Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Metod pridruženih pravouglih trouglova u hiperboličnoj ravni

Mentor:
Dr. Vojislav Petrović

Kandidat:
Jelena Vasić

Avgust, 2016.

Sadržaj

1 Uvod

Iz apsolutne geometrije nam je poznata teorema:" Zbir dužina dveju stranica uvek je veći od dužine treće stranice."Ako su dužine stranica a, b, c nekog trougla, onda ćemo reći da je uređena trojka (a, b, c) pridružena tom trouglu. S obzirom na to, da se u ovom delu bavimo egzistencijom određenih trouglova, tj. nalaženjem uslova pod kojim neki trougao postoji. Npr. "Da li za svaku uređenu trojku (a, b, c) postoji trougao čije su stranice dužina a,b, c redom?"Iz apsolutne geometrije sledi da je odgovor da ukoliko važi navedena teorema. Šta više, ova teorema podrazumeva i osnovnu osobinu "dve kružnice" apsolutne geometrije, naime kružnice $C(A_1, r_1)$ i $C(A_2, r_2)$ se seku u tačno dve tačke, ako dužine r_1, r_2 i $d(A_1, A_2)$ čine uređenu trojku pridruženu nekom trouglu. Međutim ova teorema ukazuje i na to da za obradu temelja hiperbolične geometrije je potreban ogroman razvoj apsolutne ravanske geometrije.

Prema tome u prvom delu ovog rada ćemo navesti osnovne pojmove, definicije i teoreme koje će nam biti potrebne, iako je ovaj rad samo uvod u neke osnovne osobine hiperbolične geometrije.

Pitanje koje će biti obrađeno je egzistencija nekih pravouglih trouglova u zavisnosti od toga u kom obimu su nam poznate mere oštrih uglova i dužine stranica. Tačnije razmatramo dva slučaja: ako su zadate mere dva oštra ugla pravouglog trougla čiji je zbir manji od 90° i ako je zadata mera oštrog ugla i dužina njegove naspramne stranice.

Pokazaćemo da egzistencija takvih pravouglih trouglova podrazumeva postojanje četiri druga „pridružena“ pravougla trougla i takođe postojanje pet „pridruženih“ L-četvorouglova.

Ukratko, u okviru ovog rada, mi želimo da razvijemo "metodu pridruženog pravouglog trougla", koja je karakteristična za hiperboličnu geometriju, i koja se može koristiti za odgovor na mnoga pitanja egzistencije određenih trouglova.

2 Osnovni pojmovi i definicije

2.1 Apsolutna ravan

U ovom poglavlju predstavićemo osnovne osobine apsolutne ravanske geometrije, bazirane na Birkohovim aksiomama koje ćemo predstaviti kroz potpoglavlje 2.1. Sve teoreme koje ćemo predstaviti su takođe teoreme euklidske geometrije.

Neka je apsolutna ravan skup čiji su elementi tačke koje ćemo obeležavati velikim slovima alfabeta, npr. A, B, C. Apsolutna ravan je univerzalan skup (prostor) u smislu da sve tačke pripadaju ravni. Boldovanim velikim slovima alfabeta obeležavaćemo podskupove (potprostore) ravni, a ravan ćemo obeležiti sa $\mathbf{A^2}$ (gde nam eksponent ukazuje na dimenziju prostora). Pretpostavimo sada da je $\mathbf{S}$ neki podskup prostora $\mathbf{A^2}$, onda komplement tog poskupa (skup svih tačaka koje nisu u $\mathbf{S}$) obeležavamo sa $\overline{\mathbf{S}}$. Očigledno je da je komplement od $\mathbf{A^2}$ prazan ili nula skup u oznaci $\emptyset$, tj. skup bez elemenata. Napomenućemo još da ukoliko je broj elemenata nekog skupa dat određenim brojem kao npr. 2 ili 3 onda podrazumevamo da je to broj različitih elemenata, a ne broj simbola za elemente koji mogu obeležavati isti element. Sledećim aksiomama ćemo definisati pravu, rastojanje između tačaka na pravoj i korespondenciju između skupa realnih brojeva i tačaka na pravoj, tj. merenje rastojanja tačaka.

Aksioma 1. *Postoje neprazni podskupovi od* $\mathbf{A^2}$ *koje nazivamo* **pravama***, sa osobinom da svake dve tačke pripadaju tačno jednoj pravoj.*

Napomena: Prave ćemo obeležavati malim slovima alfabeta, npr. a, b, c. Takođe koristimo oznaku $p(A, B)$ ili $p(B, A)$ da predstavimo jedinstvenu pravu koja prolazi kroz dve tačke.

Aksioma 2. *Neka su A i B dve različite tačke, tada postoji jedinstven nenegativan broj $d(A, B) = d(B, A)$ koji nazivamo* **rastojanje** *između tačaka A i B. Ako je $A = B$ onda je rastojanje nula.*

Aksioma 3. *Ako je t prava i $\mathbb{R}$ skup svih realnih brojeva, tada postoji korespondencija, obeležena sa $X \leftrightarrow x$, između tačaka X koje pripadaju pravoj t i brojeva x iz $\mathbb{R}$ tako da rastojanje između tačaka A i B na pravoj t je apsolutna vrednost razlike brojeva a i b iz $\mathbb{R}$ koji odgovaraju tačkama A i B redom.*

Napomena: S obzirom da je poznato da je skup realnih brojeva beskonačan, iz aksiome 3 direktno sledi da i broj tačaka na jednoj pravoj je takođe beskonačan, odakle dalje dobijamo da i ravan $\mathbf{A^2}$ sadrži beskonačno mnogo tačaka. Posledice ovih aksioma su takođe i sledeća teorema.

Teorema 2.1. *Ako se dve prave seku, onda se one seku u tačno jednoj tački.*

Dokaz. Iz prve aksiome znamo da svake dve tačke jedinstveno određuju pravu. Neka su r i s dve prave koje se seku, tj. $r \cap s \neq \emptyset$. To znači da bar jedna tačka pripada preseku, ali ta tačka je jedinstvena jer u suprotnom dobijamo kontradikciju sa jedinstvenošću pravih. □

Definicija 2.1. *Realan broj b je između dva broja a i c, ako je veličina b između veličina a i c, i to obeležavamo sa $\langle abc \rangle$ ili $\langle cba \rangle$, i pritom još važe relacije $a < b < c$ ili $c < b < a$.*

Definicija 2.2. *Tačka B je između tačaka A i C, u oznaci $\langle ABC \rangle$ ili $\langle CBA \rangle$, ako su A, B, C kolinearne tačke i važi jednakost $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.*

Definicija 2.3. *Ako je $A \neq B$,* **otvorena duž** *od A i B, u oznaci $S(AB)$ ili $S(BA)$ je skup definisan sa*

$$S(AB) = S(BA) = \{X : \langle AXB \rangle\}.$$

Zatvorena duž *od A i B, ili samo duž od A i B, je skup obeležen sa $S[AB]$ ili $S[BA]$ definisan sa*

$$S[AB] = S[BA] = \{X : X = A, \textit{ili } \langle AXB \rangle, \textit{ili } X = B\}.$$

Poluotvorena duž *od A i B su skupovi definisani sa*

$$S[AB) = \{X : X = A, \textit{ili } \langle AXB \rangle\}$$

i

$$S(AB] = \{X : \langle AXB \rangle, \textit{ili } X = B\}.$$

Napomena: Tačke A i B su krajnje tačke za sve četiri duži, i $d(A, B)$ je dužina duži $S[AB]$.

Definicija 2.4. *Ako je $A \neq B$,* **otvorena poluprava** *od A kroz B je skup obeležen sa*

$$pp(AB) = \{X : \langle AXB \rangle, \textit{ili } X = B, \textit{ili } \langle ABX \rangle\}.$$

Zatvorena poluprava *od A kroz B je skup obeležen sa $pp[AB)$ i definisan sa*

$$pp[AB) = \{X : X = A, \textit{ili } \langle AXB \rangle, \textit{ili } X = B, \textit{ili } \langle ABX \rangle\}.$$

Definicija 2.5. *Dve poluprave su* **suprotne poluprave** *ako su kolinearne, imaju istu inicijalnu tačku, i njihov presek je prazan skup ili eventualno njihova zajednička inicijalna tačka.*

Napomena: Tačka A je inicijalna tačka i za otvorene i za zatvorene poluprave iz definicije 2.4. Takođe je bitno napomenuti da je redosled tačaka A i B u oznakama $S[AB)$, $S(AB]$, $pp(AB)$ i $pp[AB)$ bitan jer promenom redosleda dobijamo različite skupove, npr. $S[AB) \neq S[BA)$ i $pp(AB) \neq pp(BA)$.

Navešćemo sada neka od tvrđenja koja su posledica navedenih definicija, a koja će nam biti potrebna za dalji rad.

Teorema 2.2. *Neka je data prava t, i korespondencija $X \leftrightarrow x$ prave t sa skupom realnih brojeva ($X \in t$ i $x \in \mathbb{R}$) i neka je tački A sa prave t dodeljena vrednost a. Tada postoje tačno dve otvorene poluprave na pravoj t sa inicijalnom tačkom A. Te poluprave su suprotne i date su skupovima*

$$pp := \{X : x > a\}$$

i

$$pp' := \{X : x < a\}$$

Takođe postoje i dve zatvorene poluprave na pravoj t sa inicijalnom tačkom A. One su suprotne poluprave i date su skupovima

$$S := \{X : x \geq a\}$$

i

$$S' := \{X : x \leq a\}.$$

$\square$

Posledica 2.2.1. *Poluprava je jedinstveno određena inicijalnom tačkom i bilo kojom drugom svojom tačkom. Tada iz* $C \in pp(AB)$ *sledi da* $pp(AC) = pp(AB)$.

$\square$

Posledica 2.2.2. *Ako je* $A \neq B$ *tada važi* $pp(AB) \cap pp(BA) = S(AB)$ *i* $pp[AB) \cap pp[BA) = S[AB]$.

$\square$

Teorema 2.3. *Ako je* A *tačka na pravoj* t *i* h *pozitivan broj, tada postoje tačno dve tačke na pravoj* t *na udaljenosti* h *od* A*, i* A *je između njih.*

$\square$

Teorema 2.4. *Na pravoj* $p(A, B)$ *postoji tačno jedna tačka koja je jednako udaljena od* A *i* B*, i ta tačka je između tačaka* A *i* B.

$\square$

Definicija 2.6. *Poluprava* pp *i poluprava* pp' *su isto usmerene ako su kolinearne i jedna sadrži drugu. A suprotno usmerene ako su kolinearne i nijedna nije sadržana u drugoj.*

Napomena: Jasno važi da su dve kolinearne poluprave ili isto ili suprotno usmerene.

Definicija 2.7. *Skup* S *je* **konveksan** *ako iz* $A \in S$, $B \in S$ *i* $\langle AXB \rangle$ *sledi* $X \in S$.

Direktno se dokazuju sledeća tvrđenja.

Teorema 2.5. *Presek konveksnih skupova je ponovo konveksan skup.*

$\square$

Teorema 2.6. *Ravan* $\mathbf{A^2}$*, prazan skup, tačka, prava, poluprava i duž su konveksni skupovi.*

$\square$

2.1.1 Poluravan, ugao i mera ugla

S obzirom da smo već utvrdili da je prava t unija $\{A\}$ i dve suprotne otvorene poluprave na t čija je inicijalna tačka A ($A \in t$), recimo $pp(AB)$ i $pp(AC)$. Na osnovu prethodnih teorema znamo da su skupovi $\{A\}$, $pp(AB)$ i $pp(AC)$ neprazni i konveksni, da su po parovima disjunktni (nikoja dva skupa nemaju presečnih tačaka), i ako $X \in pp(AB)$ i $Y \in pp(AC)$ onda $A \in S(XY)$.

S obzirom da smo već naglasili da ćemo kroz potpoglavlje 2.1 predstaviti Birkhohove aksiome ravanske apsolutne geometrije i njihove posledice koje će nam biti potrebne za dalji rad, na redu je Birkohove aksioma separacije.

Aksioma 4. *S obzirom na pravu t, postoje tačno dva neprazna, konveksna skupa R' i R'' sa sledećim osobinama:*

1. *ravan je unija skupova R', R'' i t*

2. *skupovi R', R'' i t su po parovima disjunktni*

3. *ako $X \in R'$ i $Y \in R''$, onda duž $S(XY)$ seče pravu t*

Definicija 2.8. *S obzirom na pravu t, jedinstveni skupovi R' i R'' iz Aksiome 4 su suprotne strane ili* **suprotne otvorene poluravni** *od t. Skupovi $R' \cup t$ i $R'' \cup t$ su* **suprotne zatvorene poluravni** *od t. Prava t je* **rub** *za sve četiri poluravni.*

Napomena: Iz osobina 2. i 3. iz aksiome 4, ukoliko su R' i R'' suprotne strane prave t i A nije tačka te prave, dobijamo da tačka A pripada tačno jednoj strani od t. Ako A pripada R'-strani onda ćemo R'-stranu zvati A-strana od t i označavati $H(t; A)$, i slično ako $B \in R''$ sa $H(t; B)$ obeležavati B-stranu od t tj. R''.

Definicija 2.9. *Skupovi R i S su podeljeni pravom t ako su neprazni i jedna strana od t sadrži R a druga sadrži S. Tačke A i B su razdvojene pravom t ako A i B leže na suprotnim stranama od t.*

Teorema 2.7. *Tačke A i B leže sa jedne strane prave t ako i samo ako $S[AB] \cap t = \emptyset$.*

□

Teorema 2.8. *Ako tačka A pripada pravoj t, a B ne pripada, tada svaka tačka poluprave $pp(AB)$ je na B-strani od t, i prava t razdvaja polupravu $pp(AB)$ i njoj suprotanu polupravu.*

□

Posledica 2.8.1. *Zatvorena poluravan je konveksan skup.*

□

Definicija 2.10. **Ugao** *je unija dve zatvorene, nekolinearne poluprave koje imaju istu inicijalnu tačku. Zatvorene poluprave su* **kraci** *ugla, a zajednička inicijalna tačka je* **teme** *ugla. Ako su poluprave $pp[BA)$ i $pp[BC)$ nekolinearne, ugao koji dobijemo njihovom unijom obeležavamo sa $\sphericalangle ABC$ ili $\sphericalangle CBA$.* **Unutrašnjost** *ugla je skup $In(\sphericalangle ABC) = A$-strana prave $p(B, C) \cap C$-strana prave $p(B, A)$.*

Teorema 2.9. *Unutrašnjost ugla je konveksan skup.*

□

Definicija 2.11. *Dva ugla su* **unakrsni** *ako su kraci jednog suprotni zatvoreni kraci drugog. Ako su $pp[BA)$ i $pp[BA')$ suprotne poluprave, i ako su $pp[BC)$ i $pp[BC')$ suprotne poluprave, i tačke A, B, C nekolinearne, tada su uglovi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle A'BC'$ unakrsni, i $\sphericalangle ABC'$ i $\sphericalangle A'BC$ su takođe unakrsni. Ova četiri ugla su uglovi preseka pravih $p(B, A)$ i $p(B, C)$.*

Definicija 2.12. *Dva ugla su* **susedni** *ako imaju zajednički krak i unutrašnjosti im se ne seku.*

Definicija 2.13. *Poluprava pp je između polupravih pp' i pp'' ako:*

1. *pp, pp', pp'' imaju zajedničku inicijalnu tačku*
2. *zatvorene poluprave pp' i pp'' obrazuju ugao*
3. *otvorena poluprava pp je u unutrašnosti ugla čiji su kraci pp' i pp''.*

Teorema 2.10. *Tačka P je u unutrašnjosti ugla $\sphericalangle ABC$ ako i samo ako $pp(BP)$ je između $pp(BA)$ i $pp(BC)$.*

□

Teorema 2.11. *Ako su tačke A, B, C nekolinearne, tada $S(AC) \subset In(\sphericalangle ABC)$.*

□

Kada smo naveli definiciju za ugao, njegovu unutrašnjost i neke osnovne osobine koje će nam trebati za kasniji rad, možemo da uvedemo i sledeću Birkohovu aksiomu koja opisuje merenje uglova.

Aksioma 5. *Svakom uglu $\sphericalangle ABC$ odgovara jedinstven realan broj između 0 i 180, u oznaci $\sphericalangle ABC^\circ$, koji je* **mera** *ugla.*

Ako je mera ugla x, onda kažemo da ugao ima x stepeni ili jednostavno x° da bi ukazali da je x mera ugla.

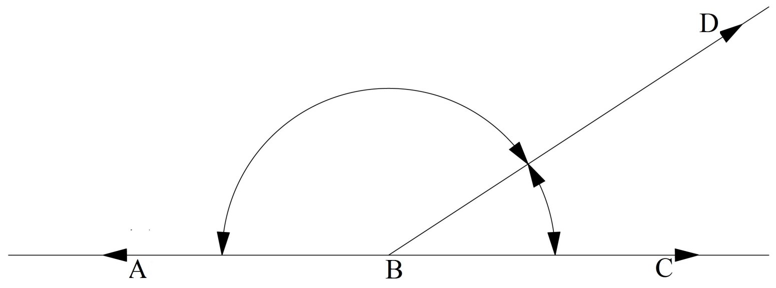
Aksioma 6. *Ako $pp(BD) \subset In(\sphericalangle ABC)$, onda $\sphericalangle ABD^\circ + \sphericalangle DBC^\circ = \sphericalangle ABC^\circ$.*

Aksioma 7. *Ako je $pp[AB)$ poluprava na rubu t otvorene poluravni $H(t; P)$, tada postoji jedna i samo jedna korespondencija između otvorenih polupravi u $H(t; P)$ sa inicijalnom tačkom A i skupa realnih brojeva između 0 i 180 tako da ako polupravoj $pp(AX)$ odgovara x onda $\sphericalangle BAX^\circ = x$.*

Definicija 2.14. *Ugao je* **oštar**, **prav** *ili* **tup**, *ukoliko je mere manje, jednake ili veće od 90°. Dva ugla su* **komplementarna** *ako je zbir njihovih mera 90°, a* **suplementarni** *ako je zbir njihovih mera 180°.*

Teorema 2.12. *Ako su $pp(BA)$ i $pp(BC)$ suprotne poluprave koje nisu kolinearne sa polupravom $pp(BD)$, tada su $\sphericalangle DBA$ i $\sphericalangle DBC$ suplementarni tj. $\sphericalangle DBA^\circ + \sphericalangle DBC^\circ = 180^\circ$ (sl.2.1).*

□



Sl. 2.1.

Teorema 2.13. *Ako su* $\sphericalangle DBA$ *i* $\sphericalangle DBC$ *susedni i suplementarni, tada su poluprave* $pp(BA)$ *i* $pp(BC)$ *suprotne.*

$\square$

Teorema 2.14. *Unakrsni uglovi imaju istu meru.*

$\square$

Definicija 2.15. *Otvorena i zatvorena poluprava* $pp(BD)$ *i* $pp[BD)$ *je* **bisektrisa** *(simetrala) ugla* $\sphericalangle ABC$ *ako* $pp(BD) \subset In(\sphericalangle ABC)$ *i* $\sphericalangle DAB^\circ = \sphericalangle DAC^\circ$*. Prava je bisektrisa (simetrala) ugla ukoliko sadrži polupravu koja je bisektrisa.*

Teorema 2.15. *Postoji tačno jedana poluprava koja je bisektrisa ugla i njena prava je jedinstvena prava koja je bisektrisa ugla.*

$\square$

Teorema 2.16. *Ako je poluprava bisektrisa ugla, njena suprotana (otvorena i zatvorena) poluprava je bisektrisa unakrsnog ugla.*

$\square$

Definicija 2.16. *Dve prave su* **normalne** *ako se seku, i jedan od uglova preseka je prav. Da su prave* s *i* t *normalne obeležavaćemo sa* $s \perp t$ *ili* $t \perp s$*. Ako je* A *presečna tačka pravih* s *i* t *onda kažemo da su te prave normalne u tački* A*.*

Teorema 2.17. *Ako je jedan od uglova preseka dve prave prav, onda su sva četiri ugla prava.*

$\square$

Teorema 2.18. *Ako je* A *tačka na pravoj* s *onda postoji tačno jedna prava normalna na* s *u* A*.*

$\square$

2.1.2 Osnovne osobine trougla

S obzirom da je tema rada Metod pridruženih pravouglih trouglova, u nastavku teksta ćemo dati osnovne definicije i teoreme vezane za osnovnu figuru ravanske geometrije, trougao.

Definicija 2.17. *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, unija zatvorenih duži, $S[AB] \cup S[BC] \cup S[CA]$, je* **trougao** *čija su* **temena** *tačke A, B, C. Ta unija se obeležava znakom $\triangle$ sa slovima A, B, C u bilo kom redosledu, npr "$\triangle BCA$". Duži su* **stranice** *trougla, a uglovi $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$ su* **uglovi** *trougla.* **Unutrašnjost** *trougla, u oznaci $In(\triangle ABC)$ je skup $In(\triangle ABC) = A$-strana prave $p(B,C) \cap B$-strana prave $p(C,A) \cap C$-strana prave $p(A,B)$.*

Definicija 2.18. *Ugao koji je susedni uglu u trouglu i sa njim suplementaran je* **spoljašnji ugao** *trougla.*

Teorema 2.19. *Unutrašnjost trougla je konveksan skup.*

$\square$

Teorema 2.20. *Prava koja seče trougao, seče bar dve njegove stranice. Prava koja prolazi kroz tačku koja se nalazi u unutrašnjosti trougla seče trougao u tačno dve tačke. Ako je jedna od tačaka preseka teme, tada druga tačka preseka pripada otvorenoj duži na suprotnoj strani.*

$\square$

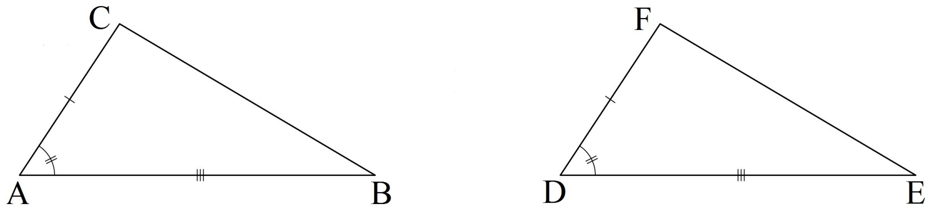
Definicija 2.19. *Duži su* **podudarne** *ako imaju istu dužinu. Uglovi su podudarni ako su iste mere. Simbol "$\cong$"koristimo za relaciju podudarnosti. Prema tome, $S[AB] \cong S[CD]$ ako $d(A,B) = d(C,D)$ i $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$ ako $\sphericalangle ABC^\circ = \sphericalangle DEF^\circ$.*

Definicija 2.20. Korespodencija *trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ je "1-1"korespodencija za temena, stranice i uglove, tako da temena odgovarajućih uglova su odgovarajuća temena trougla, i stranice koje su korespodentne su suprotne temenima koji su korespodentni. Notacija $ABC \leftrightarrow DEF$ će se koristiti da označi korespodenciju u kojoj $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$, $\sphericalangle A \leftrightarrow \sphericalangle D$,$\sphericalangle B \leftrightarrow \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \leftrightarrow \sphericalangle F$, $S[AB] \leftrightarrow S[DE]$, $S[BC] \leftrightarrow S[EF]$, $S[CA] \leftrightarrow S[FD]$. Dve korespodencije su iste ako su isti delovi trougla upareni. Tako da su $ABC \leftrightarrow DEF$ i $BCA \leftrightarrow EFD$ iste korespodencije.*

Definicija 2.21. *Korespodencija trouglova je* **kongruencija** *trouglova ako su odgovarajuće stranice podudarne i odgovarajući uglovi podudarni. Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ su podudarni trouglovi ako je bar jedna od njihovih korespodencija podudarnost. Oznaku $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ćemo koristiti u slučaju kada je korespodencija $ABC \leftrightarrow DEF$ podudarnost trouglova.*

Napomena: Sada ćemo navesti Aksiomu 8 kao uslov podudarnosti. Kažemo da se ugao trougla nalazi između dve stranice i da se stranica trougla nalazi između dva ugla čija su temena njene krajnje tačke.

Aksioma 8. *Ako je korespodencija dva trougla, ili trougla sa samom sobom takva da su dve stranice i ugao između njih podudarni odgovarajućim dvema stranicama i uglom između njih, onda je korespodencija podudarnost trouglova. Tako je* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (sl. 2.2).



Sl. 2.2.

Napomena: Ovu aksiomu još zovemo i "stranica-ugao-stranica"ili "$s - \sphericalangle - s$"uslov podudarnosti.

Teorema 2.21. *Spoljašnji ugao trougla je veći od svakog nesusednog unutrašnjeg ugla trougla.*

□

Teorema 2.22. *Ako je jedan od uglova trougla nije oštar, onda su druga dva ugla oštri.*

□

Teorema 2.23. *U trouglu* $\triangle ABC$, $S[CA] \cong S[CB]$ *ako i samo ako* $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA$. *Ako je* $S[CA] \cong S[CB]$, *tada bisektrisa ugla* $\sphericalangle ACB$, *prava koja prolazi kroz* C *i središte duži* $S[AB]$, *i prava koja je simetrala (normalna bisektrisa) duži* $S[AB]$ *su jedna ista prava.*

□

Definicija 2.22. *Trougao je* **tupougli**, **pravougli** *ili* **oštrougli** *s obzirom na to da li ima, tup ili prav ugao, ili su mu svi uglovi oštri. U pravouglom trouglu stranica naspram pravog ugla se naziva* **hipotenuza**. *Trougao sa dve podudarne stranice se naziva* **jednakokraki**. *A trougao čije su sve stranice jednake se naziva* **jednakostranični trougao**.

Teorema 2.24. *U* $\triangle ABC$, $S[CA] \cong S[CB]$ *ako i samo ako je* $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CBA$. *Ako je* $S[CA] \cong S[CB]$ *tada je simetrala ugla* $\sphericalangle ACB$, *prava koja prolazi kroz teme* C *i središnju tačku duži* $S[AB]$, *i to je ista prava koja je simetrala duži* $S[AB]$.

□

Teorema 2.25. *Stranica trougla je veća od druge stranice ako i samo ako ugao naspram nje je veći od ugla naspram druge. (Veća stranica povlači veći naspramni ugao.)*

□

Posledica 2.25.1. *Hipotenuza u pravouglom trouglu je veća od druge dve stranice.*

□

Teorema 2.26. *Zbir dužina dve stranice trougla je uvek veći od dužine treće stranice.*

□

Posledica 2.26.1. *Ako je* $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$*, tada su tačke* A, B, C *kolinearne.*

□

Kao Aksiomu 8 smo naveli jedan uslov podudarnosti za trouglove, ali on nije jedini, sledećim teoremama ćemo predstaviti standardne uslove podudarnosti za trouglove iz elementarne geometrije.

Teorema 2.27. *(***Ugao-stranica-ugao***)Ako je korespodencija dva trougla, ili trougla sa samim sobom takva su dva ugla i stranica između njih redom podudarni sa dva odgovarajuća ugla i stranicom između njih, tada je ta korespodencija podudarnost tih trouglova.*

□

Teorema 2.28. *(***Stranica-stranica-stranica***) Ako je korespodencija dva trougla, ili trougla sa samom sobom takva da su sve tri stranice jednog redom podudarne sa odgovarajućim stranicama drugog, tada je ta korespodencija podudarnost trouglova.*

□

Teorema 2.29. *(***Hipotenuza-ugao***) U korespodenciji pravouglih trouglova, ako je hipotenuza jednog podudarna sa hipotenuzom drugog, i ako je jedan par odgovarajućih oštrih uglova podudaran, tada je ta korespodencija podudarnost trouglova.*

□

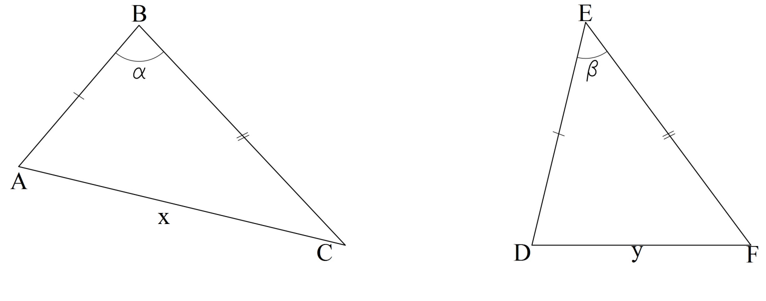
Teorema 2.30. *(***Hipotenuza-stranica***) U korespodenciji pravouglih trouglova, ako je hipotenuza jednog podudarna sa hipotenuzom drugog, i ako je par odgovarajućih stranica podudaran, tada je ta korespodencija podudarnost trouglova.*

□

Sledeća nejednakost ta dva trougla takođe će nam biti od koristi u kasnijem radu.

Teorema 2.31. *Ako su* $\triangle ABC$ *i* $\triangle DEF$ *takvi trouglovi da važi* $d(B, A) = d(E, D)$ *i* $d(B, C) = d(E, F)$*, tada je* $\sphericalangle ABC^\circ > \sphericalangle DEF^\circ$ *ako i samo ako* $d(A, C) > d(D, F)$*. Tako je* $x > y \Leftrightarrow \alpha > \beta$ (sl. 2.3)*.*

□



Sl. 2.3.

Završićemo ovo potpoglavlje o trouglovima sa posebnom definicijom za podnožje tačke.

Definicija 2.23. *Tačka F je podnožje za tačku P skupa S, ako F pripada S i $d(P,F) \leq d(P,X)$ za sve $X \in S$. Ako je F podnožje za P u S tada je rastojanje između P i S, u oznaci $d(P,S)$ broj $d(P,F)$.*

Teorema 2.32. *Svaka tačka u skupu je sama sebi jedinstveno podnožje za taj skup.*

$\square$

Teorema 2.33. *Za tačku P i pravu t, postoji tačno jedna prava kroz P normalna na t, i tačka u kojoj je ta prava normalna na t je jedinstveno podnožje F na pravoj t tačke P.*

$\square$

Sl. 2.4.

Teorema 2.34. *Ako je $\sphericalangle PAB$ oštar, tada podnožje za tačku P na $p(A,B)$ pripada otvorenoj polupravoj $pp(AB)$.*

$\square$

2.1.3 Osnovne osobine kružnice

Definicija 2.24. *Neka je data tačka A i pozitivan broj r, kružnica sa centrom u A poluprečnika r je skup*

$$C(A,r) = \{X : d(A,X) = r\}.$$

Skup tačaka koji pripada **unutrašnjosti kružnice** *je*

$$In[C(A,r)] = \{X : d(A,X) < r\}.$$

Skup tačaka koji pripada **spoljašnjosti kružnice** *je*

$$Ex[C(A,r)] = \{X : d(A,X) > r\}.$$

Ako tačka $B \in C(A,r)$, tada je $S[AB]$ radijalna duž, a $p(A,B)$ je radijalna prava.

Teorema 2.35. *Ako se tačka P nalazi u unutrašnjosti kružnice $C(A,r)$ onda prava t koja prolazi kroz tačku P seče kružnicu u tačno dve tačke C i D, i tačka X na pravoj t pripada unutrašnjosti kružnice ako i samo ako važi raspored $\langle CXD \rangle$.*

$\square$

2.1.4 Izometrijske transformacije ravni

Definicija 2.25. (**Izometrija**) *Ako je Γ skup uređenih parova tačaka $\{(X, X')\}$ takvih da ako $(X, X') \in \Gamma$ i $(X, Y') \in \Gamma$ onda je $X' = Y'$, tada je Γ funkcija preslikavanja. Skup R svih prvih elemenata iz parova iz Γ je* **domen** *funkcije Γ, a skup S svih drugih elemenata iz parova iz Γ je* **kodomen** *od Γ, još kažemo da Γ slika skup R na skup S. Ako je (X, X') uređen par iz Γ tada je X'* **slika** *od X, i to ćemo obeležavati sa $X' = X\Gamma$ ili $X \rightarrow X'$. Ako je svaka tačka iz S slika tačno jednog elementa iz R tada je Γ "1–1" preslikavanje.*

Ova funkcija se naziva **izometrija** *ako je rastojanje između svake dve tačke iz R jednako rastojanju njihovih slika u S, tj. $d(X, Y) = d(X', Y')$ za sve $X, Y \in R$.*

Teorema 2.36. *Svaka izometrija je "1–1" preslikavanje.*

Dokaz. Ako je $X \neq Y$, tada je $d(X, Y) > 0$. Kako znamo da je $d(X, Y) = d(X', Y')$, sledi da je $d(X', Y') > 0$, tj. $X' \neq Y'$. □

Definicija 2.26. *Izometrijsko preslikavanje skupa na samog sebe je izometrija ravni.*

Ako $X \rightarrow X'$ je transformacija Γ skupa S, onda $X' \rightarrow X$ je inverzno preslikavanje od Γ u oznaci Γ^{-1}. S obzirom da su rastojanja tačaka ista za Γ i Γ^{-1} sledeća teorema je jasna.

Teorema 2.37. *Inverzna izometrija je transformacija.*

□

Napomena: Ako je Γ izometrija i S bilo koji podskup ravni, tada $S\Gamma$ će označavati skup koji sadrži slike tačaka iz S.

Teorema 2.38. *Ako je $X' = X\Gamma$ izometrija, tada je $\langle ABC \rangle$ ako i samo ako važi $\langle A'B'C' \rangle$. Slike od $p(A, B)$, $pp(AB)$ i $S[AB]$ su $p(A', B')$, $pp(A'B')$ i $S[A'B']$ redom. Nekolinearnost je očuvana. Svaki trougao slika se u njemu podudaran trougao i svaki ugao slika se na podudaran ugao. Ako C ne pripada pravoj $p(A, B)$, tada C-strana od $p(A, B)$ se slika na C'-stranu od $p(A', B')$.*

Dokaz. Ako važi $\langle ABC \rangle$, tada su A, B, C tri kolinearne tačke i važi $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$. Kako je Γ "1–1" preslikavanje, A', B', C' su tri tačke takve da su zadovoljene jednakosti $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ i $d(A, C) = d(A', C')$. Odatle sledi da je $d(A', B') + d(B', C') = d(A', C')$, i otuda $\langle A'B'C' \rangle$.

S obzirom da Γ očuvava raspored tačaka, jasno je da je $pp(AB)\Gamma$ sadržan u $pp(A'B')$. Ali ako je Y tačka na $pp(A'B')$, to je jedinstvena tačka na polupravoj $pp(A'B')$ rastojanja $d(A', Y)$ od A'. Na polupravoj $pp(AB)$ postoji jedinstvena tačka X sa rastojanjem $d(A', Y)$ od A, otuda X' mora biti Y. Dakle $pp(A'B')$ je sadržan u $pp(AB)$. Obrnuta inkluzija daje $pp(AB) = pp(A'B')$. Tada $p(A, B) = pp(AB) \cup pp(BA)$ se mora slikati u $pp(A'B') \cup pp(B'A') = pp(A', B')$. Slično, $S[AB] = pp[AB) \cap pp[BA)$se slika na $pp[A'B') \cap pp[B'A') = S[A'B']$.

Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, zbir svaka dva od rastojanja $d(A, B)$, $d(B, C)$ i $d(C, A)$ je veći od trećeg, pa to svakako mora da važi i za $d(A', B')$, $d(B', C')$ i $d(C', A')$, otuda su i A', B', C' nekolinearne tačke.

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ sledi iz stranica-stranica-stranica uslova podudarnosti za trougao. Odatle takođe sledi da je $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$.

Ako C nije na pravoj $p(A, B)$, tada jasno C' nije na pravoj $p(A', B')$. Ako je $X \neq C$ i $X \in C$-strani prave $p(A, B)$, tada $X' \neq C'$, i iz $S[XC] \cap p(A, B) = \emptyset$ sledi da $S[X'C] \cap p(A', B') = \emptyset$, otuda $X' \in C'$-strani prave $p(A', B')$. Odatle strane prave $p(A, B)$ se slikaju na strane prave

$p(A', B')$. Ali, ako je $Y \neq C'$ i $Y \in C'$-strani prave $p(A', B')$ po pretpostavci postoji neka tačka Z koja se slika na Y. Kako se nijedna tačka iz $p(A, B) \cup$ ne-C-strana prave $p(A, B)$ ne slika na C'-stranu prave $p(A', B')$, sledi da Z mora biti na C-strani prave $p(A, B)$. Otuda strane prave $p(A, B)$ se slikaju na strane prave $p(A', B')$. $\square$

Definicija 2.27. *Preslikavanje u ravni pri čemu je svaka tačka slika u samu sebe je* **identičko** *preslikavanje I, tj. $XI = X$ za sve X iz ravni.*

Definicija 2.28. *Simetrija u ravni u odnosu na tačku A se definiše na sledeći način: Tačka A se slika u samu sebe, i ako je $X \neq A$ tada se X slika u X' tako da je A središte duži $S[XX']$. Simetriju u odsnosu na tačku A obeležavamo sa Γ_A.*

Definicija 2.29. *Simetrija u ravni u odnosu na pravu t se definiše na sledeći način: Ako tačka $X \in t$, tada se X slika u samu sebe, i ako $X \neq t$ tada se X slika u tačku X' tako da je t normalna bisektrisa (simetrala) duži $S[XX']$. Ovu simetriju obeležavamo sa Γ_t.*

2.2 Hiperbolična ravan

Definicije i teoreme koje smo do sada naveli u odeljku apsolutna geometrija, pripadaju takođe i euklidskoj geometriji, ali aksiome na kojima smo zasnovali apsolutnu ravan nisu dovoljne da zaokruže celu euklidsku geometriju. Iz dosadašnjih aksioma ne sledi da je zbir ugao u trouglu $180°$. Da bi to, i još mnogo činjenica euklidske geometrije utvrdili, neophodno je da pretpostavimo da važi neki od ekvivalenata "Euklidovog postulata paralelnosti". U poređenju sa ostalim Euklidovim postulatima, činilo se da je tvrđenje postulata paralelnosti vrlo složeno, pa se smatralo da on nije nezavisan od ostalih, već da se iz njih može izvesti. Drugim rečima, mislilo se da je on teorema, a ne aksioma. Mnogo je eminentnih matematičara pokušalo dokazati taj postulat, ali u tome nije bilo uspešno. Međutim, pokazalo se da je on nezavisan od ostalih, pa je to i dovelo do zasnivanja geometrije bez tog postulata, i nju danas zovemo apsolutna geometrija. Kasnije nezavisno od drugih, Gaus, Lobačevski, i Bulie su razvili geometriju o kojoj ćemo mi sada pisati, u kojoj su peti postulat zamenili aksiomom koja kaže da ako imamo tačku van zadate prave, onda kroz tu tačku prolaze bar dve prave koje ne seku zadatu pravu. To je hiperbolična geometrija. Ravan u kojoj ova aksioma važi nazivamo hiperbolična ravan.

S obzirom da je apsolutna geometrija interesantna struktura sama za sebe, teoreme koje slede ćemo označiti sa (A.G.) ukoliko važe i u apsolutnoj geometriji.

2.2.1 Hiperbolične paralele

Sada ćemo navesti aksiomu koja će upotpuniti strukturu aksioma iz apsolutne do hiperbolične geometrije.

Aksioma 9. *Ako tačka P ne pripada pravoj t, onda kroz nju prolaze bar dve prave koje nemaju preseka sa pravom t.*

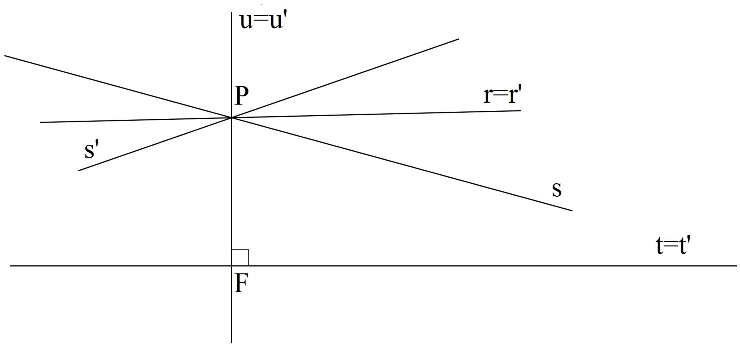
Biće nam zgodno da uvedemo i sledeću definiciju, s obzirom na ovu aksiomu.

Definicija 2.30. *Skup svih pravih koje prolaze kroz jednu tačku nazivamo* **eliptičan pramen pravih**. *Eliptičan pramen pravih koje prolaze kroz tačku A označavaćemo sa $\mathcal{P}(A)$.*

Napomena: Aksiomu 9 možemo sada preformulisati na sledeći način: ako prava t ne pripada pramenu pravih $\mathcal{P}(A)$, tada postoje bar dve prave iz tog pramena koje nemaju preseka sa pravom t. Međutim onda se javlja niz prirodnih pitanja. Koje od pravih iz pramena ne seku t? Ima li ih više od dve? Kako su raspoređene prave u pramenu koje seku i koje ne seku t?

Simetrije koje je hiperbolična ravan nasledila od apsolutne ravni daju delimičan odgovor na pitanja koja su postavljena.

Ako tačka P ne pripada pravoj t, tada je F podnožje normale iz tačke P na pravu t. Neka je $u = p(P, F)$ i $X' = X\Gamma_u$ osna simetrija sa osom u. Pošto je $t \perp u$, prava t se slika na samu sebe, tj. $t' = t\Gamma_u = t$. Čitav pramen $\mathcal{P}(P)$ se slika na samog sebe, ali samo dve prave iz pramena i njihove slike, recimo u i r su normalne na u u tački P. Ako prava s nije neka od te dve prave onda je $s' = s\Gamma_u \neq s$, i s i s' su zamenjene simetrijom Γ_u. Međutim, transformacije hiperbolične ravni očuvavaju preseke i ne-preseke pravih. Prema tome, $s \cap t \neq \emptyset \Rightarrow s' \cap t' \neq \emptyset \Rightarrow s' \cap t \neq \emptyset$ i $s \cap t = \emptyset \Rightarrow s' \cap t = \emptyset$.



Sl. 2.5.

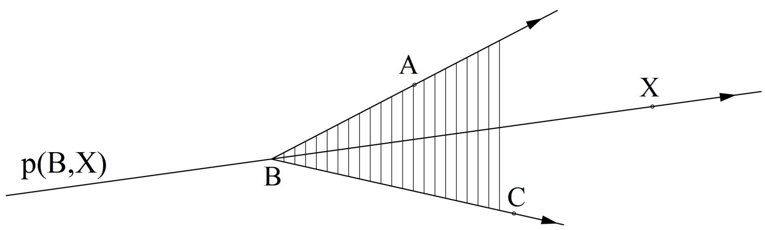
Odatle sledi da se preseci sa pravom t javljaju u parovima (osim za u), da su simetrični u odnosu na u (osim za r)i isto važi za ne-preseke. Naime, postoje prave koje nemaju preseka sa pravom t koje su različite od r (sledi iz Aksiome 9), i koje se slikaju u prave koje ne presecaju t, pa pramen $\mathcal{P}(P)$ mora sadržati najmanje tri prave koje ne seku t.

Definicija 2.31. *Prava deli ugao ako prolazi kroz teme ugla i seče unutrašnjost ugla.*

Sledeća teorema ponovo objašnjava određene osobine apsolutne geometrije.

Teorema 2.39. *Ako se tačka X nalazi u unutrašnjosti ugla $\sphericalangle ABC$, tada $p(B,X)$ seče ugao, $p(B,X) \cap In(\sphericalangle ABC) = pp(BX)$ i $p(B,X)$ deli $pp(BA)$ i $pp(BC)$.*

□

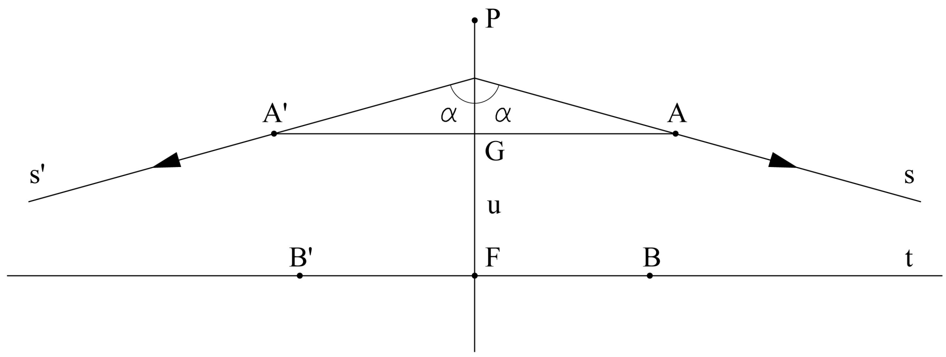


Sl. 2.6.

Sada možemo ustanoviti neobičnu pojavu, da je u ovoj geometriji svaka prava sadržana unutar nekog ugla.

Teorema 2.40. *Ako tačka P nije na pravoj t, tada postoji ugao u P ($\sphericalangle A'PA$) čija unutrašnjost sadrži pravu t i čija simetrala je normalna na t.*

□



Sl. 2.7.

Napomena: A je proizvoljna tačka na polupravoj s, pa je $A' = A\Gamma_u$ na polupravoj s'.

Posledica 2.40.1. *Svaka prava koja pripada pramenu u P i koja seče t deli ugao $\sphericalangle APA'$.*

□

Iz prethodne posledice sledi da nam Teorema 2.39. pruža nova saznanja o pravama iz pramena $\mathcal{P}(P)$ koje seku t. Ipak sigurno je da postoji mnogo više uglova u tački P sa ovim osobinama. Sledeća teorema opisuje jedan specijalan slučaj.

Teorema 2.41. *Ako tačka P nije na pravoj t, tada postoji samo jedan ugao na pravoj t sa osobinama iz Teoreme 2.39. i to takav da svaka prava koja deli ovaj ugao seče pravu t.*

□

Napomena: Ako tačka P nije na pravoj t, ugao u tački P sa osobinama iz teoreme 2.40 označavaćemo sa $\sphericalangle(P, t)$.

Sledećim definicijama ćemo proširiti koncept paralelnih pravih u hiperboličnoj geometriji.

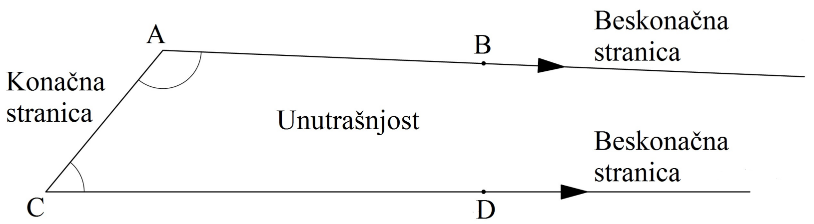
Definicija 2.32. *Otvorena poluprava $pp(PC)$ je paralelana sa otvorenom polupravom $pp(AB)$ ako se prave koje sadrže ove poluprave ne seku i ako iz $pp(PX) \subset In(\sphericalangle APC)$ sledi da se $pp(PX)$ i $pp(AB)$ seku. Poluprava pp je paralelna sa polupravom pp', u oznaci $pp \parallel pp'$, ako je otvorena poluprava od pp paralelana sa otvorenom polupravom od pp'. Da pp nije paralelno sa pp' ćemo označavati sa $pp \nparallel pp'$.*

Definicija 2.33. *Poluprava pp je paralelana sa pravom t ako je paralelana sa nekom polupravom koja je sadržana u t. Prava s je paralelna sa pravom t ako je neka poluprava koja je sadržana u s paralelana sa nekom polupravom iz t. Ovaj paralelizam je simetrična relacija koju označavamo $pp \parallel t$ ili $t \parallel pp$ i $s \parallel t$ ili $t \parallel s$.*

2.2.2 Dvougao

S obzirom da smo u prethodnom delu predstavili pojam paralelnih polupravih i pravih u hiperboličnoj geometriji, sada ćemo predstaviti dvougao i hiperparalele i njihove osobine koje će nam biti potrebne za kasniji rad.

Definicija 2.34. *Unija dve zatvorene, paralelne poluprave sa zatvorenom duži koja spaja njihove inicijalne tačke je* **dvougao**. *Zatvorene poluprave su* **beskonačne stranice** *dvougla, a zatvorena duž je* **konačna stranica** *dvougla. Svaka krajnja tačka konačne stranice je teme ugla koji sadrži beskonačnu stranicu i duž, i ta dva ugla su* **uglovi** *dvougla i njihova temena su* **temena** *dvougla. Dvougao čiji su uglovi* $\sphericalangle BAC$ *i* $\sphericalangle DCA$ *i čija je konačna stranica* $S[AC]$ *označavaćemo sa* $(B\text{–}AC\text{–}D)$. *Unutrašnjost dvougla, u oznaci* $In(B\text{–}AC\text{–}D)$, *je presek unutrašnjosti dva ugla dvougla. Još važi da je* $(B\text{–}AC\text{–}D) = (D\text{–}CA\text{–}B)$ (sl. 2.8).



Sl. 2.8.

Definicija 2.35. *Ugao koji je susedan i suplementaran uglu dvougla je* **spoljašnji ugao** *dvougla u temenu dvougla.*

Da bi se ustanovile osobine spoljašnjeg ugla dvougla koje su slične osobinama spoljašnjih uglova trougla koriste se parovi pravih koje se ne seku i nisu paralelne. Takve prave imaju jako važnu ulogu u hiperboličnoj geometriji.

Definicija 2.36. *Dve prave su* **hiperparalelne** *ako nemaju preseka i nisu paralelne. Da su prave* r *i* s *hiperparalelne označavačemo sa* $r)(s$ *ili* $s)(r$.

Teorema 2.42. *Za dve prave koje su normalne na treću pravu kažemo da su hiperparalelne.*

□

Teorema 2.43. *Ako tačka* P *ne pripada pravoj* t, *tada za svaku tačku* Y *sa prave* t *postoji prava* s *iz pramena* $\mathcal{P}(P)$ *takva da su* s *i* t *hiperparalelne i prava* $p(P, Y)$ *kao transverzala od* t *i* s *formira podudarne naizmenične unutrašnje uglove.*

□

Navešćemo sada bitnu osobinu spoljašnjih uglova dvougla.

Teorema 2.44. *Spoljašnji ugao dvougla veći je od nesusednog unutrašnjeg ugla tog dvougla.*

□

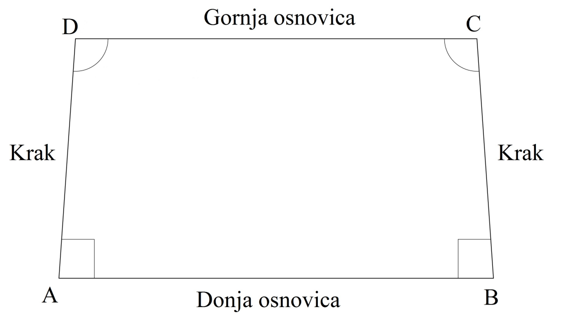
2.2.3 Lambertov i Sakerijev četvorougao

Sledeća dva četvorougla koja ćemo definisati su imala jako važnu ulogu u istoriji hiperbolične geometrije.

Definicija 2.37. *(***Lambertov četvorougao***) Četvorougao sa tri prava ugla je Lambertov četvorougao ili L-četvorougao.*

Definicija 2.38. *(***Sakerijev četvorougao***) Sakerijev četvorougao je četvorougao u kome su dve naspramne stranice podudarne i dva susedna ugla prava. Duž koja spaja središnju tačku donje osnovice sa središnjom tačkom donje osnovice je* **visina** *Sakerijevog četvorougla ili S-četvorougla.*

Napomena: Duž koja spaja dva temena pravih uglova naziva se **donja osnovica**, naspramna stranica je **gornja osnovica** i preostale dve stranice nazivaju se **krakovi** četvorougla. Svaki od uglova koji sadrži gornju osnovicu i krak naziva se ugao pri vrhu.

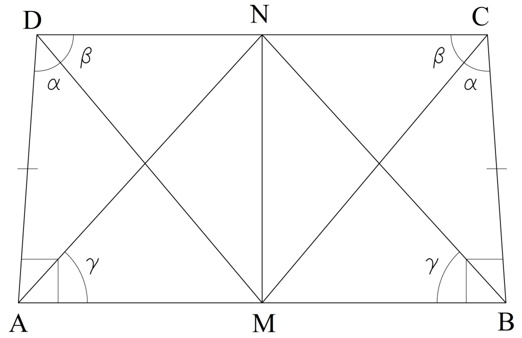


Sl. 2.9.

Ako je $A \neq B$, onda postoje pravi uglovi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAD$ takvi da C i D leže sa iste strane prave $p(A, B)$. Time utvrđujemo da je izlomljena linija kojoj odgovara redosled tačaka $ABCD$ pravilan, konveksan četvorougao, i otuda sledi da S-četvorougao postoji. Slično za Lambertov četvorougao, ako je C u unutrašnjosti pravog ugla $\sphericalangle XAY$, tada podnožje od C na pravoj $p(A, X)$ je tačka B na polupravoj $pp(AX)$, i podnožje od C na pravoj $p(A, Y)$ je tačka D na polupravoj $pp(AY)$. Opet, možemo utvrditi da izlomljena linija kojoj odgovara redosled tačaka $ABCD$ je pravila, konveksan četvorougao sa tri prava ugla, i otuda je on Lambertov ili L-četvorougao.

Teorema 2.45. *Uglovi pri vrhu Sakerijevog četvorougla su podudarni i prava koja sadrži visinu je normalna na prave koje sadrže gornju i donju osnovicu tog četvorougla.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ Sakerijev četvorougao sa pravim uglovima kod temena A i B, sa donjom osnovicom $S[AB]$ i važi $S[AD] \cong S[BC]$. Neka je tačka M središnja tačka donje osnovice, i tačka N središnja tačka gornje osnovice $S[CD]$. Tada je $\triangle MAD \cong \triangle MBC$, po stavu stranica-ugao-stranica, pa je $\alpha = \sphericalangle MDA^\circ = \sphericalangle MCB^\circ$, i $S[MD] \cong S[MC]$. Gornja osnovica $S[CD]$ je tako baza jednakokrakog trougla $\triangle MDC$, i otuda je $\beta = \sphericalangle MDC^\circ = \sphericalangle MCD^\circ$.



Sl. 2.10.

Kako $M \in S(AB)$, tada iz teoreme apsolutne geometrije koja kaže da "Tačka koja pripada stranici četvorougla, ali ne i uglu četvorougla, je u unutrašnjosti tog ugla", sledi da $M \in In(\sphericalangle ADC)$ i $M \in In(\sphericalangle BCD)$. Stoga $\sphericalangle ADC^\circ = \sphericalangle ADM^\circ + \sphericalangle MDC^\circ = \alpha + \beta$. Slično, $\sphericalangle BCD^\circ = \sphericalangle BCM^\circ + \sphericalangle MCD^\circ = \alpha + \beta$. Odatle sledi da su uglovi pri vrhu podudarni. Kako prava $p(M, N)$ prolazi kroz teme M i središnju tačku baze u jednakokrakom trouglu $\triangle MCD$, $p(M, N) \perp p(C, D)$ (Teorema 2.23). Kako su uglovi pri vrhu, $\sphericalangle ADN$ i $\sphericalangle BCN$, podudarni, i $S[ND] \cong S[NC]$, $\triangle ADN \cong \triangle BCN$, po stavu stranica-ugao-stranica, i odatle je $S[AN] \cong S[BN]$. Iz ove podudarnosti sledi da je trougao $\triangle ANB$ jednakokraki sa bazom $S[AB]$. Kako prava $p(M, N)$ prolazi kroz teme N ovog trougla, i takođe prolazi kroz središnju tačku donje osnovice sledi da je $p(M, N) \perp p(A, B)$. □

Posledica 2.45.1. *Prave koje sadrže donju i gornju osnovicu Sakerijevog četvorougla su hiperparalelne. Prave koje sadrže krakove su hiperparalelne jedna drugoj i hiperparalelne pravoj koja sadrži visinu.*

□

Sledeće teoreme se odnose na osobine Sakerijevog i Lambetrovog četvorougla i navešćemo ih bez dokaza.

Teorema 2.46. *Uglovi pri vrhu Sakerijevog četvorougla su oštri.*

□

Teorema 2.47. *U Lambertovom četvorouglu, četvrti ugao je oštar.*

□

Teorema 2.48. *U Lambertovm četvorouglu stranica koja je krak oštrog ugla je kraća od suprotne stranice.*

□

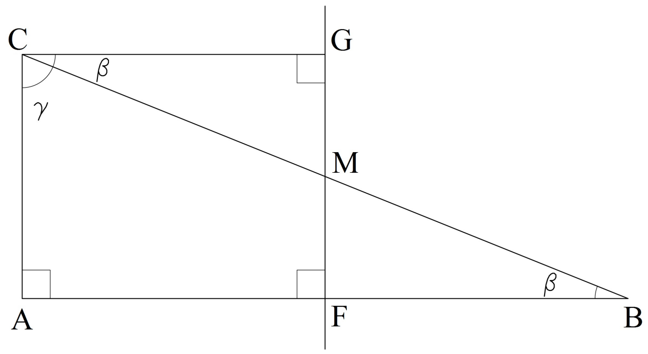
Teorema 2.49. *U Sakerijevom četvorouglu, gornja osnovica je veća od donje osnovice i krakovi su veći od visine.*

□

Iz prethodnih teorema lako je zaključiti da je zbir uglova u Sakerijevom četvorouglu manji od $360°$. U daljem tekstu ćemo pokazati da je zbir uglova u svakom trouglu manji od $180°$, i odatle će direktno slediti da je zbir uglova u bilo kom četvorouglu manji od $360°$.

Teorema 2.50. *Zbir uglova u pravouglom trouglu je manji od* $180°$.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ pravougli trougao, i neka je $\sphericalangle A° = 90°$, $\sphericalangle ABC° = \beta$ i $\sphericalangle ACB° = \gamma$. Ako je M središnja tačka hipotenuze $S[BC]$, i F podnožje tačke M na pravu $p(A, B)$, iz činjenice da je $\sphericalangle B$ oštar ugao sledi da F pripada polupravoj $pp(BA)$. Prave $p(C, A)$ i $p(M, F)$ su obe normalne na pravu $p(A, B)$, pa su otuda i hiperparalelne, pa sve tačke prave $p(M, F)$ leže sa jedne strane prave $p(A, C)$. Kako je M na $p(CB)$ sa B-strane prave $p(A, C)$, F je sa B-strane prave $p(A, C)$, pa je $F \subset pp(AB)$ i važi $\langle AFB \rangle$.

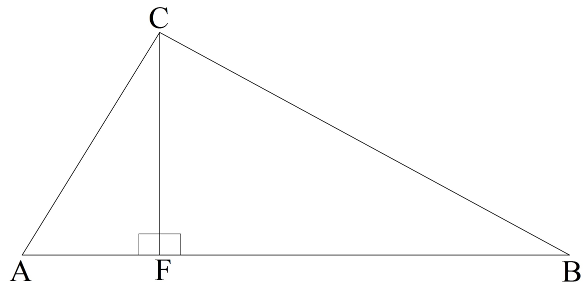


Sl. 2.11.

Obeležimo sada sa G podnožje iz C na pravu $p(M, F)$. Pošto je $\sphericalangle BMF$ oštar, $\sphericalangle CMF$ je tup, pa G nije na polupravoj $pp[MF)$, ali jeste na suprotnoj otvorenoj polupravi. Tako su, $\sphericalangle BMF$ i $\sphericalangle CMG$ suprotni podudarni uglovi. Po stavu hipotenuza-ugao, $\triangle MBF \cong \triangle MCG$, i sledi $\sphericalangle MCG° = \sphericalangle MBF° = \beta$. Četvorougao $AFGC$ je Lambertov četvorougao, a je po prethodnoj teoremi $\sphericalangle ACG° < 90°$. A kako važi $\langle FMG \rangle$, $M \in In(\sphericalangle ACG)$, i $\sphericalangle ACM° + \sphericalangle MCG° = \sphericalangle ACG°$. Otuda je $\gamma + \beta = \sphericalangle ACG° < 90°$, i $\gamma + \beta + \sphericalangle A° < 180°$. □

Teorema 2.51. *Zbir uglova u svakom trouglu je manji od* $180°$.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao, takav da su mu mere uglova maksimalne i možemo pretpostaviti da je $\sphericalangle C° \leq \sphericalangle A°$ i $\sphericalangle C° \leq \sphericalangle B°$. S obzirom na to da trougao može imati najviše jedan neoštar ugao, i da taj ugao mora biti najveće mere, sledi da su $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle CBA$ oba oštra ugla. Prema tome ako je F podnožje od C na $p(A, B)$, F mora pripadati polupravama $pp(AB)$ i $pp(BA)$, a odatle sledi da je F između tačaka A i B.



Sl. 2.12.

Sada iz prethodne teoreme za pravougle trougle, $\triangle ACF$ i $\triangle BCF$, sledi $\sphericalangle A° + \sphericalangle ACF° + 90° < 180°$ i $\sphericalangle B° + \sphericalangle BCF° + 90° < 180°$, pa dalje sledi, $\sphericalangle A° + \sphericalangle ACF° + \sphericalangle BCF° < 180°$, tj. zbir $\sphericalangle A° + \sphericalangle B° + \sphericalangle C°$ je manji od $180°$ što je i trebalo pokazati. □

Posledice ove teoreme su:

Posledica 2.51.1. *Zbir uglova u svakom četvorouglu je manji od* $360°$.

□

Od ranije znamo da uglovi u trouglu u euklidskoj geometriji određuju oblik trougla ali ne i veličinu. To znači da ako dva trougla imaju podudarne odgovarajuće unutrašnje uglove, oni ne moraju biti nužno podudarni, u euklidskoj geometriji za takve trouglove kažemo da su slični, tj. odgovarajuće stranice su im proporcionalne. Međutim u hiperboličnoj geometriji je malo drugačije. Naime ukoliko važi da dva trougla imaju podudarne odgovarajuće unutrašnje uglove, odatle odmah sledi da su oni podudarni. To znači da ako su nam poznati unutrašnji uglovi trougla, onda nam je taj trougao određen u potpunosti. Sledeća teorema nam upravo o tome govori i navešćemo je bez dokaza.

Teorema 2.52. *(Ugao-ugao-ugao) Ako za dva trougla važi da su im odgovarajući unutrašnji uglovi podudarni, onda su ta dva trougla podudarni.*

□

Sledećim teoremama ćemo zaključiti deo o Lambertovom i Sakerijevom četvorouglu i one se odnose na osobine srednje linije trougla. Podsetimo se da je srednja linija trougla duž koja spaja središnje tačke dveju strana trougla i da u euklidskoj geometriji važi da ako je prava $p(M, N)$ u trouglu $\triangle ABC$ takva da prolazi kroz središnje tačke M i N duži $S[CA]$ i $S[CB]$ redom, onda je $p(M, N)$ paralelna sa pravom $p(A, B)$. I još važi, pošto su trouglovi $\triangle CMN$ i $\triangle CAB$ slični, onda je dužina $S[MN]$ tačno pola dužine $S[AB]$. Kako smo već naglasili da teorija o sličnosti trouglova ne postoji u hiperboličnoj geometriji, ova teorema će biti analogna teoremi o srednjoj liniji trougla.

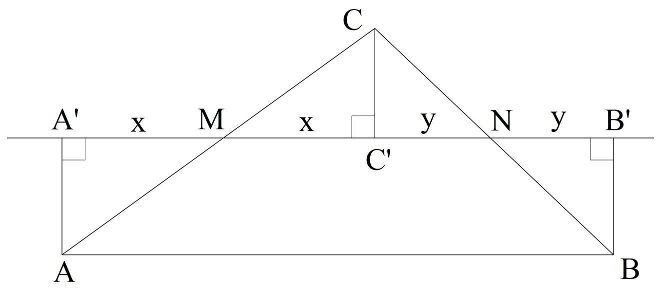
Teorema 2.53. *Duž koja spaja središta dve stranice trougla je manja od polovine treće stranice. Prava koja sadrži tu duž (srednja linija) je hiperparalelna sa pravom koja sadrži treću stranicu i obe su normalne na simetralu treće stranice.*

Dokaz. U trouglu $\triangle ABC$, neka je M središte $S[CA]$ i N središte od $S[CB]$. Neka su A', B' i C' podnožja na pravu $p(M,N)$ tačaka A, B, C redom. U trouglu $\triangle CMN$, bar jedan od uglova $\sphericalangle CMN$ i $\sphericalangle CNM$ je oštar, i zbog notacije ćemo pretpostaviti da je $\sphericalangle CNM$ oštar. Prema tome B' je na otvorenoj polupravi suprotnoj polupravi $pp(NM)$ i N se nalazi između tačaka M i B'. Takođe $\triangle BNB' \cong \triangle CNC'$, po stavu hipotenuza-ugao, pa je $d(B,B') = d(C,C')$.

Sada imamo tri slučaja za meru ugla $\sphericalangle CMN$ i raspored tačaka A', M, C', N, B' na srednjoj liniji trougla.

Slučaj 1. $\sphericalangle CMN^\circ < 90^\circ$

Ovaj slučaj nameće raspored A', M, C', N, B' na pravoj $p(M,N)$. Po stavu hipotenuza-ugao, $\triangle AMA' \cong \triangle CMC'$ i stoga $d(A,A') = d(C,C')$. Iz ove jednakosti, zajedno sa $d(B,B') = d(C,C')$, sledi da je i $d(A,A') = d(B,B')$. Stoga je $ABB'A'$ Sakerijev četvorougao sa gornjom osnovicom $S[AB]$ i donjom osnovicom $S[A'B']$, tako da je prava koja sadrži donju osnovicu $p(M,N)$ hiperparalelna sa pravom koja sadrži gornju osnovicu $p(A,B)$.

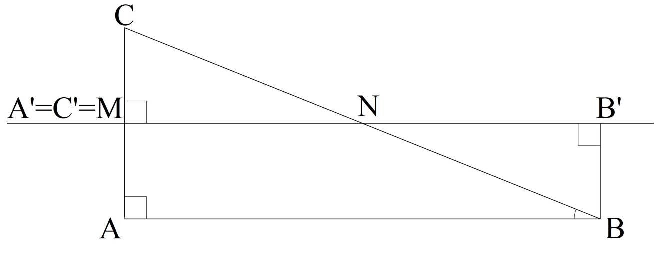


Sl. 2.13.

Ako je $x = d(A',M) = d(M,C')$ i $y = d(C',M) = d(N,B')$, redosled tačaka pokazuje da $d(M,N) = x + y$ i $d(A',B') = 2x + 2y = 2d(M,N)$. Pošto je po teoremi od ranije donja osnovica kraća od gornje osnovice, $d(A',B') < d(A,B)$, pa $2d(M,N) < d(A,B)$, i stoga je $d(M,N) < \frac{1}{2}d(A,B)$. Simetrala duži $S[AB]$ je visina četvorougla i stoga je normalna na pravu koja sadrži donju osnovicu $p(M,N)$.

Slučaj 2. $\sphericalangle CMN^\circ = 90^\circ$

Iz ove jednakosti sledi da je raspored tačaka na pravoj $p(M,N)$ sledeći $A' = M = C'$, N, B'. Sada pošto je $d(A,M) = d(M,C)$ i $d(A,A') = d(C,C')$, ova jednakost zajedno sa $d(C',C) = d(B',B)$, ponovo pokazuje da je $d(A,A') = d(B,B')$.



Sl. 2.14.

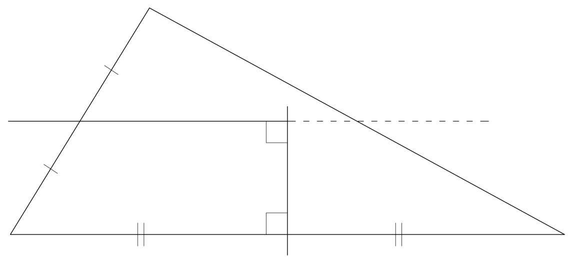
Stoga je $ABB'A'$ ponovo S-četvorougao. Kao i u slučaju 1., $p(M,N)$ je hiperparalelno sa $p(A,B)$ i normalno je na simetralu duži $S[AB]$. Pošto je $\triangle CA'N \cong \triangle BB'N$, sledi da je $d(A',N) = d(N,B) = \frac{1}{2}d(A',B')$. Ponovo iz $d(A',B') < d(A,B)$ sledi da $2d(A',N) = 2d(M,N) < d(A,B)$ i odatle je $d(M,N) < \frac{1}{2}d(A,B)$.

Slučaj 3. $\sphericalangle CMN^\circ > 90^\circ$

Slično prethodnim slučajevima, s tim što imamo moguća tri različita rasporeda tačaka, (C', M, A', N, B'), $(C', M, A' = N, B')$ i (C', M, N, A', B'). □

Posledica 2.53.1. *Prava koja prolazi kroz središnju tačku jedne strane trougla i koja je normalna na simetralu druge stranice, prolazi i kroz središnju tačku treće stranice.*

□



Sl. 2.15.

Ranije smo videli da ako su dve prave normalne na treću, onda su one hiperparalelne. Da bismo utvrdili i obrnuto tvrđenje koristimo S-četvorougao. To je upravo sledeća teorema i navešćemo je bez dokaza.

Teorema 2.54. *Ako su prave r i s hiperparalelne, onda postoji tačno jedna prava koja je normalna na obe i r i s.*

□

2.2.4 Ugao paralelnosti i funkcija Lobačevskog

U ovom delu nam je cilj da ispitamo na koji način se menja rastojanje između tačke P i prave t ukoliko se tačka P kreće po pravoj s koja je paralelna sa pravom t. Da bismo to uspešno postigli uvešćemo funkciju Lobačevskog i ugao paralelnosti. Navešćemo neke glavne osobine ove funkcije i kasnije ćemo ih primenjivati po potrebi.

Definicija 2.39. *Neka je tačka P van prave $t = p(B, B')$ i tačka Q podnožje iz P na t. Ako je $s = p(A, A')$ prava koja sadrži tačku P i paralelna je sa $p(B, B')$, tada oštar ugao $\sphericalangle QPA'$ nazivamo* **uglom paralelnosti** *prave $p(A, A')$ u tački P sa pravom $p(B, B')$, tj. ugao koji odgovara duži $S[PQ]$. Duž $S[PQ]$ nazivamo* **duž paralelnosti**.

Definicija 2.40. *(***Funkcija Lobačevskog***) Funkcija Lobačevskog Π čija vrednost $\Pi(x)$ je jednaka meri oštrog ugla u pravouglom dvouglu čija konačna stranica ima dužinu x.*

Ako je $0 < x < \infty$, tada postoji pravougli dvougao čija konačna strana ima dužinu x. Svi takvi dvouglovi su podudarni, po konačnoj strani, pa je Π dobro definisana funkcija za $0 < x < \infty$.

Teorema 2.55. *Funkcija Lobačevskog Π je strogo opadajuća, $(y > x \Rightarrow \Pi(y) < \Pi(x))$*

Dokaz. Neka su P i Q tačke na polupravoj $pp(AB)$ takve da $d(A, P) = x$ i $d(A, Q) = y$ i neka je $y > x$. Tada postoji prava $p(A, C)$ koja je normalna na $p(A, B)$ u tački A. Kroz tačke P i Q prolaze poluprave $pp(PX)$ i $pp(QY)$, redom tako da je $pp(PX) \parallel pp(AC)$ i $pp(QY) \parallel pp(AC)$. Zbog toga što je $pp(PX) \parallel pp(QY)$, dvougao $(X\text{–}PQ\text{–}Y)$ postoji. Pošto je $y > x$ tada $\langle APQ \rangle$, i odatle sledi da je $\sphericalangle APX$ spoljašnji ugao u tački P na $(X\text{–}PQ\text{–}Y)$. Na osnovu osobine spoljašnjeg ugla dvougla, $\sphericalangle PQY^\circ < \sphericalangle APX^\circ$, i stoga $\sphericalangle AQY^\circ < \sphericalangle APX^\circ$, što će reći da $\Pi(y) < \Pi(x)$. □

Sl. 2.16.

S obzirom da su strogo opadajuće funkcije "1–1" preslikavanje domena na kodomen, ova teorema ima sledeću posledicu.

Posledica 2.55.1. *Postoji inverzna funkcija za Π i to je funkcija Π^{-1}.*

□

Pošto je vrednost funkcije $\Pi(x)$ mera oštrog ugla, onda je kodomen te funkcije interval $0 < y < 90$. Kako god, nije očigledno, ni lako dokazati da je kodomen od Π ceo otvoren interval. Da bismo to dokazali, potrebne su osobine trougla koje još nismo ustanovili, pa ćemo sada prvo navesti te osobine i dokazati neke od njih, pa ćemo se onda vratiti na funkciju Lobačevskog.

2.2.4.1 Defekt trougla

Definicija 2.41. **Defekt trougla** *je razlika* 180° *i zbira uglova trougla. Tako je defekt* $\triangle ABC$*, u oznaci* $D(ABC)$*, iznosi* $180^\circ - \sphericalangle A^\circ - \sphericalangle B^\circ - \sphericalangle C^\circ$.

Definicija 2.42. **Prosta transverzala trougla** *je prava koja deli ugao trougla. Ako je prava* t *prosta transverzala trougla* $\triangle ABC$ *i deli* $\sphericalangle A$*, ona seče* $S(BC)$ *u nekoj tački* D*, i trouglovi* $\triangle ADB$ *i* $\triangle ADC$ *su podtrouglovi u odnosu na* t.

Sledeća teorema daje nam osobinu trougla koju smo tražili.

Teorema 2.56. *Defekt trougla je suma defekata dva podtrougla u odnosu na prostu transverzalu trougla.*

Dokaz. Neka je sa t označena prava koja deli ugao $\sphericalangle BAC$ trougla $\triangle ABC$ i koja seče $S(BC)$ u tački D. Neka je $\alpha_1 = \sphericalangle DAB^\circ$, $\alpha_2 = \sphericalangle DAC^\circ$, $\varphi_1 = \sphericalangle ADB^\circ$ i $\varphi_2 = \sphericalangle ADC^\circ$. Po definiciji

$$D(ADB) = 180^\circ - \alpha_1 - \varphi_1 - \sphericalangle B^\circ \tag{1}$$

i

$$D(ADC) = 180^\circ - \alpha_2 - \varphi_2 - \sphericalangle C^\circ. \tag{2}$$

Pošto važi raspored $\langle BDC \rangle$, onda je $\alpha_1 + \alpha_2 = \sphericalangle A^\circ$ i $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$. Iz ovih jednakosti, i (1) i (2) sledi da je

$$\begin{aligned} D(ADB) + D(ADC) &= 360^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) - (\sphericalangle B^\circ + \sphericalangle C^\circ) \\ &= 180^\circ - (\sphericalangle A^\circ + \sphericalangle B^\circ + \sphericalangle C^\circ) = D(ABC). \end{aligned}$$

□

Posledica 2.56.1. *Defekt trougla je veći nego defekt bilo kog podtrougla koji odgovara prostoj transverzali trougla.*

□

Vratimo se sada na funkciju Lobačevskog. Već smo rekli da želimo da pokažemo da ako je α broj iz intervala $(0^\circ, 90^\circ)$, onda postoji broj a takav da važi da je $\Pi(a) = \alpha$. To bi bilo ekvivalentno tvrđenju da ako je $\sphericalangle BAC$ bilo kakav oštar ugao, onda je $\sphericalangle BAC$ takođe oštar ugao nekog pravouglog dvougla.

Teorema 2.57. *Ako je* $\sphericalangle BAC$ *oštar ugao, tada postoji prava koja ne seče* $p(A,C)$ *i koja je normalna na* $p(A,B)$ *u nekoj tački poluprave* $pp(AB)$.

□

Sa ovom teoremom imamo sve što je potrebno da dokažemo da je kodomen od Π ceo otvoren interval $(0^\circ, 90^\circ)$. Međutim zbog opširnosti dokaza nećemo ga pisati već ćemo samo navesti teoremu.

Teorema 2.58. *Ako je* α *između* 0° *i* 90°*, tada postoji pozitivan broj* a *takav da* $\Pi(a) = \alpha$.

□

Posledica 2.58.1. *Ako je* $\sphericalangle BAC = \alpha < 90^\circ$ *i ako je tačka* E *na* $pp(AB)$ *takva da* $d(A, E) = \Pi^{-1}(\alpha)$, *tada je prava normalna na* $p(A, B)$ *u tački* E *paralelna sa* $pp(AC)$.

□

Sada ćemo se vratiti na problem varirajućih duži paralelnosti sa početka ovog odeljka. Ako je tačka P na pravoj s ima podnožje F na pravoj t, želimo da znamo način na koji se $d(P, F) = d(P, t)$ menja kako P varira na s. Počećemo sa slučajem u kojem se s i t seku u tački A i definisaćemo $x = d(A, P)$, $y = d(P, F)$ i $z = d(A, F)$.

Sledeće slučajeve nećemo razrađivati, već ćemo njihove rezultate dati kao teoreme.

Slučaj 1. $s \perp t$

Teorema 2.59. *Ako je* $\sphericalangle BAC$ *oštar ugao, tačka* P *na* $pp(AC)$ *ima podnožje* F *na pravoj* $p(A, B)$ *na polupravoj* $pp(AB)$. *Ako je* $x = d(A, P)$, $y = d(P, F)$ *i* $z = d(A, F)$, *tada su* y *i* z *rastuće funkcije od* x. *Kako* x *raste, raste i* y, *ali* z *je uvek manje od* $\Pi^{-1}(\sphericalangle BAC^\circ)$.

□

Slučaj 2. $s \parallel t$

Teorema 2.60. *Ako je prava* s *paralelna sa pravom* t, *rastojanje* $d(P, t)$ *opada kako se* P *kreće u pravcu paralelizma na* s, *i raste kako se* P *kreće po* s *u suprotnom pravcu. Štaviše, ako je* k *bilo koji pozitivan broj, tada postoji tačno jedna tačka* P_0 *takva da je* $d(P_0, t) = k$.

□

Posledica 2.60.1. *Ako je* $s \parallel t$, *kada se* P *kreće po* s *u pravcu paralelizma,* $d(P, t)$ *postaje proizvoljno malo, i kada se* P *kreće po* s *u suprotnom pravcu,* $d(P, t)$ *postaje proizvoljno veliko.*

□

Napomena: Kao što ova posledica pokazuje, ako je $s \parallel t$ tada s i t prilaze jedna drugoj u pravcima paralelizma proizvoljno blizu ali se nikada ne dotiču. Iz ovog razloga, paralelne prave s i t se, u mnogim tekstovima, nazivaju "asimptote".

Slučaj 3. $s)(t$

Teorema 2.61. *Ako su prave* s *i* t *normalne na pravu* u *u tačkama* A *i* B *redom, sa* $d(A, B) = a > 0$ *i ako tačka* P *na* s *nije tačka* A, *tada* P *i njegovo podnožje* F *na* t *leže na jednoj strani prave* u. *Ako je* $x = d(A, P)$, $y = d(P, F)$ *i* $z = d(A, F)$ *tada su* y *i* z *rastuće funkcije od* x. *Minimalna vrednost od* y *je* a *i ona je dostignuta u tački* $x = 0$. *Kako* x *raste, raste i* y, *ali* z *je ograničeno sa* $\Pi^{-1}[90^\circ - \Pi(a)]$. *Ako su* E *i* E' *dve tačke na* t *i nalaze se na rastojanju* $\Pi^{-1}[90^\circ - \Pi(a)]$ *od* B, *projekcija* s *na* t *je otvorena duž* $S(EE')$.

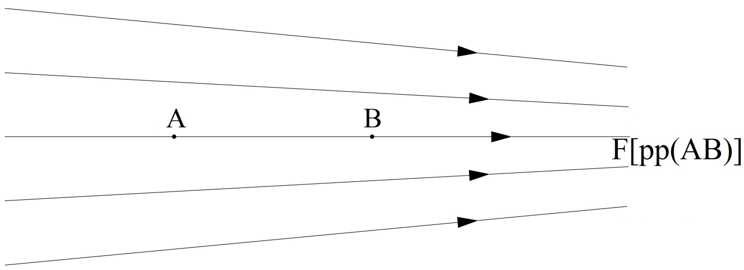
□

2.2.5 Oricikli

Poznato je da i u euklidskoj i hiperboličnoj geometriji važi da dve tačke jedinstveno određuju pravu, jer nam to sledi iz aksioma apsolutne geometrije. Sa druge strane samo u euklidskoj geometriji tri nekolinearne tačke imaju tzv. ”svojstvo 3 tačke”, odnosno one pripadaju jedinstvenoj kružnici, pa tako oko svakog trougla u euklidskoj ravni se može opisati kružnica. U ovom delu želimo da istražimo analogiju ”svojstva 3 tačke” u hiperboličnoj geometriji.

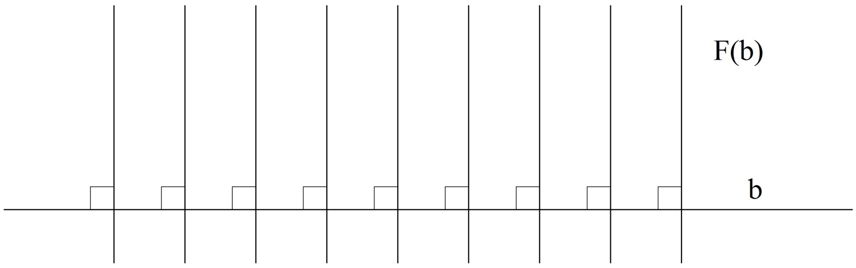
Počećemo sa definicijama specijalnih kolekcija pravih.

Definicija 2.43. *(Paraboličan pramen pravih) Familija paralelnih pravih u pravcu poluprave $pp(AB)$ je kolekcija pravih označena sa $\mathcal{F}[pp(AB)]$, koja se sastoji od prave koja sadrži polupravu $pp(AB)$ i svih pravih koje su paralelne sa njom.*



Sl. 2.17.

Definicija 2.44. *(Hiperboličan pramen pravih) Kolekcija pravih normalnih na pravu b je hiperparalelna familija čija je baza prava b određena sa $\mathcal{F}(b)$.*



Sl. 2.18.

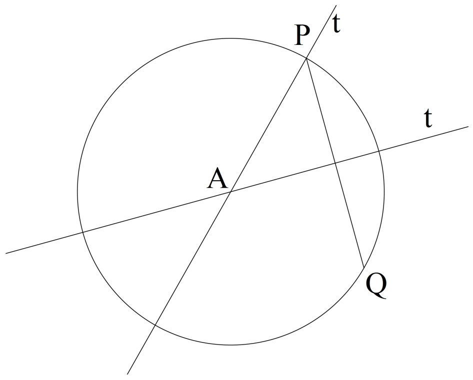
Definisali smo sada tri kolekcije pravih, eliptičan pramen pravih, paraboličan pramen pravih i hiperboličan pramen pravih i to su osnovne familije pravih u smislu da svake dve prave pripadaju tačno jednom od ovih pramenova i time ga određuju.

Sada ćemo se vratiti na kružnicu u apsolutnoj geometriji i pogledati je sa druge tačke gledišta da bismo uočili kako se tri osnovne familije pravih odnose na problem tri tačke.

Neka su tačke A i P različite tačke u apsolutnoj ravni, sa tim da je $d(A, P) = h$. Tada, po definiciji, imamo

$$C(A, h) = C(A, d(A, P)) = \{X : d(A, X) = h\}. \tag{3}$$

Pogledajmo sada bilo koju od pravih t koja pripada eliptičnom pramenu $\mathcal{P}(A)$. Posto simetrija prave Γ_t preslikava kružnicu u samu sebe, ona preslikava tačku P u tačku $P\Gamma_t$ na kružnici. Obratno, pretpostavimo da je Q bilo koja tačka na kružnici. Ako je $Q \neq P$, tada prava t, koja je simetrala duži $S[PQ]$ pripada eliptičnom pramenu $\mathcal{P}(A)$ i $P\Gamma_t = Q$.

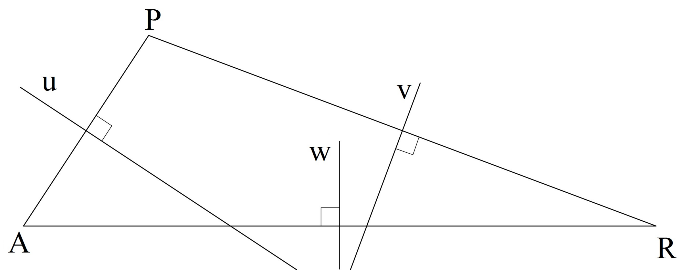


Sl. 2.19.

Ako je $Q = P$ tada $t = p(P, A) \in \mathcal{P}(A)$ i $P\Gamma_t = P = Q$. Tako je kružnica skup svih slika tačke P simetrijama čije su ose prave iz eliptičnog pramena $\mathcal{P}(A)$, tj.

$$C(A, d(A, P)) = \{P\Gamma_t : t \in P(A)\}. \tag{4}$$

Razmotrimo sada trougao $\triangle PQR$ u apsolutnoj ravni. Simetrala u duži $S[PQ]$ je jedinstvena prava takva da $P\Gamma_u = Q$, i simetrala v duži $S[PR]$ je jedinstvena prava takva da $P\Gamma_v = R$.



Sl. 2.20.

Ako se u i v seku u tački A, tada na osnovu (2), Q i R pripadaju kružnici $C(A, d(A, P))$. U tom slučaju, $d(A, Q) = d(A, R)$ pokazuje da treća simetrala w duži $S[QR]$ takođe pripada $\mathcal{P}(A)$. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.62. *Ako dve simetrale stranica trougla $\triangle PQR$ pripadaju eliptičnom pramenu u tački A, njemu pripada i treća simetrala, i temena P, Q i R leže na kružnici sa centrom u A.*

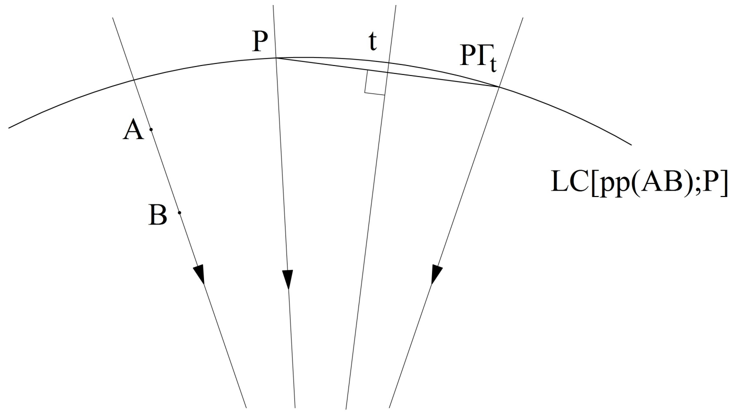
□

U euklidskoj geometriji, prave u i v se moraju seći i njihov presek je centar opisane kružnice oko trougla. Međutim, u hiperboličnoj geometriji postoji mogućnost da u i v određuju neki od tri pramena pravih. Ako u i v određuju eliptični pramen $\mathcal{P}(A)$, tada P, Q i R pripadaju kružnici čiji je centar tačka A. Sa druge strane, ako u i v ne određuju eliptični pramen, tada P, Q i R ne pripadaju ni jednoj kružnici. Definisaćemo sada dva nova elementa naše geometrije.

Definicija 2.45. *Skup svih slika tačke P simetrijama čije su ose prave iz paraboličnog pramena $\mathcal{F}[pp(AB)]$ je* **oricikl**, *i obeležavaćemo ga sa $LC[pp(AB);P]$. Tj.,*

$$LC[pp(AB;P)] = \{P\Gamma_t : t \in \mathcal{F}[pp(AB)]\}.$$

Prave iz paraboličnog pramena su radijalne prave oricikla. Zatvorena poluprava, čija je početna tačka na oriciklu i koja je paralelana sa svim radijalnim pravama koje je ne sadrže se naziva radijalna poluprava.

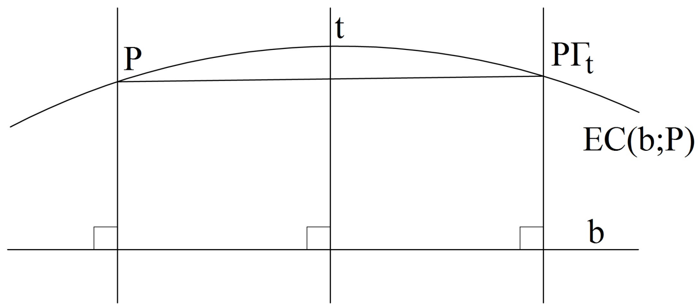


Sl. 2.21.

Definicija 2.46. *Skup svih slika tačke P, koja nije na pravoj b, simetrijama čije su ose prave iz hiperboličnog pramena $\mathcal{F}(b)$ se naziva* **ekvidistanta** *sa bazisnom pravom b i označavaćemo je sa $EC(b;P)$. Tj.,*

$$EC(b;P) = \{P\Gamma_t : t \in \mathcal{F}(b)\}.$$

Prave hiperboličnog pramena su radijalne prave ekvidistante.

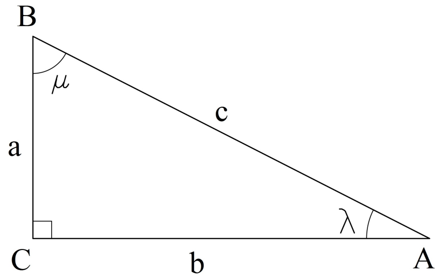


Sl. 2.22.

3 Metod pridruženih pravouglih trouglova

Problem je sledeći: "Na koji način dužine stranica i mere oštrih uglova utiču na egzistenciju pravouglog trougla?"Npr."Da li postoji pravougli trougao kome su zadate dužine kateta (stranice naspram oštrih uglova)?"U ovom slučaju, jasno da postoji. Ali da li postoji pravougli trougao kome su zadate mere oba oštra ugla α i β? Ako zbir oštrih uglova nije manji od $90°$, poznato je da takav trougao ne postoji. Ali to nije očigledno, ili bar dokaz da trougao čiji je zbir oštrih uglova manji od $90°$ postoji, nije očigledan.

U razmatranju navedenih problema koristićemo standardnu notaciju za pravougli trougao $\triangle ABC$. Ako je $\sphericalangle C$ prav, stranice naspram uglova $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ imaju dužine a, b i c redom, i mere uglova $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ su λ i μ redom.



Sl. 3.1.

U smislu ove notacije, razmatraćemo šest slučajeva, u zavisnosti od toga šta nam je poznato od elemenata trougla čije postojanje hoćemo da pokažemo, i kakva su ograničenja za poznate elemente. Prva četiri slučaja, su skoro trivijalna, pa ćemo ih samo ukratko obrazložiti.

Slučaj 1. Dve katete a i b (bez ograničenja)

Kao što smo rekli, ovo je jasno. Neka je ugao $\sphericalangle C$ prav. Na polupravoj $pp(CX)$ koja je jedan krak tog ugla odredimo tačku B tako da važi da je $d(C,B) = a$. Na isti način na polupravoj $pp(CY)$ koja je drugi krak tog pravog ugla odredimo tačku A tako da je $d(C,A) = b$. Sa temenima A, B, C nam je jedinstveno određen trougao $\triangle ABC$.

Slučaj 2. Hipotenuza i kateta c i a (c i b) ($c > a$ ($c > b$))

Neka je $S[BC] = a$ kateta trougla. Neka je prava s normala na pravu $p(B,C)$ u tački C. Tačka B je centar kružnice poluprečnika $r = c$. Presek prave s i te kružnice je tačka A koja je treće teme traženog trougla, i time je on jedinstveno određen.

Slučaj 3. Hipotenuza i oštar ugao c i λ (c i μ) ($\lambda < 90°$ ($\mu < 90°$))

Neka je duž $S[AB] = c$ hipotenuza traženog trougla. Odredimo sada polupravu $pp(AX)$ tako da mera ugla $\sphericalangle BAX$ bude λ. Neka je sada prava s normala na pravu $p(A,B)$ u tački B i $pp(BY)$ poluprava koja je sadržana u pravoj s sa X-strane prave $p(AB)$. Još nam je preostalo da odredimo polupravu $pp(BZ)$ koja pripada unutrašnjosti ugla $\sphericalangle YBA$ takvu da je ugao $\sphericalangle YBZ$ mere λ. Presek polupravih $pp(AX)$ i $pp(BZ)$ je tačka C koja je treće teme trougla, pa je on opet jednoznačno određen.

Slučaj 4. Oštar ugao i nalegla kateta μ i a (λ i b) ($a < \Pi^{-1}(\mu)$ ($b < \Pi^{-1}(\lambda)$))

Neka je duž $S[BC] = a$ kateta traženog trougla (analogno za katetu b i ugao λ). Neka je $pp(CX)$ poluprava koja je normalna na pravu $p(B, C)$ u tački C i $pp(BY)$ poluprava iz temena B takva da je ugao $\sphericalangle BCY$ mere μ. Presek polupravih $pp(CX)$ i $pp(BY)$ je tačka A koja je treće teme traženog trougla. Naravno i u ovom slučaju trougao je jedinstveno određen.

Slučaj 5. Oštar ugao i naspramna kateta λ i a (μ i b) (nepoznata ograničenja)

Slučaj 6. Dva oštra ugla λ i μ ($\lambda + \mu < 90°$)

Pokazaćemo sada da egzistencija nekih pravouglih trouglova podrazumeva postojanje četiri druga "pridružena" pravougla trougla i takođe postojanje pet "pridruženih" L-četvorouglova. Za slučajeve 5. i 6. koristićemo metod pridruženih pravouglih trouglova za koje znamo da postoje, a to su trouglovi iz slučajeva od 1. do 4. Sada ćemo uvesti notaciju koja će nam biti korisna. Za dati pravougli trougao $\triangle ABC$ sa stranicama a, b, i c i oštrim uglovima mera λ i μ definišemo

$$\alpha = \Pi(a), \beta = \Pi(b), \gamma = \Pi(c), l = \Pi^{-1}(\lambda), m = \Pi^{-1}(\mu). \tag{5}$$

Zatim, obeležićemo mere komplementarnih uglova sa

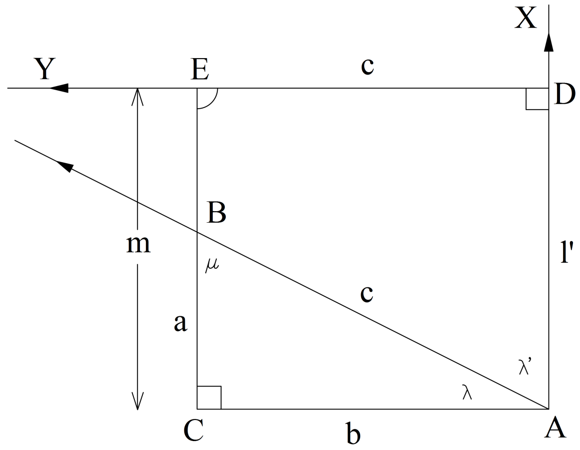
$$\alpha' = 90\,° - \alpha, \beta' = 90\,° - \beta, \gamma' = 90\,° - \gamma, \lambda' = 90\,° - \lambda, \mu' = 90\,° - \mu. \tag{6}$$

Konačno, duži paralelnosti komplementarnih uglova obeležavamo sa

$$a' = \Pi^{-1}(\alpha'), b' = \Pi^{-1}(\beta'), c' = \Pi^{-1}(\gamma'), l' = \Pi^{-1}(\lambda'), m' = \Pi^{-1}(\mu'). \tag{7}$$

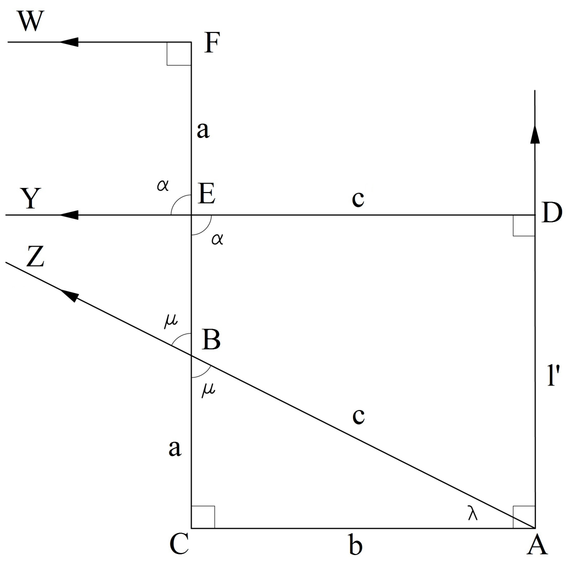
Četiri broja a, a', α, α' formiraju zavisni set brojeva u smislu da svaki od njih određuje ostala tri. Takođe ovakvu zavisnost imaju i setovi četvorki b, b', β, β', c, c', γ, γ', l, l', λ, λ', m, m', μ, μ'. Dogovor je da je nekad zgodnije koristiti mere da se ukaže o kom delu figure je reč. Prema tome, "a - stranica"trougla $\triangle ABC$ je stranica mere (dužine) a i "λ - ugao"je ugao mere λ.

Sada posmatrajmo standardni pravougli trougao $\triangle ABC$. Kroz A postoji poluprava $pp[A, X)$ takva da je $pp[AX) \perp p(C, A)$, pa su uglovi $\sphericalangle BAX$ i $\sphericalangle CAB$ komplementarni, susedni uglovi. Odatle sledi da je $\sphericalangle BAX° = \lambda'$. Ako D označava tačku na polupravoj $pp(AX)$ na rastojanju $l' = \Pi^{-1}(\lambda')$ od A, onda je poluprava $pp[DY)$ paralelna sa polupravom $pp(AB)$ koja je normalna na pravu $p(A, D)$, i dobijamo da je $(Y{-}DA{-}B)$ pravougli dvougao. Prava $p(C, B)$ seče jednu stranicu dvougla (polupravu $pp[AB)$), pa otuda sledi da seče i drugu stranicu. Pošto su prave $p(C, B)$ i $p(A, D)$ hiperparalelne i presek prave $p(C, B)$ sa duži $S[AD]$ je prazan skup ($p(C, B)$)($p(A, D)$, $p(C, B) \cap S[AD] = \emptyset$). Prava $p(C, B)$ seče polupravu $pp(DY)$ u nekoj tački E. Možemo pretpostaviti da se tačka E nalazi između tački D i Y i da su one kolinearne tj. važi raspored $\langle DEY \rangle$. Teorema o konstrukciji paralela kaže: "Ako je $(Y{-}DA{-}B)$ pravougli dvougao sa oštrim uglom kod temena A i ako je $d(A, B) = d(D, E)$, onda je prava s normalna na $p(A, D)$ u tački A takođe normalna na $p(B, E)$ u tački C i $\sphericalangle CBA° = \Pi(d(C, E))$."(sl.3.2) pa odatle sledi da ako je $d(D, E) = c$ i $\mu = \sphericalangle CBA° = \Pi[d(C, E)]$, onda je $d(C, E) = m$. S obzirom na definiciju L-četvorougla $CADE$ i činjenice da je $\sphericalangle BAX$ komplementaran uglu λ trougla, $CADE$ ćemo zvati λ-pridružen L-četvorougao trouglu $\triangle ABC$.



Sl. 3.2.

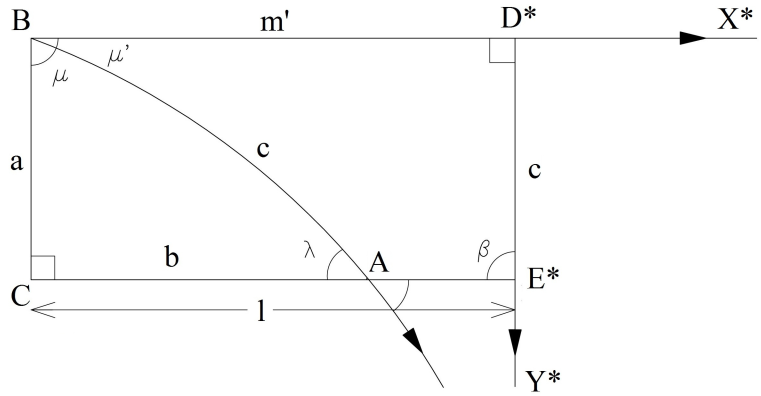
Takođe možemo odrediti meru oštrog ugla $\sphericalangle CED$ u četvorouglu. Neka je tačka F na pravoj $p(C, B)$ takva da je raspored tačaka $\langle BEF \rangle$ i $d(E, F) = a$.



Sl. 3.3.

Tada je $d(B, F) = d(B, E) + a = d(E, C) = m$. Ako je poluprava $pp(BZ)$ isto usmerena kao i poluprava $pp(AB)$, $\sphericalangle FBZ$ je ugao suprotan uglu $\sphericalangle CBA$, i tada je $\sphericalangle FBZ^\circ = \sphericalangle CBA^\circ = \mu$ i $d(B, F) = m = \Pi^{-1}(\mu)$. Dakle, poluprava $pp[FW)$ je paralelna sa polupravom $pp(BZ)$ koja je normalna na pravu $p(C, F)$. Kako je $pp(FW) \parallel pp(BZ) \Rightarrow pp(FW) \parallel pp(EY)$, sledi da je $(W\text{–}FE\text{–}Y)$ pravougli dvougao. Dakle, $\sphericalangle FEY^\circ = \Pi[d(F, E)] = \Pi(a) = \alpha$ i $\sphericalangle CED^\circ = \sphericalangle FEY^\circ = \alpha$.

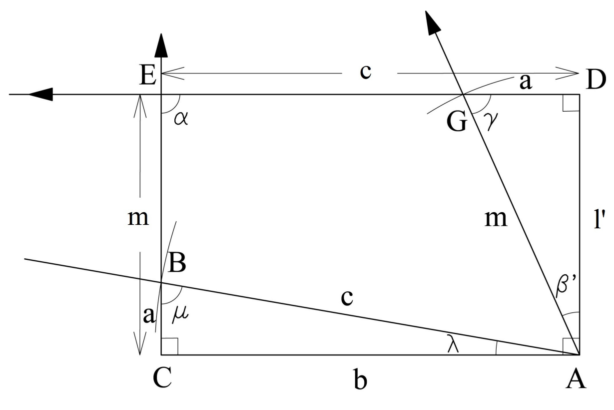
Sličnim postupkom dobijemo μ-pridružen L-četvorougao za $\triangle ABC$.



Sl. 3.4.

Iz tačke B povučemo polupravu $pp[BX^*) \perp p(C,B)$ tako da je $\sphericalangle X^*BA^\circ = \mu'$. Ako je rastojanje tačke D^* na polupravi $pp(BX^*)$ od tačke B jednako $m' = \Pi^{-1}(\mu')$, onda je poluprava $pp[D^*, Y^*)$ paralelna sa polupravom $pp(BA)$ koja je normalna na $p(B, D^*)$ i $(Y^*–D^*B–A)$ je pravougli dvougao. Prava $p(C,A)$ seče polupravu $pp(D^*, Y^*)$ u tački E^*, i CBD^*E^* je μ-pridružen L-četvorougao trouglu $\triangle ABC$. Njegove stranice su mere a, m', c, l, i oštar ugao je mere β.

Konstrukcijom paralela ne određujemo samo dva L-četvorougla pridružena pravouglom trouglu već određujemo i dva pravougla trougla pridružena L-četvorouglu. Pretpostavimo sada da je dat L-četvorougao $CADE$ sa oštrim uglom $\sphericalangle DEC$ mere α koji sadrži stranice dužina c i m redom, i naspramne stranice dužina b i l' redom. Iz konstrukcije paralela sledi da kružnica $C(A,c)$ seče duž $S(CE)$ u tački B tako da su poluprave $pp(AB)$ i $pp(DE)$ paralelne ($pp(AB) \parallel pp(DE)$), i pravougli trougao $\triangle ABC$ nazivamo c-pridružen pravougli trougao L-četvorouglu $CADE$. Takođe, iz konstrukcije paralela, kružnica $C(A,m)$ seče duž $S(DE)$ u tački G tako da $pp(AG) \parallel pp(CE)$ i trougao $\triangle AGD$ je m-pridružn pravougli trougao L-četvorouglu. Nije teško pokazati da je $\sphericalangle CBA^\circ = \Pi^{-1}(m) = \mu$ i $\sphericalangle DGA^\circ = \Pi^{-1}(c) = \gamma$, da je $\sphericalangle CBA^\circ = 90^\circ - \Pi(l') = 90^\circ - \lambda' = \lambda$ i $\sphericalangle DAB^\circ = 90^\circ - \Pi(b) = 90^\circ - \beta = \beta'$, i konačno da je $d(B,C) = d(G,D) = \Pi^{-1}(\alpha) = a$.



Sl. 3.5.

Bilo da počnemo da pravouglim trouglom ili L-četvorouglom možemo koristiti pridruživanje da opišemo dobijanje niza pridruženih pravouglih trouglova ili L-četvorouglova. Na primer, sa pravouglim trouglom $\triangle ABC$, imamo λ-pridružen L-četvorougao $CADE$ čiji oštar ugao sadrži stranice dužina c i m redom. Tada, c-pridružen pravougli trougao tom četvorouglu je baš trougao $\triangle ABC$. Ali m-pridruženi pravougli trougao je novi trougao (u opštem slučaju, nije podudaran), recimo $\triangle ADG$. Oštri uglovi trougla $\triangle ADG$ su mere γ i β' redom. γ-pridružen L-četvorougao trouglu $\triangle ADG$ je ponovo četvorougao $CADE$, ali β'-pridružen L-četvorougao je novi četvorougao. Koristeći ovaj novi četvorougao možemo dobiti novi pravougli trougao, i iz tog pravouglog trougla novi L-četvorougao, i dako dalje. Niz se zaustavlja kada dobijemo šesti pravougli trougao u nizu koji je podudaran sa $\triangle ABC$ i šesti L-četvorougao podudaran sa $CADE$. Dve činjenice ovog niza figura čine ovaj niz važnim. Prva je, ako jedna od figura postoji, onda sve postoje. A druga, ako su mere u jednoj od figura poznate, onda su mere svih figura poznate. Odatle sledi i sledeća teorema koju ćemo navesti bez dokaza.

Teorema 3.1. *Ako postoji pravougli trougao čiji su parametri iz bilo kog reda sledeće tabele, tada postoji pravougli trougao čiji su parametri iz preostala četiri reda.*

Niz mera	*prva stranica*	*ugao za prvu stranicu**	*hipotenuza*	*ugao za drugu stranicu*	*druga stranica*
1	a	μ	c	λ	b
2	l'	β'	m	γ	a
3	c'	α'	b'	μ	l
4	m'	λ	a'	β'	c'
5	b	γ	l	α'	m'

(*pod "uglom prve stranice"mislimo na oštar ugao koji se nalazi na prvoj stranici)

□

Koristeći navedenu tehniku razmotrićemo odgovore na pitanja 5. i 6.

Teorema 3.2. *Za proizvoljan pozitivan broj a i proizvoljan pozitivan ugao $\lambda < 90°$ postoji pravougli trougao sa oštrim uglom λ sa naspramnom stranicom dužine a.*

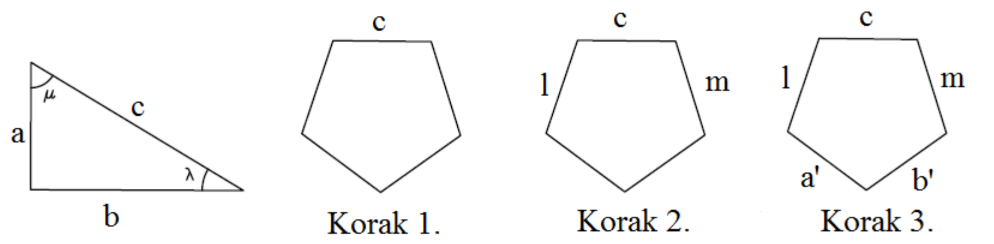
Dokaz. Broj a i λ određuju određuju set brojeva a, a', α, α' i λ, λ', l, l'. U tabeli 1. Teoreme 3.1 hipotetički pravougli trougao sa setom mera iz drugog reda ima stranice dužine l' i a redom. Iz tabele 1. slučaj jedan takav pravougli trougao postoji. Pošto smo označili l' kao prvu stranicu i a kao drugu stranicu, možemo označiti dužinu hipotenuze sa m, ugao prve stranice sa β' i ugao druge stranice sa γ. Stoga, pravougli trougao čije su mere iz drugog seta u tabeli postoji. Iz Teoreme 3.1 sledi da postoji pravougli trougao čije mere čine set 1 u tabeli i u tom pravouglom trouglu oštar ugao mere λ se nalazi nasuprot stranici dužine a. □

Odgovor za slučaj 6. je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 3.3. *Za date pozitivne mere uglova λ i μ takvih da $\lambda + \mu < 90°$ postoji pravougli trougao čiji oštri uglovi imaju mere λ i μ redom.*

Dokaz. Brojevi λ i μ određuju setove brojeva λ, λ', l, l' i μ, μ', m, m'. U tabeli 1. Teoreme 3.1, hipotetički pravougli trougao sa setom mera iz reda 5 ima hipotenuzu dužine l i stranicu dužine m'. Iz slučaja 2. takav pravougli trougao postoji ako je $l > m'$. Pošto je $\lambda + \mu < 90°$, $\lambda < 90° - \mu$ tj. $\lambda < \mu'$ odakle sledi da je $\Pi^{-1}(\lambda) > \Pi^{-1}(\mu')$. Stoga je $l > m'$. Pa pravougli trougao sa hipotenuzom dužine l i stranicom dužine m' postoji. Označivši ovu m' stranicu kao drugu stranicu, možemo definisati meru ugla druge stranice kao α', dužinu prve stranice kao b i meru ugla prve stranice kao γ. Ovaj pravougli trougao je set 5 mera iz tabele 1. i stoga po Teoremi 3.1 postoji pravougli trougao sa prvim setom mera u tom pravouglom trouglu, oštri uglovi imaju mere λ i μ redom. □

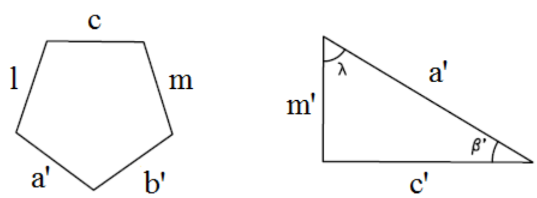
Počevši sa pravouglim trouglom čije su mere poznate možemo označiti stranice petougla tako da on služi kao mnemonički aparat za određivanje mera pridruženih pravouglih trouglova. Pretpostavimo da je trougao standardizovani pravougli trougao $\triangle ABC$ koji smo koristili. Jedna stranica petougla je označena kao dužina hipotenuze tj. c. Sledeće dve stranice petougla susedne stranici c su označene sa dužima paralelnosti oštrih uglova u trouglu tj. označene su sa l i m.



Sl. 3.6.

Na kraju, dve preostale stranice petougla su označene sa dužinama paralelnosti komplementarnih uglova trougla, tj. a' i b' redom. Kakogod izbor strana a' i b' je važan. U trouglu, ugao λ je između stranica c i b, ali na petouglu odgovarajuća stranica l ne sme biti između stranica c i b'. Slično, ugao μ je između stranica c i a, ali na petouglu stranica m ne sme biti između stranica c i a'. Odavde sledi da stranice petougla moraju budi redom c, m, b', a', l. Kao što možemo videti iz tabele 1. Teoreme 3.1, svaki od ovih brojeva je dužina hipotenuze na jednom od pet pridruženih pravouglih trouglova.

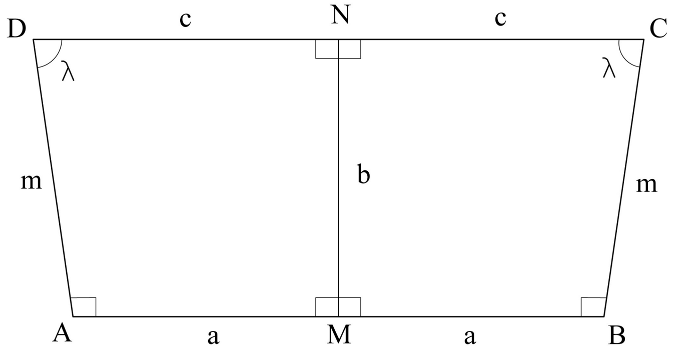
Da bismo dobili mere u pravouglom trouglu pridruženom $\triangle ABC$, dovoljno se setiti da je petougao označen počevši od tog pravouglog trougla. Npr. postoji pridruženi pravougli trougao čija hipotenuza ima dužinu a'. Da bi stranice susedne stranici a' u petouglu imale dužine l i b', oštri uglovi trougla moraju imati mere λ i β'. Konačno pošto su dve preostale stranice petougla, stranice c i m, katete trougla moraju imati dužine c' i m'. Pošto je stranica l petougla između stranica a' i c, ugao λ trougla ne sme biti između hipotenuze a' i stranice c'. Stoga je ugao λ naspraman stranici c' trougla i ugao β' naspraman stranici m'.



Sl. 3.7.

Započeli smo ovaj odeljak sa pitanjem u kom obimu elementi pravouglog trougla mogu biti poznati da bi taj trougao bio određen, i do sada smo rešili svih šest slučaja sa početka. Sada ćemo razmatrati isti problem za S-četvorouglove i L-četvorouglove.

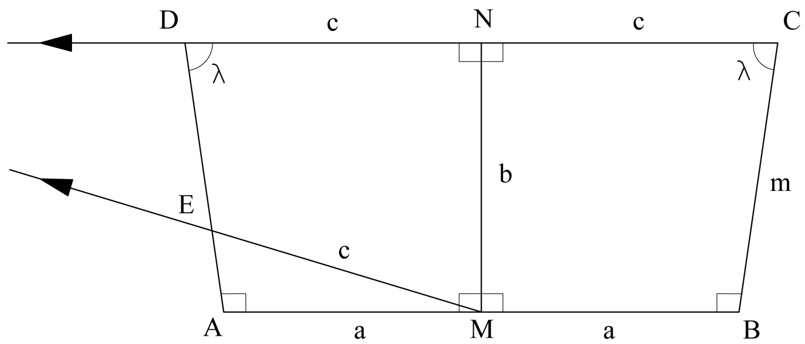
Neka je $ABCD$ označen S-četvorougao, sa središnjom tačkom M na duži $S[AB]$ i središnjom tačkom N na duži $S[CD]$, jasno je da S-četvorougao $ABCD$ postoji ako i samo ako postoji L-četvorougao $AMND$.



Sl. 3.8.

Neka je $d(A,B) = 2a$, $d(A,D) = d(B,C) = m$, $d(C,D) = 2c$, $\sphericalangle ACD^\circ = \sphericalangle BCD^\circ = \lambda$, i $d(M,N) = b$. Sada se problem postavlja na sledeći način: u kom obimu mere a, m, c, λ, b mogu biti navedene? Npr. da li postoji S-četvorougao sa datom bazom dužine $2a$ i sa datim uglovima pri vrhu mere λ? Isto tako, da li postoji L-četvorougao, sa datim oštrim uglom mere λ i sa stranicom, koja nije na ovom uglu, date dužine a?

Da bismo odgovorili na upravo postavljena pitanja treba samo da razmotrimo pravougli trougao koji se odnosi na c, a koji je pridružen L-četvorouglu $AMND$, recimo pravougli trougao $\triangle AME$ gde je E presek kružnice $C(M,c)$ i duži $S(A,D)$. Ako $\triangle AME$ postoji, onda postoje i $AMND$ i $ABCD$. U sledećoj teoremi koja govori o postojanju S-četvorouglova postojanje odgovarajućih L-četvorouglova se neće posebno izdvajati, nego će se podrazumevati.



Sl. 3.9.

Teorema 3.4. *Ako su a, m, c, λ, b pozitivni brojevi, Sakerijev četvorougao čija je donja osnovica dužine $2a$, dužine gornje osnovice $2c$, bočne stranice m, oštrog ugla mere λ i visine b postoji u sledećim slučajevima.*

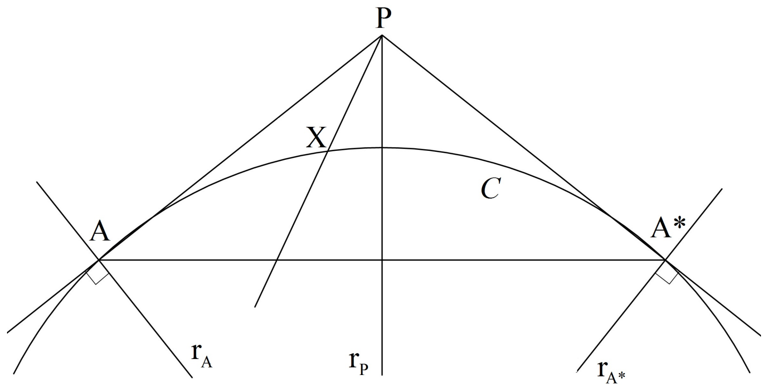
Slučaj	*Zadato*	*Ograničenja*
1	*donja osnovica, stranica* $(2a, m)$	*nema*
2	*donja osnovica, gornja osnovica* $(2a,\ 2c)$	$a < c$
3	*donja osnovica, ugao pri vrhu* $(2a, \lambda)$	$\lambda < 90°$
4	*donja osnovica, visina* $(2a, b)$	$\beta' > \Pi(a)*$
5	*stranica, gornja osnovica* $(m,\ 2c)$	*nema*
6	*stranica, ugao pri vrhu* (m, λ)	$\lambda < 90°$
7	*stranica, visina* (m, b)	$b < m$
8	*ugao pri vrhu, gornja osnovica* $(\lambda,\ 2c)$	$\lambda < 90°, c > \Pi^{-1}(\lambda)$
9	*gornja osnovica, visina* $(2c, b)$	*nema*
10	*ugao pri vrhu, visina* (λ, b)	$\lambda < 90°$

$*(\beta' = 90° - \Pi(b))$

□

U teoremama za uslove podudarnosti trouglova postojanje figura se podrazumeva. Npr., u teoremi podudarnosti trouglova stranica-stranica-stranica se ne dovodi u pitanje postojanje trougla sa tri date stranice, prema tome, Teorema 3.4 ustvari daje deset uslova podudarnosti za S-četvorouglove (tj. đonja osnovica-stranica", đonja osnovica-gornja osnovica"itd.) i isto tako, deset uslova podudarnosti za L-četvorouglove.

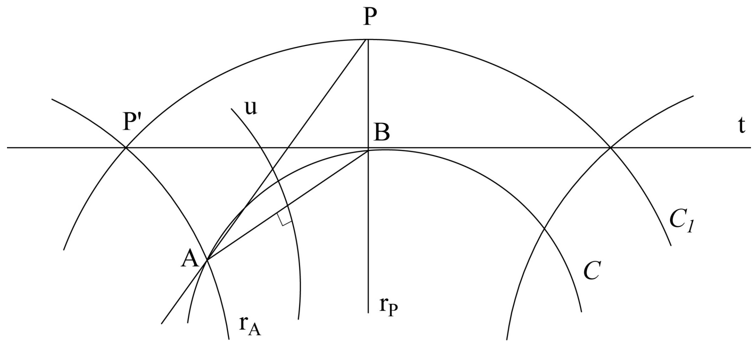
Da bismo dali primer upotrebe pridruženih figura, povezanih sa problemom koji je interesantan i važan, sada želimo da istražimo problem određivanja tangenti date kružnice c koje prolaze kroz datu tačku P koja se nalazi izvan c. Prvo posmatramo da ako je prava $p(P, A)$, tangenta sa dodirnom tačkom A na c, onda je prava $p(P, A)$ normalna na radijalnu pravu kroz A, i tu liniju ćemo obeležavati sa r_A. Stoga, prava $p(P, A)$ nije radijalna prava i pošto $P \notin r_A$, radijalna prava r_P kroz P nije r_A.



Sl. 3.10.

Simetrija u ravni sa osom r_P, preslikava c u samu sebe, tačku A u tačku A^* na c i preslikava r_A na r_{A^*}. Pošto je P fiksirana tačka, simetrija očuvava normalnost, $p(P, A^*) \perp r_{A^*}$, što dovodi do zaključka da je $p(P, A^*)$ takođe tangenta na c, pošto je prava $p(A, A^*)$ sečica na c, P ne pripada $p(A, A^*)$, i stoga $\sphericalangle APA^*$ postoji. Po definiciji tangentnosti, sve tačke kružnice c osim tačke A leže na A^* strani prave $p(P, A)$ i sve tačke na kružnici c osim tačke A^* leže na A strani prave $p(P, A^*)$. Stoga, ako je X tačka na kružnici c koja nije ni tačka A ni A^* onda $X \in In(\sphericalangle APA^*)$ i podrazumeva da prava $p(P, X)$ razdvaja tačke A i A^* i stoga nije tangenta od c. Dakle, ako postoji prava kroz P koja je tangenta na c, onda postoje tačno dve takve prave. Štaviše, ako su A i A^* tačke dodira tangente i kružnice, onda $d(P,A) = d(P,A^*)$, i r_P je simetrala duži $S[AA^*]$.

Pretpostavimo da tangenta $p(P,A)$ postoji. Na radijalnoj pravoj r_P postoji najmanje jedna tačka na c (dve ako je c kružnica) i označićemo sa B presek koji je najbliži tački P. Prava u koja je simetrala duži $S[AB]$ je radijalna prava od c, dakle, simetrija $X' = X\Gamma_u$ preslikava c u samu sebe i A u $A' = B$.



Sl. 3.11.

Stoga prava $p(P,A)$, koja je tangenta na c u tački A, mora se preslikati u $p(P',A') = p(P',B) = t$, tangentu na c u tački B. Neka c_1 bude bude kružnica sa istim centrom kao i c, koja prolazi kroz tačku P(koradijalna kružnica). Tada je prava u takođe radijalna prava za c_1 i stoga $P' = P\Gamma_u$ mora biti na c_1. Iz ovoga sledi da P' mora biti tačka preseka c_1 i prave t. Takođe, kako Γ_u preslikava $r_P = p(P,B)$ u $p(P',B') = p(P',A) = r_A$, $r_{P'} = r_A$, onda je A tačka u kojoj se seku $r_{P'}$ i c. Ova poslednja konstatacija pokazuje kako se postojanje tangente $p(P,A)$ može dokazati, a ne samo pretpostaviti. Ako prava t, koja je tangenta na c u tački B, u nekoj tački, označimo je sa P' zaista seče c_1, onda je prava u, koja je simetrala duži $S[PP']$, radijalna prava i za c i za c_1. Odavde sledi da simetrija Γ_u preslikava kružnice u same sebe, pa se tačka B preslikava u neku tačku A na c. Prava t, tangenta na c u tački B, mora se preslikati na pravu t', tangentu na c u tački A. Pošto je P' tačka na pravoj t, njegova slika preslikavanjem Γ_u mora biti na t'. Ali, $P = P'\Gamma_u$. Iz ovoga vidimo da je $t' = p(P,A)$ tangenta koja prolazi kroz P. Stoga, postojanje željenih tangenti, kao i metod za njihovo određivanje će biti ustanovljen ako uspemo pokazati da tangenta na kružnicu c u tački B preseca i koradijalnu kružnicu c_1.

Ako je c kružnica, onda činjenica da se tačka B nalazi unutar koncentrične kružnice c_1 podrazumeva da t seče c_1 po Teoremi 2.35. Iz ovoga vidimo da u slučaju kružnice, postoje dve tangente kroz P.

Da bismo postigli iste rezultate za oricikl potrebna nam je sledeća teorema.

Pre nego sto počnemo definisaćemo "lepezasti" ugao pomoću teorema.

Teorema 3.5. *Ako tačka P nije na pravoj t, tada postoji ugao u P čija unutrašnjost sadrži pravu t i čija simetrala je normalna na t.*

□

Teorema 3.6. *Ako tačka P nije na pravoj t, tada postoji tačno jedan ugao u P sa osobinama iz prethodne teoreme i svaka prava koja deli ugao seče pravu t.*

□

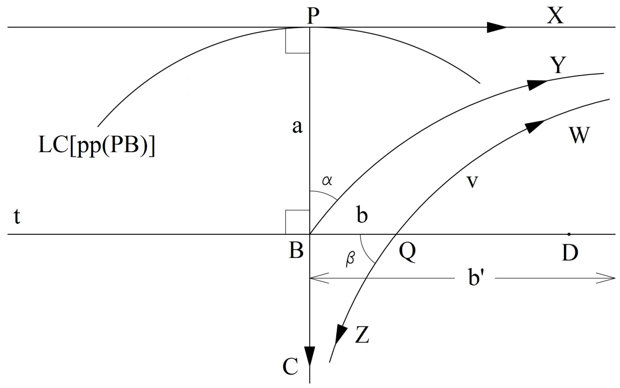
S obzirom na ove dve teoreme, možemo definisati "lepezasti" ugao.

Definicija 3.1. *Ako tačka P nije na pravoj t, ugao koji obrazuje iz prethodnih teorema ćemo zvati lepezasti ugao i obeležavati sa $\sphericalangle(P,t)$.*

Teorema 3.7. *Ako je prava t normalna na polupravu $pp[PB)$ u tački B, tada prava t seče oricikl $LC[pp(PB)]$ u dve tačke.*

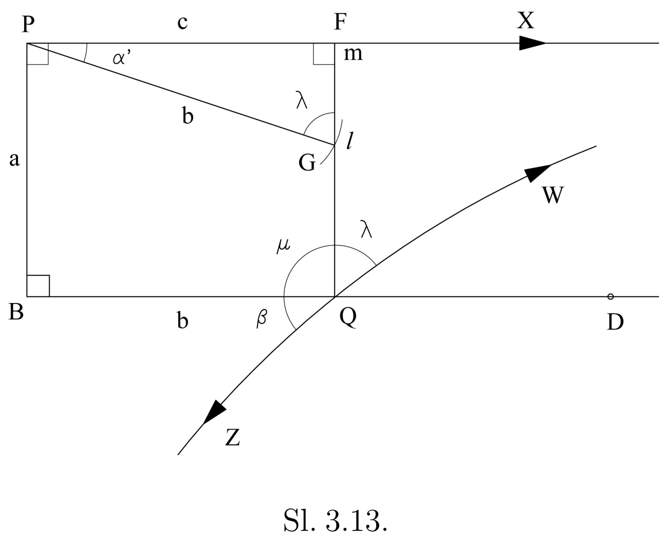
Dokaz. Neka je $p(P,X)$ prava normalna na $p(P,B)$ i samim tim tangenta na $LC[pp(PB)]$. Neka je $a = d(P,B)$ i neka je C tačka takva da je $\langle PBC\rangle$. Poluprava $pp(BY)$ iz tačke B paralelna je sa $pp(PX)$ i po teoremi:"Ako je dat ugao $\sphericalangle BPE$, prava t može da se konstruiše tako da je $\sphericalangle BPE$ lepezasti ugao $\sphericalangle(P,t)$.", postoji prava v takva da je $\sphericalangle CBY$ lepezasti ugao od B i v.

Dvougao $(X\text{–}PB\text{–}Y)$ je pravougli dvougao, i stoga $\sphericalangle PBY^\circ = \Pi(a) = \alpha < 90^\circ$. Iz ovoga sledi da je $t \perp p(P,B)$ iz čega zaključujemo da t deli $\sphericalangle CBY$ i stoga seče v u nekoj tački Q.



Sl. 3.12.

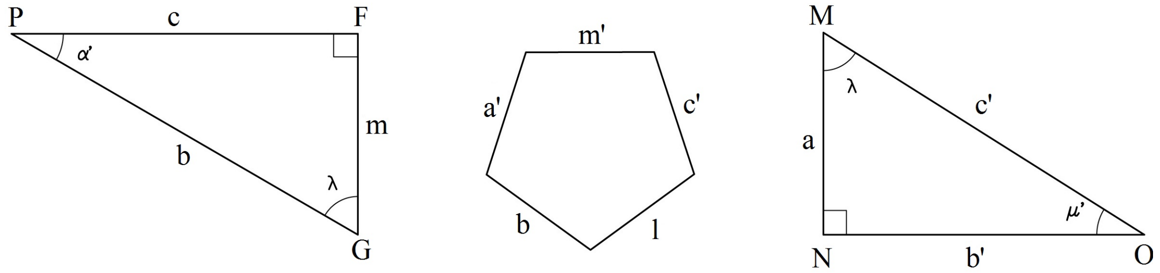
Na v, neka je $pp(QZ)$ poluprava paralelna sa $pp(BC)$ i neka je $pp(QW)$ suprotana poluprava koja mora biti paralelna sa $pp(BY)$ i stoga takođe paralelna sa $pp(PX)$. Neka je $b = d(B,Q)$. Pošto je $(C\text{–}BQ\text{–}Z)$ pravougli dvougao, $\sphericalangle BQZ^\circ = \Pi(b) = \beta$. Komplementarnoj meri ugla $\beta' = 90^\circ - \beta$ odgovara komplementarna duž paralelnosti $b' = \Pi^{-1}(\beta')$, i na $pp(BQ)$ postoji tačka D takva da $d(B,D) = b'$. Pokazaćemo da je tačka D tačka u kojoj se seku t i oricikl. Pošto se Q nalazi unutar oštrog ugla $\sphericalangle BPX$, tačka F na $p(P,X)$ pripada i $pp(PX)$ i možemo pretpostaviti da $\langle PFX\rangle$.



Sl. 3.13.

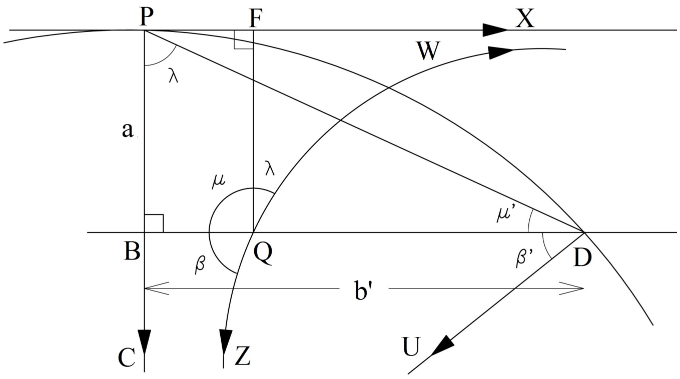
Neka je $c = d(P,F)$, $l = d(F,Q)$ i $\mu = \sphericalangle FQB^\circ$ u L-četvorouglu. Kružnica $c(P,b)$ preseca $S(FQ)$ u tački G, i $\triangle PFG$ je b-pridružen pravougli trougao četvorougla. Iz ovoga sledi da je

$d(F,G) = \Pi^{-1}(\mu) = m$, $\sphericalangle FGP^\circ = \Pi^{-1}(l) = \lambda$, i $\sphericalangle GPF^\circ = 90^\circ - \Pi(a) = 90^\circ - \alpha = \alpha'$. Neka je $\Pi(c) = \gamma$, $\gamma' = 90^\circ - \gamma$, $c' = \Pi^{-1}(\gamma')$ i $\mu' = 90^\circ - \mu$, $m' = \Pi^{-1}(\mu)$.



Sl. 3.14.

Mnemonički petougao koji odgovara $\triangle PFG$ ima stranice redom obeležene sa b, l, c', m', a'. Stoga ovde postoji pravougli trougao, recimo $\triangle MNO$, pridružen $\triangle PFG$, čija hipotenuza $S[MO]$ ima dužinu c', sa katetama $S[MN]$ i $S[NO]$, dužina a i b' redom, sa oštrim uglovima $\sphericalangle NMO$ i $\sphericalangle NOM$ mera λ i μ' redom. Po teoremi stranica-ugao-stranica $\triangle NMO \cong \triangle BPD$. Stoga po odgovarajućim delovima podudarnih trouglova, $\sphericalangle BPD^\circ = \lambda$ i $\sphericalangle PDB^\circ = \mu'$.



Sl. 3.15.

Neka je $pp(DU)$ poluprava paralelna sa $pp(PB)$ i stoga takođe paralelna sa $pp(BC)$. Pošto je $(C\text{–}BD\text{–}U)$ pravougli dvougao, onda $d(B,D) = b'$, i $\sphericalangle BDU^\circ = \Pi(b') = \beta'$, i $\sphericalangle PDU^\circ = \sphericalangle PDB^\circ + \sphericalangle BDU^\circ = \mu' + \beta'$. Dvougao $(X\text{–}FQ\text{–}W)$ je takođe pravougli, pa $d(F,Q) = l$ što implicira da $\sphericalangle WQF^\circ = \Pi(l) = \lambda$. Sada u tački Q imamo $\sphericalangle WQF^\circ + \sphericalangle FQB^\circ + \sphericalangle BQZ^\circ = 180^\circ$, te isto tako $\lambda + \mu + \beta = 180^\circ$. Ova jednakost pokazuje da je $\lambda = 180^\circ - \mu - \beta = 90^\circ - \mu + 90^\circ - \beta = \mu' + \beta'$. Odavde sledi $\sphericalangle CPD^\circ = \lambda = \sphericalangle PDU^\circ = \mu' + \beta'$ i stoga $(C\text{–}PD\text{–}U)$ je jednakokraki dvougao. Tako dobijamo da je simetrala duži $S[PD]$ paralelna sa $pp(PC)$ i $pp(DU)$ i da je radijalna prava oricikla. Pošto simetrija na ovoj radijalnoj pravoj preslikava P u D, D je tačka u kojoj se seku t i oricikl. Simetrija čija je osa radijalna prava $p(P,B)$ preslikava t u samu sebe, i preslikava $LC[pp(PB)]$ u samu sebe. Ona stoga preslikava D u neku tačku E koja je druga tačka u kojoj se presecaju t i oricikl. □

Posledica 3.7.1. *Ako je $\langle PBC\rangle$, prava t, koja je tangenta oricikla $LC[pp(BC)]$, preseca ko-radijalni oricikl $LC[pp(PB)]$ u dve tačke D i E, i radijalne prave kroz D i E seku unutrašnji oricikl u tačkama D^* i E^* redom, tako da su $p(P,E^*)$ i $p(P,E^*)$ tangente od $LC[pp(BC)]$.*

□

Posledica 3.7.2. *Ako se tačka B nalazi unutar oricikla, svaka neradijalna prava kroz B preseca oricikl u dve tačke. Osobine ekvidistante, koje su slične osobinama oricikla u Teoremi 3.5 i njihove posledice navešćemo u sledećem obliku.*

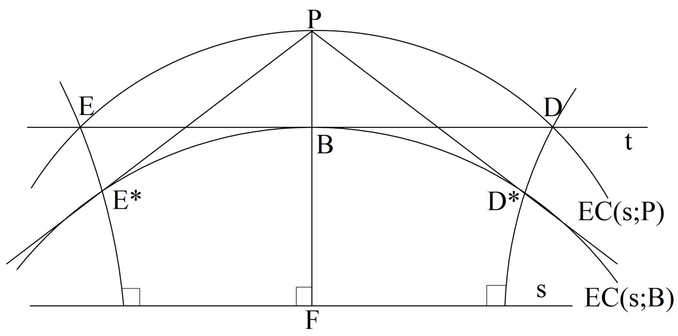
□

Teorema 3.8. *Neka je PF normalna na pravu s, $P \neq F$, i ako je B između P i F, tada prava t koja je normalna na $p(P, F)$ u tački B seče ekvidistantu $EC(s; P)$ u dve tačke.*

□

Posledica 3.8.1. *Ako je $\langle PBF \rangle$, i ako je prava $s \perp p(P, F)$ u tački F, prava t, koja je tangenta ekvidistante $EC(s; B)$ seče, u tački B ko-radijalnu ekvidistantu $EC(s; P)$ u tačkama D i E, i radijalne prave kroz D i E seku unutrašnju ekvidistantu u tačkama D^* i E^* redom, tako da su $p(P, D^*)$ i $p(P, E^*)$ tangente od $EC(s; B)$.*

□



Sl. 3.16.

Posledica 3.8.2. *Ako se tačka B nalazi unutar ekvidistante $EC(s; P)$, i ako je na P-strani prave s, tada svaka prava koja prolazi kroz tačku B i hiperparalela sa pravom s seče ekvidistantu $EC(s; P)$ u dve tačke.*

□

4 Zaključak

Osvrnućemo se još jednom na problem koji je analiziran u ovom radu. Neka je $\triangle ABC$ pravougli trougao s katetama a i b i hipotenuzom c. Neka su, dalje, μ i λ oštri uglovi naspram kateta a i b, redom. Kao što smo rekli jednostavno se pokazuje da je u hiperboličnoj geometriji $\triangle ABC$ jednoznačno određen (do na podudarnost) u sledećim slučajevima:

1° katetama a i b;

2° katetom a (ili b) i hipotenuzom c, ako je $a < c$ $(b < c)$;

3° hipotenuzom c i oštrim uglom μ (ili λ), ako je $\mu < 90°$ ($\lambda < 90°$);

4° katetom a i oštrim uglom μ (katetom b i oštrim uglom λ)

ako je $a < \Pi^{-1}(\mu)$ $(b < \Pi^{-1}(\lambda))$, gde je Π funkcija Lobačevskog. Međutim, pitanje je bilo sledeće: Šta ako je zadata

5° kateta a i naspramni ugao λ (kateta b i naspramni ugao μ), gde je $\lambda < 90°$ $(\mu < 90°)$ ili

6° oštri uglovi μ i λ za koje važi $\mu + \lambda < 90°$?

Ispostavilo se da je odgovor ponovo - da, ali da su slučajevi 5° i 6° neuporedivo složeniji od prva četiri. Za dokazivanje egzistencije tih pravouglih trouglova primenjivali smo posebnu metoda (tehnika) u kojoj se koriste pridruženi pravougli trouglovi. Osim njih koristili smo Lambertove četvoruglove, oricikle i druge karakteristične figure hiperbolične ravni.

Među posledicama dokazanih teorema, izveli smo uslove za egzistenciju Sakerijevog četvorougla u zavisnosti od pojedinih parametara kao što su osnovice, bočne stranice, oštri uglovi, visina kao i neke osobine oricikla i ekvidistante.

Literatura

[1] K. Borsuk, W. Szmielew, *Foundation of geometry*,
North Holland, Amsterdam, 1960.

[2] M. Prvanović, *Neeuklidske geometrije*,
Novi Sad , 1971.

[3] P. Kelly, G. Matthews, *The non-euclidean, hyperbolic plane*,
Springer-Verlang, New York, 1981.

[4] R. Bonola, *Non-Eucidean geometry*,
Dover publication, 1955.

[5] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolična geometrija*,
Matematički fakultet, Beograd, 1994.

Biografija

Jelena Vasić je rođena 14.06.1991. godine u Šapcu. Osnovnu školu "Branko Radičević"u Bratuncu je završila kao odličan učenik. 2005. godine upisuje gimnaziju "Vuk Karadžić"u Ljuboviji i završava je takođe kao odličan učenik. Zbog afiniteta prema prirodnim naukama upisala je 2010. godine osnovne studije iz matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. 2013. godine je završila osnovne studije i upisala master studije iz matematike - modul Nastava matematike na istom fakultetu. U septembru 2015. godine položila je poslednji ispit i stekla pravo da odbrani master rad.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA:

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Jelena Vasić
Mentor: **MN**	Dr Vojislav Petrović
Naslov rada: **NR**	Metod pridruženih pravouglih trouglova u hiperboličnoj geometriji
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski (latinica) / engleski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2016
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint

Mesto i adresa: **MA**	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	(poglavlja/strana/tabela/grafika) (4/43/3/38)
Naučna oblast: **NO**	Matematika
Naučna disciplina: **ND**	Geometrija
Ključne reči: **KR**	pravougli trougao, Lambertov četvorougao, Sakerijev četvorougao, oricikl
Čuva se: **ČU**	Biblioteka departmana za matematiku i informatiku, PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	nema
Izvod: **IZ**	Ovaj rad analizira slučaj egzistencije pravouglih trouglova kod kojih su poznati kateta i naspramni ugao gde je ugao manji od 90° i slučaj kada su poznati oštri uglovi s tim da je njihov zbir manji od 90°.
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	
Datum odbrane: **DO**	
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik komisije:	Dr Sanja Konjik, redovni profesor Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
Član:	Dr Bojan Bašić, redovni profesor Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
Član:	Dr Vojislav Petrović, mentor Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE

KEY WORDS DOCUMENTATION:

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Documentation type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Final paper
Author: **AU**	Jelena Vasić
Mentor: **MN**	Dr Vojislav Petrović
Title:	The method of associated right triangles in hyperbolic plane
Language of text: **LT**	Serbian (latin)
Language of abstract: **JI**	English
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2016
Publisher: **PU**	Author's reprint

Publication place: Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (sections/pages/tabels/graphics) (4/43/3/38)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Geometry
SD

Key words: right triangle, Lambert quadrilateral Saccheri quadrilateral, limit circle
KW

Holding data: Library of Department of Mathematics and informatics PMF-a u Novom Sadu
HD

Note: none
N

Abstract: This study analyses the case of the existance of right triangles with given acute angle and opposite side and the case with given two acute angles which sum is less than 90°.
AB

Accepted by the Scientific Board:
ASB

Defended on:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Dr Sanja Konjik, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Dr Bojan Bašić, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: Dr Vojislav Petrović, Supervisor, Faculty of Science, Novi Sad