UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ljiljana Knežev

KONGRUENCIJE NA TURNIRIMA

Master rad

Novi Sad, 2015

Sadržaj

Uvod i istorijat

Turniri su orijentisani grafovi bez petlji u kojima za svaka dva čvora postoji tačno jedna orijentisana grana između ta dva čvora. Ime je nastalo od reprezentacije turnira kao sportskog takmičenja u kojem su čvorovi ekipe i svake dve ekipe odigraju tačno jednu utakmicu između sebe (na kojoj uvek jedna pobedi, nema nerešenog rezultata).

Turniri, kao orijentisani grafovi, su relacijske strukture, ali moguće je kodirati turnire kao algebarske strukture (algebre) na više načina. Dva najlakša načina su pomoću jedne ili pomoću dve binarne operacije. Te binarne operacije daju „pobednika“, odnosno „gubitnika“ „utakmice“ između dva čvora. Jasno, dovoljno je da se da rezultat operacije „pobednik“ da bi se odredio turnir, jer ako je pobednik meča ab = a, onda je gubitnik a+b = b.

Pri istraživanju algebarskih struktura, jedan od ključnih pojmova su kongruencije. U slučaju turnira, u oba načina kodiranja koje smo pomenuli, kongruencije su iste, te nam nije bitno koje kodiranje se uzima. U ovom master radu nas interesuju turniri koji su proste algebre, dakle nemaju kongruencija, sem dve trivijalne (jednakost i puna relacija su uvek kongruencije), kao i turniri koji su poddirektno nesvodljive algebre (prosti ili postoji najmanja netrivijalna kongruencija).

Kodiranje turnira kao algebri sa dve binarne operacije uveo je Ervin Fried u radu [Fried1] iz 1970. godine. Fried je nastavio sa istraživanjima u ovoj oblasti tokom cele karijere, kako u vezi turnira, tako i uopštenja koje je definisao, tzv. slabo asocijativnih mreža. Čitalac je upućen na radove [Fried1], [Fried2], [Fried3], [ErdosFriedHajnalMilner], [FriedGratzer1], [FriedGratzer2], [FriedLakser] i [FriedSos] kao neke od poznatijih referenci iz njegovog opusa. On je popularisao istraživanje turnira sa stanovišta algebre i privukao mnoge druge poznate naučnike da se tim bave.

Lako se opisuju kongruencije turnira sa grafovske tačke gledišta, što je dovelo do pitanja koliko su prosti turniri, gde ih nema sem trivijalnih, česta pojava. E. Fried i H. Lakser su 1971. godine u [FriedLakser] dokazali da je svaki konačan turnir sa n čvorova podturnir prostog turnira sa 2n+1 čvorova. P. Erdös, E. Fried, A. Hajnal i E. C. Milner su 1971. u radu [ErdosFriedHajnalMilner] dokazali da se svaki konačan turnir sa n čvorova, sem u slučaju n=2, može naći kao podturnir nekog turnira sa n+2 čvorova. J. W. Moon je 1972. godine u [Moon] dokazao da se svaki konačan turnir T sa n čvorova može pronaći kao podturnir nekog turnira sa n+1 čvorom, sem ako je n=3 ili je turnir T tranzitivan i ima neparan broj čvorova (u oba ova slučaja se može naći turnir sa n+2 čvora koji sadrži T kao podturnir). P. Erdös, A. Hajnal i E. C. Milner su 1972, godine u radu [ErdosHajnalMilner] uopštili rezultat Moona i na beskonačne turnire, tj. dokazali su da se i svaki beskonačan turnir može proširiti do prostog turnira dodavanjem samo jednog čvora. U ovoj tezi ćemo prikazati rezultat Moona.

Sa algebarske tačke gledišta, uvek je zanimljivo pitanje identiteta, što su jednakosti koje važe u celoj algebri. Pitanje koje je u dobroj meri interesovalo istraživače je pitanje konačne baze identiteta, tj. da li se svi identiteti koji važe u nekoj algebri, ili klasi algebri, mogu izvesti na osnovu nekih konačno mnogo od njih. U slučaju turnira, možemo postaviti dva pitanja: da li svaki konačan turnir ima konačnu bazu identiteta, i da li klasa svih turnira ima konačnu bazu identiteta (tj. da li se identiteti koji istovremeno važe u svim turnirima mogu izvesti iz konačno mnogo njih). Ova pitanja su različita u zavisnosti da li o turnirima govorimo kao o algebrama sa jednom ili sa dve operacije. Turniri kao algebre sa dve operacije imaju distributivne mreže kongruencija, ali i sve algebre koje zadovoljavaju iste identitete kao turniri takođe imaju distributivne mreže kongruencija. Stoga na osnovu K. A. Bakerove teoreme (dokazane 1977. u radu [Baker]) sledi da svaki konačan turnir kao algebra sa dve operacije ima konačnu bazu identiteta. Da li klasa svih turnira ima konačnu bazu identiteta ili nema nije poznato ni dan-danas, i taj otvoren problem se smatra teškim.

U slučaju turnira kao algebri sa jednom operacijom, mreže kongruencija su im i dalje distributivne (naravno, jer turniri imaju iste kongruencije, bilo da su kodirani kao algebre sa jednom ili sa dve operacije!). Međutim, varijetet koji generišu turniri sadrži i algebre koje nemaju distributivne mreže kongruencija. Umesto toga, mreže kongruencija algebri u varijetetu koji generišu turniri su infimum-semidistributivne. Klasu turnira kao algebri sa jednom operacijom su prvo istraživali V. Müller, J. Nešetřil i J. Pelant u radu [MullerNesetrilPelant] 1975. godine. Tad je postavljeno pitanje baze identiteta koji važe u svim turnirima. J. Ježek, P. Marković, M. Maróti i R. McKenzie su 2000. u radu [JezekMarkovicMarotiMcKenzie2] dokazali da ne postoji konačna baza za skup identiteta koji važe u svim turnirima. Pitanje da li svaki konačan turnir ima konačnu bazu identiteta u slučaju kodiranja pomoću jedne operacije je rešeno ponajviše ispitivanjem poddirektno nesvodljivih algebri koje zadovoljavaju sve identitete koje zadovoljavaju svi turniri. U radu [JezekMarkovicMarotiMcKenzie1] iz 1999. godine dokazano je da svi poddirektno nesvodljivi turniri koji zadovoljavaju iste turnire kao jedan konačan turnir T moraju biti konačni, i ne mnogo veći od T. To je bio korak ka primeni teoreme R. Willarda (videti [Willard]) koja objašnjava kako se može dokazati da je konačna baza identiteta neke konačne algebre: potrebno je dokazati da sve generisane algebre imaju infimum-semidistributivne mreže kongruencija, i da su poddirektno nesvodljive algebre koje ta algebra generiše sve konačne. Prvi uslov je, dakle, ispunjen, a drugi takođe kad su te poddirektno nesvodljive algebre i same turniri. Konačno je M. Maróti u svojoj doktorskoj disertaciji [Maroti] iz 2002. godine dokazao da su sve poddirektno nesvodljve algebre koje generišu turniri sa jednom operacijom i same turniri, čime je kompletirao uslove za primenu Willardove teoreme. Dakle, posledica te disertacije je da svaki konačan turnir kao algebra sa jednom operacijom ima konačnu bazu identiteta. Ova teza će prikazati deo tog dokaza koji se odnosi na opis svih poddirektno nesvodljivih turnira do na proste turnire. Koristićemo jednu teoremu iz Marótijeve disertacije bez dokaza.

1. Turniri

Definicija 1.1. Orijentisan graf ili digraf je uređeni par $D = (V, E)$, gde je V skup čvorova a $E \subseteq V \times V$ skup grana. Ako $(u, v) \in E(D)$ pišemo $u \to v$ i kažemo da je to grana iz u u v ili da grana vodi od u do v ili da izlazi iz u i ulazi u v ili da u tuče v, a v gubi od u.

Definicija 1.2. Orijentisan put od čvora v_1 do čvora v_k je
$P_k = v_1 v_2 \dots v_k = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k\ ,\ v_i \to v_{i+1}\ ,\ i = 1, \dots, k-1,\ v_i \neq v_j,\ i \neq j.$
v_1 se naziva početni čvor, a v_k završni čvor. Dužina puta je $|E(P_k)| = k - 1$.

Definicija 1.3. Rastojanje od čvora u do čvora $v, d(u, v)$ je minimalna dužina puta od u do v.
U opštem slučaju je $d(u, v) \neq d(v, u)$.

Definicija 1.4. Orijentisana kontura je $C_k = v_1 v_2 \dots v_k v_1 = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1\ , k \geq 3$,
$v_i \to v_{i+1}\ ,\ i = 1, \dots, k,\ v_{k+1} = v_1,\ v_i \neq v_j,\ i \neq j$. Dužina konture je $|E(C_k)| = k$.

Definicija 1.5. Čvorovi u, v su jako povezani ako postoji orijentisan put od u do v i postoji orijentisan put od v do u.

Definicija 1.6. Orijentisan graf je jako povezan ako su mu svi čvorovi jako povezani.

Lema 1.1. Jaka povezanost je relacija ekvivalencije na skupu svih čvorova orijentisanog grafa i njene klase ekvivalencije se nazivaju klase jake povezanosti.
Dokaz : Refleksivnost : po definiciji svaki čvor x je jako povezan sam sa sobom.
Simetričnost : ako je x jako povezan sa y postoje orijentisani putevi od x do y i od y do x pa je i y jako povezan sa x.
Tranzitivnost : neka je x jako povezan sa y i y jako povezan sa z. Tada postoje putevi $x \to \cdots \to y, y \to \cdots \to z, y \to \cdots \to x, z \to \cdots \to y$. Ali sada postoje i putevi $x \to \cdots \to y \to \cdots \to z$ i $z \to \cdots \to y \to \cdots \to x$ pa je x jako povezano sa z.

Definicija 1.7. Turnir T_n je orijentisan graf sa skupom čvorova $\{1,2,3, \dots, n\}$ u kome je svaki par različitih čvorova (u, v) povezan sa tačno jednom granom $u \to v$ ili $v \to u$.

Definicija 1.8. Turnir je tranzitivan ako za njegove čvorove važi da iz $x \to y$ i $y \to z$ sledi da $x \to z$.

Definicija 1.9. Izvor je čvor koji tuče sve druge čvorove turnira a ponor je čvor koji gubi od svih drugih čvorova turnira.

Lema 1.2. Ako je turnir tranzitivan ne sadrži konturu i sadrži izvor i ponor.
Dokaz : Pretpostavimo da je turnir tranzitivan i da sadrži konturu $1 \to 2 \to \cdots \to k \to 1$. Tada imamo k → 1 i iz $1 \to 2, 2 \to 3$ sledi da $1 \to 3$. Dalje, iz $1 \to 3, 3 \to 4$ sledi da $1 \to 4$. Slično pokazujemo da 1 tuče sve čvorove 2,3,…,k što je protivrečno sa činjenicom da k → 1. Dakle, tranzitivan turnir ne može sadržati konturu. Pretpostavimo da tranzitivan turnir nema ponor. Tada za svaki čvor turnira postoji bar jedna grana koja iz njega izlazi. Dakle, za čvor 1 imamo $1 \to 2$, pa dalje za 2 imamo $2 \to 3$ i tako dalje dobijamo

usmereni put $1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to k \to \cdots$. Kako je naš turnir konačan mora doći do ponavljanja tačaka na primer $i = k$ i sada dobijamo konturu i $\to i + 1 \to \cdots \to k - 1 \to k = i$ što je u kontradikciji sa prvim delom teoreme pa naš turnir mora sadržati ponor. Analogno pokazujemo da tranzitivan turnir ima izvor.

Lema 1.3 Turnir je tranzitivan akko za njegove čvorove važi da $i \to j$ akko $i < j$.
Dokaz : Pretpostavimo da imamo tranzitivan turnir T_n. Prema prethodnoj lemi naš turnir ima izvor koji ćemo označiti sa 1. Sada posmatramo turnir $T_n \backslash \{1\}$. On je takođe tranzitivan pa opet sadrži izvor koji obeležimo sa 2. Sada posmatramo $T_n \backslash \{1,2\}$ i njegov izvor obeležimo sa 3 i tako nastavljamo ovaj postupak čime dobijamo novu notaciju čvorova našeg turnira u kojoj važi da čvor tuče sve svoje sledbenike što čini jedan smer dokaza ove leme. Za drugi smer pretpostavimo da važi da $i \to j$ akko $i < j$ i pretpostavimo da za neke čvorove x, y, z iz T_n važi da $x \to y \; i \; y \to z$. Tada je po pretpostavci $x < y \; i \; y < z$ pa je zbog tranzitivnosti relacije $<$ i $x < z$ iz čega na osnovu pretpostavke sledi da $x \to z$ što je i trebalo pokazati da bismo dobili tranzitivnost turnira T_n.

Definicija 1.10. Ako u turniru T_n svaki čvor podturnira A tuče svaki čvor podturnira B pišemo A$\Longrightarrow B$ i sa $A + B$ označavamo podturnir u kome su novi čvorovi A i B i njihov odnos je A $\to B$.

Lema 1.4. Svaki turnir se može podeliti na klase jake povezanosti koje međusobno imaju odnos kao u tranzitivnom turniru i svaka klasa je jako povezana ili jednoelementna.

Dokaz : Znamo da je jaka povezanost relacija ekvivalencije i da ona vrši particiju skupa svih čvorova turnira na disjunktne klase ekvivalencije čija unija čini ceo skup čvorova. Neka su X i Y dve različite klase jake povezanosti i neka su $x \in X, y \in Y$ i neka je $x \to y$ ($y \to x$ je dualan slučaj a mora važiti tačno jedan od njih dvoje pošto je u pitanju turnir). Ako bi neka od klasa X ili Y bila jednoelementna na primer, X tada bi moralo da važi za svaki čvor y' iz Y da $x \to y'$ jer u suprotnom bi imali $x \to y \to \cdots \to y' \to x$ tj. x i y bi bili jako povezani pa ne bi pripadali različitim klasama ekvivalencije. Sada pretpostavimo da obe klase X i Y imaju po bar dva elementa i neka je $x^{'} \in X, y^{'} \in Y$. Ako bi bilo da $y' \to x'$ onda bi imali $x \to y \to \cdots \to y^{'} \to x^{'} \to \cdots \to x$ pošto su klase ekvivalencije unutar sebe jako povezane imamo puteve između svaka dva člana u njima, pa bi X i Y bile jednake. Dakle, ako $x \to y$ mora i $x' \to y'$ tj. svaki elemenat klase X mora ići u svaki elemenat klase Y pa svaka klasa ekvivalencije ima tačno jednu granu sa svakom drugom klasom ekvivalencije i to X$\Longrightarrow Y$ akko $x \to y$ u turniru. Još treba pokazati da klase ekvivalencije imaju odnos kao u tranzitivnom turniru. Pretpostavimo da klasa X$\Longrightarrow Y$ i Y$\Longrightarrow Z$. Pošto X i Z imaju različite grane sa Y sledi da je X$\neq Z$ pa onda mora biti X$\Longrightarrow Z$ ili Z$\Longrightarrow X$. Pretpostavimo da Z$\Longrightarrow X$. Tada bi za $x \in X, y \in Y, z \in Z$ važilo da $x \to y \to z \to x$ pa bismo dobili da su ove tri klase jednake što je kontradikcija sa pretpostavkom da X$\Longrightarrow Y$ i Y$\Longrightarrow Z$.

Definicija 1.11. A je podturnir turnira T_n ako je skup čvorova turnira A podskup čvorova turnira T_n i skup grana turnira A je podskup grana turnira T_n.

Definicija 1.12. Turnir T_n je svodljiv ako se može prikazati kao $T_n = A + B$ za neke neprazne turnire A i B, u suprotnom je nesvodljiv.

Lema 1.5. Trivijalni turnir T_1 je jedini turnir koji je i tranzitivan i nesvodljiv.

Dokaz : T_1 je trivijalno tranzitivan i nesvodljiv. Pretpostavimo da imamo turnir T_n gde je $n > 1$ koji je tranzitivan. Tada za njegov čvor 1 ne gubeći na opštosti važi da $1 \to i$ za sve čvorove $i > 1$ pa možemo napraviti particiju A= $\{1\}$, B= $T_n \setminus \{1\}$, $T_n = A + B$, A$\Longrightarrow B$. Dakle, T_n je u ovom slučaju svodljiv.

Lema 1.6. Turnir T_n je svodljiv akko nije jako povezan.
Dokaz : Pretpostavimo da je turnir T_n svodljiv. Tada se on može podeliti na dva disjunktna podturnira u kojima svaki čvor jednog, na primer podturnira A tuče svaki čvor drugog, na primer podturnira B. Ako uzmemo proizvoljne čvorove $a \in A, b \in B$ sada važi da $a \to b$ ali ne može postojati put od b do a jer b može ići samo u čvorove podturnira B a nijedan čvor od njih ne može doći do čvora a koji pripada podturniru A i zato ovaj turnir ne može biti jako povezan.
Pretpostavimo sada da turnir T_n nije jako povezan. On se na osnovu Leme 1.1. može podeliti na klase jake povezanosti $E_1, E_2, \dots, E_k, k < n$. Ako uzmemo proizvoljno $j, 1 \le j \le k-1, T_n$ možemo podeliti na dva disjunktna turnira $A = E_1 \cup \dots \cup E_j$ i $B = E_{j+1} \cup \dots \cup E_k$ i pošto klase jake povezanosti posmatrane kao čvorovi turnira obrazuju tranzitivan turnir važi da A$\Longrightarrow B$ i T_n je svodljiv.

Lema 1.7. Neka je T_n jako povezan turnir i i proizvoljan čvor iz T_n. Tada postoje x, y iz T_n takvi da $i \to x, y \to i$ za koje važi da $x \to y$.
Dokaz : Za svaki čvor i jako povezanog turnira moraju postojati bar jedno x i y takvi da $i \to x, y \to i$ jer bi se u suprotnom turnir mogao podeliti na skupove A= $\{i\}$ i B= $T_n \setminus \{i\}, T_n = A + B$ (ako ne postoji $x,\ i \to x$ onda B$\Longrightarrow A$, ako ne postoji $y, y \to i$ onda A$\Longrightarrow B$), pa na osnovu Leme 1.3. on ne bi bio jako povezan. Dakle, postoje x i y takvi da $i \to x, y \to i$ i neka je X skup svih x takvih da $i \to x$ i Y skup svih y takvih da $y \to i$. Ako bi sad pretpostavili da $y \to x$ za sve ovakve x, y, tj. da Y$\Longrightarrow X$ opet bismo T_n mogli podeliti na A $= Y$ i B $= X \cup \{i\}$, A$\Longrightarrow B$ pa naš turnir ne bi bio jako povezan. Dakle, moraju postojati bar jedno $x \in X, y \in Y$ takvi da $x \to y$.

Definicija 1.13. Hamiltonov put je put koji sadrži sve čvorove grafa. Hamiltonova kontura je kontura koja sadrži sve čvorove grafa.

Lema 1.8. Svaki turnir T_n sadrži Hamiltonov put.
Dokaz : Indukcijom po broju čvorova turnira n.
Za $n = 1{,}2$ turniri T_1, T_2 trivijalno sadrže Hamiltonov put. Pretpostavimo da tvrđenje važi za turnire koji imaju manje od n čvorova i posmatramo turnir T_n sa čvorovima $\{1,2,3, \dots, n\}$. Po indukcijskoj hipotezi turnir $T_{n-1} = T_n \setminus \{n\}$ sadrži Hamiltonov put $1 \to 2 \to \cdots \to n-1$. Imamo sledeća 3 slučaja :

1. $n \to 1$, imamo Hamiltonov put $n \to 1 \to 2 \to \cdots \to n-1$
2. $n-1 \to n$, imamo Hamiltonov put $1 \to 2 \to \cdots \to n-1 \to n$
3. $1 \to n$ i $n \to n-1$, neka je k najveći broj za koji važi da $k \to n$. Sada imamo $k \to n$ i $n \to k+1$ i dobijamo Hamiltonov put $1 \to 2 \to \cdots \to k \to n \to k+1 \to \cdots \to n-1$.

Lema 1.9. Turnir $T_n, n \ge 3$ sadrži Hamiltonovu konturu akko je jako povezan.
Dokaz : Pretpostavimo da turnir T_n sa skupom čvorova $\{1,2,3, \dots, n\}$ sadrži Hamiltonovu konturu $C_n = 1 \to 2 \to \cdots \to n \to 1$ i neka su i, j dva proizvoljna čvora T_n. Sada imamo $i \to i+1 \to \cdots \to j$ je put od i do j i $j \to j+1 \to \cdots \to i$ je put od $j\ do\ i$ pa je T_n jako povezan.

Pretpostavimo sada da je T_n jako povezan turnir. Iz Leme 1.7. sledi da T_n sadrži konturu dužine 3, $C_3 = i \to x \to y \to i$. Pretpostavimo da je $C_s = 1 \to 2 \to \cdots \to s \to 1$, $s \geq 3$ najduža kontura u T_n. Ako je $s = n$, C_s je tražena Hamiltonova kontura pa pretpostavimo, stoga, da je $s < n$ i neka je $T_n \backslash C_s = \{s+1, \dots, n\}$. Razlikujemo sledeća dva slučaja :

1. Postoji $u \in \{s+1, \dots, n\}$ takvo da postoje $i, j \in C_s$ takvi da $i \to u, u \to j$.
   Neka je $k \in \{i, \dots, j-1\}$ maksimalan broj takav da $k \to u$, tada $u \to k+1$ i imamo konturu $C_{s+1} = 1 \to \cdots \to k \to k+1 \to \cdots \to s \to 1$ što je kontradikcija sa pretpostavkom da je C_s najduža kontura u T_n.
2. Za svako $\in \{s+1, \dots, n\}$, $C_s \Longrightarrow \{u\}\ ili\ \{u\} \Longrightarrow C_s$.
   Neka su A i B maksimalni podskupovi $T_n \backslash C_s$ takvi da $C_s \Longrightarrow A\ i\ B \Longrightarrow C_s$. Ako bi neki od A ili B bio prazan T_n ne bi bio jako povezan jer bi se mogao podeliti na $B + C_s$ ili $C_s + A$ pa bi bio svodljiv. Dalje, na osnovu Leme 1.4. postoje bar jedno $a \in A\ i\ b \in B$ takvi da $a \to b$. Sada dobijamo konturu $C_{s+2} = 1 \to a \to b \to 2 \to \cdots \to s \to 1$ što je kontradikcija sa pretpostavkom da je C_s najduža kontura.

Dakle, mora biti $s = n$ i C_s je tražena Hamiltonova kontura.

Definicija 1.14. Neka se čvorovi turnira T_n mogu podeliti u disjunktne podturnire $E_1, E_2, \dots, E_m, m < n$ (indeksi ne ukazuju na brojeve čvorova podturnira već samo prave razliku između podturnira) i neka za svako $1 \leq i < j \leq m$ važi da ili $E_i \Longrightarrow E_j$ ili $E_j \Longrightarrow E_i$. Tada kažemo da ova particija definiše relaciju kongruencije na čvorovima od T_n u kojoj su dva čvora ekvivalentna akko pripadaju istom podturniru E_i. Ako sa R_m označimo turnir sa m čvorova u kome $i \to j$ akko $E_i \Longrightarrow E_j$, onda pišemo $T_n = R_m(E_1, E_2, \dots, E_m)$. Kažemo da je turnir T_n prost ako se na njegovim čvorovima ne postoje netrivijalne relacije kongruencije, tj. ako iz $T_n = R_m(E_1, E_2, \dots, E_m)$ sledi da je $m = 1\ i\ E_1 = T_n$ ili da je $m = n\ i\ R_m = T_n$ i $E_i = i$, za svako i.

Lema 1.10. Ako je turnir $T_n, n \neq 2$ prost, onda je on i nesvodljiv.
Dokaz : Ako je $n = 1$, turnir T_1 je trivijalno prost i nesvodljiv. Za $n > 2$ dokaz ćemo dati kontrapozicijom. Ako je T_n svodljiv, $T_n = A + B$ za neprazne, disjunktne, prave podskupove A,B od T_n i neka A$\Longrightarrow B$. Sada možemo definisati relaciju ekvivalencije $R_2(E_1, E_2)$, gde je $E_1 = A, E_2 = B$ pa T_n nije prost.

Lema 1.11. Ne postoji prost turnir sa 4 čvora.
Dokaz : Postoje samo 4 neizomorfna turnira sa 4 čvora. Prvi je turnir koji ne sadrži konturu a to je tranzitivan turnir u kome bilo koja dva uzastopna čvora mogu činiti klasu ekvivalencije i koji stoga nije prost. Druga dva su turniri koji sadrže konturu dužine 3 tj. 3-ciklus koji čini jednu klasu ekvivalencije i četvrti čvor koji je izvor ili ponor i koji je sam u drugoj klasi. Četvrti turnir je turnir koji sadrži konturu dužine 4 recimo $a \to b \to c \to d \to a$ i još dve grane koje izlaze iz neka dva člana konture i ulaze u druga dva člana te konture, recimo $a \to c, b \to d$. Svaki drugi turnir koji sadrži konturu dužine 4 izomorfan je ovom turniru što se lako vidi rotiranjem njihovih skica. Dakle, u ovom turniru je jedna klasa $\{b, c\}$, a druge dve klase su $\{a\}$ i $\{d\}$.

Definicija 1.15 Neka je $f: A^n \to A$ operacija. Kažemo da je f konzervativna ako za sve $a_1, \dots, a_n \in A$ važi da $f(a_1, \dots, a_n) \in \{a_1, \dots, a_n\}$. Algebra A je konzervativna ako za sve operacijske simbole f jezika algebre A važi da su operacije f^A konzervativne.

Definicija 1.16. Neka je ρ refleksivna binarna relacija na skupu A. Definišemo binarnu operaciju $\cdot_\rho$ sa $a \cdot_\rho b = a$ ako $(a,b) \in \rho$ i $a \cdot_\rho b = b$ ako $(a,b) \notin \rho$

Operacije $\cdot_\rho$ su konzervativne binarne operacije koje su idempotentne (jer je ρ refleksivna relacija) i ovom definicijom je uspostavljena bijekcija između svih refleksivnih relacija i svih konzervativnih operacija na skupu A.

Definicija 1.17. Ako je ρ refleksivna binarna relacija koja zadovoljava da za sve $(a,b) \in \mathrm{A}^2$, tačno jedan od parova (a,b) i (b,a) pripada ρ, onda (A,ρ) zovemo turnir. Istim imenom ćemo zvati i grupoide $(A,\cdot_\rho)$. Klasu svih turnira (kao grupoida) obeležavamo sa $\mathcal{T}$.

Lema 1.12. Neka je $\boldsymbol{A} = (A,\cdot)$ grupoid. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}$ akko je $\boldsymbol{A}$ komutativan i konzervativan.
Dokaz: Ako $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}$, onda $\cdot = \cdot_\rho$ za neku refleksivnu relaciju ρ, pa je $\boldsymbol{A}$ konzervativan po definiciji $\cdot_\rho$. Ako je $a \cdot b = a$, onda je ili $a = b$ i u tom slučaju je $a \cdot b = b \cdot a = a$ ili je $a \neq b$ i po definiciji operacije $\cdot$, $(a,b) \in \rho$ iz čega sledi da $(b,a) \notin \rho$ pa je $b \cdot a = a$ odakle sledi komutativnost. Ako je $a \cdot b = b$ na isti način, primenom Definicija 3.1. i 3.2. dobijamo komutativnost.
Ako je $\boldsymbol{A}$ komutativan i konzervativan, onda definišemo refleksivnu binarnu relaciju ρ na A^2 tako da za sve $(a,b) \in \mathrm{A}^2$, ako $a \cdot b = a$ onda $(a,b) \in \rho$ i $(b,a) \notin \rho$, a ako $a \cdot b = b$, onda $(b,a) \in \rho$ i $(a,b) \notin \rho$. Iz definicije ρ sledi da je (A,ρ) turnir i da je $\cdot = \cdot_\rho$ pa je $\boldsymbol{A}$ turnir.

Neka je $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}$. Za $a, b \in A$ uvodimo notaciju $a \to b$ akko $a \cdot b = a$. Ako su B, C disjunktni podskupovi skupa A i $a \in A \setminus B$, onda sa $B \Longrightarrow a$ obeležavamo da za sve $b \in B$ važi da $b \to a$ i sa $B \Rightarrow C$ obeležavamo da za sve $b \in B, c \in C$ važi da $b \to c$. Dualno uvodimo i oznaku $\Longleftarrow$.

Definicija 1.18. Neka je $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}$ i $S \subseteq A$. Kažemo da je skup S konveksan ako za sve $a \in A \setminus S$ i za sve $s, t \in S$ važi $a \longrightarrow s$ akko $a \longrightarrow t$.

Lema 1.13. Neka je $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}$ i α relacija ekvivalencije na skupu A. α je kongruencija na $\boldsymbol{A}$ akko je svaka klasa ekvivalencije relacije α konveksan skup.
Dokaz: Pretpostavimo da je α kongruencija na $\boldsymbol{A}$. Neka je S klasa ekvivalencije relacije α i $s, t \in S$ i neka $a \notin S$. Pošto su s, t u istoj klasi ekvivalencije, $(s,t) \in \alpha$ i pošto je α refleksivna $(a,a) \in \alpha$ pa pošto je α kongruencija imamo da i $(as, at) \in \alpha$, a pošto je $\boldsymbol{A}$ turnir, $as \in \{a, s\}$ i $at \in \{a, t\}$. Ako je $as = a$, mora biti i $at = a$ jer bi u suprotnom imali $(a,t) \in \alpha$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $a \notin S$ i isto tako, ako je $at = a$ mora biti i $as = a$. Ako je, pak, $as = s$ mora biti i $at = t$ jer bi u suprotnom opet imali $(s,a) \in \alpha$ što opet vodi u kontradikciju i iz $at = t$ sledi da je $as = s$. Dakle, imamo $a \longrightarrow s$ akko $a \longrightarrow t$ pa je S konveksan skup.
Pretpostavimo sada da je α relacija ekvivalencije na turniru $\boldsymbol{A}$ u kojoj je svaka klasa ekvivalencije konveksan skup i neka su $(a,b), (c,d) \in \alpha$. Ako su a, c u istoj klasi S onda $ac \in \{a,c\} \subseteq S$ i $bd \in \{b,d\} \subseteq S$ pa je i $(ac, bd) \in \alpha$. Pretpostavimo sada da a, c nisu u istoj klasi tj. neka a pripada klasi S a c

pripada klasi *K*. Sada imamo da iz $ac = a$ sledi da je $bc = b$ jer bi u suprotnom $(ac, bc) = (a, c) \in \alpha$, i iz $bc = b$ sledi $bd = b$ jer bi opet imali $(bc, bd) = (b, d) \in \alpha$ pa bi iz tranzitivnosti relacije α sledilo da $(a, c) \in \alpha$. Takođe, iz $bd = b$ sledi da je $bc = b$ jer bi u suprotnom bilo $(bc, bd) = (b, c) \in \alpha$ pa bi opet iz tranzitivnosti sledilo da je $(a, c) \in \alpha$, i iz $bc = b$ sledi $ac = a$ jer bi opet dobili $(bc, ac) = (b, c) \in \alpha$ što bi kao malopre vodilo u kontradikciju. Iz istih razloga imamo da važi i $ac = c$ akko $bc = c$ akko $bd = d$. Dakle, $(ac, bd) = (a, b) \in \alpha$ ako je $ac = a$ ili $(ac, bd) = (c, d) \in \alpha$ ako je $ac = c$ pa je α u svim slučajevima kongruencija.

Definicija 1.19. Za turnir $\boldsymbol{A}$ i elemente $a, b \in A$ pišemo $a \lesssim b$ ako postoje elementi $a_0, \dots, a_k \in A$ takvi da je $a = a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_k = b$. Pišemo $a \sim b$ ako važi $a \lesssim b$ i $b \lesssim a$ i kažemo da su elementi $a\ i\ b$ jako povezani.

Lema 1.14. $\lesssim$ je refleksivna i tranzitivna relacija koja je kompatibilna, a $\sim$ je kongruencija na $\boldsymbol{A}$.
Dokaz:
Iz definicije ovih relacija se vidi da je $\lesssim$ refleksivna i tranzitivna relacija i da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Ako pokažemo da je $\lesssim$ kompatibilna, onda će i $\sim$ biti kompatibilna kao konjukcija dva smera $\lesssim$ pa će, stoga, biti i relacija kongruencije. Za kompatibilnost treba da pokažemo da ako je $a \lesssim b\ i\ c \lesssim d$ onda je i $ac \lesssim bd$. Prvo pokazujemo da ako je $a \lesssim b$, što se svodi na slučaj da ako $a \to b$ tj. $ab = a$, onda $ac \lesssim bc$, a opšti slučaj sledi iz tranzitivnosti relacije $\lesssim$. Da bismo ovo pokazali potrebne su nam sledeće jednakosti:

1. $ac = aca$. Pošto $ac \in \{a, c\}$, ako je $ac = a$, onda je $aca = aa = a$ jer imamo idempotentnost operacije $\cdot$. Ako je $ac = c$, onda je $aca = ca = ac = c$ jer je $\cdot$ komutativna operacija. Dakle, u oba slučaja donijamo traženu jednakost.
2. $bcac \cdot bca = bcac$. Imamo $bcacbca = bcabcca = bcabca = bcacba = bcacab = bcaca = bcaac = bcac$ što sledi iz komutativnosti i idempotentnost operacije $\cdot$ i činjenice da je $ab = a$.
3. $bca \cdot bc = bca$. Imamo $bcabc = bcac = bcca = bca$ opet iz komutativnosti, idempotentnosti i iz $ab = a$.

Dakle, imamo $ac = aca = abca = baca = bcac \to bca \to bc$ što sledi iz komutativnosti i idempotentnosti $\cdot$, $ab = a$ i jednakosti 1.,2.,3. Pokazali smo da ako je $a \lesssim b$ onda $ac \lesssim bc$. Iz komutativnosti i pretpostavke $c \lesssim d$ sledi da je i $bc \lesssim bd$ pa iz tranzitivnosti $\lesssim$ sledi i $ac \lesssim bd$.

Definicija 1.20. Kažemo da je turnir $\boldsymbol{A}$ jako povezan ako je $\sim\, = A^2$, tj. za sve $a, b \in A$ važi da su $a\ i\ b$ jako povezani.

Sa $\boldsymbol{ConA}$ obeležavamo skup svih kongruencija na algebri $\boldsymbol{A}$, one obrazuju mrežu u kojoj je najmanji element $\Delta_{\boldsymbol{A}}$, dijagonalna relacija na $\boldsymbol{A}$, a najveći $\nabla_{\boldsymbol{A}} = A^2$. Za dve kongruencije $\alpha, \beta \in \boldsymbol{ConA}$, $\alpha \wedge \beta$ je njihov presek $\alpha \cap \beta$, a $\alpha \vee \beta$ je nejmanja relacija ekvivalencije koja sadrži skup $\alpha \cup \beta$. Algebra $\boldsymbol{A}$ je prosta ako je $\boldsymbol{ConA}$ dvoelementna mreža. Ovo važi akko $\boldsymbol{A}$ ima bar dva elementa i na njoj se mogu definisati samo trivijalne kongruencije $\Delta_{\boldsymbol{A}}\ i\ \nabla_{\boldsymbol{A}}$.

Definicija 1.21. Algebra $\boldsymbol{A}$ je poddirektno nesvodljiva ako je prosta ili na njoj postoji kongruencija $\mu \neq \Delta_A$, koja se naziva monolit, takva da je za svaku drugu kongruenciju $\alpha \in \boldsymbol{ConA}$ ili $\alpha = \Delta_A$ ili $\mu \leq \alpha$.

2. **Munova teorema**

Sa (T_n, z) ćemo označavati turnir dobijen dodavanjem (n+1)–og čvora z turniru T_n tako da z tuče neke od čvorova T_n a od ostalih gubi.

Lema 2.1. Ako postoji prost turnir (T_n, z), onda T_n nije ni 3-ciklus ni netrivijalni tranzitivan turnir sa neparnim brojem čvorova.

Dokaz : Ako je (T_n, z) prost turnir, onda na osnovu Leme 1.11. T_n ne može imati 3 čvora pa stoga nije ni 3-ciklus. Pretpostavimo, sada, da je (T_n, z) prost turnir koji sadrži tranzitivni turnir T_n sa neparnim brojem čvorova i možemo pretpostaviti da je $n \geq 5$ jer je za n$= 1$ (T_n, z) trivijalno prost i videli smo da n ne može biti 3. Ako bi bilo da $1 \to z$, (T_n, z) bi bio svodljiv, A$= \{1\}$, $\mathrm{B} = (T_n, z)\backslash\{1\}$, A$\Longrightarrow B$, pa ne bi bio prost pa mora biti z $\to 1$. Takođe, ako bi bilo z $\to n$, (T_n, z) bi opet bio svodljiv za A$= \{n\}$, $\mathrm{B} = (T_n, z)\backslash\{n\}$, B$\Longrightarrow A$ pa ne bi bio prost, pa mora biti i $n \to z$. Pošto je n neparno i 1 gubi od z a n tuče z, moraju postojati dva uzastopna čvora i i $i+1$ u T_n tako da oboje tuku z ili oboje gube od z. Sada možemo definisati netrivijalnu relaciju kongruencije na čvorovima od (T_n, z) u kojoj su čvorovi i i $i+1$ u jednoj klasi ekvivalencije a preostali čvorovi od (T_n, z) svaki u odvojenoj klasi odakle sledi da turnir (T_n, z) ne može biti prost.

Ako je T_3 3-ciklus i sadrži grane $1\to 2, 2 \to 3{,}3 \to 1$, sa H_4 ćemo označiti turnir (T_3, z) u kome je $z \to 1{,}2 \to z, 3 \to z$.

Lema 2.2. Jedina netrivijalna relacija kongruencije koja može biti definisana na čvorovima od H_4 je ona u kojoj su čvorovi 3 i z u jednoj klasi a preostala dva čvora u odvojenim klasama ekvivalencije.

Dokaz : Prvo utvrdimo da ne može postojati nijedna troelementna klasa ekvivalencije jer za svaki troelementni podturnir od H_4 preostali čvor koji nije u tom podtruniru neke čvorove tog podturnira tuče a od drugih gubi. Dalje, posmatramo dvoelementne podturnire i vidimo da samo $\{3, z\}$ može biti klasa ekvivalencije jer $\{3, z\} \Longrightarrow \{1\}$ i $\{2\} \Longrightarrow \{3, z\}$ dok ostali dvoelemetni podturniri od istog čvora i gube i dobijaju. Dakle, imamo da je $\{3, z\}$ jedna klasa i da čvorovi 1 i 2 ne mogu biti u istoj klasi jer jedan gubi od $\{3, z\}$, a drugi dobija, pa oni moraju biti svaki u odvojenoj klasi ekvivalencije.

Ako je T_n tranzitivan turnir, sa J_{n+1} ćemo označavati turnir (T_n, z) u kome $z \to i$ akko je i neparno, a sa K_{n+1} ćemo označavati turnir (T_n, z) u kome $z \to i$ akko je i parno.

Lema 2.3. Ako je n parno, J_{n+1} je prost.

Dokaz : Pretpostavimo da imamo neku klasu ekvivalencije koja sadrži dva proizvoljna čvora turnira T_n, neka su to i i j i recimo da je $i < j$. Sada, ako su i i j uzastopni, različite su parnosti pa imaju različite grane sa z pa ova klasa mora sadržati i z. Ako oni nisu uzastopni, njihova klasa mora sadržati sve čvorove između njih pošto je u pitanju tranzitivan turnir pa među njima postoje bar dva različite parnosti pa opet z mora pripadati toj klasi. Pretpostavimo sada da neka klasa ekvivalencije sadrži z i proizvoljan čvor i iz

T_n. Sada, pošto imamo da $z \to 1 \to i$ mora i 1 pripadati ovoj klasi i pošto $i \to n \to z$, i n takođe mora pripadati ovoj klasi, a u tranzitivnom turniru ako klasa sadrži 1 i n, mora sadržati i sve čvorove turnira jer svi imaju različite grane sa 1 i sa n. Dakle, dobili smo da u J_{n+1} svaka klasa mora sadržati z i bar još jedan čvor iz T_n i da u tom slučaju mora sadržati i sve ostale čvorove T_n pa se na njemu ne mogu definisati netrivijalne klase ekvivalencije iz čega sledi da je prost.

Lema 2.4. Ako je n neparno, J_{n+1} i K_{n+1} su prosti samo kada je $n = 1$. Ako je n neparno i $n \geq 3$, jedina netrivijalna relacija ekvivalencije koja može biti definisana na čvorovima od J_{n+1} je ona u kojoj je n-ti čvor od T_n u jednoj klasi a svi ostali čvorovi u drugoj klasi ekvivalencije, a jedina netrivijalna relacija ekvivalencije koja može biti definisana na čvorovima od K_{n+1} je ona u kojoj je prvi čvor od T_n u jednoj klasi a svi preostali čvorovi u drugoj klasi ekvivalencije.
Dokaz : Kada je $n = 1$, J_2 i K_2 su 3-ciklusi koji su prosti. Pokazali smo u prethodnoj lemi da je J_{n+1}, za n parno, prost pa možemo ovo primeniti na turnir J_{n+1} bez čvora n. Dakle, svaka klasa ekvivalencije koja ne sadrži čvor n mora sadržati sve čvorove turnira $J_{n+1} \backslash \{n\}$. n može biti samo u klasi jer svi čvorovi T_n tuku n i $z \to n$. Dakle, jedna netrivijalna relacija ekvivalencije je sa klasama $\{n\}$ i $J_{n+1} \backslash \{n\}$. Ako bi neka klasa sadržala n i neki čvor $i < n$ onda bi morala sadržati i sve između njih zbog tranzitivnosti pa i z, a ako neka klasa sadrži n i z, mora sadržati i 1 jer $z \to 1 \to n$ pa samim tim i sve čvorove T_n. Dakle, ne može biti netrivijalne klase ekvivalencije koja sadrži n, a turnir $J_{n+1} \backslash \{n\}$ je prost pa je jedina netrivijalna relacija ekvivalencije je sa klasama $\{n\}$ i $J_{n+1} \backslash \{n\}$. Sada posmatramo tunir K_{n+1}. $\{1\}$ može biti klasa ekvivalencije jer 1 tuče sve čvorove T_n i 1$\to z$ pa je jedna netrivijalna relacija ekvivalencije ona sa klasama $\{1\}$ i $K_{n+1} \backslash \{1\}$. Ako bi neka klasa sadržala 1 i neki čvor $i > 1$ ona bi zbog tranzitivnosti morala sadržati i sve čvorove između njih pa i z. Ako klasa sadrži 1 i z pošto imamo da 1$\to n \to z$ ona bi morala sadržati i n pa samim tim i sve čvorove T_n. Dakle, nijedna klasa ekvivalencije ne može sadržati 1 sa još nekim čvorom iz K_{n+1}. Treba još pokazati da je $K_{n+1} \backslash \{1\}$ prost. Ovaj turnir je izomorfan turniru J_{k+1}, k$= n - 1$, u kome je k parno (preslikavanje čvorova $i + 1 \to i$) za koji je pokazano u prethodnoj lemi da je prost. Ovime je završen dokaz leme.

Ako je T_n prost turnir sa n čvorova, gde je $n \geq 5$, neka je $A_i = \{ j \mid i \to j \in T_n \}$ i $B_i = A_i \cup \{i\}$, za 1$\leq i \leq n$. Neka W označava neprazni pravi podskup od $\{1,2, \dots, n\}$ takav da je W$\neq A_i$ ili B_i za svako i.

Lema 2.5. Skup W postoji.
Dokaz : Broj podskupova skupa T_n od n elemenata je 2^n. Broj skupova A_i i B_i je n pošto toliko ima i −ova, pa je broj skupova W takvih da je W$\neq A_i$ ili B_i $2^n - 2n$ i pošto je W neprazan pravi podskup od T_n još oduzimamo slučajeve da je W$= \emptyset$ i W$= T_n$. Dakle, da bismo pokazali da skup W postoji, treba pokazati da je $2^n - 2n - 2 > 0, tj.$ da je $2^n > 2n + 2$ kada je $n \geq 5$. Ovo se pokazuje indukcijom po n. Za $n = 5$ imamo $2^5 = 32 > 2 \cdot 5 + 2 = 12$ što nam čini bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrđenje važi za n i pokazujemo za $n + 1$. $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (2n + 2)2 = 4n + 4 > 2n + 4 = 2(n + 1) + 2$.

Neka je L_{n+1} turnir (T_n, z) u kome $z \to i$ akko $i \in W$.

Lema 2.6. Turnir L_{n+1} je prost.

Dokaz : Pretpostavimo da neka klasa ekvivalencije na L_{n+1} sadrži dva čvora iz T_n. Tada, pošto je T_n prost, ona mora sadržati i sve ostale čvorove turnira T_n. Sada proveravamo da li z može biti samo u klasi. Pošto je W pravi podskup skupa T_n, postoji bar jedan čvor koji mu ne pripada pa ne može biti da $\{z\} \Longrightarrow T_n$, a pošto je W neprazan podskup, sadrži bar jedan čvor pa ne može biti da $T_n \Longrightarrow \{z\}$. Dakle, ne postoji relacija kongruen čije su klase T_n i $\{z\}$. Sada pretpostavimo da neka klasa ekvivalencije sadrži z i proizvoljan čvor i iz T_n. Pošto je W≠ A_i mora važiti ili da je $A_i \subset W$ ili da $A_i \not\subset W$. Ako $A_i \not\subset W$ imamo neki čvor $j \in A_i \backslash W$ pa onda imamo da $i \to j$ jer $j \in A_i$ $j \to z$ jer $j \notin W$ pa z ne tuče j pa pošto smo u turniru mora j da tuče z. Dakle, u ovom slučaju i j pripada našoj klasi ekvivalencije. Ako je $A_i \subset W$, pošto imamo da je W≠ $B_{i,}$ postoji neki čvor $k \in W \backslash A_i$, $k \neq i$ i tada imamo da $z \to k$ jer $k \in W$ i $k \to i$ jer $k \notin A_i$ pa i ne tuče k, pa pošto smo u turniru moraće k da tuče i, pa i u ovom slučaju k mora pripadati istoj klasi kao i i i z. Znači, ako neka klasa ekvivalencije sadrži z i proizvoljan čvor iz T_n, ona mora sadržati i još jedan čvor iz T_n, pa pošto je T_n prost i sve ostale njegove čvorove iz čega sledi da ne možemo definisati netrivijalne relacije ekvivalencije na čvorovima od L_{n+1} što je i trebalo pokazati.

Lema 2.7. Neka je T_4 turnir sa 4 čvora koji sadrži ciklus dužine 4. Tada postoji prost turnir (T_4, z).
Dokaz : Neka je T_4 turnir sa konturom $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ i neka sadrži grane $1 \to 3$, $2 \to 4$. Već smo utvrdili da je svaki drugi turnir koji sadrži ciklus dužine 4 izomorfan ovom turniru i da je u njemu jedina netrivijalna klasa ona u kojoj su čvorovi $\{2,3\}$ Ako sada definišemo (T_4, z) tako da $z \to 2$, $1 \to z$, $3 \to z$, $4 \to z$, dobijamo prost turnir. Naime, pošto imamo $z \to 2 \to 3 \to z$, 2,3 i z moraju biti u istoj klasi ekvivalencije. Dalje, imamo $3 \to 4 \to z$ pa je i 4 sa njima u klasi, i na kraju, iz $4 \to 1 \to z$ sledi da je i 1 u toj klasi pa je u ovom slučaju (T_4, z) prost turnir. Još nam preostaje slučaj kada je u jednoj klasi $\{z, i\}$ za neko $1 \leq i \leq 4$ a sve ostale klase su jednoelementne. i ne može biti 1 jer 1 i z imaju različite grane sa 3, ne može biti 2 iz istog razloga, ne može biti 3 jer z i 3 imaju različite grane sa 2 i ne može biti 4 jer z i 4 imaju različite grane sa 1. Dakle, svi slučajevi su eleminisani i (T_4, z) je zaista prost turnir.

Lema 2.8. Ako imamo relaciju kongruencije $R_m(E_1, E_2, \ldots, E_m)$ definisanu na čvorovima turnira T_n, ta relacija po definiciji predstavlja turnir sa m čvorova. Ako je R_m prost turnir i postoje dva čvora iz T_n, x_i i x_j koji su ekvivalentni u odnosu na neku relaciju kongruencije $L_s(J_1, \ldots, J_s)$ koja može biti definisana na čvorovima od T_n i neka su $x_i \in E_i, x_j \in E_j$, $i \neq j$ onda za proizvoljan čvor $x_k \in E_k$ $k \neq i, j$ važi da je i on u istoj klasi J_t sa x_i i x_j.
Dokaz : Ako uzmemo po jednog predstavnika iz svake klase E_i turnira R_m dobijamo turnir sa čvorovima $\{x_1, \ldots, x_m\}$ u kome $x_i \in E_i$ i u kome su grane orijentisane kao i u turniru R_m tj. važi da $x_i \to x_j$ akko $E_i \to E_j$ po definiciji turnira R_m. Dakle, dobijeni turnir je izomorfan sa R_m pa pošto je R_m prost i on je prost. Sada, ako su dva čvora x_i i x_j u istoj klasi ekvivalencije J_t, i svi ostali x_k su u toj klasi jer ne možemo definisati netrivijalnu relaciju kongruencije $L_s(J_1, \ldots, J_s)$ na čvorovima $\{x_1, \ldots, x_m\}$.

Lema 2.9. Ako je turnir jako povezan, onda nije tranzitivan.
Dokaz : Dokaz ćemo dati kontrapozicijom, tj. pokazaćemo da, ako je turnir tranzitivan, onda nije jako povezan. Pošto je svaki tranzitivan turnir T_n svodljiv, $T_n = \{1\} + \{2,3, \ldots, n\}$ pošto 1 tuče svaki drugi čvor, na osnovu Lema 1.6 on nije jako povezan.

Teorema 2.1. (Munova teorema) Ako je T_n turnir sa n čvorova, onda postoji prost turnir (T_n, z) ako T_n nije ni 3-ciklus ni netrivijalni tranzitivan turnir sa neparnim brojem čvorova.

Dokaz: Dokaz ćemo dati indukcijom po broju čvorova turnira – n. Za $n = 1$ imamo trivijalni tranzitivan turnir sa neparnim brojem čvorova, ako T_n ima 2 čvora, (T_2, z) može biti 3-ciklus koji je prost za $n = 3$ turnir je ili 3-ciklus ili tranzitivan sa neparnim brojem čvorova i svi ovi slučajevi su po pretpostavci isključeni. Dakle, možemo uzeti $n = 3$ za bazu indukcije. Pretpostavimo, sada, da tvrđenje važi za sve turnire koji imaju manje od n čvorova i pokazujemo da važi za turnir T_n

1.slučaj: Ako je T_n nesvodljiv turnir koji nije 3-ciklus i nije netrivijalni tranzitivan turnir sa neparnim brojem čvorova, onda postoji prost turnir (T_n, z). Pošto smo pretpostavili da je T_n nesvodljiv sledi da on ne može biti tranzitivan, jer kada bi bio tranzitivan mogao bi se podeliti na $\{1\}$ i $\{2,3, \dots, n\}$ pa bi bio svodljiv. Za bazu indukcije uzimamo $n = 4$. Pokazali smo u Lemi 1.11 da imamo samo 4 neizomorfna turnira sa 4 čvora i jedini od njih koji je nesvodljiv je na osnovu Leme1.6 i Leme 1.9 onaj koji sadrži ciklus dužine 4 i u Lemi 2.7 je pokazano da za njega postoji prost turnir (T_4, z) . Pretpostavimo, sada, da trvrđenje važi za sve turnire koji imaju više od 4 i manje od n čvorova i pokazujemo da će važiti i za turnir T_n. Ako je turnir T_n prost, tvrđenje sledi iz Leme 2.6 jer nam je $n \geq 5$ i zato možemo pretpostaviti da T_n nije prost. Stoga, postoje podturniri $E_1, E_2, \dots, E_m, 3 \leq m < n$ (za $m = 2$ bi T_n bio svodljiv) i turnir R_m takav da je $T_n = R_m(E_1, E_2, \dots, E_m)$. Možemo pretpostaviti da je m najmanji prirodan broj za koji ova jednakost važi, što implicira da je turnir R_m prost. Kada R_m ne bi bio prost, mogao bi se podeliti na neke $J_1, J_2, \dots, J_k, k < m$, gde su u J_i neki od čvorova $E_1, E_2, \dots, E_m$ pa bi to bilo deljenje T_n na manje od m podturnira. Sa T_{n+1} označimo turnir (T_n, z) u kome su grane između z i čvorova svakog od podturnira E_i orijentisane tako da važe sledeći uslovi :

a) Ako je E_i 3-ciklus, (E_i, z) je turnir H_4.
b) Ako je E_i tranzitivan turnir sa h čvorova, (E_i, z) je J_{h+1}, a ako je $h = 1$ za sve E_i i postoji samo jedna klasa ekvivalencije E_k sa više od jednim čvorom, ako $E_k \to E_i$, (E_i, z) je K_2, a ako $E_i \to E_k$, (E_i, z) ostaje J_2 a (E_k, z) u svakom slučaju ostaje J_{k+1}.
c) Ako E_i nije nijedan od turnira opisan u a) i b), onda važi indukcijska pretpostavka, pa je (E_i, z) prost turnir koji sadrži E_i.

Da bismo pokazali da je turnir T_{n+1} prost, pokazujemo da ako neka klasa ekvivalencije proizvoljne relacije ekvivalencije sadrži dva čvora iz T_{n+1}, mora sadržati sve čvorove T_{n+1}. Neka su $x\ i\ y$ dva čvora iz T_{n+1} koji su ekvivalentni u odnosu na neku relaciju kongruencije koja može biti definisana na čvorovima od T_{n+1} i neka je X njihova klasa ekvivalencije. Sada razmatramo različite mogućnosti za čvorove x i y:

1. $x \in E_i, y \in E_j, i \neq j$. Pošto je turnir $R_m(E_1, E_2, \dots, E_m)$ prost, iz Leme 2.8. sledi da je i svaki drugi čvor $w \in E_k, k \neq i, j$ u istoj klasi ekvivalencije X sa $x\ i\ y$. Ako sada posmatramo $x \in E_i$ i $w \in E_k$ iz iste leme sledi da će i svi $v \in E_j$ biti u istoj klasi X sa njima, i takođe, za $y \in E_j, w \in E_k$ i svi $o \in E_i$ će biti u istoj klasi te ekvivalencije X. Dakle, dobili smo da su svi čvorovi od T_n u jednoj klasi X pa treba još pokazati da i čvor z pripada toj klasi. Bar jedan podturnir od T_n, obeležimo ga sa E_1, mora imati više od jednog čvora (pretpostavili smo da T_n nije prost). Pošto smo malopre

pokazali da $E_1 \subset X$, po definiciji turnira (E_1, z) (a), b), c)) i iz Lema 2.2, 2.3, 2.4, 2.6 sledi da ili je (E_1, z) prost, pa su svi čvorovi u istoj klasi ekvivalencije, ili ako neka klasa ekvivalencije sadrži 2 čvora iz E_1 onda sadrži i z. U svakom slučaju, dobijamo da i $z \in X$ pa je u ovom slučaju T_{n+1} prost.

2. $x \in E_k, y = z$. Neka je E_i podturnir od T_n takav da je $i \neq k$. Ako $E_k \Longrightarrow E_i$ i E_i sadrži čvor v takav da $v \to z$ onda pošto imamo $x \to v \to z$, i v će pripadati klasi X. Dakle, dobijamo dva čvora iz dve različite klase E_k, E_i koji pripadaju X što se svodi na slučaj 1. Isti zaključak važi ako $E_i \Longrightarrow E_k$ i E_i sadrži čvor u takav da $z \to u$. Imaćemo $z \to u \to x$ pa i $u \in X$ i opet svodimo na 1. Možemo pretpostaviti, stoga, da nijedan podturnir E_i ne sadrži ovakve čvorove $v\ i\ u$. Međutim, po definicijama turnira (E_i, z) ako turnir E_i sadrži bar dva čvora oni moraju imati različito usmerene grane sa z pa je ovo moguće samo ako se svaki od podturnira E_i sastoji iz jednog čvora. U tom slučaju su (E_i, z) ili turnir J_2, ako $E_i \Longrightarrow E_k$, ili turnir K_2, ako $E_k \Longrightarrow E_i$. Sada, pošto T_n nije prost, E_k mora biti jedina klasa ekvivalencije sa više od jednim čvorom. Ali, mi smo u delu b) pretpostavili da, ako $E_j \Longrightarrow E_k$, onda $z \Longrightarrow E_j$, za sve j, $k \neq j$ a kod nas svi čvorovi E_j idu u z što je nemoguće, a ako $E_k \Longrightarrow E_i$, onda $E_j \Longrightarrow z$ za sve j, $k \neq j$ a kod nas je pretpostavka da u ovom slučaju ne postoji čvor takav da $v \to z$. Dakle, dobili smo kontradikciju sa pretpostavkom b), pa ovaj slučaj nije moguć i jedina alternativa je ona pod 1. iz koje sledi da je T_{n+1} prost.
3. $x, y \in E_i$. Ako je E_i 3-ciklus, onda je $E_i \subset X$, jer je 3-ciklus prost, a $E_i \cap X$ je konveksan podskup 3-ciklusa E_i koji sadrži x i y. Dalje, iz a) sledi da je podturnir (E_i, z) izomorfan turniru H_4, dakle 4-ciklusu, koji na osnovu Leme 2.2 ima samo konveksne podskupove od 1, 2 i 4 elementa. Kako je $(E_i, z) \cap X$ konveksan podskup od (E_i, z) koji sadrži E_i, dakle ima bar tri elementa, onda mora biti $(E_i, z) \cap X = E_i$. Dakle, $z \in X$ i ovaj slučaj se svodi na slučaj 2. Ako je E_i tranzitivan turnir, onda iz $x, y \in E_i \cap X$ i činjenice da je $E_i \cap X$ konveksan podskup od E_i sledi da postoje dva uzastopna elementa $u, v \in E_i$ (kao linearno uređenog skupa) koji su u X. Iz b) i definicije J_{h+1} sledi da $u \to z \to v$ ili $v \to z \to u$, a u oba slučaja iz konveksnosti X dobijamo da je $z \in X$, pa se i ovaj slučaj svodi na slučaj 2. Konačno, ako E_i nije ni 3-ciklus, ni tranzitivan turnir, onda se primenjuje c) iz definicije T_{n+1}, dakle (E_i, z) je prost turnir, pa kako je $(E_i, z) \cap X$ njegov konveksan podskup koji sadrži bar dva elementa x i y, sledi da z pripada X, pa i taj slučaj se ponovo svodi na slučaj 2.

2.slučaj: Ako je T_n svodljiv turnir koji nije 3-ciklus i nije netrivijalni tranzitivan turnir sa neparnim brojem čvorova, onda postoji prost turnir (T_n, z). Ako je T_n tranzitivan turnir sa parnim brojem čvorova, tvrđenje sledi iz Leme 2.3., a tranzitivan sa neparnim brojem čvorova je isključen po pretpostavci, pa možemo pretpostaviti, stoga, da T_n nije tranzitivan. Pošto je T_n svodljiv, iz Leme 1.6. sledi da nije jako povezan, pa ga na osnovu Leme 1.4. možemo podeliti na komponente jake povezanosti među kojima bar jedna ima više od jednog elementa. Dobijamo podturnire $F_1, \dots, F_l$, $2 \leq l < n$ i turnir $R_l(F_1, \dots, F_l) = T_n$ koji je, na osnovu iste leme tranzitivan i u kome je svaka klasa jake povezanosti tj. svaki podturnir F_j je jako povezan ili je jednoelementan. Sada vršimo particiju turnira R_l na sledeći način: ako imamo više uzastopnih jednoelementnih klasa, njih sve stavimo u jednu novu klasu E_i, u suprotnom klase ostaju iste kao F_i. Dobijamo turnir $R_m(E_1, E_2, \dots, E_m)$, $2 \leq m \leq l < n$ u kome je svaka klasa E_i ili jako povezana (ima bar 3 elementa jer dvoelementni turnir ne može biti jako povezan) ili je tranzitivna (sastoji se od 1 ili više klasa jake povezanosti F_j). Sada možemo videti da nikoja dva uzastopna turnira E_i i E_{i+1} nisu oba tranzitivni jer jako povezani turniri ne mogu biti tranzitivni na osnovu Leme 1.11, a sve uzastopne tranzitivne smo smestili u jednu klasu. Sa T_{n+1} označimo turnir (T_n, z) u kome su grane između z i svakog podturnira E_i orijentisane tako da važe sledeći uslovi :

a) Ako je E_i 3-ciklus, (E_i, z) je turnir H_4.

b) Ako je E_i tranzitivan turnir sa h čvorova, (E_i, z) je J_{h+1}, a ako je $h = 1$ za sve E_i i postoji samo jedna klasa ekvivalencije E_k sa više od jednim čvorom, ako $E_k \to E_i$, (E_i, z) je K_2, a ako $E_i \to E_k$, (E_i, z) ostaje J_2. Jedini izuzetak je ukoliko je h neparno i $h \geq 3$, u kom slučaju je (E_i, z) turnir K_{h+1} za $i = m$.

c) Ako E_i nije nijedan od turnira opisan u a) i b), onda važi indukcijska pretpostavka, pa je (E_i, z) prost turnir koji sadrži E_i.

Pretpostavimo da su dva čvora, $x\ i\ y$ iz T_{n+1} ekvivalentni u odnosu na neku proizvoljnu relaciju kongruencije koja može biti definisana na čvorovima od T_{n+1}, i neka je X njihova klasa ekvivalencije. Da bismo pokazali da je T_{n+1} prost, pokazujemo da je X$= T_{n+1}$. Sada razmatramo različite mogućnosti za čvorove $\ i\ y$:

1. $x \in E_i, y = z$. Prvo pretpostavimo da je $i < m$. Posmatramo turnir (E_m, z) iz čije definicije (a), b), c)) sledi da postoji bar jedan čvor $w \in E_m$ takav da w$\to z$ i pošto imamo da $x \to w$ $(E_i \Longrightarrow E_m)$ sledi w$\in X$. E_m je ili jako povezan ili tranzitivan. Ako je jako povezan i $x \to w \to z$ na osnovu Leme 1.9 on sadrži Hamiltonovu konturu pa važi da za svako $v \in E_m$ postoji put od v do w, $v \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_s \to w$ pa iz $x \to u_s \to w$ sledi da $u_s \in X$. Dalje, iz $x \to u_{s-1} \to u_s$ sledi da $u_{s-1} \in X$ i odavde indukcijom dobijamo da i $u_1 \in X$ odakle sledi da pošto $x \to v \to u_1$ i $v \in X$ i pošto je v proizvoljan čvor iz E_m važi da je $E_m \subset X$. Ako je E_m tranzitivan i ima h čvorova, (E_m, z) je ili J_{h+1} (h parno) ili K_{h+1} (h neparno). U oba slučaja imamo da $h \to z$ a pošto je h zadnji čvor u tranzitivnom turniru E_m imamo da za svako $v \in E_m$ $x \to v \to h \to z$ pa je opet $E_m \subset X$. Sada pretpostavimo da je $i > 1$ i posmatramo turnir (E_1, z). On po definiciji mora imati bar jedan čvor u takav da $z \to u$. Pošto $E_1 \Longrightarrow E_i$, imamo da $u \to x$ pa iz $z \to u \to x$ sledi da $u \in X$. E_1 je opet jako povezan ili tranzitivan. Ako je jako povezan, ima Hamiltonovu konturu pa za proizvoljno $v \in E_1$ imamo da postoji put $u \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_l \to v$ pa iz $u \to u_1 \to x$ sledi da $u_1 \in X$. Dalje, iz $u_1 \to u_2 \to x$ sledi da $u_2 \in X$ i odavde indukcijom dobijamo da i $u_l \in X$ odakle sledi da pošto $u_l \to v \to x$ i $v \in X$ i pošto je v proizvoljan čvor iz E_1 važi da je $E_1 \subset X$. Ako je E_1 tranzitivan, (E_1, z) je J_{h+1} u kome $z \to 1$ pa iz tranzitivnosti imamo da za svako $v \in E_1$ $z \to 1 \to v \to x$ pa je opet $E_1 \subset X$. Ako je $1 < j < m$, tada, pošto po pretpostavci važi da je R_m tranzitivan, imamo da $E_1 \Longrightarrow E_j \Longrightarrow E_m$ pa i $E_j \subset X$. Dakle, dobili smo da je $T_{n+1} \subset X$ pa je on prost.

2. $x, y \in E_i, x < y$. Pretpostavimo da je E_i tranzitivan sa h čvorova i neka $x \to z$ (slučaj $z \to x$ je dualan) Pošto je E_i ili J_{h+1} ili K_{h+1} imamo da, ako su x i y dva uzastopna čvora, važi da $z \to y$ pošto je on različite parnosti od x, pa i $z \in X$. Ako x i y nisu uzastopni, zbog tranzitivnosti imamo da $x \to x+1$ i $x+1 \to y$ pa i $x+1 \in X$ i biće da $x \to z, z \to x+1$ pa opet $z \in X$.

Pretpostavimo, sada, da je E_i jako povezan turnir. Postoje dve mogućnosti: Ili je E_i3-ciklus ili je jako povezan turnir sa više od tri elementa. Ako je E_i 3-ciklus, tada je (E_i, z) izomorfan turniru H_4, to sledi iz dela a) definicije turnira T_{n+1}, dakle u pitanju je jako povezan turnir sa 4 elementa. Kako su x i y različiti elementi 3-ciklusa E_i, koji pripadaju i skupu X, sledi da je $E_i \subset$ X. Dalje, kako je (E_i, z) jako povezan, sledi da postoje u i v u E_i takvi da $u \to z \to v$. Dakle, z pripada X i svodimo na slučaj 1. Ako je E_i jako povezan turnir sa više od tri elementa, onda iz dela c) definicije turnira T_{n+1} sledi da je (E_i, z) prost turnir. Kako je X presek (E_i, z) konveksan skup sa bar dva elementa, sledi da X = (E_i, z), dakle z pripada X i opet svodimo na slučaj 1.

3. $x \in E_i, y \in E_j, i < j$. Prvo pretpostavimo da je bar jedan od E_i, E_j jako povezan, neka to bude E_i. Pretpostavimo da ne važi da $x \to z \to y$ ni $y \to z \to x$ jer bi tada i $z \in X$ pa bismo ovo sveli na slučaj 1. Pretpostavimo, zato, da $x \to z, y \to z$ (slučaj $z \to x, z \to y$ je dualan). Pošto je E_i jako povezan, ima bar 3 čvora, pa mora sadržati čvor u takav da $z \to u$ i mora sadržati Hamiltonovu konturu pa postoji put $x \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k \to u$ pa iz $x \to u_1 \to y$ sledi da $u_1 \in X$. Dalje, iz $u_1 \to\ u_2 \to y$ sledi da $u_2 \in X$ i dalje indukcijom dobijamo da $u_k \in X$ pa iz $y \to z \to u$ dobijamo da $z \in X$. Sada pretpostavimo da su E_i, E_j oboje tranzitivni i opet pretpostavimo da nije slučaj da $x \to z \to y$ ni $y \to z \to x$. Možemo, dakle, pretpostaviti da $z \to x, z \to y$ (slučaj $x \to z. y \to z$ je dualan). Pošto su E_i i E_j tranzitivni, po definiciji turnira (E_i, z) i (E_j, z) važiće da $x + 1 \to z$ ako x nije poslednji čvor u E_i i $y - 1 \to z$ ako y nije prvi čvor u E_j. Dakle imaćemo $x \to x + 1 \to z \to y$ ili $x \to y - 1 \to z \to y$ pa opet $z \in X$. Ako je, pak, x poslednji u E_i i y prvi u E_j, pošto su oni oboje tranzitivni, ne mogu biti uzastopni i postoji E_{i+1} između njih koji mora biti jako povezan pa ima bar 3 čvora. Sada mora postojati bar jedan čvor u iz E_{i+1} takav da $u \to z$. Pošto imamo da $x \to u \to y$ jer $E_i \Longrightarrow E_{i+1} \Longrightarrow E_j$ mora biti da $u \in X$. Sada imamo $x \to u \to z \to x$ pa i $z \in X$ što se opet svodi na slučaj 1. Dakle, opet možemo zaključiti da je X ceo skup T_{n+1} čime završavamo dokaz.

Posledica2.1. Ako je $n \neq 4$, postoji prost turnir sa n čvorova.
Dokaz: Za $n = 1{,}2$ imamo trivijalno proste turnire, za $n = 3$ imamo 3-ciklus koji smo pokazali da je prost. Za $n \geq 5$ dokaz dajemo indukcijom po broju čvorova. Za bazu indukcije uzimamo Lemu 2.7. u kojoj se definiše prost turnir sa 5 čvorova. Dalje, ako je T_n prost turnir, za neko $n \geq 5$ onda je u Lemi 2.6. definisan prost turnir T_{n+1} pa tvrđenje važi za svako $n \geq 5$.

Posledica 2.2. Ako sa T_n označimo turnir koji je 3-ciklus ili netrivijalni tranzitivan turnir sa neparnim brojem čvorova, postoji prost turnir T_{n+2} takav da je $T_n \subseteq T_{n+2}$.
Dokaz: Ako je T_n turnir koji je 3-ciklus ili netrivijalni tranzitivan turnir sa neparnim brojem čvorova tada ako mu dodamo proizvoljan čvor, dobijamo turnir T_{n+1} sa parnim brojem čvorova za koji važi Teorema 2.1. tj. T_{n+1} se može utopiti u prost turnir T_{n+2} pa je i $T_n \subseteq T_{n+2}$.

3. Teorema Marotija

Definicija 3.1. Neka su $\boldsymbol{S}$ i **T** turniri tako da je $S \cap T = \emptyset$ i $s \in S$. Definišemo turnir $\boldsymbol{A}$ sa univerzumom $A = (S \cup T) \setminus \{s\}$ tako da:

1. Za sve $a, b \in T, a \to_A b$ akko $a \to_T b$,
2. Za sve $a \in T, b \in S \setminus \{s\}, a \to_A b$ akko $s \to_S b$,
3. Za sve $a, b \in S \setminus \{s\}$, $a \to_A b$ akko $a \to_S b$.

Turnir $\boldsymbol{A}$ ćemo označavati sa $\boldsymbol{T \star s \star S}$.

Iz Definicije 3.1. direktno sledi da je $\boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{B}$, gde je $\boldsymbol{B} \leq \boldsymbol{T \star s \star S}$ podalgebra sa univerzumom $(S \setminus \{s\}) \cup \{t\}$, za bilo koje $t \in T$ i da je $\boldsymbol{T} \leq \boldsymbol{T \star s \star S}$.

Definicija 3.2. Neka su $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$ dve algebra sa po jednom binarnom relacijom is a disjunktnim univerzumima. Definišemo strukturu $\boldsymbol{P \oplus Q}$ na uniji univerzuma $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$ tako što su restrikcije relacije $\oplus$ na P i Q iste kao relacije na $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$, dok za sve $p \in P, q \in Q$ važi da (p, q) pripada relaciji $\oplus$, a (q, p) ne pripada.

Ako su $\boldsymbol{S} = (S, \to_S)$ i $\boldsymbol{T} = (T, \to_T)$ turniri, onda je i $\boldsymbol{S \oplus T}$ turnir za koji važi da $S \Rightarrow T$. Definišemo turnire **1**, **2**,..., **n**,... tako što za univerzum od **n** uzmemo skup $\{0,1, \dots, n-1\}$ i $k \to_{\boldsymbol{n}} l$ akko $k \leq l$. Na osnovu prethodne definicije je $\mathbf{2 = 1 \oplus 1, 3 = 2 \oplus 1 = 1 \oplus 2 = 1 \oplus 1 \oplus 1.}$

Napomena: Teorema o homomorfizmu: Ako imamo sirjektivni homomorfizam $\varphi \colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ tako da je kongruencija α jezgro tog homomorfizma, onda važi da je $B \cong A/\alpha$.

Lema 3.1. Neka je $\boldsymbol{T}$ poddirektno nesvodljiv turnir, neka je $\boldsymbol{S}$ jako povezan prost turnir i neka je $s \in S$. Onda za turnir $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T \star s \star S}$ važe sledeća tvrđenja:

1. $\boldsymbol{A}$ je jako povezan,
2. $\boldsymbol{T} \leq \boldsymbol{A}$,
3. $\boldsymbol{A/\gamma} \cong \boldsymbol{S}, \gamma = T^2 \cup \Delta_A$,
4. $\gamma = T^2 \cup \Delta_A$ je najveći element u skupu $\boldsymbol{ConA} \setminus \{\nabla_{\boldsymbol{A}}\}$,
5. $\boldsymbol{ConA} = \boldsymbol{ConT} \oplus \mathbf{1}$ (gde mreže tretiramo kao relacijske structure sa inkluzijom),
6. $\boldsymbol{A}$ je poddirektno nesvodljiv turnir.

Dokaz:

1. Uzimamo dva proizvoljna čvora $x, y \in A$ i tražimo orijentisani put od x do y. Razmatramo različite mogućnosti za ova dva čvora. Pretpostavimo prvo da $x, y \in T$. Uzmemo proizvoljan čvor $z \in S \setminus \{s\}$, kako je **S** jako povezan, postoje orijentisani putevi od s do z i od z do s tj. $s \to_S t \to_S \dots \to_S z \to_S \dots \to_S u \to_S s$. Sada pošto imamo $s \to_S t$ i $u \to_S s$, po definiciji turnira $\boldsymbol{A}$ imamo i $x \to_A t$ i $u \to_A y$, a ostali putevi iz $S \setminus \{s\}$ su isti kao u $\boldsymbol{A}$, opet po definiciji od $\boldsymbol{A}$. Dakle, dobili smo orijentisani put $x \to_A t \to_A \dots \to_A z \to_A \dots \to_A u \to_A y$. Ako pretpostavimo da $x \in T, y \in S \setminus \{s\}$, opet pošto je S jako povezan imamo put $s \to_S t \to_S \dots \to_S y$ i opet po definiciji $\boldsymbol{A}$ zamenimo $s \to_S t$ sa $x \to_A t$ i ostale grane $u \to_S v, u, v \in S \setminus \{s\}$, zamenimo sa $u \to_A v$ i dobijamo put od x do y u $\boldsymbol{A}$. Još nam preostaje da pokažemo za $x, y \in S \setminus \{s\}$. Znamo

da imamo orijentisan put od x do y u **S** i ako se negde u tom putu pojavi s, zamenimo ga sa proizvoljnim $t \in T$ što možemo po definiciji turnira $\boldsymbol{A}$**,** a ostale grane iz **S** zamenimo sa granama iz **A** tj. od orijentisanog puta $x \rightarrow_S \ldots \rightarrow_S s \rightarrow_S \ldots \rightarrow_S y$ dobijamo put $x \rightarrow_A \ldots \rightarrow_A t \rightarrow_A \ldots y$ što je i trebalo pokazati.

2. Iz definicije turnira $\boldsymbol{A}$ vidimo da je **T** podturnir.
3. Definišemo preslikavanje $\lambda :\ \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{S}$ sa $\lambda(x) = s, x \in T$ i $\lambda(x) = x, x \in S \setminus \{s\}$. Jasno je da je λ sirjektivno preslikavanje i na osnovu Teoreme o homomorfizmu, ako pokažemo da je λ homomorfizam sa jezgrom ker $\lambda = \gamma$, dobićemo traženo tvrđenje. Neka su $x, y \in A$, opet razmatramo slučajeve za ove čvorove. Ako su $x, y \in S \setminus \{s\}$, onda je $\lambda(x) = x, \lambda(y) = y$ i pošto $\lambda(xy) \in \{x, y\}$ i $\lambda(xy) = xy$ pa je $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$. Ako $x, y \in T$, onda $\lambda(xy) = s = s \cdot s = \lambda(x)\lambda(y)$. Ako $x \in S \setminus \{s\}$, $y \in T$ onda imamo da $x \rightarrow_A y$ akko $x \rightarrow_S s$ akko $\lambda(x) \rightarrow_S \lambda(y)$ pa pošto je $\lambda(xy) \in \{\lambda(x), \lambda(y)\}$, sledi $\lambda(xy) = \lambda(x)$ akko $x \rightarrow_A y$ akko $\lambda(x) \rightarrow_A \lambda(y)$ akko $\lambda(x)\lambda(y) = \lambda(x)$ i slično, sledi $\lambda(xy) = \lambda(y)$ akko $y \rightarrow_A x$ akko $\lambda(y) \rightarrow_A \lambda(x)$ akko $\lambda(x)\lambda(y) = \lambda(y)$. Dakle, u svim slučajevima je λ homomorfizam. Pošto se preslikavanjem λ svi elementi iz **T** slikaju u s, oni svi imaju iste slike a na **S** je λ identičko preslikavanje pa iste slike imaju isti elementi, sledi da je jezgro ovog homomorfizma baš $\gamma = T^2 \cup \Delta_A$.
4. Znamo da je jezgro homomorfizma kongruencija pa $\gamma \in \boldsymbol{ConA}$**.** Pošto je **S** jako povezan prost turnir, on ima bar dva elementa pa u $\nabla_{\boldsymbol{A}}$ postoji element koji nije iz γ iz čega sledi da $\gamma \in \boldsymbol{ConA} \setminus \{\nabla_{\boldsymbol{A}}\}$. Da bismo pokazali da je γ najveći element u ovom skupu, pretpostavimo da su $(a, b) \in A^2 \setminus \gamma$ i dokazujemo da je najmanja kongruencija koja sadrži $(a, b), Cg^A(a, b)$ puna relacija $\nabla_{\boldsymbol{A}}$. Dakle, neka je α najmanja kongruencija na $\boldsymbol{A}$ koja sadrži $(a, b), \alpha = Cg^A(a, b)$. Ako su $a, b \in\ S \setminus \{s\}, a \neq b$ i $t \in T$ proizvoljno, znamo da je podgraf od $\boldsymbol{A}$ na skupu $(S \setminus \{s\}) \cup \{t\}$ izomorfan sa **S** i pošto je **S** prost i klasa elementa $a,\ a / \alpha$ sadrži dva različita elementa iz **S**, ona mora sadržati i ceo $(S \setminus \{s\}) \cup \{t\}$, pa kako je $t \in T$ proizvoljan, ova klasa sadrži ceo skup $(S \setminus \{s\}) \cup T$, tj. $\alpha = \nabla_{\boldsymbol{A}}$. Sada, ako pretpostavimo na primer, da $a \in T, b \in S \setminus \{s\}$, dobijamo da je $(S \setminus \{s\}) \cup \{a, b\}$ isto što i $(S \setminus \{s\}) \cup \{a\}$ što je izomorfno sa **S**. Kako je S jako povezan prost turnir, on mora imati bar 3 elementa, pa postoje neki $a', b' \in S \setminus \{s\}$ takvi da je $a' \neq b'$. Kako a / α sadrži ceo $S \setminus \{s\}$, i $a', b' \in\ a / \alpha$ tj. α sadrži par (a', b') pa sadrži i $Cg^A(a', b')$ što smo pokazali da je $\nabla_{\boldsymbol{A}}$, pa je i $\alpha = \nabla_{\boldsymbol{A}}$.
5. Pokazujemo prvo da je **ConA**= $[\Delta_A, \gamma] \oplus \mathbf{1}$**,** gde je $[\Delta_A, \gamma]$ interval u mreži **ConA**. Za svaku relaciju kongruencije na skupu **A** koja je podskup relacije γ imamo da ona pripada intervalu $[\Delta_A, \gamma]$. Pretpostavimo da imamo relaciju θ koja nije podskup relacije γ, ona mora sadržati par (a, b) tako da je $a \neq b$($\Delta_A \subseteq \gamma$) i bar jedan od a, b nije iz T ($T^2 \subseteq \gamma$). Pošto je θ relacija koja sadrži par (a, b), a mi se nalazimo u mreži, θ sadrži i najmanju kongruenciju koja sadrži par $(a, b), Cg^A(a, b)$. U delu 4. Smo pokazali da je $Cg^A(a, b) = \nabla_{\boldsymbol{A}}$ iz čega sledi da je i $\theta = \nabla_{\boldsymbol{A}}$. Dobili smo : proizvoljna kongruencija na **A** je ili podskup relacije γ ili puna relacija. Dakle, **ConA** se sastoji od interval $[\Delta_A, \gamma]$ i pune relacije koja je veća od svih drugih i iz Definicije 3.7. sledi da je **ConA**= $[\Delta_A, \gamma] \oplus \mathbf{1}$**,** gde je $\mathbf{1}$ jednoelementna mreža koja sadrži $\nabla_{\boldsymbol{A}}$. Da bismo pokazali da je $\boldsymbol{ConA} = \boldsymbol{ConT} \oplus \mathbf{1}$**,** dovoljno je pokazati da je $\boldsymbol{ConT} \cong [\Delta_A, \gamma]$. Definišemo preslikavanje φ: $\boldsymbol{ConT} \rightarrow [\Delta_A, \gamma]$ sa $\varphi(\alpha) = \alpha \cup \Delta_A$. Prvo pokazujemo da je φ dobro definisano preslikavanje. To će važiti akko se svaka kongruencija turnira $\boldsymbol{T}$ slika u kongruenciju turnira $\boldsymbol{A}$ jer je $[\Delta_A, \gamma]$

podskup od $\boldsymbol{ConA}$ i ako je $\alpha \in \boldsymbol{ConT}$ onda je slika $\varphi(\alpha) = \alpha \cup \Delta_A \subseteq T^2 \cup \Delta_A = \gamma$ pa se nijedan α ne slika u punu relaciju $\nabla_{\boldsymbol{A}}$. Dakle, ako je β kongruencija na $\boldsymbol{T}$, treba pokazati da je $\varphi(\beta)$ kongruencija na $\boldsymbol{A}$. Na osnovu Leme 1.13., ako je relacija kongruencija, svaka klasa ekvivalencije te relacije je konveksan skup. $\varphi(\beta) = \beta \cup \Delta_A$ je relacija ekvivalencije na skupu $\boldsymbol{A}$ jer se simetričnost i tranzitivnost prenose iz podskupa $\boldsymbol{T}$ na kom je β relacija ekvivalencije, a simetričnost na $\boldsymbol{A}$ dobijamo dodavanjem Δ_A. Klase od $\varphi(\beta)$ su oblika B, gde je B klasa ekvivalencije kongruencije β, i $\{x\}$, gde $x \in S \setminus \{s\}$. Neka je B proizvoljna klasa ekvivalencije relacije β, ona je konveksna u $\boldsymbol{T}$. Tada, po definiciji turnira $\boldsymbol{A}$, za svako $x \in S \setminus \{s\}$ ili $x \to s \Leftrightarrow x \to B$ ili $s \to x \Leftrightarrow B \to x$, pa je klasa B konveksna u odnosu na ceo turnir $\boldsymbol{A}$. Jednoelementne klase su uvek konveksne jer smo u turniru, pa je $\varphi(\beta)$ kongruencija na $\boldsymbol{A}$ i φ je dobro definisano preslikavanje. Iz definicije preslikavanja φ vidimo da je ono injektivno. Da bi pokazali da je φ sirjektivno pretpostavimo da imamo neku kongruenciju $\alpha \in [\Delta_A, \gamma]$ i pokazujemo da je ona slika neke kongruencije iz $\boldsymbol{T}$. Znamo da je α oblika $\Delta_A \cup \beta$ za neku relaciju ekvivalencije β iz $\boldsymbol{T}$, pa treba pokazati da je β kongruencija na $\boldsymbol{T}$ pa ćemo imati da je $\alpha = \varphi(\beta)$. Pošto imamo da je $\beta \subseteq \alpha = \beta \cup \Delta_A$, svaka klasa ekvivalencije relacije β je i klasa ekvivalencije relacije α, pa pošto je α kongruencija, ona je konveksna u skupu $\boldsymbol{A}$, pa mora biti konveksna i u skupu $\boldsymbol{T}$ iz čega sledi da je β kongruencija na $\boldsymbol{T}$ i φ je sirjektivno preslikavanje. Da bismo pokazali da je φ homomorfizam, pokazaćemo da su $\varphi\ i\ \varphi^{-1}$ monotoni, tj. ako pretpostavimo da je $\alpha \subseteq \beta$ onda je i $\varphi(\alpha) = \alpha \cup \Delta_A \subseteq \beta \cup \Delta_A = \varphi(\beta)$ i ako je $\varphi^{-1}(\alpha) = \alpha \setminus \Delta_{S\setminus\{s\}}$ onda iz $\alpha \subseteq \beta$ sledi $\varphi^{-1}(\alpha) = \alpha \setminus \Delta_{S\setminus\{s\}} \subseteq \beta \setminus \Delta_{S\setminus\{s\}} = \varphi^{-1}(\beta)$. Dakle, dobili smo da je φ izomorfizam između $\boldsymbol{ConT}$ i $[\Delta_A, \gamma]$ iz čega sledi da je $\boldsymbol{ConA} = \boldsymbol{ConT} \oplus \boldsymbol{1}$.

6. Iz pretpostavke da je $\boldsymbol{T}$ poddirektno nesvodljiv turnir sledi da $\boldsymbol{ConT}$ ima monolit μ ,pa pošto je $\boldsymbol{ConA} = \boldsymbol{ConT} \oplus \boldsymbol{1}$, i mreža $\boldsymbol{ConA}$ sadrži monolit $\varphi(\mu) = \mu \cup \Delta_A$.

Definicija 3.3. Ako su **K** i **L** dve ograničene mreže, sa $\boldsymbol{K} \boxplus \boldsymbol{L}$ obeležavamo faktor mrežu $(\boldsymbol{K} \oplus \boldsymbol{L})/\alpha$, gde je α kongruencija sa jedinom netrivijalnom klasom $\{1_{\boldsymbol{K}}, 0_{\boldsymbol{L}}\}$, $1_{\boldsymbol{K}}$ je najveći element mreže **K**, a $0_{\boldsymbol{L}}$ je najmanji element mreže **L**.

Definicija 3.4. Za element a turnira A kažemo da je nulti element ako $a \to x$ za sve $x \in A$. Element a turnira A je jedinični ako $x \to a$ za sve $x \in A$. Svaki turnir može imati najviše jedan nulti i najviše jedan jedinični element.

Ubuduće kad god pišemo $\boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$, pretpostavićemo da su univerzumi T i S disjunktni.

Neka je $\boldsymbol{T}$ turnir. Turnir $\boldsymbol{T} \star 0 \star \boldsymbol{2}$ je definisan na skupu $T \cup 2 \setminus \{0\} = T \cup \{1\}$ tako da za svako $t \in T, t \to 1$ akko $0 \to 1$, što uvek važi po definiciji turnira **2**, tj. $\boldsymbol{T} \star 0 \star \boldsymbol{2}$ je dobijen od $\boldsymbol{T}$ dodavanjem novog jediničnog elementa 1. Turnir $\boldsymbol{T} \star 1 \star \boldsymbol{2}$ je definisan na skupu $T \cup 2 \setminus \{1\} = T \cup \{0\}$ tako da za svako $t \in T, t \to 0$ akko $1 \to 0$, što znači da za svako $t \in T, 0 \to t$, tj. $\boldsymbol{T} \star 1 \star \boldsymbol{2}$ je dobijen od $\boldsymbol{T}$ dodavanjem novog nultog elementa 0. Turnir $\boldsymbol{T} \star 1 \star \boldsymbol{3}$ definisan na skupu $T \cup 3 \setminus \{1\} = T \cup \{0,2\}$ tako da za svako $t \in T, t \to 0$ akko $1 \to 0$ i $t \to 2$ akko $1 \to 2$, što po definiciji turnira **3** znači da za svako $t \in T, 0 \to t$ i $t \to 2$ tj. $\boldsymbol{T} \star 1 \star \boldsymbol{3}$ je dobijen od $\boldsymbol{T}$ dodavanjem novog nultog elementa 0 i novog jediničnog elementa 2.

Napomena: Teorema o korespodenciji: Ako imamo sirjektivni homomorfizam $\varphi\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ tako da je kongruencija α jezgro tog homomorfizma, onda važi da je $\boldsymbol{ConB} \cong [\boldsymbol{\alpha}, \nabla_{\boldsymbol{A}}]$.

Lema 3.2. Neka je $\boldsymbol{T}$ jako povezan poddirektno nesvodljiv turnir i neka je $(s, \boldsymbol{S})$ ili (0,**2**) ili (1,**2**) ili (1,**3**). Ako je $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$, onda važe sledeća tvrđenja:

1. $\boldsymbol{A}$ nije jako povezan,
2. $\boldsymbol{T} \leq \boldsymbol{A}$
3. Jedina netrivijalna klasa relacije $\sim_{\boldsymbol{A}}$ (tj. jedina netrivijalna komponenta jake povezanosti turnira $\boldsymbol{A}$) je $\boldsymbol{T}$,
4. $\boldsymbol{A} / \sim_{\boldsymbol{A}} \cong \boldsymbol{S}$,
5. $\boldsymbol{ConA} \cong \boldsymbol{ConT} \boxplus \boldsymbol{ConS}$,
6. $\boldsymbol{A}$ je poddirektno nesvodljiv turnir.

Dokaz:

1. Po konstrukciji turnira $\boldsymbol{A}$, on ima ili nulti element (ako je (s, $\boldsymbol{S}$) (1,**2**) ili (1,**3**)) pa ne postoji orijentisani put u njega iz bilo kog drugog elementa ili ima jedinični element (ako je (s, $\boldsymbol{S}$) (0,**2**) ili (1,**3**)) pa ne postoji orijentisani put iz njega u bilo koji drugi element. U oba slučaja sledi da $\boldsymbol{A}$ nije jako povezan.
2. Sledi iz definicije ovih turnira.
3. Po pretpostavci je turnir $\boldsymbol{T}$ jako povezan i $\boldsymbol{T} \leq \boldsymbol{A}$, a $\boldsymbol{A}$ nije jako povezan pa se ceo $\boldsymbol{T}$ nalazi u jednoj klasi jake povezanosti relacije $\sim_{\boldsymbol{A}}$.Svi ostali čvorovi iz $\boldsymbol{A}$ van $\boldsymbol{T}$ su po konstrukciji nulti ili jedinični a oni su uvek u jednoelementnoj klasi jake povezanosti jer ne mogu biti jako povezani ni sa jednim drugim elementom pa je $\sim_{\boldsymbol{A}} = T^2 \cup \Delta_A$ i T je jedina netrivijalna klasa jake povezanosti.
4. Preslikavanje $\lambda : (\mathrm{S} \cup \mathrm{T}) \setminus \{s\} \to \mathrm{S}$ definisano sa $\lambda(x) = s, x \in T$ i $\lambda(x) = x, x \in S \setminus \{s\}$ je homomorfizam iz $\boldsymbol{A}$ na $\boldsymbol{S}$ što sledi iz dokaza Leme 3.1. tvrđenja 3. jer se u tom dokazu nigde ne koristi da je $\boldsymbol{S}$ prost i jako povezan a svi ostali uslovi su nam isti. Iz tog dokaza imamo da je $ker\lambda = T^2 \cup \Delta_A$ što smo u delu 3. Ove Leme pokazali da je jednako $\sim_{\boldsymbol{A}}$. Sada na osnovu Teoreme o homomorfizmu imamo da je $\boldsymbol{A}/\sim_{\boldsymbol{A}} \cong \boldsymbol{S}$.
5. Za proizvoljnu kongruenciju α na turniru $\boldsymbol{A}$ važi da ili su svi parovi kongruencije α ujedno i parovi kongruencije $\sim_{\boldsymbol{A}}$, u kom slučaju je $\alpha \subseteq \sim_{\boldsymbol{A}}$, ili postoji par (a, b) koji pripada kongruenciji α, a ne pripada kongruenciji $\sim_{\boldsymbol{A}}$ i hoćemo da pokažemo da je u tom slučaju $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq \alpha$. Pošto je $\sim_{\boldsymbol{A}} = T^2 \cup \Delta_A$ mogućnosti za (a, b) su da su oboje van T i različiti, ili da je jedan od njih u T a drugi van T. Prvo pokazujemo da ako $a, b \in S \setminus \{s\}$, $a \neq b$ onda je $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq Cg^A(a, b)$ iz čega će slediti da svaka relacija koja sadrži (a, b) sadrži i $\sim_{\boldsymbol{A}}$ tj. da $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq \alpha$. Dakle, ako su $a, b \in S \setminus \{s\}$, $a \neq b$ onda mora biti $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{3}$ i $s = 1$ jer samo u tom slučaju $S \setminus \{s\}$ ima dva različita elementa i možemo pretpostaviti da je na primer, $a = 0, b = 2$. Tada za svako $x \in T$ imamo da je $(0, x) = (0x, 2x) = (ax, bx) \in Cg^A(a, b)$ jer po definiciji turnira $\boldsymbol{A}$ važi da za svako $x \in T$, $0 \to x \ i \ x \to 2$ i pošto je $Cg^A(a, b)$kongruencija koja sadrži (a, b) ona sadrži i (ax, bx) za svako $x \in T$. Dakle, pošto već imamo da $Cg^A(a, b)$ sadrži ceo $S \setminus \{s\}$ što su samo $a \ i \ b$ i pošto je za svako $x \in T$ $(0, x) \in Cg^A(a, b)$, ona sadrži i ceo skup T pa je $Cg^A(a, b) = \nabla_{\boldsymbol{A}}$ iz čega sledi da je

$\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq Cg^A(a,b)$ i odatle i da je $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq \alpha$. Ako sada $a \in S \setminus \{s\}$, $b \in T$ i $\boldsymbol{S} = \mathbf{2}$ i $s = 1$, onda je a nulti element turnira $\boldsymbol{A}$**.** Tada, pošto je $\boldsymbol{T}$ jako povezan turnir, za svako $x \in T$ postoji orijentisani put od x do b, $x = c_0 \to_{\boldsymbol{T}} c_1 \to_{\boldsymbol{T}} \dots \to_{\boldsymbol{T}} c_n = b$. Iz $(a,b) \in Cg^A(a,b)$ sledi da i $(ac_{i+1}, bc_{i+1}) = (a, c_{i+1}) \in Cg^A(a,b)$ odakle sledi da i $(a, c_i) = (ac_i, c_{i+1}c_i) \in Cg^A(a,b)$, pa kako je $(c_n, a) = (b,a) \in Cg^A(a,b)$ indukcijom sledi da i $(c_0, a) = (x,a) \in Cg^A(a,b)$ pa pošto je x proizvoljan element iz $\boldsymbol{T}$ važi da je $T \subseteq a/Cg^A(a,b)$. Sada, pošto $\sim_{\boldsymbol{A}}$ ima samo jednu netrivijalnu klasu ekvivalencije i to je T, a sve ostale klase su jednoelementne, sledi da je $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq Cg^A(a,b)$. I poslednji slučaj, ako je $a \in S \setminus \{s\}$, $b \in T$ i $\boldsymbol{S} = \mathbf{2}$ i $s = 0$, onda je a jedinični element turnira $\boldsymbol{A}$. Sada za proizvoljan $x \in T$ biramo najkraći put u $\boldsymbol{T}$ od b do x, $b = c_0 \to_{\boldsymbol{T}} c_1 \to_{\boldsymbol{T}} \dots \to_{\boldsymbol{T}} c_n = x$. Pošto je ovo po pretpostavci najkraći put ne može biti $c_i \to_{\boldsymbol{T}} c_{i+2}$ jer bi tada dobili kraći put izbacivanjem čvora c_i, pa pošto smo u turniru mora biti $c_{i+2} \to_{\boldsymbol{T}} c_i$, za svako $0 \leq i \leq n$. Opet pokazujemo indukcijom da za sve $0 \leq i \leq n$ važi da $(c_i, c_{i+1}) \in Cg^A(a,b)$. Pošto $(a,b) \in Cg^A(a,b)$ važi da i $(ac_1, bc_1) = (c_1, c_0) \in Cg^A(a,b)$ što uzimamo za bazu indukcije. Dalje, iz $(c_i, c_{i+1}) \in Cg^A(a,b)$ sledi da $(c_ic_{i+2}, c_{i+1}c_{i+2}) = (c_{i+2}, c_{i+1}) \in Cg^A(a,b)$. Dakle imamo da je za sve $0 \leq i \leq n$ važi da $(c_i, c_{i+1}) \in Cg^A(a,b)$ pa pošto je $c_n = b \in a/Cg^A(a,b)$ iz tranzitivnost relacije $Cg^A(a,b)$ imamo da i $c_0 = x \in a/Cg^A(a,b)$, za svako $x \in T$ tj. da je $T \subseteq a/Cg^A(a,b)$ i opet dobijamo kao u prethodnom slučaju da je $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq Cg^A(a,b)$. Dakle, u svim slučajevima je $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq \alpha$ što smo i trebali da pokažemo. Pošto imamo istu konstrukciju kao u Lemi 3.1. delu 5., na isti način pokazujemo da je $\boldsymbol{ConT} \cong [\Delta_A, \sim_{\boldsymbol{A}}]$. Sada imamo da je za svaku kongruenciju α iz $\boldsymbol{A}$ ili $\alpha \subseteq \sim_{\boldsymbol{A}}$ ili $\sim_{\boldsymbol{A}} \subseteq \alpha$ pa je $\boldsymbol{ConA} = [\Delta_A, \sim_{\boldsymbol{A}}] \cup [\sim_{\boldsymbol{A}}, \nabla_{\boldsymbol{A}}]$. Na osnovu Teoreme o korespodenciji za homomorfizam $\lambda : A \to S$ definisan u delu 4. ove Leme čije je jezgro $\sim_{\boldsymbol{A}}$ imamo da je $[\sim_{\boldsymbol{A}}, \nabla_{\boldsymbol{A}}] \cong \boldsymbol{ConS}$. Sada iz $\boldsymbol{ConA} = [\Delta_A, \sim_{\boldsymbol{A}}] \cup [\sim_{\boldsymbol{A}}, \nabla_{\boldsymbol{A}}]$, $\boldsymbol{ConT} \cong [\Delta_A, \sim_{\boldsymbol{A}}]$, $\boldsymbol{ConS} \cong [\sim_{\boldsymbol{A}}, \nabla_{\boldsymbol{A}}]$ i iz Definicije 3.10. dobijamo da je $\boldsymbol{ConA} \cong \boldsymbol{ConT} \boxplus \boldsymbol{ConS}$.

6. Pošto je $\boldsymbol{T}$ poddirektno nesvodljiv onda $\boldsymbol{ConT}$ sadrži monolit μ i pošto je $\boldsymbol{ConT} \cong [\Delta_A, \sim_{\boldsymbol{A}}]$, onda je $\varphi(\mu) = \mu \cup \Delta_A \in \boldsymbol{ConA}$ je monolit ove mreže jer je ona definisana sa $\boldsymbol{ConA} \cong \boldsymbol{ConT} \boxplus \boldsymbol{ConS}$.

Definicija 3.5. Ako je $n \in \omega$, ako su $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \dots, \boldsymbol{S}_n$ turniri tako da su S_i i S_j disjunktni za $i \neq j$ i za sve $0 < i \leq n$, $s_i \in S_i$, definišemo iterirani $\star$ –proizvod $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \dots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ induktivno sa

$$\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \dots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n = \begin{cases} \boldsymbol{S}_0, ako\ je\ n = 0 \\ (\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \dots \star s_{n-1} \star \boldsymbol{S}_{n-1}) \star s_n \star \boldsymbol{S}_n, ako\ je\ n > 0. \end{cases}$$

Lema 3.3. Neka su $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ turniri i $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$. Onda $(\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1) \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star (\boldsymbol{S}_1 \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2)$.

Dokaz: Obe algebre imaju isti univerzum $A = (S_0 \cup S_1 \cup S_2) \setminus \{s_1, s_2\}$. Da bismo pokazali da su ove algebre jednake uzimamo dva čvora $x, y \in A$ i pokazujemo da $x \to_{(\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1) \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2} y$ akko $x \to_{\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star (\boldsymbol{S}_1 \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2)} y$. Ako x, y oboje pripadaju istom S_i za neko $i \in \{0,1,2\}$ onda u obe algebra važi da $x \to y$ akko $x \to_{S_i} y$. Sada pretpostavimo da $x \in (S_0 \cup S_1) \setminus \{s_1\}$, $y \in S_2 \setminus \{s_2\}$, onda $x \to_{(\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1) \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2} y$ akko $s_2 \to_{\boldsymbol{S}_2} y$. Ovo razdvajamo na dva slučaja, prvi je kada $x \in S_1 \setminus \{s_1\}$, a drugi kada $x \in S_0$. Kada $x \in S_1 \setminus \{s_1\}$ imamo da $s_2 \to_{\boldsymbol{S}_2} y$ akko $x \to_{\boldsymbol{S}_1 \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2} y$ akko $x \to_{\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star (\boldsymbol{S}_1 \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2)} y$. Ako

$x \in S_0$ imamo da $s_2 \to_{\boldsymbol{S}_2} y$ akko $s_1 \to_{\boldsymbol{S}_1 \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2} y$ akko $x \to_{\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star (\boldsymbol{S}_1 \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2)} y$. Dakle, pokazali smo da ako $x \in (S_0 \cup S_1) \setminus \{s_1\}$, $y \in S_2 \setminus \{s_2\}$, onda su ove dve algebra jedanke. Još nam preostaje slučaj kada $x \in S_0, y \in S_1 \setminus \{s_1\}$. Tada imamo da $x \to_{(\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1) \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2} y$ akko $x \to_{\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1} y$ akko $s_1 \to_{\boldsymbol{S}_1} y$ akko $x \to_{\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star (\boldsymbol{S}_1 \star s_2 \star \boldsymbol{S}_2)} y$ pa sui u ovom slučaju date algebra jednake.

Iz ove Leme sledi da kod iteriranog $\star$ −proizvoda turnira bez obzira na raspored zagrada dobijamo isti turnir.

Neka je $\boldsymbol{A}$ konačan poddirektno nesvodljiv turnir (sve algebre koje ćemo pominjati u ovom dokazu su konačne).

Lema 3.4. $\boldsymbol{A}/\sim_{\boldsymbol{A}}$ je polumreža ako je $\boldsymbol{A}$ prost turnir i $\sim_{\boldsymbol{A}} = \Delta_A$.
Dokaz: $\boldsymbol{A}/\sim_{\boldsymbol{A}}$ je turnir u kome su čvorovi klase jake povezanosti za koje znamo da su ili jednoelementne ili jako povezani podturniri od $\boldsymbol{A}$ i znamo da klase imaju odnos kao u linearno uređenom turniru. Pošto je $\sim_{\boldsymbol{A}} = \Delta_A$, svaka klase jake povezanosti je jednoelementni skup. Za svaki turnir važi da je komutativan i idempotentan pa treba samo pokazati asocijativnost turnira $\boldsymbol{A}/\sim_{\boldsymbol{A}}$. Ovo sledi iz linearnosti turnira $\boldsymbol{A}/\sim_{\boldsymbol{A}}$. Pošto po pretpostavci nemamo ciklusa u turniru, on je lanac pa je za elemente a, b, c, $a(bc)$ je onaj od čvorova a, b, c koji tuče preostala dva tj. koji je najviše u ovom lancu od ova 3 elementa, a to je i $(ab)c$.

Lema 3.5. Ako je $\boldsymbol{A}$ prost, onda ili $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{2}$ ili je $\boldsymbol{A}$ jako povezan.
Dokaz: Na osnovu Leme 1.14. $\sim_{\boldsymbol{A}} \in \boldsymbol{ConA}.$ Ako je $\boldsymbol{A}$ prost onda $\sim_{\boldsymbol{A}} \in \{\Delta_A, \nabla_{\boldsymbol{A}}\}$. Ako je $\sim_{\boldsymbol{A}} = \nabla_{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{A}$ je po definiciji jako povezan turnir. Ako je $\sim_{\boldsymbol{A}} = \Delta_A$, onda je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}/\sim_{\boldsymbol{A}}$ polumreža. Kako je $\boldsymbol{A}$ turnir, svaka dva elementa su uporediva pa je $\boldsymbol{A}$ linearno uređena polumreža tj. lanac. Sada imamo da je za sve $a, b \in A$ takve da je $a < b$ relacija $[a, b]^2 \cup \Delta_A$ kongruencija na turniru $\boldsymbol{A}$ jer je njena jedina netrivijalna klasa $[a, b]^2$ konveksan skup (za sve $x < a$ važi da $x \Rightarrow [a, b]$ i za sve $y > b$ važi da $[a, b] \Rightarrow y$). Ako bi A imao više od dva elementa zbog linearnosti bi bilo $a < b < c$ pa bi imali dve kongruencije $[a, b]^2 \cup \Delta_A$ i $[b, c]^2 \cup \Delta_A$ različite od Δ_A čiji bi presek bio Δ_A pa $\boldsymbol{A}$ ne može imati monolit koji po pretpostavci treba da bude sadržan u preseku svake dve kongruencije jer je $\boldsymbol{A}$ poddirektno nesvodljiv. Dakle, u ovom slučaju mora $\boldsymbol{A}$ mora biti dvoelementni turnir tj. $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{2}.$

Lema 3.6. Ako turnir $\boldsymbol{A}$ nije prost i jeste jako povezan, onda postoji jedinstvena reprezentacija $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star \boldsymbol{s} \star \boldsymbol{S}$ (do na izomorfizam) takva da je $\boldsymbol{T}$ poddirektno nesvodljiv turnir, $\boldsymbol{S}$ jako povezan turnir i s$\in S$.
Dokaz: Koristimo sledeću Teoremu koju navodimo bez kompletnog dokaza (on se može naći u [Maroti]): Neka je $\boldsymbol{S}$ netrivijalni, konačan, jako povezan i poddirektno nesvodljiv turnir. Tada važe sledeća tvrđenja:

1. $\boldsymbol{ConS}$ ima jedinstveni koatom (kongruenciju γ takvu da $\gamma \prec \nabla_{\boldsymbol{S}}$).
2. $\boldsymbol{S}/\gamma$ je prost turnir.

Takođe, ako je $\gamma \neq \Delta_S$ važe i sledeća tvrđenja:

3. γ ima jedinstvenu netrivijalnu klasu C.
4. Za svako $x \in S \setminus C$ ili $x \to y$ za sve $y \in C$ ili $y \to x$ za sve $y \in C$.
5. Podalgebra **C**$\leq \boldsymbol{S}$ sa univerzumom C je poddirektno nesvodljiva i netrivijalna.

Dakle, u ovom slučaju imamo kongruenciju $\gamma \in \ \boldsymbol{ConA}$ koja je najveća (u odnosu na inkluziju) u $\boldsymbol{ConA} \setminus \{\nabla_{\boldsymbol{A}}\}$, i zbog toga važi da je $\boldsymbol{A}/\gamma$ prost turnir. Naime, po Teoremi o korspodenciji imamo da je $[\gamma, \nabla_{\boldsymbol{A}}] \cong \ \boldsymbol{Con}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{\gamma})$ a kako je $[\gamma, \nabla_{\boldsymbol{A}}]= \{\gamma, \nabla_{\boldsymbol{A}}\}$ jer je γ koatom, dobijamo da je $\boldsymbol{A}/\gamma$ prost turnir. Dalje je $\boldsymbol{A}/\gamma$ jako povezan jer znamo da su svi prosti turniri, sem dvoelementnog, jako povezani. Ako bi pretpostavili da je $\boldsymbol{A}/\gamma$ dvoelementni turnir tj. da $\boldsymbol{A}/\gamma$ ima samo dve klase ekvivalencije, te dve klase bi morale biti konveksni skupovi po Lemi 1.13. jer je γ kongruencija pa bi morao svaki elemenat jednog da tuče svaki elemenat drugog ali pošto su elementi tih klasa ujedno i elementi turnira $\boldsymbol{A}$, dobili bismo da u tom slučaju da $\boldsymbol{A}$ nije jako povezan. Da γ ima jedinstvenu netrivijalnu klasu C sledi iz činjenice da je $\boldsymbol{A}$ poddirektno nesvodljiv. Kada bi γ imala bar dve netrivijalne klase B i C onda bi relacije $\alpha = B \cup \Delta_A$ i $\beta = C \cup \Delta_A$ bile kongruencije na $\boldsymbol{A}$ koje su veće od Δ_A i čiji presek je Δ_A pa $\boldsymbol{A}$ ne bi mogao da ima monolit. Sada pokazujemo da je **C** poddirektno nesvodljiv turnir. Tvrdimo da su sve kongruencije turnira $\boldsymbol{A}$ tačno sve kongruencije turnira **C** kojima je dodana Δ_A i još $\nabla_{\boldsymbol{A}}$. Ako je α neka kongruencija u $\boldsymbol{A}$ različita od $\nabla_{\boldsymbol{A}}$, ona mora biti podskup kongruencije γ koja je koatom pa mora biti oblika $\beta \cup \Delta_A$ za neku kongruenciju β turnira **C.** S druge strane, ako je $\delta \in \boldsymbol{ConC} \cup \{\Delta_A\}$, pošto je skup C konveksan u turniru $\boldsymbol{A}$, i svaki njegov podskup je konveksan u $\boldsymbol{A}$ pa elementi iz $A \setminus C$ ne utiču na to da li je δ kongruencija na $\boldsymbol{A}$ tj. $\delta \in \boldsymbol{ConA}$. Sada, kako je $\boldsymbol{A}$ poddirektno nesvodljiv sa monolitom μ, onda je $\mu = \Delta_A \cup \sigma$, gde je $\sigma \in \boldsymbol{ConC}$ netrivijalna kongruencija takva da je sadrže sve druge netrivijalne kongruencije iz **C** tj. monolit od **C**. Dakle, imamo sledeću konstrukciju: imamo turnir $\boldsymbol{A}/\gamma$ u kome su svi elementi oblika $\{x\}$, $x \in A$ i još elemenat C koji je turnir sa elementima iz $\boldsymbol{A}$. Elementi iz $(\boldsymbol{A}/\gamma) \setminus C$ su u istim odnosima kao i elementi A $\setminus C$, u C su u oba slučaja isti međusobni odnosi elemenata a elemenat iz $x \in (\boldsymbol{A}/\gamma) \setminus C$ i elemenat $\mathbf{C}$ su u istom odnosu kao što su imali u turniru $\boldsymbol{A}$ taj elemenat x i proizvoljan element iz C (pošto je C konveksan svaki njegov element je imao isti odnos sa x u $\boldsymbol{A}$ pa je ovo dobro definisano). Dakle, po Definiciji 3.8. dobijamo da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C} \star C \star \boldsymbol{A}/\gamma$. Sada pokazujemo da je ova reprezentacija jedinstvena. Pretpostavimo da važi da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star \boldsymbol{s} \star \boldsymbol{S}$ gde je $\boldsymbol{S}$ jako povezan prost turnir, $s \in S$ i $\boldsymbol{T}$ je poddirektno nesvodljiv turnir. Iz Leme 3.1. dela 4. sledi da je $\gamma = T^2 \cup \Delta_A$ je najveći element u skupu $\boldsymbol{ConA} \setminus \{\nabla_{\boldsymbol{A}}\}$ i iz iste Leme je $\boldsymbol{A}/\gamma \cong \ \boldsymbol{S}$ odakle sledi i da je $\boldsymbol{T} \cong \ \boldsymbol{C}$.

Lema 3.7. Ako turnir $\boldsymbol{A}$ nije ni prost ni jako povezan, onda se $\boldsymbol{A}$ može predstaviti na jedinstven način kao jedan od $\boldsymbol{T} \star 0 \star \boldsymbol{2}$, $\boldsymbol{T} \star 1 \star \boldsymbol{2}$ ili $\boldsymbol{T} \star 1 \star \boldsymbol{3}$, gde je $\boldsymbol{T}$ jako povezan poddirektno nesvodljiv turnir.
Dokaz: Kako je na osnovu Leme 1.14. relacija $\sim_{\boldsymbol{A}}$ kongruencija i $\boldsymbol{A}$ nije jako povezan pa je $\sim_{\boldsymbol{A}} \neq \nabla_{\boldsymbol{A}}$ sledi da je $\boldsymbol{A}/\sim_{\boldsymbol{A}}$ polumreža koja je linearno uređena (pošto je $\boldsymbol{A}$ turnir, svaka dva elementa su mu uporediva). Ako bi neka kongruencija turnira $\boldsymbol{A}$ imala više od jedne netrivijalne klase, recimo B i C, onda pošto su u tom slučaju B i C konveksni skupovi, $B^2 \cup \Delta_A$ i $C^2 \cup \Delta_A$ bi takođe bile kongruencije na $\boldsymbol{A}$ koje su različite od Δ_A i čiji presek je Δ_A pa onda $\boldsymbol{A}$ ne bi imao monolit tj. ne bi bio poddirektno nesvodljiv što je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Dakle, svaka kongruencija turnira $\boldsymbol{A}$ ima jedinstvenu netrivijanlu klasu. Može biti samo dve mogućnosti : ili je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{n}$, za neko n (tada je jedina netrivijalna klasa $B = n \setminus \{1\}$) ili je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star i \star \boldsymbol{n}$ za neko $0 \leq i < n$ i neki jako povezan turnir $\boldsymbol{T}$ (tada je jedina netrivijalna klasa turnir $\boldsymbol{T}$, a ostali čvorovi $\{k\}, k \in \{0,1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ su jednoelementne klase)**.**
Posmatrajmo sada turnir $\boldsymbol{n}$ i pretpostavimo da je on poddirektno nesvodljiv. Ako pretpostavimo da on ima bar 3 elementa i posmatramo dve kongruencije $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Conn}$ takve da α ima jedinu netrivijalnu klasu $\{0,1\}$, a β jedinu netrivijalnu klasu $\{1,2\}$. $\{0,1\}$ i $\{1,2\}$ su konveksni skupovi pa su $(\{0,1\})^2 \cup \Delta_A$ i

$(\{1,2\})^2 \cup \Delta_A$ kongruencije na $\boldsymbol{n}$ koje su različite od Δ_n i čiji presek je Δ_n pa onda $\boldsymbol{n}$ ne bi imao monolit tj. ne bi bio poddirektno nesvodljiv. Pošto je jedini poddirektno nesvodljiv turnir $\boldsymbol{n}$ samo **2** a on je prost, $\boldsymbol{A}$ ne može biti izomorfno sa njim jer po pretpostavci tvrdjenja $\boldsymbol{A}$ nije prost pa nam ostaje jedino da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star i \star \boldsymbol{n}$ za neko $0 \leq i < n$ i neki jako povezan turnir $\boldsymbol{T}$. Sada definišemo preslikavanje λ: $(\boldsymbol{T} \star i \star \boldsymbol{n}) \rightarrow \boldsymbol{n}$ sa $\lambda(x) = i, x \in T$ i $\lambda(x) = x, x \in n \setminus \{i\}$ **.** Iz Leme 3.1. sledi da je λ sirjektivni homomorfizam. Pretpostavimo da je $n \geq 4$. Tada imamo da su $\{0,1\}$ i $\{n-2, n-1\}$ dva disjunktna konveksna skupa iz $\boldsymbol{n}$ pošto je u linearno uređenom turniru $\boldsymbol{n}$ svaki interval čvorova konveksan skup. Posmatramo inverzne slike ovih skupova u odnosu na preslikavanje λ, $\lambda^{-1}(\{0,1\})$ i $\lambda^{-1}(\{n-2, n-1\})$. Ako je i različito od $0,1, n-2, n-1$ po definiciji preslikavanja λ su inverzne slike interval $\{0,1\}$ i $\{n-2, n-1\}$ oni sami, tj. konveksni skupovi. Ako je i jednako nekom od $0,1, n-2, n-1$, inverzna slika tog čvora je ceo skup T. Tada su $\lambda^{-1}(\{i, i+1\})$ i $\lambda^{-1}(\{i-1, i\})$ skupovi $T \cup \{i+1\}$ ili $T \cup \{i-1\}$ konveksni skupovi jer prvi tuku svi elementi $\{0,1, \dots, i-1\}$ a on tuče sve $\{i+2, \dots, n\}$ a drugi tuku svi elementi $\{0,1, \dots, i-2\}$ a on tuče sve $\{i+1, \dots, n\}$. U svakom slučaju kada posmatramo intervale $\{0, T\}$, $\{T, 1\}$ i $\{n-2, T\}$ $\{T, n-1\}$ oni su svi konveksni skupovi u turniru $\boldsymbol{T} \star i \star \boldsymbol{n}$. Dakle, dobijamo da su i $\lambda^{-1}(\{0,1\})$ i $\lambda^{-1}(\{n-2, n-1\})$ disjunktni konveksni skupovi u $\boldsymbol{T} \star i \star \boldsymbol{n}$ pa ponovo dobijamo netrivijalne kongruencije $(\lambda^{-1}(\{0,1\}))^2 \cup \Delta_{\boldsymbol{T}\star i\star \boldsymbol{n}}$ i $(\lambda^{-1}(\{n-2, n-1\}))^2 \cup \Delta_{\boldsymbol{T}\star i\star \boldsymbol{n}}$ sa presekom $\Delta_{\boldsymbol{T}\star i\star \boldsymbol{n}}$ što je kontradikcija sa činjenicom da je $\boldsymbol{A}$ poddirektno nesvodljiv i $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star i \star \boldsymbol{n}$. Dakle, mora biti $n \leq 3$. Za $n = 1$ imamo da je $\boldsymbol{T} \star i \star \boldsymbol{n} \cong \boldsymbol{T}$ i pošto je $\boldsymbol{T}$ jako povezan turnir, a $\boldsymbol{A}$ po pretpostavci nije jako povezan, ne može biti $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T}$ pa mora biti $n > 1$. Dakle, $n \in \{2,3\}$. Primetimo da $\boldsymbol{T} \star 0 \star \boldsymbol{3}$ nije poddirektno nesvodljiv jer su T i $\{1,2\}$ disjunktni konveksni skupovi pa bi opet kongruencije koje ih sadrže kao netrivijalne klase imale presek $\Delta_{\boldsymbol{T}\star 0\star \boldsymbol{3}}$ iz čega bi sledilo ne postojanje monolita i isto važi i za $\boldsymbol{T} \star 2 \star \boldsymbol{3}$. Dakle i ova dva slučaja izbacujemo i ostaje nam da je $(i, \boldsymbol{n})$ $(0, \boldsymbol{2}), (1, \boldsymbol{2})$ ili $(1, \boldsymbol{3})$. Konačno, imamo da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$, gde je $\boldsymbol{T}$ jako povezan netrivijalni turnir, a $(s, \boldsymbol{S})$ je $(0, \boldsymbol{2}), (1, \boldsymbol{2})$ ili $(1, \boldsymbol{3})$. Bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$. Sada, ponovo iz dokaza Leme 3.5. imamo da je $\boldsymbol{ConT} \cong [\Delta_A, T^2 \cup \Delta_A]$, gde je $[\Delta_A, T^2 \cup \Delta_A]$ interval u mreži ***ConA*** i tada ako je $\boldsymbol{A}$ poddirektno nesvodljiv, $[\Delta_A, T^2 \cup \Delta_A]$ mora sadržati najmanju netrivijalnu kongruenciju pa je sadrži i $\boldsymbol{ConT}$ zbog izomorfizma, tj. i $\boldsymbol{T}$ je poddirektno nesvodljiv. Ako turnir $\boldsymbol{A}$ ima nulti i jedinični element, pošto tada i $\boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$ mora imati nulti i jedinični element, $(s, \boldsymbol{S})$ mora biti $(1, \boldsymbol{3})$. Ako $\boldsymbol{A}$ ima nulti a nema jedinični element, onda je $(s, \boldsymbol{S}) = (1, \boldsymbol{2})$, a ako $\boldsymbol{A}$ ima jedinični a nema nulti element, $(s, \boldsymbol{S}) = (0, \boldsymbol{2})$. Dakle, $(s, \boldsymbol{S})$ je jedinstveno određeno (do na izomorfizam) iz čega sledi da ako je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$ i $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T}' \star s \star \boldsymbol{S}$, onda mora biti i $\boldsymbol{T} \cong \boldsymbol{T}'$, pa je i $\boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$ jedinstveno određeno do na izomorfizam.

Teorema 3.1. (Teorema Marotija) Svaki konačan poddirektno nesvodljiv turnir $\boldsymbol{A}$, $|A| \geq 2$ ima do na izomorfizam jedinstvenu reprezentaciju $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \dots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$, gde:

1. Svaki $\boldsymbol{S}_i$ je ili izomorfan sa **2**, ili sa **3** ili je jako povezan prost turnir.
2. Ne postoji i takvo da su i $\boldsymbol{S}_i$ i $\boldsymbol{S}_{i+1}$ izomorfni lancima (**2** ili **3**), nego je bar jedan od $\boldsymbol{S}_i$ i $\boldsymbol{S}_{i+1}$ jako povezan.
3. $s_i \in S_i$ za svako $1 \leq i \leq n$.
4. $\boldsymbol{S}_0$ nije izomorfan sa **3**, ako je $\boldsymbol{S}_i \cong \boldsymbol{3}$, onda je s_i srednji element (koji se izomorfizmom slika u 1).

Takođe, $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ je konačan poddirektno nesvodljiv turnir za svaki izbor $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \ldots, \boldsymbol{S}_n$ za koji važe uslovi 1.—4.

Dokaz: Dokaz ćemo dati indukcijom po broju elemenata turnira, |A|. Ako je |A|$= 2$, $\boldsymbol{A}$ je dvoelementni lanac koji je prost turnir i onda je $n = 0\ i\ \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{S}_0$ gde je $\boldsymbol{S}_0$ turnir **2** i u ovom slučaju su zadovoljeni uslovi 1.—4. : $\boldsymbol{S}_0$ je izomorfan turniru **2,** ne postoji i takvo da su i $\boldsymbol{S}_i$ i $\boldsymbol{S}_{i+1}$ izomorfni lancima (**2** ili **3**) jer nemamo $i \geq 1$ i $\boldsymbol{S}_0$ nije izomorfan sa **3.** Pretpostavimo da za sve poddirektno nesvodljive turnire sa manje od |A| čvorova važi tvrđenje teoreme. Sada posmetramo turnir $\boldsymbol{A}$ sa |A| čvorova. Ako je $\boldsymbol{A}$ prost, onda je na osnovu Leme 3.5. $n = 0\ i\ \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{S}_0$ gde je $\boldsymbol{S}_0$ ili turnir **2** (što nam je baza indukcije) ili jako povezan prost turnir i u ovom slučaju su zadovoljeni uslovi 1.—4. jer $\boldsymbol{S}_0$ nije izomorfan sa **3** pošto je $\boldsymbol{S}_0$ prost turnir a **3** nije i takođe je to jedina reprezentacija koja zadovoljava uslove 1.—4. jer $\boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$ uvek ima netrivijalnu kongruenciju kad je $\boldsymbol{T}$ netrivijalan, to je $\alpha = T^2 \cup \Delta_A$, pa $\boldsymbol{A}$ kao prost turnir ne može biti izomorfan sa turnirom koji nije prost. Ako $\boldsymbol{A}$ nije prost turnir, imamo dva slučaja, kada je $\boldsymbol{A}$ jako povezan i kada nije jako povezan. Ako je $\boldsymbol{A}$ jako povezan, onda na osnovu Leme 3.6. sledi da je reprezentacija $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$, gde je $\boldsymbol{S}$ jako povezan prost turnir i $\boldsymbol{T}$ poddirektno nesvodljiv netrivijalan turnir, jedinstvena do na izomorfizam. Na osnovu Leme 3.2. imamo da ne postoji par $(s', \boldsymbol{S}') \in \{(0,2), (1,2), (1,3)\}$ takav da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star s' \star \boldsymbol{S}'$ jer tada $\boldsymbol{A}$ ne bi bio jako povezan turnir. Pošto je $\boldsymbol{T}$ turnir sa manje čvorova od |A|, za njega važi indukcijska pretpostavka, tj. $\boldsymbol{T}$ ima jedinstvenu reprezentaciju $\boldsymbol{T} \cong \boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ za koju važe uslovi 1.—4. pa je i $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n \star s \star \boldsymbol{S}$**.** Važi da je svaki $\boldsymbol{S}_i$ je ili izomorfan sa **2**, ili sa **3** ili je jako povezan prost turnir i $\boldsymbol{S}$ je jako povezan pa je zadovoljen uslov 1. Ne postoji i takvo da su i $\boldsymbol{S}_i$ i $\boldsymbol{S}_{i+1}$ izomorfni lancima (**2** ili **3**), nego je bar jedan od $\boldsymbol{S}_i$ i $\boldsymbol{S}_{i+1}$ jako povezan i $\boldsymbol{S}$ je jako povezan pa je zadovoljen uslov 2. Za svako $1 \leq i \leq n, s_i \in S_i$ i $s \in S$ pa važi 3. i $\boldsymbol{S}_0$ nije izomorfan sa **3** po indukcijskoj pretpostavci, ako je $\boldsymbol{S}_i \cong \boldsymbol{3}$, onda je s_i srednji element opet po pretpostavci i ne može biti $\boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{3}$ pošto je $\boldsymbol{S}$ jako povezan turnir a **3** to nije pa važi i uslov 4. Ako $\boldsymbol{A}$ nije jako povezan turnir, na osnovu Leme 3.7. imamo da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S}$ gde je $(s, \boldsymbol{S}) \in \{(0,2), (1,2), (1,3)\}$ i $\boldsymbol{T}$ je jako povezan netrivijalni poddirektno nesvodljiv turnir i takođe imamo da je ova reprezentacija jedinstvena do na izomorfizam. Iz Leme 3.1. sledi da $\boldsymbol{S}$ ne može biti prost jer tada $\boldsymbol{A}$ ne bi bio jako povezan. Na osnovu indukcijske hipoteze $\boldsymbol{T}$ ima jedinstvenu reprezentaciju $\boldsymbol{T} \cong \boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ za koju važe uslovi 1.—4. I važi da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{T} \star s \star \boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n \star s \star \boldsymbol{S}$**.** $\boldsymbol{S}$ je izomorfan sa **2** ili sa **3** pa važi 1. Kako je $\boldsymbol{T}$ jako povezan, ako $\boldsymbol{T}$ nije prost, na osnovu Leme 3.6. sledi da je $\boldsymbol{S}_n$ jako povezan prost turnir, a ako je $\boldsymbol{T}$ prost onda na osnovu Leme 3.5. opet sledi da je $\boldsymbol{S}_n$ jako povezan prost turnir. Dakle, u svakom slučaju važi i uslov 2. Za svako $1 \leq i \leq n, s_i \in S_i$ i $s \in S$ pa važi 3. $\boldsymbol{S}_0$ nije izomorfan sa **3** po indukcijskoj pretpostavci, ako je $\boldsymbol{S}_i \cong \boldsymbol{3}$, onda je s_i srednji element opet po pretpostavci i ne može biti $\boldsymbol{S} \cong \boldsymbol{3}$ pošto je $\boldsymbol{S}$ jako povezan turnir a **3** to nije pa važi i uslov 4. Jedinstvenost $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ sledi iz indukcijske pretpostavke a jedinstvenost $(s, \boldsymbol{S})$ smo pokazali u Lemi 3.7. Indukcijom po n pokazujemo da je $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ konačan poddirektno nesvodljiv turnir za svaki izbor $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \ldots, \boldsymbol{S}_n$ i $s_1, \ldots, s_n$ za koje važe uslovi 1.—4. Za bazu indukcije posmatramo turnir $\boldsymbol{S}_0$. Na osnovu uslova 1. i 4. važi da je $\boldsymbol{S}_0$ ili izomorfan sa **2,** za koji smo pokazali da je poddirektno nesvoljiv, ili jako povezan prost turnir koji je poddirektno nesvodljiv po definiciji. Ako pretpostavimo da za svaki turnir $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ u kome $\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{S}_1, \ldots, \boldsymbol{S}_n$ i $s_1, \ldots, s_n$ zadovoljavaju uslove 1.—4. važi da je konačan poddirektno nesvodljiv. Posmatramo turnir

$\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n \star s \star \boldsymbol{S}$. Iz uslova 1. Sledi da je ili $\boldsymbol{S}$ izomorfan sa **2** ili sa **3** i iz uslova 4. ako je $\boldsymbol{S} \cong \mathbf{3}$, onda je s srednji element pa imamo da $(s, \boldsymbol{S}) \in \{(0,2), (1,2), (1,3)\}$ iz čega na osnovu Leme 3.2. važi da je $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n \star s \star \boldsymbol{S}$ poddirektno nesvodljiv, ili je $\boldsymbol{S}$ jako povezan prost turnir pa sada na osnovu Leme 3.1. sledi da je $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n \star s \star \boldsymbol{S}$ poddirektno nesvodljiv.

Definicija 3.6. Za svaki netrivijalni poddirektno nesvodljivi konačan turnir $\boldsymbol{A}$**,** reprezentacija naduvavanjem turnira $\boldsymbol{A}$ je jedinstveni proizvod $\boldsymbol{S}_0 \star s_1 \star \boldsymbol{S}_1 \star \ldots \star s_n \star \boldsymbol{S}_n$ izomorfan sa $\boldsymbol{A}$ za koji važe uslovi:

1. Svaki $\boldsymbol{S}_i$ je ili izomorfan sa **2**, ili sa **3** ili je jako povezan prost turnir.
2. Ne postoji i takvo da su i $\boldsymbol{S}_i$ i $\boldsymbol{S}_{i+1}$ izomorfni lancima (**2** ili **3**), nego je bar jedan od $\boldsymbol{S}_i$ i $\boldsymbol{S}_{i+1}$ jako povezan.
3. $s_i \in S_i$ za svako $1 \leq i \leq n$.
4. $\boldsymbol{S}_0$ nije izomorfan sa **3**, ako je $\boldsymbol{S}_i \cong \mathbf{3}$, onda je s_i srednji element (koji se izomorfizmom slika u 1).

Literatura

1. [Burris] Sankappanavar, Burris, S., H.P., *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1981.
2. [Madarasz-Szilagyi] R. Madarasz-Szilagyi, *Od skupova do univerzalnih algebri*, Novi Sad, 2006
3. [Petrović] V. Petrović, *Teorija grafova*, Novi Sad, 1998.
4. [Baker] K. A. Baker, *Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class*, Advances in Math. **24** (1977) no. 3, 207—243.
5. [ErdosFriedHajnalMilner] P. Erdős, E. Fried, A. Hajnal and E. C. Milner, *Some remarks on simple tournaments*, Algebra Universalis **2** (1972), 238—245.
6. [ErdosHajnalMilner] P. Erdős, A. Hajnal and E. C. Milner, *Simple one-point extensions of tournaments*, Mathematika **19** (1972), 57—62.
7. [Fried1] E. Fried, *Tournaments and non-associative lattices*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eőtvős Sect. Math. **13** (1970), 151—164.
8. [Fried2] E. Fried, *Weakly associative lattices with congruence extension property*, Algebra Universalis **4** (1974), 151—162.
9. [Fried3] E. Fried, *Non-finitely based varieties of weakly associative lattices*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eőtvős Sect. Math. **55** (2012), 13—27.
10. [FriedGratzer1] E. Fried and G. Grätzer, *Some examples of weakly associative lattices*, Colloq. Math. **27** (1973), 215—221.
11. [FriedGratzer2] E. Fried and G. Grätzer, *A nonassociative extension of the class of distributive lattices*, Pacific J. Math. **49** (1973), 59—78.
12. [FriedLakser] E. Fried and H. Lakser, *Simple tournaments*, Notices Am. Math. Soc. **18** (1971), 395.
13. [FriedSos] E. Fried and V. Sós, *Weakly associative lattices and projective planes*, Algebra Universalis **5** (1975), 114—119.
14. [JezekMarkovicMarotiMcKenzie1] J. Ježek, P. Marković, M. Maróti and R. McKenzie, *The variety generated by tournaments,* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **40** (1999) no. 1, 21—41.
15. [JezekMarkovicMarotiMcKenzie1] J. Ježek, P. Marković, M. Maróti and R. McKenzie, *Equations of tournaments are not finitely based,* Discrete Math. **211** (2000) no. 1—3, 211—219.
16. [Maroti] M. Maróti ,*The variety generated by tournaments*, PhD thesis, Vanderbilt University, 2002.
17. [Moon] J. W. Moon, *Embedding tournaments in simple tournaments*, Discrete Math. **2** (1972), 389—395.
18. [MullerNesetrilPelant] V. Müller, J. Nešetřil and J. Pelant, *Either tournaments or algebras?*, Comment. Math. Univ. Carolinae **13** (1972), 801—807.
19. [Willard] R. Willard, *A finite basis theorem for residually finite, congruence meet-semidistributive varieties*, J. Symbolic Logic **65** (2000) no. 1, 187—200.

Biografija

Ljiljana Knežev je rođena 14. 05. 1990. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Miloje Čiplić" završava 2005. godine u Novom Bečeju kao nosilac Vukove diplome i gimnaziju u školi "Srednja škola Novi Bečej" završava 2009. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike koje završava 2014. godine sa prosečnom ocenom 8.51 i iste godine upisuje master studije na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Do septembra 2015. godine polaže sve ispite i stiče pravo na odbranu master rada.

Novi Sad, oktobar 2015.

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: VR	Master rad
Autor: AU	Ljiljana Knežev
Mentor: MN	dr Petar Marković
Naslov rada: NR	Kongruencije na turnirima
Jezik publikacije: JP	srpski (latinica)
Jezik izvoda: JI	s/en
Zemlja publikovanja: ZP	Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2015.
Izdavač: IZ	autorski reprint
Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: FO	3/29/19/0/0/0/0 (broj poglavlja / strana / lit. citata / tabela / slika / grafika / priloga)
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Teorija grafova i algebra
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	Turniri, kongruencije, proste algebre, poddirektno nesvodljive algebre
UDK	
Čuva se: ČU	u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	Ovaj master rad se bavi turnirima, orijentisanim grafovima bez petlji u kojima između svaka dva različita čvora postoji tačno jedna orijentisana grana. Kad se turniri reprezentuju kao algebre, moguće je posmatrati kongruencije na njima. U radu dokazujemo teoremu koja na grafovski način daje potreban i dovoljan uslov da relacija ekvivalencije bude kongruencija. Zatim dokazujemo da su prosti turniri česta pojava. Preciznje, dokazujemo da se svaki konačan turnir može proširiti jednim čvorom do prostog turnira, osim turnira sa tri čvora i neparnih tranzitivnih turnira, kojima je neophodno dodati dva čvora da bi se dobio prost turnir. To je teorema Muna. Konačno, dokazujemo teoremu Marotija koja objašnjava kako izgledaju poddirektno nesvodljivi turniri, ako su poznati prosti turniri. Naime, dokazuje se da se svaki konačan poddirektno nesvodljiv turnir na jedinstven način može razložiti na niz prostih turnira i tranzitivnih turnira sa dva i tri elementa.
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: DP	21.9.2015.
Datum odbrane: DO	28.1.2015.

Članovi komisije: (naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet) KO	predsednik: dr Vojislav Perović član: dr Petar Marković član: dr Petar Đapić

University of Novi Sad

Faculty of Natural Sciences And Mathematics

Key word documentation

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	Master's thesis
Author: AU	Ljiljana Knežev
Mentor: MN	dr Petar Marković
Title: TI	Congruences on tournaments
Language of text: LT	Serbian
Language of abstract: LA	en/s
Country of publication: CP	Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2015.
Publisher: PU	Author's reprint
Publ. place: PP	Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: PD	3/29/19/0/0/0/0 (chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
Scientific field SF	Mathematics
Scientific discipline SD	Graph theory and Algebra
Subject Key words SKW	Tournaments, congruences, simple algebras, subdirectly irreducible algebras
UC	
Holding data: HD	The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
Note: N	
Abstract: AB	This master thesis concerns torunaments, i.e. loopless directed graphs such that each pair of distinct vertices is connected by exactly one directed edge. When the tournaments are reresented as algebras, one can consider congruences on them. We prove a theorem that characterizes which equivalence relations on vertices are congruences. Then we prove that there are many simple tournaments. More precisely, we prove that every finite tournament can be extended to a simple tournament by adding one vertex, except for tournaments with three vertices and odd transitive tournaments, which need two additional vertices. This a theorem of Moon. Finalle, we prove the Maróti's theorem, which which explains the structure of subdirectly irreducible tournaments if one understands simple ones. Namely, we prove that there is a unique decomposition of any finite subdirectly irreducible tournament into a sequence of simple tounemants and transitive tournaments with two or three vertices.
Accepted on Scientific Board on: AS	September 21, 2015.
Defended: DE	October 28, 2015.

Thesis Defend board: DB	president: Dr Vojislav Petrović member: Dr Petar Marković member: Dr Petar Đapić