz. Nastavljamo sa dokazom teoreme (3.17). Iz Leme (3.18) imamo da $L^p(X)$ konvergencija implicira konvergenciju u meri. Trivijalno primećujemo da $L^p(X)$ konvergencija implicira uslove 2. i 3.

Obratno, se dokazuje da navedena dva uslova impliciraju $L^p(X)$ konvergenciju datog niza. No ova strana je malo složenija i prouvčava se na višem stepenu studija [20]. □

Konačno, za $\phi \in C_0^\infty\big(R^n \times (0, \infty)\big)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \iint\limits_{R^n\times[0,T]} (u_t\phi_t - \nabla u \nabla \phi)\, dxdt &= \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{R^n\times[0,T]} (u_t^{(k)}\phi_t - \nabla u^{(k)} \nabla\phi)\, dxdt \\ &= \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{R^n\times[0,T]} g^{(k)}(u^{(k)})\phi\, dxdt = \iint\limits_{R^n\times[0,T]} g(u)\phi\, dxdt. \end{aligned} \tag{3.71}$$

To jest, u je slabo rešenje jednačine (2.1). (Vitalijeva teorema, (3.3) i (3.65) su korišteni da se prođe sa limitom kroz nelinearni član). Slično, aproksimacijom L^2 -rešenja u_0, u_1 konačne energije

$$\int_{R^n} \left(\frac{|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2}{2} + G(u_0)\right) dx < \infty \tag{3.72}$$

funkcijama $u_0^{(k)}$, $u_1^{(k)} \in C_0^\infty(R^n)$, može se izvesti postojanje globalnog slabog rešenja za (2.1) za proizvoljne uslove konačne energije.

Regularnost i jedinstvenost

U specijalnom slučaju (3.7) sa $p < \frac{2n}{n-2} - \frac{2}{n-2}$ mogu da se koriste procene energije, kako bi se dobile veće regularnosti i jedinstvenosti. Zaista, neka je $u^{(h)}$ diferencijalni kvocijent u pravcu $e \in R^n$ kao pre. Tada, nakon prolaska kroz limit $h \searrow 0$, za $v = e \cdot \nabla u$ dobijamo

$$v_{tt} - \Delta v = (1-p)|u|^{p-2} v \tag{3.73}$$

na osnovu Helderove nejednakosti i (3.23), da je

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0 \le C\|(|u|^{p-2}v)(t)\|_2 \le C\|u(t)\|_{2^*}^{p-2}\|v(t)\|_{2*}, \tag{3.74}$$

gde je $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Soboljeva nejednakost implicira da

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0 \le C\|u(t)\|_0^{p-2}\|v(t)\|_0 \tag{3.75}$$

i sledi da je $E_0\big(v(t)\big) < \infty$ za svako t i u je jako rešenje za (2.1). Slično se mogu dobiti više regularnosti (za malo vreme, ako je dimenzija velika). Kako bi se videla jedinstvenost, neka su $u, \hat{u}$ rešenja za (3.7) sa istim početnim uslovima (2.2). Za $v = u - \hat{u}$ dobijamo nejednakost

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0 \le C\Big(\|u(t)\|_0 + \|\hat{u}(t)\|_0\Big)^{p-2}\|u(t)\|_0. \tag{3.76}$$

Kako je $v(0) = v_t(0) = 0$, jedinstvenost sledi.
Sofisticiranijim metodama gornji rezultati regularnost i jedinstvenosti mogu se proširiti do punog potkritičnog opsega $p < \frac{2n}{n-2}$.

Klasična rešenja

Ako je $n = 3$, koristeći (3.14) može se izvesti argument za kontraktivno preslikavanja u prostoru C^2 kako bi se dobilo lokalno klasično rešenje za (2.1), (2.2) za početne uslove $u_0 \in C^3, u_1 \in C^2$ sa kompaktnim nosačem.

Zaista, sa (3.14) početni uslovi problema (2.1), (2.2) mogu se konvertovati u integralnu jednačinu

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{|x-y|=t-s} \frac{g\big(u(y,s)\big)}{t-s} dyds, \tag{3.77}$$

gde v predstavlja rešenje homogene talasne jednačine sa uslovima (2.2). Ako je g glatka i globalno Lipšicova ovo se lako može rešiti na $R^3 \times [0,T]$ za dovoljno malo $T > 0$ kontraktivnim preslikavanjem prostornog argumenta u prostoru $C^0\big(R^3 \times [0,T]\big)$ sa L^∞ normom. Diferenciranjem (2.1) u bilo kom prostornom pravcu, slično dobijamo

$$Du(x,t) = Dv(x,t) - \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{|x-y|=t-s} \frac{g'(u)Du}{t-s} dyds \tag{3.78}$$

i analogno jednačina za drugi izvod, iz koje možemo da izvedemo lokalnu uniformnost granica za sve prve i druge izvode od u na $R^3 \times [0,T]$. Kako bi se proširilo u izvan T prvo ćemo napisati

$$u(x,t) = v_1(x,t) - \frac{1}{4\pi}\int_T^t \int_{|x-y|=t-s} \frac{g\big(u(y,s)\big)}{t-s} dyds \tag{3.79}$$

gde sada v_1 predstavlja rešenje homogene talasne jednačine sa uslovima $u(\cdot,T)$ i $u_t(\cdot,T)$ u vremenu T.

Iz prethodne diskusije, za glatke Lipšicove nelinearnost iterirajući dobijamo globalna C^2-rešenja. Slično, za glatku funkciju g dobijamo lokalna C^2-rešenja (za malo vreme). Međutim, ako je $g'(u)$ uniformno ograničeno (na primer, ako je u uniformno ograničeno) na intervalu $[0, T]$, tada se takođe ovo rešenje proširuje globalno. Na kraju, zbog konačnosti rasta brzine, pretpostavka da uslovi imaju kompaktan nosač propada.

Zbog gubitka diferencijabilnosti nelinearnog člana, u dimenzijama $n > 3$ ovaj pristup nije dobar.

3.2 Raučov rezultat

Posmatramo nelinearnu talasnu jednačinu

$$u_{tt} - \Delta u + u^5 = 0, \text{ u } R^3 \times [0, \infty) \tag{3.80}$$

sa početnim uslovima

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1. \tag{3.81}$$

Neka $z = (x, t)$ predstavlja generator tačaka u prostor-vremenu $R^3 \times R$. Negativni svetlosni konus kroz $z_0 = (x_0, t_0)$ je dat sa

$$K(z_0) = \big\{(x,t)\big| t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\big\}. \tag{3.82}$$

Njegov omotač i prostorni presek su označeni sa

$$M(z_0) = \big\{(x,t) \in K(z_0)\big||x - x_0| = t_0 - t\big\} \tag{3.83}$$

redom

$$D(t, z_0) = \big\{(x,t) \in K(z_0)\big\}, \quad (t \text{ je fiksirano}). \tag{3.84}$$

Ako je $z_0 = (0, 0)$, z_0 će se izostaviti. Za bilo koji prostorno-vremenski region $Q \subset R^3 \times [0, \infty)$, i neka je $T < S$, odsečene konuse označavamo sa

$$Q_S^T = \big\{(x,t) \in Q \,\big|\, T \leq t \leq S\big\} \tag{3.85}$$

odsečeni region. Te, na primer

$$\partial K_t^s = D(s) \cup D(t) \cup M_t^s. \tag{3.86}$$

Ako je $s = \infty$ ili $t = 0$, biće izostavljeni.
Loptu u Euklidskom prostoru označavamo sa $B_R(x_0)$

$$B_R(x_0) = \big\{x \in R^3\big||x - x_0| < R\big\} \tag{3.87}$$

sa granicom

$$S_R(x_0) = \big\{x \in R^3\big||x - x_0| = R\big\}. \tag{3.88}$$

Ako je $x_0 = 0$, $B_R(0) = B_R$.

Za datu funkciju u na konusu $K(z_0)$, označavamo gustinu njene energije sa

$$e(u) = \frac{1}{2}\big(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\big) + \frac{1}{6}|u|^6 \tag{3.89}$$

i sa

$$E\big(u, D(t, z_0)\big) = \int_{D(t,z_0)} e(u)dx \tag{3.90}$$

njenu energiju na prostornom preseku $D(t, z_0)$. Šta više, neka je $x = y + x_0$ i označimo sa

$$d_{z_0}(u) = \frac{1}{2}\left|\frac{y}{|y|}u_t - \nabla u\right|^2 + \frac{1}{6}|u|^6 \tag{3.91}$$

gustinu energije u tangentnu na $M(z_0)$.
Slova c, C predstavljaju razne pozitivne konstante, ponekad numerisane zbog jasnoće.
E_0 predstavlja granicu za početnu energiju.

Naredne dve leme se koriste za dokaz Raučove teoreme. Drugu ćemo navesti bez dokaza zbog previše tehničkih detalja. Dokaz druge leme kao i dokaz Raučove teoreme se može detaljno pogledati u [21].

Lema 3.20. *[4] Neka $u \in L^6(B_R)$ ima slab radijalni izvod $u_r = \frac{x\cdot\nabla u}{|x|} \in L^2(B_R)$. Tada sa apsolutnom konstantom C_0 za sve $0 \leq \rho < R$ sledeće važi:*

1. $\displaystyle\int_{B_R} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}dx \leq 4\int_{B_R}|u_r|^2dx + \frac{1}{2R}\int_{S_R}|u|^2do,$
2. $\displaystyle\int_{B_R} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}dx \leq C_0\Big(\int_{B_R}|u_r|^2dx + \Big(\int_{B_R}|u|^6dx\Big)^{\frac{1}{3}}\Big),$
3. $\displaystyle\int_{S_R}|u|^4do \leq C_0\Big(\Big(\int_{B_R}|u_r|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B_R}|u|^6dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{B_R}|u|^6dx\Big)^{\frac{2}{3}}\Big).$

Dokaz. Dokaze dajemo ilustrativno, zbog njegove važnosti u dokazu Rauhove teoreme.

1. Iz
$$\partial_r(\sqrt{r}u) = \sqrt{r}u_r + \frac{u}{2\sqrt{r}} \tag{3.92}$$
imamo
$$\begin{aligned} u_r^2 &= \Big(\frac{1}{\sqrt{r}}\partial_r(\sqrt{r}u) - \frac{1}{2r}u\Big)^2 \\ &= \Big(\frac{\partial_r(\sqrt{r}u)}{\sqrt{r}}\Big)^2 - 2\frac{\sqrt{r}u}{r^2u}\partial r(\sqrt{r}u) + \frac{u^2}{4r^2} \\ &\geq \frac{u^2}{4r^2} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}(ru^2). \end{aligned} \tag{3.93}$$
Sada množeći obe strane nejednakosti sa r^2 i integraleći nad B_R dobijamo traženu nejednakost.

2. Posmatrajmo sada
$$\partial_r(r^2\int_{S_R}u^4dx) = 2r\int_{S_R}u^4dx + 4r^2\int_{S_R}u^3u_rdx = 2r\int_{S_R}u^3udx + 4r^2\int_{S_R}u^3u_rdx. \tag{3.94}$$
Integralenjem iznad B_R, deljenjem svega sa r^2 i koristeći Koši-Švarcovu nejednakost dobijamo
$$R^{-2}\int_S u^4dx \leq \Big(\int_{B_R}u^6dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big[\Big(\int_{B_R}\frac{u^2}{r^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{B_R}u_r^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \tag{3.95}$$
iz prethodne nejednakosti i (1.) dobijamo
$$\frac{1}{4}\int_{B_R}\frac{u^2}{r^2}dx \leq \int_{B_R}u_r^2dx + C_0\Big(\int_{B_R}u^6dx\Big)^{\frac{1}{4}}\Big[\Big(\int_{B_R}\frac{u^2}{r^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{B_R}u_r^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{3.96}$$
iz koje sledi (2.).

3. (3.) Sledi iz (3.95) i (2.).

□

Lema 3.21. *[29] Neka je $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{t})$. Pretpostavimo da je $u \in C^2\big(K_0(\hat{z}) \setminus \{\hat{z}\}\big)$ rešenje (3.10), (3.11). Tada za bilo koje $0 \leq t < s < \hat{t}$ važi*

$$E\big(u, D(s, \hat{z})\big) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{M_t^s(\hat{z})} d_{\hat{z}}(u) do = E\big(u, D(t, \hat{z})\big) \leq E_0 \tag{3.97}$$

gde do predstavlja meru za površinu nad $M(\hat{z})$.

Teorema 3.22. *[29] Postoji konstanta $\epsilon_0 > 0$ takva da (3.10), (3.11) za bilo koje $u_0 \in C^3(R^3), u_1 \in C^2(R^3)$ sa energijom*

$$E_0 = \int_{R^3} \left(\frac{|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2}{2} + \frac{|u_0|^6}{6} \right) dx < \epsilon_0 \tag{3.98}$$

ima globalno C^2 - rešenje.

4 Numerički metodi

Neka je dat početni problem

$$u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5, \tag{4.1}$$

$$x \in [-l, l], \qquad t \in [0, t_{max}) \tag{4.2}$$

sa početnim uslovima

$$u_0 = u|_{t=0} = \phi(x,i), \qquad u_1 = u_t|_{t=0} = 0, \tag{4.3}$$

$$u(-l,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0 \tag{4.4}$$

gde je $\phi(x,i)$ neka delta funkcija, za koju je potrebno proveriti uslove Raučove teoreme.

Podsetimo se, dovoljan uslov da parcijalna diferencijalna jednačina ima globalno rešenje jeste, da početni uslovi (4.3) zadovoljavaju sledeće $u_0 \in C^3(R^3)$ i $u_1 \in C^2(R^3)$. Te u našem slučaju dovoljno je proveriti da li $\phi(x,i) \in C^3(R^3)$.

Primeri 1 i 2 se odnose na sledeću funkciju

$$\phi(x,i) = \delta_{12}(x,i) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 i^2}{4}} \tag{4.5}$$

za različite vrednosti i. Ona je očigledno $C^3(R^3)$.

Primeri 3 i 4 se odnose na sledeću funkciju

$$\delta_{34}(x,i) = \frac{\sin(xi^2)}{\pi x} \tag{4.6}$$

za različite vrednosti j. Ova funkcija u nuli daje $\frac{0}{0}$, te ju je potrebno detaljnije ispitati. Odavno je poznato na osnovu osobina graničnih vrednosti funkcija da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ [8]. Odatle dobijamo da je nula tačka otklonjivog prekida, tj. $\lim\limits_{x\to 0} \delta_{34}(x,i) = \frac{i^2}{\pi}$. Sada možemo da definišemo novu funkciju koju ćemo koristiti u primerima 3 i 4.

$$\phi(x,i) = \begin{cases} \delta_{34}(x,i), & R\backslash\{0\}, \\ \frac{i^2}{\pi}, & x = 0. \end{cases}$$

Funkcija $\delta_{34}(x,i)$ se može razviti u konvergentan Tejlorov red koji je beskonačno diferencijabilan

$$\frac{\sin(xi^2)}{\pi x} = \frac{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xi^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\pi x} \tag{4.7}$$

Koristeći Lopitalovo pravilo dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(xi^2)}{\pi x} = \lim_{x\to 0} \Big(\frac{i^2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} (i^2)^{2k} x^{2k}}{(2k)!} \Big) \tag{4.8}$$

koji je beskonačno diferencijabilna u nuli, te zadovoljava uslov Raučove teoreme [34, 31].

4.1 Numerički metod

Kako bismo izveli postupak za što opštiji slučaj, uzećemo nelinearni deo semilinearne jednačine u obliku funkcije koja zavisi samo od u, $V(u)$. Dakle, početni problem koji rešavamo je dat u narednom obliku

jednačina: $u_{tt} = u_{xx} - V(u)$,

početni uslovi: $u(x,0)_t = 0, u(x,0) = \phi(x,i)$.

Neka su s i t definisani na sledeći način

$s = u_t$,

$r = u_x$.

Tada važe jednakosti

$r_t = s_x$,

$s_t = r_x - V(u)$,

$u_t = s$.

Koristeći ovaj sistem jednačina prvog reda, mnogo je jednostavnije rešiti parcijalnu diferencijalnu jednačinu. Kako računari ne mogu da rade sa neprekidnim vrednostima, diskretizovaćemo promenljive na sledeći način:

- prostornu promenljivu x diskretizujemo sa nizom $\{x_j\}$, gde je $x_j = x_0 + j\Delta x$, $j = -J, ..., -1, 0, 1, .., J$,
- vremensku promenljivu t diskretizujemo sa nizom $\{t^n\}$, gde je $t^n = t^0 + n\Delta t$, $n = 0, 1, .., N$,
- funkciju $u(x,t)$ diskretizujemo sa nizom $\{u_j^n\}$, gde je $u_j^n = u(x_j, t^n)$.

Posmatrajmo sada Tejlorov razvoj rešenja jednačine po vremenskoj promenljivoj. Koristeći prethodno navedene oznake za diskretizaciju dobijamo:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \tag{4.9}$$

Dalje,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{4.10}$$

Na sličan način dobijamo i sledeća dva oblika

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \tag{4.12}$$

Te imamo sledeći oblik parcijalnog izvoda

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \tag{4.13}$$

Iz (4.10) i (4.13) dobijamo vrednost funkcije u određenom vremenskom trenutku, preko prethodnog vremenskog trenutka, dobijamo centriranu šemu vreme-unapred, FTCS [22].

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2 \Delta t). \tag{4.14}$$

Izvod drugog reda dobijamo, samo za prostornu promenljivu, ako proširimo Tejlorov razvoj do drugog reda, to jest iz

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n)\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3) \tag{4.15}$$

i

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n)\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3). \tag{4.16}$$

Imamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x). \tag{4.17}$$

Primetimo da FTC šema ne uključuje nehomogeni član, te ćemo je zbog toga koristiti samo za rešavanje postavljenih jednačina sistema, što će biti osnova za modifikovanu šemu za rešenje parcijalne diferencijalne jednačine.

Numeričkim ispitivanjem primetili smo da nehomogeni član ne pravi veliku razliku kada su na primer $u(x,t)^3$ i $u(x,t)^5$ dok za više stepene numerička greška postaje velika, te je modifikacija neophodna.

Iz $s = u_t$ i (4.9) imamo da je $u_j^{n+1} = u_j^n + s_j^n \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$.

Iz Tejlorovog razvoja imamo da je

$$\begin{aligned} s_j^{n+1} &= s_j^n + \frac{\partial s}{\partial t}(x_j, t^n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= s_j^n + \big(\frac{\partial r}{\partial x}(x_j, t^n) - V(u_j^n)\big)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= s_j^n + \big(\frac{r_{j+1}^n - r_{j-1}^n}{2\Delta x}\big)\Delta t - V(u_j^n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2, \Delta t^2) \\ &= s_j^n + \frac{\alpha}{2}(r_{j+1}^n - r_{j-1}^n) - V(u_j^n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2, \Delta t^2). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Analogno dobijamo i

$$r_j^{n+1} = r_j^n + \frac{\alpha}{2}(s_{j+1}^n - s_{j-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2, \Delta t^2). \tag{4.19}$$

Gde je $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \alpha$ i uzimamo da je $\alpha < 0.9$. Dakle naš algoritam je sledeći

1.
$$\begin{aligned} u_k^0 &= \phi(x_k, i), \\ r_k^0 &= \big(u(x, t^0)_x\big)_{x=x_k}, \\ s_k^0 &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

2.
$$\begin{aligned} r_j^{n+1} &= r_j^n + \frac{\alpha}{2}\Big(s_{j+1}^n - s_{j-1}^n\Big), \\ s_j^{n+1} &= s_j^n + \frac{\alpha}{2}(r_{j+1}^n - r_{j-1}^n) - (u_j^n)^5 \Delta t, \\ u_j^{n+1} &= u_j^n + s_j^n \Delta t. \end{aligned} \tag{4.21}$$

3. Ponoviti 2. korak.

4.2 Primeri - grafički prikaz

Na slikama u nastavku dajemo grafički prikaz rešenja semilinearnih jednačina sa različitim početnim uslovima. Sva rešenja su dobijena metodom koji je izveden u prethodnom poglavlju, a za zainteresovane kod se može pogledati u apendiksu. Pokušali smo da svaku sliku, ili grupu istih, propratimo odgovarajućim komentarima o tome šta se na njima nalazi.

Primetimo da je tumačenje ovakvih grafika otvoren problem, te da nije uvek jasno šta je tačno greška računara ili numeričkog metoda, a šta pravo rešenje. Mi ćemo da pokušamo da damo tumačenje ovih rezultata za neke momente, za koje smatramo da imaju smisla. Kako ovo još uvek nije egzaktna nauka, savetujemo čitaoca da komentare uzima sa rezervom.

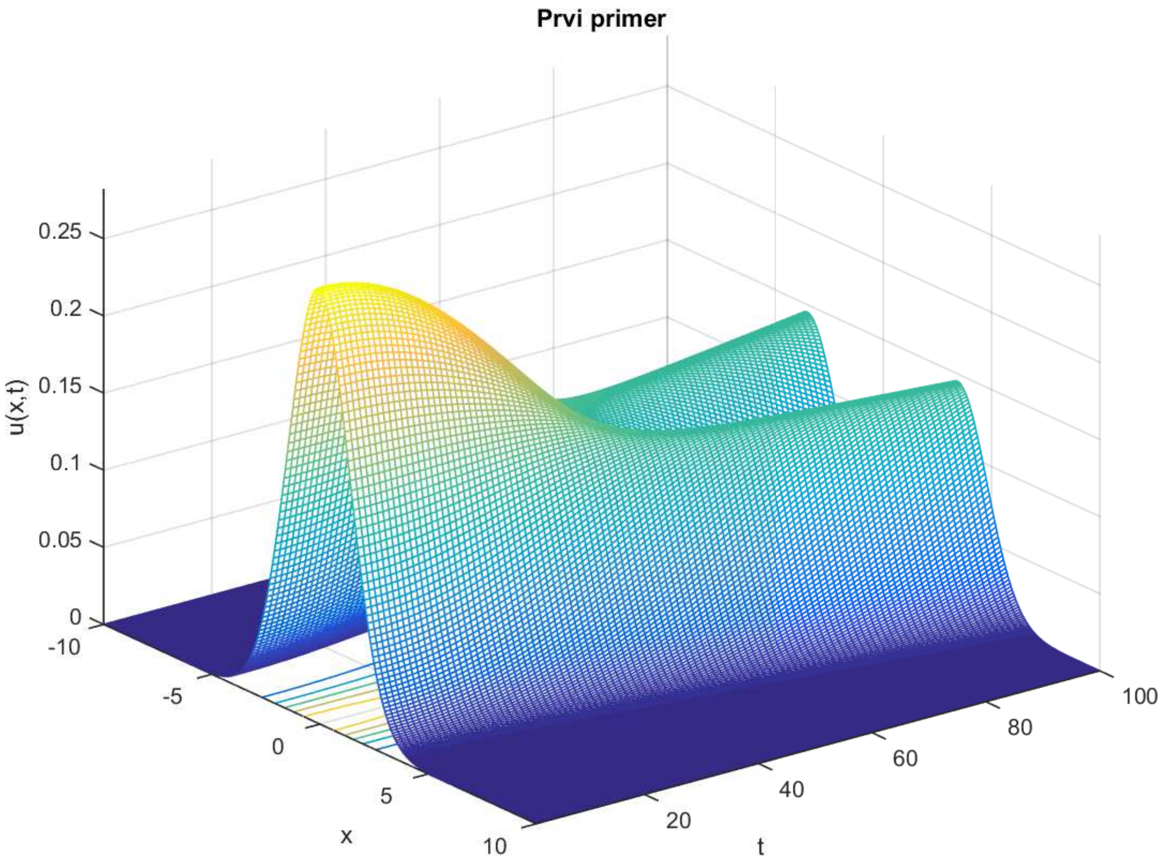
4.2.1 Primer 1

U ovom primeru posmatramo funkciju $\delta_{12}(x,i)$ u $i=1$. To jest problem koji smo ovde rešavali je semilinearna talasna jednačina

$$u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5, \tag{4.22}$$

sa početnim uslovima

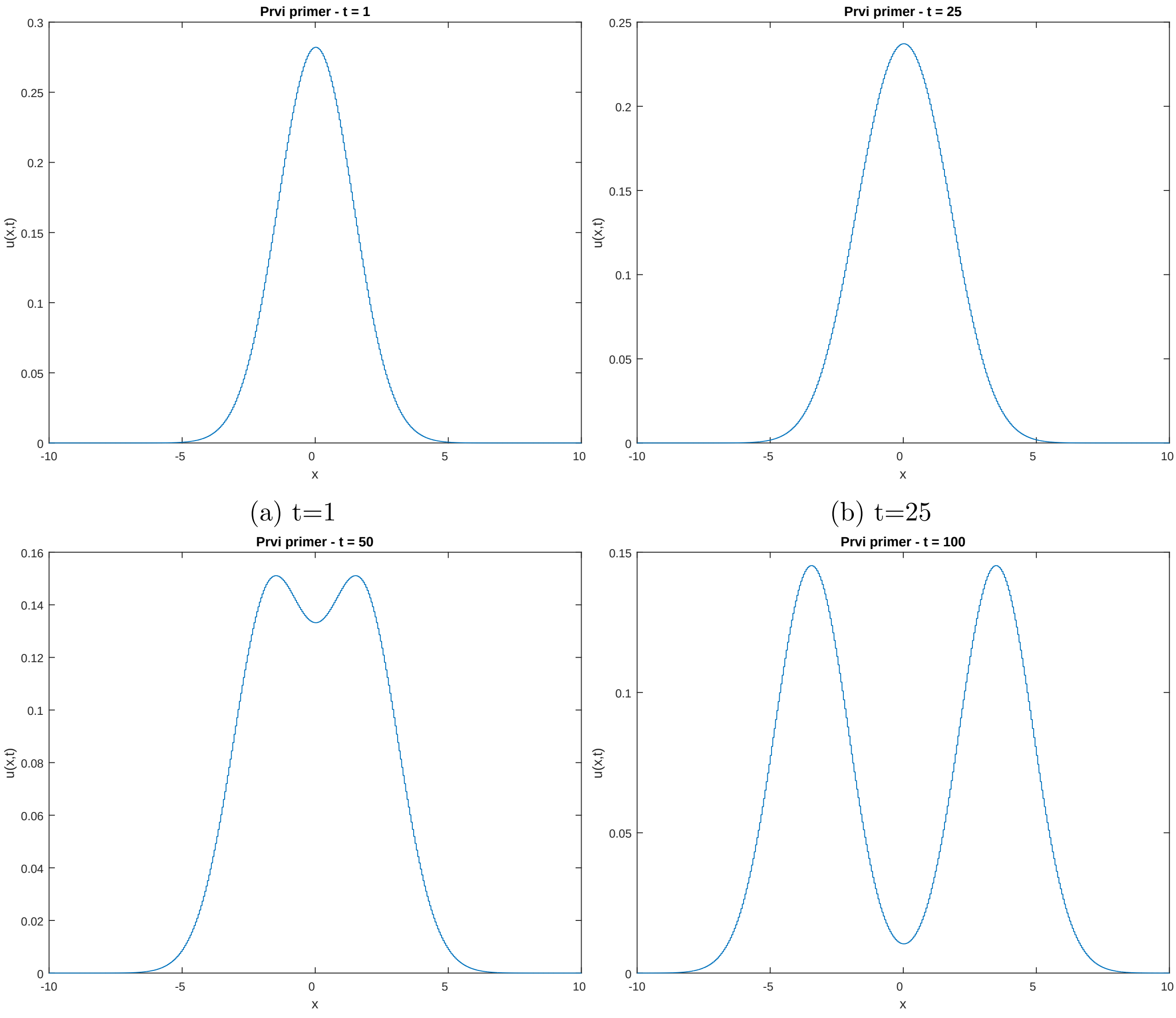
$$\begin{aligned} &u(-10,t)=0, \qquad u(10,t)=0,\\ &u(x,0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}. \end{aligned} \tag{4.23}$$



Slika 4.1

Na prethodnoj slici primećujemo da se jasno uočava jedna od fundamentalnih osobina talasnih jednačina, a to je da se singulariteti za $t > 0$ prenose po karakteristikama. Generalno, talasne jednačine prenose informacije po karakteristikama.

Na slici (4.1) je dato rešenje prethodnog problema u nekim, karakterističnim, vremenskim momentima. Primećujemo da se karakteristike pojavljuju postepeno, umesto kao što smo učili u teoriji pod uglom $(x - ct, x + ct)$. Ovo može biti numerička greška, no može biti i da je ova nelinearnost dala nešto neočekivno.



(a) t=1 (b) t=25

(c) t=50 (d) t=100

Slika 4.2: Numeričko rešenje semilinearne talasne jednačine $u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5$, u određenim vremenskim trenucima, sa početnim uslovima $u(-10,t) = u(10,t) = 0$, $u(x,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$

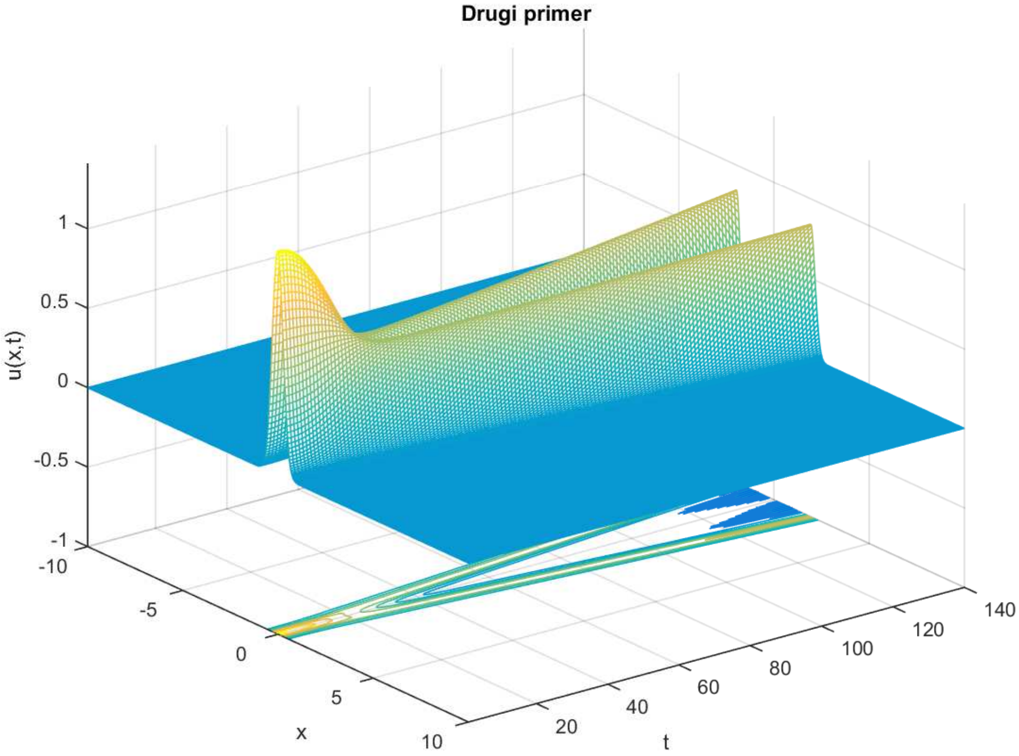
4.2.2 Primer 2

U ovom primeru posmatramo funkciju $\delta_{12}(x, i)$ u $i = 5$. Problem koji ovde rešavamo je semilinearna talasna jednačina

$$u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5, \tag{4.24}$$

sa početnim uslovima

$$\begin{aligned} &u(-10,t) = 0, \qquad u(10,t) = 0, \\ &u(x,0) = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 25}{4}}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

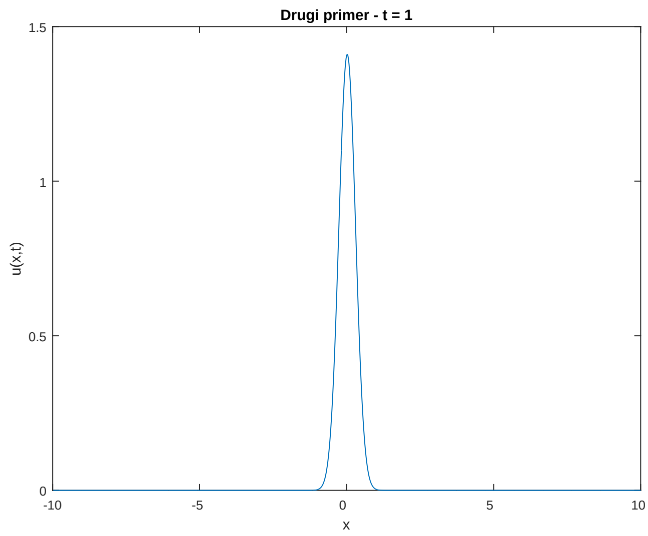


Slika 4.3:

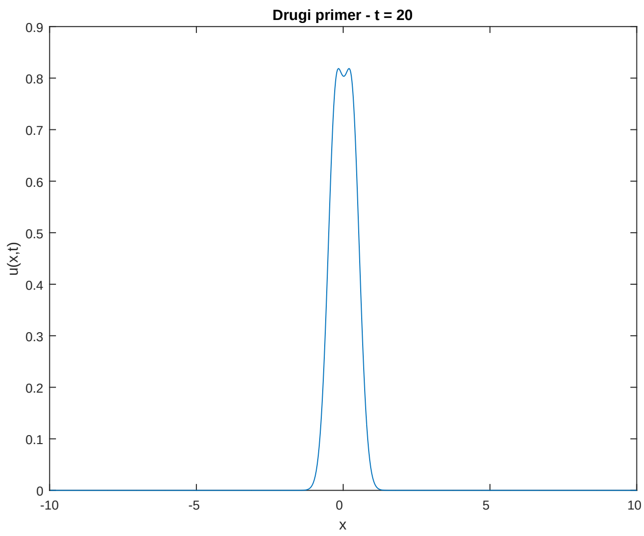
Ovo je klasičan problem, koji smo spomenuli na početku priče o graficima. Veoma je teško razlikovati šta se ovde dešava zbog numeričke greške, a šta je rešenje. Opet možemo da primetimo da se informacija prenosi po karakteristikama, no vrlo brzo se dobija veliki broj oscilacija, koje preglednije možete pogledati u nastavku.

Primetimo da je ovaj problem sličan Primeru 1, razlika je samo u početnom uslovu. Delta distribucija u Primeru 2 obrnuto srazmerno sa rastojanjem od nule, brže odlazi u nulu od delta funkcije iz Primera 1. Te smo za isti vremenski period, dobili bržu propagaciju informacija.

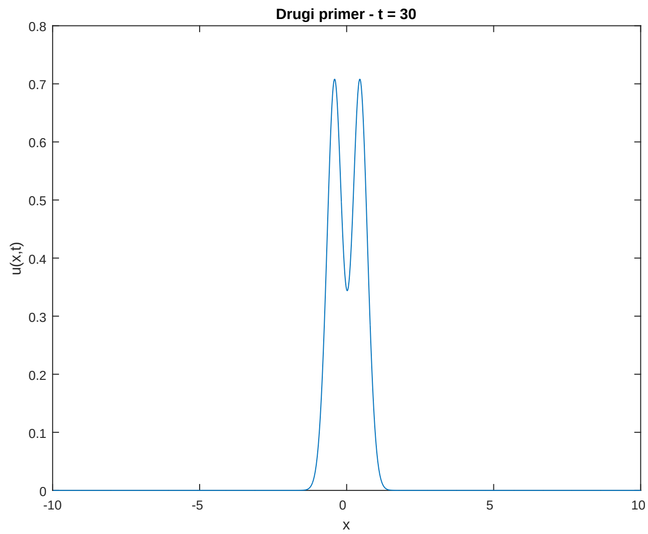
U nastavku vidimo preseke grafika (4.3), po vremenu. Na slici (4.4) imamo četiri grafika (a)-(d), koja predstavljaju početak kreiranja karakteristika. Primećujemo da su za razliku od Primera 1, karakteristike formirane mnogo oštrije, sa mnogo manje blagih prelaza.



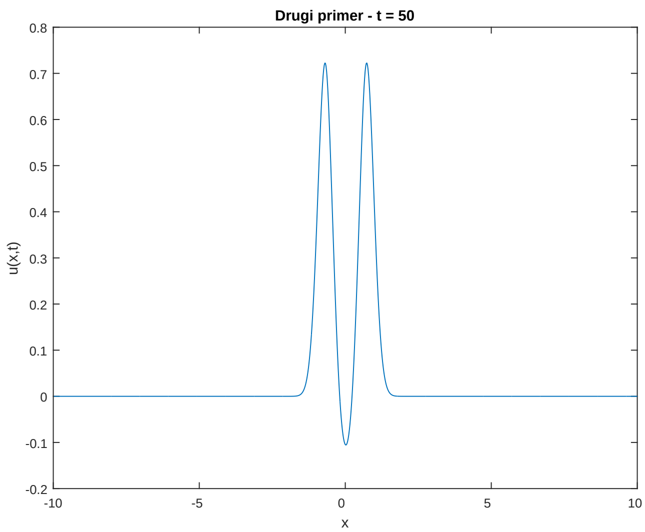
(a) t=1



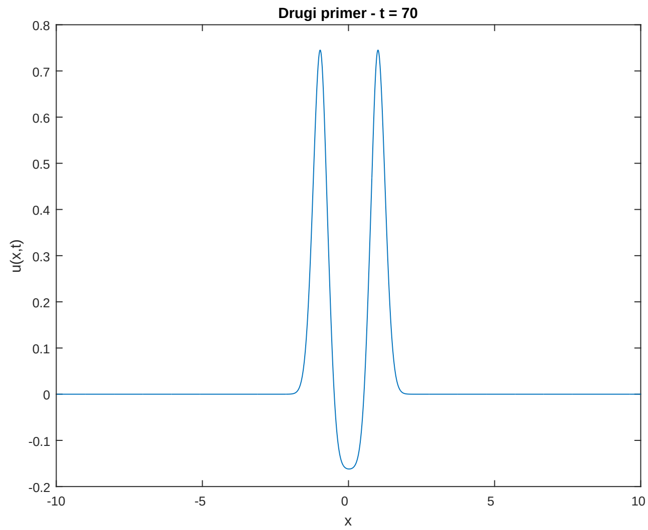
(b) t=20



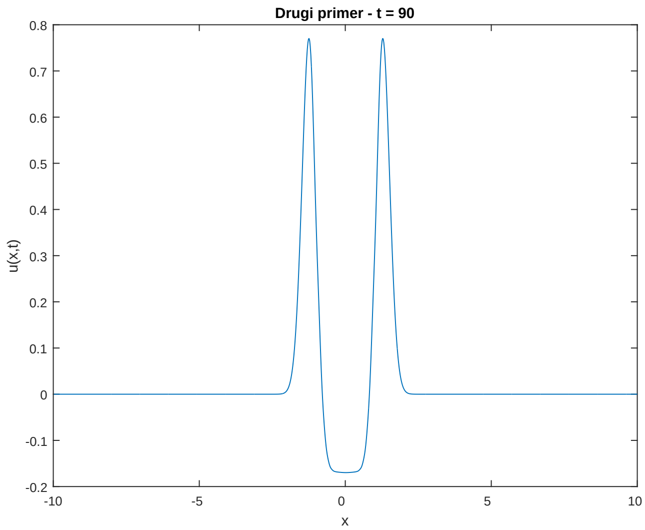
(c) t=30



(d) t=50



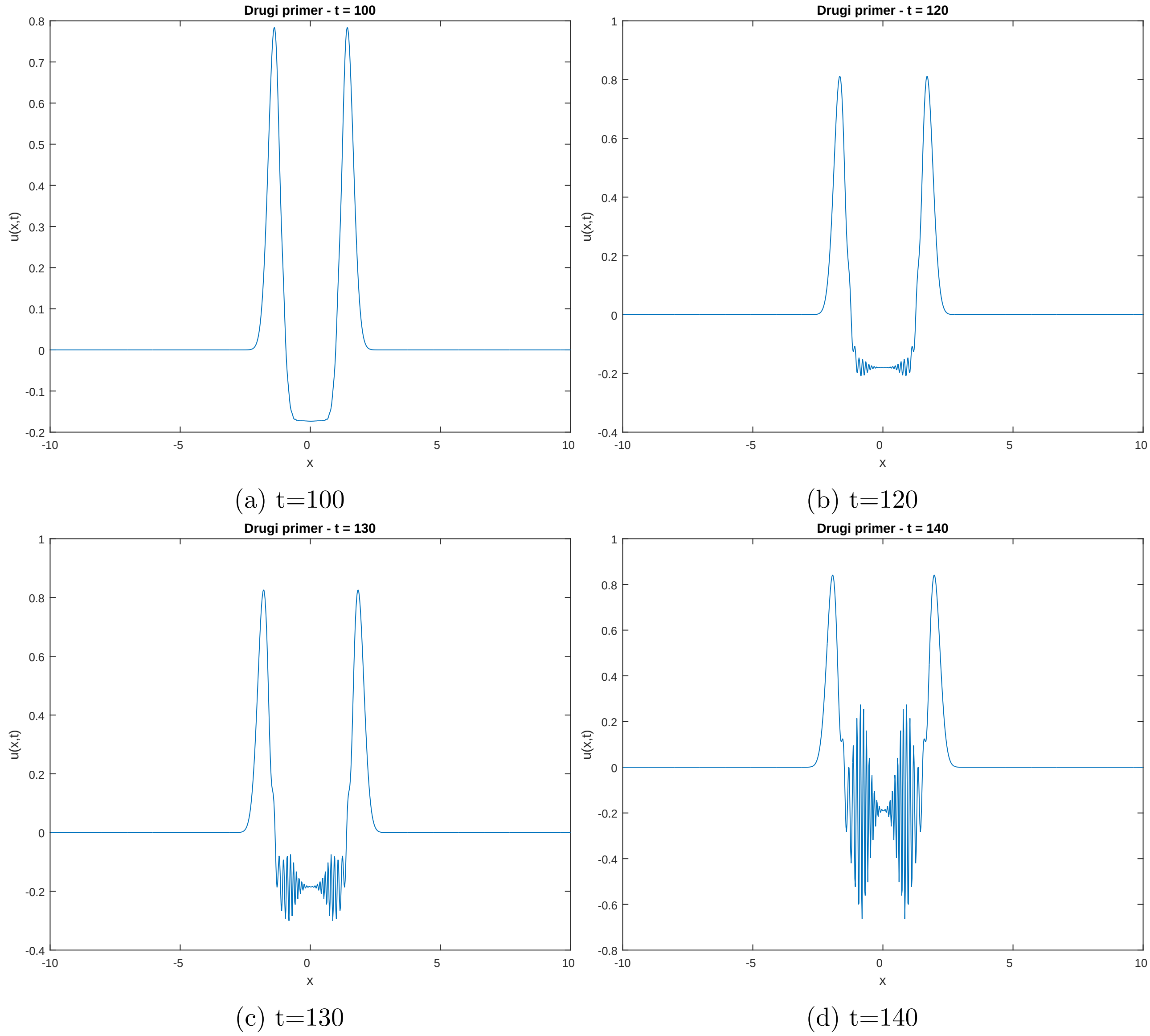
(e) t=70



(f) t=90

Slika 4.4: Numeričko rešenje semilinearne talasne jednačine $u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5$, sa početnim uslovima $u(-10,t) = u(10,t) = 0, u(x,0) = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 25}{4}}$

Počev od poslednja dva grafika na slici (4.4), pa nastavljajući preko grafika na slici (4.5), vidimo porast broja oscilacija. Ovaj porast možemo da pripišemo numeričkoj grešci, ali možda se zbog nelinearnosti singulariteti ne prenose samo po karakteristikama. Dalje ispitivanje ovog slučaja je poželjno, kako u pokušaju tumačenja rezultata tako i u unapređenju numeričkog metoda.



(a) t=100 (b) t=120

(c) t=130 (d) t=140

Slika 4.5: Numeričko rešenje semilinearne talasne jednačine $u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5$, sa početnim uslovima $u(-10,t) = u(10,t) = 0, u(x,0) = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 25}{4}}$

4.2.3 Primer 3

Sada ćemo za početni uslov staviti funkciju $\delta_{34}(x,i)$ u $i=1$. Problem koji ovde rešavamo je semilinearna talasna jednačina

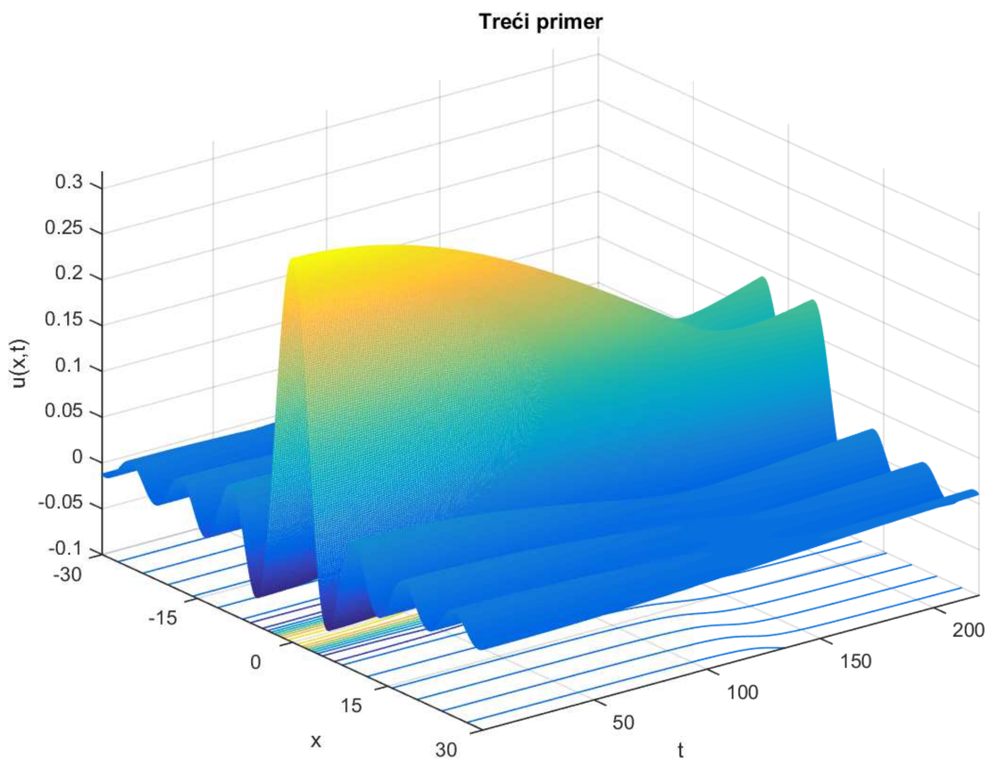
$$u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5, \tag{4.26}$$

sa početnim uslovima

$$\begin{aligned} &u(-30,t)=0, \qquad u(30,t)=0,\\ &u(x,0)=\frac{\sin(x)}{\pi x}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

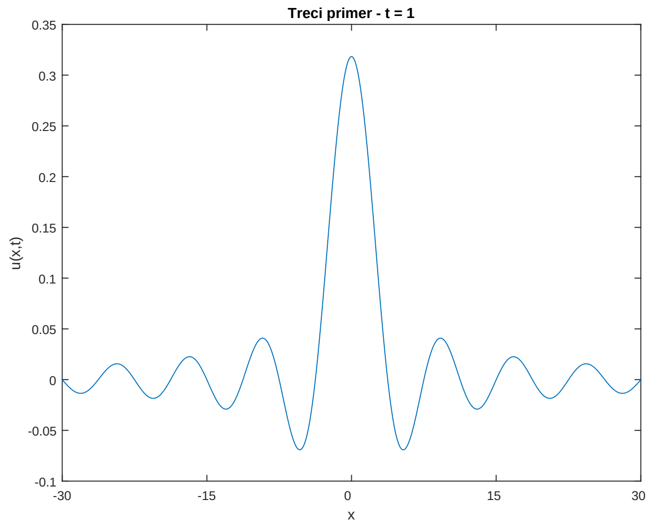
Primetimo da smo proširili interval na kojem postavljamo uslove, kako bismo dobili što bolju sliku rešenja. Takođe smo posmatrali i veći vremenski interval, sa većom preciznošću.

Opet možemo primetiti da se nakon odredjenog vremenskog perioda pojavljuju singulariteti.

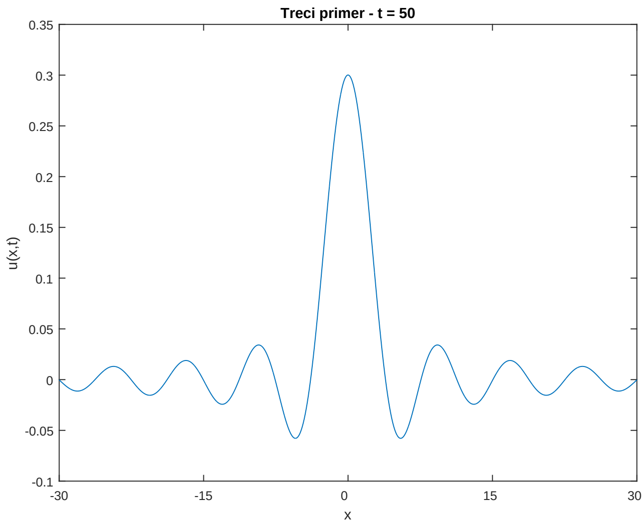


Slika 4.6:

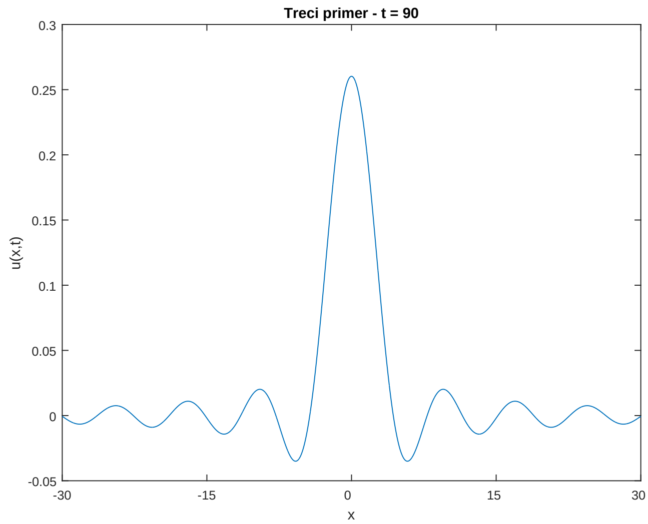
U nastavku su data rešenja gornje jednačine u odredjenim vremenskim trenucima. Takodje je značajna činjenica da početni uslov delta talasa implicira i rešenje koje će biti delta talas, no sada u izmenjenom obliku.



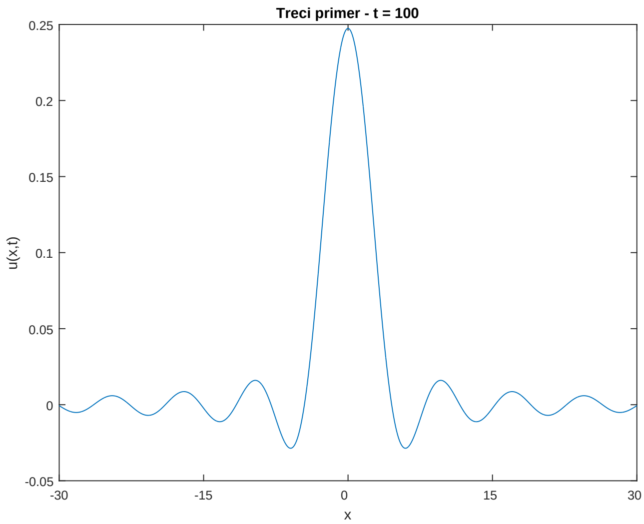
(a) t=1



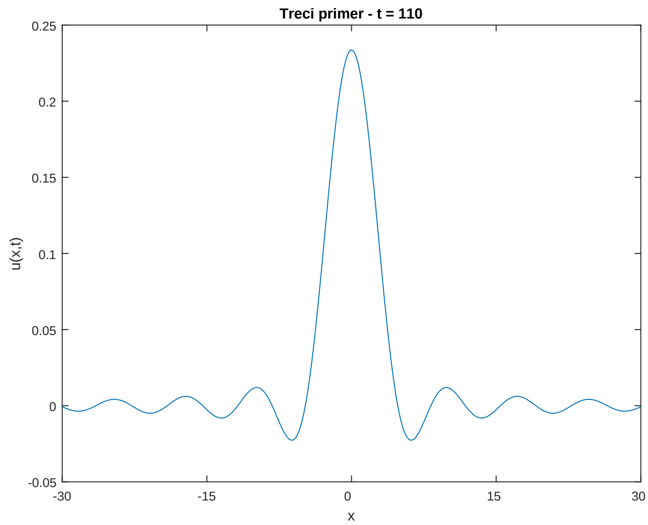
(b) t=50



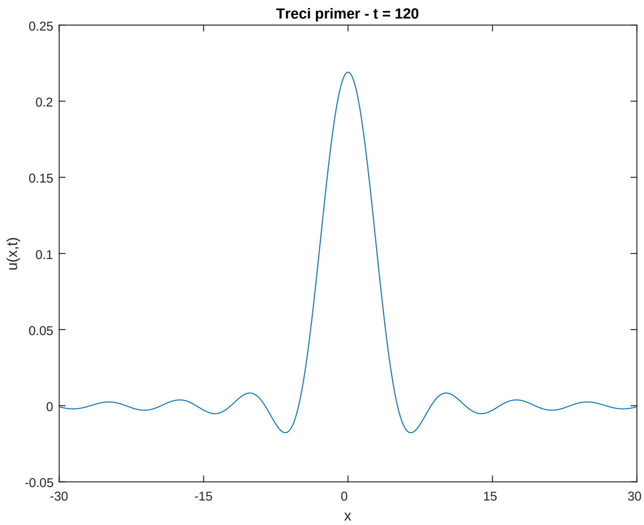
(c) t=90



(d) t=100

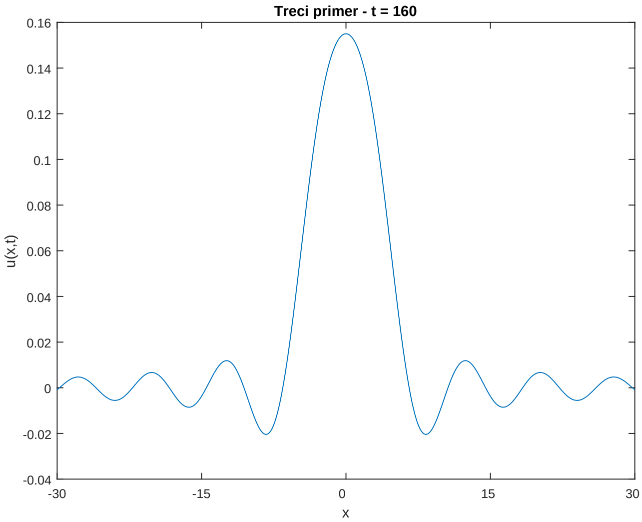


(e) t=110

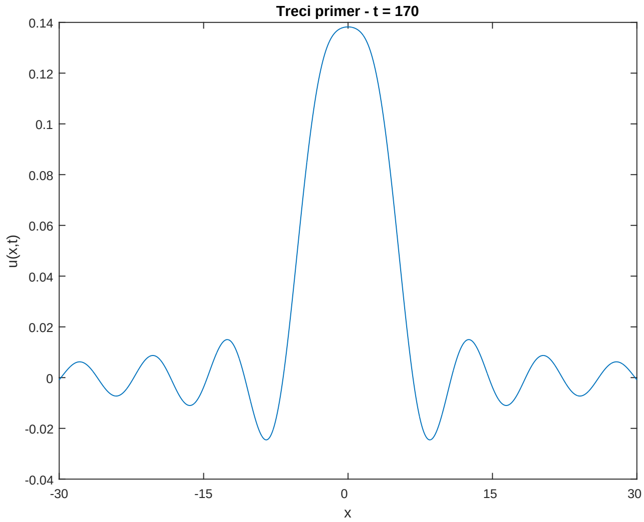


(f) t=120

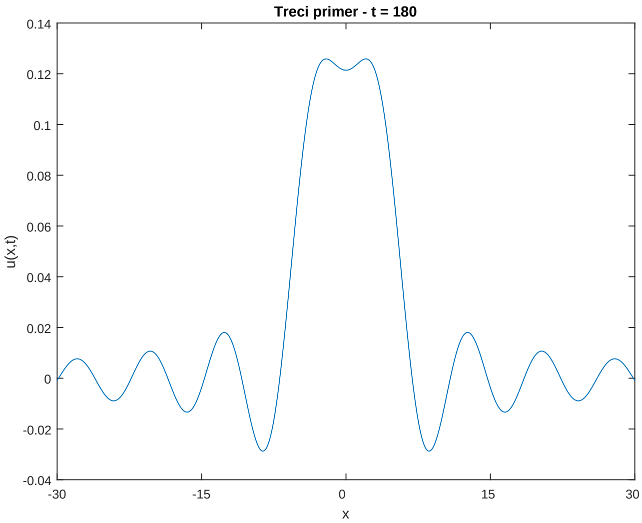
Slika 4.7: Numeričko rešenje semilinearne talasne jednačine $u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5$, u određenim vremenskim trenucima, sa početnim uslovima $u(-30,t) = u(30,t) = 0, u(x,0) = \frac{\sin(x)}{\pi x}$



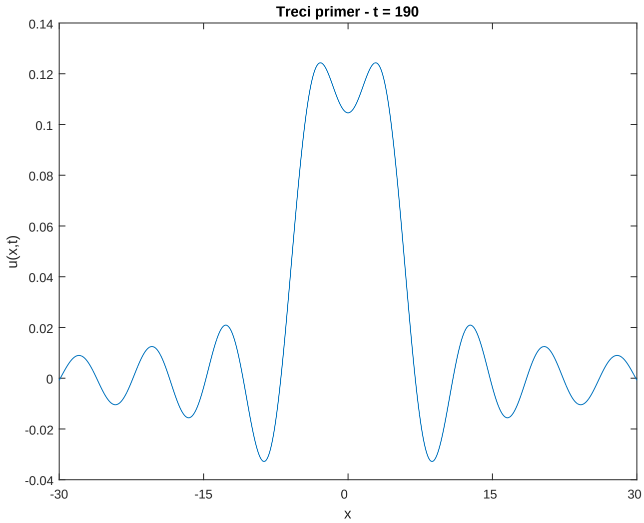
(a) t=160



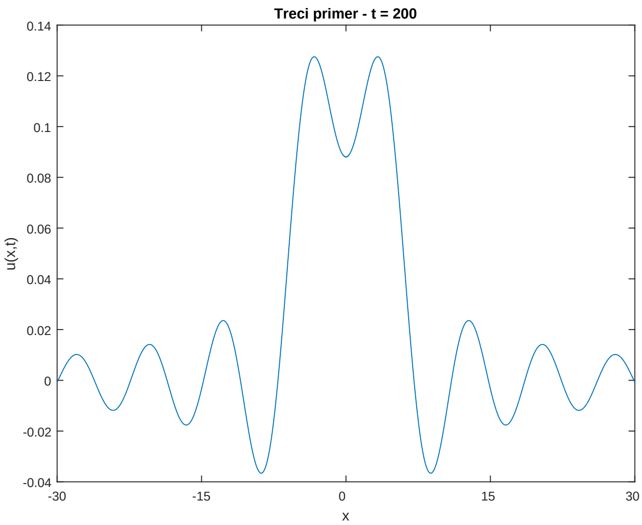
(b) t=170



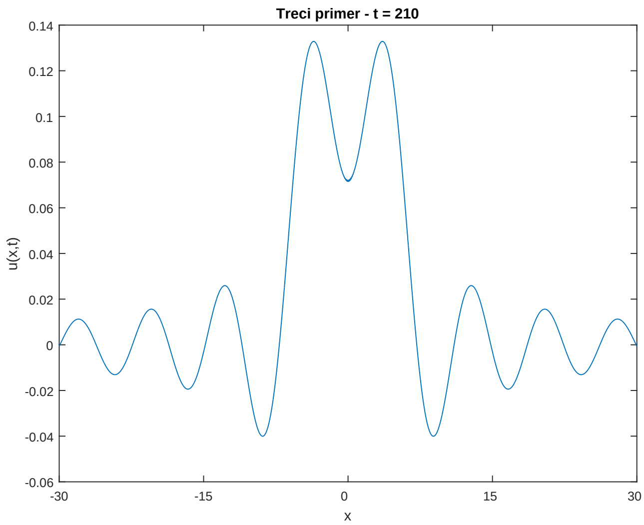
(c) t=180



(d) t=190



(e) t=200



(f) t=210

Slika 4.8: Numeričko rešenje semilinearne talasne jednačine $u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5$, u određenim vremenskim trenucima, sa početnim uslovima $u(-30,t) = u(30,t) = 0, u(x,0) = \frac{\sin(x)}{\pi x}$

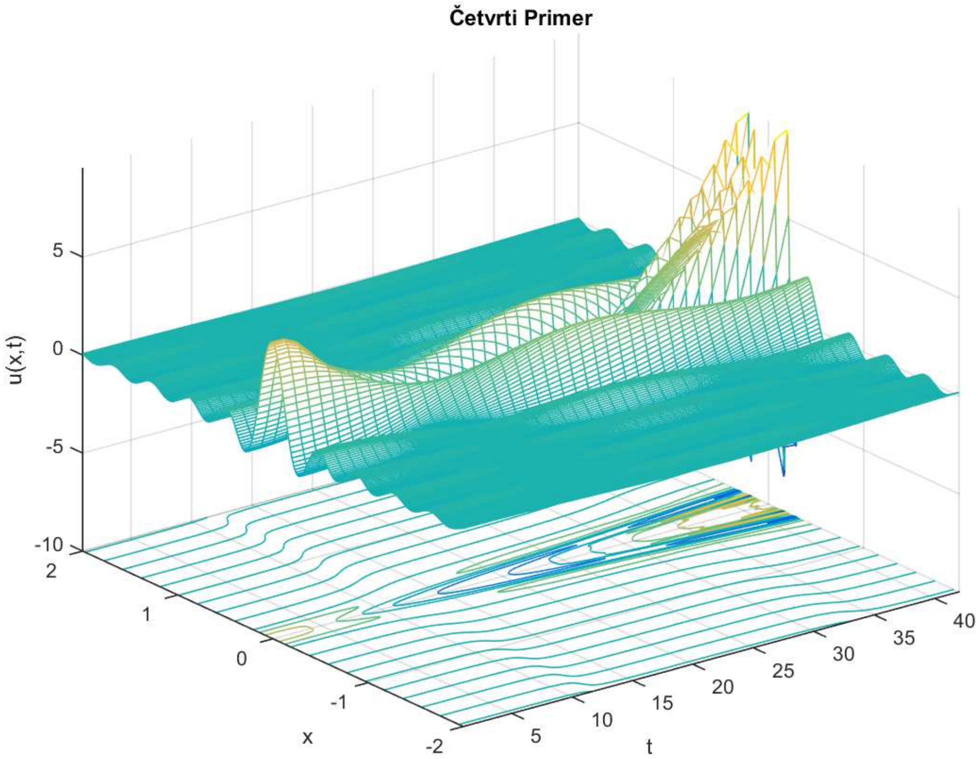
4.2.4 Primer 4

Poslednji primer možda ujedno i najinteresantniji je sledeći problem. Za početni uslov stavljamo funkciju $\delta_{34}(x,i)$ u $i = 4$. Problem koji ovde rešavamo je semilinearna talasna jednačina

$$u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5, \tag{4.28}$$

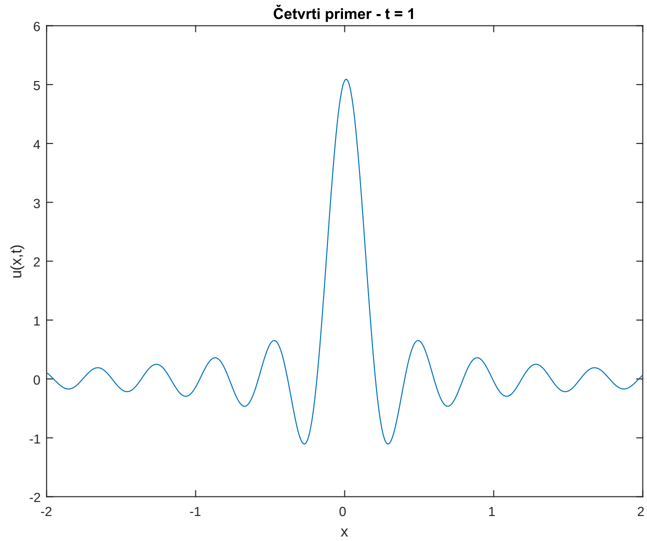
sa početnim uslovima

$$\begin{aligned} &u(-30,t) = 0, \qquad u(30,t) = 0, \\ &u(x,0) = \frac{\sin(16x)}{\pi x}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

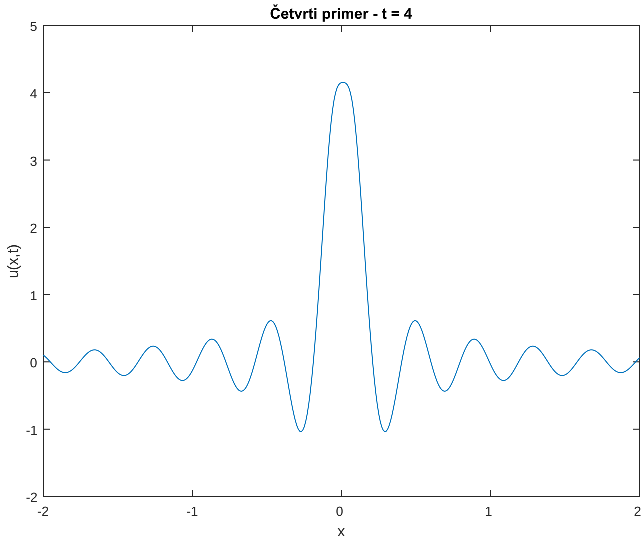


Slika 4.9:

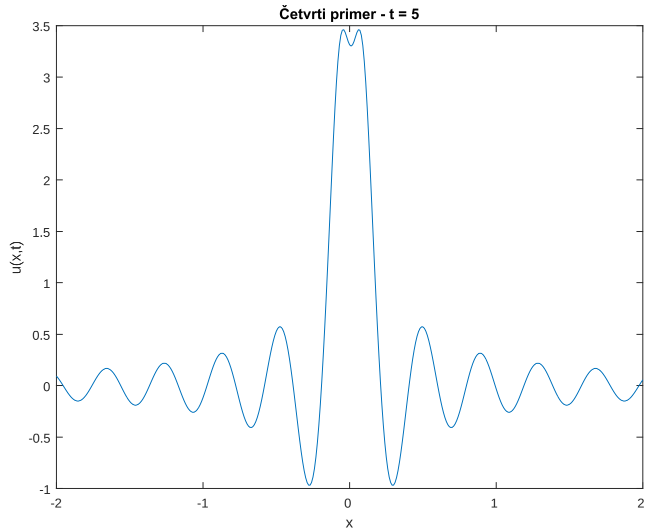
Ovaj talas je posebno interesantan. Na momente deluje kao da se utiša, u sledećem kao da se desi neka interakcija i oscilacije se povećavaju. Ovo takođe može biti posledica numeričke greške, ukoliko je period oscilacije dovoljno mali. Takođe je moguće da se iz postojećih singulariteta periodično pojavljuju novi. Primetimo da iako smo definisali nule u (-30,0) i (30,0), funkciju posmatramo na 15 puta manjem intervalu. Poredeći prethodni i ovaj primer primećujemo i da koeficijent i značajno utiče na propagaciju informacije, a time i na izgled grafika.



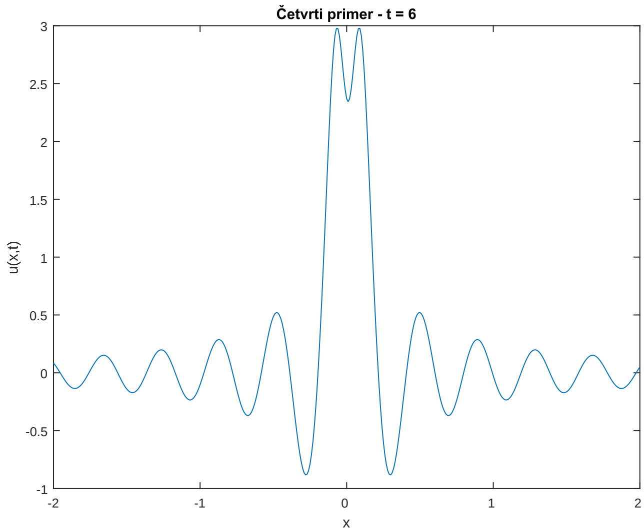
(a) t=1



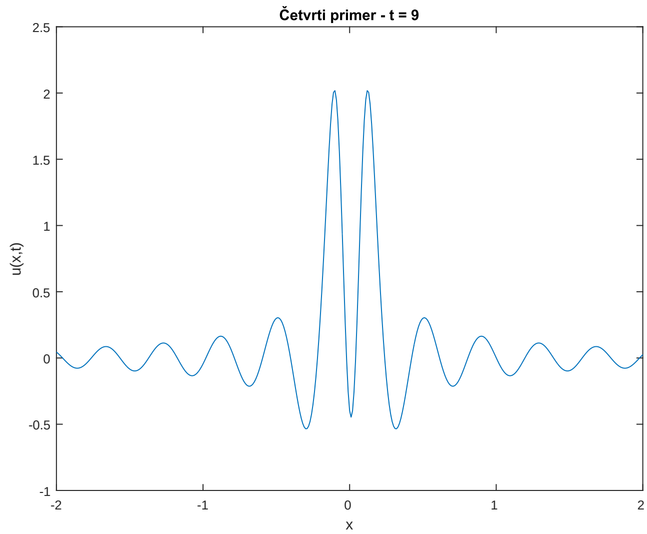
(b) t=4



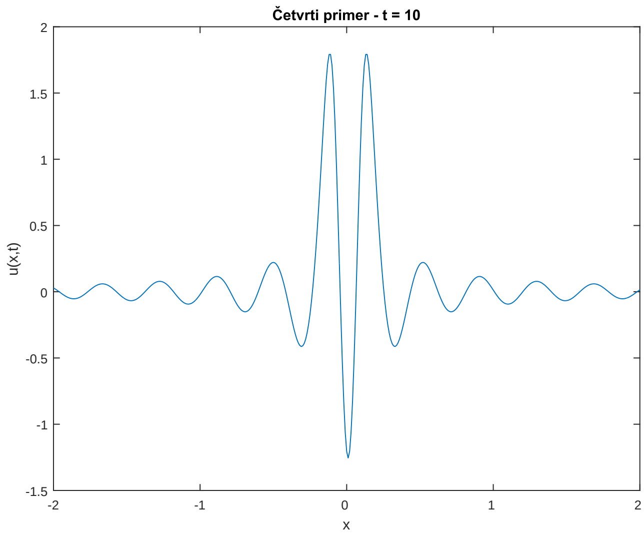
(c) t=5



(d) t=6

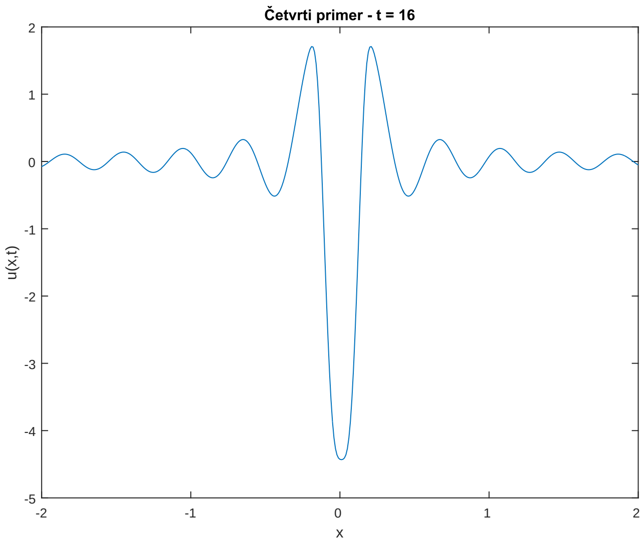


(e) t=9

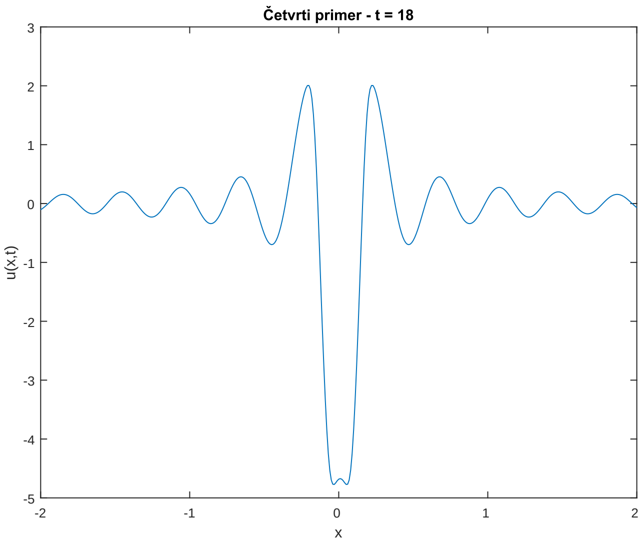


(f) t=10

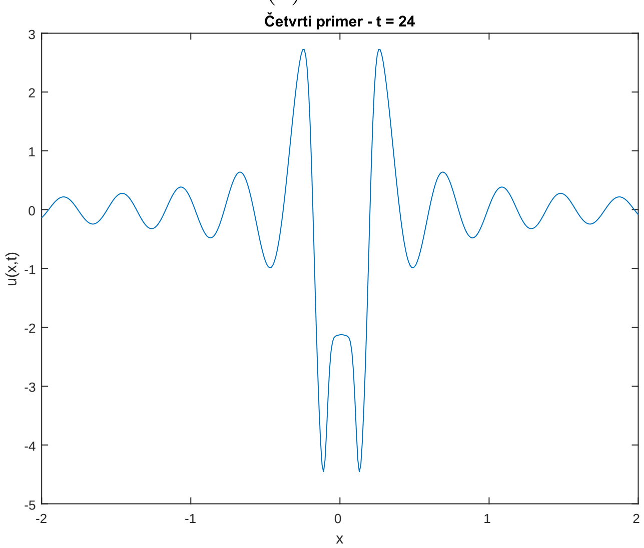
Slika 4.10: Numeričko rešenje semilinearne talasne jednačine $u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5$, u određenim vremenskim trenucima, sa početnim uslovima $u(-30,t) = u(30,t) = 0$, $u(x,0) = \frac{\sin(16x)}{\pi x}$



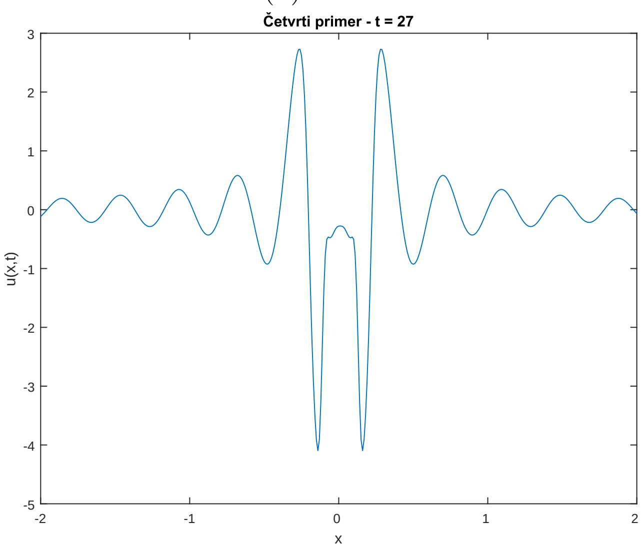
(a) t=16



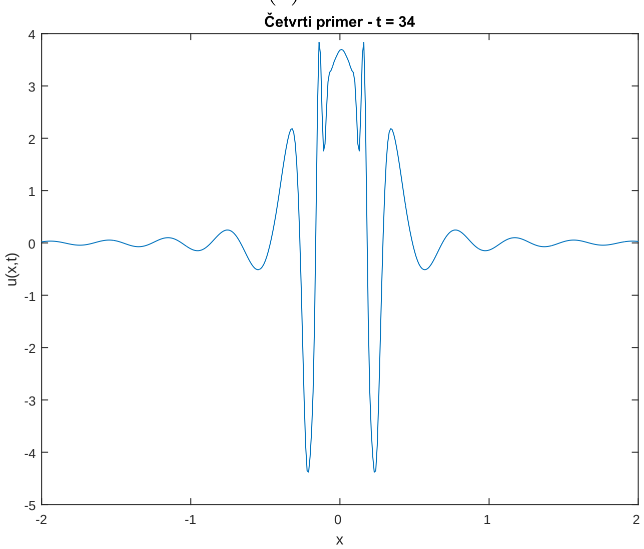
(b) t=18



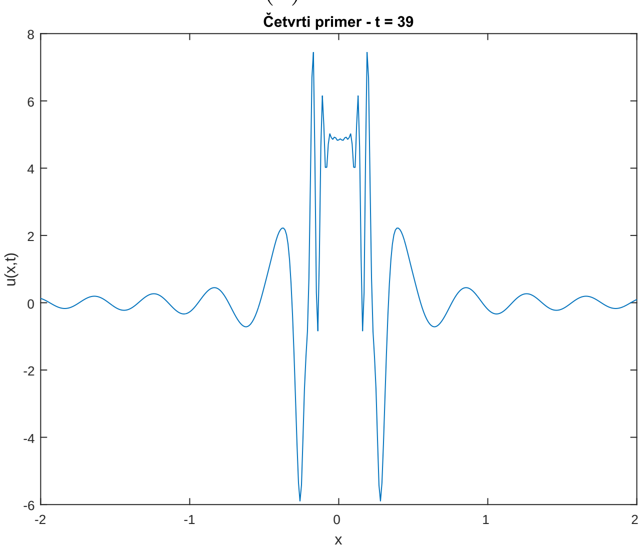
(c) t=24



(d) t=27



(e) t=34



(f) t=39

Slika 4.11: Numeričko rešenje semilinearne talasne jednačine $u(x,t)_{tt} = u(x,t)_{xx} - u(x,t)^5$, u određenim vremenskim trenucima, sa početnim uslovima $u(-30,t) = u(30,t) = 0$, $u(x,0) = \frac{\sin(16x)}{\pi x}$

Biografija kandidata

Milena Mandić je rođena 9. decembra, 1991. godine u Zrenjaninu. Završila je Osnovnu školu "Nikola Tesla"u Banatskom Karađorđevu 2006. godine, kao Vukovac i đak generacije. Iste godine upisuje Gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj"u Novom Sadu i kao nosilac Vukove diplome završava smer za obdarene učenike u matematičkoj gimnaziji. Osnovne studije Matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisuje 2010. godine i završava ih 2013. godine sa odličnim uspehom.

Iste godine u Novom Sadu upisuje master studije Matematike, modul Teorijska matematika. 2015. godine upisuje master studije Informatike, modul Računarske nauke.

Stipendista je Fondacije "Privrednik", ministarstva Prosvete Republike Srbije kao i Fonda za mlade talente Republike Srbije ¨Dositeja".

Boravila je dva meseca na Tehnionu, Izraelskom Institutu za Tehnologiju, na stručnom usavršavanju u oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina. Učestvovala je na "ECMI Modelling week", odakle je koautor rada "Patient-specific blood flow modelling".

A Kodovi za numeričko rešavanje jednačina u MatLab-u

A.1 Primer 1

```
clear;

rx = 1/20;
al = 7*(1/10);
rt = rx*al;

l = 10;
kmax = 2*l/rx+1;
tim = 100;

u = zeros(kmax,tim);
r = zeros(kmax,tim);
s = zeros(kmax,tim);

j=1;
fhi = @(j,x)(j/(2*sqrt(pi))*exp(-x^2*j^2/4));
u0 = @(x) (j/(2*sqrt(pi))*exp(-(x^2*j^2)/4));

s0 = @(x)(0);
r0 = @(x) (-j^3*x*exp(-x^2*j^2/4)/(4*sqrt(pi)));


for i =  1: kmax-2
    u(i+1,1) = u0(-l+rx*i);
    s(i+1,1) = s0(-l+rx*i);
    r(i+1,1) = r0(-l+rx*i);
end
for i = 1 : tim-1
    for k = 1 : kmax-2
                r(k+1, i+1) = r(k+1,i) + (al/2)*(s(k+2,i)-s(k,i)) ;
                s(k+1, i+1) = s(k+1,i) + (al/2)*(r(k+2,i)-r(k,i)) - rt*u(k+1,i)^5;
                u(k+1, i+1) = u(k+1,i) + rt*s(k+1,i);
    end
end
Plot1
```

A.2 Primer 2

```
clear;

rx = 1/50;
al = 7*(1/10);
rt = rx*al;

l = 10;
kmax = 2*l/rx+1;
tim = 140;

u = zeros(kmax,tim);
r = zeros(kmax,tim);
s = zeros(kmax,tim);

j=5;
fhi = @(j,x)(j/(2*sqrt(pi))*exp(-x^2*j^2/4));
u0 = @(x) (j/(2*sqrt(pi))*exp(-(x^2*j^2)/4));

s0 = @(x)(0);
r0 = @(x) (-j^3*x*exp(-x^2*j^2/4)/(4*sqrt(pi)));

for i = 1 : kmax-1
    u(i+1,1) = u0(-l+rx*i);
    s(i+1,1) = s0(-l+rx*i);
    r(i+1,1) = r0(-l+rx*i);
end
for i = 1 : tim-1
            for k = 1 : kmax-2
                r(k+1, i+1) = r(k+1,i) + (al/2)*(s(k+2,i)-s(k,i));
                s(k+1, i+1) = s(k+1,i) + (al/2)*(r(k+2,i)-r(k,i)) - rt*u(k+1,
                    i)^5;
                u(k+1, i+1) = u(k+1,i) + rt*s(k+1,i);
            end
end

Plot2
```

A.3 Primer 3

```
clear;

rx = 1/50;
al = 6*(1/10);
rt = rx*al;

l = 30;
kmax = 2*l/rx+1;
tim = 220;

u = zeros(kmax,tim);
r = zeros(kmax,tim);
s = zeros(kmax,tim);

j=1;
fhi = @(j,x)(sin(x*j^2)/(pi*x));
u0 = @(x) (sin(x*j^2)/(pi*x));

s0 = @(x)(0);
r0 = @(x) ((j^2*cos(x*j^2)*x-sin(x*j^2))/(pi*x^2));

for i = 0 : kmax-1
    u(i+1,1) = u0(-l+rx*i);
    s(i+1,1) = s0(-l+rx*i);
    r(i+1,1) = r0(-l+rx*i);
end
u(l/rx+1,1) = j^2/pi;
r(l/rx+1,1) = 0;

for i = 1 : tim-1
            for k = 1 : kmax-2
                    r(k+1, i+1) = r(k+1,i) + (al/2)*(s(k+2,i)-s(k,i)) ;
                    s(k+1, i+1) = s(k+1,i) + (al/2)*(r(k+2,i)-r(k,i)) - rt*u(
                        k+1,i)^5;
                    u(k+1, i+1) = u(k+1,i) + rt*s(k+1,i);

             end
end
Plot3
```

A.4 Primer 4

```
clear;

rx = 1/100;
al = 9*(1/10);
rt = rx*al;

l = 30;
kmax = 2*l/rx+1;
tim = 42;

u = zeros(kmax,tim);
r = zeros(kmax,tim);
s = zeros(kmax,tim);

j=4;
fhi = @(j,x)(sin(x*j^2)/(pi*x));
u0 = @(x) (sin(x*j^2)/(pi*x));

s0 = @(x)(0);
r0 = @(x) ((j^2*cos(x*j^2)*x-sin(x*j^2))/(pi*x^2));


for i = 0 : kmax-1
    u(i+1,1) = u0(-l+rx*i);
    s(i+1,1) = s0(-l+rx*i);
    r(i+1,1) = r0(-l+rx*i);
end

u(l/rx+1,1) = j^2/pi;
r(l/rx+1,1) = 0;

for i = 1 : tim-1
            for k = 1 : kmax-2
                r(k+1, i+1) = r(k+1,i) + (al/2)*(s(k+2,i)-s(k,i));
                s(k+1, i+1) = s(k+1,i) + (al/2)*(r(k+2,i)-r(k,i)) - rt*u(k+1,
                    i)^5;
                u(k+1, i+1) = u(k+1,i) + rt*s(k+1,i);
            end
end
Plot4
```

Literatura

[1] AZIZ, Z.A. and YAACOB, N. and LAHIJI,M.A. and GHANBARI, M. and LING, C.C.D. A Numerical Approach for Solving a General Nonlinear Wave Equation. *Research Journal of Applied Science, Engineering and Technology*, Oktobar 2012.

[2] COLEMAN, M.P. *An introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. Chapman and Hall/CRC Press, 2nd edition, 2013.

[3] D'APRIL, T. and MUGNAI, D. Solitary Waves for Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations. http://ricerca.mat.uniroma3.it/AnalisiNonLineare/preprints/DAprileMugnai03xx.pdf.

[4] DAVIS, E.B. *A Review of Hardy Inequalities*. http://arxiv.org/pdf/math/9809159.pdf, 1998.

[5] EASIF, F.H. and MANAA,S.A. and MEKAEEL, D. The Finite Difference Methods for Nonlinear Klein Gordon Equation. http://www.iosrjen.org/Papers/vol3_issue11%20(part-5)/A031150105.pdf.

[6] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.

[7] FRITZ, J. Blow-up of solutions to nonlinear wave equations in three space dimensions, 1979. ManuscriptaMath. 28.

[8] GAJIĆ,Lj. *Predavanja iz Uvoda u analizu*. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, 2006.

[9] GRILLAKIS, M.G. Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with critical nonlinearity. *Annals of Mathematics*, (132):485–509, 1990.

[10] HERCEG, D. and HERCEG, Đ. *Numerička matematika*. SYMBOL, 2009.

[11] ŠIF,L. *Kvantna Mehanika*. Vuk Karadžić, Beograd.

[12] JÖRGENS, K. Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 1961.

[13] LEE, H.J and SCHIESSER, W.E. *Ordinary and Partial Differential Equation Routines in C, C++, Fortran, Java, Maple and MATLAB*. Chapman and Hall/CRC Press, 2004.

[14] McMAHON, D. *Quantum Mechanics Demystified*. McGraw-Hill, 2006.

[15] MIERSEMANN, E. Partial Differential Equations, Oktobar 2012. http://www.math.uni-leipzig.de/ miersemann/pdebook.pdf.

[16] MUGNAI, D. Coupled Klein-Gordon and Born-Infeld type equations: looking for solitary waves. *Article submitted to Royal Society*.

[17] NEDELJKOV, M. Parcijalne diferencijalne jednačine, 2014. http://people.dmi.uns.ac.rs/ marko/knjiga-final.pdf.

[18] PATEL, A.D. Relativistic Quantum Mechanics. https://www.youtube.com/watch?v=77A9xWz_ugo.

[19] PECHER, H. Decay of Solutions of Nonlinear Wave Equations in Three Space Dimensions. *Journal of Functional Analysis*, pages 221–229, 1982.

[20] PILIPOVIĆ,S. i SELEŠI, D. *Mera i integral.* Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[21] RAUH, J. The u^5-Klein-Gordon equation. *Math. Z.*, pages 335–364.

[22] REZZOLLA, L. Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations , Septembar 2011. http://www.aei.mpg.de/ rezzolla.

[23] SCHIFF, L.I. Nonlinear Meson Theory of Nuclear Forces. I. Neutral Scalar Mesons with Point-Contact Repulsion. *The Physical Review*, 84(1), Oktobar 1951.

[24] SEGEL,I.E. The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction. *Bulletin de la S.M.F*, pages 129–135, 1963.

[25] SHATAH, J. Weak Solutions and Development of Singularities of the SU(2) σ-Model, Avgust 1987. Courant Institute.

[26] STRAUSS, W. A. *Nonlinear Wave Equations.* American Mathematical Society, 1989.

[27] STRAUSS, W. A. *Partial Differential Equations.* John Wiley and Sons, 2nd edition, 2008.

[28] STRUWE, M. Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, pages 495–513, 1988.

[29] STRUWE, M. Semilinear Wave Equations. *American Mathematical Society*, 26(1), Januar 1992.

[30] WALTON, N. Gronwall's Lemma. https://staff.fnwi.uva.nl/n.s.walton/Notes/Gronwall.pdf.

[31] WIKI. Holomorphic function. https://en.wikipedia.org/wiki/Holomorphic_function.

[32] WIKI. Poincare inequality. https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_inequality.

[33] WIKI. Rellich-Kodrachov theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Rellich%E2%80%93Kondrachov_theo

[34] WIKI. Removable singularity. https://en.wikipedia.org/wiki/Removable_singularity.

[35] WIKI. Uniformly Cauchy sequence. https://en.wikipedia.org/wiki/Uniformly_Cauchy_sequence.

[36] ZHENG, Y. Concentration in sequences of solutions to the nonlinear Klein-Gordon equation. *preprint*, 1989.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNE DOKUMENTACIJSKE INFORMACIJE

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Milena Mandić
AU
Mentor: dr Marko Nedeljkov
MN
Naslov rada: Semilinearne talasne jednačine i primeri
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2015
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (4/51/36/0/1/42/4) (broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika-/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Parcijalne diferencijalne jednačine, Semilinearne jednačine, Klajn-Gordonova jednačina, Regularnost, Numerički metodi
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:

VN
Izvod:
U ovom radu ćemo proučavati početne probleme semilinearnih talasnih jednačina tipa

$$u_{tt} - \Delta u + g(u) = 0, \text{na } R^3 \times [0, \infty), \tag{A.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{A.2}$$

gde je $g : R \to R$ dovoljno glatka funkcija.

Kako ne bismo išli u širinu ograničićemo se samo na one funkcije $g(u)$ koje zavise samo od u (odgovaraju modelima u homogenim sredinama). U uvodnom delu ćemo dati tipične praktične probleme koji se svode na gornji tip jednačine.

Prvi deo će biti posvećen rešenjima jednačina sa globalno Lipšicovskim nelinearnostima. Zatim ćemo gledati takozvane dobre nelinearnosti. Tipičan predstavnik je kubna Klajn-Gordonova jednačina koja se koristi za opisivanje kretanja relativističkih čestica uz prisutne međusobne interakcije tih čestica. Na kraju ovog dela ćemo prezentovati nedavno dokazane rezultate regularnosti za u^5 Klajn-Gordonovu jednačinu od Grilakisa i predstavićemo pojednostavljen dokaz od Struvea.

Potom ćemo dati Raučov rezultat postojanja globalnih C^2-rešenja za neke kritične slučajeve gde je integral energije dovoljno mali. Takođe ćemo se osvrnuti i na ne tipične slučajeve eksplozije rešenja.

Svaki od ovih rezultata propratićemo primerima koji će ilustrovati rešenja koja imaju fizičkog smisla i koja su mala nezavisna i naivna provera fizičkog modela.

IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 20.01.2015.
DP
Datum odbrane: decembar 2015.
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Danijela Rajter-Cirić, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,
mentor

Član: dr Jelena Aleksić, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Content Code: Master's thesis
CC
Author: Milena Mandić
AU
Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.
MN
Title: Semilinear wave equation and examples
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2015
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty od Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (4/51/36/0/1/42/4)
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific Discipline: Partial Differential Equations
SD
Subject/Key words: Partial Differential Equations, Semilinear wave equation, Klein-Gordon equation, Regularity, Numerical methods
SKW
UC
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD
Note:

N

Abstract:
The focus of this thesis is on the initial value problem of semilinear wave equations of the type

$$u_{tt} - \Delta u + g(u) = 0, \text{na } R^3 \times [0, \infty), \tag{A.3}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{A.4}$$

where $g : R \to R$ is sufficiently smooth function.
As we are trying to limit this master thesis to reasonable length, we will concentrate on those functions $g(u)$ which depend only on u. In Introduction we will give some typical practical problems which concerns to the above equation.

First part we will devote to the solutions of equation with globally Lipschitz inequalities. Then, we are going to take a look at so called good nonlinearities. Typical representative is cube Klein Gordon equation which is used for describing relativistic particles with interactions. In the end of this chapter we will present recently proven results of regularity for u^5 Klein Gordon equation from Grillakis and we are going to present simplified proof from Struwe.

Afterwards we will give Rauch result related to existence of global C^2-solutions for non-critical cases, where integral is small enough. Also, we are going to take a look at typical problems of blow up solutions.

Each one of this results we will follow with an example, which will illustrate a solution which have physical sense and which are small and naive validation of physical model.

The results obtained by implementing numerical algorithm in the programming software Matlab are presented in the last section.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 20.01.2015.
ASB
Defended: december 2015.
DE

Thesis defend board:
DB

President: Danijela Rajter-Ćirić Ph.D., full professor,
Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Marko Nedeljkov Ph.D., full professor,
Faculty of Science, University of Novi Sad
mentor

Member: Jelena Aleksić Ph.D., associate professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad