UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

O numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema sa kašnjenjem

-master rad-

mentor:

dr Helena Zarin

student:

Kristina Barna (495m/13)

Novi Sad, 2016.

Sadržaj

Predgovor

Parcijalne diferencijalne jednačine predstavljaju matematičke modele mnogih fizičkih, mehaničkih i bioloških pojava. Često su jednačine koje se razmatraju dosta komplikovane i nalaženje analitičkog rešenja je nemoguće ili nepraktično. Stoga se traži numerička aproksimacija nepoznatog analitičkog rešenja.

Rad je posvećen rešavanju singularno perturbovanih problema (SPP) sa kašnjenjem. Taj problem spada u klasu loše uslovljenih diferencijalnih jednačina. U ovom radu dat singularni perturbovani konturni problem se rešava konačno-diferencnim postupkom. Ovaj postupak je jedan od postupaka sa kojima se može rešavati takav problem. Ti problem su dobili na značaju u drugoj polovini XX veka.

Rad se sastoji od šest glava, gde se zadnja glava sastoji od dva priloga.

Prva glava je uvodna i sadrži pregled osnovnih definicija i teorema o linearnim konturnim problemima. Uvodi se singularno perturbovani konturni problem na kojem se bazira master rad. Navode se njegove osnovne osobine, dekompozicija rešenja datog problema i teoreme vezane za dekompoziciju.

Druga glava je posvećena slojno-adaptivnim mrežama, uvedena je Šiškinova mreža, mreža Bahvalova i mreže S-tipa. Slojno adaptivna mreža se koristi za diskretizaciju problema datog u radu.

Glava 3 posvećena je analizi i oceni greške. Prvo se definiše diferencni operator koji je potreban u definiciji postupka koji se koristi. Zatim se definiše sam postupak i izvodi se ocena greške za svaku komponentu numeričkog rešenja. Dobijena ocena greške numeričkog postupka se posmatra za slučajeve kad se koriste različite mreže S-tipa.

Četvrta glava je posvećena numeričkim rezultatima izabranog primera singularno perturbovanog problema. Svi numerički testovi dati u ovoj glavi urađeni su pomoću programskog paketa *Mathematica 8.0.*

Glava 5 je zaključak ovog rada.

Na kraju se daju dva priloga u šestoj glavi. Prvi prilog, Prilog A, se sastoji od dodatnih teorema i definicija iz analize koje su potrebni za ovaj rad. U drugom prilogu je dat program koji je korišćen pri izvođenju numeričkih eksperimenata.

* * *

Ogromnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Heleni Zarin na korisnim savetima, sugestijama i primedbama. Bez njene pomoći rad ne bi imao sadašnji oblik.

Želim da se posebno zahvalim i članovima komisije dr Dragoslavu Hercegu i dr Đorđu Hercegu.

NoviSad, februar 2016. godine Kristina Barna

Glava 1

Singularno perturbovani problemi sa kašnjenjem

U ovoj glavi je prikazan problem koji se razmatra u radu. Taj problem je singularno perturbovani problem običnih diferencijalnih jednačina, koji se sastoji od diferencijalne jednačine uz dodatne uslove. U nastavku se najpre predstavlja opšti konturni problem, zatim se daju njegove osobine i te osobine se dalje analiziraju na razmatranom problemu.

1.1 Konturni problem

Konturni problem običnih diferencijalnih jednačina se dobija kada se od rešenja diferencijalne jednačine zahteva da zadovoljava dodatne uslove u dve ili više tačaka.

Za konturne probleme je karakteristično da u zavisnosti samo od konturnih uslova može se desiti da jedna jednačina ima jedinstveno rešenje, ima više rešenja ili uopšte nema rešenja. Najčešće se konturni uslovi zadaju u dve tačke što je i ovde slučaj.

U intervalu $[a, b]$ traži se rešenje u diferencijalne jednačine

$$u''(x) = f(x, u, u')$$

koja zadovoljava konturne uslove

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{1.1}$$

gde su α i β date konstante.

Konturni problemi mogu biti linearni i nelinearni konturni problem. Konturni problem je linearan ako se problem sastoji od linearne diferencijalne jednačine. Ako je $\alpha = \beta = 0$, tada konturni uslovi (1.1) su homogeni. Konturni uslovi (1.1) se nazivaju Dirihleovi uslovi.

Linearna diferencijalna jednačina se može zapisati u obliku

$$L_u = r(x), \;\; x \in [a, b]$$

gde je

$$L_u = -u'' + p(x)u' + q(x)u$$

a funkcije $p(x), q(x)$ i $r(x)$ su definisane na intervalu $[a, b]$, a više o konturnim problemima se može pronaći u [4].

Diferencijalna jednačina je homogena ako je $r(x) = 0$ za $x \in [a, b]$, a konturni problem je homogen ako su i jednačina i konturni uslovi homogeni.

U radu se posmatra sledeća jednačina

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x - \delta) + b(x)y(x) = f(x),$$

$$\forall x \in \Omega = (0,1), \tag{1.2}$$

sa graničnim uslovima

$$y(x) = \psi(x), \;\; x \in [-\delta, 0], \tag{1.3}$$

$$y(1) = \gamma, \tag{1.4}$$

gde je ε parametar perturbacije, δ je takođe mali parametar i zove se parametar kašnjenja i za njih važi $0 < \varepsilon \ll 1$ i $\delta = o(\varepsilon)$ $(0 < \delta < 1)$.

Gornji problem se primenom određenih transformacija svodi na problem sledećeg oblika

$$(\varepsilon - \delta a(x))u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x) \tag{1.5}$$

$$u(0) = \psi(0) = \psi_0, \;\; u(1) = \gamma, \tag{1.6}$$

koji je takođe linearan konturni problem koji ne mora biti homogen. Svođenje problema (1.2), (1.3) i (1.4) na problem (1.5) i (1.6) se opisuje u nastavku.

1.2 Singularno perturbovan problem

1.2.1 O ponašanju i o rešavanju singularno perturbovanog problema

Singularno perturbovani problemi (SPP) su parametarski zavisne diferencijalne jednačine, koje obrazuju jednu klasu konturnih problema. Rešenje SPP ispoljava neuniformno ponašanje kada parametar teži ka nekoj graničnoj vrednosti. Neuniformnost ovih problema ogleda se u pojavi slojeva u kojima se rešenje naglo menja kada perturbacioni parametar (u našem slučaju taj parametar je označen sa ε) teži nuli. Slojevima nazivamo uske podoblasti na kojima se javljaju promene. Slojevi se mogu nalaziti u okolini ruba ili u unutrašnjosti domena. Tačan položaj i širina slojeva zavisi od geometrije konturnih uslova, kao i glatkosti polaznih funkcija.

Standardnim numeričkim postupcima je rešavanje SPP neefikasno, zato koristimo druge efikasnije metode kao što je konačno-diferencni postupak.

Konturni problem (1.5) i (1.6) je singularno perturbovani problem jer diferencijalna jednačina je parametarski zavisna. Zavisi od parametra ε. Pri numeričkom rešavanju takvog problema, osnovni cilj je konstrukcija $\varepsilon-$uniformno konvergentnog numeričkog postupka. Zato se uvodi sledeća definicija:

Definicija 1.1 [9] *Neka je u rešenje singularno perturbovanog problema i neka je U^N aproksimacija za u koja je dobijena numeričkim postupkom sa parametrom diskretizacije N. Za numerički postupak se kaže da je $\varepsilon-$uniformno konvergentan u normi $\|\cdot\|$, ako je*

$$\|u - U^N\| \leq \vartheta(N) \quad za\ N \geq N_0,$$

gde su funkcije ϑ i $N_0 > 0$, nezavisni od ε i

$$\lim_{N\to\infty} \vartheta(N) = 0.$$

Za konstrukciju takvih postupaka za rešavanje SPP može se prići na dva načina. Prvi prilaz koristi činjenicu da je u većini slučajeva, ponašanje rešenja SPP u okolini slojeva eksponencionalne prirode i za takve postupke približna rešenja se konstruišu na relativno grubim mrežama. Kad je problem u više dimenzija, taj postupak je neefikasan jer ga je teško uopštiti. U radu se koristi drugi prilaz za rešavanje SPP. Ovaj drugi prilaz koristi standardnu diskretizaciju na slojno-adaptivnim mrežama. Neuniformno se razlaže domen što se zasniva na unapred poznatim informacijama o ponašanju rešenja. Formira se mreža koja je gusta u slojnim oblastima. O tome i o mrežama više informacija se daje u nastavku i u radovima [8] i [10]. Prednost takvih mreža je da se problem efikasno rešava unutar i van sloja. Ovaj pristup danas se dosta često koristi i u kombinaciji sa sledećim postupcima kao što su "upwinding", veštačka difuzija, konačni elementi, postupak konačnih elemenata Ritz-Galerkin, konačno-diferencni postupak itd. U ovom radu za rešavanje SPP koristi se drugi pristup u kombinaciji sa konačno-diferencnim postupkom.

1.2.2 Transformacija problema sa kašnjenjem

Posmatra se opet (1.2), (1.3) i (1.4) singularno perturbovan problem sa kašnjenjem.

Za funkciju a mogući su sledeći slučajevi:

$a(x) > 0 \Rightarrow$ Granični sloj je na levom kraju intervala [0,1],

$a(x) < 0 \Rightarrow$ Granični sloj je na desnom kraju intervala [0,1],

$a(x)$ menja znak u [0,1] $\Rightarrow$ Sloj se javlja u oblasti povratne tačke.

U ovom radu se uzima prvi slučaj, prema tome u (1.2), (1.3) i (1.4) su $a(x)$ i $b(x) \leq -\theta < 0$, za $\forall x \in \overline{\Omega}$ i $f(x)$ dovoljno glatke funkcije, $0 < \varepsilon \ll 1$ i $\delta = o(\varepsilon)$ $(0 < \delta < 1)$ takvo da je $(\varepsilon - \delta a(x)) > 0$ za svako $x \in [0,1]$, gde je ε parametar perturbacije, δ je takođe mali parametar i zove se parametar kašnjenja, osim toga γ i θ su pozitivne konstante. Neka je $a(x) \geq \alpha > 0$ na celom intervalu [0,1], gde je α takođe konstanta. Kako je $\varepsilon - \delta a(x) > 0$ i $a(x) \geq \alpha > 0$ onda važi i $\varepsilon - \delta\alpha > 0$ i neka je $M_l = \varepsilon - \delta\alpha > 0$. Takve diferencijalne jednačine se koriste u teoriji kontrole a tek nedavno su počeli da ih koriste na biološkim modelima. Skraćeno u engleskom jeziku, takve jednačine zapisujemo DDEs.

Za parametar δ važi $0 < \delta < 1$. U slučaju $\delta = 0$, onda se problem (1.2) svodi na obično singularno perturbovanu diferencijalnu jednačinu. Za $\varepsilon = 0$ polazni problem se svodi na problem oblika $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$ i rešenje problema neće zadovoljiti početne uslove istovremeno u graničnim tačkama $\{0,1\}$ na domenu. Tada rešenje problema pokazuje granično ponašanje na jednom kraju interval [0,1] u zavisnosti $a > 0$ ili $a < 0$. Ako $a > 0$ onda se granični sloj nalazi u $x = 0$, a ako $a < 0$ onda granični sloj je u $x = 1$. Međutim ako je $a = 0$ onda imamo granični sloj u $x = 0$ i u $x = 1$. Nule funkcije a se nazivaju povratne tačke.

U radu se koristi C kao pozitivna konstanta nezavisna od ε odnosno nezavisna od M_l, koja može da ima različite vrednosti u različitim jednačinama.

Posmatra se parametar kašnjenja $\delta = o(\varepsilon)$ i izraz u (1.2) koji sadrži parametar δ aproksimira se Tejlorovim redom pa se dobije:

$$y'(x-\delta) \approx y'(x) - \delta y''(x). \tag{1.7}$$

Koristeći dobijeno (1.7) u (1.2) dobija se sledeći izraz

$$\big(\varepsilon - \delta a(x)\big)y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) \approx f(x), \tag{1.8}$$

$$y(0) = \psi(0) = \psi_0, \quad y(1) = \gamma. \tag{1.9}$$

Pošto (1.8) i (1.9) su približna verzija za (1.2), (1.3) i (1.4), uvodimo drugu notaciju $(u(x))$ u približnoj jednačini, odnosno sa $u^k(x)$ zamenimo $y^k(x)$ za sve $k = 0, 1, 2$ redom, pa će (1.8) i (1.9) postati:

$$\big(\varepsilon - \delta a(x)\big)u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x), \tag{1.10}$$

$$u(0) = \psi(0) = \psi_0, \ u(1) = \gamma. \tag{1.11}$$

Pre nego što se pređe na leme i teoreme koje daju neke osobine singularno perturbovanog problema (1.10) i (1.11) definišimo diferencijalni operator L_ε koji odgovara za (1.10):

$$L_\varepsilon \pi(x) \equiv \big(\varepsilon - \delta a(x)\big)\pi''(x) + a(x)\pi'(x) + b(x)\pi(x).$$

1.3 Osobine problema

U ovom odeljku će se navesti dekompozicija tačnog rešenja problema (1.10) i (1.11), odnosno navešće se značajne osobine dekompozicije rešenja. Navedene osobine će se koristiti u daljem radu i kod analize i ocene greške rešenja SPP.

Više informacija o problemu koja se posmatra u radu može se pronaći u [1], [5], [6], [12] i [15].

Diferencijalni operator L_ε zadovoljava sledeći princip minimuma.

Lema 1.2 (Kontinuiran princip minimuma) [12] *Neka dovoljno glatka funkcija π zadovoljava $\pi(0) \geq 0$ i $\pi(1) \geq 0$. Tada $L_\varepsilon \pi(x) \leq 0$, za $\forall x \in \Omega = (0,1)$ implicira da je $\pi(x) \geq 0$, za $\forall x \in \bar{\Omega} = [0,1]$.*

Pri izvođenju svih ocena greške koristićemo L^∞ normu

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Lema 1.3 (Stabilnost) [15] *Neka je funkcija u rešenje problema (1.10) i (1.11). Tada je*

$$\|u\| \leq \theta^{-1}\|f\| + \max(|\psi_0|, |\gamma|).$$

Izvod funkcije u ima sledeće osobine.

Teorema 1.4 [5] *Neka je u rešenje problema (1.10) i (1.11), onda*

$$\left\|u^{(k)}\right\| \leq C(\varepsilon - \delta\alpha)^{-k} \;\; za \;\;\; k = 1, 2, 3.$$

Ova teorema je korisna u dokazu narednih tvrđenja. Međutim pre nego što se navede naredna teorema posmatra se razlaganje rešenja u. Razlog za razlaganjem je dobijanje više informacija o rešenju koja su potrebna u dokazu da je numerička metoda ε −uniformna. Rešenje se razlaže na glatku komponentu v i singularnu komponentu w:

$$u = v + w.$$

Glatka komponenta v data je sa $v = v_0 + M_l v_1 + {M_l}^2 v_2$ gde su v_0, v_1 i v_2 definisani kao rešenja sledećih problemi:

$$a(x){v_0}'(x) + b(x)v_0(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \qquad v_0(1) = u(1),$$

$$a(x){v_1}'(x) + b(x)v_1(x) = -\big(\varepsilon - \delta a(x)\big){v_0}''(x)/M_l,$$

$$x \in \Omega, \qquad v_1(1) = 0$$

$$L_\varepsilon v_2(x) = -\big(\varepsilon - \delta a(x)\big){v_1}''(x)/M_l,$$

$$x \in \Omega, \qquad v_2(0) = 0, \qquad v_2(1) = 0.$$

Glatka komponenta v je rešenje problema

$$L_\varepsilon v(x) = f(x), \; x \in \Omega, \; v(0) = v_0(0) + M_l v_1(0), \tag{1.12}$$

$$v(1) = u(1). \tag{1.13}$$

Singularna komponenta w je rešenje homogenog problema

$$L_\varepsilon w(x) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad w(0) = u(0) - v(0), \tag{1.14}$$

$$w(1) = 0. \tag{1.15}$$

Izvodi komponenti rešenja imaju sledeće osobine:

Teorema 1.5 [5] *Neka je u rešenje problema (1.10) i (1.11) i neka važi $u = v + w$. Za $0 \leq k \leq 3$ i za dovoljno malo ε regularna i singularna komponenta v, w rešenja u i njihovi izvodi zadovoljavaju sledeće:*

$$\left\|v^{(k)}\right\| \leq C{M_l}^{2-k},$$

$$|w(x)| \le Ce^{\left(-\frac{\alpha x}{M_l}\right)}, \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$\left|w^{(k)}(x)\right| \le C{M_l}^{-k} e^{\left(-\frac{\alpha x}{M_l}\right)}, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

$gde\ je\ M_l = \varepsilon - \delta\alpha.$

Na osnovu prethodnog tvrđenja, rešenje u problema (1.10) i (1.11) ima sloj u okolini $x = 0$ čija širina zavisi od M_l.

Glava 2

Slojno-adaptivne mreže

Svi numerički postupci za rešavanje konturnih problema pomoću računara zahtevaju diskretizaciju diferencijalnih jednačina na nekoj mreži. Kod izbora odgovarajuće mreže treba da se gleda da dostiže dva cilja: dobru tačnost numeričkog rešenja i relativno jeftino rešenje sistema linearnih jednačina nastalog diskretizacijom polaznog problema. Ako se traži efikasan postupak za problem kod kojeg se rešenje naglo menja u nekih delovima intervala bitan je dobar izbor mreže.

Pri numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema, za aproksimaciju rešenja van sloja dovoljno je da se koristi gruba mreža. U slojnim delovima domena je poželjno da mreža bude dovoljno gusta. To često obezbeđuje da numeričko rešenje bude sa prihvatljivom tačnošću. Zbog toga je poželjno pažljivo izvršiti diskretizaciju domena. Iz tog razloga se generišu slojne-adaptivne mreže. Na takvim mrežama, problem se efikasno rešava u sloju i van njega.

Prvi predlog za mreže koje se koriste u rešavanju singularno perturbovanih problema je dao Bahvalov 1969. godine. Krajem 70-ih i početkom 80-tih godina više matematičara je proučavalo mreže koje su se primenjivale na problem tipa konvekcije difuzije, koje su zapravo problemi sa $\delta = 0$. Cilj je bio da se dostigne uniformna konvergencija. Nakon toga je Šiškin konstruisao svoju mrežu koja je po delovima ekvidistantna i jednostavnija od ostalih mreža. Ona daje slabiji numerički rezultat od ostalih mreža ali zbog svoje jednostavnosti dosta često se koristi.

U ovom odeljku za diskretizaciju polaznog domena koriste se po delovima ekvidistantne mreže kao što su: Šiskinova mreža (S-), mreža Bahvalova (B-), Bahvalov-Šiškinova mreža (BS-), modifikovana

Bahvalov-Šiškinova mreža (mBS-), polinomna Šiškinova mreža i Vulanović-Šiškinova mreža (VS-). Diskretizacija polaznog domena je potrebna da bi se dobila diskretizacija problema (1.10) i (1.11).

2.1 Osnovni pojmovi

Posmatra se linearni problem (1.10) i (1.11) čija je osobina opisana u prethodnoj glavi.

Pre nego što počnemo baviti slojno-adaptivnim mrežama, uvode se neki osnovni pojmovi za opisivanje diskretizacije mreže.

Definicija 2.1 [7] *Na intervalu* [0,1], *mreža je konačan skup*

$$\overline{\Omega}^N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \;\; N \in \mathbb{N},$$

sa osobinom

$$0 = x_0 < x_1 < \dots . < x_N = 1.$$

Čvorovi (tačke) mreže su x_i *za* $i = 0, 1, \dots, N$ *a unutrašnji čvorovi su* x_i *za* $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Koraci mreže su

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \;\; i = 1,2, \dots, N,$$

a maksimalna veličina koraka je

$$h = \max_{i=1,\dots,N} h_i.$$

Podintervali intervala [0,1] *označavaju se sa* $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$ *za* $i = 1, 2, \dots, N$.

Definicija 2.2 [7] *Mreža je ekvidistantna ako su joj koraci jednaki, tj.*

$$h_{i-1} = h_i, \;\; i = 2, \dots, N.$$

U suprotnom je mreža neekvidistantna.

Definicija 2.3 *Strogo monotona funkcija* φ: [0,1] → [0,1] *koja preslikava uniformnu mrežu po* $t_i = \frac{i}{N}, i = 0, 1, \dots, N$ *u slojno-adaptivnu mrežu po* x_i *sa* $x_i = \varphi(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ *se naziva generativna funkcija mreže.*

Generativna funkcija mreže $\varphi \in W^{1,1}(0,1)$ može se koristiti za određivanje koraka mreže i to na sledeći način

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(s)ds. \qquad (2.1)$$

Definicija 2.4 *Za strogo monotonu generativnu funkciju mreže* $\varphi: [0,1] \to [0,1]$, *karakteristična funkcija mreže je*

$$\psi(t) = e^{-\varphi(t)}, \ \ t \in [0,1].$$

Definicija 2.5 *Neka je strogo monotona funkcija* $\bar{\varphi}: [0, q] \to [0, \ln N]$, *gde je* $q \in (0,1)$ *i* $N \epsilon \mathbb{N}$, *tada karakteristična funkcija mreže* $\psi: [0, q] \to [1, N^{-1}]$ *definiše se sa*

$$\psi(t) = e^{-\overline{\varphi}(t)}, \ \ t \in [0, q].$$

U slučaju kada ima informacija o tačnom rešenju, onda se mogu koristiti neuniformne mreže. Jedna od jednostavnijih neuniformnih mreža koja je po delovima uniformna je Šiškinova mreža. Ona je dosta dobra za konstrukciju ε −uniformnih metoda. Na osnovu sledeće ideje se posmatraju i Šiškinova, Bahvalova i ostale mreže S-tipa. Ideja je da se podeli interval $[0,1]$ na dva podintervala $[0, \tau]$ i $[\tau, 1]$ gde se τ naziva tranzicionom tačkom i određuje tačku prelaza sa glatke u grubu mrežu. Posmatra se mreža $\overline{\Omega}^N$ kao u Definiciji 2.1, N je pozitivan ceo broj deljiv sa 2, $\frac{N}{2}$ čvorova se smesti ekvidistantno u interval $[0, \tau]$ i u $[\tau, 1]$. U sloju moraju čvorovi biti dovoljno gusto smešteni.

2.2 Šiškinova mreža

Neka su $q \in (0,1)$ i $\sigma \geq 1$ dva parametra mreže. Uvodi se i treći parametar mreže a taj parametar se naziva tranzicioni parametar τ, definisan je na sledeći način

$$\tau = \min\left\{q, \frac{\sigma M_l}{\alpha} \ln N\right\} \qquad (2.2)$$

gde su $M_l = \varepsilon - \delta\alpha > 0$, ε je parameter perturbacije u (1.10), α je konstanta za koju je $a(x) \geq \alpha > 0$, $\delta = o(\varepsilon)$ i N je parametar diskretizacije.

Mreža sa čvorovima označava se sa $\overline{\Omega}^N$ prema Definiciji 2.1, a čvorovi nisu ekvidistantno smešteni na celom intervalu $[0,1]$. Interval je podeljen pomoću tranzicionog parametra τ na dva podintervala $[0, \tau]$ i $[\tau, 1]$ i redom u ta dva podintervala smesti se ekvidistantno qN i $(1-q)N$ čvorova respektivno pod pretpostavkom da je qN ceo broj. Šiškinova mreža je generisana generativnom funkcijom ukoliko $\tau \neq q$, to jest kad je $q > \tau$ na sledeći način:

$x_i = \varphi(t_i)$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}(t_i) \text{ gde je } \bar{\varphi}(t_i) = \bar{\varphi}\left(\dfrac{i}{N}\right) = \dfrac{i}{qN}\ln N, i = 0, \dots, qN \\ 1 - \left(1 - \dfrac{\sigma M_l}{\alpha}\ln N\right)\dfrac{N-i}{(1-q)N}, \qquad \text{za ostalo.} \end{cases} \tag{2.3}$$

U definiciji (2.3) predstavljene su tačke mreže $x_i = \varphi(t_i)$ odnosno čvorovi mreže $\overline{\Omega}^N$, gde je $t_i = \frac{i}{N}$ za $i = 0, 1, \dots, qN$. Tako definisana mreža se naziva Šiškinova mreža.

Generativna funkcija φ sa kojom se definišu tačke mreže zadovoljava Definiciju 2.3. Ova funkcija je neprekidna, monotona svuda i po delovima neprekidno diferencijabilna. Funkcija $\bar{\varphi}$ iz (2.3) je takođe generativna funkcija mreže. Za nju važi $\bar{\varphi}: [0, q] \to [0, lnN]$, gde je $q \in (0,1)$. Prema Definiciji 2.5, karakteristična funkcija mreže je

$$\psi(t) = e^{-\bar{\varphi}(t)}, \;\; t \in [0, q].$$

Posmatra se funkcija $\bar{\varphi}$ iz definicije tačaka Šiškinove mreže koja je data sa

$$\bar{\varphi}(t_i) = \bar{\varphi}\left(\frac{i}{N}\right) = \frac{i}{qN}\ln N \;\; \text{za} \;\; i = 0, 1, \dots, qN. \tag{2.4}$$

Ako je $i = 0$ onda je $t_i = 0$, prema (2.4), dobija se

$$\overline{\varphi}(0) = \frac{0}{qN}\ln N = 0, \tag{2.5}$$

ako je $i = qN$ onda je $t_i = q$, prema (2.4), dobija se

$$\bar{\varphi}(q) = \frac{q}{q}\ln N = \ln N. \tag{2.6}$$

Dalje se posmatra karakteristična funkcija mreže ψ iz Definiciji 2.5. Za $t_i = 0$, prema (2.5), dobija se

$$\psi(0) = 1, \tag{2.7}$$

a za $t_i = q$, prema (2.6) dobija se

$$\psi(q) = N^{-1}. \tag{2.8}$$

Karakteristična funkcija je monotono opadajuća funkcija.

Pretpostavka 2.6 *Neka je* $\tau = \frac{\sigma M_l}{\alpha} \ln N$ *jer je u suprotnom* N^{-1} *jako malo u poređenju sa* ε*, preciznije* $N^{-1} \leq Ce^{-1/M_l}$*. Ove pretpostavke nazivamo slabim pretpostavkama i obično je to slučaj kod singularno perturbovanog problema, što osigurava da je slojni izraz* $e^{-\alpha x/M_l}$ *manji od* $N^{-\sigma}$ *na* $[\tau, 1]$*. Takođe se pretpostavlja* $M_l \leq C_0 N^{-1}$*.*

2.3 Mreža Bahvalova

Bahvalov je 1969. godine predstavio jedan eksplicitni metod za konstruisanje mreže pri rešavanju singularno perturbovanih problema, a s vremenom je nastalo i više modifikovanih metoda što je Bahvalov koristio. Bahvalova ideja je bila da se mreža podeli t-ekvidistantno i koristi se $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ generativna funkcija mreže koja je strogo monotona. Smesti se t-ekvidistantna mreža na t-osi i sa funkcijom $\varphi(t)$ se slikaju čvorovi na x-osi. Dobijamo čvorove x_i u blizini $x = 0$ sa

$$q\left(1 - e^{\left(-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}\right)}\right) = t_i = \frac{i}{N} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots$$

gde su $q \in (0,1)$ i $\sigma \geq 1$ parametri mreže. Pomoću tranzicionog parametra τ generativna funkcija mreže φ postaje neprekidna i

$$\varphi(t) = \begin{cases} \chi(t) := -\dfrac{\sigma M_l}{\alpha} \ln \dfrac{q - t}{q}, & \text{za } t \in [0, \tau], \\ \pi(t) := \chi(\tau) + \chi'(\tau)(t - \tau), & \text{za } t \in [\tau, 1], \end{cases}$$

gde τ zadovoljava sledeći izraz

$$\chi'(\tau) = \frac{1 - \chi(\tau)}{1 - \tau}. \tag{2.9}$$

Geometrijski gledano, u tački $\big(\tau, \chi(\tau)\big)$ funkcija π je tangenta na χ. Jednačina (2.9) je nelinearna i za nju ne postoji eksplicitno rešenje. Međutim iterativni postupak

$$\tau_0 = 0, \quad \chi'(\tau_{i+1}) = \frac{1 - \chi(\tau_i)}{1 - \tau_i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

konvergira brzo.

Ovaj tip mreže je naveden sa ciljem da se dobije jasnija slika o Bahvalov-Šiškinovoj mreži, pošto ta mreža spada među mreže S-tipa i takve mreže su tema ovog rada.

2.4 Mreže S-tipa

U ovom delu se navode osobine mreža Šiškinovog tipa (S-tipa) i neke od osobina Šiškinove mreže. Pored Šiškinove mreže u ovom radu ćemo se baviti sa: Bahvalov-Šiškinovom mrežom (BS-), Vulanović-Šiškinovom mrežom (VS-), modifikovanom Bahvalov-Šiškinovom mrežom (mBS-) i polinomnom Šiškinovom mrežom.

Tačke mreže S-tipa se definišu na sledeći način

$$x_i = \varphi(t_i)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}(t_i), & i = 0, 1, \dots, qN, \\ \tau + (i - qN)\dfrac{(1-\tau)}{(1-q)N}, & i = qN+1, \dots, N, \end{cases} \tag{2.10}$$

gde je τ tranziciona tačka data sa (2.2).

Pretpostavka 2.7 [13] *Neka je $\bar{\varphi}$ generativna funkcija mreže po delovima neprekidno diferencijabilna funkcija tako da važi*

$$\max_{t\in[0,q]} \bar{\varphi}'(t) \le CN \;\; ako\ i\ samo\ ako \;\; \max_{t\in[0,q]} \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \le \mathrm{CN} \tag{2.11}$$

i

$$\int_0^{1/2} \bar{\varphi}'(s)^2\, ds \le CN. \tag{2.12}$$

Napomena 2.8 U prethodoj pretpostavci data je ekvivalencija (2.11) koja se lako dokazuje:

Neka je

$$\max_{t\in[0,q]} \bar{\varphi}'(t) \le CN \tag{2.13}$$

Prvi izvod karakteristične funkcije ψ je

$$\psi'(t) = \left(e^{-\bar{\varphi}(t)}\right)' = -\bar{\varphi}'(t)\psi(t), \qquad t \in [0, q].$$

Odavde se izrazi $\bar{\varphi}'(t)$ i dobija se

$$\bar{\varphi}'(t) = -\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}, \qquad t \in [0, q]. \tag{2.14}$$

Kako je ψ monotono opadajuća funkcija tada važi $\psi'(t) \leq 0$ za sve $t \in [0, q]$ pa je $-\psi'(t) \geq 0$ za sve $t \in [0, q]$. Karakteristična funkcija ψ je monotona i važi (2.7) i (2.8). Zato je $\psi(t) \geq 0$ za sve $t \in [0, q]$, pa se dobija da je desna strana jednakosti (2.14) nenegativna. Generativna funkcija $\bar{\varphi}$ je monotono rastuća pa zato važi $\bar{\varphi}'(t) \geq 0$ za sve $t \in [0, q]$. Prema tome je $|\bar{\varphi}'(t)| = \bar{\varphi}'(t)$ pa važi

$$0 \leq -\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} = |\bar{\varphi}'(t)| = \bar{\varphi}'(t).$$

Zaključuje se da je

$$\bar{\varphi}'(t) = \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}. \tag{2.15}$$

Dalje se iskoristi (2.15) u (2.13) pa se dobija

$$CN \geq \max_{t\in[0,q]} \bar{\varphi}'(t) = \max_{t\in[0,q]} \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)},$$

što je i trebalo pokazati. Drugi smer u ekvivalenciji (2.11) se analogno dokazuje.

Lema 2.9 [3] *Za tačke mreže x_i definisane u (2.10), lokalni korak mreže h_i ima osobinu*

$$h_i \leq \begin{cases} CM_l N^{-1} \max\limits_{t\in[0,q]} \bar{\varphi}'(t), & i = 1, 2, \ldots, qN, \\ \\ CN^{-1}, & i = qN + 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Dokaz Prema definiciji tačaka mreže (2.10), za $i = 0, 1, \ldots, qN$ tačke mreže su oblika

$$x_i = \frac{\sigma M_l}{\alpha} \bar{\varphi}(t_i).$$

Koraci mreže za svako $i = 1, 2, \ldots, qN$ prema Definiciji 2.1 i (2.10) su dati sa:

$$\begin{aligned} h_i = x_i - x_{i-1} &= \frac{\sigma M_l}{\alpha} \bar{\varphi}(t_i) - \frac{\sigma M_l}{\alpha} \bar{\varphi}(t_{i-1}) \\ &= \frac{\sigma M_l}{\alpha} \big(\bar{\varphi}(t_i) - \bar{\varphi}(t_{i-1})\big). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Kako je funkcija $\bar{\varphi}$ neprekidna, monotona svuda i po delovima neprekidno diferencijabilna, ona zadovoljava Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti pa postoji $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tako da je

$$\bar{\varphi}(t_i) - \bar{\varphi}(t_{i-1}) = \bar{\varphi}'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}). \tag{2.17}$$

Dalje se iskoristi (2.17) u (2.16) pa se dobija

$$h_i = \frac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \frac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}'(\xi_i)\frac{i - i + 1}{N}$$

$$= \frac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}'(\xi_i)N^{-1}. \qquad (2.18)$$

Kako je

$$\bar{\varphi}'(\xi_i) \leq \max_{t\in[0,q]} \bar{\varphi}'(t),$$

jer je $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i) \subset [0, q]$, birajući $C = \frac{\sigma}{\alpha}$ dobija se

$$h_i \leq CM_l N^{-1} \max_{t\in[0,q]} \bar{\varphi}'(t), \quad i = 1, 2, \dots, qN.$$

Sad se pokazuje da za $i = qN + 1, \dots, N$ važi $h_i \leq CN^{-1}$.Tačke mreže u (2.10) za $i = qN + 1, \dots, N$ su oblika

$$x_i = \tau + (i - qN)\frac{(1-\tau)}{(1-q)N}.$$

Korak mreže za $i = qN + 1, \dots, N$ je

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$= \tau + (i - qN)\frac{(1-\tau)}{(1-q)N} - \tau - (i - 1 - qN)\frac{(1-\tau)}{(1-q)N}$$

$$= \frac{(1-\tau)}{(1-q)N} \leq \frac{1}{(1-q)N} = CN^{-1}.$$

Time je lema dokazana.

■

Lema 2.10 [3] *Za tačke x_i mreže $\overline{\Omega}^N$ definisane u (2.10), lokalni korak mreže h_i ima osobinu*

$$h_i \leq \begin{cases} CM_l N^{-1} e^{\bar{\varphi}(t_i)} \max\limits_{t\in[0,q]} |\psi'(t)|, & i = 1, 2, \dots, qN, \\ \\ CN^{-1}, & i = qN + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Dokaz Neka je $i = 1, 2, \dots, qN$. U dokazu se koriste izraz (2.14) i (2.18). Iz prethodnog dokaza se zna da za $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ važi

$$h_i = \frac{\sigma}{\alpha} M_l N^{-1} \bar{\varphi}'(\xi_i) = \frac{\sigma}{\alpha} M_l N^{-1}\left(-\frac{\psi'(\xi_i)}{\psi(\xi_i)}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{\alpha} M_l N^{-1}\frac{|\psi'(\xi_i)|}{\psi(\xi_i)}. \qquad (2.19)$$

Uvek važi

$$\frac{|\psi'(\xi_i)|}{\psi(\xi_i)} \leq \max_{t\in[0,q]} \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}.$$

Kako je ψ opadajuća funkcija i $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ zato je

$$\psi(\xi_i)^{-1} \leq \psi(t_i)^{-1},$$

prema ovom rezultatu i prema $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ važi

$$\begin{aligned}\frac{|\psi'(\xi_i)|}{\psi(\xi_i)} &\leq \psi(t_i)^{-1}|\psi'(\xi_i)| \leq \psi(t_i)^{-1} \max_{t\in[t_{i-1},t_i]}|\psi'(t)| \\ &\leq \psi(t_i)^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Sada se iskoristi izraz (2.20) i Definicija 2.5 u (2.19) pa se dobija:

$$\begin{aligned}h_i &\leq \frac{\sigma}{\alpha} M_l N^{-1} \psi(t_i)^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)| \\ &\leq \frac{\sigma}{\alpha} M_l N^{-1} \left(e^{-\overline{\varphi}(t_i)}\right)^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)| \\ &\leq \frac{\sigma}{\alpha} M_l N^{-1} e^{\overline{\varphi}(t_i)} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|.\end{aligned}$$

Tako je pokazano tvrđenje za $i = 1, 2, \dots qN$.

Drugi deo tvrđenja sledi iz prethodne leme.

■

U nastavku se pokazuje da važi $h_i \leq CN^{-1}$ na celom domenu, to jest za sve $i = 1, 2, \dots, N$. Za $i = qN + 1, \dots, N$ se zna da važi $h_i \leq CN^{-1}$. Na osnovu Pretpostavke 2.7 i Leme 2.9, za $i = 1, \dots, qN$ dobija se

$$h_i \leq CM_l N^{-1} \max_{t\in[0,q]} \overline{\varphi}'(t) \leq CM_l$$

odnosno

$$h_i \leq CM_l, \;\; i = 1, \dots, qN. \qquad (2.21)$$

Kako je u Pretpostavci 2.6 navedeno,

$$M_l \leq C_0 N^{-1},$$

prema tome i prema (2.21) zaključuje se da važi

$$h_i \leq CN^{-1} \;\; \text{za} \;\; i = 1, 2, \dots, qN,$$

dakle

$$h_i \leq CN^{-1} \;\; \text{za} \;\; i = 1, 2, \dots, N.$$

U narednoj tabeli su prikazane različite mreže S-tipa iz [2] i [9]. Pored generativnih funkcija, prikazane su i karakteristične funkcije zajedno sa maksimumima prvih izvoda.

Tabela 2.1 Razne mreže S-tipa

Mreža	$\bar{\varphi}(t)$	$\max \bar{\varphi}'$	$\psi(t)$	$\max\lvert\psi'\rvert$
S-mreža	$\frac{t}{q}\ln N$	$\frac{1}{q}\ln N$	$exp\left(-\frac{t}{q}\ln N\right)$	$\frac{\ln N}{q}$
BS-mreža	$-\ln\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{t}{q}\right)$	$\frac{1}{q}N$	$1-\left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{t}{q}$	$\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{N}\right)\leq\frac{1}{q}$
mBS-mreža	$\frac{t}{(p-t)}, p=q\left(1+\frac{1}{\ln N}\right)$	$3(\ln N)^2$	$exp\left(-\frac{t}{(p-t)}\right)$	$\frac{3}{2p}\leq 3$
VS-mreža	$\frac{t\ln N}{q+(q-t)\ln N}$	$\frac{2(\ln N)^2}{q}$	$exp\left(-\frac{t\ln N}{q+(q-t)\ln N}\right)$	$\frac{4}{q}$
Polinomna S-mreža	$\left(\frac{t}{q}\right)^m \ln N,\ \ m\geq 1$	$\frac{1}{q}m\ln N, m\geq 1$	$N^{-\left(\frac{t}{q}\right)^m},\ \ m\geq 1$	$C(\ln N)^{\frac{1}{m}}$

Za prikazane mreže S-tipa, koraci h_i imaju sledeće osobine:

Posledica 2.11 *Neka je za $i=1,2,\ldots,qN$ lokalni korak mreže h_i ima sledeće osobine*

$$h_i \leq \begin{cases} CM_l N^{-1}\ln N, & \text{na S} - \text{mreži},\\ CM_l, & \text{na BS} - \text{mreži},\\ CM_l N^{-1}(\ln N)^2, & \text{na mBS} - \text{mreži},\\ CM_l N^{-1}(\ln N)^2, & \text{na VS} - \text{mreži},\\ CM_l N^{-1} m\ln N, & \text{na polinomnoj S} - \text{mreži}. \end{cases}$$

Tražene ocene slede iz Leme 2.9 za $i=1,2,\ldots,qN$, prema vrednosti $\max\bar{\varphi}'$ koje su date u Tabeli 2.1.

Glava 3

Analiza i ocena greške

U ovoj glavi prvo se navodi diferencni operator koji se koristi u opisu postupka kojim se rešava problem (1.10) i (1.11). Zatim se predstavlja sam postupak kojim se rešava singularni perturbovan problem. Taj postupak se zove konačno-diferencni postupak. Glava se završava analizom i ocenom greške.

3.1 Diferencni operatori

U ovom poglavlju se izvodi diferencna šema za neuniformnu mrežu i neke bitne osobine koje se kasnije koriste. Najpre se definišu konačno-diferencni operatori koji su neophodni za izvođenje diferencne šeme:

$$D^+V_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{h_{i+1}}, \quad D^-V_i = \frac{V_i - V_{i-1}}{h_i}, \tag{3.1}$$

$$D^{\pm}V_i = \frac{D^+ - D^-}{\bar{h}_i} V_i, \tag{3.2}$$

gde je $1 \leq i \leq N - 1$

$$\bar{h}_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}, \quad \bar{h}_0 = \frac{h_1}{2}, \quad \bar{h}_N = \frac{h_N}{2}.$$

Izvedimo neke jednostavne standardne rezultate koji će biti korisni kasnije u dokazima narednih teorema. Mreža koja se koristi u narednoj lemi je Ω^N na intervalu $(0,1)$.

Lema 3.1 [11] *Neka je $x_i \in \Omega^N$. Tada za proizvoljnu funkciju $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ važi*

$$\left|\left(D^+ - \frac{d}{dx}\right)\varphi(x_i)\right| \leq \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\|\varphi^{(2)}\|.$$

Ako je $\varphi \in C^3(\bar{\Omega})$, onda je

$$\left|\left(D^\pm - \frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi(x_i)\right| \leq \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1})\|\varphi^{(3)}\|.$$

Dokaz Koristeći integraciju po delovima za smanjenje izvoda nije teško zaključiti da važi:

$$\begin{aligned}\left(D^+ - \frac{d}{dx}\right)\varphi(x_i) &= \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h_{i+1}} - \varphi'(x_i)\\
&= \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{h_{i+1}}\varphi'(x_i)\\
&= \frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h_{i+1}} + \frac{\varphi'(x_i)}{h_{i+1}}(x_i - x_{i+1})\\
&= \frac{1}{h_{i+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - s)\varphi''(s)\,ds.\end{aligned}$$

Uzimajući modul gornje jednakosti, dobija se:

$$\begin{aligned}\left|\left(D^+ - \frac{d}{dx}\right)\varphi(x_i)\right| &\leq \frac{\|\varphi^{(2)}\|}{h_{i+1}}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - s)\,ds\right|\\
&= \frac{1}{2}\|\varphi^{(2)}\|(x_{i+1} - x_i).\end{aligned}$$

Sad se pokazuje druga nejednakost. Postupak je sličan kao kod prvog slučaja. Koristi se integracija:

$$\begin{aligned}\left(D^\pm - \frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi(x_i) &= \frac{2}{h_{i+1} + h_i}\left(D^+\varphi(x_i) - D^-\varphi(x_i)\right) - \varphi''(x_i)\\
&= \frac{2}{h_{i+1} + h_i}\left(\frac{\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{h_i}\right) - \varphi''(x_i)\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\varphi(x_{i+1})}{h_{i+1}} + \frac{\varphi(x_{i-1})}{h_i} - \varphi(x_i)\frac{x_{i+1} - x_{i-1} \pm x_i}{h_{i+1}h_i}\right)$$

$$+ \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}}\varphi''(x_i)(x_{i-1} - x_{i+1} \pm x_i)$$

$$= \frac{1}{h_{i+1}(x_{i+1} - x_{i-1})}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)^2\, \varphi'''(s)ds$$

$$- \frac{1}{h_i(x_{i+1} - x_{i-1})}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (s - x_{i-1})^2\, \varphi'''(s)ds.$$

Opet se uzima pod modul gornja jednakost pa se dobija:

$$\left|\left(D^{\pm} - \frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi(x_i)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{h_{i+1}(x_{i+1} - x_{i-1})}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - s)^2\, \varphi'''(s)ds\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{h_i(x_{i+1} - x_{i-1})}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (s - x_{i-1})^2\, \varphi'''(s)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{h_{i+1}(x_{i+1} - x_{i-1})}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |(x_{i+1} - s)^2|\, |\varphi'''(s)|ds$$

$$+ \frac{1}{h_i(x_{i+1} - x_{i-1})}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |(s - x_{i-1})^2|\, |\varphi'''(s)|ds$$

$$\leq \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{h_{i+1}(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{|(x_{i+1} - x_i)^3|}{3}\right)$$

$$+ \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{h_i(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{|(x_i - x_{i-1})^3|}{3}\right)$$

$$= \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{3(x_{i+1} - x_{i-1})}(|(x_{i+1} - x_i)^2| + |(x_i - x_{i-1})^2|)$$

$$= \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{3(x_{i+1} - x_{i-1})}({x_{i+1}}^2 - 2x_{i+1}x_i + {x_i}^2 + {x_i}^2 - 2x_i x_{i-1} + {x_{i-1}}^2)$$

$$+ \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{3(x_{i+1} - x_{i-1})}(\pm 2x_{i+1}x_{i-1})$$

$$= \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{3(x_{i+1} - x_{i-1})}\big((x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i+1})(2x_i - 2x_{i-1})\big)$$

$$\leq \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{3(x_{i+1}-x_{i-1})}(x_{i+1}-x_{i-1})^2 = \frac{\|\varphi^{(3)}\|}{3}(x_{i+1}-x_{i-1}).$$

■

3.2 Konačni-diferencni postupak

U ovom delu se vrši diskretizacija konturnog problema (1.10) i (1.11) koristeći konačno diferencni postupak koji se sastoji od s*tandardnog upwind* diferencnog operatora. Mreža koja se posmatra je $\overline{\Omega}^N$ na intervalu $[0,1]$, kako je već rečeno. Interval se deli na dva podintervala $[0,\tau]$ i $[\tau, 1]$ sa tranzicionom tačkom τ koja je data sa (2.2).

Metod kojim se bavi ovaj odeljak i koji se primenjuje za rešavanje problema (1.10) i (1.11) se definiše na sledeći način:

$$L_\varepsilon^N u_i = f(x_i), \qquad x_i \in \Omega^N, \tag{3.3}$$

$$u_0 = \phi_0, u_N = \gamma, \tag{3.4}$$

gde je diskretni operator L_ε^N definisan kao

$$L_\varepsilon^N u_i = \big(\varepsilon - \delta a(x_i)\big)D^{\pm}u_i + a(x_i)D^{+}u_i + b(x_i)u_i,$$

a diferencne šeme $D^{\pm}$, D^{+} definisane su (3.1) i (3.2). Kod definicije diskretnog operatora je bitno napomeniti da je $u(x_i) \approx u_i$ za svako $i, 1 \leq i \leq N-1$.

Diskretni operator L_ε^N zadovoljava diskretni princip minimuma, kao i osobine stabilnosti, što je prikazano u naredna dva tvrđenja.

Lema 3.2 (Diskretni princip minimuma) [6] *Pretpostavimo da važi* $\psi_0 \geq 0$ *i* $\psi_N \geq 0$. *Tada* $L_\varepsilon^N \psi_i \leq 0$ *za* $1 \leq i \leq N-1$, *implicira da je* $\psi_i \geq 0$ *za sve* $0 \leq i \leq N$.

Lema 3.3 [6] *Neka je* Z_i *mrežna funkcija, za koju važi* $Z_N = Z_0 = 0$. *Tada je za sve* i, $0 \leq i \leq N$

$$|Z_i| \leq \theta^{-1} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left|L_\varepsilon^N Z_j\right|.$$

Pre nego što pređemo na ocenu greške, pokažimo i sledeću korisnu osobinu operatora L_ε^N. Neka je $Z_i = \prod_{j=i+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)$, $i = 0, 1, \dots N$, pri čemu je $Z_N := 1$.

Lema 3.4 *Za svako* $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ *je* $L_\varepsilon^N Z_i < 0$.

Dokaz. Prema definiciji diskretnog operatora L_ε^N dobija se

$$L_\varepsilon^N Z_i = \left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)D^{\pm}Z_i + a(x_i)D^{+}Z_i + b(x_i)Z_i. \tag{3.5}$$

Prema gornjem izrazu lema se dokazuje tako što se prvo izvode izrazi za diferencne operatore $D^{+}Z_i$ i $D^{\pm}Z_i$ za proizvoljan indeks $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Najpre je

$$D^{+}Z_i = \frac{1}{h_{i+1}}(Z_{i+1} - Z_i)$$

$$= \frac{1}{h_{i+1}}\left[\prod_{j=(i+1)+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right) - \prod_{j=i+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h_{i+1}}\prod_{j=i+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)\left[\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{h_{i+1}}\prod_{j=i+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1}\left[1 - \left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{\sigma M_l}Z_i\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1},$$

$$D^{-}Z_i = \frac{1}{h_i}(Z_i - Z_{i-1})$$

$$= \frac{1}{h_i}\left[\prod_{j=i+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right) - \prod_{j=(i-1)+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h_i}\prod_{j=i+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)\left[1 - \left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_i\right)\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{\sigma M_l}Z_i,$$

$$D^{\pm}Z_i = \frac{1}{\bar{h}_i}(D^+Z_i - D^-Z_i)$$

$$= \frac{1}{\bar{h}_i}\left[-\frac{\alpha}{\sigma M_l}Z_i\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1} - \left(-\frac{\alpha}{\sigma M_l}\right)Z_i\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{\sigma M_l \bar{h}_i}Z_i\left[\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1} - 1\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{\sigma M_l \bar{h}_i}Z_i\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1}\left[1-\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha^2 h_{i+1}}{\sigma^2 {M_l}^2 \bar{h}_i}Z_i\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1}.$$

Dobijeni rezultati se iskoriste u (3.5) pa se dobije:

$$L_\varepsilon^N Z_i = \left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)\frac{\alpha^2 h_{i+1}}{\sigma^2 {M_l}^2 \bar{h}_i}Z_i\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1}$$

$$+a(x_i)\left(-\frac{\alpha}{\sigma M_l}\right)Z_i\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1} + b(x_i)Z_i$$

$$= -\frac{\alpha}{\sigma M_l}Z_i\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_{i+1}\right)^{-1}\left[a(x_i) - \frac{\alpha h_{i+1}}{\sigma M_l \bar{h}_i}\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)\right]$$

$$+b(x_i)Z_i. \tag{3.6}$$

Da bi dokazali $L_\varepsilon^N Z_i < 0$ mora se posebno posmatrati deo prethodne jednakosti što je u uglastim zagradama. Kako je $a(x_i) \geq \alpha$, $\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right) \leq \varepsilon - \delta\alpha = M_l$ i $\sigma > 2$ dobija se:

$$a(x_i) - \frac{\alpha h_{i+1}}{\sigma M_l \bar{h}_i}\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right) \geq \alpha - \frac{\alpha h_{i+1}}{\sigma \bar{h}_i M_l}\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right) \geq \alpha - \frac{\alpha h_{i+1}}{\sigma \bar{h}_i}$$

$$\geq \alpha - \frac{\alpha h_{i+1}}{2\bar{h}_i} = \alpha\left(1 - \frac{h_{i+1}}{2\bar{h}_i}\right)$$

$$= \alpha\left(1 - \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}\right)$$

$$= \alpha\frac{h_i + h_{i+1} - h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$= \alpha\frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} > 0,$$

što znači da je izraz u uglastim zagradama pozitivan. Kako je $b(x_i) \leq -\theta < 0$, zaključuje se da je $L_\varepsilon^N Z_i < 0$.

■

Lema 3.5 *Za svako* $i \in \{0, 1, \dots, qN\}$ *je* $\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1} \leq C\psi(t_i)$.

Dokaz. Po definiciji je $\prod_{j=1}^{0}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1} = 1$, zato se u daljem radu posmatra proizvoljan indeks $i \in \{1,2, \dots, qN\}$. Osobinu da za $t > 0$ važi $\ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$ kao i osobine logaritma ćemo iskoristiti u sledećem koraku pa se dobija:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)\right) &= \sum_{j=1}^{i}\ln\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{i}\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2 \\
&= \frac{\alpha}{\sigma M_l}(h_1 + h_2 + \dots + h_i) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2 \\
&= \frac{\alpha}{\sigma M_l}x_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2.
\end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right) &\geq exp\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}x_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2\right) \\
&= exp\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}x_i\right) exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2\right),
\end{aligned}$$

a odavde se dobija

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1} \\
&\quad \leq exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma M_l}x_i\right) exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2\right). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Prema definiciji tačaka (2.10) je

$$x_i = \frac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, qN,$$

a odavde se dobija

$$exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma M_l}x_i\right) = exp\big(-\bar{\varphi}(t_i)\big) = \psi(t_i). \tag{3.8}$$

Osim toga je prema (2.1), (2.12), i prema nejednakosti Čebišev-Jensena dobija se:

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^2 &= \sum\nolimits_{j=1}^{i}\left(\frac{\alpha}{\sigma M_l}\frac{\sigma M_l}{\alpha}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\bar{\varphi}'(s)ds\right)^2 \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{i}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\bar{\varphi}'(s)ds\right)^2 \\
&\leq \sum\nolimits_{j=1}^{i}\big(t_j - t_{j-1}\big)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\big(\bar{\varphi}'(s)\big)^2 ds \\
&= (t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1}\big(\bar{\varphi}'(s)\big)^2 ds + \ \ldots + (t_i - t_{i-1})\int_{t_{i-1}}^{t_i}\big(\bar{\varphi}'(s)\big)^2 ds \\
&= \left(\frac{1}{N} - \frac{0}{N}\right)\int_{t_0}^{t_1}\big(\bar{\varphi}'(s)\big)^2 ds + \ \ldots + \left(\frac{i}{N} - \frac{i-1}{N}\right)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\big(\bar{\varphi}'(s)\big)^2 ds \\
&= N^{-1}\int_0^{t_i}\big(\bar{\varphi}'(s)\big)^2 ds \leq N^{-1}\int_0^{q}\big(\bar{\varphi}'(s)\big)^2 ds \\
&\leq CN^{-1}N = C.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Na kraju uvrstimo (3.8) i (3.9) u (3.7) i dobija se traženo.

■

U slučaju konturnog problema (1.10) i (1.11) već je pokazana dekompozicija tačnog rešenja u. Tačno rešenje $U^N = \{u_i\}_0^N$ diskretnog problema (3.3) i (3.4) takođe se sastoji od regularne i singularne komponente

$$U^N = V^N + W^N, \tag{3.10}$$

gde je V^N rešenje nehomogenog problema

$$L_\varepsilon^N V_i^N = f(x_i) \text{ za sve } x_i \in \Omega^N,\ V_0^N = v(0),\ \ V_N^N = v(1), \tag{3.11}$$

i W^N je rešenje homogenog problema

$$L_\varepsilon^N W_i^N = 0 \text{ za sve } x_i \in \Omega^N,\ W_0^N = w(0),\ \ W_N^N = w(1). \tag{3.12}$$

Prema dekompoziciji tačnog rešenja u konturnog problema (1.10) i (1.11) zna se da je

$$u = v + w,$$

a prema (3.10) dobija se sledeće razlaganje greške

$$U^N - u = (V^N - v) + (W^N - w). \tag{3.13}$$

3.3 Ocena greške rešenja

Ovaj deo poglavlja se bavi analizom i ocenom greške regularne i slojne komponente na finom i grubom delu mreže. Pored tih tvrđenja se daju i pomoćna tvrđenja koja su takođe jako bitna za izvođenje odgovarajuće ocene greške. Najzad se daje najvažnije tvrđenje ovog dela a to je ocena greške numeričkog rešenja U^N.

Teorema 3.6 *Neka je funkcija v rešenje problema (1.12) i (1.13) a V^N rešenje nehomogenog problema (3.11). Tada je*

$$\left|V_i^N - v(x_i)\right| \leq CN^{-1}, \;\; i = 0, 1, \dots, N,$$

gde je C konstanta nezavisna od N i M_l.

Dokaz. Sad se ocenjuje greška regularne komponente numeričkog rešenja. Polazimo od:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^N\left(V_i^N - v(x_i)\right) &= f(x_i) - L_\varepsilon^N v(x_i) \\ &= L_\varepsilon v(x_i) - L_\varepsilon^N v(x_i) \\ &= (L_\varepsilon - L_\varepsilon^N) v(x_i) \\ &= \left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - D^{\pm}\right) v(x_i) \\ &\quad + a(x_i)\left(\frac{d}{dx} - D^{+}\right) v(x_i). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Uzimajući apsolutnu vrednost od (3.14), prema Lemi 3.1 se dobija:

$$\begin{aligned} \left|L_\varepsilon^N\left(V_i^N - v(x_i)\right)\right| &\leq \left|\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)\right| \left|\left(\frac{d^2}{dx^2} - D^{\pm}\right) v(x_i)\right| \\ &\quad + |a(x_i)| \left|\left(\frac{d}{dx} - D^{+}\right) v(x_i)\right| \\ &\leq \left|\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)\right| \frac{1}{3}(x_{i+1} - x_{i-1}) \left\|v^{(3)}\right\| \\ &\quad + |a(x_i)| \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \left\|v^{(2)}\right\| \end{aligned}$$

$$\leq (x_{i+1} - x_{i-1}) \left(\frac{\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)}{3} \left\| v^{(3)} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{|a(x_i)|}{2} \left\| v^{(2)} \right\| \right).$$

Koristeći $x_{i+1} - x_{i-1} \leq 2N^{-1}$ i ocene za $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ prema Teoremi 1.5 dobija se za $x_i \in \Omega^N$

$$\left| L_\varepsilon^N \left(V_i^N - v(x_i) \right) \right| \leq 2N^{-1} \left(\frac{M_l}{3} C M_l^{-1} + \frac{a(x_i)}{2} C \right) \leq CN^{-1}. \quad (3.15)$$

Prema Lemi 3.3 dobija se:

$$\left| V_i^N - v(x_i) \right| \leq \theta^{-1} \max_{1 \leq j \leq N-1} \left| L_\varepsilon^N \left(V_i^N - v(x_i) \right) \right|. \quad (3.16)$$

Iskoristi se (3.15) u nejednakosti (3.16) pa se dobija:

$$\left| V_i^N - v(x_i) \right| \leq CN^{-1}, \;\; x_i \in \Omega^N. \quad (3.17)$$

■

Preostalo je da se analizira greška za slojnu komponentu, a ta analiza će se posebno izvesti na grubom i finom delu mreže. Pre toga se dokazuje sledeća teorema što će se koristiti u nastavku.

Teorema 3.7 *Neka je funkcija w rešenje problema (1.14) i (1.15) a W^Nrešenje homogenog problema (3.12). Tada je*

$$\left| W_i^N - w(x_i) \right| \leq C \prod_{j=1}^{i} \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1}, \;\; i = 0, 1, \dots, N,$$

gde je C konstanta nezavisna od N i M_l i $\sigma > 2$.

Dokaz. Prema Teoremi 1.5 o dekompoziciji rešenja, za svako $x_i \in [0,1]$ je

$$|w(x_i)| \leq C exp\left(-\frac{\alpha x_i}{M_l} \right).$$

Kako se tačka $x_i \in [0,1]$ može zapisati kao $x_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$, sledi

$$exp\left(-\frac{\alpha x_i}{M_l} \right) = exp\left(-\frac{\alpha \sigma}{M_l \sigma} \sum_{j=1}^{i} h_j \right) = \prod_{j=1}^{i} exp\left(-\frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j \sigma \right)$$

$$\leq \prod_{j=1}^{i} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j \right)^{-\sigma}. \quad (3.18)$$

U poslednjoj nejednakosti se koristi da je $e^t \geq 1 + t, t > 0$ i $\sigma > 2$.

Dakle za $i = 0, 1, \dots N$ je

$$|w(x_i)| \leq Cexp\left(-\frac{\alpha x_i}{M_l}\right) \leq C\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-\sigma}$$

$$\leq C\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}. \qquad (3.19)$$

U nastavku se izvodi ocena za $|W_i^N|$. Neka je najpre

$$Y_i = C_Y\left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}\right)Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \qquad (3.20)$$

gde je C_Y za sada samo proizvoljna pozitivna konstanta nezavisna od N i M_l, i

$$Z_i = \prod_{j=i+1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right), \qquad i = 0, 1, \dots N.$$

Pokazujemo da je Y_i barijerna funkcija za W_i, to jest da je $|W_i| \leq Y_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. Sa $\psi_i^{\pm}$ označimo $\psi_i^{\pm} = Y_i \pm W_i^N$, $i = 0, 1, \dots, N$. Ispituju se osobine ovih veličina.

Za $\boldsymbol{i = 0}$ je

$$\psi_0^{\pm} = Y_0 \pm W_0^N \geq 0$$

jer je

$$\mp W_0^N \leq |W_0^N| = |w(0)| \leq C = C_Y\left(\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}\right)Z_0$$

$$= Y_0$$

za $C_Y = C$ (C_Y je nezavisno od N i M_l).

Za $\boldsymbol{i = N}$ je

$$\psi_N^{\pm} = Y_N \pm W_N^N \geq 0$$

jer se prema (3.19) i $\sigma > 2$ dobija:

$$\mp W_N^N \leq |W_N^N| = |w(1)| \leq Cexp\left(-\frac{\alpha x_N}{M_l}\right)$$

$$\leq C\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-\sigma}$$

$$\leq C\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}$$

$$= C_Y\prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}Z_N = Y_N,$$

ponovo za $C_Y = C$ (C_Y je nezavisno od N i M_l) i prema definiciji Z_i ($Z_N \coloneqq 1$).

Preostao je da se ispita slučaj $i = 1, 2, \dots, N-1$, gde će se iskoristiti diskretni princip minimuma, (3.12) odnosno Lema 3.2.

Za $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, N-1}$, prema (3.20) dobija se

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon^N \psi_i^\pm &= L_\varepsilon^N Y_i \pm L_\varepsilon^N W_i^N = L_\varepsilon^N Y_i \pm 0 = L_\varepsilon^N Y_i \\
&= \left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right) D^\pm Y_i + a(x_i) D^+ Y_i + b(x_i) Y_i \\
&= \left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right) C_Y \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1}\right) D^\pm Z_i \\
&\quad + a(x_i) C_Y \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1}\right) D^+ Z_i \\
&\quad + b(x_i) C_Y \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1}\right) Z_i \\
&= C_Y \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1}\right) \Big(\left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right) D^\pm Z_i \\
&\quad + a(x_i) D^+ Z_i + b(x_i) Z_i \Big) \\
&= C_Y \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1}\right) L_N^\varepsilon Z_i.
\end{aligned}
$$

Prema Lemi 3.4 važi $L_\varepsilon^N Z_i < 0$ i kako je $\alpha > 0, M_l > 0$ i $\sigma > 2$ dobija se $L_\varepsilon^N \psi_N^\pm < 0$ za $i = 1, 2, \dots, N-1$ pa prema diskretnom principu minimuma je $\psi_i^\pm \geq 0$, za svako $i = 0, 1, \dots, N$. Kako je $\psi_i^\pm = Y_i \pm W_i^N \geq 0$ za $i = 0, 1, \dots, N$ dobija se:

$$
\begin{aligned}
\mp W_i^N \leq \left|W_i^N\right| \leq Y_i &= C_Y \left(\prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1}\right) Z_i \\
&= C_Y \prod_{j=1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1} \prod_{j=i+1}^{N} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right) \\
&= C \prod_{j=1}^{i} \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_j\right)^{-1},
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

za $C = C_Y$ (C je nezavisna od N i M_l).

Najzad, prema (3.19), (3.21),

$$W_0^N - w(0) = 0 \text{ i } W_N^N - w(1) = 0$$

dobija se za $i = 0, 1, \dots, N$

$$\left|W_i^N - w(x_i)\right| \le \left|W_i^N\right| + |w(x_i)| \le C\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}.$$

■

Prethodno tvrđenje se koristi za izvođenje ocene greške za slojnu komponentu na grubom delu mreže.

Teorema 3.8 *Neka je funkcija w rešenje problema (1.14) i (1.15) a W^Nrešenje homogenog problema (3.12). Za svako $i = qN, qN+1, \dots, N$ je*

$$\left|W_i^N - w(x_i)\right| \le CN^{-1},$$

gde je C konstanta nezavisna od M_l i N.

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi za svako $i = 0, 1, \dots, N$ je

$$\left|W_i^N - w(x_i)\right| \le C\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}. \qquad (3.22)$$

Za $i \in \{qN, qN+1, \dots, N\}$ je

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}\\
&\quad= \prod_{j=1}^{qN}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}\prod_{j=qN+1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}\\
&\quad\le \prod_{j=1}^{qN}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1} \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

jer za $j \in \{\, qN+1, \dots, N\}$ važi $0 < h_j \le CN^{-1}$ i pošto je $\alpha > 0, \sigma > 2, M_l > 0$ dobija se:

$$\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1} = \left(\frac{M_l\sigma + \alpha h_j}{M_l\sigma}\right)^{-1} = \frac{M_l\sigma}{M_l\sigma + \alpha h_j} < 1.$$

Zato (3.22) prema (3.23) postaje

$$\left|W_i^N - w(x_i)\right| \le C\prod_{j=1}^{qN}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}, \;\; i = qN, \dots, N.$$

Prema Lemi 3.5 i (2.3) dobija se:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{qN}\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1} &\le C\psi(t_{qN}) = Cexp\left(-\bar{\varphi}(t_{qN})\right)\\
&= Cexp\left(-\bar{\varphi}\left(\frac{qN}{N}\right)\right) = Cexp(-\ln N)\\
&= CN^{-1},
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

■

Preostalo je izvođenje ocene greške za slojnu komponentu na finom delu mreže. U toj analizi greške koristi se princip minimuma i tehnika barijernih funkcija.

Teorema 3.9 *Neka je funkcija w rešenje problema (1.14) i (1.15) a W^Nrešenje homogenog problema (3.12). Za svako $i = 0,1,\dots,qN-1$ je*

$$\left|W_i^N - w(x_i)\right| \leq CN^{-1}\, max|\psi'|,$$

gde je C konstanta nezavisna od M_l i N.

Dokaz. Primetimo da za $i = 0,1,\dots,qN-1$ važi $x_i \in [0,\tau)$. Posmatrajmo najpre

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon^N\left(W_i^N - w(x_i)\right) &= 0 - L_\varepsilon^N w(x_i) \\
&= (L_\varepsilon - L_\varepsilon^N)\, w(x_i) \\
&= \left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - D^{\pm}\right) w(x_i) \\
&\quad + a(x_i)\left(\frac{d}{dx} - D^{+}\right) w(x_i). \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Uzimajući apsolutnu vrednost od (3.24) i korišćenjem dokaza Leme 3.1 dobija se:

$$\begin{aligned}
&\left|L_\varepsilon^N\left(W_i^N - w(x_i)\right)\right| \\
&\leq \left(\varepsilon - \delta a(x_i)\right)\left|\left(\frac{d^2}{dx^2} - D^{\pm}\right) w(x_i)\right| + a(x_i)\left|\left(\frac{d}{dx} - D^{+}\right) w(x_i)\right| \\
&\leq M_l \frac{1}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(x_{i+1} - s)^2|\, |w'''(s)| ds \\
&\quad + M_l \frac{1}{h_i(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(s - x_{i-1})^2|\, |w'''(s)| ds \\
&\quad + a(x_i) \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x_{i+1} - s|\, |w''(s)| ds. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Posebno posmatramo integrale u nejednakosti (3.25) i njih ocenjujemo na sledeći način:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |(x_{i+1} - s)^2|\, |w'''(s)| ds \leq |(x_{i+1} - x_i)^2| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'''(s)| ds$$

$$= {h_{i+1}}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'''(s)|ds,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |(s - x_{i-1})^2| \, |w'''(s)|ds \leq |(x_i - x_{i-1})^2| \int_{x_{i-1}}^{x_i} |w'''(s)|ds$$

$$= {h_i}^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |w'''(s)|ds,$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |x_{i+1} - s| \, |w''(s)|ds \leq |x_{i+1} - x_i| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|ds$$

$$= h_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|ds.$$

Dobijeni rezultati se vrate u (3.25) pa se dobije:

$$\left| L_\varepsilon^N \left(W_i^N - w(x_i) \right) \right| \leq M_l \frac{{h_{i+1}}^2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'''(s)|ds$$

$$+ M_l \frac{{h_i}^2}{h_i(h_i + h_{i+1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |w'''(s)|ds$$

$$+ a(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|ds.$$

Kako je

$$\frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} < 1, \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} < 1,$$

i na osnovu Teoreme 1.5 dalje sledi:

$$\left| L_\varepsilon^N \left(W_i^N - w(x_i) \right) \right| \leq M_l \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |w'''(s)|ds + a(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w''(s)|ds$$

$$\leq C M_l {M_l}^{-3} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds + C {M_l}^{-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds$$

$$\leq \; C {M_l}^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds + C {M_l}^{-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds$$

$$\pm C {M_l}^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds \leq \; C {M_l}^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds \, . \qquad (3.26)$$

Kada u poslednji integral uvedemo smenu $s = \frac{\sigma M_l}{\alpha} \bar{\varphi}(t)$ i pošto je $\sigma > 2, \; e^{-\bar{\varphi}(t)} \bar{\varphi}'(t) = -\psi'(t)$, dobija se:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} exp\left(-\frac{\alpha}{M_l}\cdot\frac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}(t)\right)\frac{\sigma M_l}{\alpha}\bar{\varphi}'(t)dt$$

$$= \frac{\sigma M_l}{\alpha}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} e^{-\sigma\bar{\varphi}(t)}\,\bar{\varphi}'(t)dt$$

$$\leq CM_l\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} e^{-2\bar{\varphi}(t)}\,\bar{\varphi}'(t)dt$$

$$= CM_l\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} e^{-\bar{\varphi}(t)}e^{-\bar{\varphi}(t)}\,\bar{\varphi}'(t)dt$$

$$= CM_l\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} e^{-\bar{\varphi}(t)}|\psi'(t)|\,dt.$$

Za proizvoljno $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$ je

$$e^{-\bar{\varphi}(t)} \leq e^{-\bar{\varphi}(t_{i-1})} = e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\sigma M_l}} = e^{-\frac{\alpha}{\sigma M_l}(x_i-h_i)} = e^{-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}}\cdot e^{\frac{\alpha h_i}{\sigma M_l}} \leq Ce^{-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}}$$

jer je $h_i \leq CM_l$ za $i = 1, 2, 3, \ldots, qN$. Ovaj rezultat se iskoristi u prethodnu nejednakost pa se dobija:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha s}{M_l}} ds = CM_l e^{-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |\psi'(t)|\,dt$$

$$\leq CM_l e^{-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \max|\psi'|\,dt$$

$$= CM_l e^{-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}}\max|\psi'|\,(t_{i+1} - t_{i-1})$$

$$\leq CM_l N^{-1} e^{-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}}\max|\psi'|. \qquad (3.27)$$

Vratimo rezultat (3.27) u (3.26) pa se dobije:

$$\left|L_\varepsilon^N\left(W_i^N - w(x_i)\right)\right| \leq C{M_l}^{-1}N^{-1}e^{-\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}}\max|\psi'|. \qquad (3.28)$$

Prema (3.18), za svako $x_i \in [0, 1]$ je

$$exp\left(-\frac{\alpha x_i}{M_l}\right) \leq \prod_{j=1}^{i}\left(1 + \frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-\sigma} < \prod_{j=1}^{i}\left(1 + \frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}.$$

Iskoristi se ovaj rezultat u (3.28) pa se za $i = 1, \ldots, qN - 1$ dobija:

$$\left|L_\varepsilon^N\left(W_i^N - w(x_i)\right)\right|$$

$$\leq C{M_l}^{-1}N^{-1}\max|\psi'|\prod_{j=1}^{i}\left(1 + \frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}.$$

Definišimo

$$\phi_i^{\pm} = T_i \pm \left(W_i^N - w(x_i)\right), \ \ i = 0, 1, \dots, qN, \qquad (3.30)$$

gde je

$$T_i = C_T\big((N^{-1}\max|\psi'|)Y_i + N^{-1}\big).$$

Veličine Y_i su već definisane u Teoremi 3,7, dok je C_Y za sada nepoznata konstanta, nezavisna od N i M_l.

Iz $W_0^N = w(0)$ trivijalno sledi da je:

$$\phi_0^{\pm} = T_0 = C_T\big((N^{-1}\max|\psi'|)Y_0 + N^{-1}\big) \geq 0,$$

jer je

$$\begin{aligned} Y_0 &= C_Y\left(\prod_{j=1}^{N}\left(1 + \frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}\right)Z_0 \\ &= C_Y\left(\prod_{j=1}^{N}\left(1 + \frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1}\right)\prod_{j=1}^{N}\left(1 + \frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right) \\ &= C_Y \geq 0. \end{aligned}$$

Za $i = qN$ prema Teoremi 3.7 i Lemi 3.5 je

$$\begin{aligned} \mp\left(W_{qN}^N - w(x_{qN})\right) &\leq \left|W_{qN}^N - w(x_{qN})\right| \\ &\leq C\prod_{j=1}^{qN}\left(1 + \frac{\alpha}{M_l\sigma}h_j\right)^{-1} \leq C\psi(t_{qN}) \\ &\leq Cexp\left(-\bar{\varphi}(t_{qN})\right) \leq CN^{-1}. \qquad (3.31) \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} T_{qN} &= C_T\left((N^{-1}\max|\psi'|)Y_{qN} + N^{-1}\right) \\ &= C_T N^{-1}\left((\max|\psi'|)Y_{qN} + 1\right) \geq C_T N^{-1} \\ &\geq \left|W_{qN}^N - w(x_{qN})\right| \qquad (3.32) \end{aligned}$$

prema (3.31) i za dovoljno veliku konstantu C_T, nezavisnu od M_l i N. Dalje, odatle prema (3.30) i (3.32) dobija se $\phi_{qN}^{\pm} \geq 0$.

Sad se posmatra proizvoljni indeks $i \in \{1, 2, \dots, qN - 1\}$ i pokazuje se $\phi_i^{\pm} \geq 0$. U tu svrhu će se koristiti diskretni princip minimuma polazeći od

$$L_\varepsilon^N\phi_i^{\pm} = L_\varepsilon^N T_i \pm L_\varepsilon^N\left(W_i^N - w(x_i)\right).$$

Naredni korak je da se pokaže

$$\left| L_\varepsilon^N \left(W_i^N - w(x_i) \right) \right| \le -L_\varepsilon^N T_i,$$

odakle će slediti da je $L_\varepsilon^N \phi_i^\pm \le 0$ za $i = 1, \dots, qN-1$ što je potrebno za primenjivanje diskretnog principa minimuma. Najpre treba da se analizira $L_\varepsilon^N T_i$ a za tu analizu je potrebno (3.6).

Dalje je

$$\begin{aligned}
-L_\varepsilon^N T_i &= -\left[\left(\varepsilon - \delta a(x_i) \right) D^\pm T_i + a(x_i) D^+ T_i + b(x_i) T_i \right] \\
&= -C_T (N^{-1} \max|\psi'|) L_\varepsilon^N Y_i - C_T N^{-1} b(x_i) \\
&= -C_T C_Y (N^{-1} \max|\psi'|) \left(\prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1} \right) L_\varepsilon^N Z_i \\
&\quad - C_T N^{-1} b(x_i) \\
&= C_T C_Y (N^{-1} \max|\psi'|) \left(\prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1} \right) Z_i \cdot \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_{i+1} \right)^{-1} \frac{\alpha}{\sigma M_l} \left(a(x_i) - \frac{\alpha h_{i+1}}{M_l \sigma \bar{h}_i} \left(\varepsilon - \delta a(x_i) \right) \right) \\
&\quad - C_T C_Y (N^{-1} \max|\psi'|) \left(\prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1} \right) b(x_i) Z_i \\
&\quad - C_T N^{-1} b(x_i) \\
&\ge C_T C_Y (N^{-1} \max|\psi'|) \left(\prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1} \right) Z_i \cdot \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_{i+1} \right)^{-1} \frac{\alpha}{\sigma M_l} \left(a(x_i) - \frac{\alpha h_{i+1}}{M_l \sigma \bar{h}_i} \left(\varepsilon - \delta a(x_i) \right) \right)
\end{aligned}$$

jer je $b(x_i) < 0$ pa je $-b(x_i) > 0$. Sada je

$$\begin{aligned}
-L_\varepsilon^N T_i &\ge {M_l}^{-1} N^{-1} \max|\psi'| \prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1} C_T C_Y \cdot \\
&\quad \cdot \prod_{j=i+1}^N \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1} \frac{\alpha}{\sigma} Z_i \left(1 + \frac{\alpha}{M_l \sigma} h_{i+1} \right)^{-1} \\
&\quad \cdot \left(a(x_i) - \frac{\alpha h_{i+1}}{M_l \sigma \bar{h}_i} \left(\varepsilon - \delta a(x_i) \right) \right) \\
&= {M_l}^{-1} N^{-1} \max|\psi'| \prod_{j=1}^i \left(1 + \frac{\alpha}{\sigma M_l} h_j \right)^{-1} C_T C_Y \frac{\alpha}{\sigma} \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot\left(1+\frac{\alpha}{M_l\sigma}h_{i+1}\right)^{-1}\left(a(x_i)-\frac{\alpha h_{i+1}}{M_l\sigma\bar{h}_i}\big(\varepsilon-\delta a(x_i)\big)\right)$$

$$= {M_l}^{-1}N^{-1}\max|\psi'|\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1}C_TC_Y\frac{\alpha}{\sigma}\cdot$$

$$\cdot\big(1+N^{-1}\bar{\varphi}'(\xi_{i+1})\big)^{-1}\left(a(x_i)-\frac{\alpha h_{i+1}}{M_l\sigma\bar{h}_i}\big(\varepsilon-\delta a(x_i)\big)\right)$$

$$\geq {M_l}^{-1}N^{-1}\max|\psi'|\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1}C_TC_Y\frac{\alpha}{\sigma}\cdot$$

$$\cdot(1+N^{-1}\max\bar{\varphi}')^{-1}\left(\alpha-\frac{\alpha h_{i+1}}{\sigma\bar{h}_i}\right)$$

$$\geq {M_l}^{-1}N^{-1}\max|\psi'|\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1}C_TC_Y\frac{\alpha^2}{\sigma}\cdot$$

$$\cdot(1+\bar{C})^{-1}\left(1-\frac{h_{i+1}}{\sigma\bar{h}_i}\right)$$

jer je po Pretpostavci 2.7 $N^{-1}\max\bar{\varphi}'\leq\bar{C}$. U prethodnoj analizi se još koristilo (2.17) i (2.19) gde je $\xi_{i+1}\in(t_i,t_{i+1})$. Kako je $\sigma>2$, dobija se:

$$0<1-\frac{2}{\sigma}\leq 1-\frac{2}{\sigma}\cdot\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=1-\frac{h_{i+1}}{\sigma\bar{h}_i}.$$

Dobijeno se iskoristi u prethodnoj nejednakosti i za dovoljno veliko C_T koje ne zavisi od M_l i N, je prema (3.28) i za $i=1,\dots,qN-1$

$$-L_\varepsilon^N T_i\geq C{M_l}^{-1}N^{-1}\max|\psi'|\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1}$$

$$\geq\left|L_\varepsilon^N\left(W_i^N-w(x_i)\right)\right|.$$

Pošto se dobilo traženo, odatle sledi da je $L_\varepsilon^N\phi_i^\pm\leq 0$ za $i=1,\dots,qN-1$. Ranije se pokazalo da važi $\phi_0^\pm\geq 0$ i $\phi_{qN}^\pm\geq 0$ pa su svi uslovi teoreme o diskretnom principu minimuma ispunjeni za operator L_ε^N. Sledi $\phi_i^\pm\geq 0, i=0,1,\dots,qN$. Ovaj rezultat se iskoristi u (3.30), pa se dobija:

$$\left|W_i^N-w(x_i)\right|\leq T_i=C_T(N^{-1}\max|\psi'|)Y_i+C_TN^{-1}$$

$$\leq C_TC_Y(N^{-1}\max|\psi'|)\prod_{j=1}^{i}\left(1+\frac{\alpha}{\sigma M_l}h_j\right)^{-1}$$

$$+C_TN^{-1}$$

$$\leq C(N^{-1}\max|\psi'|),$$

što i trebalo pokazati.

■

Prethodno navedene teoreme daju ocenu greške pojedine komponente numeričkog rešenja. U nastavku se daje teorema o oceni greške numeričkog rešenja U^N.

Teorema 3.10 *Neka je u tačno rešenje konturnog problema (1.10) i (1.11) a $U^N = \{u_i\}_0^N$ je rešenje odgovarajućeg diskretnog problema (3.3) i (3.4). Na slojno-adaptivnoj mreži $\overline{\Omega}^N$ sa tačkama iz (2.10), za $\sigma > 2$ važi sledeća ε −uniformna ocena greške*

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\|U^N - u\|_{\overline{\Omega}^N} \leq CN^{-1}\max|\psi'|,$$

gde je C konstanta nezavisna od M_l i N.

Dokaz. Prema dekompoziciji greške (3.14), posebno se mora proceniti greška regularne i singularne komponente. Prema tome dokaz ove teoreme direktno sledi kombinacijom Teoreme 3.6, Teoreme 3.8 i Teoreme 3.9.

■

Napomena 3.11 Koristeći vrednosti za $\max|\psi'|$ iz Tabele 2.1, zaključuje se da na Šiškinovoj mreži važi

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\|U^N - u\|_{\overline{\Omega}^N} \leq CN^{-1}\ln N,$$

na Bahvalov-Šiškinovoj mreži, modifikovanoj Bahvalov-Šiškinovoj mreži i Vulanović-Šiškinovoj mreži se dobija

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\|U^N - u\|_{\overline{\Omega}^N} \leq CN^{-1}.$$

Najzad na polinomnoj Šiškinovoj mreži važi

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\|U^N - u\|_{\overline{\Omega}^N} \leq CN^{-1}(\ln N)^{\frac{1}{m}},\ \ m \geq 1.$$

Teorema 3.12 *Neka je u tačno rešenje konturnog problema (1.10) i (1.11) a $U^N = \{u_i\}_0^N$ je rešenje odgovarajućeg diskretnog problema (3.3) i (3.4). Na slojno-adaptivnoj mreži $\overline{\Omega}^N$ sa tačkama iz (2.10), za $\sigma > 2$ važi sledeća ε −uniformna ocena greške*

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\|\overline{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}} - \mathrm{u}\| \leq \mathrm{C}(\mathrm{N}^{-1}\max|\psi'|),$$

gde je $\overline{U}^N$ po delovima linearan interpolant od U^N na $\overline{\Omega}^N$, i C je konstanta nezavisna od N i M_l.

Dokaz. Neka je $\bar{u}$ po delovima linearan interpolant od u na mreži $\bar{\Omega}^N$, što se definiše na sledeći način

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{N} u(x_i) p_i(x),$$

gde je p_i po delovima linearna funkcija definisana sa $p_i(x_j) = \delta_{i,j}$ za sve $0 \le i, j \le N$. Greška $\bar{U}^N - u$ se može zapisati u sledećem obliku

$$\bar{U}^N - u = \bar{U}^N - \bar{u} + \bar{u} - u,$$

a prema nejednakosti trougla se dobija

$$\|\bar{U}^N - u\| \le \|\bar{U}^N - \bar{u}\| + \|\bar{u} - u\|, \tag{3.33}$$

gde je prvi izraz sa desne strane nejednakosti razlika između dva interpolanta, a drugi je greška interpolacije. Granica prvog izraza sa desne strane (3.33) dobija se na sledeći način

$$\bar{U}^N - \bar{u} = \sum_{i=0}^{N} \left(U_i^N - u(x_i) \right) p_i. \tag{3.34}$$

Koristeći rezultat prethodne teoreme u svakoj tački x_i je

$$\left| U_i^N - u(x_i) \right| \le C N^{-1} \max|\psi'|.$$

Prema definiciji funkcije p_i, važi $p_i \ge 0$ i $\sum_{i=0}^{N} p_i \le 1$. Sada je prema (3.34) za proizvoljno $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |(\bar{U}^N - \bar{u})(x)| &\le \sum_{i=0}^{N} \left| U_i^N - u(x_i) \right| |p_i(x)| \\ &\le C N^{-1} \max|\psi'| \sum_{i=0}^{N} |p_i(x)| \\ &\le C N^{-1} \max|\psi'| \end{aligned}$$

odnosno dobija se

$$\|\bar{U}^N - \bar{u}\| \le C N^{-1} \max|\psi'|. \tag{3.35}$$

U ocenjivanju drugog izraza na desnoj strani u nejednakosti (3.33) se koristi dekompozicija tačnog rešenja i dekompozicija interpolacione funkcije

$$\bar{u} - u = \bar{v} - v + \bar{w} - w,$$

gde su $\bar{v}$ i $\bar{w}$ po delovima linearni interpolanti od v i w redom na mreži $\bar{\Omega}^N$. Prema nejednakosti trougla se dobija

$$\|\bar{u} - u\| \le \|\bar{v} - v\| + \|\bar{w} - w\|.$$

Klasična ocena za linearnu interpolaciju koristi se u oceni $\bar{v}-v$ i $\bar{w}-w$. Za svako $i, 0 \leq i \leq N-1$ i svako $f \in C^2(\Omega_i)$, gde je $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ i $x \in \Omega_i$ važi klasična ocena za linearnu interpolaciju

$$\left|\left(\bar{f}-f\right)(x)\right| \leq \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2 \max_{x\in\Omega_i}|f''(x)|.$$

Prvo se oceni $\bar{v}-v$ prema Teoremi 1.5 i prema $M_l \leq CN^{-1}$ dobija se

$$\|\bar{v}-v\| \leq CN^{-2}. \tag{3.36}$$

U nastavku se oceni $\bar{w}-w$. Posmatrajmo posebno kada je $x \in [0,\tau)$ i $x \in [\tau, 1]$. Kada je $x \in [0,\tau)$, prema klasičnoj oceni linearne interpolacije je

$$|(\bar{w}-w)(x)| \leq C(x_i - x_{i-1})^2 \max_{x\in\Omega_i}|w''(x)|, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Na osnovu Teoreme 1.5, se dobija

$$|(\bar{w}-w)(x)| \leq C(x_i - x_{i-1})^2 M_l^{-2} e^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)}. \tag{3.37}$$

U nejednakosti (3.37) se iskoristi vrednost za h_i kada je $i,\ 1 \leq i \leq qN$ iz Leme 2.10 pa se dobija

$$\begin{aligned}
|(\bar{w}-w)(x)| &\leq C{h_i}^2 M_l^{-2} e^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)} \\
&\leq \left(CM_l N^{-1} e^{\bar{\varphi}(t_i)} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 M_l^{-2} e^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)} \\
&= C\left(N^{-1} e^{\left(\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}\right)} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 e^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)} \\
&= C\left(N^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 e^{\left(\frac{\alpha x_i}{\sigma M_l}\right)^2} e^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)} \\
&= C\left(N^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 e^{\left(\frac{2\alpha x_i}{\sigma M_l}\right)} e^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)} \\
&\leq C\left(N^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 e^{\left(\frac{\sigma\alpha x_i}{\sigma M_l}\right)} e^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)} \\
&= C\left(N^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 e^{\left(\frac{\sigma\alpha x_i - \sigma\alpha x_{i-1}}{\sigma M_l}\right)} \\
&= C\left(N^{-1} \max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 e^{\left(\frac{\alpha h_i}{M_l}\right)} \\
&\leq C\left(\max_{t\in[0,q]}|\psi'(t)|\right)^2 N^{-2}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

U gornjoj nejednakosti se iskoristilo da je $h_i \leq CM_l$, Pretpostavka 2.6 i $\sigma > 2$.

U drugom koraku se uzima da je $x \in [\tau, 1]$, tada se tražena ocena dobija na sledeći način

$$|\overline{w}(x) - w(x)| \leq |\overline{w}(x)| + |w(x)|. \tag{3.39}$$

Da bi se moglo nastaviti traženje ocene $\overline{w} - w$ na datom intervalu mora se oceniti $|\overline{w}(x)|$. Prvo se posmatra čime je jednako $\overline{w}$ na intervalu $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$. Dakle,

$$\begin{aligned} \overline{w}(x) &= w(x_{i-1})p_{i-1}(x) + w(x_i)p_i(x) \\ &\leq \max_{x \in \Omega_i} w(x)\,[p_{i-1}(x) + p_i(x)], \end{aligned}$$

odavde se dobija

$$|\overline{w}(x)| \leq \max_{x \in \Omega_i} |w(x)|.$$

Iskoristi se prethodna nejednakost u (3.39), kao i Teorema 1.5 pa se dobija

$$\begin{aligned} |(\overline{w} - w)(x)| &\leq 2\max_{x \in \Omega_i} |w(x)| \leq Ce^{\left(-\frac{\alpha x_{i-1}}{M_l}\right)} \leq Ce^{\left(-\frac{\alpha \tau}{M_l}\right)} \leq CN^{-\sigma} \\ &\leq CN^{-2}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Prema (3.38) i (3.40) je

$$\|\overline{w} - w\| \leq CN^{-2}\left(\max_{t \in [0,q]} |\psi'(t)|\right)^2. \tag{3.41}$$

Najzad iz (3.35), (3.36) i (3.41) sledi tvrđenje teoreme.

■

Napomena 3.13 Koristeći vrednosti za $\max|\psi'|$ iz Tabele 2.1, zaključuje se da na Šiškinovoj mreži važi

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|\overline{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}} - \mathrm{u}\| \leq \mathrm{CN}^{-1} \ln \mathrm{N},$$

na Bahvalov-Šiškinovoj mreži, modifikovanoj Bahvalov-Šiškinovoj mreži i Vulanović-Šiškinovoj mreži se dobija

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|\overline{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}} - \mathrm{u}\| \leq \mathrm{CN}^{-1}.$$

Najzad na polinomnoj Šiškinovoj mreži važi

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \|\overline{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}} - \mathrm{u}\| \leq \mathrm{CN}^{-1}(\ln \mathrm{N})^{\frac{1}{\mathrm{m}}}, \quad \mathrm{m} \geq 1.$$

Glava 4

Numerički eksperimenti

U ovom odeljku će se posmatrati numerički rezultati dobijeni pri rešavanju problema (1.10) i (1.11). Posmatraće se jedan primer. Za taj primer unapred će biti zadato tačno rešenje.

U slučaju da su funkcije $a(x)$ i $b(x)$ konstante, to jest $a(x) = a$ i $b(x) = b$, tačno rešenje problema (1.10) i (1.11) ima sledeći oblik

$$u(x) = \frac{\big(\gamma - \phi_0 exp(m_2)\big) exp(m_1 x) - \big(\gamma - \phi_0 exp(m_1)\big) exp(m_2 x)}{exp(m_1) - exp(m_2)}, \tag{4.1}$$

gde je

$$m_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(\varepsilon - a\delta)b}}{2(\varepsilon - a\delta)} \tag{4.2}$$

i

$$m_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4(\varepsilon - a\delta)b}}{2(\varepsilon - a\delta)}. \tag{4.3}$$

Svi rezultati koji se odnose na S-mrežu su prikazani za vrednosti $\varepsilon = 2^{-4}, 2^{-6}, \dots, 2^{-22}$, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ i parametar N uzima vrednost $N = 2^3, 2^4, \dots, 2^{10}$

Test problem Problem koji se testira je

$$\varepsilon y''(x) + y'(x - \delta) - y(x) = f(x),$$

$$y(x) = 1 \text{ za } x \in [-\delta, 0],$$

$$y(1) = 1.$$

Test problem transformišemo u sledeći oblik

$$(\varepsilon - \delta)u''(x) + u'(x) - u(x) = f(x)$$

$$u(0) = 1, \;\; u(1) = 1,$$

prema transformaciji opisanoj u Glavi 1.

Dato je i tačno rešenje koje je prema konturnim uslovima i (4.1) oblika

$$u(x) = \frac{\big(1 - exp(m_2)\big)exp(m_1 x) - \big(1 - exp(m_1)\big)exp(m_1 x)}{exp(m_1) - exp(m_2)}.$$

Pošto je $a(x) = 1$ i $b(x) = -1$ m_1 i m_2 imaju sledeći oblik prema (4.2) i (4.3)

$$m_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\varepsilon - \delta)}}{2(\varepsilon - \delta)}$$

i

$$m_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4(\varepsilon - \delta)}}{2(\varepsilon - \delta)}.$$

Ovaj primer se rešava koristeći metod (3.3) i (3.4) prvo na Šiškinovoj mreži (2.2) sa konstantom $\alpha = 1$ iz definicije tranzicione tačke τ. Posle Šiškinove mreže uzeće se u obzir i sve ostale mreže koje su bile posmatrane u radu.

Tabele 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 i 4.5 daju greške $E_\varepsilon^N = |U_\varepsilon - u_\varepsilon|_{\Omega_N}$ za fiksirano N i ε na Šiškinovoj, Bahvalov-Šiškinovoj, modifikovanoj Bahvalov-Šiškinovoj, polinomnoj Šiškinovoj i Vulanović-Šiškinovoj mreži. Jasno se vidi da za svako ε, kad se N povećava greška se smanjuje, a kada ε opada onda se greška stabilizuje za bilo koje izabrano N .

Tabele 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 daju red konvergencije na Šiškinovoj, Bahvalov-Šiškinovoj, modifikovanoj Bahvalov-Šiškinovoj, polinomnoj - Šiškinovoj i Vulanović - Šiškinovoj mreži. Red konvergencije se označava sa $R_{N,ep}$ i ozračunat je iz grešaka u tabelama redom Tabela 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, prema formuli

$$R_{N,ep} = \log_2 \frac{E_\varepsilon^N}{E_\varepsilon^{2N}}.$$

Kada se N povećava onda je red konvergencije u porastu za bilo koje fiksno ε i na kraju se stabilizuje za bilo koje fiksno N. Takođe su dati redovi uniformne konvergencije za svako N

$$R_{N,ep} = \log_2 \frac{E^N_{max}}{E^{2N}_{max}},$$

gde je $E^N_{max} = max\, E^N_\varepsilon$.

Tabela 4.1: greške za različite vrednosti ε i N, na Šiškinovoj mreži

ε	**Broj intervala N**								
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**
$\mathbf{2^{-4}}$	0.059995	0.040833	0.026573	0.016850	0.010137	0.005908	0.003362	0.001880	0.001037
$\mathbf{2^{-6}}$	0.065410	0.044736	0.028588	0.017835	0.010695	0.006217	0.003531	0.001971	0.001086
$\mathbf{2^{-8}}$	0.067017	0.046001	0.029263	0.018160	0.010876	0.006316	0.003586	0.002001	0.001102
$\mathbf{2^{-10}}$	0.067437	0.046342	0.029449	0.018250	0.010926	0.006344	0.003601	0.002009	0.001107
$\mathbf{2^{-12}}$	0.067543	0.046427	0.029497	0.018273	0.010937	0.006351	0.003604	0.002011	0.001108
$\mathbf{2^{-14}}$	0.067570	0.046450	0.029509	0.018279	0.010942	0.006353	0.003605	0.002012	0.001108
$\mathbf{2^{-16}}$	0.067577	0.046456	0.029512	0.018281	0.010943	0.006353	0.003606	0.002012	0.001108
$\mathbf{2^{-18}}$	0.067579	0.046457	0.029513	0.018281	0.010943	0.006353	0.003606	0.002012	0.001108
$\mathbf{2^{-20}}$	0.067579	0.046458	0.029513	0.018281	0.010943	0.006353	0.003606	0.002012	0.001108
$\mathbf{2^{-22}}$	0.067579	0.046458	0.029513	0.018281	0.010943	0.006353	0.003606	0.002012	0.001108
$\boldsymbol{E^N_{max}}$	0.067579	0.046458	0.029513	0.018281	0.010943	0.006353	0.003606	0.002012	0.001108

Tabela 4.2: greške za različite vrednosti ε i N, na Bahvalov-Šiškinovoj mreži

ε	Broj intervala N								
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**
2^{-4}	0.060822	0.037561	0.021130	0.011365	0.005994	0.003175	0.001737	0.001014	0.000657
2^{-6}	0.071882	0.044757	0.024498	0.012706	0.006469	0.003272	0.001652	0.000836	0.000428
2^{-8}	0.075356	0.047554	0.026108	0.013440	0.006767	0.003386	0.001694	0.000846	0.000424
2^{-10}	0.076281	0.048361	0.026633	0.013719	0.006898	0.003440	0.001715	0.000856	0.000427
2^{-12}	0.076516	0.048570	0.026775	0.013803	0.006940	0.003460	0.001724	0.000859	0.000429
2^{-14}	0.076575	0.048623	0.026811	0.013825	0.006952	0.003466	0.001727	0.000861	0.000430
2^{-16}	0.076590	0.048636	0.026820	0.013830	0.006955	0.003468	0.001727	0.000861	0.000430
2^{-18}	0.076594	0.048640	0.026822	0.013832	0.006955	0.003468	0.001728	0.000861	0.000430
2^{-20}	0.076595	0.048641	0.026823	0.013832	0.006956	0.003468	0.001728	0.000861	0.000430
2^{-22}	0.076595	0.048641	0.026823	0.013832	0.006956	0.003468	0.001728	0.000861	0.000430
E_{max}^N	0.076595	0.048641	0.026823	0.013832	0.006956	0.003468	0.001728	0.000861	0.000430

Tabela 4.3: greške za različite vrednosti ε i N, na modifikovanoj Bahvalov-Šiškinovoj mreži

ε	Broj intervala N								
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**
2^{-4}	0.063666	0.039416	0.022298	0.012045	0.006338	0.003283	0.001688	0.000866	0.000444
2^{-6}	0.075027	0.046351	0.025352	0.013305	0.006884	0.003530	0.001798	0.000911	0.000460
2^{-8}	0.078606	0.048987	0.026661	0.013843	0.007106	0.003632	0.001848	0.000937	0.000474
2^{-10}	0.079560	0.049741	0.027065	0.014018	0.007178	0.003664	0.001863	0.000945	0.000478
2^{-12}	0.079803	0.049936	0.027173	0.014065	0.007198	0.003673	0.001868	0.000947	0.000479
2^{-14}	0.079864	0.049986	0.027200	0.014078	0.007203	0.003675	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-16}	0.079879	0.049998	0.027207	0.014081	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-18}	0.079883	0.050001	0.027209	0.014081	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-20}	0.079884	0.050002	0.027209	0.014082	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-22}	0.079884	0.050002	0.027209	0.014082	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
E_{max}^N	0.079884	0.050002	0.027209	0.014082	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479

Tabela 4.4: greške za različite vrednosti ε i N, na polinomnoj-Šiškinovoj mreži

ε	Broj intervala N								
	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
2^{-4}	0.063004	0.042089	0.024925	0.014172	0.007865	0.004258	0.002273	0.001202	0.000631
2^{-6}	0.072570	0.047336	0.027336	0.015331	0.008438	0.004555	0.002426	0.001280	0.000670
2^{-8}	0.075896	0.049171	0.028215	0.015745	0.008635	0.004657	0.002480	0.001308	0.000686
2^{-10}	0.076778	0.049680	0.028467	0.015865	0.008691	0.004686	0.002495	0.001316	0.000690
2^{-12}	0.077002	0.049810	0.028533	0.015896	0.008706	0.004693	0.002499	0.001318	0.000691
2^{-14}	0.077059	0.049843	0.028549	0.015904	0.008710	0.004695	0.002500	0.001319	0.000691
2^{-16}	0.077072	0.049852	0.028553	0.015906	0.008711	0.004696	0.002500	0.001319	0.000691
2^{-18}	0.077075	0.049854	0.028554	0.015907	0.008711	0.004696	0.002500	0.001319	0.000691
2^{-20}	0 .077076	0.049854	0.028555	0.015907	0.008711	0.004696	0.002500	0.001319	0.000691
2^{-22}	0.077076	0.049854	0.028555	0.015907	0.008711	0.004696	0.002500	0.001319	0.000691
$\boldsymbol{E^N_{max}}$	0.077076	0.049854	0.028555	0.015907	0.008711	0.004696	0.002500	0.001319	0.000691

Tabela 4.5: greške za različite vrednosti ε i N, na Vulanović-Šiškinovoj mreži

ε	Broj intervala N								
	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
2^{-4}	0.063666	0.039416	0.022298	0.012045	0 .006338	0.003283	0.001688	0.000866	0.000444
2^{-6}	0.075027	0.046351	0.025352	0.013305	0.006884	0.003530	0.001798	0.000911	0.000461
2^{-8}	0.078606	0.048987	0.026661	0.013843	0.007106	0.003633	0.001848	0.000937	0.000474
2^{-10}	0.079560	0.049741	0.027065	0.014018	0.007178	0.003664	0.001863	0.000945	0.000478
2^{-12}	0.079803	0.049936	0.027173	0.014065	0.007198	0.003673	0.001868	0.000947	0.000478
2^{-14}	0 .079864	0.049986	0.027200	0.014078	0.007203	0.003675	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-16}	0.079879	0.049998	0.027207	0.014081	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-18}	0.079883	0.050001	0.027209	0.014081	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-20}	0.079884	0.050002	0.027209	0.014082	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
2^{-22}	0.079884	0.050002	0.027209	0.014082	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479
$\boldsymbol{E^N_{max}}$	0.079884	0.050002	0.027209	0.014082	0.007205	0.003676	0.001869	0.000947	0.000479

Tabela 4.6: red konvergencije za različite vrednosti ε i N, na Šiškinovoj mreži

ε	**Broj intervala N**							
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
2^{-4}	0.55509	0.619755	0.657202	0.733179	0.778780	0.813309	0.838608	0.857811
2^{-6}	0.548071	0.646012	0.680686	0.737749	0.782627	0.816235	0.841398	0.859997
2^{-8}	0.542867	0.652580	0.688341	0.739644	0.783905	0.816889	0.841582	0.860308
2^{-10}	0.541231	0.654089	0.690336	0.740170	0.784309	0.817131	0.841676	0.860367
2^{-12}	0.540798	0.654452	0.690834	0.740296	0.784406	0.817191	0.841705	0.860393
2^{-14}	0.540688	0.654542	0.690958	0.740327	0.784429	0.817205	0.841711	0.860398
2^{-16}	0.540661	0.654565	0.690989	0.740335	0 .784435	0.817208	0.841712	0.860399
2^{-18}	0.540654	0.654570	0.690997	0.740337	0.784437	0.817209	0.841713	0.860399
2^{-20}	0.540652	0.654572	0.690999	0.740337	0.784437	0.817209	0.841713	0.860399
2^{-22}	0.540652	0.654572	0.690999	0.740337	0.784437	0.817209	0.841713	0.860399
R_{unif}^{N}	0.540652	0.654572	0.690999	0.740337	0.784437	0.817209	0.841713	0.8603999

Tabela 4.7: red konvergencije za različite vrednosti ε i N, na Bahvalov-Šiškinovoj mreži

ε	**Broj intervala N**							
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
2^{-4}	0.695371	0.829950	0.894649	0.922968	0.916635	0.870507	0.776035	0.626533
2^{-6}	0.683526	0.869441	0.947132	0.973914	0.983396	0.986141	0.981501	0.966332
2^{-8}	0.664153	0.865057	0.957970	0.989921	0.998851	0.999442	0.998884	0.998038
2^{-10}	0.657498	0.860630	0.956986	0.991980	1.003573	1.004405	1.002845	1.001353
2^{-12}	0.655699	0.859200	0.955873	0.991936	1.003998	1.005353	1.004181	1.002631
2^{-14}	0.655241	0.858820	0.955544	0.991834	1.003955	1.005394	1.004339	1.002901
2^{-16}	0.655126	0.858724	0.955458	0.991802	1.003932	1.005381	1.004342	1.002922
2^{-18}	0.655097	0.858699	0.955436	0.991794	1.003925	1.005376	1.004339	1.002921
2^{-20}	0.655090	0.858693	0.955431	0.991792	1.003923	1.005375	1.004338	1.002920
2^{-22}	0.655088	0.858692	0.955429	0.991791	1.003922	1.005375	1.004338	1.002920
R_{unif}^{N}	0.655088	0.858692	0.955429	0.991791	1.003922	1.005375	1.004338	1.002920

Tabela 4.8: red konvergencije za različite vrednosti ε i N, na modifikovanoj Bahvalov-Šiškinovoj mreži

ε	**Broj intervala N**							
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
2^{-4}	0.691745	0.821883	0.888400	0.926340	0.949170	0.959213	0.963291	0.964333
2^{-6}	0.694796	0.870496	0.930126	0.950623	0.963712	0.973427	0.979967	0.984214
2^{-8}	0.682233	0.877671	0.945566	0.962141	0.967970	0.974715	0.980070	0.984163
2^{-10}	0.677615	0.877980	0.949198	0.965616	0.970012	0.975439	0.980193	0.983969
2^{-12}	0.676350	0.877911	0.950018	0.966462	0.970585	0.975667	0.980268	0.983961
2^{-14}	0.676027	0.877884	0.950216	0.966670	0.970727	0.975722	0.980285	0.983957
2^{-16}	0.675946	0.877876	0.950264	0.966722	0.970762	0.975736	0.980288	0.983955
2^{-18}	0.675926	0.877874	0.950277	0.966735	0.970771	0.975739	0.980289	0.983955
2^{-20}	0.675920	0.877874	0.950280	0.966738	0.970773	0.975740	0.980289	0.983955
2^{-22}	0.675919	0.877874	0.950280	0.966739	0.970774	0.975740	0.980289	0.983955
R^N_{unif}	0.675919	0.877874	0.950280	0.966739	0.970774	0.975740	0.980289	0.983955

Tabela 4.9: red konvergencije za različite vrednosti ε i N, na Vulanović-Šiškinovoj mreži

ε	**Broj intervala N**							
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
2^{-4}	0.581992	0.755835	0.814591	0.849578	0.885358	0.905282	0.919416	0.928874
2^{-6}	0.616421	0.792174	0.834294	0.861430	0.889456	0.909024	0.922665	0.932390
2^{-8}	0.626209	0.801348	0.841587	0.866629	0.890785	0.909242	0.922545	0.932072
2^{-10}	0.628031	0.803356	0.843479	0.868179	0.891297	0.909427	0.922539	0.932014
2^{-12}	0.628440	0.803827	0.843942	0.868570	0.891423	0.909474	0.922547	0.932013
2^{-14}	0.628540	0.803943	0.844056	0.868667	0.891453	0.909484	0.922546	0.932011
2^{-16}	0.628564	0.803971	0.844085	0.868691	0.891461	0.909486	0.922545	0.932010
2^{-18}	0.628570	0.803979	0.844092	0.868697	0.891462	0.909486	0.922545	0.932010
2^{-20}	0.628572	0.803980	0.844094	0.868699	0.891463	0.909486	0.922545	0.932010
2^{-22}	0.628572	0.803981	0.844094	0.868699	0.891463	0.909487	0.922545	0.932010
R^N_{unif}	0.628572	0.803981	0.844094	0.868699	0.891463	0.909487	0.922545	0.932010

Tabela 4.10: red konvergencije za različite vrednosti ε i N, na polinomnoj-Šiškinovoj mreži

ε	**Broj intervala N**							
	8	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**
2^{-4}	0.691745	0.821883	0.888400	0.926340	0.949170	0.959213	0.963291	0.964333
2^{-6}	0.694796	0.870496	0.930126	0.950623	0.963712	0.973427	0.979967	0.984214
2^{-8}	0.682233	0.877671	0.945566	0.962141	0.967970	0.974715	0.980070	0.984163
2^{-10}	0.677615	0.877980	0.949198	0.965616	0.970012	0.975439	0.980193	0.983969
2^{-12}	0.676350	0.877911	0.950018	0.966462	0.970585	0.975667	0.980268	0.983961
2^{-14}	0.676027	0.877884	0.950216	0.966670	0.970727	0.975722	0.980285	0.983957
2^{-16}	0.675946	0.877876	0.950264	0.966722	0.970762	0.975736	0.980288	0.983955
2^{-18}	0.675926	0.877874	0.950277	0.966735	0.970771	0.975739	0.980289	0.983955
2^{-20}	0.675920	0.877874	0.950280	0.966738	0.970773	0.975740	0.980289	0.983955
2^{-22}	0.675919	0.877874	0.950280	0.966739	0.970774	0.975740	0.980289	0.983955
R^N_{unif}	0.675919	0.877874	0.950280	0.966739	0.970774	0.975740	0.980289	0.983955

Prema Tabele 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 i 4.5 se vidi da je Šiškinova mreža za $N = 2^3$ daje najbolju aproksimaciju od mreža koja se posmatra, a za $N = 2^{11}$ najbolju aproksimaciju daje Bahvalov-Šiškinova mreža. Modifikovana Bahvalov-Šiškinova mreža i Vulanović-Šiškinova mreža isto daje dosta dobru aprosimaciju za $N = 2^{11}$. Posmatrajući sve podatke iz te tabele može se zaključiti da je najbolju aproksimaciju daje Bahvalov-Šiškinova mreža.

Glava 5

Zaključak

Cilj ovog rada je numeričko rešavanje singularno perturbovanog problema sa kasnjenjem (1.2), (1.3), (1.4). Rešili smo problem koristeći konačno – diferencni postupak na Šiškinovoj mreži i na mreži S-tipa sa ciljem da se pokaže koje od navedenih mreža daju bolju aproksimaciju rešenja i pomoću koje od tih mreža se rešava efikasnije problem.

Teoretski dobijene ocene proverene su numeričkim eksperimentom, gde je navedeni test problem rešen pomoću svih navedenih mreža.

Prilog A

Dodatne teoreme i definicije

U ovom delu ćemo navesti neke definicije i teoreme koje su korišćene u radu. Teoreme su date bez dokaza.

A.1 Definicije i teoreme iz analize

Prvo se navodi teorema o srednjoj vrednosti, zatim neke osobine o normalnim, pred-Hilbertovim i Hilbertovim prostorima. Zatim se u prilogu navodi nejednakost Čebišev-Jensena koja igra veliku ulogu u dokazu Leme 3.5.

A.1.1 Teorema (Teorema srednje vrednosti) *Ako je funkcija* $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidna na* $[a, b]$ *i diferencijabilna na* (a, b), *onda postoji* $c \in (a, b)$ *tako da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

A.1.2 Definicija *Neka je* X *vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$. *Preslikavanje* $\|\cdot\|: X \to [0, \infty)$ *je norma na* X *ako važi*

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *za sve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i za sve* $x \in X$,

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za sve* $x, y \in X$.

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ *se naziva normiran prostor.*

A.1.3 Definicija *Kompletan normiran prostor* $(X, \|\cdot\|)$ *se naziva Banahov prostor, tj. Banahov prostor je normiran prostor u kome je svaki Košijev niz konvergentan.*

A.1.4 *Definicija* *Neka je* X *vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$. *Preslikavanje* $(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{R}$ *sa sledećim osobinom*

(S1) $(x, x) \geq 0$, *za sve* $x \in X$,

(S2) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(S3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ *za sve* $x, y, z \in X$,

(S4) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ *za sve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i sve* $x, y \in X$,

(S5) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ *za sve* $x, y \in X$.

se naziva skalarni proizvod. Uređen par $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ *se naziva prostor sa skalarnim proizvodom ili pred-Hilbertov prostor ili unitaran prostor.*

A.1.5 Lema *Sa* $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ *je definisana norma na pred-Hilbertovom prostoru* $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$.

A.1.6 Definicija *Kompletan pred-Hilbertov prostor* $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ *se naziva Hilbertovim prostorom.*

A.1.7 Teorema (Koši-Bunjakovski-Švarcova nejednakost) *Neka je X prostor sa skalarnom proizvodom. Za svako* $x, y \in X$ *važi*

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Pri tome jednakost važi ako i samo ako su vektori x, y *linearno nezavisni.*

A.1.8 Definicija *Funkcija* f *je konveksna na intervalu* (a, b) *ako za svaki par brojeva* $x, y \in (a, b)$ *važi*

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

A.1.9 Teorema (Nejednakost Jensena) *Ako je funkcija* $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ *konveksna i* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ *i* $x_i \in (a, b)$ *tada važi:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

A.1.10 Teorema (Nejednakost Čebiševa) *Neka su* x_i *i* y_i *za* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *realni brojevi koji zadovoljavaju sledeći uslov:* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ *i* $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. *Tada važi:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \leq \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{n}.$$

Prema ovim teoremama o nejednakosti Jensena i o nejednakosti Čebiševa i prema osobini i definiciji određenog integrala, dobija se Čebišev-Jensenova nejednakost:

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx,$$

gde je funkcija $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, monotona.

Razvoj eksponencijalne funkcije e^{x} u Tejlorov red je :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \ldots .$$

Prema ovoj definiciji za $t > 0$ važi $e^t \geq 1 + t$, što se koristi u dokazu Teoreme 3.7.

Razvoj funkcije $\ln(1 + \mathrm{x})$ u Tejlorov red oko tačke 0 je:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ \ldots, \quad za \ \ |x| \leq 1,$$

osim ako $x = -1$.

Prema ovoj definiciji za $t > 0$ važi $\ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$ što se koristi u dokazu Leme 3.5.

A.2 Prostor Soboljeva

A.2.1 Definicija *Neka je* $1 \leq p < \infty$ *dat broj. Tada je Soboljev prostor sa jednom promenljivom*

$$W^{1,p}(0,1) = \{f: (0,1) \to \mathbb{R} \text{ apsolutno neprekidna funkcija } f' \in L^p(\Omega)\}\ .$$

A.2.2 Definicija *Funkcija f je apsolutno neprekidna funkcija ako je zadovoljena jedan od sledeća tri uslova:*

1) *funkcija f je skoro sigurno diferencijabilna;*

2) $f' \in L^1(\Omega)$;

3) *integracijom* f' *se dobija f.*

Prilog B

Mathematica programi

U ovom delu ćemo navesti programe koji su korišćeni u radu za izvođenje numeričkih eksperimenata. Programi su urađeni u programskom paketu *Mathematica*.

B.1 Program za numeričke eksperimente na Šiškinovoj mreži

B.1.1 Program za rešavanje sistema $Ax = v$ LU-dekompozicijom

Sledeći program rešava sistem $Ax = v$ LU-dekompozicijom, gde je matrica A tridijagonalna i predstavljena je elementima ispod, na i iznad glavne dijagonale. Ovaj program je preuzet iz [14].

```
TriLUSolve[{a_List, b_List, c_List}, v_List] : =
        Module[{i, j, l, u, f, x, n=Length[b]},
        (*LUdekompozicija*)
        l={};
```

```
u={b[[1]]};
Do
  [
  u=Append[ u, b[[i]]-c[[i-1]]a[[i-1]]/u[[i-1]]];
  l=Append[l, a[[i-1]]/u[[i-1]], {i,2,n}];
  (*Resavanje LUsistema*)
  f={v[[1]]};
  Do[f=Append[f, v[[i]]-l[[i-1]]f[[i-1]]], {i, 2, n}];
  x={f[[n]]/u[[n]]};
  Do[x=Prepend[x, f[[i]]-c[[i]]x[[1]]/u[[i]]], {i, n-1, 1, -1}];
  x
 ]
```

B.1.2 Šiškinova mreža

```
Shishkin[n_, ε_, α_, δ_, q_] : =
    Module[{τ, ψ, φ, s},
      τ =Min[q, ((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n]  // N;
      ψ[s_] : = Exp[-(s/q)* Log[n]];
      φ[s_] : = -Log[ψ[s]];
      Join[
        Table[((2*(ε − δ ∗ α))/α)* φ[i/n], {i, 0, q*n }],
        Table[1-(1-((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n])*((n-i)/((1-q)*n)), {I,
        q*n, n}]
        ] // N
    ];
```

B.1.3 Program za dobijanje približnog rešenja

Program za dobijanje približnog rešenja datog u delu (4) za konačno-diferencni postupak na Šiškinovoj mreži.

FiniteDifference[n_, ε_, δ_, α_, q_, a_, b_, ϕ_, γ_] : =

Module[{mreza, h, u, v, w, r},

mreza=Shishkin[n, ε, α, δ,q];

h=Table[mreza[[i+1]]-mreza[[i]], {i, 1, n}];

u=Table[(2*($\varepsilon - \delta$*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i]]),{i, 2, n-1}];

v=Table[- (2*($\varepsilon - \delta$*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i+]]) - (2*($\varepsilon - \delta$*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i]]) – a/h[[i+1]]+b, {i, 1, n-}];

w= Table[(2*($\varepsilon - \delta$*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i+1]]) + a/h[[i+1]], {i, 1, n-2}];

$$\text{r=Table}[1/(2*(-1+e^{\frac{2*\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}}{2*(\varepsilon-\delta)}}))*\left(e^{\frac{\text{mreza}[[\text{i}+1]]*(-1+2*\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)})}{2*(\varepsilon-\delta)}}+e^{\frac{(-1+\text{mreza}[[i+1]])*(1+\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)})}{2*(\delta-\varepsilon)}}-e^{\frac{\text{mreza}[[i+1]]-2*\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}+\text{mreza}[[i+1]]\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}}{2*\delta-2*\varepsilon}}-e^{-\frac{1+\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}+\text{mreza}[[i+1]](-1+\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)})}{2*(\delta-\varepsilon)}}\right),\{\text{i, n-1}\}]\ \text{// N;}$$

r[[1]]=r[[1]]- ϕ*2 $* (\varepsilon - \delta a)$/(h[[1]]*(h[[1]]+h[[2]]));

r[[n-1]]=r[[n-1]]-γ*(2 $* (\varepsilon - \delta a)$/(h[[n]]*(h[[n]]+h[[n-1]])+a/h[[n]]);

TriLUSolve[{u, v, w}, r];

Transpose[{mreza, Join[{ϕ}, TriLUSolve[$\{u, v, w\}, r], \{\gamma\}$]}]

]

B.1.4 Program za određivanje greške rešenja

U ovom programu naveden je i deo za određivanje tačnog rešenja problema kao i približnog rešenja problema koje je neophodno za dobijanje greške rešenja u tačkama mreže.

FiniteDifference[n_, ε_, δ_, α_, q_, a_, b_, ϕ_, γ_] : =

Module[{mreza, h, A, F, z, tacno},

mreza=Shishkin[n, ε, α, δ,q];

h=Table[mreza[[i+1]]-mreza[[i]], {i, 1, n}];

A=SparseArray[Table[0, {n-1}, {n-1}]];

F=SparseArray[Table[0,{n-1}]];

Do[A[[i,i-1]]=(2*($\varepsilon - \delta$*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i]]),{i, 2, n-1}];

Do[A[[i,i]]= - (2*($\varepsilon - \delta$*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i+]]) - (2*($\varepsilon -$ δ*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i]]) – a/h[[i+1]]+b, {i, 1, n-}];

Do[A[[i,i+1]]=(2*($\varepsilon - \delta$*a))/((h[[i+1]]+h[[i]])*h[[i+1]]) + a/h[[i+1]], {i, 1, n-2}];

$$\text{F=Table}[1/(2*(-1+e^{\frac{2*\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}}{2*(\varepsilon-\delta)}}))*\left(e^{\frac{\text{mreza}[[\text{i}+1]]*(-1+2*\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)})}{2*(\varepsilon-\delta)}}+e^{\frac{(-1+\text{mreza}[[i+1]])*(1+\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)})}{2*(\delta-\varepsilon)}}-e^{\frac{\text{mreza}[[i+1]]-2*\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}+\text{mreza}[[i+1]]\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}}{2*\delta-2*\varepsilon}}-e^{-\frac{1+\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)}+\text{mreza}[[i+1]](-1+\sqrt{1+2*(\varepsilon-\delta)})}{2*(\delta-\varepsilon)}}\right), \{\text{i, n-1}\}]\ \ //\ \text{N};$$

F[[1]]=r[[1]]- ϕ*2 $* (\varepsilon - \delta a)$/(h[[1]]*(h[[1]]+h[[2]]));

F[[n-1]]=r[[n-1]]-γ*(2 $* (\varepsilon - \delta a)$/(h[[n]]*(h[[n]]+h[[n-1]])+a/h[[n]]);

(*daje približno rešenje*)

z=Join[{γ} LinearSolve[A,F], {ϕ}];

(*daje tačno rešenje*)

m1=(-a+$\sqrt{a^2 - 4*(\varepsilon - a*\delta)*\frac{b}{2}}$)/(2 * (ε − a ∗ δ));

m2=(-a-$\sqrt{a^2 - 4*(\varepsilon - a*\delta)*\frac{b}{2}}$)/(2 * (ε − a ∗ δ));

u[x_] : = (($\gamma - e^{m2})e^{m1*x} - (\gamma - e^{m1})e^{m2*x})/(e^{m1} - e^{m2})$;

tacno=Table[u[mreza[[i]]],{i, n+1}];

Max[Abs[z-tacno]] //N

]

B.1.5 Program za određivanje reda konvergencije

Dok je prethodni program dao grešku rešenja za jednu vrednost broja n, ovaj program će nam dati grešku za više vrednosti n tako što se iskoriste rezultati dobijeni sa programom za određivanje greske rešenja što je neophodno za određivanje reda konvergencije.

Sam rezultat prethodnog programa daje FiniteDifference[$n, \varepsilon, \delta, \alpha$, q, a, b, ϕ, γ] naravno za konkretne vresnosti $n, \varepsilon, \delta, \alpha$, q, a, b, ϕ, γ.

(*greška za više vrednosti n*)

$n = 2$^k;

greska=Table[FiniteDifference[$n, \varepsilon, \delta, \alpha$, q, a, b, ϕ, γ] ,{k, 3,11}]

(*red konvergencija*)

Table[Log[greska[[i]]/greska[[i+1]]]/Log[2], {I, Length[greska]-1}]

B.2 Program za numeričke eksperimente na mrežama S-tipa

Programi za numeričke eksperimente na mrežama S-tipa slično se rade kao programi za numeričke eksperimente za Šiškinovu mrežu.

Razlika je samo u mrežama koje se koriste za rešavanje problema. Zato u ovom delu samo navodimo programe za te mreže.

Numerički eksperimet pomoću mreža S-tipa se dobija tako što se u prethodnom delu svuda zameni Šiškinova mreža nekom mrežom koja je ovde navedena.

B.2.1 Bahvalov-Šiškinova mreža

```
BS[n_, ε_, α_, δ_, q_] : =
    Module[{τ, ψ, φ, s},
      τ =Min[q, ((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n]  // N;
      ψ[s_] : = 1-(1-1/n)*(s/q);
      φ[s_] : = -Log[ψ[s]];
      Join[
        Table[((2*(ε − δ ∗ α))/α)* φ[i/n], {i, 0, q*n }],
        Table[1-(1-((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n])*((n-i)/((1-q)*n)), {I,
        q*n, n}]
        ] // N
    ];
```

B.2.2 Modifikovana Bahvalov-Šiškinova mreža

```
mBS[n_, ε_, α_, δ_, q_] : =
    Module[{τ, ψ, φ, s, p},
      τ =Min[q, ((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n]  // N;
      p=q*(1+1/Log[n]);
      ψ[s_] : = Exp[-s/(p-s)];
      φ[s_] : = -Log[ψ[s]];
      Join[
        Table[((2*(ε − δ ∗ α))/α)* φ[i/n], {i, 0, q*n }],
        Table[1-(1-((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n])*((n-i)/((1-q)*n)), {I,
        q*n, n}]
```

```
    ] // N
  ];
```

B.2.3 Polinomna-Šiškinova mreža

```
ps[n_, ε_, α_, δ_, q_] : =
  Module[{τ, ψ, φ, s, m},
   τ =Min[q, ((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n]  // N;
   m=2;
   ψ[s_] : = n^(-(s/q)^m);
   φ[s_] : = -Log[ψ[s]];
   Join[
    Table[((2*(ε − δ ∗ α))/α)* φ[i/n], {i, 0, q*n }],
    Table[1-(1-((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n])*((n-i)/((1-q)*n)), {I,
    q*n, n}]
    ] // N
  ];
```

B.2.4 Vulanović-Šiškinova mreža

```
VS[n_, ε_, α_, δ_, q_] : =
  Module[{τ, ψ, φ, s},
   τ =Min[q, ((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n]  // N;
   ψ[s_] : = Exp[-(s*Log[n]/(q+(q-s)*Log[n]))];
   φ[s_] : = -Log[ψ[s]];
   Join[
    Table[((2*(ε − δ ∗ α))/α)* φ[i/n], {i, 0, q*n }],
    Table[1-(1-((2*(ε − δ ∗ α))/α) ∗Log[n])*((n-i)/((1-q)*n)), {I,
    q*n, n}]
    ] // N
  ];
```

Literatura

[1] G. File, Y.N. Reddy, *Computational Method for Solving Singularly Perturbed Delay Differential Equations with Negative Shift.* International Journal of Applied Science and Engineeting 2013. 11, 1: 101-113.

[2] S. Franz, G. Matthies, *Convergence on Layer-adapted Meshes and Anisotropic Interpolation Error Estimates of Non-Standard Higher Order Finite Elements.* Appl. Numerical Math. 61 (2011) 723-737

[3] S. Gordić, *Numeričko rešavanje singularno pertubovanih konturnih problema sa prekidom.* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, master rad, 2009.

[4] D. Herceg, Đ. Herceg, *Numerička matematika.* Univerzitet u Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, 2009.

[5] M.K. Kadalbajoo, V.P. Rames, *Hybrid method for numerical solution of singularly perturbed delay differential equations,* Appl. Math. and Comput. 187 (2007) 797-814.

[6] M.K. Kadalbajoo, K.K. Sharma, *Parameter-uniform fitted mesh method for singularly perturbed delay differential equations with layer behavior.* Electronic Transactions on Numerical Analysis 23 (2006) 180-201.

[7] L. Krstanović, *O numeričkom rešavanju singularno perturbovanog problema sa Robinovom konturnim uslovima.* Univerzitit u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, master rad, 2011.

[8] T. Linβ. *An upwind difference scheme on a novel Shishkin-type mesh for a linear convection-diffusion problem.* Journal of Computation and Applied Mathematics 110 (1999) 93-104.

[9] T. Linβ, *Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems.* Institut für Numerische Mathematik, Technische Univerzität Dresden, Habilitationsschrift, 2006.

[10] T. Linβ, M. Stynes. *A Hybrid difference scheme on a Shishkin mesh for Linear Convection-Diffusion Problems.* Appl. Num. Math., 31:255-270, 1999.

[11] J.J. Miller, E. O'Riordan, G. Shishkin, *Fitted Numerical Method for Singular Perturbed Problems.* Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimension, World Scientific Publication, Singapore 1996.

[12] K.C. Patidar, K.K. Sharma, *ε-Uniformly convergent non-standard finite difference methods for singularly perturbed differential difference equations with small delay*. Appl. Math. Comput 175 (2006) 864-890.

[13] H.-G. Roos and T. Linβ, *Sufficient Condition for Uniform Convergence on Layer-Adapted Grids.*Computing 63, 27-45 (1999).

[14] K. Surla, Đ. Herceg, S. Rapajić. *Mathematica za fizičare i hemičare*. Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

[15] A.S. Yadaw, M.K. Kadalbajoo, *Parameter-Uniform Ritz-Galerkin finite element method for singularly perturbed delay diferential equations with delay in convection term.* 2009 Academic Publications.

Biografija

Rođena sam 25. jula 1990. godine u Kikindi. Osnovnu školu "Gligorije Popov" završila sam u Ruskom Selu sa odličnim prosekom. Potom sam upisala Tehničku školu u Subotici , smer elektrotehničar računara i maturirala sam 2009. godine. Bila sam jedan od najboljih učenika generacije. Škola se tada zvala Tehnička škola, kasnije su je preimenovali u Tehničku školu "Ivan Sarić".

Na Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, osnovne akademske studije (trogodišnje studije) na odseku za matematiku sam počela 2009. godine, na studijskom programu Osnovne akademske studije-Matematike. U toku osnovnih studija 2012. godine sam se prebacila na četvorogodišnje osnovne akademske studije na studijski program Osnovne akademske studije - Diplomirani profesor matematike i diplomirala sam 30. septembra 2013. godine sa prosečnom ocenom 8,87. Nakon završetka osnovnih akademskih studija upisala sam master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu 2013. godine. Položila sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija sa prosečnom ocenom 8,2.

Novi Sad BARNA KRISTINA

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Barna Kristina

AU

Mentor: Prof. dr Helena Zarin

MN

Naslov rada: O numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema sa kašnjenjem

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2016.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/ 68/ 15/ 11/ 0/ 0/ 2)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Numerička matematika

ND

Ključne reči: singularno perturbovani problem sa kašnjenjem, Šiškinov tip mreže, konačno-diferencni postupak

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

U master radu se razmatra jednodimenzionalni singularno perturbovani problem sa kašnjenjem. Pokazuje se, kako teorijski tako i numeričkim eksperimentima, da su numerička rešenja dobijena koristeći upwind konačno-diferencni postupak na mrežama S-tipa u odnosu na perturabacioni parameter, uniformno konvergentna.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 13,05,2014.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Helena Zarin, redovni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Đorđe Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master’s thesis

CC

Author: Barna Kristina

AU

Mentor: Helena Zarin, Ph.D.

MN

Title: On numerical solving of singularly perturbed delay differential equations

TI

Language of text: Serbian (latin)

LT

Language of abstract: Serbian

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2016.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5/ 68/ 15/ 11/ 0/ 0/ 2)

PD

Scientific field: Matematics

SF

Scientific discipline: Numerical matematics

SD

Subject/Key words:

SKW

UC

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

The thesis considers a one-dimensional singularly perturbed problem with delay. We show, both theoretically and with numerical experiments, that numerical solutions obtained using an upwind finite difference scheme on S-type meshes are uniformly convergent with respect to the perturbed parameter.

Acepted by the Scientifice Board on: 13,05,2014,

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Dragoslav Herceg, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Helena Zarin, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Member: Dr. Đorđe Herceg, full professor, Faculty of Sciences University of Novi Sad