УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ

Катарина Лолић

Једна фамилија оптималних поступака четвртог реда за решавање нелинеарних једначина

мастер рад

Нови Сад, 2016.

Садржај

Предговор

У мастер раду посматрамо оптималне нумеричке поступке четвртог реда конвергенције за нумеричко решавање нелинеарне једначине са једном непознатом $f(x)=0$. Претпостављамо да у посматраном интервалу $[a,b]$ функција f има једноструко решење α, тј. да је $f'(\alpha)\neq 0$. Полазећи од Њутновог поступка, који је другог реда конвергенције, у многим радовима дате су модификације чији је ред конвергенције 4, [1], [2], [4], [10], [11], [12]. Детаљније ћемо приказати поступке из [1], [2], [11], [12]. Приказаћемо и Муракамијев поступак реда 3 из [14] и користећи се резултатима из [5], конструисаћемо фамилије поступака четвртог реда конвергенције Муракамијевог типа.

Мастер рад је подељен у четири дела. У првом делу рада дајемо ознаке дефиниције и теореме које ћемо користити у даљем раду. Други део рада садржи приказе и теореме које се односе на итеративне поступке четвртог реда конвергенције за решавање нелинеарних једначина датих у радовима [1], [2], [11], [12] и [14]. У трећем делу, као оригинални резултат посматрамо фамилију оптималних итеративних поступака четвртог реда конвергенције. За изабране поступке, под одређеним претпоставкама, доказујемо конвергенцију и одређујемо асимптотску константу грешке. У последњем делу рада приказаћемо нумеричке експерименте урађене у програмском пакету *Mathematica*. Примери су узети из наведених радова, а највише из [4], [8], [9], [10].

Захваљујем се свом ментору др Драгославу Херцегу на корисним сугестијама и саветима, а пре свега на разумевању на менторским пословима. Велика је част и задовољство сарађивати са њим!

Нови Сад, 29. август 2016.

Катарина Лолић

1 Неке ознаке, дефиниције и теореме

1.1 Ознаке

$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
$\{x_k\}$	низ бројева $x_0, x_1, \ldots$
$D = [a, b]$	интервал којем припада низ $\{x_k\}$
$C^k[a, b]$	скуп κ-пута непрекидно диференцијабилних функција на интервалу $[a, b]$
$Lip_\gamma[a, b]$	скуп функција које на интервалу $[a, b]$ задовољавају Липшицов услов са константом γ
α	решење једначине $f(x) = 0$
$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$	константа
$c_r = \frac{f^{(r)}(\theta)}{r!}$	константа
$c_0 = f^{(0)}(\alpha)$	константа
$e_n = x_n - \alpha$	грешка у n-тој итерацији
$e_{n+1} = Ce_n{}^p + O(e_n{}^{p+1})$	једначина грешке
$C = \frac{e_{n+1}}{e_n{}^p}$	асимптотска константа грешке

p	ред конвергенције итеративног поступка
m	број функционалних евалуација датог поступка
$p^{1\backslash m}$	индекс ефикасности поступка
f_n	$f\left(x_n\right)$
f_n'	$f'\left(x_n\right)$
F_i	$\dfrac{F^{(i)}(\alpha)}{F'(\alpha)}$
$u(x)$	$\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

1.2 Дефиниције

Дефиниција 1. *За две једначине кажемо да су еквивалентне на интервалу $[a,b]$ ако су решења која припадају интервалу $[a,b]$ једне једначине решења друге једначине и обрнуто.*

Дефиниција 2. *Сваки реалан број α, за који важи да је $f(\alpha)=0$, називамо решење једначине $f(x)=0$.*

Дефиниција 3. *Број α је решење вишеструкости к једначине $f(x)=0$ ако је*

$$f(x)=(x-\alpha)^k g(x)$$

при чему је функција g ограничена у α и важи $g(\alpha)\neq 0$. За к се увек узима позитиван цео број. Ако је $k=1$, онда кажемо да је корен прост или једнострук, а ако је $k>1$ онда је вишеструк.

Дефиниција 4. *Нека је $\varphi: D\rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Број $\alpha\in D$ за који важи $\alpha=\varphi(\alpha)$ је решење једначине $x=\varphi(x)$ и назива се непокретна тачка функције φ.*

Нека је x_0 произвољан број из интервала $[a,b]$. Формирајмо низ бројева $x_0, x_1, \ldots$ према

$$x_{k+1}=\varphi(x_k), \qquad k=0,1,\ldots$$

Овај низ је могуће формирати само ако $\varphi(x_k)\in[a,b]$, $k=0,1,\ldots$ због дефинисаности функције φ на интервалу $[a,b]$. Очигледно, ако функција φ пресликава интервал $[a,b]$ у самог себе, важи $\varphi(x_k)\in[a,b]$, $k=0,1,\ldots$. Ако је низ $x_0, x_1, \ldots$ добро дефинисан и има граничну вредност, тј. за неко $\alpha\in[a,b]$ важи $lim_{k\to\infty} x_k=\alpha$, онда је α решење једначине $x=\varphi(x)$ ако је функција φ непрекидна на интервалу $[a,b]$. Наиме, из $\varphi(x) \in [a,b]$, за свако $x \in [a,b]$ следи $\alpha \in [a,b]$, а због непрекидности функције φ важи

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Дакле, ако низ $x_0, x_1, \ldots$ конвергира, његова гранична вредност α је решење једначине $x = \varphi(x)$, а чланови тог низа апроксимирају то решење.

Овај поступак, у коме рачунамо вредности $x_0, x_1, \ldots$ према

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0,1 \ldots$$

се назива итеративни поступак (поступак сукцесивних апроксимација), где је $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ итеративно правило, функција φ је функција корака, а низ $x_0, x_1, \ldots$ је итеративни низ. Први члан тог низа је почетна апроксимација. Када итеративни низ конвергира кажемо да итеративни поступак конвергира.

Дефиниција 5. *Функција φ задовољава Липшицов услов на интервалу D ако постоји константа γ таква да за свако $x, y \in D$ важи*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Константа γ се назива Липшицова константа. Ако је $\gamma < 1$ онда се ова константа назива константа контракције, а функција φ се назива контракција или контрактивно пресликавање.

Дефиниција 6. *Нека је $lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$. Ако постоји константа $C \in [0,1)$ и цео број $K \geq 0$ такав да за $k \geq K$ важи*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|$$

каже се да је низ $x_0, x_1, \ldots$ линеарно конвергентан.

Ако постоје константе $p > 1, C \geq 0$ и цео број $K \geq 0$ такав да за $k \geq K$ важи

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p$$

каже се да низ $x_0, x_1, \ldots$ конвергира ка α са редом бар p. За $p = 2$ конвергенција је квадратна, а за $p = 3$ кубна.

Дефиниција 7. *Ред конвергенције итеративног поступка једнак је реду конвергенције итеративног низа добијеног посматраним итеративним поступком.*

Да би се одредио ред конвергенције често се посматра константа

$$\eta = lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}.$$

Уколико оваква константа постоји поступак је бар реда p. Ако је $\eta \neq 0$, поступак је реда p и η се назива асимптотска константа поступка.

Дефиниција 8. *Једначина грешке поступка је*

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

где је $e_n = x_n - \alpha$ *грешка у n-тој итерацији, C асимптотска константа грешке и p ред конвергенције.*

Дефиниција 9. *Индекс ефикасности итеративног поступка је* $p^{1\backslash m}$*, где је p ред конвергенције итеративног поступка, а m број израчунавања вредности функција по итерацији.*

Дефиниција 10. *[13] Оптимални ред конвергенције поступака без меморије који користе* n *израчунавања функције по итерацији је* 2^{n-1}.

1.3 Теореме

За решавање једначина облика $f(x) = 0$ посматраћемо еквивалентне једначине облика $x = \varphi(x)$ и одговарајуће итеративне поступке облика

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0,1,\dots$$

Наводимо неколико теорема из [7] које се односе на једначину $x = \varphi(x)$ и теорему о реду конвергенције једнокорачног поступка.

Теорема 1. *Нека је* $g(x) \neq 0$ *за* $x \in [a,b]$. *Тада су једначине* $f(x) = 0$ *и* $x = \varphi(x)$ *са* $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ *еквивалентне на интервалу* $[a,b]$.

Теорема 2. *Нека је* φ *непрекидна функција на интервалу* $[a,b]$ *и* $\varphi(a), \varphi(b) \in [a,b]$. *Тада постоји* $\alpha \in [a,b]$ *такво да је* $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Теорема 3. *Функција која задовољава Липшицов услов на интервалу D је непрекидна на том интервалу.*

Обрнуто не мора да важи, тј. непрекидна функција на интервалу D не мора да задовољава Липшицов услов на истом интервалу.

Теорема 4. *Ако функција* φ *има у интервалу* $[a,b]$ *први извод за који на том интервалу важи* $|\varphi'(x)| \leq \gamma$, *онда* $\varphi \in Lip_\gamma[a,b]$.

Теорема 5. *Нека је* φ *контракција на интервалу* $[a,b]$ *и нека пресликава тај интервал у самог себе. Тада итеративни низ* $\{x_k\}$ *одређен са*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1,\dots$$

са произвољним $x_0 \in [a,b]$, *конвергира ка јединственом решењу* $\alpha \in [a,b]$ *једначине* $x = \varphi(x)$ *и важи*

$$|x_k - \alpha| \le \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|,\ k = 1,2,....$$

где је γ *Липшицова константа контракције функције* φ.

Вредности $\frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}|$ и $\frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|$ дефинисане у претходној теореми називају се апостериорна и априорна оцена грешке.

Теорема 6. *[17] Ред конвергенције једнокорачног поступка*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,...$$

је позитиван цео број. Овај поступак има ред конвергенције n ако и само ако је

$$\alpha = \varphi(\alpha),\ \varphi^{(j)}(\alpha) = 0,\ \ j = 1,2,...,p-1,\ \varphi^{(p)}(\alpha) \ne 0.$$

Ред конвергенције и асимптотске константе грешке свих поступака које посматрамо у овом раду одређујемо користећи претходну теорему. У зависности од p за асимптотске константе грешке узимамо

$$\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

а добијени резултат изражавамо преко константи

$$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)},\ \ j = 2,3,\ldots.$$

Како су функције корака посматраних итеративних поступака сложене и израчунавање њихових извода није једноставно, тај посао смо препустили програмском пакету *Mathematica*.

2 Итеративни поступци четвртог реда

2.1 Торес-Аквино поступак

У раду [2] посматрана су три поступка оптималног реда четири. Овде ћемо приказати само један од њих. Преостала два су слична по конструкцији и карактеристикама.

Посматрамо једначину $f(x)=0$ под претпоставкама да је функција f на отвореном интервалу (a,b) довољан број непрекидно диференцијабилна, да важи $f'(x)\neq 0$ за $x\in(a,b)$ и да посматрана једначина има решење $\alpha\in(a,b)$. Ове претпоставке обезбеђују да је α једноструко решење и да на интервалу (a,b) постоји инверзна функција $g=f^{-1}$. За $x_n\in(a,b)$ дефинишимо

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$K=f(x_n) \quad \text{и} \quad L=f(z_n).$$

Нека је

$$p(y)=A(y-K)(y-L)+B(y-K)+C$$

при чему су коефицијенти A, B и C одређени тако да важи

$$p(K)=g(K)=x_n \tag{1}$$

$$p(L)=g(L)=z_n \tag{2}$$

$$p'(K)=g'(K)=\frac{1}{f'(x_n)} \tag{3}$$

Решавањем система $(1)-(3)$ добијамо

$$A=-\frac{-z_n\left(f'x_n\right)+x_n\left(f'x_n\right)-K+L}{(K-L)^2\left(f'x_n\right)},\qquad B=-\frac{z_n-x_n}{K-L},\qquad C=x_n \tag{4}$$

односно

$$\begin{aligned}p(y)=x_n&-\frac{\left(z_n-x_n\right)\left(y-f\left(x_n\right)\right)}{f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)}\\&-\frac{\left(y-f\left(x_n\right)\right)\left(y-f\left(z_n\right)\right)\left(-z_n\left(f'\left(x_n\right)\right)+x_n\left(f'\left(x_n\right)\right)-f\left(x_n\right)+f\left(z_n\right)\right)}{\left(f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)\right)^2\left(f'\left(x_n\right)\right)}\end{aligned}$$

Нека је $x_{n+1}=p(0)$, тада је

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n+\frac{f\left(x_n\right)\left(z_n-x_n\right)}{f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)}-\frac{f\left(x_n\right)f\left(z_n\right)\left(-z_nf'\left(x_n\right)+x_nf'\left(x_n\right)-f\left(x_n\right)+f\left(z_n\right)\right)}{\left(f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)\right)^2f'\left(x_n\right)}\\&=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}\left(\frac{f\left(x_n\right)}{f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)}+\frac{f\left(z_n\right)^2}{\left(f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)\right)^2}\right)\end{aligned}$$

У раду [2] релација (18) којом се дефинише x_{n+1} није иста као наша последња релација. Тамо је направљена штампарска грешка.

Теорема 7. *[2] Нека је функција f на отвореном интервалу (a,b) довољан број непрекидно диференцијабилна, нека важи $f'(x)\neq 0$ за $x\in(a,b)$ и нека једначина $f(x)=0$ има решење $\alpha\in(a,b)$. Тада је поступак*

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}\left(\frac{f\left(x_n\right)}{f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)}+\frac{f\left(z_n\right)^2}{\left(f\left(x_n\right)-f\left(z_n\right)\right)^2}\right)$$

реда конвергенције четири ако је $x_0\in(a,b)$ довољно близу решењу α.

2.2 Чун-Ли-Нета-Џинић поступак

Познато је, [1], да је итеративни поступак

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}H\left(t\left(x_n\right)\right) \tag{5}$$

реда три, ако функција H испуњава услове

$$H(0)=1, \quad H'(0)=\frac{1}{2}, \quad |H''(0)|<\infty . \tag{6}$$

и ако је

$$t(x_n)=\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{7}$$

У раду [1] је модификована функција t тако да се изостави други извод функције f и да се добије четврти ред конвергенције новог поступка.

Нека је

$$y_n=(1-\theta)x_n+\theta\phi(x_n),$$

где је θ реални параметар а ϕ је функција корака поступка који је најмање реда конвергенције 2.
Посматрајмо апроксимацију

$$f''(x_n)\approx\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{y_n-x_n}=\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{\theta(x_n-\phi(x_n))}.$$

Сада уместо (7) можемо узети апроксимацију

$$t(x_n)=\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\approx\frac{f(x_n)}{f'(x_n)^2}\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{\theta(x_n-\phi(x_n))}. \tag{8}$$

Сада формирамо нови итеративни поступак

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}H(\tilde{t}(x_n)), \tag{9}$$

где је

$$\tilde{t}(x_n)=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)^2}\frac{f'(y_n)-f'(x_n)}{\theta(x_n-\phi(x_n))}. \tag{10}$$

Теорема 8. *[1] Нека је функција f на отвореном интервалу (a,b) довољан број непрекидно диференцијабилна, нека важи $f'(x)\neq 0$ за $x\in(a,b)$ и нека једначина $f(x)=0$ има решење $\alpha\in(a,b)$. Ако за функцију H важи (6), ако је θ реалан параметар и ако је ϕ је функција корака поступка који је најмање реда конвергенције 2, тада је поступак дефинисан са (9) и (10) реда конвергенције три.*

Ако је још $H''(0)=1$ *и* $\theta=\dfrac{2}{3}$, *онда је поступак дефинисан са (9) и (10) реда конвергенције четири ако је* $x_0\in(a,b)$ *довољно близу решењу* α.

У [1] је посебно посматран случај

$$\theta=\frac{2}{3},\qquad \phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

тј. случај када је ϕ функција корака Њутновог поступка. Оваквим избором добијамо

$$\tilde{t}(x_n)=\frac{3}{2}\frac{f'(x_n)-f'(y_n)}{f'(x_n)} \tag{11}$$

и

$$y_n=x_n-\frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{12}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}H\left(\tilde{t}(x_n)\right). \tag{13}$$

За различите изборе функције H добијају се специјални поступци реда конвергенције 4.

$H(t)$	Референца
$1+\dfrac{t}{2(1-t)}$	[11]
$1+\dfrac{9}{6-4t}-\dfrac{9}{6-2t}$	
$\dfrac{3t\left(\gamma t+\frac{3}{2}\right)}{4\left(\alpha t+\frac{3}{2}\right)\left(\beta t+\frac{3}{2}\right)}$, $\gamma=\alpha+\beta-\frac{3}{2}$	[10]
$1+\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{2}$	[1]
$1+\dfrac{2}{t-2}+\dfrac{4}{(t-2)^2}$	
$-1-\dfrac{t}{2}-\dfrac{4}{t-2}$	
$\dfrac{4}{4-2t-t^2}$	

2.3 Кингов поступак

У [12] је посматран итеративни поступак

$$w_n = x_n - f_n / f'_n$$
$$x_{n+1} = w_n - f\left(w_n\right) / f'\left(w_n\right)$$

код којега је први извод $f'\left(w_n\right)$ замењен са

$$\bar{f}'\left(w_n\right) = f'_n \frac{f_n + \gamma f\left(w_n\right)}{f_n + \beta f\left(w_n\right)}$$

при чему су β и γ параметри. Да би се одредила једначина грешке, прво посматрамо Тејлорове развоје:

$$f_n = f'(\alpha)\left(\varepsilon_n + \frac{F_2}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{F_3}{6}\varepsilon_n{}^3 + \frac{F_4}{24}\varepsilon_n{}^4 + \cdots\right),$$

$$f'_n = f'(\alpha)\left(1 + F_2\varepsilon_n + \frac{F_3}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{F_4}{6}\varepsilon_n{}^3 + \cdots\right),$$

$$f(w_n) = f'(\alpha)\left(\varepsilon(w_n) + \frac{F_2}{2}\varepsilon^2(w_n) + \frac{F_3}{6}\varepsilon^3(w_n) + \frac{F_4}{24}\varepsilon^4(w_n) + \cdots\right) =$$
$$= f'(\alpha)\left(\frac{F_2}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{1}{6}(2F_3 - 3F_2{}^2)\varepsilon_n{}^3 + \frac{1}{24}(-14F_2F_3 + 15F_2{}^3 + 3F_4)\varepsilon_n{}^4 + \cdots\right).$$

Сада је

$$\varepsilon(w_n) = \varepsilon_n - \frac{f_n}{f'_n} =$$
$$= \frac{F_2}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{1}{6}\left(2F_3 - 3F_2{}^2\right)\varepsilon_n{}^3 + \frac{1}{24}\left(-14F_2F_3 + 12F_2{}^3 + 3F_4\right)\varepsilon_n{}^4 + \cdots.$$

Очигледно, да би се постигла конвергенција четвртог реда, неопходно је узети $\gamma = \beta - 2$, у овом случају једначина грешке постаје

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + \left[3 + 6\beta\right]F_2{}^3\right)\varepsilon_n{}^4 + \mathrm{O}\left(\varepsilon_n{}^5\right)$$

а одговарајућа фамилија поступака четвртог реда са једним параметром је

$$w_n = x_n - f_n/f'_n$$
$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n}\frac{f_n + \beta f(w_n)}{f_n + (\beta - 2)f(w_n)}.$$

У следећој варијанти полазног поступка узимамо $\bar{f}'(w_n)$ као коефицијент правца сечице одређене са (x_n, f_n) и $(w_n, f(w_n))$ f_n до $f(w_n)$

$$\bar{f}'(w_n) = \frac{f_n - f(w_n)}{x_n - w_n} = f'_n \frac{f_n - f(w_n)}{f_n}.$$

Резултирајући поступак је

$$\begin{aligned} w_n &= x_n - f_n/f'_n \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n}\frac{f_n + f(w_n)}{f_n - f(w_n)}. \end{aligned}$$

са водећим чланом грешке

$$\frac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + 9{F_2}^3\right){\varepsilon_n}^4,$$

што значи да је посматрани поступак четвртог реда конвергенције.

Ако се $\bar{f}'(w_n)$ одреди тако да важи

$$\frac{\bar{f}'(w_n) + f'_n}{2} = \frac{f_n - f(w_n)}{x_n - w_n}$$

добија се

$$\bar{f}'(w_n) = f'_n \frac{f_n - 2f(w_n)}{f_n}$$

а полазни поступак постаје нови поступак четвртог реда

$$\begin{aligned} w_n &= x_n - f_n/f'_n \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n}\frac{f_n}{f_n - 2f(w_n)}. \end{aligned}$$

Ово је познати поступак, Трауб [18], а његов водећи члан грешке је

$$\tfrac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + 3{F_2}^3\right){\varepsilon_n}^4 .$$

Нове поступке четвртог реда можемо добити и на следећи начин. Претпоставимо да је

$$z_n = x_n - \delta(f_n/f'_n)$$

при чему је δ неки параметар. Посматрајмо поступак

$$w_n = x_n - a_1 \frac{f_n}{f'_n},$$
$$x_{n+1} = w_n - a_2 \frac{f(z_n)}{f'_n} - a_3 \frac{[f(z_n)/f'_n]^2}{f_n/f'_n}$$

и одредимо параметре δ, a_1, a_2 и a_3 тако да поступак буде реда четири. Ако се грешка ε_{n+1} развија као степени ред по ε_n, онда изједначавајући коефицијенте уз трећи степен од ε_n са нулом добијамо следећи систем једначина:

$$a_1 + (1-\alpha)a_2 + (1-\alpha)^2 a_3 = 1,$$

$$a_1 - (\alpha^2 + \alpha - 1)a_2 + (2\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1)a_3 = 0,$$

$$2a_1 - (4\alpha^2 + 2\alpha - 2)a_2 + (\alpha^4 + 8\alpha^3 - 6\alpha^2 - 4\alpha + 2)a_3 = 0,$$

$$2a_1 + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 2)a_2 - (2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 4\alpha^2 + 4\alpha - 2)a_3 = 0.$$

У [12] је доказано да са $\delta = 1$ и

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = 2.$$

добијамо поступак четвртог реда,

$$w_n = x_n - f_n/f'_n$$
$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n}\frac{f_n + 2f(w_n)}{f_n}.$$

Одговарајући водећи члан грешке је

$$\frac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + 15{F_2}^3\right){\varepsilon_n}^4$$

са

$$\bar{f}'(w_n) = f'_n \frac{f_n}{f_n + 2f(w_n)}.$$

Индекс ефикасности Кинговог поступка је $4^{1/3} = 1.5874\ldots$.

2.4 Јаратов поступак

У [11] је посматран итеративни поступак

$$x_{n+1} = x_n - \phi_1(x_n) - \phi_2(x_n) \tag{14}$$

где је

$$\phi_1(x) = a_1 w_1(x_n) + a_2 w_2(x_n)$$
$$\phi_2(x) = \frac{f(x)}{b_1 f'(x) + b_2 f'\left[x + \delta w_1(x)\right]}$$

по угледу на поступак Трауба [13]

$$x_{n+1} = x_n - a_1 w_1(x_n) - a_2 w_2(x_n)$$

$$w_1(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$
$$w_2(x) = \frac{f(x)}{f'\left[x + \delta w_1(x)\right]}$$

Претпостављамо да $f(x)$ има просту нулу α. Користећи Тејлорове развоје за $f(x)$ и $f'(x)$ око α добијамо

$$w_1(x_n) = \epsilon_n - \frac{c_2}{c_1}\epsilon_n^2 + 2\left(\frac{{c_2}^2}{{c_1}^2} - \frac{c_3}{c_1}\right)\epsilon_n^3 + O(\epsilon_n^4)$$

и

$$w_2(x_n) = \epsilon_n - \frac{c_2}{c_1}(1+2\delta)\epsilon_n^2 + \left[2\frac{{c_2}^2}{{c_1}^2}(2\delta^2 + 4\delta + 1) - \frac{c_3}{c_1}(3\delta^2 + 6\delta + 2)\right]\epsilon_n^3 + O(\epsilon_n^4).$$

На основу претходне две релације следи

$$\phi_1(x_n) = (a_1 + a_2)\epsilon_n - \frac{c_2}{c_1}[a_1 + a_2(1+2\delta)]{\epsilon_n}^2 +$$
$$+\left[2\frac{{c_2}^2}{{c_1}^2}(a_1 + (2\delta^2 + 4\delta + 1)a_2) - \frac{c_3}{c_1}(2a_1 + (3\delta^2 + 6\delta + 2)a_2)\right]{\epsilon_n}^3 + O({\epsilon_n}^4)$$

и

$$\phi_2(x_n) = \frac{c_1}{p_1}\epsilon_n + \left(\frac{c_2}{p_1} - c_1\frac{p_2}{{p_1}^2}\right){\epsilon_n}^2 + \left[\frac{c_3}{p_1} + \left(\frac{{p_2}^2}{{p_1}^3} - \frac{p_3}{{p_1}^2}\right)c_1 - \frac{p_2}{{p_1}^2}c_2\right]{\epsilon_n}^3 + O({\epsilon_n}^4)$$

где је

$$p_1 = c_1(b_1 + b_2), \quad p_2 = 2c_2[b_1 + (1+\delta)b_2], \quad p_3 = 3c_3 b_1 + b_2\left[3c_3(1+\delta)^2 - 2\frac{{c_2}^2}{c_1}\delta\right].$$

Имајући у виду претходне релације, видимо да би посматрани поступак био четвртог реда мора бити задовољен следећи систем једначина

$$1 - a_1 - a_2 - \frac{1}{b_1 + b_2} = 0$$
$$a_2 + \frac{b_2}{(b_1 + b_2)^2} = -\frac{1}{2\delta}$$
$$a_2 + \frac{{b_2}^2}{(b_1 + b_2)^3} = \frac{1}{2\delta^2}$$
$$a_2 + \frac{b_2}{(b_1 + b_2)^2} = \frac{1}{3\delta^2}$$

Ово је систем од четири једначине са пет слободних параметара a_1, a_2, b_1, b_2 и δ. Из друге и последње једначине добијамо да је $\delta = -\frac{2}{3}$, тако да се систем редукује на

$$a_1 + a_2 + \frac{1}{b_1 + b_2} = 1$$
$$a_2 + \frac{b_2}{(b_1 + b_2)^2} = \frac{3}{4}$$
$$a_2 + \frac{{b_2}^2}{(b_1 + b_2)^3} = \frac{9}{8}$$

У решавању овог система згодно је елиминисати b_1 сменом $b_2/(b_1 + b_2) = \theta$, а за $\theta \neq 0,\ \theta \neq 1$ опште решење је

$$a_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2\theta}\right), \qquad a_2 = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2(\theta - 1)}\right), \qquad b_2 = \frac{8\theta^2}{3}(\theta - 1).$$

Посебан случај $\theta = 1$ имплицира $b_1 = 0$, док $\theta = 0$ даје $b_2 = 0$. У општијем смислу, са $\theta \neq 0,\ \theta \neq 1$ можемо да конструишемо класу поступака четвртог реда. Бирамо вредности за θ, тако да остали коефицијенти буду једноставни. На пример, $\theta = -\frac{3}{2}$ даје $a_1 = 0$, а вредности осталих параметара су онда $a_2 = \frac{9}{10},\ b_1 = 25,\ b_2 = -15$. За $\theta = \frac{3}{2}$ добијамо $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 0,\ b_1 = -1$ и $b_2 = 3$, а одговарајући итеративни поступак је

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}w_1(x_n) + \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - 3f'\left[x_n - \frac{2}{3}w_1(x_n)\right]}$$

Ако узмемо $b_1 = b_2$, тј. $\theta = \frac{1}{2}$ добијамо $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2},\ b_1 = b_2 = -\frac{1}{3}$ одговарајући итеративни поступак

$$x_{n+1} = x_n - w_1(x_n) - \frac{3}{2}w_2(x_n) + \frac{3f(x_n)}{f'(x_n) + f'\left[x_n - \frac{2}{3}w_1(x_n)\right]}.$$

Коефицијент уз ${\epsilon_n}^4$ у једначини грешке може се приказати у облику

$$\frac{1}{9}(21-8\theta)\frac{{c_2}^3}{{c_1}^3}-\frac{c_2c_3}{{c_1}^2}+\frac{1}{9}\frac{c_4}{c_1},$$

Видимо да вредност $\theta=\frac{21}{8}$ поједностављује ову константу отклањањем првог члана. Одговарајуће вредности параметара су

$$a_1=\frac{11}{28},\qquad a_2=\frac{27}{52},\qquad b_1=-\frac{1183}{64},\qquad b_2=\frac{1911}{64}.$$

Индекс ефикасности Јаратовог поступка је $4^{1/3}=1.5874\ldots$.

Jaratov поступак се може посматрати и као специјалан случај Чун-Ли-Нета-Џинић поступка, као што је приказано у [1].

2.5 Муракамијеv поступак

У раду [14] је посматран следећи итеративни поступак

$$x_{n+1}=\phi\left(x_n\right),\quad n=0,1,\ldots, \tag{15}$$

где је

$$\phi(x)=x-hR(X),$$

$$X\equiv X(x)=h\frac{f''(x+\delta h)}{f'(x)},$$

$$h\equiv h(x)=\frac{f(x)}{f'(x)},$$

δ је параметар и $R(t)$ је функција.

Нека је α једноструко решење једначине $f(x)=0$ и претпоставимо да су функције $f(x)$ и $R(t)$ довољан број пута непрекидно диференцијабилне. Развијањем X и $R(X)$, постижемо

$$X=2A_2h+6\delta A_3h^2+12\delta^2A_4h^3+O(h^4)$$

и

$$R(X)=R(0)+R'(0)X+\tfrac{1}{2!}R''(0)X^2+\tfrac{1}{3!}R^{(3)}(0)X^3+O(h^4),$$

где је

$$A_j\equiv A_j(x)=\frac{f^{(j)}(x)}{j!\,f'(x)},\quad j=2,3,4.$$

Из претходног следи

$$
\begin{aligned}
-hR(X) = {}& -R(0)h - 2R'(0)A_2h^2 - 2R''(0){A_2}^2h^3 - 6\delta R'(0)A_3h^3 - \frac{4}{3}R^{(3)}(0){A_2}^3h^4 \\
& - 12\delta R''(0)A_2A_3h^4 - 12\delta^2R'(0)A_4h^4 + O(h^5).
\end{aligned}
$$

Пошто је, према [15]

$$
E_5(x) = x - h - A_2h^2 - 2{A_2}^2h^3 + A_3h^3 - 5{A_2}^3h^4 + 5A_2A_3h^4 - A_4h^4,
$$

добијамо

$$
\begin{aligned}
\phi(x) - E_5(x) = {}& [1 - R(0)]h + [1 - 2R'(0)]A_2h^2 + [2 - 2R''(0)]{A_2}^2h^3 \\
& + [-1 - 6\delta R'(0)]A_3h^3 + \left[5 - \frac{4}{3}R^{(3)}(0)\right]{A_2}^3h^4 + [-5 - 12\delta R''(0)] \\
& \times A_2A_3h^4 + [1 - 12\delta^2R'(0)]A_4h^4 + O(h^5).
\end{aligned}
$$

Да би итеративни поступак (15) био четвртог реда, довољно је да важи:

$$
1 - R(0) = 0,
$$

$$
1 - 2R'(0) = 0,
$$

$$
2 - 2R''(0) = 0,
$$

$$
-1 - 6\delta R'(0) = 0.
$$

Решавајући тај систем добијамо: $R(0) = 1,\ \ R'(0) = \frac{1}{2},\ \ R''(0) = 1,\ \ \delta = -\frac{1}{3}$.

Користећи решења датог система једначина, добијамо да је асимптотска константа грешке поступка.

$$
C = \lim_{x \to \alpha} \frac{\phi(x) - E_5(x)}{h^4} = \left[5 - \frac{4}{3}R^{(3)}(0)\right]\tilde{A}_2^3 - \tilde{A}_2\tilde{A}_3 + \frac{1}{3}\tilde{A}_4,
$$

$$
\tilde{A}_j = A_j(\alpha), \quad j = 2, 3, 4.
$$

Сада ћемо навести неке облике функције $R(X)$ и одговарајуће асимптотске константе грешке:

- $R(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1, \quad C = 5\tilde{A}_2^3 - \tilde{A}_2\tilde{A}_3 + \frac{1}{3}\tilde{A}_4$

- $R(X) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\theta}\right)X + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{1}{2\theta^2(\theta X + 1)}, \quad C = (4\theta + 5)\tilde{A}_2^3 - \tilde{A}_2\tilde{A}_3 + \frac{1}{3}\tilde{A}_4,$
  θ је параметар различит од нуле.

Даље, ако посматрамо итеративни поступак (15) и ако претпоставимо да је $\delta = 0$, добијамо следећи итеративни поступак конвергенције трећег реда:

$$
x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2,
$$

где је

$$\phi(x) = x - hR(X) \text{ и } X(x\ ) = h\frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

Овај поступак је трећег реда конвергенције за све просте нуле једначине $f(x) = 0$ ако и само ако је $R(0) = 1$ и $R^{'}(0) = \frac{1}{2}$. Шта више, по Траубу су главна секвенца и асимптотска константа грешке задате као:

$$E_4(x) = x - h - A_2h^2 - 2{A_2}^2h^3 + A_3h^3,$$

$$C = \lim_{x\to\alpha}\frac{\phi(x) - E_4(x)}{h^3} = \{2 - 2\,R''(0)\}\tilde{A}_2^2 - \tilde{A}_3.$$

Наводимо два примера у вези функције $R(X)$ и одговарајуће константе грешке:

Пример 1. $R(X) = \frac{\left(\theta+\frac{1}{2}\right)X+1}{\beta X^2+\theta X+1}$, $C = (2 + 2\theta + 4\beta)\tilde{A}_2^2 - \tilde{A}_3, \beta, \theta$ *су параметри.*

Ако је $\beta = \theta = 0$, тада $\phi(x) = \Phi_{2,0}(x)$, $C = 2\tilde{A}_2^2 - \tilde{A}_3$.

Ако је $\beta = 0$, $\theta = -\frac{1}{2}$, тада $\phi(x) = \Phi_{1,1}(x)$, $C = \tilde{A}_2^2 - \tilde{A}_3$.

Пример 2. $R(X) = \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b-\sqrt{b\left(a+\sqrt{b}\right)X}}}$, $C = \left[\frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{b}}\right]\tilde{A}_2^2 - \tilde{A}_3, a, b$ *су параметри.*

Ако је $b = 1$, *тада* $\phi(x) = x - \frac{a+1}{a+\sqrt{1-(a+1)X}}h$.

Ако је $a = 0$, *тада* $\phi(x) = \Phi(x)$.

Два специјална случаја су

$\Phi(x) = x - \frac{h}{\sqrt{1-2A_2h}}$ итеративна функција Островског

$\Phi_{1,1}(x) = x - \frac{h}{1-A_2h}$ Халејева итеративна функција

где је

$$A_2 = \frac{f''(x)}{2f'(x)}.$$

3 Фамилија итеративних поступака четвртог реда

У овом делу посматрамо четири фамилије поступака реда четири. Ове фамилије су конструисане на исти начин, али са различитим помоћним функцијама. Због тога су одговарајуће теореме о конвергенцији практично исте, њихови докази исти сем у детаљима где се појављују помоћне функције. Доказаћемо само теорему која се односи на прву фамилију. Разлике које имплицирају помоћне функције имају за последицу разлике у изразима за асимптотске константе грешке.

Идеја за формирање фамилија је преузета из [5], а доказ је изведен на основу рада [4].

У раду [5] приказана је фамилија поступака трећег реда конвергенције за решавање нелинеарних једначина. Показано је да овој фамилији припадају неки већ познати поступци као што су Халејев и супер Халејев поступак. Прво је посматран Њутнов поступак за израчунавање апроксимације за α

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0,1,\ldots$$

за неку одговарајућу почетну вредност x_0. Њутнов поступак квадратно конвергира у некој околини од α ако је $f'(\alpha) \neq 0$.

Под претпоставкама које су сличне оним које постављамо за Њутнов поступак, у раду [5] дат је доказ конвергенције трећег реда за следећу фамилију поступака.

Нека је

$$x_{n+1} = F_k(x_n), \quad n = 0,1,\ldots,$$

где су функције F_k облика

$$F_k(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi_k(t(x)), \ k = 1,2,\ldots$$

са

$$t(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

и функцијама φ_k дефинисаним са

$$\varphi_0(s)=1,\quad \varphi_k(s)=\frac{2}{2-s\cdot\varphi_{k-1}(s)},\quad k=1,2,\ldots$$

Њутнов поступак не припада овој фамилији поступака трећег реда, али се може посматрати као гранични случај када $s\to 0$.

Сада посматрамо итеративни поступак

$$x_{n+1}=F_k(x_n) \tag{16}$$

$$F_k(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\varphi_k(\sigma(x)) \tag{17}$$

$$\sigma(x)=\frac{f(x)f''\left(x-\frac{1}{3}\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)^2} \tag{18}$$

са функцијама φ_k дефинисаним са

$$\varphi_k(s)=\frac{2}{2-s\cdot\varphi_{k-1}(s)},\quad k=1,2,\ldots \tag{19}$$

Функција σ је дефинисана према Муракамију [14]. У зависности од $\varphi_0(s)$ имаћемо четири фамилије.

3.1 Прва фамилија поступака четвртог реда

Прво посматрамо

$$\varphi_0(s)=\frac{1}{2}\left(s^2+s+2\right), \tag{20}$$

а одговарајућу фамилију поступака дефинисану са (16)-(18) означавамо као прву.

Функције φ_k се лако рачунају. Наводимо првих седам $\varphi_k(s)$, $k=0,1,\ldots,7$:

$$\frac{1}{2}\left(s^2+s+2\right),\quad -\frac{4}{s^3+s^2+2s-4},\quad \frac{s^3+s^2+2s-4}{s^3+s^2+4s-4},\quad -\frac{2\left(s^3+s^2+4s-4\right)}{s^4-s^3-12s+8}$$

$$\frac{s^4-s^3-12s+8}{2s^4+4s^2-16s+8},-\frac{4\left(s^4+2s^2-8s+4\right)}{s^5-5s^4-20s^2+40s-16},\ \frac{-16+40s-20s^2-5s^4+s^5}{-16+48s-36s^2+4s^3-5s^4+3s^5}$$

Теорема 9. *Претпоставимо да функција* $f:(a,b)\subset R\to R$ *има једноструку нулу* $\alpha\in(a,b)$ *и да је* f *довољно непрекидно диференцијабилна у околини нуле* α *.Тада поступак* (16)-(18) *за прву фамилију има четврти ред конвергенције. Одговарајућа асимптотска константа грешке је*

$$E_k=\begin{cases}5c_2^3-c_3c_2+\dfrac{c_4}{3} & k=0\\ -c_3c_2+\dfrac{c_4}{3}, & k>0\end{cases}$$

Доказ. Ради једноставности изоставићемо индекс k *код* φ и F. Једноставним рачунањима користећи *Mathematica* добијамо

$$\varphi(0)=1,\quad \varphi'(0)=\frac{1}{2}\quad \varphi''(0)=1, \tag{21}$$

$$\varphi'''(0)=\frac{1}{4}\begin{cases}0 & k=1\\ 15 & k>1\end{cases}, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}F(\alpha)=\alpha,\ F'(\alpha)=1-\phi(0),\ F''(\alpha)=2c_2\left(\phi(0)-2\phi'(0)\right),\\ F'''(\alpha)=-12\left(c_2^2-c_3\right)\phi(0)+24\left(2c_2^2-c_3\right)\phi'(0)-12c_2^2\phi''(0),\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}F^{(4)}(\alpha)&=24\left(4c_2^3-7c_2c_3+3c_4\right)\phi(0)\\ &-48\left(13c_2^3-14c_2c_3+\frac{8}{3}c_4\right)\phi'(0)+48c_2\left(7c_2^2-4c_3\right)\phi''(0)-32c_2^3\phi'''(0)\end{aligned} \tag{24}$$

Како је, [4]

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha)&=0,\\ \sigma'(\alpha)&=2c_2,\\ \sigma''(\alpha)&=4\left(-3c_2^2+2c_3\right),\\ \sigma'''(\alpha)&=8\left(12c_2^3-15c_2c_3+4c_4\right),\end{aligned} \tag{25}$$

и

$$\begin{aligned}&u(\alpha)=0,\quad u'(\alpha)=1,\quad u''(\alpha)=-2c_2,\quad u^{(3)}(\alpha)=12\left(c_2^2-c_3\right),\\ &u^{(4)}(\alpha)=24\left(-4c_2^3+7c_2c_3-3c_4\right).\end{aligned} \tag{26}$$

следеће важи у свим случајевима: $\varphi(0)=1$, (21), (22), (23) и (24). Из (21) и (23) следи

$$\frac{F''(\alpha)}{2}=0 \tag{27}$$

и

$$\frac{F'''(\alpha)}{6}=0\,. \tag{28}$$

Користећи (21), (22) и (24) добијамо за $k>1$

$$\frac{F^{(4)}(\alpha)}{24}=-c_2c_3+\frac{1}{3}c_4 \tag{29}$$

и, у зависности од $\varphi'''(0)$, из (22)

$$\frac{F^{(4)}(\alpha)}{24}=-c_2c_3+\frac{1}{3}c_4+5c_2^3\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k>1\end{cases} \tag{30}$$

Сада, из (27), (28) и (30) следи тврђење теореме.

3.2 Друга фамилија поступака четвртог реда

Нека је

$$\varphi_0(s)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{1}{2\beta^2(\beta s+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)s,$$

где је β реални параметар. Са овако дефинисаним $\varphi_0(s)$ добијамо (наводимо само првих пет $\varphi_k(s)$, $k=0,1,\ldots,4$):

$$\varphi_1(s)=\frac{2}{2-s\left(\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{1}{2\beta^2(\beta s+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)s\right)},$$

$$\varphi_2(s)=\frac{2}{2-\dfrac{2s}{2-s\left(\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{1}{2\beta^2(\beta s+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)s\right)}},$$

$$\varphi_3(s)=\cfrac{2}{2-\cfrac{2s}{2-\cfrac{2s}{2-s\left(\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{1}{2\beta^2(\beta s+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)s\right)}}},$$

$$\varphi_4(s)=\cfrac{2}{2-\cfrac{2s}{2-\cfrac{2s}{2-\cfrac{2s}{2-s\left(\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{1}{2\beta^2(\beta s+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)s\right)}}}}$$

Одговарајућу фамилију поступака дефинисану са (16)-(18) означавамо као другу.

Теорема 10. *Претпоставимо да функција* $f:(a,b)\subset R\to R$ *има једноструку нулу* $\alpha\in(a,b)$ *и да је* f *довољно непрекидно диференцијабилна у околини нуле* α*.Тада поступак* (16)-(18) *за другу фамилију има четврти ред конвергенције. Одговарајућа асимптотска константа грешке је*

$$E_k=\begin{cases}(4\beta+5)c_2^3-c_3c_2+\dfrac{c_4}{3} & k=0\\[2mm] -c_3c_2+\dfrac{c_4}{3}, & k>0\end{cases}$$

3.3 Трећа фамилија поступака четвртог реда

Нека је

$$\varphi_0(s)=\frac{1+s\left(\frac{1}{2}+\theta\right)}{1+s^2\beta+s\theta}, \qquad (31)$$

где су θ и β реални параметри. Функције φ_k се лако рачунају. Наводимо следећих пет $\varphi_k(s)$, $k=1,2,\ldots,5$:

$$\cfrac{2}{2-\cfrac{s\left(\left(\theta+\frac{1}{2}\right)s+1\right)}{\beta s^2+\theta s+1}},\quad \cfrac{2}{2-\cfrac{2s}{2-\cfrac{s\left(\left(\theta+\frac{1}{2}\right)s+1\right)}{\beta s^2+\theta s+1}}},\quad \cfrac{2}{2-\cfrac{2s}{2-\cfrac{2s}{2-\cfrac{s\left(\left(\theta+\frac{1}{2}\right)s+1\right)}{\beta s^2+\theta s+1}}}}$$

$$\frac{2}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{s\left(\left(\theta+\frac{1}{2}\right)s+1\right)}{\beta s^2+\theta s+1}}}}}, \quad \frac{2}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{s\left(\left(\theta+\frac{1}{2}\right)s+1\right)}{\beta s^2+\theta s+1}}}}}}$$

Теорема 11. *Претпоставимо да функција* $f:(a,b)\subset R\to R$ *има једноструку нулу* $\alpha\in(a,b)$ *и да је* f *довољно непрекидно диференцијабилна у околини нуле* α *.Тада поступак* (16)-(18) *за трећу фамилију има четврти ред конвергенције. Одговарајућа асимптотска константа грешке је*

$$E_k=\begin{cases}2c_2^3(2\beta+\theta+1)-c_3c_2+\dfrac{c_4}{3} & k=1\\[2mm] -c_3c_2+\dfrac{c_4}{3}, & k>1\end{cases}$$

За $k=0$ поступак је реда 3 ако је $2\beta+\theta+1\neq 0$ са асимптотском константом грешке

$$2c_2^2(2\beta+\theta+1).$$

Ако је $2\beta+\theta+1=0$ поступак је реда 4 са асимптотском константом грешке

$$c_2^3\left(-\left(8\beta(\theta+3)+4\theta^2+14\theta+9\right)\right)+c_3c_2(16\beta+8\theta+7)+\frac{c_4}{3}=(1-4\beta)c_2^3-c_3c_2+\frac{c_4}{3}$$

3.4 Четврта фамилија поступака четвртог реда

Нека је

$$\varphi_0(s)=\frac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{b-\sqrt{b}s\left(a+\sqrt{b}\right)+a}}.$$

где су a и b реални параметри. Функције φ_k се лако рачунају. Наводимо следеће четири $\varphi_k(s)$, $k=1,2,\ldots,4$:

$$\frac{2}{2-\frac{s\left(a+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b-\sqrt{b}s\left(a+\sqrt{b}\right)+a}}},\quad \frac{2}{2-\frac{2s}{2-\frac{s\left(a+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b-\sqrt{b}s\left(a+\sqrt{b}\right)+a}}}},$$

$$\frac{2}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{s\left(a+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b-\sqrt{b}s\left(a+\sqrt{b}\right)+a}}}}},\quad \frac{2}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{2s}{2-\frac{s\left(a+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b-\sqrt{b}s\left(a+\sqrt{b}\right)+a}}}}}}$$

Теорема 12. *Претпоставимо да функција* $f:(a,b)\subset R\to R$ *има једноструку нулу* $\alpha\in(a,b)$ *и да је* f *довољно непрекидно диференцијабилна у околини нуле* α*.Тада поступак* (16)-(18) *за четврту фамилију има четврти ред конвергенције. Одговарајућа асимптотска константа грешке је*

$$E_k=\begin{cases}\frac{1}{2}c_2^3\left(1-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)-c_3c_2+\frac{c_4}{3} & k=1\\ -c_3c_2+\frac{c_4}{3}, & k>1\end{cases}$$

За $k=0$ поступак је реда 3 ако је $a-\sqrt{b}\neq 0$ са асимптотском константом грешке

$$\frac{c_2^2\left(\sqrt{b}-a\right)}{2\sqrt{b}}$$

Ако је $a-\sqrt{b}=0$ поступак је реда 4 са асимптотском константом грешке

$$\frac{-c_2^3\left(a^2-3a\sqrt{b}+2b\right)}{2b}+c_3c_2\left(1-2\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\frac{c_4}{3}=-c_2c_3+\frac{c_4}{3}$$

4 Нумерички експерименти

Решавали смо једначину $f(x) = 0$ користећи следеће тест функције из [3],[4] и [5] са одговарајућим стартним вредностима x_0:

$f_1(x) = \frac{1}{2} - \sin x$, $\alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731$, $x_0 = 0.7$,

$f_2(x) = x^3 - 10$, $\alpha_2^* \approx 2.1544346900318837218$, $x_0 = 2$,

$f_3(x) = 3x^2 - e^x$, $\alpha_3^* \approx 0.9100075724887090607$, $x_0 = 2$

$f_4(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha_4^* \approx 1.3652300134140968458$, $x_0 = 2$

$f_5(x) = (x-1)^3 - 1$, $\alpha_5 = 2$, $x_0 = 1.8$,

$f_6(x) = (x-1)^3 - 2$, $\alpha_6^* \approx 2.259921049894873$, $x_0 = 2.0$,

$f_7(x) = \frac{x}{2} - \sin x$, $\alpha_7^* \approx 1.8954942670339809471$, $x_0 = 1.5$

$f_8(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$, $\alpha_8 = 3$, $x_0 = 3.1$,

$f_9(x) = x - \cos x$, $\alpha_9^* \approx 0.7390851332151606$, $x_0 = 2$,

$f_{10}(x) = x^2 \sin x - \cos x$, $\alpha_{10}^* \approx 0.8952060453842319$, $x_0 = 1.5$.

Сви резултати добијени су у програмском пакету *Mathematica*. Прецизност је повећана на 20000 цифара са функцијом *SetPrecision*. Користили смо излазни критеријум $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ и $|f(x_k)| < \varepsilon$, где је α тачно решење посматране једначине. У случајевима где је тачно решење непознато користили смо његову апроксимацију α^*, која је добијена са 30000 цифара. Због једноставности уз сваку једначину наведено је тачно или приближно решење α односно α^* само са 20 цифара.

Нумерички ред конвергенције (COC) рачунамо према

$$COC \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)\right|}.$$

У свим случајевима је $|COC - 4| \le 10^{-5}$, за $n = 3, 4, \ldots$. Дакле, нумерички ред конвергенције је веома близак броју 4, што потврђује теоријске резултате.

Са првом фамилијом поступака четвртог реда, означавамо је са Мураками 1, добили смо резултате приказане у табели 1. Видимо да ни у једном од 10 посматраних примера први члан фамилије не даје најбоље резултате. Најбоље резултате смо болдовали. Сличне резултате добили смо и са четвртом фамилијом, означавамо је са Мураками 4. Користило смо $a=3$ и $b=4$. Ови резултати су приказани у табели 4. Најбоље резултате смо болдовали.

Табеле 2 и 3 садрже резултате добијене помоћу фамилија 2 и 3, означено са Мураками 2 и Мураками 3. За Мураками 2 смо узели $\beta=-5/4$, за Мураками 3 $\beta=1/4$ и $\theta=-3/2$. Видимо да најбоље резултате дају први и други чланови фамилија.

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
f_1	949.77	**1279.7**	1219.1	1222.2	1222.0	1222.0
f_2	897.35	1222.0	**1336.0**	1322.3	1323.2	1323.2
f_3	700.42	**888.06**	859.63	857.39	857.18	857.17
f_4	451.75	765.77	**848.27**	779.31	765.96	762.53
f_5	346.31	594.67	**872.26**	807.90	853.56	841.99
f_6	327.63	572.38	832.94	788.43	**840.28**	826.42
f_7	165.67	402.52	545.75	680.22	801.65	**952.47**
f_8	185.99	**413.28**	331.11	206.15	232.44	0.46262
f_9	827.53	**900.59**	900.54	900.54	900.54	900.54
f_{10}	498.51	766.64	804.51	807.37	807.78	**807.84**

Табела 1. Упоређење поступака $-log|x_5-\alpha|$ за Мураками 1

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
f_1	**1234.1**	1221.2	1222.0	1222.0	1222.0	1222.0
f_2	1288.2	**1326.2**	1322.9	1323.2	1323.2	1323.2
f_3	**867.52**	858.06	857.25	857.17	857.17	857.16
f_4	**1313.6**	796.88	770.01	763.60	761.90	761.43
f_5	747.49	**883.22**	837.03	845.51	843.62	844.03
f_6	729.26	**872.13**	821.09	830.63	828.43	828.91
f_7	645.09	765.19	909.67	995.83	**1608.6**	1123.7
f_8	**424.56**	247.45	148.60	0.90633	4.7042	75.077
f_9	**900.55**	900.54	900.54	900.54	900.54	900.54
f_{10}	791.56	806.49	807.66	807.82	**807.85**	807.85

Табела 2. Упоређење поступака $-log|x_5-\alpha|$ за Мураками 2

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
f_1	**1229.5**	1221.5	1222.0	1222.0	1222.0	1222.0
f_2	1300.1	**1325.1**	1323.0	1323.2	1323.2	1323.2
f_3	**864.46**	857.81	857.22	857.17	857.16	857.16
f_4	**935.02**	788.63	768.17	763.12	761.77	761.39
f_5	783.23	862.90	840.26	**844.77**	843.78	843.99
f_6	766.36	**849.28**	824.73	829.76	828.62	828.87
f_7	733.61	850.98	1015.9	1056.4	**1217.8**	1139.3
f_8	**360.96**	225.99	129.21	14.365	17.067	104.22
f_9	**900.55**	900.54	900.54	900.54	900.54	900.54
f_{10}	796.12	806.84	807.71	807.83	**807.85**	807.85

Табела 3. Упоређење поступака $-log|x_5 - \alpha|$ за Мураками 3

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
f_1	364.29	**1255.3**	1220.4	1222.1	1222.0	1222.0
f_2	356.62	**1246.2**	1328.7	1322.8	1323.2	1323.2
f_3	239.10	**883.28**	854.92	856.96	857.15	857.16
f_4	176.47	617.09	714.09	746.06	756.84	**760.02**
f_5	265.05	776.07	**857.48**	841.24	844.55	843.83
f_6	262.87	761.36	**842.68**	825.95	829.48	828.68
f_7	217.98	822.90	937.04	1166.9	1101.9	**1176.5**
f_8	64.771	190.31	**232.83**	231.36	199.25	158.91
f_9	305.97	**914.28**	900.53	900.54	900.54	900.54
f_{10}	346.56	721.69	**811.85**	808.24	807.91	807.86

Табела 4. Упоређење поступака $-log|x_5 - \alpha|$ за Мураками 4

У табели 5 приказане су вредности $-log|x_5 - \alpha|$ за све поступке које смо тестирали:

- поступак Торес-Аквино,
- поступак Чун-Ли-Нета-Џунић са следећим скупом фнкција H

$$\left\{\frac{4}{-s^2-2s+4}, \frac{9}{6-4s} - \frac{9}{6-2s} + 1, \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + 1, \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{2}{s-2} + 1, -\frac{s}{2} - \frac{4}{s-2} - 1\right\},$$

- а поступке смо означили редом са 1,2,3,4,5,
- поступак Кинг резултати су добијени са $\beta = -1$ (Кинг 1) и $\beta = -2$ (Кинг 2),
- поступак Јарата резултати су добијени за $a_2 = 27/52$ (Јарат 1), $a_2 = 3/2$ (Јарат 2), $a_2 = 9/10$ (Јарат 3) и $a_2 = 0$ (Јарат 4).

	Торес-Аквино	Чун					Кинг		Јарат			
		1	2	3	4	5	1	2	1	2	3	4
f_1	1054.6	1055.9	1063.4	946.6	1058.	1012.	**1551.6**	1172.0	1197.2	1063.4	980.0	1116.3
f_2	1069.2	1063.9	1080.7	897.3	1069.	990.5	1101.3	976.2	1347.6	1079.7	941.3	**1213.0**
f_3	459.38	498.2	500.0	461.6	497.9	482.8	517.6	465.8	517.6	500.6	475.4	**520.6**
f_4	553.00	560.4	560.9	451.7	553.0	507.4	598.2	393.1	**711.3**	560.9	495.4	651.7
f_5	564.96	533.7	575.6	346.3	565.0	463.5	587.7	478.2	**959.1**	575.6	316.3	722.8
f_6	548.77	515.5	559.4	327.6	548.8	446.0	570.6	461.8	**952.2**	559.4	285.9	707.2
f_7	385.38	326.2	394.4	166.0	386.1	281.0	450.2	326.8	**711.1**	394.4	80.2	510.6
f_8	272.95	282.1	277.9	188.6	269.5	231.0	95.3	313.3	201.4	277.9	226.5	**395.1**
f_9	948.90	843.1	844.4	818.6	843.1	833.0	**1030.1**	975.9	879.6	844.4	827.5	857.0
f_{10}	533.4	521.5	523.6	466.7	520.4	498.1	575.9	576.9	**651.0**	523.6	488.7	555.1

Табела 5. Упоређење поступака $-log|x_5 - \alpha|$

За сваки од 10 примера издвојили смо онај поступак који има највећу вредност за $-log|x_5 - \alpha|$ и тај број смо болдовали. За пет посматраних функција најбоље резултате даје поступак Јарат 1, за три поступка Јарат 4, а за два поступка Кинг 1.

Резултати се разликују, за поједине функције неки поступци у односу на друге дају боље резултате, а за друге функције дају лошије, тако да се ни за један поступак не може рећи да је најбољи. За прву и девету функцију најбоље резултате даје поступак Кинг 1. За пету и шесту функцију најбољи је Јарат 1. За четврту и осму најбољи је Мураками 2 са првим чланом фамилије, а Мураками 2 је најбољи и за седми пример али са четвртим чланом фамилије. За функције 2 и 3 најбољи је Мураками 1 са другим чланом фамилије, односно са првим чланом фамилије. За десету функцију најбољи је Мураками 4 са другим чланом фамилије.

5 Закључак

У раду смо посматрали оптималне поступке четвртог реда конвергенције за нумеричко решавање нелинеарних једначина са једном непознатом. Индекс ефикасности ових поступака је $4^{1/3} = 1.5874\ldots$. Посматрани поступци полазе од Њутновог поступка, који је другог реда конвергенције, а повишење реда са два на четири постиже се убрзањем Њутновог поступка са додатним кораком. Приказани су поступак Торес-Аквино, поступак Чун-Ли-Нета-Џинић, поступак Кинга и поступак Јарат. Поступајући на начин приказан у раду [5], добијена је фамилија оптималних поступака четвртог реда конвергенције типа Мураками, као оригиналан допринос. Доказане су теореме о локалној конвергенцији посматране фамилије и одређене су асимптотске константе грешке користећи резултате из [4]. Под одређеним претпоставкама доказали смо конвергенцију поступака и одредили асимптотске константе грешке.

У четвртом делу рада приказали смо више резултата изведених експеримената који су урађени у програмском пакету *Mathematica*. Нумерички резултати показују да наше модификације и примери дају добре резултате, сличне поступцима на које смо се угледали.

Примери које смо користили за нумерички експеримент узети су из релевантних радова. Нумерички резултати су у складу са теоријским разматрањима.

6 Литература

[1] Chun, C., Lee, M.Y., Neta, B., Jovana Džunić, J., On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 6427–6438.

[2] Fernández-Torres, G., Vásquez-Aquino, J., Three new optimal fourth- order iterative methods to solve nonlinear equations. *Advances in Numerical Analysis*, *2013*, 1-8.

[3] Hansen, E., Patrick, M., A family of root finding methods, Numer. Math. 27(1977), 257-269.

[4] Herceg Đ., Herceg D., A family of methods for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 259 (2015) 882–895.

[5] Herceg Đ., Herceg D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 87(2010), 11, 2533–2541.

[6] Herceg, D., Herceg, Dj., Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 219,11(2013), 6126-6133.

[7] Herceg, D., Krejić, N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[8] Herceg, Đ., Herceg, D., Sixth-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics, 267(2014), 244–253.

[9] Herceg, Đ., Herceg, D., Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 245(2013), 53–61.

[10] J. Kou, Y. Li, X. Wang, Fourth-order iterative methods free from second derivative, Appl. Math. Comput. 184 (2007) 880–885.

[11] Jarratt, P., Some Fourth Order Multipoint Iterative Methods for Solving Equations, Mathematics of Computation, Vol. 20, No. 95 (1966), 434-437.

[12] King, R., A family of fourth order methods for nonlinear equations, SIAM Journal on Numerical Analysis 10 (1973) 876–879.

[13] Kung, H. T., Traub, J. F., Optimal order of one-point and multipoint iteration, *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 21, pp. 643–651, 1974.

[14] Murakami, T., On some iterative formulas for solving nonlinear scalar equations, Journal of Information Processing, 15, 2(1992), 187-194.

[15] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[16] Ostrowski, A.M., Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press Inc., 1966.

[17] Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.
[18] Traub, J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.

7 Биографија

Рођена сам 30. октобра 1987. године у Шапцу. У родном граду сам завршила Основну школу „Вук Караџић“ као носилац Вукове дипломе и Шабачку гимназију, природно–математички смер са одличним успехом. Године 2006. уписала сам Природно – математички факултет у Новом Саду, смер професор математике. Дипломирала сам 25. фебруара 2012. године. Исте године уписујем мастер студије на матичном факултету, смер настава математике. Положила све испите предвиђене наставним планом и програмом мастер студија и тако стекла услов за одбрану мастер рада.

Од септембра 2012. године сам запослена у Основној школи „Лаза К. Лазаревић“ у Шапцу.

Нови Сад, 29.август 2016.

Катарина Лолић

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Katarina Lolić
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Jedna familija optimalnih postupaka četvrtog reda za rešavanje nelinearnih jednačina
MR
Jezik publikacije: srpski (ćirilica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2016.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 5 poglavlja/ 35 strana/ 5 tabela/ 18 literatura
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: red konvergencije, postupak, jednačina greške
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U master radu posmatramo iterativne postupake četvrtog reda konvergencije za izračunavanje jednostrukih korena nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a, b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha) \neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, dajemo modifikacije čiji je red povišen na četiri. Kao originalan doprinos dajemo četiri nove familije postupaka Murakamijevog tipa. Pod određenim pretpostavkama

za posmatrane postupke dokazujemo konvergenciju četvrtog reda i određujemo odgovarajuće asimptotske konstante greške.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.07.2014.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	dr Sanja Rapajić,vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Katarina Lolić
AU
Mentor: dr. Dragoslav Herceg
MN
Title: A family of optimal fourth-order methods for solving nonlinear equations
XI
Language of text: Serbian (Cyrilic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2016.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description 5 chapters/ 35 pages/ 5 tables/ 18 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: order of convergence, method, equation error
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N
In master work we consider the iterative procedure of the fourth-order convergence for numerical solving of the nonlinear equation $f(x) = 0$. We assume that function f has a simple solution α in $[a, b]$, ie. $f'(\alpha) \neq 0$. Starting from Newton's method, which is second order convergence, we present some known methods of fourth order of. As an original contribution we give four families of iterative

methods of Murakami’s type. Under certain conditions, for the concerned methods we prove the convergence of the fourth order and determine corresponding asymptotic constant errors.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 11.07.2014.
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB
President: dr Sanja Rapajić, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor : dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad