UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Kristina Ago

O Šturmovim rečima i njihovim primenama u teoriji brojeva

- Master rad-

Mentor:
dr Bojan Bašić

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog master rada su, kao što i naslov kaže, Šturmove reči i njihova primena u teoriji brojeva. U pitanju su beskonačne binarne reči koje se mogu definisati na više različitih, međusobno ekvivalentnih načina. Rad se sastoji od tri dela.

U prvom delu su definisani pojmove koje ćemo da koristimo tokom rada i predstavljeno je nekoliko ključnih teorema iz oblasti kombinatorike na rečima.

Drugi deo rada je posvećen Šturmovim rečima. Prvo se daju njihove osnovne osobine. U prvoj sekciji ovog dela dokazuje se Morse-Hedlundova teorema, koja daje ekvivalenciju Šturmovih reči, aperiodičnih balansiranih reči i mehaničkih reči sa iracionalnim nagibom. U drugoj sekciji se ispituje palindromska složenost Šturmovih reči i pomoću toga se daje njihova karakterizacija. Treća sekcija je posvećena povratnim rečima, i tamo se dokazuje da je reč s Šturmova ako i samo ako skup povratnih reči za svaki njen faktor sadrži tačno dva elemenata. U četvrtoj sekciji su informativno predstavljene još neke karakterizacije.

U trećem delu rada pažnja je usmerena na primene Šturmove reči u teoriji brojeva. Izložena su tri važna rezultata. U prvoj sekciji se najpre daje kriterijum transcendentnosti preko cifarskog zapisa u nekoj bazi, a zatim preko verižnih razlomaka. U drugoj sekciji pokazuje da se Šturmove reči u teoriji brojeva pojavljuju ne samo u pitanjima transcendentnosti već i u drugim kontekstima, konkretno (kako se ispostavilo tek pre nekoliko godina) i u ispitivanju ponašanja razlomljenih delova brojeva oblika ξb^n.

Na kraju želim da se zahvalim svim mojim profesorima, od kojih sam mnogo naučila u toku školovanja i studiranja.

Zahvalnost dugujem i mojim drugovima i drugaricama, koji mi nisu zamerili što sam ih u zadnje vreme toliko puta ignorisala.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici: tati Jožefu, mami Jeleni, sestri Moniki i mom Danijelu na podršci koju mi neprestano pružaju.

I posebno bih izdvojila mog mentora, dr Bojana Bašića, ne samo na odabiru zanimljive teme i savetima u toku pripreme ovog master rada, već i na ukazanom poverenju, strpljenju i podršci.

Kristina Ago

1 Uvod

Kombinatorika na rečima je relativno mlada grana matematike, koja je brzo našla primene u mnogim kako matematičkim, tako i nematematičkim oblastima. Kao što i sam naziv kaže, njeni centralni objekti izučavanja su reči, konačne i beskonačne. U matematičkom smislu, reči su konačni ili beskonačni nizovi simbola iz unapred utvrđenog skupa, koji nazivamo alfabet.

U ovoj sekciji definišemo pojmove koje ćemo da koristimo tokom rada kao što su reč, prefiks, sufiks, faktor, palindrom, morfizam, faktor-graf beskonačne reči.... Definišu se razne vrste reči: periodične, eventualno periodične, aperiodične, rekurentne i uniformno rekurentne reči, i pokazuje se njihov međusobni odnos. Pored toga se dokazuje još nekoliko osnovnih teorema iz oblasti kombinatorike na rečima.

Definicije i teoreme koje su ovde navedene se mogu naći u [2], [5], [13], [14], [15] i [16].

Definicija 1.1. *Neka je Σ proizvoljan neprazan skup simbola, koji zovemo alfabet, a njegove elemente zovemo slovima. Konačne ili beskonačne nizove slova nazivamo reči nad alfabetom Σ.*

Označimo sa Σ^* skup konačnih reči, a sa Σ^∞ skup konačnih ili beskonačnih reči nad Σ.

Primer 1.2.

- *Za $\Sigma = \{a, b, c, 0, 1\}$ reči nad Σ su, recimo, abc, $a0b1$, 01010101010101, $abcabcabcabc\ldots$;*
- *Nad alfabetom $\Sigma = \{x\}$ možemo formirati sledeće reči: x, xx, xxx, $xxxx\ldots$.*

Na skupu Σ^* možemo definisati binarnu operaciju na sledeći način:

Definicija 1.3. *Neka su $u = u_1u_2\ldots u_n$, $v = v_1v_2\ldots v_m$ dve reči, gde su u_1, u_2, $\ldots$, u_n, v_1, v_2, $\ldots$, v_m slova koja ne moraju biti različita. Proizvod reči u i v je reč $w = u_1u_2\ldots u_nv_1v_2\ldots v_m$. Pišemo $w = uv$.*

Operacija koju smo upravo definisali zove se *konkatenacija* ili *nadovezivanje*. Primetimo da je proizvod uv dobro definisan i u slučaju kada je reč v beskonačna. Za $k \in \mathbf{N}$ označimo sa w^k reč $wwww\ldots w$, gde smo w napisali k puta, a sa w^∞ beskonačnu reč $wwwwww\ldots$.

Sada ćemo definisati i jednu unarnu operaciju $\widetilde{\ }: \Sigma^* \to \Sigma^*$.

Definicija 1.4. *Neka je $u = a_1a_2\ldots a_n$, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ slova. Tada definišemo $\widetilde{u} = a_na_{n-1}\ldots a_1$. Ovako definisanu operaciju nazivamo preokretanje.*

Neka su u i v konačne reči. Lako se vidi da operacija $\widetilde{\ }$ ima sledeće osobine:

$$\widetilde{\widetilde{u}} = u, \ \widetilde{uv} = \widetilde{v}\widetilde{u}, \ \widetilde{u\widetilde{v}} = \widetilde{\widetilde{v}}\widetilde{u} = v\widetilde{u}.$$

Broj slova konačne reči v nazivamo dužina reči v, i označavamo sa $|v|$. Reč dužine 0 zovemo prazna reč i obeležavamo je sa ε. Za sve reči $v \in \Sigma^*$ važi:

$$\varepsilon v = v\varepsilon = v.$$

Definicija 1.5. *Konačna reč u je*

- *prefiks reči $w \in \Sigma^\infty$ ako i samo ako $w = ux$ za neko $x \in \Sigma^\infty$;*
- *sufiks reči $w \in \Sigma^*$ ako i samo ako $w = yu$ za neko $y \in \Sigma^*$;*
- *faktor reči $w \in \Sigma^\infty$ ako i samo ako $w = puq$ za neko $p \in \Sigma^*$ i $q \in \Sigma^\infty$.*

Prefiks (respektivno sufiks, faktor) je pravi ako i samo ako $x \neq \varepsilon$ (respektivno $y \neq \varepsilon$, $pq \neq \varepsilon$).

Neka je x proizvoljna reč. Uvodimo sledeće oznake:

- $F(x)$ - skup svih faktora reči x;
- $F_n(x)$ - skup svih faktora dužine n reči x;
- $Pref(x)$ - skup svih prefiksa reči x;
- $Suf(x)$ - skup svih sufiksa reči x.

Definicija 1.6. *Za reč $u \in \Sigma^*$ kažemo da je palindrom ako i samo ako $\widetilde{u} = u$.*

Skup svih palindromskih faktora reči $w \in \Sigma^\infty$ označimo sa $Pal(w)$. Skup svih palindromskih faktora dužine n označimo sa $Pal_n(w)$.

Definicija 1.7. *Beskonačna reč w je*

- *periodična ako i samo ako $w = v^\infty$ za neko $v \in \Sigma^*$;*
- *eventualno periodična ako i samo ako $w = uv^\infty$ za neko $u, v \in \Sigma^*$;*
- *aperiodična ako i samo ako nije eventualno periodična;*
- *rekurentna ako i samo ako se svaki faktor reči w pojavljuje u njoj beskonačno mnogo puta;*
- *uniformno rekurentna ako i samo ako je rekurentna i za svaki njen faktor važi da je razlika između svaka dva uzastopna pojavljivanja tog faktora u reči w ograničena odozgo.*

Primer 1.8.

- $0101010101010101\ldots$ *je periodična reč;*
- $abc010101010101\ldots$ *je eventualno periodična reč;*
- $314159265359\ldots$ (*tj. reč koja je formirana pomoću cifara broja* π) *je aperiodiča reč;*
- *sve Šturmove reči, kojima se bavi ovaj rad, jesu rekurentne;*
- *uniformno rekurentna je Thue-Morseova reč t, koju definišemo na sledeći način:*

$$u_0 = 0, v_0 = 1;$$

$$u_{n+1} = u_n v_n, v_{n+1} = v_n u_n, \quad n \geq 0;$$

$$t = \lim_{n \to \infty} u_n.$$

(Gornji limes označava beskonačnu reč takvu da su sve reči u_n njeni prefiksi; kako je svaka reč u_n prefiks reči u_{n+1}, ovaj limes je dobro definisan.)

Početak reči t je $t = 0110100110010110100101100110100\ldots$

(*Dokaz da je ova reč zaista uniformno rekurentna može se naći u* [10].)

Neka je x proizvoljna reč. Koristićemo oznaku $x[i]$ za slovo koja se nalazi na i-toj poziciji u x, a oznaku $x[i,j]$ za faktor čije se prvo slovo nalazi na i-toj a poslednje slovo na j-toj poziciji u x. Prilikom određivanja pozicije smatramo da je prvo slovo posmatrane reči na poziciji 1 uz izuzetak mehaničke reči u sekciji 2.1, gde zbog tehničkih razloga smatramo da je prvo slovo na poziciji 0.

Neka su u i v konačne reči. Koristićemo i sledeću notaciju:

$$|u|_v = |\{i : 0 \leq i \leq |u| - |v|, u[i+1, i+|v|] = v\}|.$$

Definicija 1.9. *Ceo broj p se naziva period beskonačne reči w ako i samo ako $w[i] = w[i+p]$ za sve $i \geq 1$.*

Primer 1.10. *Primetimo da period reči nije jedinstveno određen. Na primer za reč abcabcabcabcabcabc... važi da p može biti* $3, 6, 9 \ldots$

Lema 1.11. *Beskonačna reč w je uniformno rekurentna ako i samo ako za sve njene faktore u postoji prirodan broj n takav da $u \in F(v)$ za sve $v \in F(w)$ za koje je $|v| = n$*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Za n možemo uzeti $n = b + |u| - 1$, gde je b ograničenje iz definicije uniformne rekurentnosti.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da postoji takvo n. Tada za ograničenje između uzastopnih pojavljivanja faktora u možemo uzeti $n - |u| + 1$. ∎

Teorema 1.12. *Periodične reči su uniformno rekurentne.*

Dokaz. Neka je w beskonačna periodična reč sa periodom k i neka $u \in F(w)$, $|u| = n$. Za vrednost $k + n - 1$ važi da $u \in F(v)$ za sve $v \in F(w)$ za koje je $|v| = k+n-1$, pa na osnovu leme 1.11 sledi da je w uniformno rekurentna. ∎

Definicija 1.13. *Dve konačne reči u i v su konjugovane ako i samo ako postoje konačne reči x i y tako da*

$$u = xy \text{ i } v = yx.$$

Konjugovanost reči je relacija ekvivalencije. Definišemo preslikavanje γ na sledeći način:

Neka je a slovo a x konačna reč. Tada $\gamma(ax) = xa$. Označimo $\Gamma(v) = \{\gamma^n(v) : 0 \leq n < |v|\}$. $\Gamma(v)$ je klasa ekvivalencije reči v u odnosu na konjugovanost.

Lema 1.14. *Neka je Σ alfabet. Za konačne reči $u, v \in \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ važi da $uv = vu$ ako i samo ako postoji $t \in \Sigma^*$ takvo da je $u = t^p$ i $v = t^q$ za neke prirodne brojeve p i q.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka postoji takvo t. Tada jasno važi $uv = vu = t^{p+q}$.

($\Rightarrow$) Dokažimo indukcijom po $|u| + |v|$. Ako $|u| = |v| = 1$ tvrđenje jasno važi. Pretpostavimo da je $|u| + |v| > 2$ i neka je bez umanjenja opštosti $|u| \geq |v|$. Razlikujemo dva slučaja.

- $|u| = |v|$:

  Tada kako $uv = vu$ sledi da je $u = v$ pa za t možemo uzeti $t = u = v$.

- $|u| > |v|$:

  Tada $uv = vu$ implicira da je v prefiks od u, tj. u možemo zapisati u obliku $u = vv_1$. Sada iz $uv = vu$ sledi

  $$vv_1v = vvv_1$$

  tj.

  $$v_1v = vv_1.$$

  Kako $|v| + |v_1| < |u| + |v|$ po induktivnoj hipotezi postoji $t \in \Sigma^*$ takvo da $v = t^p$, $v_1 = t^q$ tj $u = t^{p+q}$ i $v = t^p$.

■

Teorema 1.15. *Neka je w beskonačna, eventualno periodična reč. Ako je ona rekurentna tada je i periodična.*

Dokaz. Neka je w eventualno periodična reč. Tada je ona oblika $w = uv^\infty$ za neke $u, v \in \Sigma^*$. Pretpostavimo da je v najmanji mogući period. Ako $u = \varepsilon$, tada nema šta da dokazujemo; zato pretpostavimo da $u \neq \varepsilon$. Kako je w rekurentna, sledi da se njen faktor uv pojavljuje u njoj beskonačno mnogo puta. Reč u je konačne dužine, pa sledi da sigurno postoji pojavljivanje reči uv u v^∞. Neka je $uv = v_2v^kv_1$, gde $v_2 \in Suf(v)$, a $v_1 \in Pref(v)$, i neka su v_1' i v_2' reči takve da $v = v_1v_2' = v_1'v_2$. Kako $uv = v_2v^kv_1$, sledi da v možemo napisati i u obliku $v_2'v_1$. Sada postoje tri mogućnosti:

- $0 < |v_1| < |v|$:

  Tada, kako je $v = v_1v_2' = v_2'v_1$, sledi na osnovu leme 1.14 da $|v|$ nije najmanji period reči v^∞ pa dobijamo kontradikciju sa našom pretpostavkom.

- $v_1 = \varepsilon$:

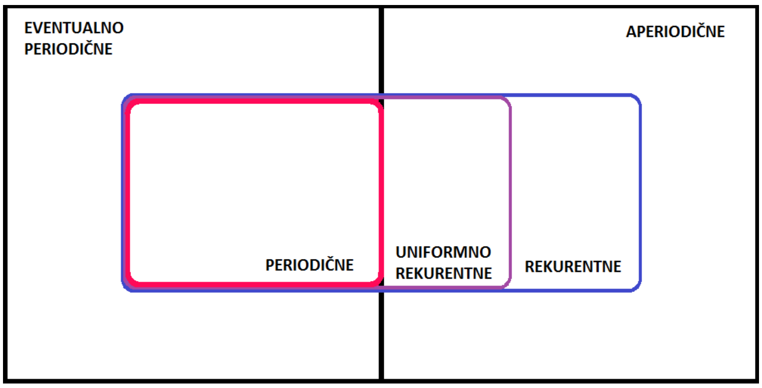
  U ovom slučaju imamo
  $$uv = v_2 v^k = v_2(v_1' v_2)^k$$
  tj.
  $$w = uv^\infty = uvv^\infty = v_2(v_1'v_2)^k(v_1'v_2)^\infty = (v_2v_1')^\infty.$$

- $v_1 = v$:

  Sada je
  $$u = v_2 v^k = v_2(v_1' v_2)^k$$
  tj.
  $$w = uv^\infty = v_2(v_1'v_2)^k(v_1'v_2)^\infty = (v_2v_1')^\infty.$$

■

Sada na osnovu teoreme 1.12 i 1.15 sledi da beskonačne reči mogu biti kategorizovane na sledeći način:



Slika 1.

Definicija 1.16. *Neka su A i B alfabeti. Funkcija $f : A^* \to B^*$ naziva se morfizam ako i samo ako $f(xy) = f(x)f(y)$ za sve $x, y \in A^*$.*

Slično možemo definisati funkciju iz f A^∞ u B^∞ koju takođe zovemo morfizam:

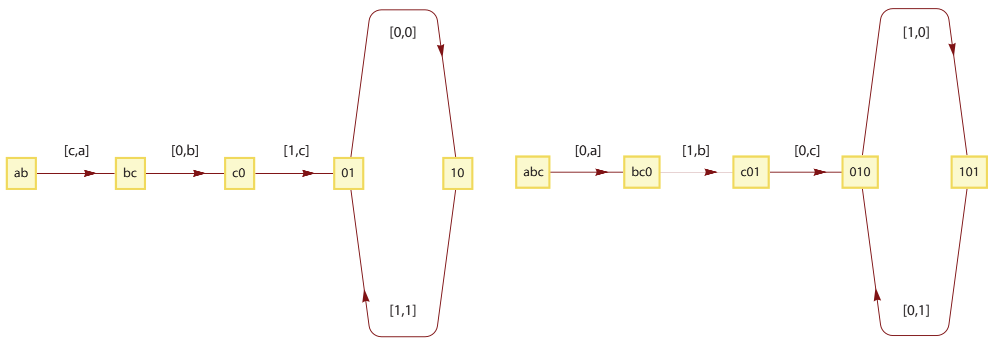
Definicija 1.17. *Neka su A i B alfabeti. Funkcija $f : A^\infty \to B^\infty$ zove se morfizam ako i samo ako $f(a_1a_2 \dots a_n \dots) = f(a_1)f(a_2)\dots f(a_n)\dots$.*

Neka je f morfizam. Preslikavanje f^n definišemo rekurzivno sa $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. f^0 označava identičko preslikavanje, a f^∞ je $\lim_{n\to\infty} f^n$ (ukoliko ovaj limes postoji; videti još jednom primer 1.8).

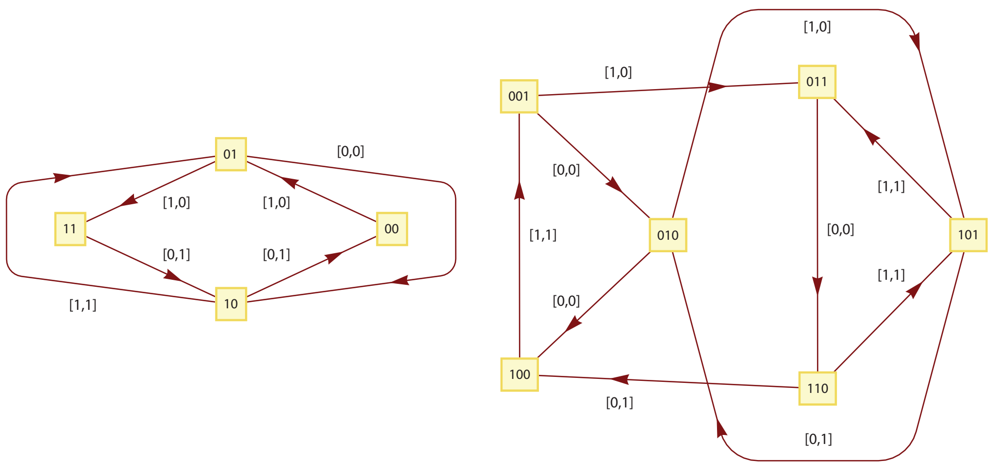
Napomena 1.18. *Primetimo da je morfizam jednoznačno određen slikama slova.*

Definicija 1.19. *Neka je w beskonačna reč. Faktor-graf reda n reči w, u oznaci $G_n(w)$, je orijentisan graf čiji su čvorovi elementi skupa $F_n(w)$, a iz čvora u u čvor v postoji grana ako i samo ako postoje slova a i b takva da su ua i bv faktori reči w i važi $ua = bv$*

Primer 1.20. *Posmatrajmo kako izgledaju faktor-grafovi reči $abc(01)^\infty$* (Slika 2.) *i Thue-Morseove reči* (Slika 3.) *za $n = 2$ i $n = 3$:*



Slika 2.



Slika 3.

Teorema 1.21. *Neka je w beskonačna reč. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *w je eventualno periodična;*
2. *$\{|F_n(w)| : n \geq 0\}$ je ograničeno;*
3. *$|F_n(w)| < n + k - 1$ za neko $n \geq 1$, gde je k broj različitih slova u w;*
4. *$|F_n(w)| = |F_{n+1}(w)|$ za neko n.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Neka je w eventualno periodična. Tada je ona oblika $w = uv^\infty$ za konačne reči u i v. Lako je videti da za svako n važi $|F_n(w)| \leq |uv|$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Pretpostavnimo da je $|F_n(w)|$ ograničeno, tj. da postoji prirodan broj c takav da za sve $n \geq 0$ važi $|F_n(w)| \leq c$. Tada za sve $n > c + 1 - k$, gde je k broj različitih slova u w, važi $|F_n(w)| \leq c < n + k - 1$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Pretpostavimo suprotno, tj. da za sve n važi $|F_n(w)| < |F_{n+1}(w)|$. Tada možemo da zapišemo da je $|F_{n+1}(w)| = |F_n(w)| + d(n)$, gde je d funkcija za koju važi $d(n) \geq 1$ za sve prirodne brojeve n. Sada imamo

$$|F_n(w)| = |F_1(w)| + \sum_{i=1}^{n-1} d(i) \geq n + k - 1.$$

Dobili smo kontradikciju.

(4) $\Rightarrow$ (1) Neka postoji n takvo da je $|F_n(w)| = |F_{n+1}(w)|$. Posmatrajmo faktor-graf reda n ove reči. Kako je svaki faktor reda n prefiks nekog faktora reda $n + 1$, sledi da iz svakog čvora izlazi bar jedna grana. Uslov $|F_n(x)| = |F_{n+1}(x)|$ znači da svaki faktor dužine n može biti produžen na jedinstven način, pa sve zajedno imamo da iz svakog čvora izlazi tačno jedna grana. Putanja koju beskonačna reč opisuje je jedinsveno određena, i (eventualno posle nekoliko koraka) kružiće po konturi. Ovo upravo znači da je reč w eventualno periodična. ∎

Na kraju ove sekcije daćemo još jedan dovoljan uslov za eventualnu periodičnost reči.

Definicija 1.22. *Faktor u beskonačne reči w nad Σ se naziva konzervativni faktor ako i samo ako postoji tačno jedno slovo $a \in \Sigma$ takvo da $ua \in F(w)$.*

Teorema 1.23. *Neka je w beskonačna reč i neka je za fiksirano $n \geq 1$ c broj konzervativnih faktora reči w dužine n. Ako u $F(w)$ postoji faktor u dužine $n+c$ čiji su faktori dužine n svi konzervativni, tada je w eventualno periodična.*

Dokaz. Neka je $u = a_1a_2 \ldots a_{n+c}$ faktor dužine n čiji su svi faktori dužine n konzervativni. Posmatrajmo faktor graf $G_n(w)$. On sadrži čvor $a_1 \ldots a_n$ i iz tog čvora postoji jedinstven put (kontura)

$$a_1a_2 \ldots a_n \xrightarrow{[a_{n+1},a_1]} a_2a_3 \ldots a_{n+1} \xrightarrow{[a_{n+2}a_2]} \ldots \xrightarrow{[a_{n+c},a_{n+c-2}]} a_1 \ldots a_n,$$

koja odgovara reči $u = a_1a_2 \ldots a_{n+c}$ i koja vodi nazad u čvor $a_1 \ldots a_n$. Ako u reči w stignemo do faktora $a_1a_2 \ldots a_n$, posle toga svako slovo je jedinstveno određeno jer u odgovarajućem faktor grafu stalno kružimo po istoj konturi. Dakle, reč w je eventualno periodična. ■

2 Šturmove reči

U ovoj sekciji ćemo prvo definisati šta su Šturmove reči i pokazati nekoliko njihovih osobina, kao što su aperiodičnost, rekurentnost i uniformna rekurentnost, da bismo videli gde se one nalaze u skupu svih reči nad dvoelementim alfabetom. Osnovni primer Šturmove reči je Fibonačijeva reč, pa ćemo dati dokaz da ona zaista predstavlja primer Šturmove reči. Zatim slede podsekcije u kojima se bavimo raznim karakterizacijama Šturmove reči. Naredne stranice se oslanjaju na [14] i [16].

Definicija 2.1. *Neka je s beskonačna reč. Kažemo da je s Šturmova reč ako i samo ako za sve $n \geqslant 0$ važi*

$$|F_n(s)| = n + 1.$$

Za $n = 0$ dobijamo da s sadrži jedan faktor dužine 0, jasno to je prazna reč. Za $n = 1$ dobijamo $|F_1(s)| = 2$, pa možemo zaključiti da Šturmove reči sadrže tačno dva različita slova, tj. one su formirane nad dvoelementnim alfabetom. U nastavku rada ćemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da $\Sigma = \{0, 1\}$

Primer 2.2. *Fibonačijeva reč predstavlja najpoznatiji primer Šturmove reči. Jedan od načina da se definiše ova reč je sledeći:*

$$f_0 = 0, f_1 = 01, f_{n+2} = f_{n+1} f_n,$$

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n.$$

Dakle,

$$f = 0100101001001010010100100101001001\ldots$$

Fibonačijevu reč možemo definisati i kao $\varphi^\infty(0)$ pomoću morfizma

$$\varphi : \begin{array}{l} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0. \end{array}$$

Zaista, za svako $n \geq 0$ važi $\varphi(f_n) = f_{n+1}$. Za $n = 0$ i $n = 1$ imamo

$$\varphi(f_0) = \varphi(0) = 01 = f_1$$

i

$$\varphi(f_1) = \varphi(01) = 010 = f_2.$$

Dalje radimo indukcijom. Pretpostavimo da naše tvrđenje važi za sve prirodne brojeve koje su manje od n*. Tada:*

$$\begin{aligned}\varphi(f_n) &= \varphi(f_{n-1}f_{n-2}) \\ &= \varphi(f_{n-1})\varphi(f_{n-2}) \\ &= f_n f_{n-1} \\ &= f_{n+1}.\end{aligned}$$

Dakle, za svako $n \geq 0$

$$f_n = \varphi(f_{n-1}) = \varphi^2(f_{n-2}) = \cdots = \varphi^n(f_0) = \varphi^n(0),$$

i otuda

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(0) = \varphi^\infty(0).$$

Fibonačijeva reč je fiksna tačka morfizma φ:

$$\varphi(f) = \varphi(\varphi^\infty(0)) = \varphi^\infty(0) = f.$$

Kasnije ćemo dati i formalan dokaz da Fibonačijeva reč zaista predstavlja primer Šturmove reči, a sada ćemo samo ilustrovati definiciju koju smo dali. Pogledajmo kako izgledaju skupovi $F_n(f)$. Za $n = 0$ i $n = 1$ situacija je jasna, a za $n \geqslant 2$ imamo sledeće:

- $F_2(f) = \{01, 10, 00\}$, sledi $|F_2(f)| = 3$;
- $F_3(f) = \{010, 100, 001, 101\}$, sledi $|F_3(f)| = 4$;
- $F_4(f) = \{0100, 1001, 0010, 0101, 1010\}$, sledi $|F_4(f)| = 5. \ldots$

Teorema 2.3. *Šturmove reči su aperiodične.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.21 imamo da je beskonačna reč eventualno periodična ako i samo ako $|F_n(w)| < n + k - 1$ za neko $n \geq 1$, gde je k broj različitih slova koja se pojavljuju u w. Kako je broj slova Šturmovih reči 2, ako bismo hteli pokazati da je Šturmova reč s eventualno periodična treba naći bar jedno n takvo da $F_n(s) < n + 1$ tj. $F_n(s) \leq n$. Jasno, takvo n ne postoji jer na osnovu definicije Šturmovih reči imamo da za sve $n \geq 0$ važi $|F_n(s)| = n + 1$. Sledi da su Šturmove reči aperiodične. ■

Dakle, Šturmove reči mogu biti okarakterisane kao aperiodične reči čija je faktorska složenost minimalna.

Teorema 2.4. *Šturmove reči su rekurentne.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je s Šturmova reč i neka postoji faktor x koji se pojavljuje samo konačno mnogo puta u s. Tada s možemo da zapišemo u obliku $s = s'w$, gde je s' konačna reč i važi da $x \notin F(w)$. Označimo sa n dužinu reči x. Skup $F_n(w)$ je strogi podskup od $F_n(s)$ jer $u \in F_n(s) \backslash F_n(w)$. Odavde možemo zaključiti da

$$|F_n(w)| < |F_n(s)| = n + 1.$$

Prema teoremi 1.21 to znači da je reč w eventualno periodična, tj. može da se zapiše u obliku $w = uv^\infty$ za neku konačne reči u i v. Sledi da je $s = s'uv^\infty$, $s'u \in \Sigma^*$. Kontradikcija, jer smo malopre zaključili da su Šturmove reči aperiodične. ∎

Teorema 2.5. *Šturmove reči su uniformno rekurentne.*

Dokaz. Pretpostavimo da Šturmova reč s nije uniformno rekurentna. Fiksirajmo proizvoljan faktor u reči s dužine n. Pokazujemo da postoji prirodan broj m takav da ne važi $F_m(s) = m+1$. Naći ćemo prvo $n+2$ različita faktora reči s dužine m koji počinju sa u i zatim $m - n$ različitih faktora dužine m koji ne počniju sa u.

Kako na osnovu prethodne teoreme znamo da je s rekurentna, za dovoljno veliko m postoji faktor $s[i, i+m-1]$ reči s koji $n+1$ puta sadrži u, a prema našoj pretpostavci, kako s nije uniformno rekurentna, postoji prirodan broj j takav da $s[i+j, i+j+m-1]$ ne sadrži u.

Posmatrajmo niz reči $s[i+h, i+h+m-1]$, $h = 0, 1 \dots j$. Znamo da

$$|s[i, i+m-1]|_u = n + 1$$

i da je

$$|s[i+j, i+j+m-1]|_u = 0.$$

Primetimo da

$$|s[i+h, i+h+m-1]|_u - |s[i+h+1, i+h+1+m-1]|_u| \leq 1, \; h = 0, 1, \dots, j-1,$$

i kada važi

$$|s[i+h+1, i+h+1+m-1]|_u - s[i+h, i+h+m-1] = -1,$$

tada $s[i+h, i+h+m-1]$ počinje sa u.

Kako h prolazi od 0 do j broj pojavljivanja reči u u odgovarajućem faktoru od $n+1$ stiže do 0 i kako se u svakom koraku ta vrednost povećava ili smanjuje najviše za 1, sledi da postoje celi brojevi $h_1, h_2, \ldots h_n$ takvi, da $h_1 < h_2 < \cdots < h_n$ i za $j = 1, 2, \ldots, n$

$$|s[i+h_j, i+h_j+m-1]|_u = n-j+1,$$

i

$$|s[i+h_j+1, i+h_j+1+m-1]|_u < |s[i+h_j, i+h_j+m-1]|_u.$$

Dakle, za $j = 1, 2, \ldots, n$ reč $s[i+h_j, i+h_j+m-1]$ počinje sa u i sadrži tačno $n-j+1$ pojavljivanja faktora u. Na ovaj način smo pronašli $n+2$ različitih faktora dužine m koji počinju sa u.

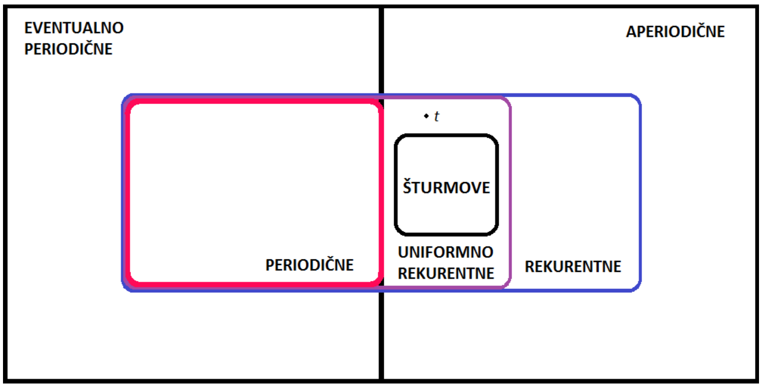
Sada posmatrajmo faktor v dužine m u kojem u se pojavljuje tačno jednom i to kao sufiks reči v. Takav faktor postoji jer po pretpostavci s nije uniformno rekurentna. Neka je $v = s[k, k+m-1]$ za pogodno izabrano k. Posmatrajmo sada faktore $s[k+j, k+j+m-1]$, $j = 0, 1, \ldots, m-n-1$. Njih ima ukupno $m-n$ i svi su međusobno različiti. Ako pretpostavimo da postoji p i q tako da $0 \leq p < q < m-n$ i $s[i+p, i+p+m-1] = s[i+q, i+q+m-1]=w$, tada možemo zapisati $w = x_p u y_p = x_q u y_q$ i $v = v_p x_p u = v_q x_q u$ za neke $x_p, x_q, y_p, y_q, v_p, v_q \in \Sigma^*$, gde $|x_p| > |x_q|$. Kako $x_p u = x_q u u'$ za neko $u' \in \Sigma^*$ za v važi:

$$v = v_p x_q u u' = v_q x_q u$$

tj. u njemu imamo dva pojavljivanja faktora u. Kontradikcija. Dakle uočili smo $m-n$ različitih faktora među kojih nijedan ne počinje sa u.

Ukupno smo našli $n+2$ različita faktora reči s dužine m koja počinju sa u i $m-n$ različita faktora koja ne počinju sa u. Sledi $F_m(s) \geq n+2+m-n = m+2$. Kontradikcija sa činjenicom da je s Šturmova reč. ∎

Prema prethodnoj teoremi skup Šturmovih reči nad Σ je podskup skupa aperiodičnih, uniformno rekurentnih reči:



Slika 4.

Nisu sve aperiodične i uniformno rekurentne reči Šturmove tj. skup Šturmovih reči je strogi podskup skupa aperiodičnih uniformno rekurentnih reči. To nam pokazuje recimo Thue-Morseova reč iz primera 1.8. Podsetimo se, prvih nekoliko slova te reči su bila

$$t = 0110100110010110\ldots.$$

Imamo da je $F_2(t) = \{01, 11, 10, 00\}$, tj. $|F_2(t)| = 4 \neq 3$ pa reč t nije Šturmova.

Definicija 2.6. *Desni specijalni faktor reči w je reč u takva da i $u0$ i $u1$ pripadaju skupu $F(w)$, dok je levi specijalni faktor reč v takva da i $0v$ i $1v$ pripadaju skupu $F(w)$.*

Iz definicije Šturmovih reči odmah sledi sledeća teorema:

Teorema 2.7. *Beskonačna reč s je Šturmova ako i samo ako za svako $n \geq 0$ postoji tačno jedan desni specijalni faktor dužine n.*

Vratimo se sad na Fibonačijevu reč f.

Propozicija 2.8. *Fibonačijeva reč je Šturmova.*

Dokaz. Dokazaćemo da za svaku dužinu n postoji tačno jedan desni specijalni faktor.

- f ima najviše jedan desni specijalni faktor svake dužine:

  Prvo dokazujemo da ne postoji reč x takva da $0x0$ i $1x1$ oba pripadaju skupu $F(f)$. Ako je reč x dužine 0, tada $x = \varepsilon$, pa treba da pokažemo da

00 i 11 ne mogu istovremeno biti faktori reči f. Međutim, za faktor 11 lako se vidi da se ne može pojavljivati u f jer $f = \varphi(f)$ a $\varphi(f)$ se sastoji od proizvoda reči 01 i 0, odavde $\varphi(f)$ pa samim tim i f ne može da sadrži dve jedinice jedno pored druge. Dalje, ako je dužina reči x jedan, tada imamo da dokažemo da 000 ili 101 ne može da pripada skupu faktora f. (Za $x = 1$ odmah imamo traženo.) Pokažimo da $000 \notin F(f)$. Naime, primetimo da one nule u $\varphi(f) = f$ posle koje ponovo sledi 0 moraju da budu slike jedinice. Dakle $00 \in Pref(000)$ je slika $\varphi(11)$, što daje kontradikciju, jer malopre smo ustanovili da 11 ne pripada skupu faktora reči f. Pretpostavimo da postoji takvo x za koje ne važi tvrđenje, i pretpostavimo da među svim takvim rečima x ima najmanju dužinu. Ta dužina je bar 2. Na osnovu dosadašnjih razmatranja možemo zaključiti da je x oblika $0y0$ za neko y. Važi da su $0x0$ i $1x1$ tj. $00y00$ i $10y01$, u $F(\varphi(f))$=$F(f)$, štaviše i $010y01 \in F(f)$. Na osnovu toga što smo malopre zaključili da one nule posle koje ponovo stoji nula moraju da budu slike jedinice sledi da postoji z takvo da $\varphi(1z1) = 00y0$ i $\varphi(0z0) = 010y01$. Ovo nam pokazuje da su $0z0$ i $1z1$ su faktori reči f, međutim ovo je kontradikcija, jer $|z| \leq |\varphi(z)| = |0y| < |0y0| = |x|$.

Sada možemo dokazati da postoji najviše jedan specijalni faktor svake dužine. Pretpostavimo suprotno: neka su u i v desni specijalni faktori. Označimo sa x njihov najduži zajednički sufiks. Tada ćemo imati da su reči $0x0$ i $1x1$ faktori reči f. Kontradikcija sa prethodnim razmatranjem.

- f ima bar jedan desni specijalni faktor svake dužine:

  Prvo dokažimo da za proizvoljnu konačnu reč u važi

  $$\varphi(\widetilde{u})0 = 0\widetilde{\varphi(u)}.$$

  Dokaz radimo indukcijom po dužini reči u. Ako je dužina u jednaka 1, tada je $u = 0$ ili $u = 1$, pa imamo:

  - za $u = 0 : \varphi(\widetilde{0})0 = \varphi(0)0 = 010 = 0\widetilde{01} = 0\widetilde{\varphi(0)}$;
  - za $u = 1 : \varphi(\widetilde{1})0 = \varphi(1)0 = 00 = 0\widetilde{0} = 0\widetilde{\varphi(1)}$.

  Dalje, ako pretpostavimo da tvrđenje važi za neku reč x, možemo dokazati da će važiti i za reči $0x$ i $1x$. Pokažimo da važi za $0x$, slučaj

$1x$ je analogan.

$$\begin{aligned}\varphi(\widetilde{0x})0 &= \varphi(\widetilde{\widetilde{x}0})0 = \varphi(\widetilde{x}0)0 = \varphi(\widetilde{x})\varphi(0)0 = \varphi(\widetilde{x})010 \\ &= 0\widetilde{\varphi(x)}10 = 0\widetilde{\varphi(x)}\widetilde{01} = 0\widetilde{\varphi(x)}\widetilde{\varphi(0)} = 0\widetilde{\varphi(0)\varphi(x)} \\ &= 0\widetilde{\varphi(0x)}.\end{aligned}$$

Sad dokažimo da za $n \geq 2$ važi sledeća relacija:

$$f_{n+2} = g_n \widetilde{f_n} \widetilde{f_n} t_n, \tag{1}$$

gde je $g_2 = \varepsilon$, za $n \geq 3$ važi:

$$g_n = f_{n-3} \dots f_1 f_0,$$

a

$$t_n = \begin{cases} 01, & \text{za parno } n; \\ 10, & \text{za neparno } n. \end{cases}$$

Za dokaz ove relacije koristimo ponovo indukciju.

$$f_4 = \varepsilon(010)(010)10,$$

$$f_5 = 0(10010)(10010)01.$$

Primetimo da važi $\varphi(\widetilde{f_n}\widetilde{f_n}t_n) = 0\widetilde{f_{n+1}}\widetilde{f_{n+1}}t_{n+1}$. Zaista, za neparno n (slično i za parno n) imamo:

$$\begin{aligned}\varphi(\widetilde{f_n}\widetilde{f_n}t_n) &= \varphi(\widetilde{f_n}\widetilde{f_n}01) = \varphi(\widetilde{f_n f_n}01) = \varphi(\widetilde{f_n f_n})\varphi(01) \\ &= \varphi(\widetilde{f_n f_n})010 = 0\widetilde{\varphi(f_n f_n)}10 = 0\widetilde{\varphi(f_n)\varphi(f_n)}10 \\ &= 0\widetilde{\varphi(f_n)}\widetilde{\varphi(f_n)}10 = 0\widetilde{f_{n+1}}\widetilde{f_{n+1}}10 \\ &= 0\widetilde{f_{n+1}}\widetilde{f_{n+1}}t_{n+1}.\end{aligned}$$

Takođe važi za $n \geq 3$ i $\varphi(g_n)0 = g_{n+1}$, jer

$$\begin{aligned}\varphi(g_n)0 &= \varphi(f_{n-3} \dots f_1 f_0)0 = \varphi(f_{n-3}) \dots \varphi(f_1)\varphi(f_0)0 \\ &= f_{n-2} \dots f_2 f_1 0 = f_{n-2} \dots f_2 f_1 f_0 \\ &= g_{n+1}.\end{aligned}$$

Sada možemo da dokazujemo (1). Za $n \geq 4$ važi:

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= \varphi(f_{n+1}) \\ &= \varphi(g_{n-1}\widetilde{f_{n-1}}\widetilde{f_{n-1}}t_{n-1}) \\ &= \varphi(g_{n-1})\varphi(\widetilde{f_{n-1}}\widetilde{f_{n-1}}t_{n-1}) \\ &= \varphi(g_{n-1})0\widetilde{f_n}\widetilde{f_n}t_n \\ &= g_n\widetilde{f_n}\widetilde{f_n}t_n. \end{aligned}$$

Lako je uočiti da prvo slovo od $\widetilde{f_n}$ je uvek različito od prvog slova t_n. Ovo implicira je da reč $\widetilde{f_n}$ desni specijalni faktor za $n \geq 2$. Kako je svaki sufiks desnog specijalnog faktora takođe desni specijalni faktor, imamo da za svaku dužinu postoji bar jedan desni specijalni faktor.

Time smo dokaz završili. ■

2.1 Morse-Hedlundova teorema

U ovoj sekciji ćemo dokazati teoremu koja daje ekvivalenciju Šturmovih reči, aperiodičnih balansiranih reči i mehaničkih reči sa iracionalnim nagibom. Ovu teoremu su pokazali G. A. Hedlund i M. Morse u radu [11]. Dokaz se može naći i u knjizi [14].

Definicija 2.9. *Visina konačne reči nad* $\Sigma = \{0, 1\}$ *je broj jedinica u njoj. Visinu reči u označimo sa* $h(u)$.

Primer 2.10.

- $h(0100101001) = 4$;
- $h(000) = 0$;
- $h(\varepsilon) = 0$.

Definicija 2.11. *Za dve konačne reči iste dužine definišemo funkciju* δ *na sledeći način:*

$$\delta(u, v) = |h(u) - h(v)|.$$

Definicija 2.12. *Skup reči* X *je balansiran ako i samo ako za sve* $u, v \in X$ *važi:*

$$|u| = |v| \Rightarrow \delta(u, v) \leq 1;$$

Konačna ili beskonačna reč x *je balansirana ako i samo ako je skup* $F(x)$ *balansiran.*

Definicija 2.13. *Za realne brojeve* $\alpha \in [0, 1]$ *i* $\rho \in [0, 1)$ *možemo definisati dve beskonačne reči* $s_{\alpha,\rho}$, $s'_{\alpha,\rho}$ *nad alfabetom* $\{0, 1\}$ *na sledeći način:*

$$s_{\alpha,\rho}[n] = \lfloor \alpha(n + 1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor;$$

$$s'_{\alpha,\rho}[n] = \lceil \alpha(n + 1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil.$$

Reč $s_{\alpha,\rho}$ *se zove donja mehanička reč, a* $s'_{\alpha,\rho}$ *gornja mehanička reč sa nagibom* α *i odsečkom* ρ.

Napomena 2.14. *Primetimo da ograničenja* $\alpha \in [0, 1]$ *i* $\rho \in [0, 1)$ *iz definije nisu prava ograničenja. Ako se* ρ *i* ρ' *razlikuju za ceo broj, tada* $s_{\alpha,\rho} = s_{\alpha,\rho'}$ *i* $s'_{\alpha,\rho} = s'_{\alpha,\rho'}$. *Što se* α *tiče, ako ne stavimo nikakvo ograničenje, tj. ako je* α' *proizvoljan realan broj tada za donje mehaničke reči važi* $\lfloor \alpha' \rfloor \leq s_{\alpha',\rho}[n] \leq$

$1 + \lfloor \alpha' \rfloor$, pa za sve $n \geq 0$ imamo da $s_{\alpha',\rho}[n]$ može uzimati samo dve različite vrednosti $\lfloor \alpha' \rfloor$ i $\lfloor \alpha' \rfloor + 1$. Reč $s'_{\alpha,\rho}$ koja je u ovom slučaju formirana nad alfabetom $\{\lfloor \alpha' \rfloor, \lfloor \alpha' \rfloor + 1\}$ možemo transformisati u reč nad alfabetom $\{0, 1\}$ jer:

$$s_{\alpha',\rho}[n] - \lfloor \alpha' \rfloor = \lfloor \alpha'(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha' n + \rho \rfloor - \lfloor \alpha' \rfloor \in \{0, 1\}.$$

Analogno se mogu i gornje mehaničke reči transformisati u reč nad alfabetom $\{0, 1\}$.

Napomena 2.15. *Kako za $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ dobijamo da*

$$s_{0,\rho} = s'_{0,\rho} = 0000000000\ldots$$

i

$$s_{1,\rho} = s'_{1,\rho} = 1111111111\ldots$$

a ovi slučajevi nisu interesantni za ispitivanje, u nastavku ćemo uzeti još strožu pretpostavku da $\alpha \in (0, 1)$.

Geometrijska interpretacija:

Posmatrajmo pravu $y = \alpha x + \rho$. U slučaju donje mehaničke reči posmatrajmo tačke $(n, \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)$. Duž koja spaja tačku $(n, \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)$ sa $(n + 1, \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor)$ ili je horizontalna ili je dijagonalna, u zavisnosti da li je $s_{\alpha,\rho}(n) = 0$ ili $s_{\alpha,\rho}(n) = 1$ respektivno. Analogna je situacija u slučaju gornje mehaničke reči, gde povezujemo tačke $(n, \lceil \alpha n + \rho \rceil)$ redom.

Kako uvek važi da je $\lceil \alpha n + \rho \rceil$=$\lfloor \alpha n + \rho \rfloor$+1 sem kada je $\alpha n + \rho$ ceo broj, sledi da se $s_{\alpha,\rho}$ i $s'_{\alpha,\rho}$ poklapaju svuda sem na mestima koje odgovaraju dužima pre i posle tačke $(n, \alpha n + \rho)$ za ceo $\alpha n + \rho$.

Navedimo jedan. Posmatrajmo mehaničku reč sa nagibom 0.3 i odsečkom 0.9.

U tački $x = 7$ imamo da je $y = 0.3 \cdot 7 + 0.9 = 2.1 + 0.9 = 3$. Zato je $s_{0.3,0.9}(6) \neq s'_{0.3,0.9}(6)$ i takođe i $s_{0.3,0.9}(7) \neq s'_{0.3,0.9}(7)$.

$$s_{0.3,0.9}(6) = \lfloor 0.3 \cdot 7 + 0.9 \rfloor - \lfloor 0.3 \cdot 6 + 0.9 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor - \lfloor 2.7 \rfloor = 1;$$

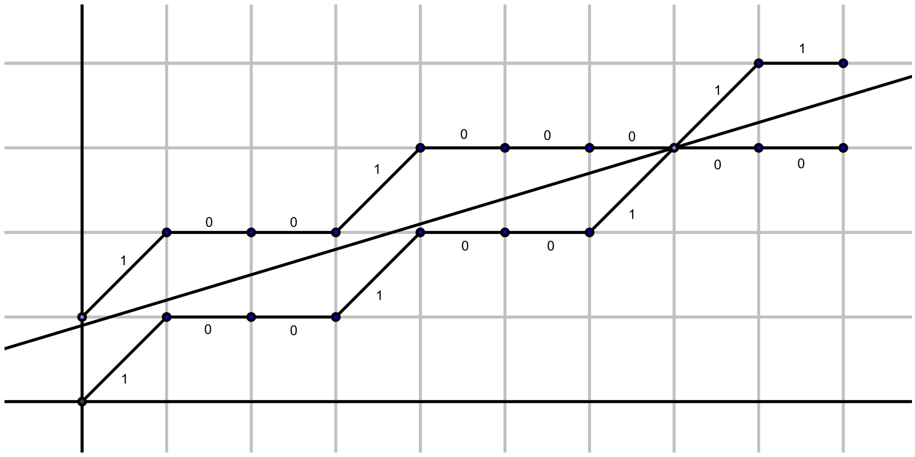
$$s'_{0.3,0.9}(6) = \lceil 0.3 \cdot 7 + 0.9 \rceil - \lceil 0.3 \cdot 6 + 0.9 \rceil = \lceil 3 \rceil - \lceil 2.7 \rceil = 0;$$

$$s_{0.3,0.9}(7) = \lfloor 0.3 \cdot 8 + 0.9 \rfloor - \lfloor 0.3 \cdot 7 + 0.9 \rfloor = \lfloor 3.3 \rfloor - \lfloor 3 \rfloor = 0;$$

$$s'_{0.3,0.9}(7) = \lceil 0.3 \cdot 8 + 0.9 \rceil - \lceil 0.3 \cdot 7 + 0.9 \rceil = \lceil 3.3 \rceil - \lceil 3 \rceil = 1.$$

Dobija se da

$$s_{\alpha,\rho} = 10010010001001001000\ldots,$$
$$s'_{\alpha,\rho} = 10010001001001000100\ldots.$$



Slika 5.

Primetimo još da ako je α iracionalan broj tada prava $y = \alpha x + \rho$ ne može dvaput da prolazi kroz tačke sa celobrojnim koordinatama, dakle, ako je α iracionalan broj, onda se $s_{\alpha,\rho}$ i $s'_{\alpha,\rho}$ razlikuju najviše za jedan faktor dužine dva.

Sada smo „pripremili teren" i može da se formuliše Morse-Hedlundova, koja glasi:

Teorema 2.16. *Neka je s beskonačna reč. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *s je Šturmova reč;*
2. *s je aperiodična i balansirana;*
3. *s je mehanička sa iracionalnim nagibom.*

Mehaničke reči sa iracionalnim nagibom zvaćemo iracionalne mehaničke reči.

Dokazaćemo prvo ekvivalentnost uslova (1) i (2) a zatim uslova (2) i (3), ali za to je nam potrebno još nekoliko lema.

Daćemo prvo jedan potreban i dovoljan uslov za nebalansiranost datog skupa reči. Ovaj uslov više puta će biti koristan u nastavku.

Lema 2.17. *Neka je X skup konačnih reči. Skup X nije balansiran ako i samo ako postoji palindrom w takav da i $0w0$ i $1w1$ pripada skupu X.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Jasno, ako i $0w0$ i $1w1$ pripada skupu X, tada X nije balansiran.

($\Rightarrow$) Neka skup X nije balansiran. Posmatrajmo reči u i v najmanje dužine n za koje važi $\delta(x, y) \geq 2$. Kako po pretpostavci ovaj par reči ima najmanju dužinu, znamo da one počinju i završavaju se sa različitim slovima. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da u počinje sa 0 a v sa 1, i zapišimo ih u sledećim oblicima:

$$u = 0wau',$$

$$v = 1wbv',$$

gde su w, u', v' konačne reči, (mogu da budu i prazne reči), a a i b dva različita slova. Nije teško zaključiti da $a = 0$ i $b = 1$, inače bismo imali da $\delta(u', v') \geq 2$, a to daje kontradikciju sa našim pretpostavkom da su u i v reči najmanje dužine sa tom osobinom. Isto zbog minimalnosti n imamo da je $u' = v' = \varepsilon$. Sledi $u = 0w0$, $v = 1w1$.

Treba još da dokažemo da je w palindrom. Pretpostavimo da nije. Tada postoji $z \in Pref(w)$ i slovo a takvi da $za \in Pref(w)$, $\widetilde{z} \in Suf(w)$, ali $a\widetilde{z} \notin Suf(w)$. Tada $b\widetilde{z} \in Suf(w)$ gde je b slovo različito od a. Ovako dobijamo pravi prefiks $0za$ reči u i pravi sufiks $b\widetilde{z}1$ reči v. Sada imamo dve mogućnosti:

- $a = 0$, $b = 1$:

  Tada $\delta(0z0, 1\widetilde{z}1) = 2$, a ovo daje kontradikciju jer $|0z0| = |1\widetilde{z}1| < n$.

- $a = 1$, $b = 0$:

  U ovom slučaju $u = 0z1u''$, $v = v''1\widetilde{z}0$ za neke konačne reči u'', v''. Opet imamo kontradikciju jer $\delta(u'', v'') = \delta(u, v)$, a $|u''| = |v''| < n$.

Dakle možemo zaključiti da je w palindrom. ■

Propozicija 2.18. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *s je Šturmova reč;*

2. *s je aperiodična i balansirana.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Neka je reč s Šturmova. Dokažimo: ako s nije balansirana, to povlači da mora biti eventualno periodična, a to je nemoguće jer znamo od ranije da su Šturmove reči aperiodične. Ako s nije balansirana, tada na osnovu leme 2.17 sledi da postoji palindrom w tako da i $0w0$ i $1w1$ pripadaju skupu $F(s)$. U ovom slučaju reč w je desni specijalni faktor. Stavimo $n = |w| + 1$. Kako je s Šturmova reč, postoji jedinstveni desni specijalni faktor dužine n. To može biti ili $0w$ ili $1w$. Pretpostavimo da je taj faktor $0w$ (drugi slučaj se dokazuje slično). Ako je $0w$ desni specijalni faktor, tada važi da $0w1 \in F(s)$ a znamo i da $1w0 \notin F(s)$, tj. posle svakog pojavljivanja faktora $1w$ sledi slovo 1. Posmatrajmo faktor u dužine $2n$ koji ima oblik $1w1v$ za neko v dužine $n - 1$. Pokazaćemo da su svi faktori reči u dužine n konzervativni i tada ćemo imati prema teoremi 1.23 da je s eventualno periodična. Jedini faktor dužine n koji nije konzervativni je $0w$, pa da bismo dokazali tvrđenje dovoljno je pokazati da on ne pripada $F(u)$. Ako bi pripadao, to bi značilo da postoji faktorizacija $w = s0t$, $v = yz$, $w = t1y$. Ovo međutim daje kontradikciju jer, kako je w palindrom, sledi da posle prefiksa t u faktoru w istovremeno mora da sledi i slovo 0 i slovo 1, što je nemoguće.

(2) $\Rightarrow$ (1) Prvo dokažimo da je $|F_n(s)| \leq n + 1$ za sve $n \geq 0$. Za $n = 0$ jasno $|F_0(s)| = 1 \leq 1$. Za $n = 1$ imamo $|F_1(s)| = 2 \leq 2$. Potencijalni elementi skupa $F_2(s)$ su 00, 01, 10, 11, međutim, pošto je s balansirana reč, 00 i 11 ne mogu istovremeno pripadati skupu $F_2(s)$, zato važi $|F_2(s)| \leq 3$. Pretpostavimo da postoji prirodan broj za koji tvrđenje nije tačno, i neka je $n \geq 3$ najmanji takav. To znači da $|F_{n-1}(s)| \leq n$ a $|F_n(s)| > n + 1$, tj. $|F_n(s)| \geq n + 2$. Za svaku reč x iz skupa $F_{n-1}(s)$ važi da bar jedan od $0x$ i $1x$ pripada skupu $F_n(s)$, a pošto je kardinalnost skupa $F_n(s)$ bar za dva veći od kardinalnosti skupa $F_{n-1}(s)$, sledi da moraju postojati bar dve reči x i y u skupu $F_{n-1}(s)$ takve da $\{0x, 1x, 0y, 1y\} \in F_n(s)$. Kako važi $x \neq y$ postoji $z \in Pref(x) \cap Pref(y)$ takvo da $z0 \in Pref(x)$ i $z1 \in Pref(y)$ ili obrnuto. Ali sad i $0z0$ i $1z1$ pripadaju skupu $F(s)$, što je kontradikcija sa činjenicom da je skup $F(s)$ balansiran. Dakle, možemo zaključiti da

$$|F_n(s)| \leq n + 1. \tag{2}$$

Kako je po pretpostavci s aperiodična reč, na osnovu teoreme 1.21 sledi da za sve prirodne brojeve n istovremeno mora da važi i

$$|F_n(s)| \geq n + 1. \tag{3}$$

Sada iz (2) i (3) sledi da je $F_n(s) = n + 1$ za sve $n \geq 0$, dakle, reč s je Šturmova. ∎

Napomena 2.19. *U dokazu prethodne teoreme u pravcu* (2) $\Rightarrow$ (1) *dokazali smo da* $|F_n(s)| \leq n+1$. *Primetimo da je jedina stvar koju smo koristili u dokazivanju to da je skup* $F_n(s)$ *balansiran. Dakle, možemo zaključiti da, uopšteno, za svaki balansiran skup reči* X *nad alfabetom* $\Sigma = \{0,1\}$ *važi* $|X \cap \Sigma^n| \leq n+1$.

Definišemo sada nagib prvo konačne a zatim i beskonačne reči.

Definicija 2.20. *Nagib konačne reči* x*, u oznaci* $\pi(x)$*, je njena visina podeljena sa njenom dužinom, tj.*

$$\pi(x) = \frac{h(x)}{|x|}.$$

Primetimo da uvek važi

$$\pi(xy) = \frac{|x|}{|xy|}\pi(x) + \frac{|y|}{|xy|}\pi(y).$$

Lema 2.21. *Neka je* X *skup faktora neke reči. Tada važi da je* X *balansiran ako i samo ako za sve* $x, y \in X$*,* $x, y \neq \varepsilon$ *imamo*

$$|\pi(x) - \pi(y)| < \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}. \tag{4}$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka važi dati uslov (4). Tada, ako su reči x i y iste dužine, imamo

$$|\pi(x) - \pi(y)| < \frac{2}{|x|}.$$

Množenje obe strane nejednakosti sa $|x|$ daje

$$|x||(\pi(x) - \pi(y))| = ||x|\pi(x) - |x|\pi(y)| = ||x|\pi(x) - |y|\pi(y)| < 2,$$

tj. dobijamo da je

$$|h(x) - h(y)| < 2,$$

pa sledi da je skup X balansiran.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo sada da je X balansiran, i neka $x, y \in X$. Ako $|x| = |y|$ tada lako se vidi da važi (4). Pretpostavimo suprotno, da postoje reči x i y za koje ne važi traženi uslov, i neka x i y predstavljaju baš minimalni kontraprimer gledajući ukupnu dužinu $|x| + |y|$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $|x| > |y|$. Tada $x = zt$, gde $|z| = |y|$, i pri čemu imamo

$$|\pi(t) - \pi(y)| < \frac{1}{|t|} + \frac{1}{|y|}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\pi(x)-\pi(y) &= \frac{|z|}{|x|}\pi(z)+\frac{|t|}{|x|}\pi(t)-\pi(y) \\
&= \frac{|z|}{|x|}\pi(z)+\frac{|t|}{|x|}\pi(t)-\frac{|z|}{|x|}\pi(y)-\frac{|t|}{|x|}\pi(y) \\
&= \frac{|z|}{|x|}(\pi(z)-\pi(y))+\frac{|t|}{|x|}(\pi(t)-\pi(y)).
\end{aligned}$$

Kako su z i y iste dužine, za njih važi $|h(z)-h(y)| \leq 1$, odakle imamo

$$|\pi(z)-\pi(y)| \leq \frac{1}{|y|}.$$

Konačno

$$\begin{aligned}
|\pi(x)-\pi(y)| &< \frac{|z|}{|x|}\frac{1}{|y|}+\frac{|t|}{|x|}(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|t|}) \\
&= \frac{1}{|x|}+\frac{|t|}{|x|}\frac{|y|+|t|}{|y||t|} \\
&= \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}.
\end{aligned}$$

Kontradikcija, jer smo pretpostavili da je x i y minimalni par po ukupnoj dužini za koji ne važi uslov (4).

Dakle (4) važi za sve reči $x, y \in X$. ■

Posledica 2.22. *Neka je w beskonačna balansirana reč, i neka je za sve $n \geq 1$ w_n njen prefiks dužine n. Tada niz $(\pi(w_n))_{n\geq 1}$ konvergira kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Primetimo da uslov (4) upravo znači da je niz $(\pi(w_n))_{n\geq 1}$ Košijev pa time i konvergentan. ■

Konačno možemo da definišemo nagib beskonačne balansirane reči kao graničnu vrednost posmatranog niza.

Definicija 2.23. *Neka je w beskonačna balansirana reč i neka je w_n njen prefiks dužine n. Nagib reči w, u oznaci α_w, definiše se sa:*

$$\alpha_w = \lim_{n\to\infty} \pi(w_n).$$

Lema 2.24. *Neka je w beskonačna balansirana reč sa nagibom α. Tada za svaki faktor $u \in F(w) \setminus \{\varepsilon\}$ važi*

$$|\pi(u) - \alpha| \leq \frac{1}{|u|}, \tag{5}$$

preciznije, za svaki faktor $u \in F(w) \setminus \{\varepsilon\}$ važi tačno jedan od sledeća dva uslova:

$$\alpha|u| - 1 < h(u) \leq \alpha|u| + 1; \tag{6}$$

$$\alpha|u| - 1 \leq h(u) < \alpha|u| + 1. \tag{7}$$

Dokaz. Neka je w_n prefiks reči w dužine n. Pošto je niz $(\pi(w_n))_{n\geq 1}$ konvergentan, za proizvoljno malo ϵ postoji n_0 takvo da za sve $n \geq n_0$ važi

$$|\pi(w_n) - \alpha| \leq \epsilon.$$

Tada koristeći (4) dobijamo

$$\begin{aligned} |\pi(u) - \alpha| &= |\pi(u) - \pi(w_n) + \pi(w_n) - \alpha| \\ &\leq |\pi(u) - \pi(w_n)| + |\pi(w_n) - \alpha| \\ &< \frac{1}{|u|} + \frac{1}{n} + \epsilon. \end{aligned}$$

Sada pustimo $n \to \infty$ i $\epsilon \to 0$ i tako dobijamo

$$|\pi(u) - \alpha| \leq \frac{1}{|u|},$$

što je ekvivalentno sa

$$\alpha|u| - 1 \leq h(u) \leq \alpha|u| + 1.$$

Ako bi postojali faktori u i v takvi da $h(u) = \alpha|u| - 1$ i $h(v) = \alpha|v| + 1$, to bi značilo da

$$\begin{aligned} |\pi(u) - \pi(v)| &= |\frac{h(u)}{|u|} - \frac{h(v)}{|v|}| = |\frac{\alpha|u| - 1}{|u|} - \frac{\alpha|v| + 1}{|v|}| \\ &= |\alpha - \frac{1}{|u|} - (\alpha + \frac{1}{|v|})| = |-\frac{1}{|u|} - \frac{1}{|v|}| \\ &= \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|}, \end{aligned}$$

što je u kontradikciji sa (4). ∎

Lema 2.25. *Neka je w beskonačna balansirana reč sa nagibom α. Tada je α racionalan ako i samo ako je w eventualno periodična.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je w eventualno periodična tj. oblika $w = uv^{\infty}$. Tada važi

$$\pi(uv^n) = \frac{h(u) + nh(v)}{|u| + n|v|} \to \pi(v)$$

kada $n \to \infty$, pa je nagib reči w jednak $\frac{h(v)}{|v|}$, što je racionalan broj.

($\Leftarrow$) Neka je $\alpha = \frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti. Neka je u proizvoljan faktor reči w dužine q. Koristeći prethodnu lemu, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da važi (6), tj. $\alpha|u| - 1 < h(u) \leq \alpha|u| + 1$, što u našem slučaju daje sledeće:

$$\frac{p}{q} \cdot q - 1 < h(u) \leq \frac{p}{q} \cdot q + 1;$$

$$p - 1 < h(u) \leq p + 1.$$

Dakle, $h(u)$ može imati samo dve vrednoti: p i $p + 1$. Dokažimo da postoji samo konačno mnogo faktora dužine q sa visinom p. Ako pretpostavimo da ih ima proizvoljno mnogo, tada sigurno postoji u reči w faktor uzv, gde je $|u| = |v| = q$ i $h(u) = h(v) = p + 1$, a z neprazna reč. Tada imamo:

$$2 + 2p + h(z) = h(uzv) \overset{(6)}{\leq} 1 + \alpha q + \alpha|z| + \alpha q = 1 + 2p + \alpha|z|,$$

a iz ovoga imamo

$$h(z) \leq \alpha|z| - 1.$$

Dobili smo kontradikciju sa (6).

Dakle, reč možemo w zapisati kao $w = tw'$ za neko $t \in \Sigma^*$, gde u w' svi faktori dužine q imaju visinu p. Proizvoljan faktor dužine $q + 1$ u w' može se zapisati kao arb, gde su a i b slova a r faktor dužine $q - 1$. Sada, kako je $|ar| = |rb| = p$ i kako oni pripadaju $F_p(w')$, imamo da je $h(ar) = h(rb) = q$, tj. $h(a) = h(b)$, tj. $a = b$. Ovo znači da je reč w' periodična sa periodom q i konačno sledi da je w eventualno periodična. ■

Sledeću lemu ćemo više puta iskoristiti.

Lema 2.26. *Za sve realne brojeve x i y važi*

$$x - y - 1 < \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < x - y + 1. \tag{8}$$

Dokaz sledi direktno iz činjenice da za svaki realan broj x važi

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Konačno možemo da dokažimo ekvivalenciju uslova (2) i (3) iz teoreme 2.16.

Propozicija 2.27. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *s je aperiodična i balansirana;*

2. *s je iracionalna mehanička.*

Dokaz. (2) $\Rightarrow$ (1) Neka je $s_{\alpha,\rho}$ donja mehanička reč sa nagibom α. (Dokaz je sličan i u slučaju gornje mehaničke reči.) Pokažimo da je tada ona i balansirana sa nagibom α. Posmatrajmo proizvoljan faktor u dužine p. On je oblika $s[n, n+p-1]$ za neko $n \geq 0$. Zahvaljujući geometrijskoj interpretaciji koju imamo za mehaničke reči lako se vidi da je visina $h(u)$ razlika između druge koordinate tačke $(n, \lfloor \alpha n + \rho \rfloor)$ i $(n+p, \lfloor \alpha(n+p) + \rho \rfloor)$ tj.

$$h(u) = \lfloor \alpha(n+p) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor,$$

što kombinujući sa (8) daje

$$\alpha(n+p) + \rho - \alpha n - \rho - 1 < h(u) < \alpha(n+p) + \rho - \alpha n - \rho + 1,$$

tj.

$$\alpha p - 1 < h(u) < \alpha p + 1. \tag{9}$$

Sledi da $h(u)$ može da ima dve različite vrednosti za unapred fiksiranu dužinu p, dakle, reč s je balansirana.

Štaviše, ako (9) podelimo sa p i oduzmemo α, dobijamo relaciju

$$|\pi(u) - \alpha| < \frac{1}{p}$$

tj.

$$|\pi(u) - \alpha| < \frac{1}{|u|}$$

iz čega sledi da $\pi(u) \to \alpha$ kad $|u| \to \infty$. Dakle nagib reči s kao balansirane reči se poklapa sa nagibom mehaničke reči.

Kako je nagib iracionalan, iz leme 2.25 odmah imamo da je reč s aperiodična.

(1) $\Rightarrow$ (2) Neka je sada s balansirana i aperiodična. Kako je ona balansirana, sledi da ima nagib. Označimo ga sa α. Označimo sa h_n visinu prefiksa reči s dužine n. Dokažimo da za svaki realan broj τ važi tačno jedan od sledeća dva uslova:

- $h_n \leq \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$ za sve $n \geq 0$;
- $h_n \geq \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$ za sve $n \geq 0$.

Pretpostavimo suprotno: neka postoji realan broj τ i celi brojevi n i $n+k$ takvi da važi $h_n < \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$ i $h_{n+k} > \lfloor \alpha n + \tau \rfloor$ (drugi slučaj se dokazuje slično). Ovo implicira:

$$h_{n+k} - h_n \geq 2 + \lfloor \alpha(n+k) + \tau \rfloor - \lfloor \alpha n + \tau \rfloor \overset{(8)}{>} 1 + \alpha k,$$

a ovo je u kontradikciji sa uslovom (5) kad se primeni na reč $s[n+1, n+k]$. Stavimo:

$$\rho = \inf\{\tau : h_n \leq \lfloor \alpha n + \tau \rfloor, n \geq 0\}.$$

Sada opet zbog uslova (5) imamo da je $\rho \leq 1$, štaviše, za iracionalno α važi $\rho < 1$. Takođe važi i $\alpha n + \rho \leq h_n + 1$ za sve $n \geq 0$, jer ako bi za neko n važilo $h_n + 1 < \alpha n + \rho$, tada uzimajući $\sigma = h_n + 1 - \alpha n$ dobijamo $\sigma < \rho$ i $\alpha n + \sigma = h_n + 1 > h_n$, što je u kontradikciji sa izborom broja ρ. Dakle, za sve $n \geq 0$ važi:

$$h_n \leq \alpha n + \rho \leq h_n + 1. \tag{10}$$

Kako je s aperiodična, sledi da je α iracionalan broj i $\alpha n + \rho$ ima celobrojnu vrednost za najviše jedno n. Sada zbog (10) imamo sledeće dve mogućnosti:

- $h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ za sve $n \geq 0$:

  Tada je $s = s_{\alpha,\rho}$.

- $h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$ za sve $n \geq 0$ sem $n = n_0$:

  Tada je $h_{n_0} + 1 = \alpha n_0 + \rho$, i važi $h_n = \lceil \alpha n + \rho - 1 \rceil$ za svako $n \geq 0$. Dakle, $s = s'_{\alpha,\rho-1}$.

■

Sada iz propozicije 2.18 i 2.27 direktno sledi dokaz teoreme 2.16.

2.2 Palindromska složenost

O uvom delu rada ćemo povezati Šturmove reči sa palindromima. Rezultat rada [6] koji će biti izložen daje novu karakterizaciju Šturmovih reči pomoću palindroma. Na početku dokažimo jednu važnu osobinu Šturmovih reči: skup njihov faktora je zatvoren za preokretanje. Dokaz se može naći u [14] i oslanja se na činjenicu da je skup fakora Šturmove reči balansiran.

Teorema 2.28. *Skup faktora Šturmove reči s je zatvoren za preokretanje.*

Dokaz. Neka je dat skup $\widetilde{F}(s) = \{\widetilde{x} : x \in F(s)\}$, i neka je $X = F(s) \cup \widetilde{F}(s)$. Jasno, skup X je balansiran. Sada na osnovu napomene 2.19 za balansiran skup X imamo da je $|X \cap \Sigma^n| \leq n+1$. Pošto važi $|F_n(s)| = |F(s) \cap \Sigma^n| = n+1$, sledi da je $X = F(s)$, pa $F(s) \cup \widetilde{F}(s) = F(s)$ što nam daje $\widetilde{F}(s) \subseteq F(s)$. ■

Definišemo jednu unarnu operaciju skupa Σ^*.

Definicija 2.29. *Neka je $w = a_1 a_2 \dots a_n$, gde su a_1, a_2, ..., $a_n \in \{0, 1\}$. Tada je $\widehat{w} = \widehat{a_1}\widehat{a_2} \dots \widehat{a_n}$, gde je $\widehat{0} = 1$ i $\widehat{1} = 0$.*

Sada formulišemo glavnu teoremu ove sekcije.

Teorema 2.30. *Beskonačna reč s je Šturmova reč ako i samo ako*

$$|Pal_n(s)| = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } n \textit{ paran;} \\ 2, & \textit{ako je } n \textit{ neparan.} \end{cases} \tag{11}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Jasno da tvrđenje važi za $n = 1$ i $n = 2$, jer $Pal_1(s) = \{0, 1\}$, a $Pal_2(s)$ je jednako ili skupu $\{00\}$ ili skupu $\{11\}$. Dokazaćemo da postoji bijektivno preslikavanje iz skupa $Pal_{n+2}(s)$ u skup $Pal_n(s)$, a to će nam dati traženi zaključak da je za sve $k \geq 1$

$$|Pal_{2k-1}(s)| = |Pal_1(s)| = 2$$

i

$$|Pal_{2k}(s)| = |Pal_2(s)| = 1.$$

Za $n \geq 1$ preslikavanje φ_n iz $Pal_{n+2}(s)$ u $Pal_n(s)$ definišemo na sledeći način: $\varphi_n(u) = v$, za $u = cvc$ gde je v palindrom dužine n a c slovo. Jasno, svaki palindrom u dužine bar 3 može da se zapiše u ovom obliku.

- φ_n je injekcija:

  Neka je $\varphi_n(u) = \varphi_n(u')$ za $u \neq u'$. Kako su u i u' različiti palindromi čije su slike preslikavanjem φ_n iste, mora da važi $\{u, u'\} = \{1v1, 0v0\}$ za neko $v \in Pal_n(s)$. Kontradikcija, jer je s Šturmova reč pa je skup njenih faktora balansiran.

- φ_n je sirjekcija:

  Neka je $v \in Pal_n(s)$. Znamo da sigurno postoji slovo c tako da $cv \in F_{n+1}(s)$, jer se v pojavljuje u s beskonačno puta. Ako $cvc \in F(s)$, dokaz je završen. Pretpostavimo da $cv\widehat{c} \in F(s)$. Dokažimo da je u ovom slučaju v desni specijalni faktor. Kako je na osnovu teoreme 2.28 $F(s)$ zatvoren za preokretanje, sledi $\widetilde{cv\widehat{c}} = \widehat{c}vc \in F(s)$. Kako su i vc i $v\widehat{c}$ faktori reči s, možemo zaključiti da je faktor v desni specijalni faktor. Lako je videti da su desni specijalni faktori tačno sufiksi desnih specijalnih faktora veće dužine, odatle sledi da je za neko slovo d faktor dv desni specijalni faktor, pa važi $dvd \in F(s)$, što je i trebalo dokazati.

($\Leftarrow$) Dokazaćemo: ako neka beskonačna reč s zadovoljava uslov (11) tada je ona balansirana i aperiodična.

- s je balansirana:

  Dokazaćemo da za svako $n \geq 1$ i za svake dve reči u i v dužine n važi $\delta(u, v) \leq 1$. Za $n = 1$ tvrđenje trivijalno važi. Za $n = 2$ takođe važi, jer po pretpostavci imamo samo jedan palindromski faktor dužine 2, dakle ne mogu istovremeno i 00 i 11 biti u skupu $Pal_2(s) \subset F(s)$. Dalje radimo indukcijom. Pretpostavimo da za proizvoljne dve reči dužine n važi $\delta(u, v) \leq 1$ i pokažimo da tada to važi za reči dužine $n + 1$. Pretpostavimo suprotno. Ako tvrđenje ne važi za $n + 1$, to znači da postoje reči u i v dužine $n + 1$ takve da $\delta(u, v) \geq 2$. Tada na osnovu leme 2.17 sledi da postoji palindrom p tako da $0p0$ i $1p1$ su u skupu $F(s)$, i štaviše, na osnovu dokaza pomenute leme, možemo smatrati da su reči $0p0$ i $1p1$ upravo reči u i v. Kako važi (11), broj $n + 1$ mora biti neparan, dakle i $n - 1$ je neparan, pa postoji palindrom $q \neq p$ takav da $Pal_{n-1}(s) = \{p, q\}$. Neka je a proizvoljno slovo koje sledi posle nekog pojavljivanja faktora q, tj. $qa \in F(s)$. Kako iz teoreme 2.28 znamo da je $F(s)$ zatvoren za preokretanje, sledi da $aq \in F(s)$. Od ranije imamo da je p jedinstveni desni specijalni faktor dužine $n-1$, pa sledi da q može biti produžen na jedinstven način, što znači da posle svakog pojavljivanja faktora q sledi slovo a, pa se u F_{n+1} pojavljuje se faktor aqa, što je nemoguće jer bi to značilo da imamo bar tri različita palindroma neparne dužine, a po našoj pretpostavci ih ima tačno dva. Kontradikcija.

- s je aperiodična:

  Pretpostavimo suprotno, tj. neka važi da je $s = uv^\infty$, pri čemu je $|v| = r$ je najmanji njen period. Razlikujemo dva slučaja.

  - r je paran: Označimo sa p jedini palindrom dužine $2|u| + r$, i neka je $p_r = p[|u+1|, |u+1|+r-1]$ palindrom na sredini palindroma p. Kako je on takođe parne dužine, možemo ga zapisati kao $p_r = \widetilde{w}w$ za neko w. Tada $\widetilde{w}w \in \Gamma(v)$. Međutim, primetimo da je $w\widetilde{w}$ je takođe palindrom koji pripada $\Gamma(v)$, a to je moguće samo ako su oni jednaki, jer po našoj pretpostavci postoji samo jedan palindrom parne dužine u s pa samim tim i u v^∞. Sledi $\widetilde{w}w = w\widetilde{w}$, odakle dobijamo $w = \widetilde{w}$. Ovo daje kontradikciju sa minimalnošću perioda $|v|$.
  - r je neparan: U ovom slučaju označimo sa p i q palindrome dužine $2|u| + r$. Označimo kao malopre sa $p_r = p[|u+1|, |u+1| + r - 1]$ i $q_r = q[|u+1|, |u+1| + r - 1]$ palindrome dužine r na sredini palindroma p i q. Važi $p_r, q_r \in \Gamma(v)$. Jasno, za svaku reč $w \in F(v^\infty)$ čija je dužina veća ili jednaka od $|v| = r$ jedinstveno je određeno slovo koje sledi posle nje. Zato, ako bi važilo $p_r = q_r$, to bi impliciralo $p = q$, što ne važi po našoj pretpostavci. Kako su $p_r, q_r \in \Gamma(v)$, to znači da su reči p_r, q_r i v međusobno konjugovane, pa po definiciji konjugovanosti to znači da postoje neprazne reči x i y tako da $p_r = xy$ i $q_r = yx$. Kako je r neparan važi $|x| \neq |y|$, i bez umanjenja opštosti pretpostavimo $0 < |x| < |y|$. Tada važi $p_r = xy = xt\widetilde{x}$, pa prema tome $q_r = t\widetilde{x}x = \widetilde{t\widetilde{x}x} = \widetilde{x}xt$. Isto kao malopre dobili smo kontradikciju sa minimalnošću perioda $|v|$.

$\blacksquare$

2.3 Povratne reči

Posmatrajmo rekurentnu reč w. Skup povratnih reči za neki njen faktor u je skup svih reči koje počinju sa u i završavaju se tačno pre sledećeg pojavljivanja faktora u. U ovoj sekciji definisaćemo ih formalno i pokazaćemo da i pomoću njih možemo karakterisati Šturmove reči. Glavna teorema ove sekcije tvrdi da beskonačna, rekurentna reč s nad $\{0,1\}$ je Šturmova ako i samo ako skup povratnih reči za svaki njen faktor sadrži tačno dva elementa. Ovo je prvo dokazao L. Vuillon u radu [22]. Taj dokaz su zatim pojednostavili on i J. Justin u radu [12]. Koristeći geometrijske argumente, K. Matomäki i K. Saari su dali dokaz za smer ($\Rightarrow$) u radu [19].

Ovde ćemo dati dokaz glavne teoreme tako što u smeru ($\Rightarrow$) koristimo tehnike iz rada [22] a u smeru ($\Leftarrow$) iz rada [12].

Definicija 2.31. *Za rekurentnu reč w skup povratnih reči za faktor $u \in F(w)$, u oznaci $\mathcal{H}_{w,u}$, je skup faktora reči w koji počinju sa u i završavaju se neposredno pre sledećeg pojavljivanja tog faktora.*

Kompletne povratne reči za u su reči koji počinju sa u, završavaju se sa u, i sadrže tačno dva pojavljivanja faktora u.

Posmatrajmo reči $w_1 = 10101^\infty$ i $w_2 = 0001^\infty$.

Primer 2.32.

- $\mathcal{H}_{w_1,10} = \{10, 101\}, \mathcal{H}_{w_1,10101} = \{10101\}$;
- $\mathcal{H}_{w_2,00} = \{0, 0001\}, \mathcal{H}_{w_2,0001} = \{0001\}$.

Glavna teorema koju ćemo dokazati u ovoj sekciji je sledeća:

Teorema 2.33. *Neka je s beskonačna, rekurentna reč nad $\{0,1\}$. Tada je s Šturmova ako i samo ako skup povratnih reči za svaki njen faktor sadrži tačno dva elemenata.*

U nastavku, ako za neku reč skup povratnih reči za svaki njen faktor sadrži tačno dva elemenata, reći ćemo da reč ima osobinu $\mathcal{R}_2$. Za dokaz navedene teoreme potrebna nam je nekoliko lema.

Lema 2.34. *Neka je w rekurentna reč. Tada je w eventualno periodična ako i samo ako postoji faktor $u \in F(w)$ takav da skup povratnih reči za u ima tačno jedan element.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je w rekurentna reč. Ako je ona eventualno periodična, tada na osnovu teoreme 1.15 sledi da je ona periodična. Neka važi $w = v^\infty$, pri čemu pretpostavimo da je $|v|$ najmanji period. Tvrdimo da je $\mathcal{H}_{w,v} = v$, tj. da je $u = v$ naš traženi faktor. Imamo dve mogućnosti.

- $|vv|_v = 2$:

  U ovom slučaju odmah imamo da je $\mathcal{H}_{w,v} = \{v\}$, tj. $|\mathcal{H}_{w,v}| = 1$.

- $|vv|_v > 2$:

  Ako u vv imamo pojavljivanje faktora v i na nekom neočiglednom mestu tada vv ima oblik $vv = v_1 v v_2$. Iz ovog zapisa možemo zaključiti da v počinje sa v_1, završava se sa v_2, i pošto važi $|v| = |v_1| + |v_2|$, imamo da je $v = v_1 v_2$. Sa druge strane $v_1 v v_2 = vv = v_1 v_2 v_1 v_2$ daje nam da je $v = v_2 v_1$. Sada zbog leme 1.14 sledi da postoji konačna reč t takva da važi $v_1 = t^p$, $v_2 = t^q$. Ovo nam daje $v = v_1 v_2 = t^{p+q}$. Dobili smo kontradikciju, jer je po našoj pretpostavci $|v|$ bio najmanji period.

($\Leftarrow$) Neka sada važi da postoji u takvo da važi $|\mathcal{H}_{w,u}| = 1$ za neko $u \in F(w)$. Zapišemo w u obliku $w = puw'$, gde u označava prvo pojavljivanje faktora u u w. Neka je $\mathcal{H}_{w,u} = \{v\}$. Tada imamo da je $w = pv^\infty$ tj. da je v eventualno periodična. ■

Podsetimo se faktor-grafa beskonačne reči w. Faktor-graf reda n je orijentisan graf čiji su čvorovi faktori dužine n a grana postoji iz čvora u u čvor v ako i samo ako postoje slova a i b takva da ua i bv pripadaju skupu $F(w)$ i pri tome važi i $ua = bv$.

U slučaju Šturmove reči s možemo dosta stvari zaključiti o izgledu faktor-grafa reda n, naime:

- Znamo da su Šturmove reči definisane tako da za sve n važi $|F_n(s)| = n + 1$. Dakle, faktor-graf reda n reči s imaće $n + 1$ čvor;

- Šturmove reči takođe imaju osobinu da imaju tačno jedan desni specijalni faktor svake dužine. Nije teško videti da simetrično važi da one imaju i tačno jedan levi specijalni faktor svake dužine. Ako ovo prevedemo na jezik grafova, to znači da u $G_n(s)$ postoji tačno jedan čvor iz kog izlaze dve grane, iz ostalih izlazi tačno jedna, i analogno postoji tačno jedan čvor u koji će ići tačno dve grane, u ostale samo jedna. Naravno, levi i desni specijalni faktor mogu i da se poklapaju.

Znači faktor-graf svakog reda Šturmove reči sastoji se od tri puta:

$$DSF \xrightarrow{[a_1^A,b_1^A]} v_1^A \xrightarrow{[a_2^A,b_2^A]} v_2^A \xrightarrow{[a_3^A,b_3^A]} \dots \xrightarrow{[a_{r-1}^A,b_{r-1}^A]} v_{r-1}^A \xrightarrow{[a_r^A,b_r^A]} LSF;$$

$$DSF \xrightarrow{[a_1^B,b_1^B]} v_1^B \xrightarrow{[a_2^B,b_2^B]} v_2^B \xrightarrow{[a_3^B,b_3^B]} \dots \xrightarrow{[a_{s-1}^B,b_{s-1}^B]} v_{s-1}^B \xrightarrow{[a_s^B,b_s^B]} LSF;$$

$$LSF \xrightarrow{[a_1^C,b_1^C]} v_1^C \xrightarrow{[a_2^C,b_2^C]} v_2^C \xrightarrow{[a_3^C,b_3^C]} \dots \xrightarrow{[a_{t-1}^C,b_{t-1}^C]} v_{t-1}^C \xrightarrow{[a_t^C,b_t^C]} DSF,$$

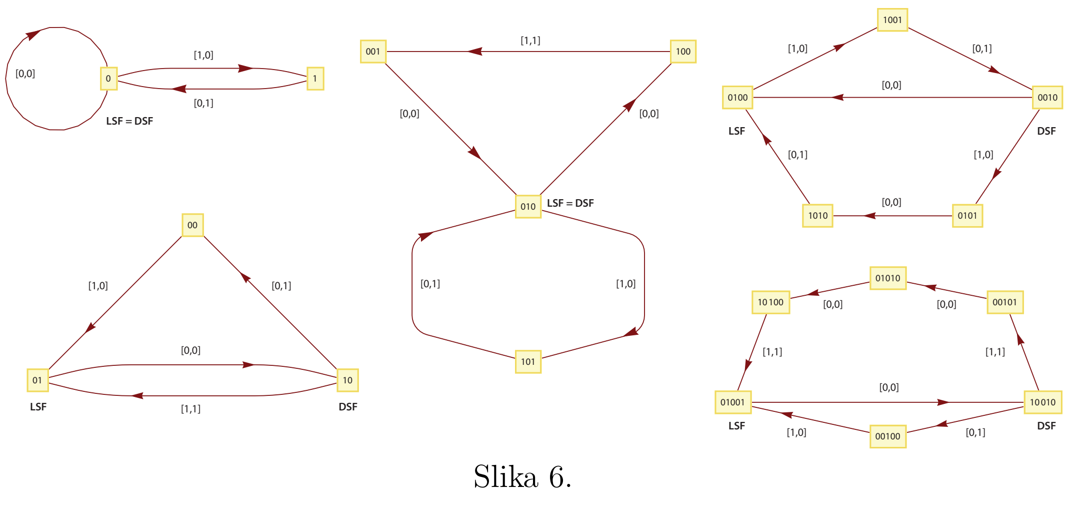
pri čemu DSF označava desni specijalni faktor, a LSF levi specijalni faktor odgovarajuće dužine, i pri tome važi:

$$DSF = v_0^A = v_0^B = v_t^C;$$

$$LSF = v_r^A = v_s^B = v_0^C.$$

Zvaćemo puteve koji spajaju desni specijalni faktor sa levim specijalnim faktorom putevi A i B, a put koji spaja levi specijalni faktor sa desnim specijalnim faktorom put C.

Da bismo ovo lakše shvatili, posmatrajmo faktor-graf Fibonačijeve reči, i to reda $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Slika 6.

Propozicija 2.35. *Svaka Štrumova reč ima osobinu $\mathcal{R}_2$.*

Dokaz. Neka je s Šturmova reč i neka je v njen faktor. Posmatrajmo faktor-graf reči s reda $|v|$. Tada reč v može da se nalazi ili na putu A ili na putu B ili na putu C. Najjednostavnija je situacija kada se taj faktor nalazi na putu C. Neka je on v_k^C za $k \in \{0, 1, \ldots, t\}$. Tada su jedine dve povratne reči nad $v = v_k^C$

$$v_k^C a_{k+1}^C a_{k+2}^C \ldots a_1^A a_2^A \ldots a_r^A a_1^C a_2^C \ldots a_{k-1}^C$$

i

$$v_k^C a_{k+1}^C a_{k+2}^C \ldots a_1^B a_2^B \ldots a_s^B a_1^C a_2^C \ldots a_{k-1}^C.$$

Posmatrajmo sada situaciju kada se faktor v nalazi na putu A ili na putu B. Jasno, ti putevi imaju simetričnu ulogu, pa je dovoljno dokazati da tvrđenje važi kada se faktor v nalazi recimo na putu A.

Pre nego što nastavimo, primetimo da, kako je skup $F(s)$ zatvoren za preokretanje, važi $b_r^A = a_1^A = \widehat{a_1^B} = \widehat{b_s^B}$ i $a_r^A = b_1^A = b_1^B = a_s^B$.

U nastavku ćemo oznaku A koristiti sa značenjem da, čitajući datu reč sleva nadesno, prolazimo putem A, i analogno za B i C.

Ako se reč v nalazi na putu A, tada postoji broj l_0 takav da je reč formirana na putu $AC(BC)^{l_0}A$ najkraća povratna reč za v, i pri tome su sve njene povratne reči formirane pomoću puteva oblika $AC(BC)^l A$ za $l \geq l_0$. Dokažimo da od ovih reči jedino još za $l = l_0 + 1$ dobijamo povratnu reč, a ostali slučajevi vode u kontradikciju. Pretpostavimo suprotno: Neka i na putu $AC(BC)^{l_1}A$ imamo povratnu reč, za neko $l_1 > l_0 + 1$. Označimo sa z reč koju dobijamo nadovezivanjem reči određene prolaskom kroz put C i konkatenaciju puteva B i C ponovljenu l_0 puta. Jasno, z se počinje sa LSF, i završava se sa DSF. Kako prolaskom kroz reč s nailazimo na niz puteva $AC(BC)^{l_0}A$, sledi $b_r^A z a_1^A \in F(s)$, tj. $a_1^A z a_1^A \in F(s)$. Kako takođe nailazimo i na niz puteva $(BC)(BC)^{l_0}BC$ (ovo je sadržano u $AC(BC)^{l_1}A$), sledi $b_s^B z a_1^B \in F(s)$, tj. $\widehat{a_1^A} z \widehat{a_1^A} \in F(s)$.

Dakle, dobili smo da su $a_1^A z a_1^A$ i $\widehat{a_1^A} z \widehat{a_1^A}$ faktori Šturmove reči s, što je nemoguće jer je skup faktora Šturmovih reči balansiran skup, pa ne može da sadrži istovremeno reči $a_1^A z a_1^A$ i $\widehat{a_1^A} z \widehat{a_1^A}$.

Prema tome, povratne reči nad v su one reči koje su određene putevima $AC(BC)^{l_0}A$ i $AC(BC)^{l_0+1}$ i više ih nema. ∎

U cilju da dokažemo da važi i obrnuto tvđenje, tj. da je svaka beskonačna reč sa osobinom $\mathcal{R}_2$ Šturmova, potrebno je da definišemo pojam Šturmovog morfizma i razdvajajućeg slova i nakon toga da dokažemo još nekoliko lema.

Definicija 2.36. *Morfizam f je Šturmov ako i samo ako za svaku Šturmovu reč s važi da je $f(s)$ takođe Šturmova reč.*

Označimo sa St monoid generisan sledećim endomorfizmima skupa $\{0,1\}^*$:

$$E: \begin{array}{l} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0. \end{array} \qquad \varphi: \begin{array}{l} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0. \end{array} \qquad \widetilde{\varphi}: \begin{array}{l} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 0. \end{array}$$

Napomena 2.37. *Može se pokazati da je monoid St upravo monoid Šturmovih morfizama. Dokaz se može naći u [14].*

Definicija 2.38. *Slovo $a \in \{0,1\}$ se naziva razdvajajuće slovo u reči $w \in \{0,1\}^\infty$ ako i samo ako svaki faktor dužine 2 reči w sadrži bar jedno a.*

Primer 2.39. *Slovo* 0 *je razdvajajuće u Fibonačijevoj reči* 01001010010010...

Lema 2.40. *Ako beskonačna rekurentna reč w nad $\{0,1\}$ ima osobinu $\mathcal{R}_2$, tada je ili slovo* 0 *ili slovo* 1 *razdvajajuće.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da ni slovo 0 ni slovo 1 nisu razdvajajuća. Tada se i 00 i 11 pojavljuju u w. To znači da je 0 jedna povratna reč za reč 0, i da je 1 jedna povratna reč za reč 1. Reč w možemo zapisati u sledećem obliku:

$$w = 0^p 1^{m_1} 0^{n_1} 1^{m_2} 0^{n_2} \ldots, p > 0, m_i, n_i > 0,$$

ili simetrično, sa zamenjenom ulogom 0 i 1. Ako bi ona imala osobinu $\mathcal{R}_2$, tada bi svi m_i morali biti jednaki, i isto za n_i. Ali tada bismo reč w mogli zapisati u obliku

$$0^p(1^{m_1}0^{n_1})^\infty,$$

a ova reč nema osobinu $\mathcal{R}_2$ jer prema lemi 2.34 postoji faktor $u \in F(w)$ takav da važi $|\mathcal{H}_{w,u}| = 1$. ■

Definicija 2.41. *Neka su morfizmi ψ_0 i $\widetilde{\psi_0}$ definisani na sledeći način:*

$$\psi: \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 01. \end{array} \qquad \widetilde{\psi_0}: \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 10. \end{array}$$

Ovi morfizmi predstavljaju Šturmove morfizme, naime važi:

$$\psi_0 = \varphi \circ E \text{ i } \widetilde{\psi_0} = \widetilde{\varphi} \circ E.$$

Lema 2.42. *Neka je w beskonačna rekurentna reč nad $\{0, 1\}$ sa osobinom $\mathcal{R}_2$, gde je 0 razdvajajuće slovo. Tada postoji beskonačna reč w' tako da važi ili $w = \psi_0(w')$ ili $w = \widetilde{\psi_0}(w')$. Pritom reč w' takođe ima osobinu $\mathcal{R}_2$.*

Dokaz. Razdvajamo dve mogućnosti. Ako reč w počinje slovom 0, onda se lako vidi da postoji reč w' takva da važi $w = \psi_0(w')$. Slično, u slučaju da reč w počinje slovom 1, možemo naći reč w' takvu da važi $w = \widetilde{\psi_0}(w')$. Pretpostavimo suprotno, da reč w' nema osobinu $\mathcal{R}_2$. Tada postoji njen faktor u za koji postoje bar tri povratne reči (skup povratnih reči za taj faktor ne može da ima samo jedan element, jer bi to povlačilo eventualnu periodičnost reči w', što je nemoguće).

Ako se u završava sa 1, tada se faktor $\psi_0(u)$ pojavljuje u reči w tačno na onim mestima gde se pojavljuje kao slika reči u. To povlači da za faktor $\psi_0(u)$ u w postoje tri povratne reči. Kontradikcija, jer po pretpostavci reč w ima osobinu $\mathcal{R}_2$.

Ako se u završava sa 0, posmatrajmo pojavljivanje faktora ua u reči w', gde je a neko slovo. Tada sva pojavljivanja $\psi_0(ua)$ počinju sa $\psi_0(u)a$. Sada važi da se faktor $\psi_0(u)a$ pojavljuje u reči w tačno na onim mestima gde se pojavljuje kao slika reči u. To daje kontradikciju na isti način kao malopre. ∎

Lema 2.43. *Ako je beskonačna reč s nad $\{0, 1\}$ aperiodična i postoji beskonačni niz beskonačnih reči $s = s_0, s_1, s_2 \ldots$ takav da za svako $i \geq 0$ važi $s_i = \psi_{x_i}(s_{i+1})$ ili $s_i = \widetilde{\psi_{x_i}}(s_{i+1})$, gde $x_i \in \{0, 1\}$, tada je reč s Šturmova.*

Dokaz. Od svih takvih reči i odgovarajućih nizova iz formulacije teoreme, odaberimo onu reč s i niz $s = s_0, s_1, s_2 \ldots$ za koje je nebalansiran prefiks u minimalne dužine.

Neka je recimo $s = \widetilde{\psi_0}(s_1)$. Tada $ua = \widetilde{\psi_0}(v)$ za neko $v \in Pref(s_1)$, gde je $a = 0$ ako se u završava sa 1, inače $a = \varepsilon$. Ako važi $|v| < |u|$, tada je v balansirana, (zbog minimalnosti $|u|$) a iz toga, kako je $\widetilde{\psi_0}$ je Šturmov morfizam, sledi da je i ux balansirana, što je nemoguće jer u nije balansiran. Neka $|v| \geq |u|$. Kako je $ua = \widetilde{\psi_0}(v)$, sledi da je dužina ua jednaka zbiru dužine v i broja jedinica u v, pa imamo

$$|v| + 1 \geq |ux| = |v| + |v|_1,$$

tj. $|v|_1 \leq 1$, a odavde i $|u|_1 \leq 1$. Ovo daje da je u balansirana. Kontradikcija. ∎

Propozicija 2.44. *Svaka beskonačna rekurentna reč nad* $\{0,1\}$ *koja ima osobinu* $\mathcal{R}_2$ *je Šturmova.*

Dokaz. Neka je s beskonačna rekurentna reč nad $\{0,1\}$ sa osobinom $\mathcal{R}_2$. Tada je ona aperiodična, i zbog leme 2.40, ima razdvajajuće slovo, recimo 0. Tada zbog leme 2.42 možemo napraviti beskonačan niz reči $s = s_0, s_1, s_2 \ldots$ takav da $s_i = \psi_0(s_{i+1})$ ili $s_i = \widetilde{\psi_0}(s_{i+1})$ za $i \geq 0$, i gde svako s_i ima osobinu $\mathcal{R}_2$. Sada lema 2.43 odmah daje da je s Šturmova reč. ∎

Konačno iz propozicije 2.35 i 2.44 sledi dokaz teoreme 2.33.

2.4 Još neke karakterizacije

Sumirajmo ono što smo do sada pokazali. Videli smo da Šturmove reči mogu biti okarakterisane na više različitih načina. Prvo smo ih definisali kao beskonačne reči kod kojih za svako $n \geq 0$ važi $F_n(s) = n + 1$. Odmah iz definicije smo dobili:

- Šturmove reči su aperiodčne reči čija je faktorska složenost minimalna;
- reč je Šturmova ako i samo ako ima tačno jedan desni specijalni faktor svake dužine.

Zatim smo pokazali Morse-Hedlundovu teoremu, koja je tvrdila:

- reč je Šturmova ako i samo ako je aperiodična i balansirana;
- reč je Šturmova ako i samo ako je iracionalna mehanička.

Glavna teorema sekcije 2.2 je bila:

- reč s je Šturmova reč ako i samo ako važi

$$|Pal_n(s)| = \begin{cases} 1, & \text{ako je n parno;} \\ 2, & \text{ako je n neparno.} \end{cases}$$

Zatim, poslednja teorema koju smo dokazali je tvrdila:

- reč je Šturmova ako i samo ako skup povratnih reči za svaki njen faktor sadrži tačno dva elemenata.

Vidimo da poslednje četiri karakterizacije (ne računajući samu definiciju i one koje odmah slede iz definicije) opisuju Šturmove reči na veoma različit, ponekad čak i neočekivan način.

U ovoj sekciji ćemo ilustracije radi, bez dokaza, prezentovati još četiri karakterizacije koje su na neki način slične onima koje smo već opisali.

2.4.1 Uopštenje balansiranosti

Fagnot i Vuillon su uopštili pojam balansiranosti i dokazali su da važi sledeće:

Teorema 2.45. *Ako je s Šturmova reč, tada za svaka dva njena faktora v i v' važi*

$$|v| = |v'| \Rightarrow ||v|_u - |v'|_u| \leq |u|$$

za proizvoljan faktor u.

Stavljajući $u = 1$ dobijamo već poznatu osobinu Šturmovih reči.
U istom radu autori su dali novu karakterizaciju Šturmovih reči. Prethodno uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.46. *Neka je w beskonačna rekurentna reč nad alfabetom $\Sigma = \{0, 1\}$ i k proizvoljan prirodan broj. Tada*

$$\Gamma_k(w) = \{z \in F(w) : z[1] = z[|z|] = 1 \wedge |z|_1 = k\}.$$

Da bismo lakše razumeli definiciju, ilustrujemo je pomoću jednog primera:

Primer 2.47. *Skupu $\Gamma_3((100010000011)^\infty)$ pripadaju reči*

- 10001000001*;*
- 10000011*;*
- 111*;*
- 110001.

Sada možemo formulisati obećanu karakterizaciju:

Teorema 2.48. *Neka je s aperiodična rekurentna reč nad alfabetom $\Sigma = \{0, 1\}$. Tada je s Šturmova reč ako i samo ako za svako z i z' iz $\Gamma_k(s)$ i za svaki prirodan broj k važi:*

$$||z| - |z'|| \leq 1.$$

Dokazi ovih teorema mogu se naći u [7].

2.4.2 Presečni nizovi i rotacije

U ovom delu ćemo pokazaćemo još dve karakterizacije Šturmovih reči. U osnovi obe karakterizacije je definicija mehaničke reči.

Posmatrajmo pravu $y = \beta x + \rho'$, gde je $\beta > 0$ a za ρ' nema ograničenja. Posmatrajmo preseke ove prave sa kvadratnom mrežom koju određuju nenegativni celi brojevi. Presečna tačka je *horizontalna* ako je y-koordinata tačke preseka ceo broj, a *vertikalna* ako je x-koordinata ceo broj. U slučaju da su obe koordinate celobrojne po dogovoru smatramo da u toj tački imamo prvo jednu horizontalnu zatim jednu vertikalnu presečna tačka. Horizontalnim tačkama preseka pridružujemo broj 1 a vertikalnim broj 0. Na taj način dobijamo jedan beskonačan niz, tj. jednu beskonačnu reč nad alfabetom $\{0, 1\}$, koju ćemo označiti sa $K_{\beta,\rho'}$.

Za iracionalan broj β reči koje dobijamo jesu Šturmove. Naime posle nekoliko tehničkih koraka može se pokazati da važi:

$$K_{\beta,\rho'} = s_{\frac{\beta}{1+\beta},\frac{\rho'}{1+\beta}}. \tag{12}$$

Primer 2.49. *Posmatrajmo Fibonačijevu reč f. Dokažimo da je ona upravo reč $K_{\frac{1}{\phi},0}$ gde je $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Izračunajmo njen nagib kao balansirane reči. Podsetimo se kako smo formirali f: $f_0 = 0$, $f_1 = 01$, $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Posmatrajmo visinu i dužinu prefiksa f_n.*

n	f_n	$h(f_n)$	$\lvert f_n\rvert$
0	0	0	1
1	01	1	2
2	010	1	3
3	01001	2	5
4	01001010	3	8

Nije teško pokazati da za f_n važi $h(f_n) = F_n$, i $|f_n| = F_{n+2}$, gde je sa F_n označen n-ti Fibonačijev broj.

Dakle, imamo

$$\pi(f) = \lim_{n\to\infty} \pi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(f_n)}{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{1}{\phi^2}.$$

Prema tome, Fibonačijeva reč odgovara mehaničkoj reči $s_{\frac{1}{\phi^2},0}$.

Kako važi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi^2} &= \frac{1}{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\phi}}{1+\frac{1}{\phi}}.\end{aligned}$$

iz jednakosti (12) *zaista sledi da* $f = K_{\frac{1}{\phi},0}$.

Još jedan način na koji Šturmove reči mogu biti definisane i koji u suštini takođe predstavlja jedan oblik mehaničke reči je sledeći: Identifikujemo jediničnu kružnicu sa intervalom $[0,1)$. Fiksirajmo tačku $x \in [0,1)$ tj. tačku na jediničnoj kružnici, i $\gamma \in (0,1)$. Definišemo rotaciju R_γ za ugao γ koja preslikava tačku na kružnici u tački na kružnici, tj. $R_\gamma : [0,1) \to [0,1)$, na sledeći način

$$R_\gamma(x) = \{x+\gamma\}.$$

Definišemo reč $r_{x,\gamma}$ na sledeći način:

$$r_{x,\gamma}[n] = \begin{cases} 0, & R_\gamma^n \in [0, 1-\gamma); \\ 1, & R_\gamma^n \in [1-\gamma, 1). \end{cases}$$

Na ovaj način dobijamo beskonačnu reč nad alfabetom $\{0,1\}$. Ta reč je Šturmova ako i samo je ugao rotacije iracionalan broj. Posle nekoliko tehničkih koraka dobija se da je $r_{\gamma,x}$ upravo $s_{\gamma,x}$.

2.4.3 Povlašćene reči

Motivacija za definisanje povlašćenih reči dobijeno je prilikom izučavanja tzv. bogatih reči, koje su definisane u [9] kao, grubo rečeno, reči koje sadrže maksimalno palindroma koliko mogu sadržati (za još detalja o različitim vidovima pojavljivanja palindroma u konačnim i beskonačnim rečima videti [4]). Njihova interesantna karakterizacija je da je reč bogata ako i samo ako je svaka kompletna povratna reč svakog njenog palindromskog faktora ponovo palindrom. Povlašćene reči su rekurzivno definisane kao kompletne povratne reči za neku povlašćenu reč. Preciznije:

Definicija 2.50. *Neka je dat alfabet Σ. Povlašćene reči nad Σ, u oznaci Pri_Σ (potiče od engleske reči privileged), definišu se rekurzivno*

- $\varepsilon \in Pri_\Sigma$;
- *svako slovo iz Σ je u Pri_Σ;*
- *za $|w| \geq 2$ važi $w \in Pri_\Sigma$ ako je w kompletna povratna reč za neku reč iz Pri_Σ.*

Za datu reč w uvedimo oznake:

$$Pri(w) = \{u \in F(w) : \text{u je povlašćena}\};$$

$$Pri_n(w) = \{u \in F(w) : |u| = n \text{ i } u \text{ je povlašćena}\}.$$

Povlašćene reči se ponašaju slično kao palindromi. Karakterizacija Šturmovih reči pomoću povlašćenih reči je slična karakterizaciji pomoću palindroma:

Teorema 2.51. *Beskonačna reč s je Šturmova reč ako i samo ako važi*

$$|Pri_n(s)| = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } n \textit{ parno;} \\ 2, & \textit{ako je } n \textit{ neparno.} \end{cases}$$

Dokaz ove teoreme može se naći u [20].

Za ilustraciju ove teoreme posmatrajmo Fibonačijevu reč f:

Primer 2.52.

$$f = 0100101001001010010100100101001\ldots$$

Važi:

- $Pri_0(f) = \{\varepsilon\}$, *pa sledi* $|Pri_0(f)| = 1$;
- $Pri_1(f) = \{0, 1\}$, *pa sledi* $|Pri_1(f)| = 2$;
- $Pri_2(f) = \{00\}$, *pa sledi* $|Pri_2(f)| = 1$;
- $Pri_3(f) = \{010, 101\}$, *pa sledi* $|Pri_2(f)| = 2\ldots$

Može se pokazati da za Šturmove reči važi $Pal(s) = Pri(s)$.

2.4.4 Abelove povratne reči

Definicija 2.53. *Dve konačne reči su abelovski ekvivalentne, u oznaci* $\sim_{ab}$*, ako i samo ako od jedne možemo dobiti drugu permutovanjem slova.*

Definicija 2.54. *Neka je* w *rekurentna reč a* u *njen proizvoljan faktor. Neka su* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *pozicije takve da važi* $w[n_i, n_i + |u| - 1] \sim_{ab} u$*. Skup semiabelovih povratnih reči za faktor* u *je skup* $\{w[n_i, n_{i+1} - 1] : i \geq 1\}$*, a skup Abelovih povratnih reči su predstavnici faktor-skupa* $\{w[n_i, n_{i+1} - 1] : i \geq 1\}_{\sim_{ab}}$*.*

Iz definicije jasno da je broj Abelovih povratnih reči za neki faktor manji ili jednak broju semiabelovih povratnih reči za taj faktor.

Šturmove reči se mogu biti okarakterisani pomoću Abelovih i pomoću semiabelovih reči na veoma sličan način.

Teorema 2.55. *Beskonačna rekurentna reč* s *nad* $\{0, 1\}$ *je Šturmova ako i samo ako za svaki njen faktor* u *važi da skup semiabelovih povratnih reči za* u *sadrži dva ili tri elemenata.*

Teorema 2.56. *Beskonačna rekurentna reč* s *nad* $\{0, 1\}$ *je Šturmova ako i samo ako za svaki njen faktor* u *važi da skup Abelovih povratnih reči za* u *sadrži dva ili tri elemenata.*

Detaljno o ovome može da se naći u [21].

3 Primena Šturmovih reči u teoriji brojeva

Šturmove reči imaju brojne primene u različitim oblastima, recimo u teoriji brojeva, optimizaciji putnih mreža, kompjuterskoj grafici i obradi slika, prepoznavanju obrazaca itd. U ovom delu rada fokusiraćemo se na neke njihove primene konkretno u teoriji brojeva. Biće izložena tri važna rezultata. Prva dva se odnose na to kakvu ulogu Šturmove reči imaju u ispitivanju transcendentnosti realnih brojeva predstavljenih na određen način. Prvo dokazujemo kriterijum transcendentnosti preko cifarskog zapisa u nekoj bazi. Zatim ćemo (bez dokaza) pomenuti i sličan rezultat koji se zasniva na zapisu broja u obliku verižnog razlomka. Treći rezultat pokazuje da se Šturmove reči u teoriji brojeva pojavljuju ne samo u pitanjima transcendentnosti već i u drugim kontekstima, konkretno (kako se ispostavilo tek pre nekoliko godina) i u ispitivanju ponašanja razlomljenih delova brojeva oblika ξb^n.

3.1 Transcendentnost brojeva

Teoreme koje su u ovoj sekciji izložene mogu se naći u [1], [2], [8], [18]. Za dokaz transendentnosti biće nam korisna Ridoutova teorema (videti [17, str. 147-148]).

Teorema 3.1. *Neka je θ realan algebarski broj, i neka su ρ, c_1, c_2 i c_3 pozitivne konstante, a λ i μ konstante koje zadovoljavaju*

$$0 \leq \lambda \leq 1 \text{ i } 0 \leq \mu \leq 1.$$

Pretpostavimo da postoji beskonačno mnogo svedenih razlomaka $\frac{P_n}{Q_n}$ sa sledećim osobinama:

- $|\frac{P_n}{Q_n} - \theta| \leq c_1 |Q_n|^{-\rho}$;
- *P_n i Q_n su različiti od nule i mogu biti zapisani u formi $P_n = P'_n a_n$ i $Q_n = Q'_n b_n$, gde su a_n i b_n uzajamno prosti prirodni brojevi a P'_n i Q'_n celi brojevi takvi da važi*

$$0 < |P'_n| \leq c_2 |P_n|^{\lambda} \text{ i } 0 < |Q'_n| \leq c_3 |P_n|^{\mu}.$$

Tada važi $\rho \leq \lambda + \mu$.

3.1.1 Transcendentnost preko cifarskog zapisa

Lema 3.2. *Neka je θ iracionalan broj. Ako za svako $n \geq 1$ važi da njegov binarni zapis počinje sa $0.u_n v_n v_n v'_n$, gde je u_n reč (moguće prazna) nad alfabetom $\{0, 1\}$ a v_n i v'_n neprazne reči, pri čemu je ispunjeno:*

- $v'_n \in Pref(v_n)$;
- $|v_n \to \infty|$ *za* $n \to \infty$;
- $\limsup \frac{|u_n|}{|v_n|} < \infty$;
- $\liminf \frac{|v'_n|}{|v_n|} > 0$,

tada je broj θ transcendentan.

Dokaz. Označimo sa r_n dužinu reči u_n a sa s_n dužinu reči v_n. Biramo ϵ tako da važi:

$$0 < \epsilon < \liminf \frac{|v'_n|}{|v_n|}.$$

Neka je t_n racionalan broj čiji je binarni zapis $0.u_n v_n v_n \ldots$. Tada jasno važi

$$t_n = \frac{p_n}{2^{r_n}(2^{s_n} - 1)}$$

za neki ceo broj p_n. Ako uzmemo dovoljno veliko n dobićemo:

$$|\theta - t_n| \leq \frac{1}{2^{r_n + (\epsilon+2)s_n}}.$$

Dalje, kako je

$$\liminf \frac{s_n}{r_n + s_n} = \frac{1}{\limsup \frac{r_n + s_n}{s_n}} = \frac{1}{\limsup \frac{r_n}{s_n} + 1} > 0,$$

sledi da postoje brojevi μ i ρ takvi da za beskonačno mnogo vrednosti n važi:

$$1 + \frac{s_n}{r_n + s_n} < 1 + \mu < \rho < 1 + (1 + \epsilon)\frac{s_n}{r_n + s_n}.$$

Ovakav izbor μ i ρ daje kontradikciju sa teoremom 3.1 u kojoj uzimamo $P_n = P'_n = p_n$, $Q_n = 2^{r_n}(2^{s_n - 1})$, $Q'_n = 2^{s_n} - 1$, $a_n = 1$, $b_n = 2^{r_n}$ i $\lambda = 1$. Dakle θ mora biti transcendentan. ∎

Lema 3.3. *Ako je s Šturmova reč, tada postoje dve reči w_0 i w_1 i niz pozitivnih celih brojeva a_n, takvih da, ako je reč w_n zadat rekurzivnom formulom*

$$w_{n+1} = w_n^{a_n} w_{n-1},$$

tada za sve $N \geq 1$ i $n \geq 1$ reč $s[1, N]$ ima oblik $x_0 x_1 \dots x_k$, gde su x_i, $1 \leq i \leq k-1$ jednaki sa w_n ili w_{n+1}, x_0 je sufiks, a x_k je prefiks ili od w_n ili od w_{n+1}.

Dokaz. Posmatrajmo faktor-grafove reči s. Kao što smo pokazali ranije, svaki takav graf se sastoji od tri puta. Označimo sa DSF_n i sa LSF_n desni i levi specijalni faktor dužine n. Za fiksirano n posmatrajmo puteve koji kreću iz LSF_n i završavaju se u LSF_n, i pritom u svaki čvor koji se nalazi na posmatranom putu ulazi samo jedna grana. Takvih puteva ima ukupno dva, naime:

$$K_n = b_1^C \dots b_t^C b_1^B \dots b_s^B, J_n = b_1^C \dots b_t^C b_1^A \dots b_r^A, \tag{13}$$

u skladu sa oznakama na stranici 36. Sada ćemo pokazati da postoji određena veza između tih puteva u grafovima $G_n(s)$ i $G_{n+1}(s)$. U zavisnosti od toga da li se levi i desni specijalni faktor u grafu $G_n(s)$ poklapaju ili ne, razlikujemo dva slučaja:

- $DSF_n \neq LSF_n$:
  Tada za svaki čvor X koji nije desni specijalni faktor u grafu $G_n(s)$ postoji jedinstveno slovo a tako da je Xa čvor grafa $G_{n+1}(s)$, i pri tome važi da ako postoji grana iz Yb u Xa u grafu $G_{n+1}(s)$, tada postoji grana iz Y u X i u grafu $G_n(s)$. Imamo da je $DSF_{n+1} = cDSF_n$ a $LSF_{n+1} = LSF_n d$, gde su slova c i d jedinstveno određena pomoću grafa $G_n(s)$. Dakle, graf $G_{n+1}(s)$ je time potpuno određen i važi da je $K_{n+1} = K_n$ i $J_{n+1} = J_n$.

- $DSF_n = LSF_n$:
  U ovom slučaju neka K_n prolazi kroz čvorove

  $$(LSF_n, LSF_n[2,n]a, \dots, bLSF_n[1, n-1], LSF_n),$$

  a L_n kroz

  $$(LSF_n, LSF_n[2,n]c, \dots, dLSF_n[1, n-1], LSF_n).$$

  I sada važi da je $LSF_{n+1} = LSF_n \alpha$ i $DSF_{n+1} = \beta DSF_n$ za neka slova α i β, ali sada pomoću grafa $G_n(s)$ ne možemo jedinstveno zaključiti kako tačno izgledaju putevi K_{n+1} i L_{n+1} u grafu $G_{n+1}(s)$. Pretpostavimo da je $\alpha = a$; tada imamo da je $\beta = b$, a ovo implicira da je $K_{n+1} = K_n$ a $J_{n+1} = K_n J_n$. Za $\alpha = c$ i $\beta = d$ dobili bismo da je $K_{n+1} = J_n K_n$ i $J_{n+1} = J_n$.

Sada stavimo da su reči w_n i w_{n+1} određene putevima K_n i J_n navedenim u (13). Oni zadovoljavaju rekurzivnu formulu koju smo tražili. Takođe za fiksirane n i N reč $s[1, N]$ je predstavljena pomoću puta u grafu $G_n(s)$ koji prolazi kroz čvorove

$$s[1, n], s[2, 1 + n], \ldots s[N + 2, N - 1 + n],$$

pa imamo traženu dekompoziciju. ∎

Sada možemo dokazati glavnu teoremu ove sekcije:

Teorema 3.4. *Neka je θ realan broj. Ako on u binarnom zapisu formira Šturmovu reč, tada je θ transcendentan broj.*

Dokaz. Označimo sa u binarni zapis broja θ, koji je po pretpostavci Šturmova reč. Neka su a_n i w_n određeni prema lemi 3.3, i prema istoj lemi neka u počinje sa $x_0 x_1 \ldots x_{k-1}$, gde je x_0 ili sufiks od w_n, u kom slučaju je označiti sa z_n, ili sufiks od w_{n+1}, što dalje može da bude sufiks od w_{n-1}, u kom slučaju ćemo ga opet označiti sa z_n, ili je oblika $z_n w_n^{c_n} w_{n-1}$ gde je z_n neki sufiks od w_n, a c_n ceo broj za koji važi $0 \leq c_n \leq a_n$. Prvih b_n reči u nizu $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ su jednake sa w_n za neko $b_n \geq 0$, a posle njih mora da sledi w_{n+1}, jer bismo inače imali da je u eventualno periodična reč.

Dakle, za svako n reč u počinje ili sa

$$z_n w_n^{b_n + a_n} w_{n-1}, \tag{14}$$

ili sa

$$z_n w_n^{c_n} w_{n-1} w_n^{b_n + a_n} w_{n-1}, \tag{15}$$

gde je z_n sufiks od w_n ili od w_{n-1}, a b_n i c_n su nenegativni celi brojevi. Označimo sa q_n dužinu reči w_n. Važi $q_{n+1} = q_n a_n + q_{n-1}$. Razlikujemo sada dva slučaja.

- Ako za beskonačno mnogo vrednost n imamo slučaj (15) sa $c_n \geq 3$, tada primenom leme 3.2 za $u_n = z_n$ i $v_n = v'_n = w_n$ dobijamo transcendentnost broja θ.

- Ako ne važi prethodno, tada stavimo $u_n = z_n$ u slučaju (14), a $u_n = z_n w_n^{c_n} w_{n-1}$ u slučaju (15). Tada za dovoljno veliko n imamo $|u_n| \leq 5q_n$ i posmatramo sledeće podslučajeve:
  - Ako je $a_n + b_n \geq 3$ za beskonačno mnogo n, stavimo $v_n = w_n$ i $v'_n = v_n$ i lema 3.2 daje trancendentnost broja θ;
  - Ako je $a_n + b_n \leq 2$ za dovoljno veliko n i pritom za beskonačno mnogo n imamo $a_n + b_n = 2$, tada za dovoljno veliko n imamo $q_{n-1} \geq \frac{q_n}{3}$, pa lema 3.2 za vrednosti $v_n = w_n$ i $v'_n = w_{n-1}$ ponovo daje transcendentnost broja θ;
  - Ako ne važi nijedan od prethodnih slučajeva, tada za dovoljno veliko n mora da važi $a_n = 1$ i $b_n = 0$. Primenimo lemu 3.2 za $v_n = w_{n-1}$ i $v'_n = w_{n-4}$, jer tada važe nejednakosti
$$\frac{|u_n|}{10} < |v_n| = q_n < 8|v_n|.$$

Time je dokaz završen. ■

Napomena 3.5. *Na praktično identičan način dokazuje se i jače tvrđenje: ako realan broj θ u zapisu u ma kojoj bazi ima samo dve cifre i one pritom formiraju Šturmovu reč, tada je θ transcendentan.*

Napomena 3.6. *U radu* [8] *je u stvari dokazano još više, pri čemu je i taj dokaz sličan ovde izloženom. Definišemo upštenje Šturmovih reči nad alfabetom sa k elemenata na sledeći način: s' je takva uopštena Šturmova reč ako i samo ako važi*
$$|F_n(s')| = n + k - 1.$$
(Očito za $k = 2$ dobijemo Šturmove reči.) Tada, ako cifre realnog broja θ u nekoj bazi formiraju uopštenu Šturmovu reč nad alfabetom sa k elemenata, onda je taj broj transcendentan.

3.1.2 Verižni razlomci

Verižni razlomak je izraz oblika
$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{16}$$

gde su a_i, $i \geq 0$, nenegativni celi brojevi, koji se nazivaju parcijalni količnici. Svaki realan broj može da se predstavi na jedinstven način kao verižni razlomak.

Primer 3.7.

$$\frac{19}{15} = 1 + \frac{4}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{4}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{4}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{4}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}.$$

$$\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3-1}{2(\sqrt{3}+1)}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}},$$

pa se ponavlja postupak.

Važi da je verižni razlomak konačan ako i samo ako je broj koji on predstavlja racionalan.

Da pojednostavimo zapis koristićemo oznaku $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$ za izraz (16). Sledeća teorema potiče još od Lagranža, i daćemo je bez dokaza:

Teorema 3.8. *Neka je $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Tada je reč $a_0a_1a_2a_3\ldots$ eventualno periodična ako i samo ako je α iracionalan broj koji je rešenje neke kvadratne jednačine sa celim koeficijentima.*

Primer 3.9. *Kako smo malopre izveli važi*

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots];$$

Takođe važe i sledeće jednakosti:

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 \ldots];$$

$$\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, \ldots];$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots].$$

Dugo nerešena hipoteza koju je prvi put formulisao Khintchine 1949. godine navodi da, ukoliko su parcijalni količnici verižnog razlomka ograničeni, tada je broj koji on predstavlja:

- kvadratni koren racionalnog broja – ako je reč formirana od parcijalnih količnika eventualno periodična;
- trancendentan – inače.

Do danas se mnogo matematičara bavilo Khintchinovom hipotezom, i ona je dokazana za nekoliko specijalnih slučajeva. Jedan od tih rezultata koristi osobinu Šturmovih reči. U pitanju je sledeća teorema:

Teorema 3.10. *Ako je reč koja je formirana pomoću parcijalnih količnika verižnog razlomka Šturmova, tada je broj, koji taj razlomak predstavlja transcendentan.*

Dokaz ne navodimo, ali pomenimo toliko da ključnu ulogu ima činjenica da Šturmove reči počinju sa proizvoljno velikim kvadratima. Ilustrujmo ovo pomoću Fibonačijeve reči:

Primer 3.11.

$$f = 010\ 010\ 10010010100101001001010010 01\ldots;$$

$$f = 01001\ 01001\ 0010100101001001010010 01\ldots;$$

$$f = 01001010\ 01001010\ 01010010010100100 1\ldots.$$

i tako dalje.

3.2 Šturmove reči i razlomljeni delovi

Mahler je 1968. godine je definisao takozvane Z-brojeve. Videti detalje u [17]. Oni su zadati na sledeći način:

$$Z = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}, \xi > 0, (\forall n \geq 0)(0 \leq \{\xi(\frac{3}{2})^n\} < \frac{1}{2})\},$$

gde $\{x\}$ označava razlomljeni deo broja x.

On je dokazao da je skup Z najviše prebrojiv, a i dalje je otvoreno pitanje da li je čak $Z = \emptyset$.

Ovo je dalo motivaciju za opštije pitanje:

Za zadat realan broj α i interval $(x, y) \subset (0, 1)$, da li postoji broj $\xi > 0$ takav da za sve $n \geq 0$ važi $x \leq \{\xi\alpha^n\} \leq y$.

Bugeaud i Dubickas su 2005. godine u radu [3] rešili jedan specijalan slučaj ovog problema. Dokazali su sledeću teoremu:

Teorema 3.12. *Neka je $b \geq 2$ ceo a ξ iracionalan broj. Tada brojevi $\{\xi b^n\}$, $n \geq 0$ ne mogu svi biti unutar intervala čija je dužina strogo manja od $\frac{1}{b}$. Dalje, važi svi brojevi $\{\xi b^n\}$, $n \geq 0$ su u zatvorenom intervalu dužine $\frac{1}{b}$ ako i samo ako važi*

$$\{\xi\} = \frac{k}{b-1} + t_b(s),$$

gde je $k \in \{0, 1, \ldots, b-2\}$, s je Šturmova reč, a

$$t_b(w) = \sum_{j=1}^{\infty} s[j]b^{-j}.$$

Dokaz. Neka je reč w dobijena tako da važi

$$\{\xi\} = t_b(w) = w[1]b^{-1} + w[2]b^{-2} + w[3]b^{-3} \cdots = 0.w_1w_2w_3\ldots.$$

Primetimo da važi $\{\xi b^n\} = 0.w_{n+1}w_{n+2}\ldots$. Štaviše, kako je ξ iracionalan broj, imamo da je

$$w_{n+1}b^{-1} < \{\xi b^n\} < w_{n+1}b^{-1} + b^{-1}.$$

Ako bi postojale w_{i+1} i w_{j+1}, $0 \leq i \leq j$ takve da važi $w_{j+1} - w_{i+1} \geq 2$, tada bismo dobili:

$$\{\xi b^j\} - \{\xi b^i\} > w_{j+1}b^{-1} - w_{i+1}b^{-1} - b^{-1} \geq \frac{2}{b} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b}.$$

Dakle, možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da za $i \geq 0$ važi $w_i \in \{k, k+1\}$, gde $k \in \{0, 1, \ldots, b-2\}$. Zapišemo sada $\{\xi\}$ u formi

$$\{\xi\} = \frac{k}{b-1} + t_b(s),$$

gde je s reč nad alfabetom $\{0, 1\}$. Sada imamo:

$$\{\xi b^n\} - \frac{k}{b-1} = 0.s_{n+1}s_{n+2}\cdots = s_{n+1}b^{-1} + s_{n+2}b^{-2} + \ldots.$$

Kako je broj ξ iracionalan, sledi $F_n(s) < F_{n+1}(s)$, pa za svako m postoji bar jedan faktor reči s dužine m, recimo $s_i \ldots s_{i+m-1}$ tako da i $0s_i \ldots s_{i+m-1}$ i $1s_i \ldots s_{i+m}$ pripadaju skupu $F(s)$. To znači da postoje celi brojevei u i v (koji zavise od m) takvi da važi

$$\{\xi b^u\} - \frac{k}{b-1} = 0.0s_i \ldots s_{i+m-1}s';$$

$$\{\xi b^v\} - \frac{k}{b-1} = 0.1s_i \ldots s_{i+m-1}s''.$$

Imamo

$$\{\xi b^v\} - \{\xi b^u\} > b^{-1} - b^{-m}.$$

Kako m možemo birati proizvoljno veliko, sledi da ne postoji interval dužine strogo manje od $\frac{1}{b}$ koji bi sadržao sve brojeve $\{\xi b^n\}$, $n \geq 0$.

Neka je sada reč s Šturmova. Tada je ona balansirana, pa sledi da ne postoji reč v takva da su i $0v0$ i $1v1$ su faktori reči s. Dakle, razlika između svaka dva broja $\{\xi b^j\}$ i $\{\xi b^i\}$ po apsolutnoj vrednosti manja je od ili jednaka sa $\frac{1}{b}$.

Drugi smer dokazujemo kontrapozicijom. Neka reč s nije Šturmova. Kako je ona svakako aperiodična, sledi da nije balansirana. Tada iz leme 2.17 imamo da postoji reč u takva da su i $0u0$ i $1u1$ faktori reči s. Tada je razlika između svaka dva broja $\{\xi b^j\}$ i $\{\xi b^i\}$ po apsolutnoj vrednosti veća od $\frac{1}{b}$. Ovo znači da ne postoji zatvoren interval dužine $\frac{1}{b}$ koji sadrži sve brojeve $\{\xi b^n\}$, $n \geq 0$. ■

Literatura

[1] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, L. Q. Zamboni, Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions, *J. Number Theory* **91** (2001), 39-66.

[2] J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences. Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, 2003.

[3] Y. Bugeaud, A. Dubickas, Fractional parts of powers and Sturmian words, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), 69-74.

[4] B. Bašić, Palindromes in finite and infinite words, PhD thesis, 2012.

[5] E. M. Coven, G. Hedlund, Sequences with minimal block growth, *Mathematical Systems Theory* **7**, (1973), 138-153.

[6] X. Droubay, G. Pirillo, Palindromes and Sturmian words, *Theoret. Comput. Sci.* **223** (1999), 73-85.

[7] I. Fagnot, L. Vuillon, Generalized balances in Sturmian words, *Discrete Applied Mathematics* **121** (2002), 83-101.

[8] S. Ferenczi, C. Mauduit, Transcendence of numbers with a low complexity expansion, *Journal of Number Theory* **67** (1997), 146-161.

[9] A. Glen, J. Justin, S. Widmer, L. Q. Zamboni, Palindromic richness, *European Journal of Combinatorics* **30** (2009), 510-531

[10] G. A. Hedlund, M. Morse, Symbolic dynamics, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 815-866.

[11] G. A. Hedlund, M. Morse, Symbolic dinamics II: Sturmian trajectories, *Amer. J. Math.* **62** (1940), 1-42.

[12] J. Justin, L. Vuillon, Return words in Sturmian and episturmian words, *Theoret. Informatics Appl* **34** (2000), 343-356.

[13] J. Karhumäki, *Combinatorics of words*, draft.

[14] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

[15] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley, 1983.

[16] A. Luca, S. Varricchio, *Finiteness and Regularity in Semigroups and Formal Languages*, Springer Publishing Company, 2011.

[17] K. Mahler, An unsolved problem on the powers of 3/2, *J. Austral. Math. Soc.* **8** (1968), 313-321.

[18] K. Mahler, *Lectures on diophantine approximations. Part 1. g-adic numbers and Roth's theorem*, University of Notre Dame, 1961.

[19] K. Matomäki, K. Saari, A new geometric approach to Sturmian words, *Theoret. Comput. Sci.* **432** (2012), 77-84.

[20] J. Peltomäki, Introducing privileged words: Privileged complexity of Sturmian words, *Theoret. Comput. Sci.* **500** (2013), 57-67.

[21] S. Puzynina, L. Q. Zamboni, Abelian returns in Sturmian words, *Journal of Combinatorical Theory, Series A* **120** (2013), 390-408.

[22] L. Vuillon, A characterization of Sturmian words by return words, *European J. Combin.* **22** (2001), 263-275.

Biografija

Kristina Ago je rođena 24. februara 1991. godine u Subotici. Osnovnu školu Ivan Goran Kovačić je završila 2006. godine. Po završetku srednje škole Gimnazija sa domom učenika za talentovane učenike Boljai 2010. godine, upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika. U oktobru 2013. godine je završila osnovne studije i upisala master studije teorijske matematike. Master studije je završila u septembru 2015. godine. Pored toga je položila ispite psiholoških, pedagoških i metodičkih disciplina 30 bodova i 6 bodova prakse u nastavi.

Novi Sad, septembar 2015. Kristina Ago

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Kristina Ago
AU
Mentor: dr Bojan Bašić
MN
Naslov rada: O Šturmovim rečima i njihovim primenama u teoriji brojeva
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2015.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 3/59/22/0/7/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Kombinatorika
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Kombinatorika na rečima, Šturmove reči, transcendentnost, razlomljeni delovi
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Šturmove reči su beskonačne binarne reči koje se mogu definisati na više različitih, međusobno ekvivalentnih načina. Rad se sastoji od tri dela. U prvom delu su definisani pojmovi koje ćemo da koristimo tokom rada i predstavljeno je nekoliko ključnih teorema iz oblasti kombinatorike na rečima. Drugi deo rada je posvećen Šturmovim rečima. Prvo se daju njihove osnovne osobine, zatim su predstavljene razne njihove karakterizacije. U trećem delu rada pažnja je usmerena na primene Šturmovih reči u teoriji brojeva. Izložena su tri važna rezultata: kriterijum transcendentnosti preko cifarskog zapisa u nekoj bazi, kriterijum transcendentnosti preko verižnih razlomaka i ispitivanje ponašanja razlomljenih delova realnih brojeva određenog oblika.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 21. 4. 2015.
DP
Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Vojislav Petrović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Bojan Bašić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Boris Šobot, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master's thesis
CC
Author: Kristina Ago
AU
Mentor: Bojan Bašić, PhD
MN
Title: On Sturmian words and their applications in number theory
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2015.
PY
Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 3/59/22/0/7/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Combinatorics
SD
Subject / Key words: Combinatorics on words, Sturmian words, transcendence, fractional parts
SKW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: Sturmian words are infinite binary words. These words can be described in several equivalent ways. First we present the basic notions and theorems of combinatorics on words. In the second chapter we describe a few basic properties of Sturmian words. After that we state a few equivalent characterizations of Sturmian words. In the third chapter we focus on their applications in number theory. We present three results: two results about criterions for transcendence of real numbers and one result about the behavior of fractional parts of real numbers of a certain form.
AB
Accepted by Scientific Board on: April 21, 2015
ASB
Defended:
DE

Thesis defend board:

President: Vojislav Petrović, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: Bojan Bašić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Boris Šobot, PhD, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
DB