UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Lidija Krstanović

O numeričkom rešavanju singularno perturbovanog problema sa Robinovim konturnim uslovima

-master rad-

Mentor:
dr Helena Zarin

Novi Sad, 2011.

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog master rada je jedna klasa singularno perturbovanih problema (problemi konvekcije-difuzije sa *Robinovim* konturnim uslovima) i numerička analiza određenog konačnog-diferencnog postupka. Na slojno-adaptivnim mrežama Šiškinovog tipa izvedena je uniformna ocena greške, a rezultati su verifikovani numeričkim eksperimentima.

Ovi problemi su nastali kao modeli za mnoge fizičke i hemijske pojave. Javljaju se u fizici, dinamici fluida, opisu difuzino konvekcionih reakcijskih modela. Uopšte, poslednjih pedesetak godina privlače pažnju mnogih naučnika. Stoga je na ovu temu napisano dosta naučnih radova i monografija.

Rad se sastoji od pet glava i dva priloga.

Prva glava je uvodna i sadrži pregled osnovnih definicija i teorema o linearnim konturnim problemima, sa akcentom na lineranom konturnom problemu trećeg reda na uniformnoj mreži. Data je definicija diskretnog analogona i određeni su članovi tridijagonalne matrice.

U drugoj glavi je uvedena mreža Šiškinovog tipa koja će biti korišćena za diskretizaciju problema datog u radu. Takođe je navedena i Bahvalov-Šiškinova mreža, na kojoj će pored Šiškinove mreže biti izvršeni numerički eksperimenti.

Treća i četvrta glava su najznačajniji deo rada.

U trećoj glavi se uvodi posmatrani problem. Navodi se princip minimuma i granice za tačno rešenje i njegove izvode. Izvedena je dekompozicija rešenja na singularnu i glatku komponentu, i navedene su granice komponenti rešenja i njihovih izvoda. Izvršena je diskretizacija problema korišćenjem *upwind* postupka. Izvedena je teorema diskretnog minimuma koja dovodi do granice rešenja diskretne forme problema. Data je dekompozicija diskretnog rešenja. U poslednjem delu ove glave su date posebne ocene greški za svaku komponentu numeričkog rešenja, koje vode do teoreme o oceni greške numeričkog rešenja.

Četvrta glava je posvećena kompjuterskim rezultatima konkretnog primera singularno perturbovanog problema sa *Robinovim* uslovima. Prikazani su grafici tačnog i približnog rešenja, kao i tabele koje daju greške i ocene reda konvergencije.

U petoj glavi je dat zaključak ovog rada: da za numeričku aproksimaciju rešenja metod daje robusnost u odnosu na perturbacioni parametar.

U prvom prilogu su navedene teoreme i definicije iz linearne algebre i analize koje su potrebne za ovaj rad. U drugom prilogu su dati *Mathematica* programi koji su korišćeni za numeričke eksperimente.

***

Ogromnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Heleni Zarin na korisnim savetima, sugestijama i primedbama. Bez njene pomoći rad ne bi imao sadašnji oblik.

Želim da se posebno zahvalim i predsedniku komisije dr Dragoslavu Hercegu na interesovanju za moj rad i pomoći koju mi je pružio u toku izrade rada.

Zahvaljujem se i članu komisije dr Đordje Hercegu.

Novi Sad, septembar 2011. godine Lidija Krstanović

Glava 1

Uvod

1.1 Konturni problemi običnih diferencijalnih jednačina

Kada se od rešenja diferencijalne jednačine zahteva da zadovoljava dodatne uslove u dve ili više tačaka dobija se konturni problem običnih diferencijalnih jednačina.

Traži se rešenje u diferencijalne jednačine drugog reda u intervalu $[a, b]$

$$u''(x) = f(x, u, u') \tag{1.1}$$

koje zadovoljava konturne uslove opšteg tipa

$$\begin{aligned} \beta_{11}u(a) + \beta_{12}u'(a) + \gamma_{11}u(b) + \gamma_{12}u'(b) = \alpha \\ \beta_{21}u(a) + \beta_{22}u'(a) + \gamma_{21}u(b) + \gamma_{22}u'(b) = \beta \end{aligned} \tag{1.2}$$

gde su $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$, $i, j = 1, 2$, α, β date konstante.

Konturni problem (1.1) - (1.2) je u opštem slučaju **nelinearan**. Ako je α=β=0, tada su konturni uslovi (1.2) **homogeni**. Specijalni slučajevi konturnih uslova (1.2) su

$$u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta, \tag{1.3}$$

$$u'(a) = \alpha, \ u'(b) = \beta, \tag{1.4}$$

$$\beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) = \alpha, \ \gamma_1 u(b) + \gamma_2 u'(b) = \beta. \tag{1.5}$$

Diferencijalna jednačina sa konturnim uslovima (1.3) daje konturni problem **prvog reda**, sa konturnim uslovima (1.4) daje konturni problem **drugog reda**, a sa konturnim uslovima (1.5) **trećeg reda**. Ako je u (1.5) α=β=0 odgovarajući uslovi se nazivaju **Šturmovim**. Konturni uslovi (1.3) se nazivaju **Dirihleovi uslovi**, uslovi (1.4) su **Nojmanovi uslovi**, dok su uslovi (1.5) poznati kao **Robinovi konturni uslovi**.

Posebno su važni i interesantni **linearni konturni problemi** , tj. takvi problemi kod kojih je diferencijalna jednačina linearna. Linearna diferencijalna jednačina drugog reda se može zapisati u obliku

$$Lu = r(x),\ x \in [a, b], \tag{1.6}$$

gde je

$$Lu = -u'' + p(x)\ u' + q(x)\ u,$$

a funkcije $p(x)$, $q(x)$, i $r(x)$ su definisane na intervalu $[a, b]$. Diferencijalna jednačina je **homogena** ako je $r(x) = 0,\ x \in [a, b]$, a **konturni problem je homogen** ako su i jednačina i konturni uslov homogeni.

Posmatramo numeričko rešavanje linearnog konturnog problema trećeg reda

$$u''(x) = f(x, u, u'),\quad x \in [a, b],$$
$$\beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) = \alpha,\ \gamma_1 u(b) + \gamma_2 u'(b) = \beta$$

pod pretpostavkama koje garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja u posmatranog konturnog problema. Na ekvidistantnoj **mreži diskretizacije**

$$I_h = \{x_i = a + ih :\ i = 0, 1, \ldots, n\} \tag{1.7}$$

koja je određena **korakom** diskretizacije

$$h = \frac{b-a}{n},\ n \in \mathbb{N}$$

formira se **diskretni analogon** za posmatrani konturni problem. U zavisnosti od toga da li se posmatra linearan ili nelinearan konturni problem, diskretni analogon je sistem linearnih, odnosno nelinearnih jednačina. U opštem slučaju diskretni analogon se može zapisati kao sistem

$$\begin{aligned} F_0(w) &= 0 \\ F_1(w) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(w) &= 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

pri čemu je

$$w = [w_0, w_1, \ldots, w_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Sistem (1.8) može se zapisati kraće kao

$$F(w) = 0$$

gde je preslikavanje F definisano preko svojih komponenti $F_0,\ F_1, \ldots,\ F_n$. Rešenje diskretnog analogona označava se sa

$$w^* = [w_0^*,\ w_1^*, \ldots,\ w_n^*]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

a restrikcija tačnog rešenja u posmatranog konturnog problema na mreži diskretizacije I_h sa u_h. Koriste se oznake

$$u_i = u(x_i),\ \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

tako da je

$$u_h = [u_0, u_1, \ldots, u_n]^T$$

odnosno

$$u_h = [\alpha, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \beta]^T.$$

Rešenje w^* diskretnog analogona je numeričko rešenje posmatranog konturnog problema, odnosno w^* je aproksimacija za u_h

$$w^* \approx u_h,$$

tj.

$$w_i^* \approx u(x_i),\ \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Posebno je značajno utvrditi kada postoji jedinstveno rešenje w^* sistema (1.8) i šta se može reći za grešku

$$\|w^* - u_h\|.$$

1.2 Linearni konturni problemi na uniformnoj mreži

Posmatramo linearni konturni problem trećeg reda

$$
\begin{gathered}
-u'' + p(x)u' + q(x)u = r(x), \quad x \in [a,b], \\
\beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) = \alpha, \ \gamma_1 u(b) + \gamma_2 u'(b) = \beta
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

Diskretni analogon ovog problema se formira tako što se u unutrašnjoj tački mreže I_h izvodi funkcije u aproksimiraju diferencnim količnicima. Tako se dobija **diskretni analogon** problema (1.9)

$$
\begin{gathered}
\beta_1 w_0 + \beta_2 D' w_0 = \alpha \\
-D'' w_i + p(x_i) D' w_i + q(x_i) w_i = r(x_i), \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \\
\gamma_1 w_n + \gamma_2 D' w_n = \beta,
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

gde je D'' diferencna šema za aproksimaciju drugog izvoda, a D' jedna od šema za aproksimaciju prvog izvoda ($D_-, \ D_+, \ D_0$).

1.2.1 Teorema *[5] Neka je $u \in C^k[a,b]$, i neka je $x, \ x+h, \ x-h \ \in [a,b]$, gde je $h > 0$ dati broj. Ako je*

$$
\begin{aligned}
D_- u(x) &= \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \\
D_+ u(x) &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \\
D_0 u(x) &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}, \\
D'' u(x) &= \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2},
\end{aligned}
$$

onda za $k = 2$ važi

$$
\begin{gathered}
u'(x) = D_- u(x) + \frac{h}{2} u''(\theta_1), \quad \theta_1 \in (x-h, x), \\
u'(x) = D_+ u(x) - \frac{h}{2} u''(\theta_2), \quad \theta_2 \in (x, x+h), \\
u'(x) = D_0 u(x) + \frac{h}{4}(u''(\theta_3) - u''(\theta_4)), \quad \theta_3 \in (x-h, x), \ \theta_4 \in (x, x+h).
\end{gathered}
$$

Za $k = 3$ važi

$$
u'(x) = D_0 u(x) - \frac{h^2}{6}(u'''(\theta_5), \quad \theta_5 \in (x-h, x+h),
$$

$$u''(x) = D''u(x) + \frac{h}{6}u'''(\theta_6) - u'''(\theta_7)), \quad \theta_6 \in (x-h, x), \ \theta_7 \in (x, x+h).$$

Ako je $k = 4$, važi još

$$u''(x) = D''u(x) - \frac{h^2}{12}u^{IV}(\theta_8), \quad \theta_8 \in (x-h, x+h).$$

Umesto $D''u(x_i)$ piše se kraće $D''u_i$ i analogno za diferencne šeme za aproksimaciju prvog izvoda. Kako je pretpostavljeno da postoji rešenje u problema (1.9) i da je $u_i = u(x_i)$, dobija se

$$-D''u_i + p(x_i)D'u_i + q(x_i)u_i \approx r(x_i), \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

gde znak $\approx$ stoji zbog toga što su izvodi rešenja u u tačkama x_i, zamenjeni odgovarajućim aproksimacijama. Greška koja se pri tome javlja je

$$\tau_i[u] = -D''w_i + p(x_i)D'w_i + q(x_i)w_i - r(x_i), \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

i naziva se **lokalna greška konzistencije**. Vektor

$$\tau[u] = [0, \tau_1[u], \tau_2[u], \ldots, \tau_{n-1}[u], 0]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

naziva se **vektor greške konzistencije**.

Kada je $q \equiv 0$, $D' = D_+$ za prvu jednačinu, $D' = D_-$ za treću jednačinu diskretni analogon (1.10) može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
\Big(\beta_1 - \frac{\beta_2}{h}\Big)w_0 + \frac{\beta_2}{h}w_1 = \alpha, \\
-\frac{1}{h^2}w_{i-1} + \Big(\frac{2}{h^2} - \frac{p(x_i)}{h}\Big)w_i + \Big(-\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{h}\Big)w_{i+1} = r(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\
-\frac{\gamma_2}{h}w_{n-1} + \Big(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{h}\Big)w_n = \beta.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Neka je diskretni analogon (1.10) zapisan u matričnom obliku

$$Aw = r \tag{1.12}$$

i neka je $\tau[u]$ odgovarajući vektor greške konzistencije.

1.2.2 Definicija *Diskretni analogon (1.12) je stabilan ako je A regularna matrica i ako važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq C_1$$

gde je C_1 konstanata nezavisna od n.

1.2.3 Definicija *Diskretni analogon (1.12) je konzistentan sa konturnim uslovom (1.9) ako postoji pozitivan broj m takav da važi*

$$\|\tau[u]\|_\infty \leq C_2 h^m$$

gde je C_2 konstanta nezavisna od n. Broj m je red konzistencije.

1.2.4 Definicija *Neka postoji rešenje w^* diskretnog analogona (1.12). Ako važi*

$$\|u_h - w^*\|_\infty \leq C_3 h^s,$$

gde je C_3 konstanta nezavisna od n, kaže se da w^* konvergira ka u_h. Broj s je red konvergencije.

1.2.5 Teorema *[5] Neka je diskretni analogon (1.12) stabilan i konzistentan sa redom konzistencije m. Tada je m i red konvergencije i $C_3 = C_1\ C_2$.*

Neka je u (1.10) šema D' jednaka D_+ u prvoj jednačini, a D_- u trećoj jednačini . Tada (1.10) glasi

$$\begin{aligned} b_0 w_0 + c_0 w_1 &= \alpha, \\ a_i w_{i-1} + b_i w_i + c_i w_{i+1} &= r(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ a_n w_{n-1} + b_n w_n &= \beta, \end{aligned} \tag{1.13}$$

gde je

$$a_j = -\frac{1}{h^2}, \quad b_j = \Big(\frac{2}{h^2} - \frac{p(x_i)}{h} + q(x_i)\Big), \quad c_j = \Big(-\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{h}\Big).$$

za svako $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, i neka je

$$b_0 = \beta_1 - \frac{\beta_2}{h}, \quad c_0 = \frac{\beta_2}{h}, \quad a_n = -\frac{\gamma_2}{h}, \quad b_n = \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{h}.$$

Sistem (1.13) se može zapisati u obliku

$$Aw = r$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

i

$$r = [\alpha, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, \beta]^T$$

gde je $r_i = r(x_i)$.

Sistem $Aw = r$ se jednostavno rešava, kao i sistem (1.11). Očigledno je da se sistem (1.11) dobija odavde ako stavimo $q \equiv 0$.

Glava 2

Slojno adaptivne mreže

Svi numerički postupci za rešavanje konturnih problema pomoću kompjutera zahtevaju diskretizaciju diferencijalnih jednačina na nekoj mreži. Pri izboru mreže diskretizacije potrebno je dostići dva cilja: dobru tačnost numeričkog rešenja i relativno jeftino rešavanje sistema linearnih ili nelinearnih jednačina nastalih diskretizacijom polaznog problema.

Izbor dobre mreže je bitan ako se želi efikasan postupak za probleme kod kojih se rešenje naglo menja u nekim delovima intervala. Kod nelinearnih konturnih problema je veoma važno imati dobru početnu aproksimaciju, koja se kasnije koristi za iterativno rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Zbog toga je odgovarajuća mreža ovde posebno važna. No, nelinearne jednačine nisu tema ovog rada.

Vreme računanja i zauzeće memorije rastu sa povećanjem broja tačaka. Imajući to u vidu, uvek se teži dobijanju mreže sa manjim brojem tačaka (gruba mreža), ali koja daje dovoljno dobru tačnost. To znači da mreža mora da bude dovoljno fina da osigura egzistenciju rešenja diskretnog analogona i da diskretni analogon adekvatno aproksimira kontinualni konturni problem.

Izbor mreže se mora zasnivati na kontroli greške diskretizacije i očuvanju stabilnosti.

2.0.6 Definicija *Na intervalu* $[0, 1]$*,* **mreža** *je konačan skup*

$$I_h = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \quad n \in N,$$

sa osobinom

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

Čvorovi *(tačke) mreže su* x_i *za* $i = 0, 1, \ldots, n$, *a unutrašnji čvorovi su* x_i *za* $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
Koraci *mreže su*

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2.0.7 Definicija *Mreža je* **ekvidistantna** *ako su njeni koraci jednaki, tj. ako je*

$$h_i = h_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

U suprotnom, mreža je **neekvidistantna**.

2.1 Šiškinov tip mreže

Mreže ovog tipa je uveo Šiškin u [12] i u stručnoj literaturi se nazivaju po njemu. Zbog svoje jednostavnosti često se koristi i za numeričko rešavanje singularno pertubovanih diferencijalnih jednačina.

Za našu diskretizaciju koristimo mrežu opšteg tipa uvedenu u [10]. Sa σ označavamo tranzicioni parametar mreže definisanog sa

$$\sigma = min\Big\{0.5, \frac{1}{\alpha}\varepsilon lnN\Big\}. \tag{2.1}$$

Ako pravimo slabe pretpostavke da je $\sigma = \frac{1}{\alpha}\varepsilon lnN$ i $\varepsilon \leq C_0 N^{-1}$, kao u opštem slučaju za singularno perturbovane probleme, to nam osigurava da slojni izraz $e^{\frac{-x}{\varepsilon}}$ je manji od $N^{\frac{1}{\alpha}}$ na $[\sigma, 1]$.

Neka je naš diskretizacioni parametar N ceo broj $N \geq 4$. Razmatraćemo mrežu $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$, kao u [10]. Dakle, za tranzitivnu tačku biramo $x_{\frac{N}{2}}$ kao što Šiškin radi, odnosno $x_{\frac{N}{2}} = \sigma$. Tačke u $[x_{\frac{N}{2}}, 1]$ su na jednakom rastojanju. Na $[0, x_{\frac{N}{2}}]$ našu mrežu zadajemo generativnom funkcijom mreže φ, sa $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(\frac{1}{2}) = lnN$, koja je neprekidna, monotona svuda i po delovima neprekidno diferencijabilna.

Tada je

$$\Omega_\varepsilon^N = x_i | x_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\varepsilon\varphi(t_i), & za \quad t_i = \frac{i}{N} \quad i = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}, \\ 1 - (1 - \dfrac{1}{\alpha}\varepsilon lnN)\dfrac{2(N-i)}{N}, & za \quad i = \frac{N}{2} + 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.2}$$

gde je σ tranziciona tačka definisana u (2.1), a Ω_ε^N je mreža Šiškinovog tipa.

Kako postoje samo dva različita koraka, kao pogodnost smo dali

$$h_i = \begin{cases} h, & 1 \leq i \leq \frac{N}{2}, \\ H, & \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

Tako da je h fin, a H grub korak mreže.

Definišemo karakterističnu funkciju mreže ψ sa

$$\varphi = -\ln \psi.$$

Ova funkcija je monotono opadajuća sa $\psi(0) = 1$ i $\psi(\frac{1}{2}) = N^{-1}$. Primeri karakterističnih funkcija mreže ψ su

standardna Šiškinova mreža :

$$\psi_S(t) = e^{-2(lnN)t} \tag{2.3}$$

Bahvalov-Šiškinova mreža:

$$\psi_{BS}(t) = 1 - 2(1 - N^{-1})t. \tag{2.4}$$

Još primera karakterističnih funkcija mreža Šiškinovog tipa mogu se naći u [6].

Može se po potrebi pretpostaviti da postoji konstanta C_1 takva da

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} \varphi'(t) \leq C_1 N \ (\Leftrightarrow \max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \leq C_1 N) \tag{2.5}$$

Oba i ψ_S i ψ_{BS} zadovoljavaju ovaj uslov.
Sledeći rezultati za korak veličine h_i će biti korišćeni

$$h_i = \frac{1}{\alpha}\varepsilon(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \leq \frac{1}{\alpha}\varepsilon N^{-1} \max_{[t_{i-1},t_i]} \varphi'(t). \tag{2.6}$$

Korišćenjem (2.5), dobijamo

$$h_i \leq C\varepsilon \quad i \quad e^{\frac{h_i}{\varepsilon}} \leq C \quad za \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}. \tag{2.7}$$

Iz [7] i [10] je poznato da osobine ψ za posebne veličine $max|\psi|$ su od neposrednog značaja za ponašanje uniformne konvergencije nekih numeričkih postupaka. Za dve karakteristične funkcije mreže date u (2.3) i (2.4) imamo

$$max|\psi_S'| \leq ClnN \quad i \quad max|\psi_{BS}'| \leq C \tag{2.8}$$

Iz prethodnog zaključujemo da važi

$$h \leq C\varepsilon N^{-1} max|\psi'| \tag{2.9}$$

i

$$H \leq CN^{-1}. \tag{2.10}$$

Glava 3

Numeričko rešenje singularno perturbovanog problema sa Robinovim uslovima

Razmatramo jednodimenzioni singularno-perturbovani problem sa *Robinovim* graničnim uslovima. Pokazujemo, kako teorijski tako i numeričkim eksperimentima, da numerička rešenja dobijena korišćenjem *upwind* konačne diferencne šeme na Šiškinovim mrežama su uniformno konvergentno u odnosu na perturbacioni parametar.

Razmatramo singularno-perturbovani problem

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon u''_\varepsilon + a(x)u'_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega = (0,1) \tag{3.1}$$

sa *Robinovim* graničnim uslovima

$$\beta_1 u_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon u'_\varepsilon(0) = A \tag{3.2}$$

$$\gamma_1 u_\varepsilon(1) + \gamma_2 u'_\varepsilon(1) = B \tag{3.3}$$

gde je

$$\varepsilon \in (0,1], \quad a, f \in C^2(\Omega), \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad x \in \bar{\Omega}$$

$$\beta_1, \beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \quad \gamma_2 \geq 0 \quad i \quad \gamma_1 > 0.$$

Tražimo numerički postupak, koji je uniformno konvergentan u odnosu na perturbacioni parametar ε. Dobar pregled literature o numeričkim metodama za singularno perturbovane probleme može se naći u [11] .

U [4], problam (3.1)-(3.3) je analiziran sa *Dirihleovim uslovima*:

$$\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_1 = 1 \quad i \quad \gamma_2 = 0$$

i sa *Nojmanovim uslovima*:

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = -1,\ \gamma_1 = 1 \quad i \quad \gamma_2 = 0.$$

Prisustvo parametra ε koji množi drugi izvod, ima za posledicu pojavu graničnog sloja u okolini $x = 0$. Granični sloj predstavlja oblast domena, u kom se rešenje naglo menja. Iz tog razloga ćemo koristiti slojno adaptivne mreže kao mreže diskretizacije singularno perturbovanog problema (3.1)-(3.2).

Doolan i saradnici u [3] dobijaju uniformno rešenje u ε za problem (3.1)-(3.3), koristeći fitovane operatorske metode na uniformnim mrežama. *Andreyev* i *Savin* u [1] rešavaju sličan problem koji ima *Robinov* granični uslov samo na levoj granici. Numerički postupak se sastoji od modifikovane *Samarskii* šeme sa Šiškinovom mrežom, a dokazana je uniformna konvergencija reda $N^{-2}ln^2N$.

Pri izvođenju svih ocena grešaka koristićemo L^∞ normu

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

3.1 Neprekidan problem

Prvo ćemo izvesti a priori granice za rešenje i njegove izvode. Diferencni operator L_ε zadovoljava sledeći **princip minimuma**.

3.1.1 Teorema *Neka je L_ε diferencni operator definisan u (3.1) i $v \in C^2(\Omega)$. Ako*

$$\beta_1 v(0) - \beta_2 \varepsilon v'(0) \geq 0, \quad \gamma_1 v(1) + \gamma_2 v'(1) \geq 0 \quad i \quad L_\varepsilon v \leq 0 \quad za \quad sve \quad x \in \Omega,$$

onda

$$v(x) \geq 0 \quad za \quad sve \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Dokaz. Počinjemo sa pretpostavkom da postoji tačka $p \in \bar{\Omega}$ tako da $v(p) = \min_{\bar{\Omega}} v(x) < 0$. Primetimo da naša hipoteza implicira $p \neq 1$.

Razmatramo tri slučaja : $\gamma_2 = 0$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{\alpha}{\varepsilon}$ i $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \leq \frac{\alpha}{\varepsilon}$.

Ako je $\gamma_2 = 0$, sledi $v(1) \geq 0$. Definišimo pomoćnu funkciju $w(x) = v(x)e^{\frac{\alpha x}{2\varepsilon}}$. Biramo tačku $q \in \bar{\Omega}$, tako da $w(q) = \min_{\bar{\Omega}} w(x) < 0$ i primetimo da je $q \neq 1$. Sada pretpostavimo da $q \in \Omega$, onda $w'(q) = 0$ i $w''(q) \geq 0$, tada $L_\varepsilon v(q) > 0$, što je u kontradikciji sa našom hipotezom. Dakle jedina je mogućnost da je $q = 0$, što znači da je $w'(0) \geq 0$ i $w(0) < 0$. Koristeći pomoćnu funkciju zaključujemo da $v(0) < 0$ i $v'(0) > 0$, što je takođe kontradikcija.

Ako je $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{\alpha}{\varepsilon}$, uzimamo u obzir opet pomoćnu funkciju $w(x) = v(x)e^{\frac{\alpha x}{2\varepsilon}}$. Biramo q da minimizira w. Ponovo imamo u vidu da je $q \neq 1$, jer ako je $q = 1$, onda je minimum $w(x)$ u $x = 1$, tada je $w(1) < 0$ i $w'(1) \leq 0$. Odavde sledi da je $v'(1) \leq -\frac{\alpha}{2\varepsilon} v(1)$ i iz $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{\alpha}{2\varepsilon}$ imamo $v'(1) < -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} v(1)$ što krši našu hipotezu. Ako $q \in \Omega$ onda $L_\varepsilon v(q) > 0$ što je u kontradikciji sa našom hipotezom, onda je još jednom jedina mogućnost da w postane minimum u krajnjoj tački $x = 0$. Analognom analizom kao u prvom slučaju dolazimo do kontradikcije.

Konačno, ako je $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \leq \frac{\alpha}{\varepsilon}$, definišemo pomoćnu funkciju $w(x) = v(x)e^{\frac{\gamma_1 x}{2\gamma_2}}$. Biramo q kao ranije i imamo u vidu da je, kao u poslednjem slučaju, $q \neq 1$. Ako $q \in \Omega$, onda $L_\varepsilon v(q) > 0$ što daje kontradikciju sa našom hipotezom. Tada jedina preostala mogućnost je $q = 0$, što se može isključiti kao i ranije. $\square$

Sada ćemo izračunati a priori **granice za tačno rešenje i njegove izvode** za problem (3.1)-(3.3).

3.1.2 Lema *Rešenje u_ε problema (3.1)-(3.3) zadovoljava*

$$\|u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{\alpha}(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1})\|f\| + \frac{C}{\beta_1+\beta_2\alpha}|\beta_1 u_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon u_\varepsilon'(0)| + \frac{1}{\gamma_1}|\gamma_1 u_\varepsilon(1) + \gamma_2 u_\varepsilon'(1)|.$$

Dokaz. Razmatrajmo funkcije

$$\psi^{\pm}(x) = \frac{|\beta_1 u_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon u_\varepsilon'(0)|}{(\beta_1+\beta_2\alpha) - \beta_1(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1\varepsilon})e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}}}\left(e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} - \big(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1\varepsilon}\big)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}}\right)$$
$$+\frac{1}{\gamma_1}|\gamma_1 u_\varepsilon(1) + \gamma_2 u_\varepsilon'(1)| + \frac{1}{\alpha}\|f\|\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - x\right) \pm u_\varepsilon(x).$$

Napominjemo da je $\beta_1\psi^{\pm}(0) - \beta_2\varepsilon(\psi^{\pm})'(0) \geq 0$ i $\gamma_1\psi^{\pm}(1) + \gamma_2(\psi^{\pm})'(1) \geq 0$, štaviše za $x \in \Omega$ imamo $L_\varepsilon\psi^{\pm}(x) \leq 0$. Princip minimuma iz Teoreme 3.1.1 sada daje $\psi^{\pm}(x) \geq 0$ za sve $x \in \Omega$, odakle dobijamo traženi rezultat. □

Granice za izvode su date u sledećoj lemi.

3.1.3 Lema *Izvodi $u_\varepsilon^{(k)}$ rešenja u_ε problema (3.2)-(3.3) zadovoljavaju ocene*

$$\|u_\varepsilon^{(k)}\| \leq C\varepsilon^{-k} max\{\|f\|, \|u_\varepsilon\|\}, \quad k = 1, 2,$$

$$\|u_\varepsilon^{(3)}\| \leq C\varepsilon^{-3} max\{\|f\|, \|f'\|, \|u_\varepsilon\|\},$$

gde C zavisi samo od $\|a\|$ i $\|a'\|$.

Dokaz. Dokažimo datu lemu. Integraleći po delovima dobijamo

$$\int_0^x a u_\varepsilon'(t)dt = a u_\varepsilon|_0^x - \int_0^x (a' u_\varepsilon)(t)dt$$

i takođe

$$\left|\int_0^x (f - a u_\varepsilon')(t)dt\right| \leq \|f\| + C\|u_\varepsilon\| \tag{3.4}$$

gde C zavisi od $\|a\|$ i $\|a'\|$. Iz teoreme srednje vrednosti, postoji tačka $z \in (0, \varepsilon)$ tako da važi

$$u_\varepsilon'(z) = \frac{u_\varepsilon(\varepsilon) - u_\varepsilon(0)}{\varepsilon}$$

i odatle je

$$|\varepsilon u_\varepsilon'(z)| \leq 2\|u_\varepsilon\|. \tag{3.5}$$

Integraljenjem diferencijalne jednačine (3.1) dobijamo, za sve $x \in \Omega$

$$\varepsilon u_\varepsilon'(x) - \varepsilon u_\varepsilon'(0) = \int_0^x (f - au_\varepsilon')(t)dt. \tag{3.6}$$

Iz (3.4)-(3.6), sledi

$$|\varepsilon u_\varepsilon'(0)| \leq \|f\| + C\|u_\varepsilon\|.$$

Iz (3.6) i $x = z$ dobijamo

$$|\varepsilon u_\varepsilon'(x)| \leq \|f\| + C\|u_\varepsilon\|$$

za sve $x \in \Omega$, pa sledi traženi rezultat za $k = 1$. Dalje iz diferencijalne jednačine (3.1), imamo da je

$$\varepsilon u_\varepsilon'' = f - au_\varepsilon' \quad i \quad \varepsilon u_\varepsilon''' = (f - au_\varepsilon')'$$

odakle sukcesivno dobijamo tražene ocene za drugi i treći izvod. $\square$

3.1.1 Dekompozicija rešenja

Naš cilj je da izvedemo procenu ε-uniformne greške, za koju tržimo oštrije ocene izvoda rešenja. To se postiže korišćenjem sledeće dekompozicije rešenja na glatku i singularnu komponentu

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$$

gde je v_ε rešenje problema

$$L_\varepsilon v_\varepsilon = f \tag{3.7}$$

sa graničnim uslovima

$$\beta_1 v_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon v'_\varepsilon(0) = \beta_1 v_0(0) - \beta_2 \varepsilon v'_0(0) + \varepsilon(\beta_1 v_1(0) - \beta_2 \varepsilon v'_1(0)), \tag{3.8}$$

$$\gamma_1 v_\varepsilon(1) + \gamma_2 v'_\varepsilon(1) = \gamma_1 u_\varepsilon(1) + \gamma_2 u'_\varepsilon(1), \tag{3.9}$$

gde

$$v_\varepsilon = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 \tag{3.10}$$

i v_0, v_1 i v_2 su definisani, respektivno, da budu rešenja problema

$$a v'_0 = f, \quad \gamma_1 v_0(1) + \gamma_2 v'_0(1) = \gamma_1 u_\varepsilon(1) + \gamma_2 u'_\varepsilon(1) \tag{3.11}$$

$$a v'_1 = -v''_0, \quad \gamma_1 v_1(1) + \gamma_2 v'_1(1) = 0, \tag{3.12}$$

$$L_\varepsilon v_2 = -v''_1, \quad \beta_1 v_2(0) - \beta_2 \varepsilon v'_2(0) = 0, \quad \gamma_1 v_2(1) + \gamma_2 v'_2(1) = 0. \tag{3.13}$$

Napominjemo da v_0 i v_1 ne zavise od ε, i v_2 je rešenja problema sličnog onom koji definiše u_ε. Takođe imamo $v''_1 \in C^{(0)}(\Omega)$. Singularna komponenta w_ε je rešenje homogenog problema

$$L_\varepsilon w_\varepsilon = 0 \tag{3.14}$$

$$\beta_1 w_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon w'_\varepsilon(0) = \beta_1 u_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon u'_\varepsilon(0) - (\beta_1 v_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon v'_\varepsilon(0)), \tag{3.15}$$

$$\gamma_1 w_\varepsilon(1) + \gamma_2 w'_\varepsilon(1) = 0. \tag{3.16}$$

□

U narednoj lemi dobijamo **granice komponenti rešenja i njihovih izvoda**.

3.1.4 Lema *Rešenje u_ε problema (3.1)-(3.3) može se predstaviti kao*

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon,$$

gde v_ε i w_ε su definisani u (3.7),(3.8),(3.9), (3.14)-(3.16), respektivno. Pored toga, komponente v_ε, w_ε i njihovi izvodi zadovoljavaju granice:

$$\|v_\varepsilon^{(k)}\| \leq C(1 + \varepsilon^{2-k}), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$|w_\varepsilon^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k} e^{\frac{-\alpha x}{\varepsilon}} \quad za \quad sve \quad x \in \bar{\Omega}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dokaz. Konstatujući definicije u (3.10) i (3.11)-(3.13) imamo $\|v_2\| \leq C$, i tako

$$\|v_\varepsilon\| \leq C(1 + \varepsilon^2). \tag{3.17}$$

v_0 i v_1 su nezavisni od ε kako je navedeno ranije. Otuda da bismo dobili granice izvoda v_ε, treba razmotriti v_2. Kako je v_2 rešenje problema sličnom (3.1) sa u_ε, njegove ocene izvoda slede iz Leme 3.1.3. Koristeći ovo sa ocenom (3.17), dakle imamo

$$\|v_\varepsilon^{(k)}\| \leq C(1 + \varepsilon^{2-k}), \quad k = 0, 1, 2.$$

Za $k = 3$, dokaz izvodimo korišćenjem diferencijalne jednačine (3.7) i dobijamo

$$\varepsilon v''_\varepsilon = f - a v'_\varepsilon \quad i \quad \varepsilon v'''_\varepsilon = (f - a v'_\varepsilon)',$$

što dovodi do ocene $\|v_\varepsilon^{(3)}\| \leq C\varepsilon^{-1}$. Naš dokaz za v_ε i njegove izvode je ovim kompletiran.
Za granice od w_ε i njegovih izvoda razmatramo funkciju

$$\psi^{\pm}(x) = C\left[\frac{e^{\frac{-\alpha x}{\varepsilon}} - (1 - \frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1\varepsilon})e^{\frac{-\alpha}{\varepsilon}}}{1 - (1 - \frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1\varepsilon})e^{\frac{-\alpha}{\varepsilon}}}\right] \pm w_\varepsilon(x).$$

Napominjemo da je $\beta_1\psi^{\pm}(0) - \beta_2\varepsilon(\psi^{\pm})'(0) \geq 0,\ \gamma_1\psi^{\pm}(1) + \gamma_2(\psi^{\pm})'(1) = 0$ i $L_\varepsilon\psi^{\pm} \leq 0$, tako da primenom principa minimuma u Teoremi 3.1.1 imamo $\psi^{\pm} \geq 0$ i potreban rezultat sledi, odnosno,

$$|w_\varepsilon(x)| \leq Ce^{\frac{-\alpha x}{\varepsilon}} \quad za \quad sve \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Granice izvoda od w_ε se izvode kao u [4]. □

3.2 Diskretan problem

Sada razmatramo diskretizaciju problema (3.1)-(3.3). Koristimo *upwind* konačnu diferencnu šemu

$$L_\varepsilon^N U_\varepsilon \equiv \varepsilon\delta^2 U_\varepsilon + a(x_i)D^+ U_\varepsilon = f(x_i), \quad x_i \in \Omega_\varepsilon^N, \tag{3.18}$$

$$\beta_1 U_\varepsilon(x_0) - \beta_2 \varepsilon D^+ U_\varepsilon(x_0) = A, \tag{3.19}$$

$$\gamma_1 U_\varepsilon(x_N) + \gamma_2 D^- U_\varepsilon(x_N) = B, \tag{3.20}$$

gde

$$D^+ V(x_i) \equiv \frac{V(x_{i+1}) - V(x_i)}{h_{i+1}},$$

$$\delta^2 V(x_i) \equiv \frac{1}{\bar{h}_i}\left(\frac{V(x_{i+1}) - V(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{V(x_i) - V(x_{i-1})}{h_i}\right),$$

$$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

za proizvoljnu funkciju mreže V, i gde je mreža diskretizacije Ω_ε^N, je data u (2.2).

3.2.1 Teorema *Neka je L_ε^N upwind konačano diferencni operator definisan u (3.18)-(3.20) i neka je Ω^N proizvoljna mreža od $N+1$ tačaka mreže. Ako je V bilo koja funkcija mreže definisana na ovoj mreži tako da*

$$\beta_1 V(x_0) - \beta_2 \varepsilon D^+ V(x_0) \geq 0, \quad \gamma_1 V(x_N) + \gamma_2 D^- V(x_N) \geq 0 \quad i \quad L_\varepsilon^N V \leq 0,$$

tada

$$V(x_i) \geq 0 \quad za \quad svako \quad x_i \in \Omega^N.$$

Dokaz. Počinjemo razmatranjem $\beta_2 = 0$, tako da uslov s leva počinje sa $V(x_0) \geq 0$. Neka je $V_k = min_i\{V_i\} < 0$ tada $k \neq 0$ što krši našu hipotezu. Otuda V_k je minimalna vrednost, $D^+ V_k \geq 0$ i $\delta^2 V_k \geq 0$. Da se izbegne kontradikcija moramo imati $V_k = V_{k-1} = V_{k+1} < 0$. Ponavljanje ovog argumenta dovodi do $V_0 < 0$ što je kontradikcija.

Zatim razmatramo situaciju kada je $\beta_2 \neq 0$. Neka je $W_i = (1 + \frac{h_i\beta_1}{\varepsilon\beta_2})V(x_i)$. Dalje, neka je $W_k = min_i\{W_i\}$. Sada pretpostavimo da je $V_k < 0$ i otuda $W_k < 0$. Imajmo u vidu da, ako $k = N$, onda $D^-V_N \leq 0$, takođe $V_N < 0$ što je u kontradikciji sa našom hipotezom. Otuda, $k \neq N$. Sada je potrebno razmotriti dve preostale mogućnosti:

Prvo, pretpostavimo da je $k = 0$ onda $W_0 = min_i\{W_i\} < 0$. Koristeći uslov s leva imamo $V(x_1) \leq W_0$, i konstatujući da $W_0 = min_i\{W_i\} < 0$ jedina mogućnost je $W_1 = W_0$. Sada koristimo uslov diferencnog operatora $L_\varepsilon^N V_1 \leq 0$ i $L_\varepsilon^N W_1 \leq 0$, što dovodi do $D^+W_1 \leq 0$ i $W_2 \leq W_1$, što za uzvrat podrazumeva da je $W_2 = W_1 = W_0$. Primenom istih argumenata u više navrata konačno zaključujemo da $W_N = W_0$ što znači da $V(x_N) < 0$. Iz gornje analize sledi da $D^+V(x_1) = 0$. Ponavljanje ovog procesa dovodi nas do $D^+V(x_{N-1}) = 0$, što zauzvrat podrazumeva da $D^-V(x_N) = 0$. Kombinovanjem ovih rezultata imamo $\gamma_1 V(x_N) + \gamma_2 D^-V(x_N) < 0$, što je u kontradikciji sa hipotezom.

Napokon, pretpostavimo $0 < k < N$. Neka je $V_k = min_i\{V_i\}$ i da je $V_k < 0$. Iz V_k minimalno, sledi $D^+V_k \geq 0$ i $\delta^2 V_k \geq 0$, što zajedno sa $L_\varepsilon^N V \leq 0$, daje da važi $D^+V_k = 0$. Ovi rezultati su tačni za $0 \leq k \leq N$, dakle $\gamma_1 V(x_N) - \gamma_2 D^-V(x_N) \leq 0$ što je očigledno kontradikcija. Time je dokaz kompletiran. $\square$

Sledeća lema će biti od koristi kasnije.

3.2.2 Lema *Rešenje problema sa konstantnim koeficijentima*

$$\varepsilon\delta^2\Phi_i + \omega D^+\Phi_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \tag{3.21}$$

gde je $\omega > 0$, sa graničnim uslovima

$$\beta_1\Phi_0 - \beta_2\varepsilon D^+\Phi_0 = 1, \quad \gamma_1\Phi_N + \gamma_2 D^-\Phi_N = 0 \tag{3.22}$$

na uniformnoj mreži ili na mreži Šiškinovog tipa Ω_ε^N zadovoljava

$$D^+\Phi_i \leq 0 \quad za \quad sve \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Dokaz. Treba da razmotrimo odvojeno slučajeve $\sigma = \frac{1}{2}$ i $\sigma = \frac{\varepsilon}{\omega} lnN$.

Neka je $\sigma = \frac{1}{2}$. Tada je to slučaj uniformne mreže, pa imamo

$$\Phi_i = \frac{\lambda^{N-i} + \frac{\omega\gamma_2}{\gamma_1\varepsilon} - 1}{[\beta_1(\lambda^N + \frac{\omega\gamma_2}{\gamma_1\varepsilon} - 1) + \beta_2\omega\lambda^{N-1}]}, \quad \lambda = 1 + \frac{\omega h}{\varepsilon} \tag{3.23}$$

i dakle

$$\begin{aligned} D^+\Phi_i &= \frac{1}{h}\frac{\lambda^{N-i-1}(1-\lambda)}{[\beta_1(\lambda^N + \frac{\omega\gamma_2}{\gamma_1\varepsilon} + \beta_2\omega\lambda^{N-1}]} \\ &= \frac{1}{h}\frac{-\lambda^{N-i-1}\frac{\omega h}{\varepsilon}}{[\beta_1(\lambda^N + \frac{\omega\gamma_2}{\gamma_1\varepsilon} + \beta_2\omega\lambda^{N-1}]} \\ &= -\frac{\omega\lambda^{N-i-1}}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^N + \frac{\omega\gamma_2}{\gamma_1\varepsilon} + \beta_2\omega\lambda^{N-1}]}. \end{aligned}$$

Dakle važi

$$D^+\Phi_i = -\frac{\omega\lambda^{N-i-1}}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^N + \frac{\omega\gamma_2}{\gamma_1\varepsilon} + \beta_2\omega\lambda^{N-1}]} \leq 0. \tag{3.24}$$

Neka je sada $\sigma = \frac{\varepsilon}{\omega} lnN$, počinjemo konstatujući da je rešenje problema (3.21) i (3.22)

$$\Phi_i = \begin{cases} \Phi_{\frac{N}{2}} + (1 - \beta_1\Phi_{\frac{N}{2}})\chi_i, & za \quad i \leq \frac{N}{2}, \\ \Phi_{\frac{N}{2}}\zeta_i, & i \geq \frac{N}{2} + 1. \end{cases} \tag{3.25}$$

Pri čemu je

$$\chi_i = \frac{\lambda^{\frac{N}{2}-i} - 1}{\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}} - 1) + \beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}}, \quad \lambda = 1 + \frac{\omega h}{\varepsilon} \tag{3.26}$$

$$\zeta_i = \frac{\Lambda^{N-i} + \frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon} - 1}{\Lambda^{\frac{N}{2}} + \frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon} - 1}, \quad \Lambda = 1 + \frac{\omega H}{\varepsilon} \tag{3.27}$$

i $\Phi_{\frac{N}{2}}$ zadovoljava

$$(\varepsilon\delta^2 + \omega D^+)\Phi_{\frac{N}{2}} = 0. \tag{3.28}$$

Važi

$$\begin{aligned}
\zeta_{\frac{N}{2}+1} &= \frac{\Lambda^{N-\frac{N}{2}-1} + \frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon} - 1}{\Lambda^{\frac{N}{2}} + \frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon} - 1} \\
&= \frac{\Lambda^{\frac{N}{2}-1} + \frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon} - 1}{\Lambda^{\frac{N}{2}} + \frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon} - 1},
\end{aligned}$$

odakle, imajući na umu $\Lambda^{\frac{N}{2}} > \Lambda^{\frac{N}{2}-1}$, sledi

$$\zeta_{\frac{N}{2}+1} < 1. \tag{3.29}$$

Takođe, imamo da važi

$$\begin{aligned}
\chi_{\frac{N}{2}-1} &= \frac{\lambda^{\frac{N}{2}-\frac{N}{2}+1} - 1}{\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}} - 1) + \beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}} \\
&= \frac{\lambda - 1}{\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}} - 1) + \beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}} \\
&= \frac{\frac{\omega h}{\varepsilon}}{\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}} - 1) + \beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}} \\
&= \frac{\omega h}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}} - 1) + \beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}]}.
\end{aligned}$$

Dakle, važi

$$\chi_{\frac{N}{2}-1} = \frac{\omega h}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}} - 1) + \beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1} - 1]} \geq 0. \tag{3.30}$$

Iz (3.28), i konstatujući (3.30) i (3.29) imamo

$$\Phi_{\frac{N}{2}} = \frac{\varepsilon N\chi_{\frac{N}{2}-1}}{\frac{h}{H}(\varepsilon N + \omega)(1 - \zeta_{\frac{N}{2}+1}) + \varepsilon N\beta_1\chi_{\frac{N}{2}-1}} \geq 0. \tag{3.31}$$

Takođe,

$$
\begin{aligned}
1-\beta_1\Phi_{\frac{N}{2}} &= 1-\beta_1\frac{\varepsilon N\chi_{\frac{N}{2}-1}}{\frac{h}{H}(\varepsilon N+\omega)(1-\zeta_{\frac{N}{2}+1})+\varepsilon N\beta_1\chi_{\frac{N}{2}-1}}\\
&= \frac{\frac{h}{H}(\varepsilon N+\omega)(1-\zeta_{\frac{N}{2}+1})+\varepsilon N\beta_1\chi_{\frac{N}{2}-1}-\beta_1\varepsilon N\chi_{\frac{N}{2}-1}}{\frac{h}{H}(\varepsilon N+\omega)(1-\zeta_{\frac{N}{2}+1})+\varepsilon N\beta_1\chi_{\frac{N}{2}-1}}\\
&= \frac{\frac{h}{H}(\varepsilon N+\omega)(1-\zeta_{\frac{N}{2}+1})}{\frac{h}{H}(\varepsilon N+\omega)(1-\zeta_{\frac{N}{2}+1})+\varepsilon N\beta_1\chi_{\frac{N}{2}-1}},
\end{aligned}
$$

dakle važi

$$
1-\beta_1\Phi_{\frac{N}{2}} = \frac{\frac{h}{H}(\varepsilon N+\omega)(1-\zeta_{\frac{N}{2}+1})}{\frac{h}{H}(\varepsilon N+\omega)(1-\zeta_{\frac{N}{2}+1})+\varepsilon N\beta_1\chi_{\frac{N}{2}-1}} \geq 0. \tag{3.32}
$$

Primenom diferencnog operatora D^+,u (3.26) imamo

$$
\begin{aligned}
D^+\chi_i &= \frac{1}{h}\frac{\lambda^{\frac{N}{2}-i-1}(1-\lambda)}{\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}}\\
&= -\frac{\lambda^{\frac{N}{2}-i-1}\frac{\omega h}{\varepsilon}}{h[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}]}\\
&= -\frac{\lambda^{\frac{N}{2}-i-1}\omega}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}]}.
\end{aligned}
$$

Dakle, važi

$$
D^+\chi_i = -\frac{\lambda^{\frac{N}{2}-i-1}\omega}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}]} \leq 0, \quad 1\leq i<\frac{N}{2}. \tag{3.33}
$$

Pored toga imajmo u vidu

$$
\begin{aligned}
D^-\chi_{\frac{N}{2}} &= -\frac{1}{h}\frac{\lambda^{-1}(\lambda-1)}{\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}}\\
&= -\frac{\lambda^{-1}\frac{\omega h}{\varepsilon}}{h[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}]}\\
&= -\frac{\lambda^{-1}\omega}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}]}.
\end{aligned}
$$

Dobili smo

$$D^-\chi_{\frac{N}{2}} = -\frac{\lambda^{-1}\omega}{\varepsilon[\beta_1(\lambda^{\frac{N}{2}}-1)+\beta_2\omega\lambda^{\frac{N}{2}-1}]} \leq 0. \tag{3.34}$$

Osim toga primenom diferencnog operatora D^+ u (3.27) imamo

$$\begin{aligned} D^+\zeta_i &= \frac{1}{H}\frac{\Lambda^{N-i-1}(1-\Lambda)}{\Lambda^{\frac{N}{2}}+\frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon}-1} \\ &= -\frac{\Lambda^{N-i-1}\frac{\omega H}{\varepsilon}}{H[\Lambda^{\frac{N}{2}}+\frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon}-1]} \\ &= -\frac{\Lambda^{N-i-1}\omega}{\varepsilon[\Lambda^{\frac{N}{2}}+\frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon}-1]}, \end{aligned}$$

sledi da važi

$$D^+\zeta_i = -\frac{\omega\Lambda^{N-i-1}}{\varepsilon[\Lambda^{\frac{N}{2}}+\frac{\gamma_2\omega}{\gamma_1\varepsilon}-1]} \leq 0, \quad i \geq \frac{N}{2}. \tag{3.35}$$

Kombinovanjem (3.31)-(3.35) sledi željeni rezultat. □

3.2.3 Posledica *Rešenje problema sa konstantnim koeficijentima (3.21) i (3.22) je ograničeno sa*

$$|\Phi_i| \leq C$$

gde je C konstanta nezavisna od ε.

Diskretni princip minimum u Teoremi 3.2.1 dovodi do sledećih **ocena rešenja U_ε diskretnog analogona problema** (3.1)-(3.3).

3.2.4 Lema *Rešenje U_ε koje je dobijeno primenom numeričkog postupka (3.18)-(3.20) i (2.2)problema (3.1)-(3.3) je ograničeno sa*

$$|U_\varepsilon(x_i)| \leq \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\|f\|+C|\beta_1U_\varepsilon(0)-\beta_2\varepsilon D^+U_\varepsilon(0)|+\frac{1}{\gamma_1}|\gamma_1U_\varepsilon(1)+\gamma_2D^-U_\varepsilon(1)|,$$

gde konstanta C ne zavisi od ε.

Dokaz. Razmatramo dve funkcije mreže

$$\psi^{\pm}(x_i) = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - x_i\right)\|f\| + |\beta_1 U_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon D^+ U_\varepsilon(0)|\Phi_i$$
$$+\frac{1}{\gamma_1}|\gamma_1 U_\varepsilon(1) + \gamma_2 D^- U_\varepsilon(1)| \pm U_\varepsilon(x_i),$$

gde je Φ_i rešenja problema sa konstantnim koeficijentima

$$\varepsilon\delta^2\Phi_i + \alpha D^+\Phi_i = 0$$

sa graničnim uslovima

$$\beta_1\Phi_0 - \beta_2\varepsilon D^+\Phi_0 = 1, \quad \gamma_1\Phi_N + \gamma_2 D^-\Phi_N = 0.$$

Upotrebom leme (3.2.2) i podsećanjem da je $a \geq \alpha$, dobijamo $L_\varepsilon^N\psi^{\pm}(x_i) \leq 0$. Štaviše, $\beta_1\psi^{\pm}(0) - \beta_2\varepsilon D^+\psi^{\pm}(0) \geq 0$ i $\gamma_1\psi^{\pm}(1) + \gamma_2 D^-\psi^{\pm}(1) \geq 0$. Tako sada važi princip minimuma, pa imamo traženi rezultat. □

Analogno neprekidnom slučaju, **diskretno rešenje** U_ε **može se dekomponovati** u sumu

$$U_\varepsilon = V_\varepsilon + W_\varepsilon,$$

gde su V_ε i W_ε, respektivno, rešenje problema

$$L_\varepsilon^N V_\varepsilon = f(x_i), \quad x_i \in \Omega_\varepsilon^N,$$

$$\beta_1 V_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon D^+ V_\varepsilon(0) = \beta_1 v_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon v_\varepsilon'(0), \tag{3.36}$$

$$\gamma_1 V_\varepsilon(1) + \gamma_2 D^- V_\varepsilon(1) = \gamma_1 v_\varepsilon(1) + \gamma_2 v_\varepsilon'(1)$$

$$L_\varepsilon^N W_\varepsilon = 0, \quad x_i \in \Omega_\varepsilon^N,$$

$$\beta_1 W_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon D^+ W_\varepsilon(0) = \beta_1 w_\varepsilon(0) - \beta_2 \varepsilon w_\varepsilon'(0) \tag{3.37}$$

$$\gamma_1 W_\varepsilon(1) + \gamma_2 D^- W_\varepsilon(1) = 0.$$

3.3 Ocene greške rešenja

Dobijamo posebne ocene greški za svaku komponentu numeričkog rešenja.

3.3.1 Lema *Greška u glatkim komponentama numeričkog rešenja je ograničena na sledeći način*

$$|(V_\varepsilon - v_\varepsilon)(x_i)| \leq CN^{-1} \quad za \quad sve \quad x_i \in \bar{\Omega}_\varepsilon^N,$$

gde je v_ε rešenje (3.7) i (3.8)-(3.9) i V_ε je rešenje (3.36).

Dokaz. Razmatramo greške lokalnog odsecanja

$$L_\varepsilon^N(V_\varepsilon - v_\varepsilon) = (L_\varepsilon - L_\varepsilon^N)v_\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{d^2}{dx^2} - \delta^2\right)v_\varepsilon + a\left(\frac{d}{dx} - D^+\right)v_\varepsilon.$$

Zatim, po standarnoj oceni greške lokalnog odsecanja [8] i Lemi 3.1.4 imamo

$$|L_\varepsilon^N(V_\varepsilon - v_\varepsilon)(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}(x_{i+1} - x_{i-1})\|v_\varepsilon^{(3)}\| + \frac{a(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)\|v_\varepsilon^{(2)}\| \leq CN^{-1}.$$

Koristimo funkcije mreže

$$\psi^\pm(x_i) = CN^{-1}\left(\Phi_i + \frac{1}{\gamma_1}\right) \pm (V_\varepsilon - v_\varepsilon)(x_i),$$

gde je Φ_i rešenje problema sa konstantnim koeficijentima

$$\varepsilon\delta^2\Phi_i + \alpha D^+\Phi_i = 0, \quad \beta_1\Phi_0 - \beta_2\varepsilon D^+\Phi_0 = 1, \quad \gamma_1\Phi_N + \gamma_2 D^-\Phi_N = 0.$$

Nejednakosti

$$|\beta_1(V_\varepsilon - v_\varepsilon)(0) - \beta_2\varepsilon D^+(V_\varepsilon - v_\varepsilon)(0)| \leq CN^{-1},$$

$$|\gamma_1(V_\varepsilon - v_\varepsilon)(1) + \gamma_2 D^-(V_\varepsilon - v_\varepsilon)(1)| \leq CN^{-1},$$

slede odmah iz (3.36) i Leme 3.1.4.

Tako koristeći Lemu 3.2.2 sa $\omega = \alpha$ možemo izabrati C dovoljno veliko tako da $\beta_1\psi_0^\pm - \beta_2\varepsilon D^+\psi_0^\pm \geq 0$, $\gamma_1\psi_N^\pm + \gamma_2 D^-\psi_N^\pm \geq 0$ i $L_\varepsilon^N\psi^\pm(x_i) \leq 0$. Dakle princip minimuma važi i sledi traženi rezultat. $\square$

3.3.2 Lema *Greška u singularnoj komponenti numeričkog rešenja je ograničena sa*

$$|(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i)| \le CN^{-1}max|\psi'|, \quad za \quad sve \quad x_i \in \bar{\Omega}_\varepsilon^N,$$

gde je w_ε rešenje (3.14)-(3.16) i W_ε je rešenje (3.37).

Dokaz. Prvo imajmo na umu nejednakosti

$$|\beta_1(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(0) - \beta_2\varepsilon D^+(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(0)| \le CN^{-1}max|\psi'| \tag{3.38}$$

$$|\gamma_1(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(1) + \gamma_2 D^-(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(1)| \le CN^{-1}. \tag{3.39}$$

Nejednakost (3.39) sledi odmah iz (3.37) i Leme 3.1.4, dok (3.38) sledi opet korišćenjem (3.37) i Leme 3.1.4:

$$\begin{aligned} &|\beta_1(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(0) - \beta_2\varepsilon D^+(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(0)| = \\ &= |(\beta_1 W_\varepsilon - \beta_2\varepsilon D^+ W_\varepsilon - \beta_1 w_\varepsilon + \beta_2\varepsilon D^+ w_\varepsilon)(0)| \\ &= |\beta_1 w_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon w_\varepsilon'(0) - \beta_1 w_\varepsilon(0) + \beta_2\varepsilon D^+ w_\varepsilon(0)| \\ &= |\beta_2\varepsilon(D^+ w_\varepsilon - w_\varepsilon')(0)| \\ &\le \left|\frac{\varepsilon}{h}\int_0^h (s-h)w_\varepsilon''(s)ds\right| \\ &\le \frac{Ch}{\varepsilon} \le CN^{-1}max|\psi'|. \end{aligned}$$

Prvo razmatrajmo slučaj uniformne mreže, kad je $\sigma = \frac{1}{2}$ i $h = H = N^{-1}$. Koristeći standardnu grešku lokalnog odescanja [8] i Lemu 3.1.4 imamo

$$|L_\varepsilon^N(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i)| \le C\varepsilon^{-2}(x_{i+1} - x_{i-1})e^{\frac{-\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} \le C\varepsilon^{-2}N^{-1}e^{\frac{-\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}}. \tag{3.40}$$

Koristimo funkcije mreže

$$\psi^{\pm}(x_i) = \frac{Ce^{\frac{2\tau h}{\varepsilon}}}{\tau(\alpha-\tau)}\varepsilon^{-1}N^{-1}\left(Y_i + \frac{1}{\gamma_1}\right) \pm (W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i),$$

gde je τ konstanta $0 < \tau < \alpha$ i Y_i je rešenje problema sa konstantnim koeficijentima

$$(\varepsilon\delta^2 + \tau D^+)Y_i = 0, \quad \beta_1 Y_0 - \varepsilon\beta_2 D^+ Y_0 = 1, \quad \gamma_1 Y_N + \gamma_2 D^- Y_N = 0. \quad (3.41)$$

Upotrebom leme (3.2.2) sa $\omega = \tau$ možemo izabrati C dovoljno veliko da $\beta_1\psi_0^{\pm} - \beta_2\varepsilon D^+\psi_0^{\pm} \geq 0, \quad \gamma_1\psi_N^{\pm} + \gamma_2 D^-\psi_N^{\pm} \geq 0$ i $L_\varepsilon^N \psi^{\pm}(x_i) \leq 0$. Tako, primenom principa minimuma za L_ε^N, zaključujemo da $\psi_i^{\pm} \geq 0$. Dakle, koristeći ovaj rezultat i uz napomenu da je $0 \leq Y_i \leq 1$ imamo za sve $x_i \in \bar{\Omega}_\varepsilon^N$,

$$|(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i)| \leq \frac{Ce^{\frac{2\tau h}{\varepsilon}}}{\tau(\alpha-\tau)}\varepsilon^{-1}N^{-1}Y_i \leq \frac{Ce^{\frac{2\tau h}{\varepsilon}}}{\tau(\alpha-\tau)}\varepsilon^{-1}N^{-1} \leq Ce^{\frac{2\tau h}{\varepsilon}}\varepsilon^{-1}N^{-1}$$

Dakle,

$$|(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i)| \leq CN^{-1}max|\psi'|.$$

Sada razmatramo slučaj $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}lnN$. Ovde treba uzeti u obzir fine i grube mreže odvojeno. Prvo, pretpostavimo da $x_i \in [\sigma, 1]$. Koristeći nejednakost trougla imamo

$$|(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i)| \leq |W_\varepsilon(x_i)| + |w_\varepsilon(x_i)|.$$

Koristeći Lemu 3.1.4 imamo

$$|w_\varepsilon(x_i)| \leq Ce^{\frac{-\alpha\sigma}{\varepsilon}} = CN^{-1}.$$

Granica za $|W_\varepsilon(x_i)|$ je utvrđena razmatranjem funkcije Y_i koja je rešenje problema sa konstantnim koeficijentima

$$(\varepsilon\delta^2 + \alpha D^+)Y_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1$$
$$Y_0 = 1, \quad \gamma_1 Y_N + \gamma_2 D^- Y_N = 0.$$

Ovaj problem ima sledeće rešenje

$$Y_i = \begin{cases} 1 + (Y_{\frac{N}{2}} - 1)l_i, & za \quad i \leq \frac{N}{2}, \\ Y_{\frac{N}{2}} r_i, & \quad\quad i \geq \frac{N}{2} + 1. \end{cases} \quad (3.42)$$

Pri čemu je

$$l_i = \frac{1-\lambda^{-i}}{1-\lambda^{-\frac{N}{2}}}, \quad \lambda = 1 + \frac{\alpha h}{\varepsilon} \tag{3.43}$$

$$r_i = \frac{\Lambda^{N-i} + \frac{\gamma_2 \alpha}{\gamma_1 \varepsilon} - 1}{\Lambda^{\frac{N}{2}} + \frac{\gamma_2 \alpha}{\gamma_1 \varepsilon} - 1}, \quad \Lambda = 1 + \frac{\alpha H}{\varepsilon} \tag{3.44}$$

i $Y_{\frac{N}{2}}$ zadovoljava

$$(\varepsilon\delta^2 + \alpha D^+) Y_{\frac{N}{2}} = 0. \tag{3.45}$$

Počinjemo ističući (2.7) i odatle dobijamo

$$\lambda^{-\frac{N}{2}} \leq 4N^{-1}. \tag{3.46}$$

Koristeći činjenicu da $H = \frac{2(1-\sigma)}{N}$ vidimo da

$$\frac{\alpha}{\varepsilon}\Lambda^{-\frac{N}{2}} \leq 2. \tag{3.47}$$

Konstatujući definiciju l_i u (3.43), i kombinujući sa (3.46) dobijamo

$$0 \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} D^- l_{\frac{N}{2}} = \frac{\lambda^{-\frac{N}{2}}}{1-\lambda^{-\frac{N}{2}}} \leq 8N^{-1}. \tag{3.48}$$

Sada, iz definicije r_i u (3.44), imamo

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{\alpha} D^+ r_{\frac{N}{2}} &= \frac{\Lambda^{\frac{N}{2}-1}}{\Lambda^{\frac{N}{2}} + \frac{\gamma_2 \alpha}{\gamma_1 \varepsilon} - 1} = \frac{\Lambda^{\frac{N}{2}}\Lambda^{-1}}{\Lambda^{\frac{N}{2}}(1 + \frac{\gamma_2 \alpha}{\gamma_1 \varepsilon}\Lambda^{-\frac{N}{2}}) - 1} \\ &\geq \frac{\Lambda^{\frac{N}{2}}\Lambda^{-1}}{\Lambda^{\frac{N}{2}}(1 + \frac{\gamma_2 \alpha}{\gamma_1 \varepsilon}\Lambda^{-\frac{N}{2}})} = \frac{1}{\Lambda}\left[\frac{1}{1 + \frac{\gamma_2 \alpha}{\gamma_1 \varepsilon}\Lambda^{-\frac{N}{2}}}\right]. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo

$$-\frac{\varepsilon}{\alpha} D^+ r_{\frac{N}{2}} \geq \frac{1}{\Lambda}\left[\frac{1}{1 + \frac{\gamma_2 \alpha}{\gamma_1 \varepsilon}\Lambda^{-\frac{N}{2}}}\right]$$

i koristeći (3.47) imamo

$$-\frac{\varepsilon}{\alpha}D^+r_{\frac{N}{2}} \geq \frac{1}{\Lambda}\left[\frac{1}{1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}2}\right] = \frac{1}{\Lambda}\left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1+2\gamma_2}\right]. \tag{3.49}$$

Sledeće treba izračunati vrednost $Y_{\frac{N}{2}}$. Kombinujući (3.42) i (3.45) dobijamo

$$Y_{\frac{N}{2}} = \frac{D^-l_{\frac{N}{2}}}{D^-l_{\frac{N}{2}} - \frac{1}{2}(\lambda+\Lambda)D^+r_{\frac{N}{2}}} \geq 0. \tag{3.50}$$

Koristeći (3.47), (3.49) i (3.50) dobijamo

$$Y_{\frac{N}{2}} \leq \frac{8N^{-1}}{\frac{1}{2}(\lambda+\Lambda)\frac{1}{\Lambda}\left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1+2\gamma_2}\right]} \leq \frac{16N^{-1}\Lambda(\gamma_1+2\gamma_2)}{\gamma_1(\lambda+\Lambda)} \leq 16N^{-1}\left(1+\frac{2\gamma_2}{\gamma_1}\right).$$

Osim toga, napominjemo

$$D^+l_i \leq 0 \quad i \quad D^+r_i \leq 0$$

i konstatujući rezultate za $i = \frac{N}{2}$ iz (3.47), (3.49) i (3.50) imamo

$$D^+Y_i \leq 0, \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

Sada razmatramo funkcije mreže

$$\psi_i^{\pm} = |\beta_1 W_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon D^+W_\varepsilon(0)|Y_i \pm W_\varepsilon(x_i).$$

Tada

$$L_\varepsilon^N\psi_i^{\pm} = |\beta_1 W_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon D^+W_\varepsilon(0)|(a(x_i)-\alpha)D^+)Y_i \leq 0,$$

i, pored toga $\beta_1\psi_0^{\pm} - \beta_2\varepsilon D^+\psi_0^{\pm} \geq 0$, $\gamma_1\psi_N^{\pm} + \gamma_2 D^-\psi_N^{\pm} \geq 0$. Tako primenom principa minimuma i Teoreme 3.2.1, $\psi^{\pm} \geq 0$, i koristeći lemu (3.1.4) , imamo za sve $x_i \in [\sigma, 1]$

$$|W_\varepsilon(x_i)| \leq |\beta_1 W_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon D^+W_\varepsilon(0)|Y_i \leq |\beta_1 w_\varepsilon(0) - \beta_2\varepsilon w_\varepsilon'(0)|Y_{\frac{N}{2}} \leq CN^{-1}.$$

Sledeće treba dokazati rezultat za $x_i \in [0, \sigma)$. Dokaz sledi na sličan način kao slučaj $\sigma = \frac{1}{2}$, osim što koristimo diskretni princip minimuma na $[0, \sigma]$.

Takođe ćemo morati koristiti ocenu $|W_\varepsilon(x_i)| \le CN^{-1}$ iz Leme 3.1.4. U ovom slučaju imamo

$$|L_\varepsilon^N(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i)| \le C\varepsilon^{-1}N^{-1}max|\psi'|e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}}, \quad za \quad sve \quad 0 \le i \le \frac{N}{2} \quad (3.51)$$

Analogno kao u ranijem slučaju, uvodimo funkciju mreže

$$\psi^{\pm}(x_i) = \frac{Ce^{\frac{2\tau h}{\varepsilon}}}{\tau(\alpha - \tau)} max|\psi'|N^{-1}Z_i + C'N^{-1} \pm (W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i),$$

gde je $0 < \tau < \alpha$ i Z_i je rešenje problema sa konstantnim koeficijentima

$$(\varepsilon\delta^2 + \tau D^+)Z_i = 0, \quad \beta_1 Z_0 - \varepsilon\beta_2 D^+ Z_0 = 1, \quad \gamma_1 Z_N + \gamma_2 D^- Z_N = 0.$$

Tako

$$Z_i = \frac{\lambda^{\frac{N}{2}-i} + \frac{\gamma_2\tau}{\gamma_1\varepsilon} - 1}{\lambda^{\frac{N}{2}} + \frac{\gamma_2\tau}{\gamma_1\varepsilon} - 1}, \quad \lambda = 1 + \frac{\tau h}{\varepsilon}.$$

Sada vidimo da

$$D^+ Z_i = -\frac{\tau\lambda^{\frac{N}{2}-i-1}}{\varepsilon[\lambda^{\frac{N}{2}} + \frac{\gamma_2\tau}{\gamma_1\varepsilon} - 1]} \le 0.$$

Sada,$\beta_1\psi_0^{\pm} - \beta_2\varepsilon D^+\psi_0^{\pm} \ge 0, \quad \gamma_1\psi_{\frac{N}{2}}^{\pm} + \gamma_2 D^-\psi_{\frac{N}{2}}^{\pm} \ge 0$ i $L_\varepsilon^N\psi_i^{\pm} \le 0$,dakle, primenom principa minimuma iz Teoreme 3.2.1, $\psi_i^{\pm} \ge 0$. Otuda, za $x_i \in [0, \sigma)$ imamo

$$|(W_\varepsilon - w_\varepsilon)(x_i)| \le CN^{-1}max|\psi'|$$

što je i trebalo pokazati. □

Gornje ocene grešaka za pojedine komponente numeričkog rešenja sada vode do sledeće teoreme o **oceni greške numeričkog rešenja** U_ε, koja se dobija kombinujući ih i koristeći nejednakost trougla.

3.3.3 Teorema *Ako je u_ε rešenje problema (3.1)-(3.3), i U_ε odgovarajuće numeričko rešenje metode (3.18)-(3.20), tada imamo*

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}_\varepsilon^N} \leq CN^{-1} max|\psi'|, \quad za \quad svako \quad N \geq 4,$$

gde je konstanta C nezavisna od ε i N.

Dokaz. Sledi direktno kombinovanje leme (3.3.1) i Leme 3.3.2. □

3.3.4 Napomena Koristeći (2.8), zaključujemo da na Šiškinovoj mreži važi

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}_\varepsilon^N} \leq CN^{-1} lnN, \quad za \quad svako \quad N \geq 4,$$

dok na Bahvalov-Šiškinovoj mreži dobijamo

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}_\varepsilon^N} \leq CN^{-1}, \quad za \quad svako \quad N \geq 4.$$

3.3.5 Teorema *Ako je u_ε rešenje problema (3.1)-(3.3), i U_ε odgovarajuće numeričko rešenje dobijeno korišćenjem postupka navedenog u (3.18)-(3.20) imamo*

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|\bar{U}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}_\varepsilon^N} \leq CN^{-1} max|\psi'|, \quad za \quad svako \quad N \geq 4,$$

gde je $\bar{U}_\varepsilon$ po delovima linearan interpolant od U_ε na $\bar{\Omega}_\varepsilon^N$, i C je konstanta nezavisna od N i ε.

Dokaz. Neka je $\bar{u}_\varepsilon$ po delovima linearan interpolant od u_ε na mreži $\bar{\Omega}_\varepsilon^N$, to je

$$\bar{u}_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{N} u_\varepsilon(x_i)\Phi_i(x)$$

gde je $\Phi_i(x)$ po delovima linearna funkcija definisana sa $\Phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$ za sve i, j $0 \leq i, j \leq N$. Koristeći nejednakost trougla imamo

$$\|\bar{U}_\varepsilon - u_\varepsilon\| \leq \|\bar{U}_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\| + \|\bar{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\| \tag{3.52}$$

gde je prvi izraz s desne strane nejednakosti razlika između dva interpolanta, a drugi je greška interpolacije. Za granicu prvog izraza sa desne strane nejednakosti u (3.52) imamo

$$\bar{U}_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon = \sum_{i=0}^{N} (U_\varepsilon - u_\varepsilon)(x_i)\Phi_i$$

Korišćenjem prethodne teoreme u svakoj tački x_i imamo

$$|(U_\varepsilon - u_\varepsilon)(x_i)| \leq CN^{-1} max|\psi'|,$$

iz $\Phi_i(x) \geq 0$ i $\| \sum_{i=0}^{N} \Phi_i \| \leq 1$ sledi

$$\|\bar{U}_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\| \leq CN^{-1} max|\psi'|. \tag{3.53}$$

Za ocenu drugog izraza na desnoj strani nejednakosti (3.52) napominjemo da za svako $i \quad 0 \leq i \leq N-1$ i svako $f \in C^2(\Omega_i)$ gde je $\Omega_i = (x_i, x_{i+1})$ i $x \in \bar{\Omega}_i$ imamo klasičnu ocenu za linearnu interpolaciju

$$|(\bar{f} - f)(x)| \leq \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 \|f''\|_{\Omega_i}. \tag{3.54}$$

Koristeći dekompoziciju tačnog rešenja dekomponujemo grešku interpolacije u sumu od dve komponente

$$\bar{u}_\varepsilon - u_\varepsilon = \bar{v}_\varepsilon - v_\varepsilon + \bar{w}_\varepsilon - w_\varepsilon$$

gde su $\bar{v}_\varepsilon$ i $\bar{w}_\varepsilon$ po delovima linearni interpolanti od v_ε i w_ε redom na mreži tačaka $\bar{\Omega}_\varepsilon^N$. Ograničimo svaku komponentu posebno. Iz leme (3.1.4) sledi

$$\|\bar{v}_\varepsilon - v_\varepsilon\| \leq CN^{-1} \tag{3.55}$$

i za sve $x \in \bar{\Omega}_\varepsilon^N$

$$|(\bar{w}_\varepsilon - w_\varepsilon)(x)| \leq C(x_{i+1} - x_i)^2 \varepsilon^{-2} \tag{3.56}$$

u slučaju uniformne mreže, imamo $\sigma = \frac{1}{2}$. Iz (3.56) sledi

$$\|\bar{w}_\varepsilon - w_\varepsilon\| \leq C(N^{-1} max|\psi'|)^2$$

S druge strane, ako je $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} lnN$ iz (3.55) sledi

$$\|\bar{w}_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{[0,\sigma)} \leq C\varepsilon^2 N^{-2} max|\psi'|^2 \varepsilon^{-2} \leq C(N^{-1} max|\psi'|)^2$$

Iz Leme 3.1.4 imamo

$$\|\bar{w}_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{[\sigma,1]} \leq 2\|w_\varepsilon\|_{[\sigma,1]} \leq Ce^{-\frac{\alpha\sigma}{\varepsilon}} = CN^{-1}.$$

Onda u svim slučajevima važi

$$\|\bar{w}_\varepsilon - w_\varepsilon\| \leq CN^{-1} max|\psi'|. \tag{3.57}$$

Korišćenjem (3.55), (3.57) i nejednakosti trougla dokaz je kompletiran. $\square$

Glava 4

Numerički eksperimenti

U ovom poglavlju posmatramo kompjuterske rezultate primera problema (3.1)-(3.3). Predmet razmatranja je

$$\varepsilon u''_\varepsilon + \frac{1}{1+x} u'_\varepsilon(1) = x + 1 \tag{4.1}$$

sa graničnim uslovima

$$u_\varepsilon(0) - \varepsilon u'_\varepsilon(0) = 1, \quad u_\varepsilon(1) + u'_\varepsilon = 1. \tag{4.2}$$

Rešenje je

$$u = \frac{(x+1)^3}{3(2\varepsilon+1)} + D\big[\frac{(x+1)^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon - 1} - \big(\frac{2^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon - 1} + \frac{2^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}\big)\big] + \big[1 - \frac{20}{3(2\varepsilon+1)}\big], \tag{4.3}$$

gde je

$$D = \frac{\frac{19+3\varepsilon}{3(2\varepsilon+1)}}{\left(\frac{1-2^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon-1} - \frac{2^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}\right) - 1}.$$

Rešavamo primer (4.1)-(4.3) korišćenjem numericke metode (3.18)-(3.20) na Šiškinovoj mreži (2.2) sa konstantom $\alpha = 0.5$, iz definicije tranzicione tačke σ.

Na slikama (4.1) i (4.2) je prikazano numeričko rešenje U_ε na Šiškinovoj, odnosno Bahvalov-Šiškinovoj mreži, za $N = 16, \quad i \quad \varepsilon = 2^{-1}$.

Tabele (4.1)i (4.3) daju greške $E_\varepsilon^N = |U_\varepsilon - u_\varepsilon|_{\Omega_N}$ na Šiškinovoj, odnosno Bahvalov-Šiškinovoj mreži, za različite vrednosti ε i N i takođe $E_{max}^N = max_\varepsilon E_\varepsilon^N$. Jasno, za svako ε, kad se N povećava greška se smanjuje; a kad ε opada, greške se stabilizuju za bilo koje posebno N.

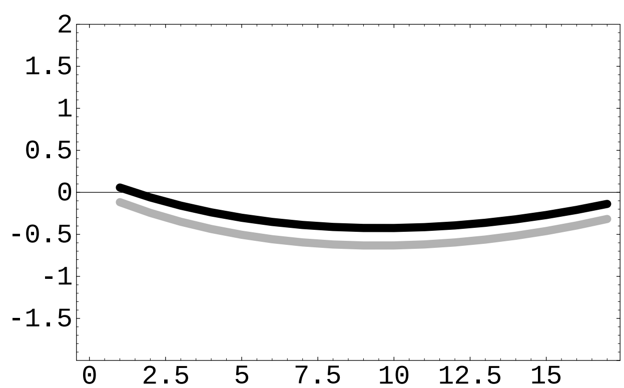
Tabele (4.2)i (4.4) daju ocene reda konvergencije $R_{N,ep}$ na Šiškinovoj, odnosno Bahvalov-Šiškinovoj mreži, izračunate iz grešaka u tabelama (4.1) i (4.3), korišćenjem formule

$$R_{N,ep} = log_2 \frac{E_\varepsilon^N}{E_\varepsilon^{2N}}.$$

Red konvergencije je u porastu kad se N povećava za bilo koje fiksirano ε i na kraju stabilizuje za bilo koje fiksirano N. Takođe su dati redovi uniformne konvergencije za svako N

$$R_{unif}^N = log_2 \frac{E_{\max}^N}{E_{\max}^{2N}}.$$

Ove tabele na taj način verifikuju ε-uniformnu konvergenciju numeričkih rešenja i izračunavaju red kovergencije u saglasnosti sa teoremom (3.3.3).



Slika 4.1: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje na Šiškinovoj mreži, za $\varepsilon = 2^{-1}$ i $N = 16$

Table 4.1: greške za različite vrednosti ε i N, na Šiškinovoj mreži

ε	Broj intervala N							
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
2^{-1}	0.106678	0.0539667	0.0271402	0.0136096	0.00681471	0.00340983	0.00170554	0.000852922
2^{-2}	0.226477	0.115479	0.0583123	0.0293016	0.0146875	0.00735294	0.00367878	0.00183997
2^{-3}	0.421011	0.218475	0.111434	0.0562927	0.0282938	0.0141842	0.00710148	0.00355309
2^{-4}	0.668267	0.382607	0.200733	0.102902	0.0521089	0.0262222	0.0131539	0.00658769
2^{-5}	0.816481	0.473052	0.268883	0.150388	0.0829138	0.0452199	0.0244601	0.0127445
2^{-6}	0.914951	0.527887	0.299442	0.167069	0.0918849	0.0499944	0.0269726	0.0144587
2^{-7}	0.969103	0.558361	0.31702	0.176768	0.0971964	0.0528577	0.0285064	0.0152745
2^{-8}	0.997461	0.574389	0.326301	0.181905	0.100042	0.0544067	0.0293403	0.0157206
2^{-9}	1.01197	0.582611	0.331071	0.184597	0.101524	0.0552097	0.029774	0.015953
2^{-10}	1.01931	0.586777	0.33349	0.185977	0.102277	0.0556196	0.0299945	0.0160716
2^{-11}	1.02301	0.588874	0.334709	0.186672	0.102656	0.0558262	0.0301063	0.0161314
2^{-12}	1.02486	0.589926	0.335321	0.187022	0.102847	0.0559301	0.0301624	0.0161615
2^{-13}	1.02578	0.590453	0.335628	0.187197	0.102942	0.0559822	0.0301906	0.0161766
2^{-14}	1.02625	0.590717	0.335781	0.187285	0.10299	0.0560083	0.0302047	0.0161841
2^{-15}	1.02648	0.590849	0.335858	0.187328	0.103014	0.0560214	0.0302117	0.0161879
E_{max}^N	1.02648	0.590849	0.335858	0.187328	0.103014	0.0560214	0.0302117	0.0161879

Table 4.2: red konvergencije za različite vrednosti ε i N, na Šiškinovoj mreži

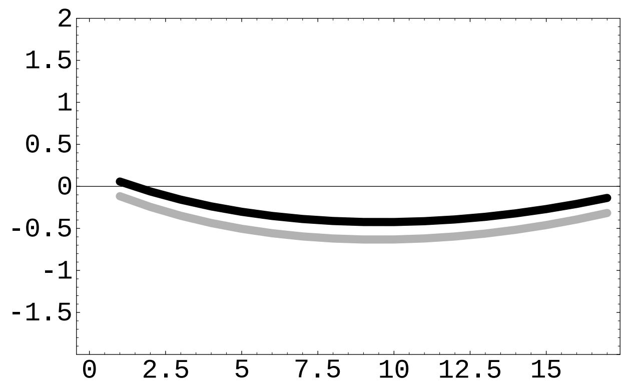
ε	Broj intervala N						
	32	64	128	256	512	1024	2048
2^{-1}	0.983128	0.991637	0.995802	0.997906	0.998952	0.999476	0.999738
2^{-2}	0.97174	0.985754	0.992819	0.996394	0.998193	0.999095	0.999547
2^{-3}	0.94639	0.971283	0.985168	0.992463	0.9962	0.998091	0.999044
2^{-4}	0.804561	0.930589	0.964007	0.981665	0.990741	0.995301	0.997645
2^{-5}	0.787421	0.815018	0.838296	0.859	0.874654	0.886531	0.940558
2^{-6}	0.793466	0.817954	0.841831	0.862545	0.878061	0.890273	0.899559
2^{-7}	0.795451	0.816624	0.842722	0.862879	0.878789	0.890829	0.900162
2^{-8}	0.796232	0.815826	0.843014	0.862582	0.878751	0.890901	0.900222
2^{-9}	0.796565	0.815395	0.842762	0.862555	0.878827	0.890871	0.900222
2^{-10}	0.796714	0.815168	0.842524	0.862644	0.878812	0.890893	0.900186
2^{-11}	0.796783	0.815051	0.842402	0.862687	0.878805	0.89088	0.900193
2^{-12}	0.796817	0.81499	0.842339	0.862708	0.878801	0.890874	0.900194
2^{-13}	0.796833	0.81496	0.842307	0.862718	0.878798	0.890871	0.900192
2^{-14}	0.796841	0.814945	0.842291	0.862722	0.878797	0.890869	0.900191
2^{-15}	0.796845	0.814937	0.842283	0.862724	0.878796	0.890868	0.90019
R^N_{unif}	0.796845	0.814937	0.842283	0.862724	0.878796	0.890868	0.90019

Table 4.3: greške za različite vrednosti ε i N, na Bahvalov-Šiškinovoj mreži

ε	Broj intervala N							
	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
2^{-1}	0.106678	0.0539667	0.0271402	0.0136096	0.00681471	0.00340983	0.00170554	0.000852922
2^{-2}	0.226477	0.115479	0.0583123	0.0293016	0.0146875	0.00735294	0.00367878	0.00183997
2^{-3}	0.421011	0.218475	0.111434	0.0562927	0.0282938	0.0141842	0.00710148	0.00355309
2^{-4}	0.547415	0.382607	0.200733	0.102902	0.0521089	0.0262222	0.0131539	0.00658769
2^{-5}	0.684845	0.34883	0.179086	0.0955956	0.0554229	0.0366418	0.0283304	0.0127445
2^{-6}	0.786228	0.399877	0.201242	0.101439	0.0519173	0.027544	0.0156368	0.00988777
2^{-7}	0.846568	0.43186	0.217412	0.10891	0.0545899	0.0275449	0.0141242	0.00748035
2^{-8}	0.879997	0.450151	0.226911	0.113712	0.0568726	0.0284561	0.0142826	0.00722293
2^{-9}	0.897827	0.460141	0.232171	0.116424	0.0582463	0.0291189	0.0145616	0.00729312
2^{-10}	0.907088	0.465446	0.235018	0.117906	0.0590051	0.0295031	0.0147484	0.00737414
2^{-11}	0.911817	0.468199	0.236528	0.118701	0.0594142	0.0297122	0.0148543	0.00742587
2^{-12}	0.914208	0.469605	0.237311	0.11912	0.0596325	0.029824	0.0149113	0.00745472
2^{-13}	0.91541	0.470315	0.237711	0.119336	0.0597472	0.0298834	0.0149416	0.00747015
2^{-14}	0.916013	0.470673	0.237913	0.119447	0.0598064	0.0299144	0.0149576	0.00747831
2^{-15}	0.916315	0.470852	0.238015	0.119503	0.0598366	0.0299304	0.014966	0.00748261
E^N_{max}	0.916315	0.470852	0.238015	0.119503	0.0598366	0.0366418	0.0283304	0.0127445

Table 4.4: red konvergencije za različite vrednosti ε i N, na Bahvalov-Šiškinovoj mreži

ε	Broj intervala N						
	32	64	128	256	512	1024	2048
2^{-1}	0.983128	0.991637	0.995802	0.997906	0.998952	0.999476	0.999738
2^{-2}	0.97174	0.985754	0.992819	0.996394	0.998193	0.999095	0.999547
2^{-3}	0.94639	0.971283	0.985168	0.992463	0.9962	0.998091	0.999044
2^{-4}	0.516772	0.930589	0.964007	0.981665	0.990741	0.995301	0.997645
2^{-5}	0.973254	0.961873	0.905634	0.786462	0.596993	0.371138	1.15248
2^{-6}	0.975391	0.99063	0.988312	0.96633	0.914474	0.816797	0.661225
2^{-7}	0.971061	0.990134	0.997297	0.996427	0.986849	0.963612	0.916997
2^{-8}	0.967091	0.988284	0.996742	0.999578	0.998994	0.994476	0.983606
2^{-9}	0.964362	0.98689	0.99579	0.999155	1.00021	0.99979	0.997558
2^{-10}	0.962629	0.985844	0.995133	0.998726	0.999971	1.00031	1.00001
2^{-11}	0.961623	0.985108	0.994685	0.998449	0.999753	1.00017	1.00025
2^{-12}	0.961076	0.984666	0.99437	0.998239	0.999625	1.00007	1.00018
2^{-13}	0.96079	0.984421	0.994175	0.998089	0.999529	1.00001	1.00013
2^{-14}	0.960643	0.984291	0.994066	0.997995	0.999459	0.99996	1.0001
2^{-15}	0.960569	0.984225	0.994007	0.997942	0.999415	0.999926	1.00007
R^N_{unif}	0.960569	0.984225	0.994007	0.997942	0.707538	0.371138	1.15248



Slika 4.2: Tačno (sivi grafik) i numeričko (crni grafik) rešenje na Bahvalov-Šiškinovoj mreži, za $\varepsilon = 2^{-1}$ i $N = 16$

Glava 5

Zaključak

Naš cilj je bio da se reši singularno perturbovani problem (3.1)-(3.3), koristeći metodu koja je robusna u odnosu na perturbacioni parametar. Rešili smo problem koristeći standardne *upwind* konačne diferencne operatore na Šiškinovoj mreži i na Bahvalov-Šiškinovoj mreži. Pokazali smo da za numeričku aproksimaciju rešenja metod daje robusnost u odnosu na perturbacioni pararmetar. Teoretski dobijene ocene su verifikovane i eksperimentalno. Rezultati pokazani u ovom radu predstavljaju uopštenje analize date u [2] na jednu klasu mreža diskretizacije.

Prilog A

Pregled definicija i teorema iz linearne algebre i analize

U ovom delu ćemo navesti neke definicije i teoreme koje su korišćene u radu.

A.1 Definicije i teoreme iz linearne algebre

A.1.1 Definicija *Matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ *se naziva* trakasta *matrica sa širinom trake* $2m + 1$ *ako je* $a_{ij} = 0$ *za svako* $|i - j| > m$ $(m < n - 1)$. *Ako je* $m = 1$ *širina trake je 3, a matrica je* tridijagonalna.

A.1.2 Definicija *Kvadratna matrica* A *je* regularna *ako i samo ako postoji matrica* B *takva da je*

$$AB = BA = E.$$

Matrica B *koja zadovoljava gornju jednakost naziva se* inverzna *matrica za matricu* A. *Kvadratna matrica koja nije regularna se naziva* singularna.

A.1.3 Teorema *Kvadratna matica* A *je regularna ako i samo ako je*

$$\det A \neq 0.$$

A.1.4 Definicija *Realna simetrična* $n \times n$ *matrica* A *je* pozitivno definitna *ako je* $x^T A x > 0$ *za sve* $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

A.1.1 Inverzno monotone matrice

A.1.5 Definicija *Regularne matrice sa nenegativnom inverznom matricom nazivaju se* inverzno monotone matrice.

Neka je sa τ označen skup $\{1, 2, \ldots, n\}$, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$ fiksiran prirodan broj.
Neka su za $x \in \mathbb{R}^n$ definisani skupovi $\tau^0(x)$ i $\tau^+(x)$:

$$\tau^0(x) = \{i | i \in \tau, x_i = 0\}, \quad \tau^+(x) = \{i | i \in \tau, x_i > 0\}.$$

A.1.6 Definicija *Vektor $x > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ naziva se* majorirajući vektor *matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ ako je $Ax > 0$, ili ako je $Ax \geq 0$, a za svako $i \in \tau^0(Ax)$ postoji konačno mnogo indeksa $k_j \in \tau$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, tako da važi*

$$k_0 = i, \quad k_m \in \tau^+(Ax),$$

$$a_{k_{j-1}k_j} \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Za matricu A koja ima majorirajući vektor $x > 0$ kažemo da povezuje $\tau^0(Ax)$ sa $\tau^+(Ax)$.

A.1.7 Primer Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Proveravamo da li je vektor $x = [1, 1, 1, 1]^T$ majorirajući vektor matrice date matrice. Kako je $Ax = [1, 0, 0, 1]^T$, sledi da je

$$\tau^0(Ax) = \{2, 3\} \quad \text{i} \quad \tau^+(Ax) = \{1, 4\}.$$

Za $i = 2$ neka je $k_0 = 2$ i $k_1 = 1$. Važi $k_1 \in \tau^+(Ax)$ i $a_{k_0k_1} = -1 \neq 0$. Za $i = 3$ neka je $k_0 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Važi $k_2 \in \tau^+(Ax)$, $a_{k_0k_1} = 3 \neq 0$ i $a_{k_1k_2} = -2 \neq 0$. Dakle, vektor x je majorirajući vektor matrice A. □

A.1.8 Definicija *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je* L_0-matrica *ako su njeni vandijagonalni elementi nepozitivni.*

A.1.9 Definicija *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je* L-matrica *ako je L_0-martica i ako su elementi njene glavne dijagonale pozitivni.*

A.1.10 Definicija *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ se naziva* M-matrica *ako i samo ako je inverzno monotona L_0-matrica.*

Sledeća teorema pokazuje pod kojim uslovima je neka L_0-matrica inverzno monotona matrica, tj. M-matrica.

A.1.11 Teorema M-kriterijum [5] *Neka za matricu* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ *važi*

$$a_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \tau.$$

Tada je A *inverzno monotona matrica ako i samo ako ima majorirajući vektor.*

A.2 Definicije i teoreme iz analize

A.2.1 Teorema *(***Teorema srednje vrednosti***) Ako je funkcija* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* $[a, b]$ *i diferencijabilna na* (a, b)*, onda postoji* $t \in (a, b)$ *takvo da je*

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

A.2.2 Definicija *Neka je* X *vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$*. Preslikavanje* $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ *je* norma *na* X *ako važi*

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *za sve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i sve* $x \in X$,

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za sve* $x, y \in X$.

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ *se naziva* normiran prostor.

A.2.3 Definicija *Neka je* X *vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$*. Preslikavanje* $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ *je* seminorma *na* X *ako važi*

(N1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *za sve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i sve* $x \in X$,

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za sve* $x, y \in X$.

A.2.4 Definicija *Kompletan normiran prostor* $(X, \|\cdot\|)$ *se naziva* Banahov prostor*, tj. Banahov prostor je normiran prostor u kome je svaki Košijev niz konvergentan.*

A.2.5 Definicija *Neka je* X *vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$*. Preslikavanje* $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ *sa sledećim osobinama*

(S1) $(x, x) \geq 0$ *za sve* $x \in X$,

(S2) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(S3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ *za sve* $x,y,z\in X$,

(S4) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ *za sve* $\lambda\in\mathbb{R}$ *i sve* $x,y\in X$,

(S5) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ *za sve* $x,y\in X$,

se naziva skalarni proizvod. *Uređen par* $(X,(\cdot,\cdot))$ *se naziva* prostor sa skalarnim proizvodom *ili* pred-Hilbertov prostor *ili* unitaran prostor.

A.2.6 Lema *Sa* $\|x\|:=\sqrt{(x,x)}$ *je definisana norma na pred-Hilbertovom prostoru* $(X,(\cdot,\cdot))$

A.2.7 Definicija *Kompletan pred-Hilbertov prostor* $(X,(\cdot,\cdot))$ *se naziva* Hilbertov prostor.

Prilog B

Mathematica programi

U ovom delu ćemo navesti programe koji su korišćeni za izvođenje numeričkih eksperimenata u radu. Programi su urađeni u programskom paketu *Mathematica*.

B.1 Programi za numeričke eksperimente na Šiškinovoj mreži

B.1.1 Program za rešavanje sistema $Ax = v$ LU-dekompozicijom

```
TriLUSolve[{a_List, b_List, c_List}, v_List] :=
   Module[{i, j, l, u, f, x, n = Length[b]},
     (*LU dekompozicija*)
     l = {};
     u = {b[[1]]};
     Do[
       u = Append[u, b[[i]] - c[[i-1]]a[[i-1]]/u[[i-1]]];
       l = Append[l, a[[i-1]]/u[[i-1]], {i, 2, n}];
       (*resavanje LU sistema*)
       f = {v[[1]]};
       Do[f = Append[f, v[[i]]-l[[i-1]]f[[i-1]]], {i, 2, n}];
       x = {f[[n]]/u[[n]]};
       Do[x = Prepend[x, (f[[i]]-c[[i]]x[[1]])/u[[i]]],
       {i, n-1, 1, -1}];
       x
   ]
```

B.1.2 Šiškinova mreža

```
Shiskin[n_,ε_,α_]:=
      If[Min[1/2, ε/α  *  Log[n]]== 1/2,
      Table[i/n,i,0,n]//N,
      σ=Min[1/2, ε/α  *  Log[n]];
      ψ[s_]:=Exp[-2*(Log[n])*s];
      φ[s_]:=-Log[ψ[s]];
      Join[
        Table[1/α  *  ε  *  φ[i/n],i,0,n/2],
        Table[1-(1-σ) 2*(n-i)/n, i,n/2 + 1,n]
        ]//N
      ]];
```

B.1.3 Program za dobijanje približnog rešenja

Program za dobijanje približnog rešenja primera datog u delu (4) za postupak (3.18)-(3.19) na mreži (2.2).

```
Upwind[n_,ε_,α_]:=
  Module[mreza,h,f,p,u,v,w,r,
   mreza=Shishkin[n,ε,α];
   h=Table[mreza[[i+1]]-mreza[[i]],i,n];
   f=Table[mreza[[i]]+1,i,n];
   p=Table[1/(1+mreza[[i]]), i,n];
   u=Prepend[Table[2 ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) *
   1/h[[i+1]] + p[[i]]/h[[i+1]], i,n-1],-ε/h[[i]]];
   v=Append[Prepend[Table[-2ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) *
   1/h[[i+1]] - 2ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) * 1/h[[i]] -
   p[[i]]/h[[i+1]],i,1,n-1],1+ε/h[[1]]],1+1/h[[n]]];
   w=Append[Table[2ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) *
   1/h[[i]],i,1,n-1],-1/h[[n]]];
   r=Append[Prepend[Table[f[[i]],i,1,n-1],1],1];
   TriLUSolve[w,v,u,r]];
```

B.1.4 Program za dobijanje tačnog rešenja

Program za dobijanje tačnog rešenja primera datog u delu (4).

```
tacno[x_]:=(x+1)^3 /(3*(2*ε+1)) +
(19+3*ε)/(3*(2*ε+1)*((1-2^(1-1/ε))/ε-2^(-1/ε)/ε)
* ((x+1)^(1-1/ε)/(ε-1)-(2^(1-1/ε)/(ε-1)+2^(-1/ε)/ε))
 +(1-20/(3*(2*ε+1)));
mreza=Shiskin[n,ε,α];
tacnoresenje=Table[tacno[mreza[[i]]],i,n+1]
```

B.1.5 Program za određivanje greške rešenja

Program za određivanje greške rešenja primera datog u delu (4).

```
Table[n=2^k;
  mreza=Shishkin[n,ε,α];
  tacnoresenje=Table[tacno[mreza[[i]]],i,n+1];
  pribliznoresenje=Upwind[n,ε,α];
  2^k, MaxAbs[pribliznoresenje-tacnoresenje]],k,5,12]
```

B.1.6 Program za određivanje reda konvergencije

Program za određivanje reda konvergencije primera datog u delu (4).

```
greska=; Table[n=2^k;
   mreza=Shishkin[n,ε,α];
   tacnoresenje=Table[tacno[mreza[[i]]],i,n+1];
   pribliznoresenje=Upwind[n,ε,α
   greska=Append[greska,Max[Abs[pribliznoresenje-tacnoresenje]]],k,5,12];
 Table[Log[greska[[i]]/greska[[i+1]]]/Log[2],i,Length[greska]-1]
```

B.2 Programi za numeričke eksperimente na Bahvalov-Šiškinovoj mreži

Program za tačno resenje i za rešavanje sistema $Ax = v$ LU-dekompozicijom je isti bez obzira na mrežu, tako da ga nećemo ponovo navoditi.

B.2.1 Bahvalov-Šiškinova mreža

```
BahvalovShiskin[n_,ε_,α_]:=
      If[Min[1/2, ε/α  *  Log[n]]== 1/2,
      Table[i/n,i,0,n]//N,
      σ=Min[1/2, ε/α  *  Log[n]];
      ψ[s_]:=1-2*(1-N^(-1))*s;
      ϕ[s_]:=-Log[ψ[s]];
      Join[
        Table[1/α  *  ε  *  ϕ[i/n],i,0,n/2],
        Table[1-(1-σ) 2*(n-i)/n, i,n/2 + 1,n]
        ]//N
      ]];
```

B.2.2 Program za dobijanje približnog rešenja

```
Upwind[n_,ε_,α_]:=
  Module[mreza,h,f,p,u,v,w,r,
   mreza=BahvalovShishkin[n,ε,α];
   h=Table[mreza[[i+1]]-mreza[[i]],i,n];
   f=Table[mreza[[i]]+1,i,n];
   p=Table[1/(1+mreza[[i]]), i,n];
   u=Prepend[Table[2 ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) *
   1/h[[i+1]] + p[[i]]/h[[i+1]], i,n-1],-ε/h[[i]]];
   v=Append[Prepend[Table[-2ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) *
   1/h[[i+1]] - 2ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) * 1/h[[i]] -
   p[[i]]/h[[i+1]],i,1,n-1],1+ε/h[[1]]],1+1/h[[n]]];
   w=Append[Table[2ε/(h[[i]]+h[[i+1]]) *
   1/h[[i]],i,1,n-1],-1/h[[n]]];
   r=Append[Prepend[Table[f[[i]],i,1,n-1],1],1];
   TriLUSolve[w,v,u,r]];
```

B.2.3 Program za određivanje greške rešenja

```
Table[n=2^k;
  mreza=BahvalovShishkin[n,ε,α];
  tacnoresenje=Table[tacno[mreza[[i]]],i,n+1];
  pribliznoresenje=Upwind[n,ε,α];
  2^k, MaxAbs[pribliznoresenje-tacnoresenje]],k,5,12]
```

B.2.4 Program za određivanje reda konvergencije

```
greska=; Table[n=2^k;
   mreza=BahvalovShishkin[n,ε,α];
   tacnoresenje=Table[tacno[mreza[[i]]],i,n+1];
   pribliznoresenje=Upwind[n,ε,α
   greska=Append[greska,Max[Abs[pribliznoresenje-tacnoresenje]]],k,5,12];
 Table[Log[greska[[i]]/greska[[i+1]]]/Log[2],i,Length[greska]-1]
```

Literatura

[1] V. B. Andreyev, I. A. Savin, *The computation of boundary flow with uniform accuracy with respect to a small parameter.* Comput. Math. Math. Phys. 36(1997), 1687-1692

[2] A. R. Ansari, A. F. Hagerty, *Numerical solution of a convection diffusion problem with Robin boundary conditions.* Journal of Comput. and Appl. Math., 156(2003), 221-238

[3] E. P. Doolan, J. J. H. Miller, W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers.* Boole Press, Dun Laoghaire, 1980.

[4] P.A. Farrell, A.F. Hegarty, J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin, *Robust Computational Techniques for Boundary Layers.* Applied mathematics and mathematical computation, New York, 2000.

[5] D. Herceg, N. Krejić, *Numerička Analiza.* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1997.

[6] T. Linβ, *Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems.* Institut fü Numerische Mathematik, Technische Universitä Dresden, Habilitationsscrift, 2006.

[7] Linβ T., Roos H.-G., Vulanović R., *Uniform pointwise convergence on Shiskin-type meshes for quasilinear convection-diffusion problems.* SIAM J. Numer. Anal. 2000.

[8] J.J.H. Miller, E. O' Riordan, G.I. Shishkin, *Fitted numerical methods for singularly perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions.* World Scientific, Singapore, 1996.

[9] M. Miloradović, *Specijalne mreže za numeričko rešvanje singularno perturbovanih problema.* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2001.

[10] H.-G. Roos, T. Linβ, *Sufficient conditions for uniform convergence on a layer-adapted grids.* Computing 63, 1999., pages 27.-45.

[11] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations.* Springer, Berlin, 1996.

[12] G. I. Shishkin, *A difference scheme for a singurarly pertrbed parabolic equation with a discontinuous boundary condition.* Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1988.

[13] K. Surla, Đ. Herceg, S. Rapajić, *Mathematica za fizičare i hemičare*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

Biografija

Rođena sam 4. juna 1984. godine u Novom Sadu. Završila sam Osnovnu školu „Jovan Popović” u Novom Sadu, a potom Gimnaziju „Isidora Sekulić” u Novom Sadu.

Po završetku gimnazije upisala sam osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, smer diplomirani matematičar-profesor matematike. Diplomirala sam 07.07.2010. godine sa prosečnom ocenom 9.06. Tema diplomskog rada bila je „Slučajni hod”.

Nakon završetka osnovnih studija upisala sam master studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija sa prosečnom ocenom 10.00.

Novi Sad

Krstanović Lidija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Lidija Krstanović
AU

Mentor: Prof. dr Helena Zarin
MN

Naslov rada: O numeričkom rešavanju singularno perturbovanog problema sa Robinovim konturnim uslovima
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2011.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5, 61, 12, 4, 0, 2, 2)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Numerička matematika

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: singularno perturbovani problem, Šiškinov tip mreže, upwind metod
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ
U master radu se razmatra jednodimenzionalni singularno perturbovani problem sa Robinovim uslovima. Pokazuje se, kako teorijski tako i numeričkim eksperimentima, da su numerička rešenja dobijena koristeći upwind konacno-diferencni postupak na Šiškinovim mrežama u odnosu na perturbecioni parametar uniformno konvergentna.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 14.09.2011.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Dragoslav e Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Helena Zarin, vanredni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Đorđe Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Lidija Krstanović
AU

Mentor: Helena Zarin, Ph.D.
MN

Title: On numerical solving of singularly perturbed problem with Robin boundary conditions
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5, 61, 12, 4, 0, 2, 2)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Numerical mathematics
SD

Subject/Key words: singularly perturbed problem, Shishkin-type mesh, upwind method
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
The thesis consider a one-dimensional singularly perturbed problem with Robin boundary conditions. We, show, both theoretically and with numerical experiments, that numerical solutions obtained using an upwind finite difference scheme on ShiShkin meshes are uniformly convergent with respect to the perturbed coerricient.

Accepted by the Scientific Board on: 14.09.2011.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Dragoslav Herceg, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr. Helena Zarin, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
Member:	Dr. Đorđe Herceg, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad