UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jelena Radović

DIJAGRAM MONOIDI

-master teza-

Mentor:
dr Igor Dolinka

Novi Sad, 2016.

Sadržaj

Uvod

Priču o dijagram monoida moramo početi sa dijagram algebrama. Poslednjih godina raste interesovanje za algebre čija se baza sastoji od dijagrama, koji se množe na neki prirodan način. Najstariji primjer takvih algebri je Brauerova algebra, prvi put uveden u radu R. Brauera ([2]). Statistička mehanika je bila inspiracija za izučavanje Temperli-Lib algebri. Želja za generalizacijom pojma Temperli-Lib algebre je dovela do definicije takozvane particione algebre, odnosno dijagram algebre. Do ovog pojma su nezavisno došli P. Martin ([34]) i V.F.R. Džons ([27]). Od tada su dijagram algebre često izučavane (za osnovne rezultate o dijagram algebrama vidjeti [35], [42], [21], [45]). Sve pomenute algebre su celularne ([17], [45]).

Veza ove teme sa teorijom polugrupa je otkrivena kada je uočeno da se pomenute algebre mogu predstaviti kao "twisted"algebre istomenih monoida. Elemente dijagram monoida $\mathcal{P}_X$, to jest dijagrame, možemo opisati kao klase ekvivalencije skupa grafova na čvorovima $X \cup X$, pri čemu dva grafa pripadaju istoj klasi ako i samo ako imaju iste komponente povezanosti. Dijagram se predstavlja grafički tako što čvorove iz X i X' zapišemo u dva reda. Množenje u ovom monoidu se realizuje dopisivanje jednog dijagrama ispod drugog, te brisanjem svih ciklusa sredine. Tada Brauerov monoid možemo definisati ako podmonoid dijagram monoid koji se sastoji od svih dijagrama čije su sve komponente povezanosti kardinalnosti 2. Slično, Džonsov monoid definišemo kao skup svih Brauerovih dijagrama koji se mogu zapisati kao planarnih grafovi, unutar pravougaonika određenog čvorovima X i X'.

Pokazalo se da izučavanjem strukture ovih monoida mogu dobiti nove informacije o odgovarajućim algebrama. Određivanjem prezentacija dijagram monoida, možemo konstruisati prezentacije dijagram algebre, kao što je pokazano u [6]. Slično, prebrojavanje idempotenata dijagram monoida i Brauerovog monoida se može iskoristiti za prebrojavanje broja idempotentnih elemenata baze odgovarajućih algebri ([5]). Pokazano je, u [9], da se dimenzije nesvodljivih reprezentacija dijagram algebri mogu izračunati poznavajući rangove svih ideala odgovarajućeg monoida.

U ovom radu izučavamo kombinatorne osobine dijagram monoida, i dajemo pregled najvažnijih dosadašnjih rezultata. U prvom poglavlju je dat pregled osnovnih pojmova i teorema iz teorije polugrupa. Tu smo poseban naglasak stavili na $*$-regularne polugrupe i kompletno 0-proste polugrupe, pošto su svi glavni faktori dijagram monoida $*$-regularne kompletno 0-proste polugrupe. Zbog toga razloga smo drugo poglavlje posvetili isključivo predstavljanju rezultata o rangu i idempotentnom rangu te klase kompletno 0-prostih polugrupa. Pri tome smo pratili radove [18], [19], [20], [9] i [44].

U trećem poglavlju dali smo preciznu definiciju dijagrama i njihovog množenja. Predstavili smo karakterizaciju Grinovih relacija u dijagram monoidima, pokazali da su svi ideali u dijagram monoidu glavni, te da čine lanac u odnosu na inkluziju. Pored toga, naveli smo dva generatorna skupa dijagram monoida, te odredili njegov rang, pri tome se vodeći radom [6]. U narednom poglavlju smo pažnju posvetili idempotentima dijagram monoida i njihovom prebrojavanju, gdje su uglavnom predstavljeni rezultati rada [5]. Peto poglavlje je posvećeno singularnom dijelu dijagram monoida, koji je istovremeno i njegov maksimalni ideal. Vodeći se rezultatima radova [7] i [8], kao i posljedicama rezultata izvedenih za dijagram monoid, predstavili smo dva generatorna skupa singularnog dijela dijagram monoida. Takođe smo izveli formulu za njegov rang.

Sljedeće poglavlje je posvećeno izračunavanju ranga ideala dijagram monoida, te prebrojavanju njihovih minimalnih idempotentnih generatornih skupova ([9]). Te metode, kao i rezultati poglavlja 4, su primijenjeni u poglavlju 7 na izučavanje Brauerovog monoida. Pored toga, izveli smo i karakterizaciju Grinovih relacija Brauerovog monoida, te odredili formulu za njegov rang. Konačno, u poslednjem poglavlju smo opisali Džonsov monoid, i njegove osnovne osobine, te opet primijenili rezultate poglavlja 6. Metode korištene za prebrojavanje idempotenata dijagram monoida i Brauerovog monoida nismo uspjeli primijeniti na Džonsov monoid.

Ovom prilikom želim da se zahvalim mentoru, dr Igoru Dolinki, na pomoći u odabiru ove zanimljive teme, te na savjetima i podršci tokom same izrade rada. Takođe želim da se zahvalim članovima komisije, dr Petru Markoviću i dr Petru Đapiću na brojnim korisnim sugestijama koje su umnogome poboljšale ovaj rad. Najveću zahvalnost dugujem naravno svojoj porodici, na čiju podršku sam uvijek mogla računati, od samog početka mog bavljenja matematikom.

1 Osnovi teorije polugrupa

U ovom poglavlju ćemo izložiti osnovne pojmove i teoreme iz teorije polugrupa, koje su neophodne za razumijevanje narednih poglavlja. Većina izloženih tvrđenja i dokaza su preuzeti iz klasičnih knjiga teorije polugrupa ([3], [24] i [32]), kao i iz udžbenika [4], pa nećemo navoditi pojedinačne reference za sva tvrđenja. Za dio Regularne polugrupe je uz navedene knjige korišten i rad [40], dok su neka tvrđenja i definicije iz potpoglavlja Grinove relacije preuzeta iz [43].

1.1 Osnovni pojmovi

Neka je S neprazan skup. Binarna operacija na skupu S je preslikavanje skupa $S \times S$ u S. Binarna operacija $\cdot$ na skupu S je asocijativna ako je za sve $a, b, c \in S$ ispunjeno

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Definicija 1.1. Uređeni par $(S, \cdot)$ gdje je S neprazan skup, a $\cdot$ asocijativna binarna operacija na S, nazivamo *polugrupom*.

Kada je jasno o kojoj operaciji je riječ, označavaćemo polugrupu samo sa S.

Tvrđenje 1.1. *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementi polugrupe S. Uvedimo oznaku*

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1(a_2(\ldots(a_{n-1}a_n)\ldots)).$$

Tada je proizvod elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jednak $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ za sve moguće rasporede zagrada.

Dokaz. Daćemo dokaz matematičkom indukcijom po $n \geq 2$. Za $n = 2$ tvrđenje je trivijalno, dok za $n = 3$ tvrđenje slijedi iz osobine asocijativnosti polugrupe. Neka je sada $n \geq 3$, i pretpostavimo da za sve $1 \leq k \leq n-1$ i sve k-torke elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_k$ polugrupe S važi tvrđenje. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ proizvoljni elementi iz S, i neka je P proizvod tih elemenata za neki smislen raspored zagrada. Tada se P može zapisati kao $P = AB$, gdje je A proizvod elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_k$ za neko $1 \leq k \leq n-1$, dok je B proizvod elemenata $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$. Na osnovu induktivne hipoteze, slijedi da je $A = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ Odatle slijedi da je

$$P = AB = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)B = (a_1 \cdot (a_2 \cdot \ldots \cdot a_k))B = a_1 \cdot ((a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)B)$$

Iz induktivne hipoteze dalje slijedi da je $(a_2 \cdot \ldots \cdot a_k)B = a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, pa je konačno $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. $\square$

Pokazano tvrđenje opravdava izostavljanje pisanja zagrada u proizvodima elemenata polugrupe. Često izostavljamo i simbol binarne operacije, ukoliko je jasno o kojoj polugrupi je riječ.

Polugrupa S je *komutativna* ako važi $ab = ba$ za sve $a, b \in S$. Polugrupa S je *kancelativna* ako za sve $a, b, c \in S$ važi

$$ab = ac \Rightarrow b = c \text{ i } ba = ca \Rightarrow b = c.$$

Definicija 1.2. Ako za element e polugrupe S važi $xe = x = ex$ za sve $x \in S$, tada element e nazivamo *neutralni* ili *jedinični element* polugrupe.

Lako se pokazuje da je jedinični element polugrupe, ako postoji, jedinstven. Jedinični element polugrupe S ćemo najčešće označavati sa 1_S. Polugrupa sa jediničnim elementom se naziva *monoid* ili *polugrupa sa jedinicom.* Ako za element x monoida S postoji $y \in S$ tako da je $xy = 1_S = yx$, tada je kažemo da je x *invertibilan* element. Ovakav element y je jedinstveno određen, i nazivamo ga inverz elementa x, u oznaci x^{-1}. Polugrupa čiji su svi elementi invertibilni se naziva *grupa.*

Definicija 1.3. Ako za element z polugrupe S važi $xz = z = zx$ za sve $x \in S$, tada element z nazivamo *nula element* polugrupe S.

Nula element polugrupe S ćemo označavati sa 0_S, ili 0 ako je jasno o kojoj polugrupi je riječ. Kao i jedinični element, nula polugrupe je jedinstvena, ukoliko postoji. Polugrupu koja sadrži nula element nazivamo 0-polugrupa.

Ukoliko polugrupa S ne sadrži jedinicu, možemo je dopuniti do monoida na sljedeći način. Neka je 1 element koji ne pripada S. Definišimo skup $S^1 = S \cup \{1\}$, te binarnu operaciju $\cdot$ na S^1 kao produženje operacije na S, sa $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$, za $x \in S$ i $1 \cdot 1 = 1$. Slično, ako je S polugrupa bez nule, možemo je dopuniti do polugrupe sa nulom dodavanjem elementa $0 \notin S$, te produženjem operacije množenja sa $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$, za sve $x \in S$.

Definicija 1.4. Element e polugrupe S se naziva *idempotent* ukoliko je $e^2 = e$. Skup svih idempotenata polugrupe S označavamo sa $E(S)$.

Za razliku od jediničnog ili nula elementa, idempotentnih elemenata u polugrupi može biti više. Ukoliko polugrupa S sadrži jedinični element, odnosno nulu, tada su oni očigledno idempotenti. Ako su svi elementi polugrupe idempotentni, tada takvu polugrupu nazivamo traka.

Na skupu svih idempotenata $E(S)$ polugrupe S možemo definisati relaciju poretka na sljedeći način

$$e \leq f \text{ ako i samo ako je } e = ef = fe.$$

Lako se možemo uvjeriti da je ovako definisana relacija zaista relacija poretka. Ovaj poredak na $E(S)$ nazivaćemo *prirodni poredak.*

Definicija 1.5. Ako za element x polugrupe S postoji element $y \in S$ takav da je $xyx = x$, tada kažemo da je element x *regularan.* Polugrupa čiji su svi elementi regularni se naziva *regularna polugrupa.*

Ako za element $x \in S$ postoji element $y \in S$ takav da je $xyx = x$ i $yxy = y$ tada y nazivamo inverzom elementa x. Skup svih takvih elemenata y označavamo sa $V(x)$. Ako element $x \in S$ ima inverz tada je on očigledno regularan. Međutim, važi i obratno, aka je x regularan element, tada je $V(x) \neq \emptyset$. Zaista, neka je $xyx = x$ za neko y, tada je

$$x(yxy)x = xyx = x \text{ i } (yxy)x(yxy) = yxyxy = yxy,$$

to jest yxy je inverz za x.

Sve grupe su regularne polugrupe, pri čemu je $V(x) = \{x^{-1}\}$ za sve elemente grupe. U proizvoljnoj polugrupi svi idempotentni elementi su regularni. Ako je x regularan element polugrupe S, i $y \in V(x)$, tada su elementi xy i yx idempotentni jer važi

$$xy \cdot xy = xyx \cdot y = xy$$
$$yx \cdot yx = yxy \cdot x = yx.$$

Definicija 1.6. Polugrupa S u kojoj za svaki element $x \in S$ postoji jedinstven element $y \in S$ takav da važi $xyx = x$ i $yxy = y$ se naziva *inverzna polugrupa.* Jedinstveni inverz elementa x označavaćemo sa x'.

Sve grupe su inverzne polugrupe, i grupovni inverz proizvoljnog elementa grupe se upravo poklapa sa definicijom inverza u inverznoj polugrupi, tako da je ovako uvedena notacija opravdana. Međutim, sve inverzne polugrupe nisu grupe, već obuhvataju mnogo širu klasu polugrupa.

Primjer 1.1. (i) Skup prirodnih brojeva sa operacijom množenja je jedna komutativna polugrupa sa jedinicom. Skup cijelih brojeva sa operacijom sabiranja čini komutativnu grupu, a sa operacijom množenja komutativnu polugrupu sa jedinicom. Skupovi racionalnih i realnih brojeva sa operacijama množenja i sabiranja čine komutativne grupe.

(ii) Neka su L i R neprazni skupovi. Definišimo binarnu operaciju $\cdot$ na skupu $L \times R$ sa $(l_1, r_1) \cdot (l_2, r_2) := (l_1, r_2)$. Lako se vidi da $L \times R$ sa ovom operacijom čini polugrupu, koju nazivamo pravougaona traka. Takav naziv je opravdan jer važi $(l, r) \cdot (l, r) = (l, r)$ za sve $(l, r) \in L \times R$, to jest svi elementi polugrupe $L \times R$ su idempotentni. Polugrupa $L \times R$ je regularna, štaviše, za svaka dva elementa $(l_1, r_1), (l_2, r_2) \in L \times R$ važi

$$(l_1, r_1) \cdot (l_2, r_2) \cdot (l_1, r_1) = (l_1, r_2) \cdot (l_1, r_1) = (l_1, r_1)$$
$$(l_2, r_2) \cdot (l_1, r_1) \cdot (l_2, r_2) = (l_2, r_1) \cdot (l_2, r_2) = (l_2, r_2).$$

(iii) Neka je X neprazan skup, tada skup svih preslikavanja skupa X u samog sebe, sa operacijom kompozicije funkcija čini jednu nekomutativnu polugrupu, koju označavamo $\mathcal{T}_X$ i nazivamo polugrupa transformacija na skupu X. Polugrupa $\mathcal{T}_X$ je monoid, u kome je jedinični element id_X, identičko preslikavanje skupa X. Za $\alpha \in \mathcal{T}_X$ ćemo sa $\mathrm{im}(\alpha)$ označavati skup slika transformacija α. Idempotenti u $\mathcal{T}_X$ su transformacije $\alpha \in \mathcal{T}_X$ koje ispunjavaju uslov $\alpha|_{im(\alpha)} = \mathrm{id}_{im(\alpha)}$, to jest koje identički slikaju skup svojih slika $\mathrm{im}(\alpha)$. Polugrupa transformacija jeste regularna, ali nije inverzna polugrupa. U njoj je sadržana grupa svih bijekcija skupa X na samog sebe, to jest simetrična grupa $\mathcal{S}_X$.

(iv) Neka je X neprazan skup. Parcijalna transformacija skupa X je preslikavanje jednog njegovog podskupa na drugi. Domen parcijalne transformacije α ćemo označavati sa $\mathrm{dom}(\alpha)$, a skup slika sa $\mathrm{im}(\alpha)$. Skup svih parcijalnih transformacija skupa X sa operacijom kompozicije definisanom na sljedeći način

$$(\alpha \circ \beta)(x) := \alpha(\beta(x)) \text{ akko } x \in \mathrm{dom}(\beta) \cap \mathrm{im}(\alpha)$$

čini monoid, u kojem je jedinični element upravo identičko preslikavanje id_X. Ova polugrupa se naziva polugrupa parcijalnih transformacija i označava sa $\mathcal{PT}_X$. Očigledno je polugrupa transformacija $\mathcal{T}_X$ jedan podmonoid monoida $\mathcal{PT}_X$. Pored toga, skup svih parcijalnih bijekcija skupa X čini podmonoid polugrupe $\mathcal{PT}_X$, koji označavamo sa $\mathcal{I}_X$ i nazivamo simetrični inverzni monoid. Kao što se da naslutiti iz imena, $\mathcal{I}_X$ je inverzna polugrupa. Sve navedene polugrupa sadrže kao podgrupu simetričnu grupu $\mathcal{S}_X$.

1.2 Potpolugrupe i ideali

Definicija 1.7. Neprazni podskup T polugrupe S je *potpolugrupa* od S ako je zatvoren za operaciju na polugrupi, to jest ako važi $TT \subseteq T$. Podgrupa polugrupe S je potpolugrupa koja zadovoljava sve aksiome grupe.

Maksimalna podgrupa polugrupe S je podgrupa koja nije sadržana ni u jednoj drugoj podgrupi S.

Tvrđenje 1.2. *Skup svih invertibilnih elemenata monoida S čini podgrupu tog monoida.*

Dokaz. Označimo skup svih invertibilnih elemenata monoida S sa $U(S)$. Neka su $x, y \in U(S)$, tada je ispunjeno

$$xy \cdot y^{-1}x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$$
$$y^{-1}x^{-1} \cdot xy = y^{-1} \cdot y = 1.$$

Dakle skup $U(S)$ je zatvoren za množenje, pa čini potpolugrupu polugrupe S. Kako je $1 \in U(S)$, i svaki element $U(S)$ je invertibilan, slijedi da je $U(S)$ podgrupa monoida S. $\square$

Neka je $\mathcal{T}$ neka familija potpolugrupa polugrupe S, tada je presjek $\bigcap_{T\in\mathcal{T}} T$ te familije ili prazan skup ili potpolugrupa od S. Zaista, ako su x, y elementi $\bigcap_{T\in\mathcal{T}} T$, tada su x, y elementi svake potpolugrupe $T \in \mathcal{T}$, pa je i njihov proizvod xy sadržan u T, to jest u presjeku $\bigcap_{T\in\mathcal{T}} T$. Posmatrajmo sada familiju $\mathcal{T}$ svih potpolugrupa od S koje sadrže neki neprazan skup $X \subseteq S$. Presjek te familije $\bigcap_{T\in\mathcal{T}} T$ je, kao što smo vidjeli, potpolugrupa od S, koja takođe sadrži skup X. Po samoj definiciji polugrupe $\bigcap_{T\in\mathcal{T}} T$, to je i najmanja potpolugrupa od S koja sadrži podskup X. Ovu polugrupu nazivamo polugrupa generisana skupom X, a označavamo sa $\langle X\rangle$.

Tvrđenje 1.3. *Neka je X neprazan podskup polugrupe S. Tada se potpolugrupa $\langle X\rangle$ generisana skupom X može izraziti kao*

$$\{x_1x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}.$$

Dokaz. Označimo sa $Y = \{x_1x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$. Kako je $\langle X\rangle$ potpolugrupa od S koja sadrži X, svi konačni proizvodi elementa iz X pripadaju $\langle X\rangle$, pa je $Y \subseteq \langle X\rangle$. S druge strane, i sam skup Y je zatvoren za množenje, pa je potpolugrupa od S. Kako Y sadrži skup X, iz definicije $\langle X\rangle$ slijedi da je $\langle X\rangle \subseteq Y$. Dakle

$$\langle X\rangle = \{x_1x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}.$$

□

Ako je S polugrupa sa nulom, tada pod $\langle X\rangle$ podrazumijevamo skup svih konačnih proizvoda elemenata iz X, zajedno sa nulom. Neka je S monoid, a X neprazan podskup S. Analogno gornjoj definiciji, možemo definisati podmonoid od S generisan sa X kao presjek svih podmonoida S koji sadrže skup X. Taj podmonoid označavamo sa $Mon\langle X\rangle$, i slično prethodnom tvrđenju, lako dobijamo da je

$$Mon\langle X\rangle = \{1x_1x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}.$$

Ako je $\langle X\rangle = S$ za neki podskup $X \subseteq S$, tada kažemo je skup X *generatorni skup* polugrupe S. Podskup $X \subseteq E(S)$ koji je generatorni skup S nazivamo *idempotentni generatorni skup*.

Definicija 1.8. *Rang* polugrupe S definišemo kao

$$\operatorname{rang}(S) = \min(|X| : X \subseteq S, S = \langle X\rangle).$$

Slično definišemo i idempotentni rang polugrupe S

$$\operatorname{idrang}(S) = \min(|X| : X \subseteq E(S), S = \langle X\rangle).$$

Očigledno uvijek važi $\operatorname{rang}(S) \leq \operatorname{idrang}(S)$. Ukoliko postoji idempotentni generatorni skup $E' \subseteq E(S)$ polugrupe S kardinalnosti $\operatorname{rang}(S)$, tada E' nazivamo *idempotentnom bazom* polugrupe S.

Definicija 1.9. Neprazan podskup T polugrupe S nazivamo *lijevi* (*desni*) *ideal* od S ako je ispunjeno $ST \subseteq T$ (odnosno $TS \subseteq T$). Podskup T polugrupe S je obostrani ideal, odnosno *ideal* ako je istovremeno i lijevi i desni ideal od S.

Svaki ideal polugrupe S, lijevi, desni ili obostrani, je takođe potpolugrupa S. Ideal I u S je pravi ako je $I \neq S$. Za proizvoljan element $x \in S$ definišemo sljedeće skupove

$$\begin{aligned} L(x) &= S^1x = \{x\} \cup Sx \\ R(x) &= xS^1 = \{x\} \cup xS \\ J(x) &= S^1xS^1 = \{x\} \cup xS \cup Sx \cup SxS. \end{aligned}$$

Tada su $L(x), R(x), J(x)$ redom glavni lijevi, glavni desni, i glavni obostrani ideal generisan sa x.

Ideal I polugrupe S je minimalan ako ne postoji ideal J polugrupe S takav da je $J \subsetneq I$. Primijetimo da polugrupa ne mora da ima minimalni ideal. Na primjer, u polugrupi $(\mathbb{N}, +)$, svi ideali su oblika $I_n = \{na : a \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, i očigledno ne postoji minimalni među njima. Ukoliko minimalni ideal polugrupe postoji, on je jedinstven, i nazivamo ga *jezgro polugrupe* S, što zapisujemo $K(S)$.

Ako polugrupa S sadrži nulu, tada je očigledno $\{0\}$ minimalni ideal u S. Zbog toga u polugrupama sa nulom definišemo 0-minimalni ideal, kao minimalni element u poretku svih ideala S različitih od $\{0\}$. Polugrupe S sa nulom u kojima važi $S^2 = \{0\}$ nazivaćemo nula polugrupe.

Definicija 1.10. Polugrupa S je *prosta* ukoliko ne sadrži nijedan pravi ideal. Polugrupa S sa nulom je 0-*prosta* ako S nije nula polugrupa i jedini pravi ideal u S je $\{0\}$.

Pokazaćemo sljedeću karakterizaciju 0-prostih polugrupa.

Tvrđenje 1.4. *Polugrupa S je 0-prosta ako i samo ako je $SxS = S$ za sve $x \in S \setminus \{0\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je S 0-prosta polugrupa, tada je za svako $x \in S$ glavni ideal SxS jednak $\{0\}$ ili S. Označimo sa T skup svih $x \in S$ za koje je $SxS = \{0\}$. Ako je $x \in T$ i $s \in S$, onda je $SxsS \subseteq SxS = \{0\}$, pa je $TS \subseteq T$. Slično dobijamo $TS \subseteq T$, što znači da je T ideal u S. Slijedi da je $T = S$ ili $T = \{0\}$. Pretpostavimo da je $T = S$, tada je $SxS = \{0\}$ za sve $x \in S$, odakle je $SSS = \{0\}$, što je u suprotnosti sa $S^2 \neq \{0\}$. Dakle $SxS = S$ za sve $x \in S \setminus \{0\}$.

Neka je sada S polugrupa takva da je $SxS = S$ za sve $x \in S \setminus \{0\}$. Odatle odmah slijedi da je $S^2 \neq \{0\}$. Pretpostavimo da je I ideal u S, i pretpostavimo da je $I \neq \{0\}$. Tada postoji $x \in I \setminus \{0\}$, pa je $SxS = S$. Prema tome, glavni ideal SxS je sadržan u I i jednak S, pa je $I = S$. Dakle jedini ideali polugrupe S su S i $\{0\}$, pa je ona 0-prosta. $\square$

Tvrđenje 1.5. *(i) Neka je S polugrupa sa nulom, i neka je I 0-minimalan ideal polugrupe S. Tada je I ili nula polugrupa ili 0-prosta polugrupa.*

(ii) Neka je S proizvoljna polugrupa, i I minimalni ideal u S. Tada je I prosta polugrupa.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $I^2 \neq \{0\}$, to jest da I nije nula polugrupa. Neka je $x \in I \setminus \{0\}$ i posmatrajmo glavni ideal S^1xS^1 u S. Iz $SI \subseteq I$ i $IS \subseteq I$ slijedi da je $S^1xS^1 \subseteq I$. Kako je I 0-minimalan ideal u S slijedi da je $S^1xS^1 = I$ ili $S^1xS^1 = \{0\}$. Pošto je $x \neq 0$, važi $S^1xS^1 = I$, odakle dalje slijedi

$$I^3 = IS^1xS^1I \subseteq IxI \subseteq I \tag{1}$$

Pošto je $I^2 \neq \{0\}$ ideal u S sadržan u I slijedi da je $I^2 = I$, pa je $I^3 = I$. Iz (1) onda slijedi da je $IxI = I$, pa je prema prethodnom tvrđenju I 0-prosta polugrupa.

(ii) Ako polugrupa S sadrži nulu, tada je minimalni ideal u S upravo $I = \{0\}$, što je prosta polugrupa. Pretpostavimo onda da S ne sadrži nula element. Neka je J ideal polugrupe I, i neka je $x \in J$. Tada je $IxI \subseteq J$ i $S^1xS^1 \subseteq I$. Iz minimalnosti ideala I slijedi da je $S^1xS^1 = I$, pa je

$$I^3 = IS^1xS^1I \subseteq IxI \subseteq J.$$

Slično kao u (i) dobijamo da je $I = I^2 = I^3$, odakle dobijamo $I = J$, što upravo znači da je I prosta polugrupa. $\square$

1.3 Homomorfizmi i kongruencije

Prije nego počnemo izučavati odnose kongurencija i homomorfizama na polugrupama, podsjetimo se nekih osnovnih rezultata o relacijama ekvivalencije i kongruencijama. Neka je X neprazan skup, i $\rho \subseteq X \times X$ neka relacije na X. Inverznom relacijom za ρ nazivamo relaciju $\rho^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$. Sa ρ^E ćemo označavati najmanju relaciju ekvivalencije na skupu X koja sadrži ρ, dok ćemo sa Δ_X označavati relaciju ekvivalencije $\{(x, x) : x \in X\}$. Lako vidimo da relaciju ρ^E možemo izraziti kao

$$\rho^E = \Delta_X \bigcup_{i=1}^{\infty} (\rho \cup \rho^{-1})^i.$$

Relaciju ρ na polugrupi S nazivamo lijevo kompatibilna ako iz $(x, y) \in \rho$ slijedi $(zx, zy) \in \rho$ za sve $x, y, z \in S$. Analogno definišemo desno kompatiblinu relaciju na S, kao relaciju ρ na S koja ispunjava $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xz, yz) \in \rho$ za sve $x, y, z \in S$. Relacija ρ na S je kompatibilna ako ispunjava

$$(x, y) \in \rho \wedge (z, t) \in \rho \Rightarrow (xz, yt) \in \rho,$$

za sve $x, y, z, t \in S$. Relacija ekvivalencije na S koja je lijevo (desno) kompatibilna se naziva lijeva (desna) kongruencija, dok je ekvivalencija koja je kompatibilna relacija naziva kongruencija. Iz ovih definicija lako vidimo da je ekvivalencija na S kongruencija ako i samo ako je istovremeno i lijeva i desna kongruencija.

Za proizvoljnu relaciju ρ na polugrupi S sa ρ^C označimo najmanju kompatibilnu relaciju na S koja sadrži ρ. Najmanju kongruenciju na S koja sadrži ρ označavaćemo sa $\hat{\rho}$. U daljem radu ćemo koristiti sljedeće osobine kongruencija na polugrupi.

Tvrđenje 1.6. *Za proizvoljne binarne relacije ρ i σ na polugrupi S ispunjeno je:*

(i) $\rho^C = \{(pxq, pyq) : p, q \in S^1, (x, y) \in \rho\}$;

(ii) $(\rho \cup \sigma)^C = \rho^C \cup \sigma^C$ *i* $(\rho^{-1})^C = (\rho^C)^{-1}$;

(iii) $\hat{\rho} = \Delta_S \bigcup_{i=1}^{\infty} (\rho^C \cup (\rho^C)^{-1})^i$.

Neka su S i T polugrupe. Preslikavanje $\phi : S \to T$ je homomorfizam polugrupe S u polugrupu T ako važi $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, za sve $x, y \in S$. Ako su S i T monoidi, tada je $\phi : S \to T$ homomorfizam monoida ako je ispunjen prethodni uslov i $\phi(1_S) = 1_T$. Homomorfizam polugrupa koji je bijekcija nazivamo izomorfizam polugrupa, dok injektivan homomorfizam nazivamo monomorfizam, a sirjektivan homomorfizam je epimorfizam. Preslikavanje $\phi : S \to T$ je antiizomorfizam polugrupa ako je ispunjeno $\phi(xy) = \phi(y)\phi(x)$, za sve $x, y \in S$.

Neka je $\phi : S \to T$ homomorfizam polugrupa. Jezgro homomorfizma ϕ, koje označavamo $ker(\phi)$, je binarna relacija na S definisana sa $(x, y) \in ker(\phi)$ ako i samo ako $\phi(x) = \phi(y)$. Skup svih slika homomorfizma ϕ označavaćemo sa $\mathrm{im}(\phi)$.

Neka je ρ kongruencija na polugrupi S, i neka je S/ρ skup klasa ekvivalencije koje određuje relacija ρ. Tada se na skupu S/ρ može na prirodan način definisati binarna operacija sa

$$[x]_\rho \cdot [y]_\rho = [xy]_\rho.$$

Ova operacija ne zavisi od izbora predstavnika klasa ekvivalencije, jer ako je $x\rho x'$ i $y\rho y'$, tada je $xy\rho x'y'$, pošto je ρ kongruencija. Asocijativnost operacije na S/ρ slijedi iz asocijativnosti operacije u polugrupi S. Dakle, $(S/\rho, \cdot)$ je polugrupa, takozvana količnička polugrupa S po kongruenciji ρ. Epimorfizam $\hat{\phi}$ sa polugrupe S na količničku polugrupu S/ρ koji svakom elementu x dodjeljuje odgovarajuću klasu ekvivalencije, $\hat{\phi}(x) = [x]_\rho$, se naziva prirodni homomorfizam.

Teorema 1.1. *(Prva teorema o izomorfizmu) Neka je $\phi : S \to T$ homomorfizam polugrupa. Tada je $ker(\phi)$ kongruencija na S, $im(\phi)$ je potpolugrupa od T, i važi $S/ker(\phi) \simeq im(\phi)$.*

Dokaz. Neka su $x, y, z, t \in S$ takvi da je $(x, y), (z, t) \in ker(\phi)$. Tada je

$$\phi(xz) = \phi(x)\phi(z) = \phi(y)\phi(t) = \phi(yt),$$

pa je i $(xz, yt) \in ker(\phi)$. Dakle $ker(\phi)$ je kongruencija na S, i $S/ker(\phi)$ je količnička polugrupa. Neka su sada z, t elementi $im(\phi)$, tada postoje $x, y \in S$ tako da je $z = \phi(x)$ i $t = \phi(y)$. Odatle slijedi da je $zt = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy) \in im(\phi)$, to jest $im(\phi)$ je potpolugrupa polugrupe T.
Definišimo sada preslikavanje $\psi : S/ker(\phi) \to im(\phi), [x]_{ker(\phi)} \mapsto \phi(x)$. Iz definicije relacije $ker(\phi)$ slijedi da je ovo preslikavanje dobro definisano, kao i bijektivno. Neka su $[x]_{ker(\phi)}, [y]_{ker(\phi)}$ elementi $S/ker(\phi)$, tada je

$$\begin{aligned}\psi([x]_{ker(\phi)}[y]_{ker(\phi)}) &= \psi([xy]_{ker(\phi)}) = \phi(xy) = \\ &= \phi(x)\phi(y) = \psi([x]_{ker(\phi)})\psi([y]_{ker(\phi)}),\end{aligned}$$

pa je ψ izomorfizam. □

Neka je I proizvoljan ideal polugrupe S. Definišimo relaciju $\rho_I = (I \times I) \cup \delta_S$. Lako vidimo da je ρ_I kongruencija na S, takozvana *Risova kongurencija.* Klase ekvivalencije kongruencije ρ_I su I i jednočlani skupovi $\{x\}$, za $x \in S \backslash I$. Količničku polugrupu S/ρ_I označavamo sa S/I, i nazivamo *Risova količnička polugrupa.* Očigledno je I nula polugrupe S/I, pa polugrupu S/I možemo posmatrati kao skup $(S \setminus I) \cup \{0\}$, sa operacijom

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{ako je } xy \in S \setminus I, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Ukoliko je $\phi : S \to T$ homomorfizam polugrupa takav da je $\ker(\phi)$ Risova kongruencija, tada ϕ nazivamo *Risov homomorfizam.* U tom slučaju, jezgrom Risovog homomorfizma ϕ ne nazivamo kongruenciju ρ_I već ideal I. Primjer Risovog homomorfizma je prirodni homomorfizam $\hat{\phi}_I : S \to S/I$, koji slika x u I ako je $x \in I$, odnosno u $\{x\}$ inače. Očigledno je $\ker(\hat{\phi}_I)$ upravo kongruencija ρ_I. Sljedeće tvrđenje pokazuje da postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između ideala količničke polugrupe S/I i ideala polugrupe S koji sadrže I.

Tvrđenje 1.7. *Neka je I pravi ideal polugrupe S. Neka je $\mathcal{A}$ kolekcija svih ideala polugrupe S koji sadrže I, a $\mathcal{B}$ kolekcija svih ideala polugrupe S/I. Tada je preslikavanje $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $J \mapsto J/I$ bijekcija koja čuva relaciju inkluzije, odnosno važi $J \subseteq J' \Rightarrow \phi(J) \subseteq \phi(J')$.*

1.4 Slobodne polugrupe i prezentacije

Neprazan skup simbola A nazivamo alfabet, a njegove elemente slova. Konačni nizovi $\{a_1, \ldots, a_n\}$ elemenata iz A su riječi, koje ćemo kraće zapisivati $a_1 \ldots a_n$. Skup svih riječi nad alfabetom A označavamo sa A^+.

Definišemo praznu riječ, koju ćemo označavati sa λ, kao riječ koja ne sadrži nijedno slovo. Na skupu $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ definišemo binarnu operaciju $\cdot$ nadovezivanja riječi

$$(a_1a_2\dots a_n)\cdot(b_1b_2\dots b_m) = a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_m,$$
$$(a_1a_2\dots a_n)\lambda = \lambda(a_1a_2\dots a_n) = (a_1a_2\dots a_n),$$

za $a_1a_2\dots a_n, b_1b_2\dots b_n \in A^+$. Ova operacija je očigledno asocijativna pa je A^* monoid sa jediničnim elementom λ. Napomenimo i da nećemo praviti razliku između slova $a \in A$, i riječi $\{a\} \in A^+$.

Neka je S proizvoljna polugrupa, i $\phi : A \to S$ neko preslikavanje. Definišimo preslikvanje $\psi^+ : A^+ \to S$ sa

$$\phi^+(a_1\dots a_n) = \phi(a_1)\dots\phi(a_n).$$

Očigledno je ϕ^+ homomorfizam polugrupa. Takođe važi $\phi^+(a) = \phi(a)$, za sve $a \in A$, odnosno $\phi^+|_A = \phi$. Pokazaćemo da je ϕ^+ jedinstven homomorfizam sa A^+ u S čija je restrikcija na A jednaka ϕ. Pretpostavimo da je $\psi : A^+ \to S$ homomorfizam polugrupa za koji važi $\psi|_A = \phi$. Tada je za proizvoljnu riječ $a_1\dots a_n \in A^+$ ispunjeno

$$\psi(a_1\dots a_n) = \psi(a_1)\dots\psi(a_n) = \phi(a_1)\dots\phi(a_n) = \phi^+(a_1\dots a_n),$$

odnosno $\phi = \psi^+$, kao što smo tvrdili. Dakle, za proizvoljnu polugrupu S i proizvoljno preslikavanje ϕ iz A u S, postoji jedinstven homomorfizam iz A^+ u S koji proširuje to preslikavanje. Polugrupu A^+, kao i svaku polugrupu koja zadovoljava ovaj uslov, nazivamo slobodna polugrupa nad alfabetom A. Preciznu definiciju slobodnih polugrupa dajemo ispod.

Definicija 1.11. Polugrupa S je slobodna nad alfabetom A ako:

(i) postoji injektivno preslikavanje $\alpha : A \to S$,

(ii) za svaku polugrupu T i svako preslikavanje $\phi : A \to T$ postoji jedinstven homomorfizam $\phi^+ : S \to T$ za koji važi $\phi = \alpha \circ \phi^+$.

Gornju definiciju možemo pojednostaviti izjednačavajući elemente alfabeta A sa njihovim slikama pri injekciji α, to jest ako posmatramo A kao podskup polugrupe S. Tada definicija postaje: S je slobodna polugrupa nad alfabetom $A \subseteq S$ ako za svaku polugrupu T i svako preslikavanje $\phi : A \to T$ postoji jedinstven homomorfizam $\phi^+ : S \to T$ za koji važi $\phi^+|_A = \phi$.

Neka je S proizvoljna slobodna polugrupa nad alfabetom A. Ako u dijelu (ii) definicije 1.11 uvrstimo $T = S$ i $\phi = \alpha$, dobijamo da postoji jedinstven homomorfizam $\phi : S \to S$ za koji je $\alpha = \alpha \circ \phi^+$. Kako je identičko preslikavanje jedan homomorfizam koji zadovoljava poslednju jednakost, slijedi da je $\phi^+ = \mathrm{id}_S$.

Tvrđenje 1.8. *Neka je A alfabet i S polugrupa. Tada je S slobodna polugrupa nad A ako i samo ako je $S \simeq A^+$.*

Dokaz. Pokazaćemo da su bilo koje dvije slobodne polugrupe na alfabetom A međusobno izomorfne. Pošto smo već pokazali da je A^+ slobodna polugrupa nad A, odatle će direktno slijediti tvrđenje. Neka su S i S' slobodne polugrupa nad alfabetom A, i neka su $\alpha : A \to S$ i $\alpha' : A \to S'$ odgovarajuće injekcije. Tada postoje jedinstveni homomorfizmi $\Psi : S \to S'$ i $\Psi' : S' \to S$ takvi da je ispunjeno $\alpha' = \alpha\Psi$ i $\alpha = \alpha'\Psi'$. Iz ovih jednakosti slijedi

$$\alpha = \alpha'\Psi' = \alpha\Psi\Psi' \text{ i } \alpha' = \alpha\Psi = \alpha'\Psi'\Psi.$$

Vidjeli smo da postoje jedinstveni homomorfizmi $\theta : S \to S$ i $\theta' : S' \to S'$ takov da je $\alpha = \alpha \circ \theta$ i $\alpha' = \alpha' \circ \theta'$. Odatle slijedi da je $\Psi\Psi' = \mathrm{id}_S$ i $\Psi'\Psi = \mathrm{id}_{S'}$. Prema tome, Ψ i Ψ' su uzajamno inverzne bijekcije, odakle slijedi $S \simeq S'$. □

Na sličan način možemo definisati *slobodan monoid* nad alfabetom A. Monoid M je slobodan nad alfabetom A ako i samo ako

(i) postoji injektivno preslikavanje $\alpha : A \to M$,

(ii) za svaki monoid N i preslikavanje $\phi : A \to N$ postoji jedinstven homomorfizam $\phi^+ : M \to N$ takav da je $\phi = \alpha \circ \phi^+$.

Slično dokazu prethodnog tvrđenja, može se pokazati da je monoid M slobodan nad A ako i samo ako je izomorfan monoidu A^*.

Neka je sada S proizvoljna polugrupa i A njen generatorni skup (takav skup uvijek postoji, možemo uzeti na primjer $A = S$). Tada postoji jedinstven homomorfizam $\phi^+ : A^+ \to S$ za koji je $\phi^+|_A = \mathrm{id}_A$. Pošto je

$$S = \langle A \rangle = \{a_1 \dots a_n : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in A\},$$

slijedi da je $\mathrm{im}(\phi^+) = S$. Iz prve teoreme o izomorfizmu polugrupa onda slijedi

$$A^+ / \ker(\phi^+) \simeq \mathrm{im}(\phi^+) = S.$$

Dakle, svaka polugrupa je izomorfna količničkoj polugrupi neke slobodne polugrupe. Neka je ρ binarna relacija na skupu X. Kao i ranije, sa $\hat{\rho}$ ćemo označavati najmanju kongruenciju koja sadrži relaciju ρ. Prema pokazanom, svaku polugrupu S možemo predstaviti (ne nužno na jedinstven način), pomoću slobodne polugrupe F nad alfabetom A, te kongruencije $\hat{\rho}$ na njoj. Kako je svaka slobodna polugrupa nad A izomorfna A^+, dovoljno je poznavati alfabet A, te binarnu relaciju ρ na A^+ koja generiše kongruenciju $\hat{\rho}$. To nas dovodi do pojma prezentacije polugrupe.

Definicija 1.12. Neka je S polugrupa. *Prezentacija* polugrupe S je uređen par $\langle A|\rho\rangle$, gdje su A alfabet i ρ binarna relacija na skupu A, takvi da je $S \simeq A^+/\hat{\rho}$. Prezentacija $\langle A|\rho\rangle$ predstavlja svaku polugrupu koja je izomorfna polugrupi $A^+/\hat{\rho}$.

Elemente A nazivamo *generatorni simboli*, dok elemente iz ρ nazivamo *definicione relacije*. Prezentacija $\langle A|\rho\rangle$ je konačna ako su i A i ρ konačni skupovi. Neka je S neka polugrupa predstavljena prezentacijom $\langle A|\rho\rangle$. Tada je $S \simeq A^+/\hat{\rho}$, odnosno postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između $\hat{\rho}$-klasa ekvivalencije u A^+ i elemenata polugrupe S. Ako dvije riječi u i v iz A^+ pripadaju istoj $\hat{\rho}$-klasi, tada one određuju isti element S, pa pišemo $u =_S v$.

Neka je sada T proizvoljna polugrupa, i $\langle A|\rho\rangle$ neka prezentacija. Preslikavanje $\phi : A \to T$ nazivamo *dodjeljivanje generatora* ako je $T = \langle \phi(A)\rangle$. Neka je $\phi^+ : A^+ \to T$ jedinstveni homomorfizam koji proširuje preslikavanje ϕ. Kažemo da polugrupa T zadovoljava definicionu relaciju $(u, v) \in \rho$ u odnosnu na dodjeljivanje generatora ϕ ako je $\phi^+(u) = \phi^+(v)$, to jest ako $(u, v) \in \ker(\phi^+)$. Primijetimo da T zadovoljava sve definicione relacije iz ρ u odnosu na dodjeljivanje generatora ϕ ako i samo ako je $\rho \subseteq \ker(\phi^+)$. Prema definiciji prezentacije, svaka polugrupa predstavljena sa $\langle A|\rho\rangle$ zadovoljava sve definicione relacije iz ρ u odnosu na dodjeljivanje generatora $: A \to A^+/\hat{\rho}$, $a \mapsto [a]_{\hat{\rho}}$.

Uređeni par $(u, v) \in A \times A$ se naziva elementarna ρ-tranzicija ako se v može dobiti od u zamjenom neke podriječi x riječju y, pri čemu je $(x, y) \in \rho$ ili $(y, x) \in \rho$. Iz Tvrđenja 1.6 slijedi da je (u, v) elementarna ρ-tranzicija ako i samo ako je $(u, v) \in \rho^C \cup (\rho^{-1})^C$. Da je (u, v) elementarna ρ-tranzicija kraće ćemo zapisivati sa $u \sim v$. Ako postoji niz elementarnih ρ-tranzicija $u = w_0 \sim w_1$, $w_1 \sim w_2$,...,$w_{n-1} \sim w_n = v$, tada kažemo da je (u, v) posljedica relacije ρ. U dokazu glavnog rezultata ovog dijela koristićemo sljedeće tvrđenje.

Lema 1.1. *Neka je S polugrupa predstavljena prezentacijom $\langle A|\rho\rangle$, i neka su u, v riječi iz A^+. Tada je $u =_S v$ ako i samo ako je (u, v) posljedica ρ.*

Dokaz. Prema definiciji $u =_S v$ ako i samo ako je u i v pripadaju istoj klasi ekvivalencije kongurencije $\hat{\rho}$. Iz Tvrđenja 1.6 znamo da je

$$\hat{\rho} = \Delta_A \bigcup_{i=1}^{\infty} (\rho^C \cup (\rho^{-1})^C)^i.$$

Prema tome, važi $u =_S v$ ako i samo ako je $u = v$ ili $(u, v) \in (\rho^C \cup (\rho^{-1})^C)^i$ za neko $i \in \mathbb{N}$. Dalje, $(u, v) \in (\rho^C \cup (\rho^{-1})^C)^i$ za neko $i \in \mathbb{N}$ ako i samo ako postoje $w_0, w_1, \ldots, w_i \in A^+$ takvi da je $u = w_0$, $v = w_n$ i $(w_{j-1}, w_j) \in \rho^C \cup (\rho^{-1})^C$ za sve $1 \leq j \leq i$. Kako smo vidjeli, važi $(w_{j-1}, w_j) \in \rho^C \cup (\rho^{-1})^C$ upravo ako i samo ako je $w_{j-1} \sim w_j$. Dakle, $u =_S v$ ako i samo ako je $u = v$

ili postoji niz elementarnih ρ-tranzicija $u = w_0 \sim w_1$, $w_1 \sim w_2$,...,$w_{i-1} \sim w_i = v$. Time smo pokazali da je $u =_S v$ ako i samo ako je (u, v) posljedica ρ. $\square$

Naredno tvrđenje nam daje kriterijum za provjeravanje da li data prezentacija predstavlja neku datu polugrupu.

Tvrđenje 1.9. *Neka je S polugrupa, tada je $\langle A|\rho\rangle$ prezentacija S ako i samo ako postoji dodjeljivanje generatora $\phi : A \to S$ takvo da*

(i) S zadovoljava određujuće relacije iz ρ u odnosu na ϕ.

(ii) ako su $u, v \in A^+$ takvi da je $\phi^+(u) = \phi^+(v)$, tada je (u, v) posljedica ρ.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da $\langle A|\rho\rangle$ jeste prezentacija polugrupe S. Tada postoji izomorfizam $\psi : A^+/\hat{\rho} \to S$. Definišimo preslikavanje $\phi : A \to S$ sa $\phi(a) = \psi([a]_{\hat{\rho}})$. Ovo preslikavanje je dodjeljivanje generatora jer elementi $[a]_{\hat{\rho}}, a \in A$ generišu polugrupu $A^+/\hat{\rho}$. Kako je ϕ^+ upravno prirodni homomorfizam : $A^+ \to A^+/\hat{\rho}$, polugrupa S zadovoljava relacije iz ρ u odnosu na ϕ. Neka su dalje $u, v \in A^+$ takvi da je $\phi^+(u) = \phi^+(v)$, to jest $[u]_{\hat{\rho}} = [v]_{\hat{\rho}}$. Onda je prema gornjoj primjedbi (u, v) posljedica ρ.

Sada pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (i) i (ii) za neko dodjeljivanje generatora ϕ. Pošto S zadovoljava sve relacije iz ρ u odnosu na ϕ, važi $\rho \subseteq ker(\phi^+)$. Znamo da je $ker(\phi^+)$ kongruencija, a kako je $\hat{\rho}$ najmanja kongruencija koja sadrži ρ, slijedi da je $\hat{\rho} \subseteq ker(\phi^+)$. S druge strane, ako je $(u, v) \in ker(\phi^+)$, tada je $[u]_{\hat{\rho}} = [v]_{\hat{\rho}}$, pa je (u, v) posljedica ρ. Odatle slijedi $(u, v) \in \hat{\rho}$, čime smo pokazali da je $\hat{\rho} = ker(\phi^+)$. Sada iz prve teoreme o izomorfizmu polugrupa slijedi

$$S = im(\phi^+) \simeq A^+/ker(\phi^+) = A^+/\hat{\rho}.$$

Time smo pokazali da je $\langle A|\rho\rangle$ prezentacija polugrupe S. $\square$

1.5 Grinove relacije

Grinove relacije na polugrupi su relacije ekvivalencije koje je u svom radu 1951. godine prvi put uveo Dž. A. Grin (J.A. Green). Pokazale su se izuzetno značajne za razumijevanje strukture polugrupa.

Definicija 1.13. Neka je S polugrupa, definišemo relacije $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}$ na sljedeći način

$$x\mathcal{L}y \leftrightarrow S^1x = S^1y,$$
$$x\mathcal{R}y \leftrightarrow xS^1 = yS^1,$$
$$x\mathcal{J}y \leftrightarrow S^1xS^1 = S^1yS^1.$$

Lako vidimo da su ovo relacije ekvivalencije na S. Pokazaćemo prvo neke osnovne osobine relacija $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}$, pa zatim definisati preostale Grinove relacije.

Tvrđenje 1.10. *Neka je S polugrupa i $x, y \in S$, tada važi*

$$
\begin{aligned}
x\mathcal{L}y &\leftrightarrow (\exists a, b \in S^1)(ax = y \wedge by = x),\\
x\mathcal{R}y &\leftrightarrow (\exists a, b \in S^1)(xa = y \wedge yb = x),\\
x\mathcal{J}y &\leftrightarrow (\exists a, b, c, d \in S^1)(axc = y \wedge byd = x).
\end{aligned}
$$

Dokaz. Pokazaćemo tvrđenje za relaciju $\mathcal{L}$, dokaz za $\mathcal{R}$ i $\mathcal{J}$ se izvodi sličnim argumentima. Pretpostavimo prvo da je $x\mathcal{L}y$, to jest $S^1x = S^1y$. Odatle slijedi da $x \in S^1y$, pa postoji $b \in S$ tako da je $x = by$. Analogno, postoji $a \in S$ tako da je $y = ax$. Sada pretpostavimo da postoje $a, b \in S$ tako da je $ax = y, by = x$. Tada je $S^1x = S^1by \subseteq S^1y$, i slično $S^1y \subseteq S^1x$. Dakle važi $x\mathcal{L}y$. □

Iz definicije, i prethodnog tvrđenja lako vidimo da važe sljedeći odnosi $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ i $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$.

Tvrđenje 1.11. *Neka je S polugrupa i $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ Grinove relacije na S. Tada je $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.*

Dokaz. Neka su x, y elementi S takvi da je $x\mathcal{L}\circ\mathcal{R}y$. Tada postoji $z \in S$ tako da je $x\mathcal{L}z$ i $z\mathcal{R}y$. Prema prethodnom tvrđenju postoje elementi $a, b, c, d \in S$ takvi da je $ax = z, bz = x$ i $zc = y, yd = z$. Odatle slijedi da je $xc = bzc$ i $bzcd = byd = bz = x$, pa je $bzc\mathcal{R}x$. Slično dobijamo da je $y\mathcal{L}bzc$, što znači da je $x\mathcal{R} \circ \mathcal{L}y$. Prema tome, važi $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Analogno pokazujemo da je $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$, pa je konačno $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. □

Iz poslednjeg tvrđenja slijedi da je $\mathcal{L} \vee \mathcal{R} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$, gdje sa $\vee$ označavamo tranzitivno zatvaranje unije dvije relacije ekvivalencije. Sada možemo definisati preostale dvije Grinove relacije $\mathcal{D}$ i $\mathcal{H}$ kao $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ i $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Očigledno je $\mathcal{H}$ relacija ekvivalencije, kao presjek dvije relacije ekvivalencije. Iz gornje primjedbe slijedi da je i $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ relacija ekvivalencije. U konačnim polugrupama se relacije $\mathcal{D}$ i $\mathcal{J}$ poklapaju.

Relacija $\mathcal{L}$ je desna kongruencija, i dualno, $\mathcal{R}$ je lijeva kongruencija, jer za proizvoljne $x, y, z \in S$ važi

$$
\begin{aligned}
x\mathcal{L}y &\Rightarrow S^1x = S^1y \Rightarrow S^1xz = S^1yz \Rightarrow xz\mathcal{L}yz,\\
x\mathcal{R}y &\Rightarrow xS^1 = yS^1 \Rightarrow zxS^1 = zyS^1 \Rightarrow zx\mathcal{R}zy.
\end{aligned}
$$

Neka je a element polugrupe S. Ako sa L_a, R_a, J_a, H_a, D_a označimo redom $\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{J}$-, $\mathcal{H}$-, $\mathcal{D}$-klase ekvivalencije određene sa a, tada važe sljedeći odnosi

$$H_a \subseteq L_a, H_a \subseteq R_a, L_a \subseteq D_a, R_a \subseteq D_a, D_a \subseteq J_a.$$

Na skupu svih $\mathcal{J}-$klasa polugrupe S možemo definisati relaciju poretka na sljedeći način

$$J_a \leq J_b \Leftrightarrow S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1.$$

Na sličan način uvodimo relaciju poretka na skupu svih $\mathcal{L}$-klasa, odnosno $\mathcal{R}$-klasa. Neka su $a, b \in S$ proizvoljni elementi, tada važi

$$S^1 ab S^1 \subseteq S^1 a S^1 \text{ i } S^1 ab S^1 \subseteq S^1 b S^1 \tag{2}$$

Odatle slijedi da je $J_{ab} \leq J_a$ i $J_{ab} \leq J_b$, odnosno, proizvod dva proizvoljna elementa $a, b \in S$ uvijek upada u $\mathcal{J}$-klasu koja je ispod ili jednaka J_a i J_b. Slično dobijamo da je za proizvoljne $a, b \in S$ uvijek ispunjeno $R_{ab} \leq R_a$ i $L_{ab} \leq L_b$. Neka su sada J_a i J_b maksimalne $\mathcal{J}$-klase u odnosu na uvedeni poredak, i neka je $J_a \neq J_b$. Tada je $J_{ab} < J_a$ i $J_{ab} < J_b$, jer bi u suprotnom $\mathcal{J}$-klase J_a i J_b bile uporedive. Prema tome, proizvod elemenata iz različitih maksimalnih $\mathcal{J}$-klasa uvijek mora pripadati nekoj nižoj $\mathcal{J}$-klasi.

Neka je $x \in S$ proizvoljan element, definišimo $I(x) = J(x) \setminus J_x$. Primijetimo da je $I(x)$ jednak skupu $\{y \in S : J_y < J_x\}$, jer je $J_y < J_x$ ako i samo ako je $S^1 y S^1 \subset S^1 x S^1$, to jest ako i samo ako je $y \in S^1 x S^1 = J(x)$ i $y \notin J_x$.

Pretpostavimo da skup $I(x)$ nije prazan. Neka je $y \in I(x)$ i $z \in S$, onda važi $yz \in J(x)$ pošto je $J(x)$ ideal. Odatle slijedi $J(yz) \subseteq J(y) \subset J(x)$ jer $y \notin J_x$. Prema tome, $yz \in I(x)$, i slično dobijamo i $zy \in I(x)$. Dakle, ako skup $I(x)$ nije prazan tada on je ideal u S.

Jezgro polugrupe $K(S)$ i količničke polugrupe $J(x)/I(x)$, se nazivaju glavni faktori polugrupe S. Znamo da je jezgro $K(S)$ prosta polugrupa. Slična osobina važi i za ostale glavne faktore polugrupe.

Tvrđenje 1.12. *Neka je S proizvoljna polugrupa. Za sve $x \in S$ za koje je $I(x)$ neprazan skup važi da je $J(x)/I(x)$ ili nula polugrupa ili 0-prosta polugrupa.*

Dokaz. Znamo da je $J(x)/I(x)$ ideal u polugrupi $S/I(x)$. Pretpostavimo da je $\tilde{K}$ neki pravi ideal u $J(x)/I(x)$. Tada je prema Teoremi 1.7 $\tilde{K} = K/I(x)$ za neki ideal K polugrupe $J(x)$ koji sadrži $I(x)$. Neka je $k \in K$, tada je $S^1 k S^1 = J(k) \subseteq K \subset J(x)$. Odatle slijedi da je $J_k < J_x$, pa je $k \in I(x)$. Dakle $I(x) = K$, što znači da je $J(x)/I(x)$ 0-minimalni ideal u $S/I(x)$. Konačno iz tvrđenja 1.5 slijedi da je $J(x)/I(x)$ 0-prosta polugrupa ili nula polugrupa. □

Vidjeli smo da važi $J_{yz} \leq J_x$ za proizvoljene elemente y, z klase J_x, to jest proizvod dva elementa iste $\mathcal{J}$-klase upada u istu ili nižu $\mathcal{J}$-klasu. Ako je $J(x)/I(x)$ nula polugrupa, tada proizvod dva proizvoljna elementa J_x uvijek upada u nižu $\mathcal{J}$-klasu. U slučaju da je $J(x)/I(x)$ prosta polugrupa, proizvod elementa iz J_x upada ili u J_x ili u $I(x)$, pa polugrupu $J(x)/I(x)$

možemo poistovijetiti sa polugrupom $J^*(x) = J_x \cup \{0\}$, sa operacijom

$$y * z = \begin{cases} yz, & yz \in J_x \\ 0, & yz \notin J_x \end{cases}$$

Sada ćemo se okrenuti posmatranju strukture $\mathcal{D}$-klasa polugrupe. Vidjeli smo da je svaka $\mathcal{D}$-klasa unija nekih $\mathcal{L}$, odnosno $\mathcal{R}$-klasa. S druge strane, $\mathcal{L}$-klasa L_x i $\mathcal{R}$-klasa R_y imaju neprazan presjek ako i samo ako su sadržane u istoj $\mathcal{D}$-klasi. Taj presjek $L_x \cap R_y$ je upravo jedna $\mathcal{H}$-klasa. Prema tome, proizvoljnu $\mathcal{D}$ klasu D možemo vizuelizovati na sljedeći način. Formirajmo pravougaonu rešetku, čiji su redovi indeksirani $\mathcal{R}$-klasama sadržanim u D, a kolone $\mathcal{L}$-klasama sadržanim u D. Elemente klase D rasporedimo u odgovarajuće ćelije rešetke, tako da elementi iste $\mathcal{H}$-klase leže u istoj ćeliji. Tako dobijamo dijagram rasporeda elemenata D, koji zbog svoj oblika često nazivamo *egg-box* dijagram.

Tvrđenje 1.13. *(Grinova lema) Neka su $x, y \in S$ elementi iste $\mathcal{L}$-klase, i neka su $p, q \in S^1$ takvi da je $px = y$ i $qy = x$. Tada su preslikavanja $\lambda_p : z \mapsto pz$, za $z \in R_x$ i $\lambda_q : t \mapsto qt$, za $t \in R_y$, uzajamno inverzne bijekcije skupova R_x i R_y. Ova preslikavanja takođe čuvaju $\mathcal{L}$-klase, to jest $\lambda_p(z) \in L_z$ za sve $z \in R_x$, kao i $\lambda_q(t) \in L_t$ za sve $t \in R_y$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da λ_p zaista slika R_x u R_y. Neka je $z \in R_x$, tada važi $\lambda_p(z) = pz\mathcal{R}px = y$, pošto je $\mathcal{R}$ lijeva kongruencija. Dakle $\lambda_p(z) \in R_y$ za sve $z \in R_x$. Slično dobijamo da λ_q slika R_y u R_x. Neka je opet $z \in R_x$ proizvoljno, tada postoje $a, b \in S^1$ tako da je $x = zb$ i $z = xa$. Odatle slijedi

$$\lambda_q(\lambda_p(z)) = qpz = qp(xa) = q(px)a = qya = xa = z,$$

pa je $\lambda_p \circ \lambda_q = id_{R_x}$. Analogno dobijamo da je $\lambda_q \circ \lambda_p = id_{R_y}$, pa je prvi dio tvrđenja pokazan.

Dalje, kako za proizvoljno $z \in R_x$ važi $\lambda_p(z) = pz$ i $z = qpz = q\lambda_p(z)$, slijedi da je $\lambda_p(z) \in L_z$, to jest preslikavanje λ_p čuva $\mathcal{L}$-klase. Slično dobijamo i da preslikavanje λ_q čuva $\mathcal{L}$-klase. □

Na osnovu dualnosti relacija $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$ direktno slijedi sljedeće tvrđenje.

Tvrđenje 1.14. *(Dual Grinove leme) Neka su $x, y \in S$ elementi iste $\mathcal{R}$-klase, i neka su $p, q \in S^1$ takvi da je $xp = y$ i $yq = x$. Tada su preslikavanja $\rho_p : z \mapsto zp$, za $z \in L_x$ i $\rho_q : t \mapsto tq$, za $t \in L_y$, uzajamno inverzne bijekcije L_x i L_y. Ova preslikavanja takođe čuvaju $\mathcal{R}$-klase, to jest $\rho_p(z) \in R_z$ za sve $z \in L_x$, kao i $\rho_q(t) \in R_t$ za sve $t \in L_y$.*

Iz Grinove leme i njenog duala slijedi da sve $\mathcal{H}$-klase sadržane unutar $\mathcal{D}$-klase D imaju istu kardinalnost. Takođe važe i sljedeće osobine.

Tvrđenje 1.15. *Neka je H neka $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S. Tada je ili $H^2 \cap H = \emptyset$ ili važi neki od sljedećih ekvivalentnih uslova* *(i)* $H^2 \cap H \neq \emptyset$*;*

(ii) H *sadrži idempotent;*

(iii) $H^2 = H$*;*

(iv) H *je potpolugrupa polugrupe* S*;*

(v) H *je podgrupa polugrupe* S*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $H^2 \cap H \neq \emptyset$. Tada postoje $x, y \in H$ tako da je $xy \in H$, pa je $xy\mathcal{H}x$ i $xy\mathcal{H}y$. Dakle važi $xy\mathcal{L}x$ i $xy\mathcal{L}y$, te $xy\mathcal{R}x$ i $xy\mathcal{R}y$. Prema Grinovoj lemi, preslikavanje λ_x bijektivno preslikava R_y na R_{xy}, i pri tome očuvava $\mathcal{L}$-klase. Odatle slijedi da njegova restrikcija bijektivno slika $R_y \cap L_y = H_y = H$ na $H_{xy} = R_{xy} \cap L_{xy}$. Kako je $H_y = H_{xy}$, dobili smo bijekciju $\lambda_x|_H$ skupa H. Slično dobijamo da i $\rho_y|_H$ bijekivno preslikava H na samog sebe.

Neka je sada $z \in H$ proizvoljan element, tada je $\lambda_x(z) = xz = a$ i $\rho_y(z) = zy = b$ za neke $a, b \in H$. Pošto je $xz\mathcal{R}x$ i $zy\mathcal{L}y$, iz Grinove leme i njenog duala slijedi da su preslikavanja $\rho_z : L_x \to L_{xz}$ i $\lambda_z : R_y \to R_{zy}$ bijekcije. Pri tome ρ_z očuvava $\mathcal{R}$-klase, dok λ_z očuvava $\mathcal{L}$-klase. Iz toga slijedi da su restrikcije $\rho_z|_H$ i $\lambda_z|_H$ bijekcije skupa H.

Dakle, važi $Hz = H = zH$ za proizvoljno $z \in H$. Odatle odmah vidimo da je H potpolugrupa polugrupe S. Neka su sada $z, t \in H$ proizvoljni, tada postoje $u, v \in H$ tako da je $z = uz$ i $t = zv$. Prema tome, $ut = uzv = zv = t$, pa je u lijevi neutralni element u polugrupi H. Na sličan način dobijamo postojanje desnog neutralnog elementa w u polugrupi H. Kako H sadrži i lijevi i desni neutralni element, važi $u = w = 1_H$ je neutralni element u H. Dalje, iz $zH = H = Hz$ slijedi da postoje $z', z'' \in H$ tako da je $zz' = 1_H = z''z$. Dakle, svaki element H ima i lijevi i desni inverzni element, pa važi $z' = z''$, i H je grupa.

Ovime smo pokazali da (i) implicira (v). S druge strane, iz (v) lako dobijamo (ii), (iii), (iv), iz kojih trivijalno slijedi (i), pa su svi navedeni uslovi međusobno ekvivalentni. □

Iz pokazanog tvrđenja slijedi da $\mathcal{H}$-klase sadrže najviše jedan idempotent. Lako se može pokazati da su maksimalne podgrupe S upravo $\mathcal{H}$-klase koje sadrže idempotente. Koristeći Grinove leme i osobine Grinovih relacija, možemo pokazati i sljedeći rezultat za $\mathcal{H}$-klase koje su grupe.

Teorema 1.2. *Neka su* $a, b \in S$ *idempotenti iz iste* $\mathcal{D}$*-klase, tada su odgovarajuće* $\mathcal{H}$*-klase* H_a *i* H_b *izomorfne.*

Neka je sada R neka $\mathcal{R}$-klasa koja sadrži idempotent e. Možemo primijetiti da je e lijevi neutralni element u toj klasi. Zaista, ako je e idempotent sadržan u $\mathcal{R}$-klasi $R = R_e$, tada za sve $x \in R$ postoji $a \in S$ tako da je

$x = ea$, pa je ispunjeno $ex = eea = ea = x$. Slično dokazujemo i da svaki idempotent predstavlja desni neutralni element $\mathcal{L}$-klase kojoj pripada.

Pokazaćemo sada par jednostavnih lemu vezanih za idempotente i Grinove relacije, koje će nam biti od koristi u idućim poglavljima.

Lema 1.2. *Neka su $x, y \in S$ elementi iste $\mathcal{D}$-klase polugrupe S. Tada je $xy \in R_x \cap L_y$ ako i samo ako $L_x \cap R_y$ sadrži idempotent.*

Dokaz. Pretpostavimo da $xy \in R_x \cap L_y$, tada je $xy\mathcal{R}x$ i $xy\mathcal{L}y$, pa postoji $a \in S$ tako da je $x = xya$. Prema dualu Grinove leme preslikavanja $\rho_y : L_x \to L_{xy} = L_y$ i $\rho_a : L_y = L_{xy} \mapsto L_x$ su uzajamno inverzne bijekcije, koje čuvaju $\mathcal{R}$-klase. Zbog toga je

$$(ya)^2 = yaya = \rho_a(\rho_y(\rho_a(y))) = \rho_a(y) = ya,$$

pa je ya idempotent. Kako je ρ_a čuva $\mathcal{R}$-klase, važi $ya \in R_y$, pa je $ya \in L_x \cap R_y$.
Za drugi smjer, pretpostavimo da $L_x \cap R_y$ sadrži idempotent e. Tada je e lijevi neutralni element u R_y, pa je $ey = y$. Iz duala Grinove leme onda slijedi da je $\rho_y : L_e \to L_y$ bijekcija koja čuva $\mathcal{R}$-klase. Odatle slijedi da $xy \in R_x$, a kako je $xy \in L_y$, dobijamo konačno da je $xy \in R_x \cap L_y$. □

Lema 1.3. *([43], Tvrđenje A.1.15) Neka je S polugrupa. Idempotenti $e, f \in E(S)$ su $\mathcal{D}$-ekvivalentni ako i samo ako postoji $x \in S$ i $x' \in V(x)$ takvi da je $e = xx'$ i $f = x'x$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje elementi $x \in S$ i $x' \in V(x)$ takvi da je $e = xx'$ i $f = x'x$. Tada je $xx'x = x$ i $x'xx' = x'$ pa očigledno važi $x\mathcal{R}xx'\mathcal{L}x'$ i $x'\mathcal{R}x'x\mathcal{L}x$. Odatle slijedi $xx'\mathcal{R}x\mathcal{L}x'x$, odnosno $e\mathcal{D}f$, pa je jedan smjer tvrđenja pokazan.

Neka je sada $e\mathcal{D}f$, tada postoji $x \in S$ tako da je $e\mathcal{R}x\mathcal{L}f$. Odatle slijedi da postoje $u, v, a, b \in S^1$ takvi da je $e = xu$, $x = ea$ i $f = vx$, $x = bf$. Definišimo $x' = fue$. Tada je

$$\begin{aligned} xx'x &= x(fue)x = bf(fue)ea = bfuea = xux = ex = x \\ x'xx' &= (fue)x(fue) = fuxue = fuee = fue = x', \end{aligned}$$

pa su elementi x i x' međusobno inverzni. Takođe važi

$$\begin{aligned} xx' &= xfue = x(vx)ue = xue = e^2 = e \\ x'x &= fuex = fux = vxux = vx = f, \end{aligned}$$

čime je pokazan i drugi smjer tvrđenja. □

Neka je T potpolugrupa polugrupe S. Sa $\mathcal{L}^T$ ćemo označavati Grinovu relaciju $\mathcal{L}$ na polugrupi T, odnosno $(x, y) \in \mathcal{L}^T$ ako i samo ako je $T^1x = T^1y$. Analogno definišemo $\mathcal{R}^T$, $\mathcal{H}^T$, $\mathcal{J}^T$ i $\mathcal{D}^T$. U opštem slučaju, Grinove relacije na T ne moraju da se poklapaju sa restrikcijama Grinovih relacija na polugrupi S. Očigledno je uvijek ispunjeno $\mathcal{L}^T \subseteq (T \times T) \cap \mathcal{L}$, i analogno za ostale Grinove relacije.

Tvrđenje 1.16. *Neka je T potpolugrupa polugrupe S i neka su $s, t \in T$ regularni elementi u T. Tada je $s\mathcal{K}t$ u T ako i samo ako je $s\mathcal{K}t$ u S, gdje je $\mathcal{K}$ bilo koja od Grinovih relacija $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Pokazaćemo tvrđenje samo za $\mathcal{K} = \mathcal{L}$, pošto će za $\mathcal{R}$ tvrđenje važiti dualno, a za $\mathcal{H}$ će slijediti iz tvrđenja za $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$. Za polugrupu $R \in \{S, T\}$ neka $\mathcal{L}^R$ označava Grinovu $\mathcal{L}$-relaciju na polugrupi R. Očigledno iz $s\mathcal{L}^T t$ slijedi $s\mathcal{L}^S t$. Pretpostavimo sada da je $s\mathcal{L}^S t$. Elementi s i t su regularni u T, pa postoje njihovi inverzi $a, b \in T$. Tada su $e = as$ i $f = bt$ idempotenti u T, pri čemu je $e\mathcal{L}^T s$ i $f\mathcal{L}^T t$. Odatle slijedi $e\mathcal{L}^S s$ i $f\mathcal{L}^S t$, odakle dobijamo $e\mathcal{L}^S f$. Iz poslednje relacije dobijamo $ef = e$ i $fe = f$ pošto su e i f idempotenti. Iz toga konačno slijedi $s\mathcal{L}^T e\mathcal{L}^T f\mathcal{L}^T t$. □

Prema gornjem tvrđenju, ako je T regularna potpolugrupa polugrupe S, tada važi

$$\mathcal{L}^T = (T \times T) \cap \mathcal{L}, \mathcal{R}^T = (T \times T) \cap \mathcal{R}, \mathcal{H}^T = (T \times T) \cap \mathcal{H}.$$

Međutim, za Grinove relacije $\mathcal{J}$ i $\mathcal{D}$ odgovarajuće tvrđenje nije tačno.

Na kraju definišimo pojam stabilnosti polugrupe. Neke od klasa polugrupa koje su stabilne su konačne polugrupe i komutativne polugrupe.

Definicija 1.14. Polugrupa S je *stabilna* ako su za sve $s, t \in S$ ispunjena oba sljedeća uslova

(i) $s\mathcal{J}st$ ako i samo ako je $s\mathcal{R}st$,

(ii) $s\mathcal{J}ts$ ako i samo ako je $s\mathcal{L}ts$.

Pošto ćemo u ovom radu uglavnom posmatrati konačne polugrupe, koristićemo sljedeći rezultat.

Teorema 1.3. *([43], Teorema A.2.4) Sve konačne polugrupe su stabilne.*

1.6 Regularne polugrupe

Podsjetimo se, polugrupa S je regularna ako za svaki element $x \in S$ postoji $y \in S$ tako da je $xyx = x$. Za svako $x \in S$ možemo izabrati jedan element skupa $V(x)$, koji ćemo označiti sa x'. Vidjeli smo i da su elementi xx' i $x'x$ idempotenti za sve $x \in S$. Pri tome važi $x\mathcal{R}xx'$ i $x\mathcal{L}x'x$. Odatle slijedi da svaka $\mathcal{R}$-klasa i svaka $\mathcal{L}$-klasa regularne polugrupe S sadrži idempotent.

Definicija 1.15. Unarna operacija $*$ na polugrupi $(S, \cdot)$ je *involucija* ako ispunjava sljedeće osobine

$$(x^*)^* = x \text{ i } (xy)^* = y^*x^* \tag{3}$$

za sve $x, y \in S$. Uređena trojka $(S, \cdot, *)$ se naziva polugrupa sa involucijom. Ukoliko polugrupa sa involucijom zadovoljava dodatni uslov

$$xx^*x = x, \text{ za sve } x \in S,$$

tada je S $*$-regularna polugrupa.

U $*$-regularnim polugrupama za predstavnika iz $V(x)$ možemo izbrati upravo element x^* jer važi $x^*xx^* = (xx^*x)^* = x^*$.

Teorema 1.4. *([40], Teorema 2.1) Neka je S $*$-regularna polugrupa, i neka je $x \in S$. Preslikavanje $\sigma : y \mapsto y^*$, $y \in R_x$ je bijektivno preslikavanje R_x na L_{x^*}. Preslikavanje σ očuvava $\mathcal{H}$-relaciju i idempotente.*

Dokaz. Neka je $z \in R_x$, tada postoje $a, b \in S$ takvi da je $z = xa$ i $x = zb$. Iz osobina involucije dobijamo

$$z^* = (xa)^* = a^*x^* \text{ i } x^* = (zb)^* = b^*z^*,$$

odakle dalje slijedi $z^*\mathcal{L}x^*$, to jest $z^* \in L_{x^*}$. Dakle σ zaista slika R_x u L_{x^*}. Definišimo sada preslikavanje $\tau : y \mapsto y^*$, $y \in L_{x^*}$. Analogno kao za σ, dobijamo da τ preslikava L_{x^*} u $R_{(x^*)^*} = R_x$. Pri tome za proizvoljno $z \in R_x$ važi $(\sigma \circ \tau)(x) = (x^*)^* = x$, pa je $\sigma \circ \tau = id_{R_x}$. Slično dobijamo $\tau \circ \sigma = id_{L_{x^*}}$, pa su σ i τ uzajamno inverzne bijekcije.

Neka je sada $e \in R_x$ idempotent, tada je $(\sigma(e))^2 = e^*e^* = (ee)^* = e^* = \sigma(e)$. Dalje, neka su $z, t \in R_x$ elementi iste $\mathcal{H}$-klase H. Tada je $z = at, t = bz$ i $z = tc, t = zd$ za neke elemente $a, b, c, d \in S$. Iz toga slijedi $z^* = t^*a^*, t^* = z^*b^*$ i $z^* = c^*t^*, t^* = d^*z^*$, to jest $z^*\mathcal{H}t^*$. □

Idempotenti $e \in S$ za koje važi $e^* = e$ se nazivaju *projekcije.* Skup svih projekcija $*$-regularne polugrupe S označavamo sa $P(S)$.

Teorema 1.5. *([40] Teorema 2.2) Svaka $\mathcal{R}$-klasa $*$-regularne polugrupe S sadrži tačno jednu projekciju.*

Dokaz. Neka je $R = R_a$ proizvoljna $\mathcal{R}$-klasa polugrupe S. Tada važi $(aa^*)^2 = aa^*aa^* = aa^*$, kao i $(aa^*)^* = (a^*)^*a^* = aa^*$, pa je $e = aa^*$ projekcija. Dakle postoji projekcija koja pripada R_a. Pretpostavimo da je f takođe projekcija iz R_a. Iz prethodne teoreme slijedi da je preslikavanje $\sigma_e : x \mapsto x^*$ bijekcija skupa $R_e = R_a$ u $L_{e^*} = L_e$. Odatle slijedi da $f = f^* = \sigma(f) \in L_e$, pa e i f pripadaju istoj $\mathcal{H}$-klasi $L_e \cap R_e$. Međutim, $\mathcal{H}$-klasa sadrži najviše jedan idempotent, pa važi $e = f$, to jest e je jedina projekcija u R. □

Analogno poslednjoj teoremi, lako možemo pokazati da svaka $\mathcal{L}$-klasa $*$-regularne polugrupe sadrži tačno jednu projekciju. Odatle dobijamo jednakost

$$|P(S)| = |S/\mathcal{R}| = |S/\mathcal{L}|. \tag{4}$$

Teorema 1.6. *([40] Teorema 2.5) U $*$-regularnoj polugrupi S je ispunjeno $E(S) = P(S)^2$.*

Dokaz. Neka su $p, q \in P(S)$, tada važi

$$(pq)^2 = pqpq = pq^2p^2q = pq \cdot qp \cdot pq = pq \cdot q^*p^* \cdot pq = pq(pq)^*pq = pq,$$

pa je $pq \in E(S)$. S druge strane, ako je e proizvoljan idempotent, tada je $e = ee^*e = e(ee)^*e = (ee^*)(e^*e)$, to jest e se može predstaviti kao proizvod dvije projekcije ee^* i e^*e. □

Neka je a proizvoljan element $*$-regularne polugrupe S. Tada je $(aa^*)^* = (a^*)^*a^* = aa^*$, to jest aa^* je projekcija. Analogno pokazujemo da je a^*a projekcija. S druge strane, ako je $p \in S$ projekcija, tada je $p = pp = pp^* = p^*p$. Prema tome, skup projekcija u S je jednak

$$P(S) = \{aa^* : a \in S\} = \{a^*a : a \in S\}. \tag{5}$$

Ako $*$-regularna polugrupa S zadovoljava dodatni uslov $xx^* = x^*x$ za sve $x \in S$, tada je S kompletno regularna polugrupa.

Tvrđenje 1.17. *Neka je S polugrupa. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni*

(i) S je kompletno regularna polugrupa;

(ii) svaki element polugrupe S je sadržan u nekoj podgrupi od S;

(iii) svaka $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S je podgrupa od S.

Dokaz. Dokazaćemo sljedeći niz implikacija: (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii), (iii)⇒(i), čime ćemo pokazati ekvivalenciju navedenih uslova.

(i)⇒(ii) Neka je S kompletno regularna polugrupa, i neka je x proizvoljan element polugrupe S. Tada je $e = xx^* = x^*x$ idempotent, pri čemu važi $ex = xx^*x = x$ i $xe = xx^*x = x$. Odatle slijedi da je $x \in R_e$ i $x \in L_e$. Dakle, x pripada $\mathcal{H}$-klasi H_e, koja je podgrupa S jer sadrži idempotent.

(ii)⇒(iii) Pretpostavimo da svaki element polugrupe S leži u nekoj podgrupi S, i neka je H proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa. Neka je dalje $x \in H$ proizvoljan element, tada postoji podgrupa G polugrupe S takva da je $x \in G$. Ako je e neutralni element grupe G, onda važi $xe = x = ex$ i $x^{-1}x = e = xx^{-1}$, pa je $e \in H_x = H$. Dakle $\mathcal{H}$-klasa H sadrži idempotent e, odakle slijedi da je H grupa.

(iii)⇒(i) Konačno, pretpostavimo da svaka $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S sadrži idempotent. Tada je svaka $\mathcal{H}$-klasa u S podgrupa od S. Neka je $x \in S$

proizvoljan element, i neka je x^{-1} njegov inverz u grupi H_x. Polugrupa S je kompletno regularna polugrupa jer za sve $x \in S$ važi

$$xx^{-1}x = x \text{ i } (x^{-1})^{-1} = x \text{ i } xx^{-1} = x^{-1}x.$$

$\square$

Inverzne polugrupe možemo definisati i kao kompletno regularne polugrupe koje zadovoljavaju dodatni uslov $xx^*yy^* = yy^*xx^*$ za sve x, y iz polugrupe. Sljedeća teorema nam daje opravdanje ove definicije.

Teorema 1.7. *Polugrupa S je inverzna ako i samo ako je S regularna polugrupa, i svi idempotenti u S komutiraju.*

1.7 Kompletno 0-proste polugrupe

Vidjeli smo da su svi glavni faktori proizvoljne polugrupe ili nula polugrupa ili 0-prosta polugrupa. Zbog toga je značajno da navedemo osobine 0-prostih polugrupa.

Neka je S proizvoljna polugrupa sa nulom. U odnosu na prirodni poredak idempotenata 0 je naravno najmanji element. Kažemo da je idempotent $e \in E(S) \setminus \{0\}$ primitivan ako je minimalan element u skupu $E(S) \setminus \{0\}$. Polugrupa S je kompletno 0-prosta ako je 0-prosta i sadrži bar jedan primitivni idempotent.

Lako uočavamo da je svaka konačna 0-prosta polugrupa takođe kompletno 0-prosta. Pokazaćemo nekoliko osnovnih osobina kompletno 0-prostih polugrupa.

Tvrđenje 1.18. *Neka je S kompletno 0-prosta polugrupa. Tada za proizvoljan primitivni idempotent $e \in S$ važi $R_e = eS \setminus \{0\}$ i $L_e = Se \setminus \{0\}$.*

Dokaz. Neka je $x \in R_e$, tada postoje $y, z \in S$ takvi da je $x = ey$ i $e = xz$. Odatle slijedi da je $x \in eS$, a kako je $e \neq 0$, važi i $x \neq 0$. Odatle slijedi $R_e \subseteq eS \setminus \{0\}$.

Neka je sada $x \in eS \setminus \{0\}$, $x = ey$ za neko $y \in S \setminus \{0\}$. Odatle je $ex = eey = ey = x$. Pošto je S 0-prosta polugrupa, prema Tvrđenju 1.4 je ispunjeno $S \subseteq SxS$, pa je $e = axb$ za neke $a, b \in S$. Definišimo sada element $f = xbeae$. Tada važi

$$f^2 = xbeae \cdot xbeae = xbe(axb)eae = xbeeeae = xbeae = f.$$

odnosno f je idempotent. Takođe je ispunjeno

$$ef = exbeae = xbeae = f$$
$$fe = xbeaee = xbeae = f,$$

pa je $f \leq e$. Kako je e primitivan idempotent, odatle slijedi $f = e$ ili $f = 0$. Pošto je

$$afxb = a(xbeae)xb = (axb)ea(ex)b = eeaxb = eee = e,$$

ne može biti $f = 0$, pa je $f = e$. Konačno, imamo $e = f = xbeae$, pa je $x\mathcal{R}e$, čime smo pokazali da je $eS \setminus \{0\} \subseteq R_e$. Dokaz tvrđenja za $\mathcal{L}$-klase je dualan izloženom dokazu. □

Tvrđenje 1.19. *Neka je S kompletno 0-prosta polugrupa. Za sve $x \in S\setminus\{0\}$ je ispunjeno $xS \setminus \{0\} \subseteq R_x$ i $Sx \setminus \{0\} \subseteq L_x$.*

Dokaz. Opet ćemo pokazati samo tvrđenje za $\mathcal{R}$-klase, tvrđenje za $\mathcal{L}$-klase će slijediti dualno iz pokazanog. Neka je $y \in xS \setminus \{0\}$, $y = xs$ za neko $s \in S \setminus \{0\}$. Kako je S kompletno 0-prosta polugrupa, postoji primitivni idempotent $e \in S$. Iz Tvrđenja 1.4 slijedi da je $S \subseteq SeS$, pa postoje i $a, b \in S$ tako da je $x = aeb$. Prema prethodnom tvrđenju je $eb, ebs \in R_e$. Kako je relacije $\mathcal{R}$ lijeva kongruencija, slijedi da je $aeb\mathcal{R}aebs$, to jest $x\mathcal{R}y$, pa je $y \in R_x$. □

Tvrđenje 1.20. *U kompletno 0-prostoj polugrupi S je ispunjeno:*

(i) Jedine $\mathcal{D}$-klase su $\{0\}$ i $S \setminus \{0\}$.

(ii) Polugrupa S je regularna.

(iii) Za sve $x \in S \setminus \{0\}$ je ispunjeno $R_x = xS \setminus \{0\}$ i $L_x = Sx \setminus \{0\}$.

(iv) Za sve $x, y \in S\setminus\{0\}$ važi ili $xy = 0$ ili $xy \in R_x \cap L_y$, pri čemu je druga mogućnost ispunjena ako i samo ako $L_x \cap R_y$ sadrži idempotent.

Dokaz. (i) Neka su $x, y \in S \setminus \{0\}$, pokazaćemo da važi $x\mathcal{D}y$. Ako je $xSy = \{0\}$, tada je

$$S^2 = SxSSyS \subseteq SxSyS = S\{0\}S = \{0\},$$

što je nemoguće, jer je polugrupa S 0-prosta. Dakle, postoji $z \in xSy \setminus \{0\}$. Onda važi i $z \in xS \setminus \{0\}$ i $z \in Sy \setminus \{0\}$, pa iz Tvrđenja 1.19 slijedi $z \in R_x$ i $z \in L_y$. Prema tome, $x\mathcal{R}z$ i $z\mathcal{L}y$, pa je $x\mathcal{D}y$, to jest $S \setminus \{0\}$ je jedna $\mathcal{D}$ klasa u S (druga je $\{0\}$).

(ii) Polugrupa S je kompletno 0-prosta, pa sadrži primitivni idempotent e, koji je regularan element. Element 0 je takođe regularan. Neka je $x \in S \setminus \{0\}$, tada elementi e i x pripadaju istoj $\mathcal{D}$-klasi, pa postoji $y \in S$ tako da je $x\mathcal{R}y\mathcal{L}e$. Iz $y\mathcal{L}e$ slijedi da postoje $a, b \in S$ tako da je $y = ae$ i $e = by$, pa je

$$y = ae = ae^2 = aeby = yby,$$

to jest element y je regularan. Sada iz $x\mathcal{R}y$ slijedi da postoje $c, d \in S$ tako da je $x = yc$ i $y = xd$, pa je

$$x = yc = ybyc = xdbx,$$

to jest i element x je regularan, pa je S regularna polugrupa.

(iii) Pošto je S regularna polugrupa, svaka $\mathcal{R}$-klasa i svaka $\mathcal{L}$-klasa u S sadrži idempotent. Pri tome je svaki idempotent sadržan u $\mathcal{R}$-klasi polugrupe S lijevi neutralni element za tu klasu, i slično, svaki idempotent sadržan u $\mathcal{L}$-klasi je desni neutralni element za elemente te klase. Neka je $x \in S \setminus \{0\}$ i neka su $e, f \in S$ idempotenti takvi da je $R_x = R_e$ i $L_x = L_y$. Tada je $ex = x = xf$, odakle slijedi da je $e, f \neq 0$. Prema tome, važi

$$x = ex \in Sx \setminus \{0\} \text{ i } x = xf \in xS \setminus \{0\}.$$

Sada, analogno kao u Tvrđenju 1.19 dobijamo da je $R_x \subseteq Sx \setminus \{0\}$ i $L_x \subseteq xS \setminus \{0\}$. Iz Tvrđenja 1.20 onda slijede tražene jednakosti.

(iii) Pretpostavimo da su $x, y \in S \setminus \{0\}$ takvi da je $xy \neq 0$. Tada iz dijela (iii) slijedi

$$xy \in (xS \setminus \{0\})(Sy \setminus \{0\}) = R_x \cap L_y.$$

Iz Leme 1.2 znamo da je $xy \in R_x \cap L_y$ ako i samo ako $L_x \cap R_y$ sadrži idempotent, čime je dokaz završen. $\square$

Iz posljednjeg tvrđenja slijedi da za sve $x, y \in S \setminus \{0\}$ važi ili $xy = 0$ ili element xy leži u $\mathcal{H}$-klasi $H = R_x \cap L_y$. Pri tome je u poslednjem slučaju H grupa jer sadrži idempotent. S druge strane, ako je $xy = 0$, tada je $H^2 = 0$. Naime, ako su $z, t \in H$, tada je $x\mathcal{R}z$ i $y\mathcal{L}t$, pa postoje $a, b \in S$ takvi da je $z = ax$ i $t = yb$. Odatle slijedi da je $zt = axyb = a0b = 0$. Prema tome, sve $\mathcal{H}$-klase u S su ili grupe ili nula polugrupe.

Za polugrupu S kažemo da zadovoljava $min_{\mathcal{L}}$, odnosno $min_{\mathcal{R}}$ uslov, ako svaki lanac glavnih lijevih, odnosno glavnih desnih ideala u S ima minimalan element. Kompletno 0-proste polugrupe se mogu definisati i kao 0-proste polugrupe koje zadovoljavaju $min_{\mathcal{L}}$ i $min_{\mathcal{R}}$ uslove, što pokazuje sljedeća teorema.

Teorema 1.8. *Neka je polugrupa S 0-prosta. Tada je S kompletno 0-prosta ako i samo ako zadovoljava $min_{\mathcal{L}}$ i $min_{\mathcal{R}}$ uslove.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da S zadovoljava $min_{\mathcal{L}}$ i $min_{\mathcal{R}}$ uslove, i pretpostavimo suprotno, da S ne sadrži primitivni idempotent. Dakle, S sadrži beskonačni strogo opadajući lanac idempotenata $e_1 > e_2 > e_3 > \dots$. Iz definicije poretka na $E(S)$ slijedi da važi i sljedeći poredak odgovarajućih $\mathcal{L}$-klasa $L_{e_1} \geq L_{e_2} \geq L_{e_3} \geq \dots$, kao i poredak odgovarajućih $\mathcal{R}$-klasa $R_{e_1} \geq R_{e_2} \geq R_{e_3} \geq \dots$. Pošto na S važi $min_{\mathcal{L}}$, postoji minimalni element L_{e_i} u lancu lijevih ideala $L_{e_1} \geq L_{e_2} \geq L_{e_3} \geq \dots$. Slično, postoji minimalni element R_{e_j} lanca desnih ideala $R_{e_1} \geq R_{e_2} \geq R_{e_3} \geq \dots$. Odatle slijedi da je za sve $k \geq max\{i, j\}$ ispunjeno $L_{e_k} = L_{e_i}$ i $R_{e_k} = R_{e_j}$, odakle dalje slijedi

$$H_{e_k} = L_{e_k} \cap R_{e_k} = L_{e_l} \cap R_{e_l} = H_{e_l}.$$

Prema tome, $e_k = e_l$, za sve $k, l \geq max\{i, j\}$, što je kontradikcija sa prvobitnom pretostavkom. Dakle, S sadrži primitivni idempotent, pa je kompletno 0-prosta polugrupa.

Za drugi smjer dokaza, pretpostavimo da je S kompletno 0-prosta. Pokažimo prvo sljedeću osobinu: za sve $x \in S$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je x^n element neke podgrupe od S. Neka je $x \in S$ proizvoljan element. Iz Tvrđenja 1.20(iv) slijedi da ako $L_x \cap R_x = H_x$ sadrži idempotent, tada $x^2 \in R_x \cap L_x = H_x$, dok je u suprotnom $x^2 = 0$. U oba slučaja dobijamo da je x^2 element neke podgrupe polugrupe S.

Pokazaćemo sada da skup $\mathcal{L}$-klasa u S u odnosu na definisani poredak čini antilanac. Neka su $x, y \in S \setminus \{0\}$ takvi da je $L_x \leq L_y$. Slijedi da je $x = ay$ za neko $a \in S^1$. S druge strane, iz Tvrđenja 1.4 slijedi $S = SxS$ pa je $y = bxc$ za neke $b, c \in S$. Odatle dobijamo

$$y = bxc = bayc = ba(bayc)c = (ba)^2yc^2.$$

Kako je $y \neq 0$, važi i $g = (ba)^2 \neq 0$, pa je na osnovu gore pokazanog $(ba)^2 \in H_{ba}$, pri čemu je $G = H_{ba}$ podgrupa od S. Iz toga dalje slijedi

$$1_G y = 1_G(ba)^2yc^2 = (ba)^2yc^2 = y,$$

to jest važi

$$y = (ba)^{-2}(ba)^2y = (ba)^{-2}(ba)(bay) = (ba)^{-2}(ba)(bx) = ((ba)^{-2}bab)x.$$

Odatle dobijamo $L_y \leq L_x$, to jest $L_x = L_y$, pa su različite $\mathcal{L}$-klase u S neuporedive. Trivijalno slijedi da S zadovoljava $min_{\mathcal{L}}$ uslov. Dualnim argumentom dobijamo da S zadovoljava $min_{\mathcal{R}}$ uslov. $\square$

Sada ćemo definisati posebnu klasu polugrupa pomoću kojih možemo u potpunosti opisati sve kompletno 0-proste polugrupe. Za matricu P kažemo da je pravilna ukoliko u svakom redu, odnosno svakoj koloni, sadrži bar jedan nenula element.

Definicija 1.16. Neka je $(G, \cdot)$ grupa, I i Λ skupovi indeksa, P pravilna matrica čiji su redovi indeksirani elementima iz Λ, dok su kolone indeksirane elementima iz I, a elementi P uzimaju vrijednosti iz skupa $G^0 = G \cup \{0\}$. Definišemo polugrupu $(S, \cdot)$ sa $S = I \times G^0 \times \Lambda$ i operacijom

$$(i, x, \lambda)(j, y, \mu) = (i, xp_{\lambda j}y, \mu),$$

gdje je $p_{\lambda j}$ element matrice P na poziciji (λ, j).

Lako se provjerava da je ova operacija asocijativna, te je gornja definicija ispravna. Posmatrajmo sada podskup $T = I \times \{0\} \times \Lambda$ polugrupe S. Za proizvoljne $(i, 0, \lambda) \in T$ i $(j, y, \mu) \in S$ važi

$$(i, 0, \lambda)(j, y, \mu) = (i, 0, \mu) \in T$$
$$(j, y, \mu)(i, 0, \lambda) = (j, 0, \lambda) \in T.$$

Dakle T je ideal u polugrupi S, pa označimo sa $\mathcal{M}^0[G;I,\Lambda;P]$ količničku polugrupu S/T. Polugrupa S/T se može poistovijetiti sa polugrupom $(I \times G \times \Lambda) \cup \{0\}$ sa operacijom definisanom preko

$$\begin{aligned}
&(i,x,\lambda)(j,y,\mu) = \begin{cases} (i, xp_{\lambda j}y, \mu), & p_{\lambda j} \neq 0 \\ 0, & p_{\lambda j} = 0 \end{cases} \\
&0(i,x,\lambda) = (i,x,\lambda)0 = 00 = 0.
\end{aligned}$$

Polugrupa $\mathcal{M}^0[G;I,\Lambda;P]$ se naziva $I \times \Lambda$ *Risova matrična polugrupa* nad grupom G i pravilnom matricom P.

Tvrđenje 1.21. *Neka je G proizvoljna grupa, I i Λ skupovi indeksa, i P pravilna $\Lambda \times I$ matrica. Tada je Risova matrična polugrupa $S = \mathcal{M}^0[G;I,\Lambda;P]$ kompletno 0-prosta.*

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan element $(i,x,\lambda) \in S \backslash \{0\}$. Kako je matrica P pravilna, postoje indeksi $k \in I$ i $\nu \in \Lambda$ takvi da je $p_{\lambda k} \neq 0$ i $p_{\nu i} \neq 0$. Neka je sada (j,y,μ) proizvoljan element $S \setminus \{0\}$, tada važi

$$\begin{aligned}
&(j,y,\mu) = (j, (p_{\nu i}xp_{\lambda k})(p_{\nu i}xp_{\lambda k})^{-1}y, \mu) = (j, p_{\nu i}xp_{\lambda k}{p_{\lambda k}}^{-1}x^{-1}{p_{\nu i}}^{-1}y, \mu) \\
&= (j, 1_G p_{\nu i}xp_{\lambda k}{p_{\lambda k}}^{-1}x^{-1}{p_{\nu i}}^{-1}y, \mu) = (j, 1_G, \nu)(i, xp_{\lambda k}{p_{\lambda k}}^{-1}x^{-1}{p_{\nu i}}^{-1}y, \mu) \\
&= (j, 1_G, \nu)(i,x,\lambda)(k, {p_{\lambda k}}^{-1}x^{-1}{p_{\nu i}}^{-1}y, \mu).
\end{aligned}$$

Dakle $(j,y,\mu) \in S \setminus \{0\}(i,x,\lambda)S \setminus \{0\}$, odakle slijedi $S \subseteq S(i,x,\lambda)S$. Prema Tvrđenju 1.4 je S 0-prosta polugrupa. Pretpostavimo sada da je $(i,x,\lambda) \in S \setminus \{0\}$ idempotent, to jest da važi

$$(i,x,\lambda) = (i,x,\lambda)^2 = (i, xp_{\lambda i}x, \lambda).$$

Prema gornjoj jednakosti, (i,x,λ) je idempotent ako i samo ako je $x = xp_{\lambda i}x$, to jest ako i samo ako je $p_{\lambda i} \neq 0$ i $x = {p_{\lambda i}}^{-1}$. Neka su dalje $e = (i, {p_{\lambda i}}^{-1}, \lambda)$ i $f = (j, {p_{\mu j}}^{-1}, \mu)$ idempotenti u $S \setminus \{0\}$, takvi da je $e \leq f$. Onda je prema definiciji prirodnog poretka

$$\begin{aligned}
(i, {p_{\lambda i}}^{-1}, \lambda) &= e = ef = (i, {p_{\lambda i}}^{-1}, \lambda)(j, {p_{\mu j}}^{-1}, \mu) = (i, {p_{\lambda i}}^{-1}p_{\lambda j}{p_{\mu j}}^{-1}, \mu), \\
(i, {p_{\lambda i}}^{-1}, \lambda) &= e = fe = (j, {p_{\mu j}}^{-1}, \mu)(i, {p_{\lambda i}}^{-1}, \lambda) = (j, {p_{\mu j}}^{-1}p_{\mu i}{p_{\lambda i}}^{-1}, \lambda).
\end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je $e \leq f$ ako i samo ako je $i = j, \lambda = \mu$, to jest $e = f$. Dakle, elementi $E(S)$ čine antilanac u odnosu na prirodno uređenje $\leq$, pa je svaki idempotent primitivan. Time smo pokazali da je S kompletno 0-prosta polugrupa. $\square$

S druge strane, svaka kompletno 0-prosta polugrupa se može predstaviti preko neke Risove matrične polugrupe, o čemu govori sljedeće tvrđenje.

Tvrđenje 1.22. *Neka je S kompletno 0-prosta polugrupa. Tada postoje grupa G, skupovi indeksa I i Λ, i pravilna $\Lambda \times I$ matrica P sa elementima iz G^0, takvi da je $S \simeq \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$.*

Dokaz. Konstruisaćemo Risovu matričnu polugrupu koja je izomorfna datoj kompletno 0-prostoj polugrupi S. Prvo, neka skup I predstavlja skup indeksa svih nenula $\mathcal{R}$-klasa u S, to jest, skup svih nenula $\mathcal{R}$-klasa u S je jednak $\{R_i : i \in I\}$. Analogno, neka je Λ skup kojim je indeksiran skup svih $\mathcal{L}$-klasa u S. Nenula $\mathcal{H}$-klase u S ćemo označavati sa $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$, za $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Vidjeli smo da je S regularna polugrupa, pa svaka $\mathcal{R}$-klasa i svaka $\mathcal{L}$-klasa sadrži idempotent. Prema tome, svaka $\mathcal{R}$, odnosno $\mathcal{L}$-klasa u S sadrži bar jednu $\mathcal{H}$-klasu koja je grupa. Pošto su sve nenula $\mathcal{H}$-klase u S sadržane u istoj $\mathcal{D}$-klasi $S \setminus \{0\}$, iz Teoreme 1.2 slijedi da su sve nenula $\mathcal{H}$-klase koje su grupe međusobno izomorfne.

Fiksirajmo sada jednu nenula $\mathcal{H}$-klasu $H_{i_0\lambda_0}$ koja sadrži idempotent e. Zatim za sve $i \in I$ i $\lambda \in \Lambda$ izaberimo na proizvoljan način elemente $r_i \in H_{i\lambda_0}$ i $q_\lambda \in H_{i_0\lambda}$. Tada je $r_i \mathcal{L} e$ i $q_\lambda \mathcal{R} e$. Kako je e desni neutralni element $\mathcal{L}$-klase L_{λ_0} odatle slijedi da je $r_i = r_i e$. Slično dobijamo da važi $q_\lambda = e q_\lambda$. Iz dobijenih jednakosti i Grinovih lema slijedi da su preslikavanja $\lambda_{r_i} : R_{i_0} \to R_i$, $x \mapsto r_i x$ i $\rho_{q_\lambda} : L_{\lambda_0} \to L_\lambda$, $y \mapsto y q_\lambda$ bijekcije koje čuvaju $\mathcal{L}$-klase i $\mathcal{R}$-klase, redom. Iz toga dalje slijedi da je restrikcija preslikavanja λ_{r_i} na $H_{i_0\lambda_0}$ bijekcija između $\mathcal{H}$-klasa $H_{i_0\lambda_0} = R_{i_0} \cap L_{\lambda_0}$ i $H_{i\lambda_0} = R_i \cap L_{\lambda_0}$. Dalje, preslikavanje $\rho_\lambda|_{H_{i\lambda_0}}$ je bijekcija sa $\mathcal{H}$-klase $H_{i\lambda_0} = R_i \cap L_{\lambda_0}$ na $\mathcal{H}$-klasu $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$. Odatle dobijamo da je preslikavanje $x \mapsto r_i x q_\lambda$ bijekcija iz $H_{i_0\lambda_0}$ na $H_{i\lambda}$. Dakle, proizvoljan element $y \in H_{i\lambda}$ se može na jedinstven način predstaviti kao $r_i x q_\lambda$. Pošto $\mathcal{H}$-klase čine jednu particiju polugrupe S, iz pokazanog slijedi da je preslikavanje

$$\Phi : (I \times H_{i_0\lambda_0} \Lambda) \cup \{0\} \to S = \bigsqcup_{i \in I, \lambda \in \Lambda} H_{i\lambda} \cup \{0\}$$
$$(i, x, \lambda) \mapsto r_i x q_\lambda, 0 \mapsto 0,$$

dobro definisano i bijekcija.

Ostaje još da definišemo strukturnu matricu P da bismo dobili traženu Risovu matričnu polugrupu. Primijetimo da za proizvoljne $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ i $a, b \in H_{i_0\lambda_0}$ važi

$$r_i a q_\lambda \cdot r_j b q_\mu = r_i \cdot a \cdot q_\lambda r_j \cdot b \cdot q_\mu.$$

Zbog toga definišemo matricu $P = [p_{i\lambda}]_{i \in I, \lambda \in \Lambda}$ reda $I \times \Lambda$ sa $p_{i\lambda} = q_\lambda r_i$, za $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Prema Tvrđenju 1.20(iv) je $q_\lambda r_i \in R_{q_\lambda} \cap L_{r_i} = H_{i_0\lambda_0}$ ako i samo ako $\mathcal{H}$-klasa $L_{q_\lambda} \cap R_{r_i} = H_{i\lambda}$ sadrži idempotent, odnosno ako i samo ako je $H_{i\lambda}$ grupa. U suprotnom je $p_{i\lambda} = q_\lambda r_i = 0$. Kao što smo već pomenuli, svaka $\mathcal{R}$-klasa, i svaka $\mathcal{L}$-klasa sadrži $\mathcal{H}$-klasu koja je grupa, pa u svakom redu i svakoj koloni matrice P postoji nenula element. Dakle, matrica P je pravilna, i njeni elementi pridadaju skupu $H_{i_0\lambda_0} \cup \{0\}$. Sada možemo definisati Risovu matričnu polugrupu $T = \mathcal{M}^0[H_{i_0\lambda_0}; I, \Lambda; P]$. Preslikavanje Φ je onda bijekcija sa polugrupe T na polugrupu S. Pošto za sve $(i, a, \lambda), (j, b, \mu) \in T$ važi

$$\begin{aligned}&\Phi((i, a, \lambda)(j, b, \mu)) = \Phi((i, ap_{j\lambda}b,\, u)) = r_i \cdot ap_{j\lambda}b \cdot q_{mu} = \\ &r_i aq_\lambda \cdot r_j bq_\mu = \Phi((i, a, \lambda))\Phi((j, b, \mu)),\end{aligned}$$

slijedi da je Φ izomorfizam polugrupa. □

Time smo dobili teoeremu Ris-Suškjeviča.

Teorema 1.9. *Polugrupa S je kompletno 0-prosta ako i samo ako postoje grupa G, skupovi indeksa I i Λ, i regularna matrica P reda $|\Lambda| \times |I|$, sa elementima iz G^0, takvi da je $S \simeq \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$.*

Prednost predstavljanja kompletno 0-prostih polugrupa preko Risovih matričnih polugrupa je i u jednostavnoj karakterizaciji Grinovih relacija.

Tvrđenje 1.23. *Neka je $S \simeq \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ kompletno 0-prosta polugrupa. Tada je ispunjeno*

(i) U polugrupi S relacije $\mathcal{D}$ i $\mathcal{J}$ se poklapaju;

(ii) $\mathcal{L}$-klase u S su $\{0\}$ i skupovi oblika $I \times G \times \{\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$;

(iii) $\mathcal{R}$-klase u S su $\{0\}$ i skupovi oblika $\{i\} \times G \times \Lambda$, $i \in I$;

(iv) $\mathcal{H}$-klase u S su $\{0\}$ i skupovi oblika $\{i\} \times G \times \{\lambda\}$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$.

Dokaz. (i) Prema Tvrđenju 1.20(i) jedine $\mathcal{D}$-klase su $\{0\}$ i $S \setminus \{0\}$. S druge strane, kako je polugrupa S 0-prosta, jedini ideali u S su $\{0\}$ i S. Ako je $x \in S \setminus \{0\}$, tada je $x \in S^1xS^1$, pa važi $S^1xS^1 = S$. S druge strane, $S^1\{0\}S^1 = \{0\}$, pa slijedi da su jedine $\mathcal{J}$-klase upravo $\{0\}$ i $S \setminus \{0\}$.

(ii) Iz (i) znamo da je $\{0\}$ jedna $\mathcal{L}$-klasa. Neka je $s = (i, x, \lambda) \in S \setminus \{0\}$, tada je prema Tvrđenju 1.19 $L_s = S(i, x, \lambda) \setminus \{0\}$. Lako vidimo da je $S(i, x, \lambda) \setminus \{0\} \subseteq I \times G \times \{\lambda\} \setminus \{0\}$. S druge strane, neka je $(j, y, \lambda) \in I \times G \times \{\lambda\} \setminus \{0\}$. Tada postoji $\mu \in \Lambda$ tako da je $p_{i,\mu} \neq 0$, pa važi

$$\begin{aligned}(j, y, \lambda) &= (j, yx^{-1}p_{i,\mu}^{-1}p_{i,\mu}x, \lambda) \\ &= (j, yx^{-1}p_{i,\mu}^{-1}, \mu)(i, x, \lambda).\end{aligned}$$

Dakle $(j, y, \lambda) \in S(i, x, \lambda) \setminus \{0\}$, pa je $S(i, x, \lambda) \setminus \{0\} = I \times G \times \{\lambda\} \setminus \{0\}$.

(iii) Dokaz je dualan dokazu tvrđenja (ii).

(iv) Iz (i) znamo da je jedna $\mathcal{H}$ klasa upravo $\{0\}$. Neka je onda $s = (i, x, \lambda) \in S \setminus \{0\}$, tada je prema (ii) i (iii)

$$H_s = L_s \cap R_s = (I \times G \times \{\lambda\}) \cap (\{i\} \times G \times \Lambda) = \{i\} \times G \times \{\lambda\}.$$

□

Za kraj ćemo dati par tvrđenja koja pokazuju vezu između kompletno 0-prostih i regularnih polugrupa.

Tvrđenje 1.24. *Polugrupa S je kompletno 0-prosta ako i samo ako je regularna i svaki nenula idempotent u S je primitivan.*

Dokaz. Pretopostavimo prvo da je S kompletno 0-prosta polugrupa. Tada iz Tvrđenja 1.20(ii) znamo da je S regularna polugrupa, a u dokazu Tvrđenja 1.21 smo vidjeli da nenula idempotenti u S čine antilanac u odnosu na prirodni poredak u $E(S)$. Prema tome, svi nenula idempotenti u S su primitivni.

Sada pretpostavimo da je S regularna polugrupa u kojoj su svi nenula idempotenti primitivni. U regularnoj polugrupi svaka $\mathcal{D}$-klasa sadrži bar jedan idempotent. Kako za sve $x \in S$ važi $D_x \subseteq J_x$, slijedi i da sve $\mathcal{J}$-klase u S sadrže bar jedan idempotent. Neka su dalje J_e, J_f dvije $\mathcal{J}$-klase u S, takve da je $J_f \leq J_e$, gdje su e, f nenula idempotenti. Odatle slijedi $f = aeb$ za neke $a, b \in S^1$. Definišimo $g = ebfae$, tada je

$$g^2 = ebfae \cdot ebfae = ebfaebfae = ebfffae = ebfae = g,$$

to jest, g je idempotent. Kako važi $ge = g = eg$ slijedi da je $g \leq e$, pa je $g = e$ pošto je e primitivan idempotent. Prema tome, važi $e = g = ebfae$ i $f = aeb$, pa je $J_e = J_f$. Dakle, svi nenula elementi u S pripadaju istoj $\mathcal{J}$-klasi, to jest $S^1xS^1 = S$ za sve $x \in S \setminus \{0\}$. Time smo pokazali da su jedini ideali polugrupe S samo $\{0\}$ i S, pa je S kompletno 0-prosta. $\square$

Osvrnimo se još jednom na glavne faktore polugrupe. Ukoliko je S konačna polugrupa, tada su svi njeni glavni faktori J_x^* kompletno 0-proste polugrupe ili nula polugrupe. Ako je polugrupa S i regularna, tada su svi glavni faktori J_x^* kompletno 0-proste polugrupe. Naime, za sve $x \in S$ tada važi $x^{-1} \in J_x$, kao i

$$S^1xS^1 = S^1xx^{-1}xS^1 \subseteq S^1xx^{-1}S^1,$$
$$S^1xS^1 = S^1xx^{-1}xS^1 \subseteq S^1x^{-1}xS^1,$$

pa je $J_x \leq J_{xx^{-1}}$ i $J_x \leq J_{x^{-1}x}$. Odatle slijedi da je $xx^{-1}, x^{-1}x \in J_x$, pa množenje u $J(x)/I(x)$ nije trivijalno.

2 Rang kompletno 0-prostih polugrupa

Prije nego pređemo na izučavanje dijagram monoida i njihovih ideala, navešćemo još neke osobine kompletno 0-prostih polugrupa koja se tiču njihovog ranga. Ova tvrđenja će nam koristiti u poglavlju 6, pri određivanju ranga ideala dijagram monoida. Ovo poglavlje se najviše zasniva na rezultatima iz radova [18], [19], [20] i [44], s tim da su dokazi nekih tvrđenja dopunjeni ili prilagođeni posebnim slučajevima koje izučavamo.

Neka su $J_1, \dots, J_m$ maksimalne $\mathcal{J}$-klase u polugrupi S i neka je X minimalan generatorni skup polugrupe S. Znamo da je za sve $a, b \in S$ ispunjeno $J_a, J_b \geq J_{ab}$, kao i da proizvod elemenata iz različitih maksimalnih $\mathcal{J}$-klasa uvijek mora pripadati nekoj nižoj $\mathcal{J}$-klasi. Odatle slijedi da za $1 \leq i \leq m$, svaki element iz J_i mora biti predstavljen kao proizvod elemenata iz $X \cap J_i$. Dakle, $X \cap J_i$ generiše polugrupu J_i^*. Odatle slijedi da je za proizvoljnu polugrupu S ispunjeno

$$\mathrm{rang}(S) = |X| \geq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rang}(J_i^*).$$

U narednim tvrđenjima ćemo pokazati da, uz dodatne uslove, u gornjoj nejednakosti važi jednakost.

Lema 2.1. *([26], Lema 3.2) Neka je S konačna polugrupa i I ideal u S. Pretpostavimo da je S generisana skupom $U = S \setminus I$. Neka je A minimalan generatorni skup za S. Tada je $A \subseteq U$ i važi*

$$\mathrm{rang}(S) = \mathrm{rang}(S/I).$$

Takođe, S je idempotentno generisana polugrupa ako i samo ako je S/I idempotennto generisana. Tada važi i jednakost

$$\mathrm{idrang}(S) = \mathrm{idrang}(S/I).$$

Dokaz. Podsjetimo se da Risovu količničku polugrupu

$$S/I = \{\{s\} : s \in S \setminus I\} \cup \{I\}$$

možemo poistovijetiti sa polugrupom $(S \setminus I) \cup \{0\}$, u kojoj je proizvod dva elementa s, t nenula ako i samo ako je $st \in S \setminus I$. Označimo sa $\hat{\phi}_I : S \to S/I$ Risov prirodni homomorfizam. Ako je A minimalni generatorni skup polugrupe S, tada skup $\hat{\phi}_I(A)$ generiše polugrupu S/I, odakle slijedi

$$\mathrm{rang}(S/I) \leq |\phi(A)| \leq |A| = \mathrm{rang}(S).$$

Pretpostavimo dalje da je B minimalni generatorni skup polugrupe S/I. Kako je $S/I \simeq (S \setminus) \cup \{0\}$ polugrupa sa nulom I, slijedi da je $B \subseteq (S \setminus I)/I$.

S druge strane je $(S \setminus I)/I \subseteq S/I = \langle B \rangle$, pa je $\langle (S \setminus I)/I \rangle \subseteq \langle B \rangle$. Vraćanjem u polugrupu S, dobijamo da je $S = \langle S \setminus I \rangle \subseteq \langle \hat{\phi}_I(B) \rangle$, odakle slijedi

$$\mathrm{rang}(S) \leq |B| = \mathrm{rang}(S/I).$$

Time smo pokazali da je $\mathrm{rang}(S) = \mathrm{rang}(S/I)$. Neka je sada A proizvoljan minimalan generatorni skup polugrupe S, i pretpostavimo suprotno, da je $A \cap I \neq \emptyset$. Tada se skup A prirodnim Risovim homomorfizmom slika u skup

$$\hat{\phi}_I(A) = \{\{a\} : a \in A \setminus I\} \cup \{I\}$$

Pošto je I nula polugrupe S/I, skup $\{\{a\} : a \in A \setminus I\}$ generiše polugrupu S/I, pa je $\mathrm{rang}(S/I) < |A| = \mathrm{rang}(S)$, što je kontradikcija sa prethodno pokazanom jednakošću. Prema tome, $A \subseteq S \setminus I$. Na osnovu izloženog, direktno slijedi i drugi dio tvrđenja. □

Iz gore pokazane leme lako dobijamo sljedeće tvrđenje.

Lema 2.2. *([9], Lema 3.2) Neka je S konačna polugrupa sa maksimalnom $\mathcal{J}$-klasom $J \neq S$. Ako je $S = \langle J \rangle$, tada je ispunjeno*

$$\mathrm{rang}(S) = \mathrm{rang}(J^*).$$

Takođe, S je idempotentno generisana polugrupa ako i samo ako je J^* idempotentno generisana, i pri tome važi

$$\mathrm{idrang}(S) = \mathrm{idrang}(J^*).$$

Dokaz. Neka je $s \in S$ i $r \in S \setminus J = I$. Iz osobina $\mathcal{J}$ relacije znamo da proizvodi sr i rs leže u nekoj $\mathcal{J}$-klasi različitoj od J, odnosno $sr, rs \in I$. Dakle, skup I je ideal, i polugrupa S je generisana skupom $J = S \setminus I$. Iz prethodne leme slijedi da je $\mathrm{rang}(S) = \mathrm{rang}(S/I)$, te da je S idempotentno generisana ako i samo ako je S/I idempotentno generisana i pri tome važi i $\mathrm{idrang}(S) = \mathrm{idrang}(S/I)$. Znamo da je polugrupa S/I izomorfna polugrupi $(S \setminus I) \cup \{0\} = J \cup \{0\}$, u kojoj je množenje definisano sa

$$s \cdot t = \begin{cases} st & \text{ako } st \in J, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

To upravo znači da je S/I izomorfna sa glavnim faktorom J^*, odakle slijedi $\mathrm{rang}(S) = \mathrm{rang}(S/I) = \mathrm{rang}(J^*)$. Odatle direktno slijedi i drugi dio tvrđenja. □

Dakle, problem određivanja ranga ideala $S \setminus J$ se može svesti na određivanje ranga glavnog faktora J^*. Koristeći Lemu 2.1 lako možemo pokazati i sljedeće uopštenje Leme 2.2.

Lema 2.3. *([9], Lema 5.9) Neka je S konačna polugrupa generisana elementima svojih maksimalnih $\mathcal{J}$-klasa $J_1, \dots, J_m$. Tada je ispunjeno*

$$\operatorname{rang}(S) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{rang}(J_i^*).$$

Specijalno, ako je S idempotentno generisana polugrupa, tada su i svi glavni faktori $J_1^*, \dots J_m^*$ takođe idempotentno generisani i važi

$$\operatorname{idrang}(S) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{idrang}(J_i^*).$$

Dokaz. Za sve $1 \leq i \leq m$ skup $S \setminus J_i$ je ideal. Prema tome i skup $I = \bigcap_{i=1}^{m}(S \setminus J_i)$ je ideal, kao presjek m ideala. Ideal I drugačije možemo zapisati kao $I = S \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} J_i)$, pa je $U = S \setminus I = \bigcup_{i=1}^{m} J_i$. Iz Leme 2.1 slijedi da je $\operatorname{rang}(S) = \operatorname{rang}(S/I)$, te da je S idempotentno generisana polugrupa ako i samo ako je S/I idempotentno generisana, pri čemu važi $\operatorname{idrang}(S) = \operatorname{idrang}(S/I)$.

Primijetimo dalje da se Risova količnička polugrupa S/I može zapisati kao

$$(S \setminus I) \cup \{0\} = (\bigcup_{i=1}^{m} J_i) \cup \{0\} = \bigcup_{i=1}^{m} (J_i \cup \{0\}).$$

Pošto proizvod dva elementa iz različitih maksimalnih $\mathcal{J}$-klasa uvijek pripada nekoj nižoj $\mathcal{J}$-klasi, operaciju na gornjem skupu možemo opisati sa

$$s \cdot t = \begin{cases} st & \text{ako je } s\mathcal{J}t \text{ i } st \in S \setminus I \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Označimo $K_i = J_i \cup \{0\}$, za $i = 1, \dots, m$. Iz pokazanih pravila množenja u S/I slijedi da su $K_1, \dots, K_m$ potpolugrupe S/I, te da je $K_i \cap K_j = \{0\}$ za sve $i \neq j$. Pri tome je proizvod dva elementa s, t iz K_i nenula ako i samo ako je $st \in J_i$. Prema tome, $K_i \simeq J_i^*$, za $1 \leq i \leq m$, Iz osobina maksimalnih $\mathcal{J}$-klasa slijedi da je $K_i \cap K_j = \{I\}$ za sve $1 \leq i < j \leq m$. Odatle slijedi

$$\operatorname{rang}(S) = \operatorname{rang}(S/I) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{rang}(K_i) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{rang}(J_i^*).$$

Iz gornjeg razmatranja direktno slijedi i da je S idempotentno generisana polugrupa ako i samo ako su svi glavni faktori $J_1^*, \dots, J_m^*$ idempotentno generisane polugrupe, i u tom slučaju je ispunjeno

$$\operatorname{idrang}(S) = \operatorname{idrang}(S/I) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{idrang}(J_i^*).$$

$\square$

Naredno tvrđenje, izvedeno iz rezultata dobijenih u [15], će nam pomoći u dokazivanju osobina glavnih faktora regularnih polugrupa.

Lema 2.4. *([9], Teorema 3.4) Neka je S polugrupa i $e_1, \ldots, e_m$ idempotenti iz S. Ako je element $x = e_1 \cdot \ldots \cdot e_m$ regularan, tada postoje (ne nužno različiti) idempotenti $g_1, \ldots, g_m$ iz S takvi da je ispunjeno*

(i) $g_i \mathcal{J} x$, *za sve* $1 \leq i \leq m$,

(ii) $g_1 \cdot \ldots \cdot g_m = x$.

Dokaz. Element x je regularan, pa postoji $y \in V(x)$ tako da je $xyx = x$ i $yxy = y$. Za $1 \leq i \leq m$ definišimo elemente $v_i = e_1 \ldots e_i$ i $w_i = e_i \ldots e_m$. Tada lako vidimo da je $x = v_i w_i$, za sve $1 \leq i \leq m$. Definišimo dalje $g_i = w_i y v_i$ za $1 \leq i \leq m$. Tada je ispunjeno

$$
\begin{aligned}
x &= xyx = e_1 \ldots e_m \cdot y \cdot e_1 \ldots e_m = v_i \cdot w_i y v_i \cdot w_i = v_i g_i w_i \\
g_i &= w_i y v_i = w_i y x y v_i
\end{aligned}
$$

pa je $x \mathcal{J} g_i$ za sve $1 \leq i \leq m$. Takođe važi

$$
\begin{aligned}
& g_1 \ldots g_m = w_1 y v_1 \cdot w_2 y v_2 \cdot \ldots \cdot w_m y v_m = \\
& (e_1 \ldots e_m) y e_1 \cdot (e_2 \ldots e_m) y (e_1 e_2) \cdot \ldots \cdot e_m y (e_1 \ldots e_m) = \\
& xy \cdot xy \cdot \ldots \cdot xy \cdot x = (xy)^m x = xyx = x
\end{aligned}
$$

Dakle, $g_1, \ldots, g_m$ su traženi idempotenti. $\square$

Koristeći poslednje tvrđenje lako dobijamo sljedeću posljedicu.

Tvrđenje 2.1. *([9], Posljedica 3.5) Neka je S konačna regularna idempotentno generisana polugrupa. Tada je za svaku $\mathcal{J}$-klasu J u S glavni faktor J^* idempotentno generisana kompletno 0-prosta polugrupa.*

Dokaz. Iz regularnosti polugrupe S slijedi da su svi njeni glavni faktori kompletno 0-proste polugrupe. Neka je J proizvoljna $\mathcal{J}$-klasa u S, i neka je J^* odgovarajući glavni faktor. Neka je $x \in J^*$, tada je $x = e_1 \ldots e_m$, za neke $e_1 \ldots e_m \in E(S)$. Iz prethodne leme slijedi da postoje $g_1, \ldots, g_m \in E(S)$ takvi da je $x = g_1 \ldots g_m$ i $x \mathcal{J} g_i$ za sve $1 \leq i \leq m$. Odatle slijedi da je J^* idempotentno generisana polugrupa. $\square$

Rezultati o rangu kompletno 0-prostih polugrupa koje ćemo koristiti se mogu naći u radovima R. Gray i N. Ruškuca ([18], [19] i [20]). Nas zanimaju glavni faktori specifične klase polugrupa - idempotentno generisanih $*$-regularnih polugrupa, pošto ideali $\mathcal{P}_n$ imaju upravo te osobine. Zbog ćemo navesti samo rezultate vezane za ovu klasu polugrupa, a za opštije rezultate o rangu kompletno 0-prostih polugrupa čitaoca upućujemo na gore navedenu literaturu.

Prvo ćemo navesti par opštih zapažanja, koja lako slijede iz poznatih osobina kompletno 0-prostih polugrupa.

Lema 2.5. *([44], Lema 3.1) Neka je* $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ *kompletno 0-prosta polugrupa. Tada je* $\operatorname{rang}(S) \geq \max(|I|, |\Lambda|)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je A proizvoljan generatorni skup polugrupe S. Neka je $x = (i, g, \lambda) \in S \setminus \{0\}$ i neka je $x = a_1 a_2 \dots a_s$ zapis x kao proizvod elemenata $a_t = (j_t, g_t, \mu_t)$, $1 \leq t \leq s$ iz A. Dakle, ispunjeno je

$$(i, g, \lambda) = (j_1, g_1, \mu_1)(j_2, g_2, \mu_2) \dots (j_s, g_s, \mu_s),$$

odakle zbog pravila množenja u polugrupi S slijedi $i = j_1$ i $\lambda = \mu_s$. Iz Tvrđenja 1.23 slijedi $a_1 \mathcal{R} x$ i $a_s \mathcal{L} x$. Prema tome, proizvoljan generatorni skup polugrupe S mora imati neprazan presjek sa svakom nenula $\mathcal{R}$-klasom i svakom nenula $\mathcal{L}$-klasom, odakle tvrđenje direktno slijedi. $\square$

U slučaju kada je S idempotento generisana kompletno 0-prosta polugrupa, pokazaćemo da u nejednakosti iz gornje leme važi znak jedakosti. Iz Grinovih lema lako dobijamo sljedeće tvrđenje.

Lema 2.6. *([44], Lema 3.7) Neka je* $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ *kompletno 0-prosta polugrupa i neka je* $\mathcal{H}$*-klasa* $H_{i\lambda}$ *grupa. Ako je* A *podskup* S *takav da je* $H_{i\lambda} \subseteq \langle A \rangle$ *i* $H_{j\mu} \cap A \neq \emptyset$ *za sve* $j \in I$, $\mu \in \Lambda$, *tada je polugrupa* S *generisana skupom* A.

U [18] je pokazano kako se problem određivanja ranga idempotento generisane kompletno 0-proste polugrupe $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ može svesti na određivanja ranga pridružene pravougaone 0-trake. Pravougaonu 0-traku pridruženu polugrupi S definišemo kao Risovu matričnu polugrupu $T = \mathcal{M}^0[\{1\}; I, \Lambda; Q]$, gdje je Q pravilna $I \times \Lambda$ matrica definisana sa

$$q_{i\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } p_{i\lambda} \neq 0, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema tome pravougaone 0-trake su Risove matrične polugrupe nad trivijalnom grupom $\{1\}$. Pošto je svaki element T različit od nule oblika $(i, 1, \lambda)$ za neke $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, izostavljaćemo pisanje srednje komponente ovih uređenih trojki. Dakle, možemo posmatrati polugrupu T kao skup $(I \times \Lambda) \cup \{0\}$ sa asocijativnom binarnom operacijom definisanom pomoću strukturne matrice P na sljedeći način

$$(i, \lambda)(j, \mu) = \begin{cases} (i, \mu) & \text{ako je } p_{i\lambda} \neq 0, \\ 0 & \text{ako je } p_{i\lambda} = 0, \end{cases}$$

$$(i, \lambda)0 = 0(i, \lambda) = 00 = 0.$$

Napomenimo da pravougaone 0-trake nisu trake u opštem slučaju. Na primjer, posmatrajmo pravougaonu traku T sa strukturnom matricom

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U njoj važi $(1,2)(1,2) = 0 \neq (1,2)$.

Vratimo se sada posmatranju proizvoljne kompletno 0-proste polugrupe S. Iz Tvrđenja 1.20 slijedi da je

$$(i, g, \lambda)\mathcal{H}(j, h, \mu) \text{ akko je } i = j \text{ i } \lambda = \mu.$$

Iz gornje jednačine slijedi da je postoji bijekcija između pridružene pravougaone 0-trake T i skupa svih klasa ekvivalencije relacije $\mathcal{H}$ na S. Neka su $x = (i, g, \lambda)\mathcal{H}(j, h, \mu) = y$ i $x' = (i', g', \lambda')\mathcal{H}(j', h', \mu') = y'$, tada je $i = j$, $\lambda = \mu$ i $i' = j'$ i $\lambda' = \mu'$. Odatle slijedi da je $xx'\mathcal{H}yy'$, pošto je

$$xx' = (i, gp_{i'\lambda}^{-1}g', \lambda') \text{ i } yy' = (j, hp_{j'\mu}^{-1}h', \mu') = (i, hp_{i'\lambda}h', \lambda').$$

Dakle, u kompletno 0-prostoj polugrupi S Grinova relacija $\mathcal{H}$ je kongruencija. Prema tome, polugrupa T je izomorfna količničkoj polugrupi $S/\mathcal{H}$. Polugrupu $S/\mathcal{H}$, odnosno njenu izomorfnu sliku T, nazivamo prirodna homomorfna slika, odnosno pridružena traka polugrupe S. Sa ψ ćemo označavati homomorfizam koji preslikava S u T, to jest preslikavanje $\psi : (i, g, \lambda) \mapsto (i, \lambda)$, $0 \mapsto 0$.

Lema 2.7. *([18], Lema 2.2) Neka je $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ konačna, idempotentno generisana kompletno 0-prosta polugrupa i $T = \psi(S)$ pridružena pravougaona 0-traka. Neka je $B \subseteq T$ proizvoljan generatorni skup za T. Ako je $A \subseteq S$ takav da je $\psi(A) = B$, tada je $S = \langle A \rangle$.*

Dokaz. Iz $S/\mathcal{H} \simeq T = \langle B \rangle = \langle \psi(A) \rangle$ slijedi da skup A generiše bar po jedan element svake $\mathcal{H}$-klase u S. Specijalno, odatle slijedi da je $\langle A \rangle$ ima neprazan presjek sa svakom $\mathcal{H}$-klasom koja je grupa. Neka je H jedna takva $\mathcal{H}$-klasa i neka je $h \in H \cap \langle A \rangle$. Kako je H konačna grupa, red elementa h je konačan, to jest $h^k = 1_H$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Odatle slijedi $1_H \in \langle A \rangle$. Kako je svaki idempotent u S jedinični element neke $\mathcal{H}$-klase koja je grupa, dobijamo $E(S) \subseteq \langle A \rangle$. Pošto je S idempotento generisana grupa, slijedi da je $S \subseteq \langle A \rangle$, odnosno $S = \langle A \rangle$. $\square$

Rang pravougaone 0-trake se lako računa prema formuli u sljedećem tvrđenju. Dokaz ovog tvrđenja izostavljamo zbog dužine, a zasniva se na induktivnoj konstrukciji generatornog skupa kardinalnosti $\max(|I|, |\Lambda|)$ za pravougaonu 0-traku $\mathcal{M}^0[\{1\}; I, \Lambda; Q]$.

Teorema 2.1. *([20], Teorema 2.4) Neka je $T = \mathcal{M}^0[\{1\}; I, \Lambda; Q]$ pravougaona 0-traka, tada je*

$$\operatorname{rang}(T) = \max(|I|, |\Lambda|).$$

Rezultate prethodnih lema možemo objediniti u sljedećem tvrđenju.

Tvrđenje 2.2. *([18], Lema 2.3) Neka je $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ konačna, idempotentno generisana kompletno 0-prosta polugrupa i T pridružena pravougaona 0-traka. Tada je ispunjeno*

(i) $\mathrm{rang}(S) = \mathrm{rang}(T) = \max(|I|, |\Lambda|)$,

(ii) $\mathrm{idrang}(S) = \mathrm{idrang}(T)$.

Dokaz. (i) Neka je Y generatorni skup za T. Iz prethodne leme slijedi da skup $X = \{(i, 1, \lambda) : (i, \lambda) \in Y\}$ generiše S. Očigledno je $|X| = |Y|$, odakle slijedi $\mathrm{rang}(S) \leq \mathrm{rang}(T)$. S druge strane, $T \simeq S/\mathcal{H}$ je homomorfna slika polugrupe S, pa je $\mathrm{rang}(T) \leq \mathrm{rang}(S)$. Time smo dobili prvi dio jednakosti. Drugi dio slijedi iz gore navedenog tvrđenja ([20], Teorema 2.4).

(ii) Neka je $X \subseteq E(S)$ generatorni skup za S. Tada je $\psi(X) \subseteq E(T)$. Takođe znamo iz (i) da $\psi(X)$ generiše T, pri čemu je $|\psi(X)| \leq |X|$. Odatle slijedi da je $\mathrm{idrang}(T) \leq \mathrm{idrang}(S)$. Neka je dalje $Y \subseteq E(S)$ generatorni skup polugrupe S. Tada je $X = \{(i, p_{i\lambda}, \lambda) : (i, \lambda) \in Y\}$ podskup $E(S) \setminus \{0\}$ i važi $\psi(X) = Y$. Iz prethodne leme slijedi da X generiše polugrupu S, pa je $\mathrm{idrang}(S) \leq \mathrm{idrang}(T)$. Time smo pokazali i drugi dio tvrđenja. $\square$

2.1 Grejem-Hautonovi grafovi

U narednom dijelu ovog poglavlja ćemo, i dalje prateći rad [18], izvesti potrebne i dovoljne uslove za postojanje idempotentne baze za neke tipove Risovih matričnih polugrupa. U tom cilju ćemo svakoj Risovoj matričnoj polugrupi pridružiti jedan bipartitan graf, takozvani Grejem-Hautonov graf. Prije toga, podsjetimo se prvo nekih osnovnih pojmova iz teorije grafova.

Grafom nazivamo uređeni par $G = (V, E)$, gdje je V skup čvorova, a E skup dvočlanih podskupova skupa V. Elemente skupa E nazivamo grane. Dva čvora $u, v \in V$ su susjedna ukoliko je $\{u, v\} \in E$. Šetnja u grafu $G = (V, E)$ je niz $\{v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n\}$, gdje je $\{v_i, v_{i+1}\}$ grana za sve $0 \leq i \leq n - 1$. Put je šetnja u kom su svi čvorovi (osim eventualno prvog i poslednjeg) su međusobno različiti. Ciklus je šetnja u kojoj su svi čvorovi međusobno različiti, osim prvog i poslednjeg. Ciklus je Hamiltonov ako prolazi kroz svaki čvor grafa G. Graf koji sadrži Hamiltonov ciklus nazivamo Hamiltonov graf. Put, odnosno ciklus, $\{v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n\}$ ćemo često kraće zapisivati samo preko njegovih čvorova, to jest kao $v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_n$. Dužina puta (ciklusa) je broj grana koje taj put sadrži. Kažemo da je graf povezan ukoliko za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji put kome je u početna i v krajnja tačka.

Graf $G = (V, E)$ je bipartitan ako se skup V može napisati kao disjunktna unija skupova A i B, pri čemu svaka grana iz E ima jedan kraj u A i jedan kraj u B. Bipartitan graf je balansiran ako je $|A| = |B|$. Sparivanje u grafu je skup grana takav da nikoje dvije nemaju zajednički čvor. Savršeno sparivanje je ono koje sadrži tačno $\frac{|V|}{2}$ grana. Ukoliko postoji savršeno sparivanje u grafu G, tada je on balansiran. Savršeno sparivanje nekad nazivamo i kompletno sparivanje.

U bipartitnom grafu $G = A \sqcup B$, savršeno sparivanje iz A u B je sparivanje u kome je svaki čvor iz A incidentan sa nekom granom iz sparivanja. Očigledno, ukoliko postoji savršeno sparivanje iz A u B u bipartitnom grafu $G = A \sqcup B$ tada je $|A| \leq |B|$. Primijetimo da savršenom sparivanju iz A u B u balansiranom bipartitnom grafu $G = A \sqcup B$ odgovara bijekcija $\pi : A \to B$ za koju je $\{a, \pi(a)\} \in E$ za sve $a \in A$.

Skup svih susjednih čvorova čvora $v \in V$ ćemo označavati sa $N(v)$. Slično, skup svih susjednih čvorova skupa $X \subseteq V$ ćemo označavati sa $N(X)$. Stepen čvora $v \in V$ je broj njegovih susjednih čvorova, odnosno $d(v) = |N(v)|$. Podsjetimo se poznate Holove teorema koja daje potreban i dovoljan uslov za postojanje savršenog sparivanja iz A u B u bipartitnom grafu $A \sqcup B$.

Teorema 2.2. *([22]) Bipartitni graf $G = A \sqcup B$ dopušta savršeno sparivanje iz A u B ako i samo ako je $|N(X)| \geq |X|$ za sve podskupove $X \subseteq A$.*

Ukoliko bipartitan graf $G = A \sqcup B$ zadovoljava uslov iz gornje teoreme kažemo da zadovoljava Holov uslov.

Grejem-Hautonovi grafovi su prvi put definisani u radu [16] R. Grejema iz 1968. godine. Njegov pristup je kasnije proširio C. H. Hauton, u [23].

Definicija 2.1. Neka je $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ kompletno 0-prosta polugrupa. Bipartitni graf $\Delta(S)$ na skupu čvorova $I \cup \Lambda$ u kome je $\{i, \lambda\}$ grana ako i samo ako je $p_{i\lambda} \neq 0$ nazivamo Grejem-Hautonov graf polugrupe S.

Pošto su svi idempotetni u S oblika $(i, p_{i\lambda}^{-1}, \lambda)$, slijedi da je $\{i, \lambda\}$ grana u $\Delta(S)$ ako i samo ako $\mathcal{H}$-klasa $H_{i\lambda}$ sadrži idempotent. Neka je $T = \phi(S) = \mathcal{M}^0[\{1\}; I, \Lambda; Q]$ pridružena pravougaona 0-traka polugrupe S. Po definiciji Grejem-Hautonovog grafa $\{i, \lambda\}$ je grana u $\Delta(S)$, odnosno $\Delta(T)$ ako i samo ako je $p_{i\lambda} \neq 0$, odnosno $q_{i\lambda} = 1$. Pošto znamo da je $p_{i\lambda} \neq 0$ ako i samo ako je $q_{i\lambda} = 1$, slijedi da je $\{i, \lambda\}$ grana u $\Delta(S)$ ako i samo ako je $\{i, \lambda\}$ grana u $\Delta(T)$. Dakle, Grejem-Hautonovi grafovi $\Delta(T)$ i $\Delta(S)$ izomorfni.

Neka je $i_1 - \lambda_1 - \ldots - i_k - \lambda_k$ put iz I u Λ u grafu $\Delta(T)$. Tada je

$$q_{i_1\lambda_1} = q_{i_2\lambda_1} = q_{i_2\lambda_2} = q_{i_3\lambda_2} = \ldots = q_{i_k\lambda_k} = 1.$$

Odatle slijedi da su $(i_1, \lambda_1), \ldots, (i_k, \lambda_k)$ idempotenti u T, pri čemu važi

$$(i_1, \lambda_1)(i_2, \lambda_2) \ldots (i_k, \lambda_k) = (i_1, \lambda_2) \ldots (i_k, \lambda_k) = \ldots = (i_1, \lambda_k).$$

Dakle, svaki put iz I u Λ u grafu $\Delta(T) \simeq \Delta(S)$ određuje jedan nenula proizvod idempotenata iz T. Lako vidimo da važi i obratno, to jest da postoji uzajamno jednoznačna veza između nenula proizvoda idempotenata u T i puteva iz I u Λ u grafu $\Delta(S)$.

Lema 2.8. *([18], Lema 2.5) Neka je $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ kompletno 0-prosta polugrupa i $T = \phi(S)$ pridružena pravougaona 0-traka. Skup idempotenata $E' \subseteq E(T)$ generiše element $(i, \lambda) \in T$ ako i samo ako postoji put*

$$i = i_1 - \lambda_1 - i_2 - \lambda_2 - \ldots - i_k - \lambda_k = \lambda$$

u Grejem-Hautonovom grafu $\Delta(S)$, gdje je $(i_l, \lambda_l) \in E'$ za sve $1 \leq l \leq k$.

Znamo da je $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ idempotentno generisana ako i samo ako je odgovarajuća pravougaona traka $T = \mathcal{M}^0[\{1\}; I, \Lambda; Q]$ idempotentno generisana. Prema tome, ako je S idempotentno generisana, iz gornje leme slijedi da u grafu $\Delta(S)$ postoji put između svaka dva čvora $i \in I$ i $\lambda \in \Lambda$, odnosno da je graf $\Delta(S)$ povezan.

U daljem radu ćemo se ograničiti na posmatranje Risovih matričnih polugrupa $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ u kojima je $|I| = |\Lambda|$. Njih nazivamo kvadratne Risove matrične polugrupe. Očigledno, u tom slučaju je Grejem-Hautonov graf $\Delta(S)$ balansiran. Ako idempotentno generisana kvadratna Risova matrična polugrupa $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ ima idempotetnu bazu E', tada skup idempotenata $\psi(E') = \{(i, \lambda) : (i, p_{i\lambda}^{-1}, \lambda) \in E'\}$ generiše pridruženu pravougaonu 0-traku $T = \psi(S)$. Štaviše, iz Tvrđenja 2.2 slijedi da je $\psi(E')$ upravo idempotentna baza pravougaone 0-trake T, pri čemu je $|E'| = |\psi(E')| = |I| = |\Lambda|$. U skupu grana $W = \{\{i, \lambda\} : (i, p_{i\lambda}^{-1}, \lambda) \in E'\}$ grafa $\Delta(T)$ postoji tačno $|E'| = |I| = |\Lambda|$ grana. Ako postoji čvor $j \in I$ koji nije incidentan ni sa jednom granom iz W, tada iz 2.8 slijedi da elementi (j, μ), $\mu \in \Lambda$ ne mogu biti generisani samo idempotentnima iz $\psi(E')$, što je nemoguće. Slično dobijamo da ne postoji čvor $\mu \in \Lambda$ koji nije incidentan ni sa jednom granom iz W. Prema tome, skup grana W upravo čini jedno savršeno sparivanje u grafu $\Delta(T) \simeq \Delta(S)$. Prema tome, $\Delta(S)$ zadovoljava Holov uslov. Međutim, da bi polugrupa S imala idempotentu bazu nije dovoljno da je graf $\Delta(S)$ povezan i da zadovoljava Holov uslov.

Pretpostavimo da je Grejem-Hautonov graf $\Delta(S)$ balansiran i Hamiltonov, i neka je $i_1 - \lambda_1 - \ldots - i_n - \lambda_n - i_1$ Hamiltonov ciklus u $\Delta(S)$. Iz Leme 2.8 slijedi da skup idempotenata $E' = \{(i_l, \lambda_l) : 1 \leq i \leq n\}$ generiše pravougaonu 0-traku T. Dalje, iz Tvrđenja 2.2 slijedi da i polugrupa S ima idempotentu bazu. Međutim, postojanje Hamiltonovog ciklusa u $\Delta(S)$ nije i potreban uslov za postojanje idempotentne baze u S. U narednom dijelu ćemo dati dva potrebna i dovoljna uslova za postojanje idempotentne baze konačne idempotentno generisane kompletno 0-proste polugrupe.

Definicija 2.2. Balansiran bipartitni graf $G = A \sqcup B$ zadovoljava jaki Holov uslov ukoliko je ispunjeno $|N(X)| > |X|$ za sve neprazne podskupove $X \subseteq A$.

Neka je $G = A \sqcup B$ povezan balansiran bipartitan graf i pretpostavimo da zadovoljava jaki Holov uslov, to jest da važi $|N(X)| \geq |X|$ za sve neprazne podskupove $X \subseteq A$. Iz jakog Holovog uslova trivijalno slijedi Holov uslov, pa prema Holovoj teoremi graf G ima savršeno sparivanje iz A u B. Neka je $\pi : X \to Y$ bijekcija određena tim savršenim sparivanjem. Neka je Y neprazan podskup B i neka je $X = \pi^{-1}(Y)$. Tada važi $|N(Y)| \geq |X| = |Y|$, pa lako vidimo da važi i sljedeća lema.

Lema 2.9. *([18], Lema 2.9) Neka je $G = A \sqcup B$ povezan balansiran bipartitan graf. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $|N(X)| > |X|$ *za svaki neprazan podskup* $X \subseteq A$,

(ii) $|N(Y)| > |Y|$ *za svaki neprazan podskup* $Y \subseteq B$.

Definicija 2.3. Skup $A \subseteq S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ nazivamo prorijeđenim pokrivačem S ako je $A = \max(|I|, |\Lambda|)$ i A ima neprazan presjek sa svakom nenula $\mathcal{R}$-klasom i svakom nenula $\mathcal{L}$-klasom u S.

U dokazu Teoreme 2.1 ([20], Teorema 2.4) je za proizvoljnu pravougaonu 0-traku T konstruisan generatorni skup A kardinalnosti $\max(|I|, |\Lambda|)$. Takav generatorni skup naravno ima neprazan presjek sa svakom nenula $\mathcal{R}$-klasom i svakom nenula $\mathcal{L}$-klasom u T, pa je A jedan prorijeđeni pokrivač T. Iz Leme 2.7 i Tvrđenja 2.2 slijedi da svaka kompletno 0-prosta polugrupa S ima bar jedan prorijeđen pokrivač. Sljedeći rezultat povezuje gore uvedene pojmove, i daje potrebne i dovoljne uslove za postojanje idempotentne baze konačnih idempotentno generisanih kompletno 0-prostih polugrupa.

Teorema 2.3. *([18], Teorema 2.10) Neka je $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ konačna idempotentno generisana kompletno 0-prosta polugrupa, u kojoj je $|I| = |\Lambda|$. Sljedeći uslovi su ekvivalentni*

(i) $\mathrm{rang}(S) = \mathrm{idrang}(S)$,

(ii) svaki prorijeđeni pokrivač polugrupe S generiše S,

(iii) $\Delta(S)$ *zadovoljava strogi Holov uslov.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je dovoljno dokazati tvrđenje u slučaju kada je S pravougaona 0-traka. Neka je $T = \mathcal{M}^0[\{1\}; I, \Lambda; Q] = \psi(S)$ pridružena pravougaona 0-traka polugrupe S, gdje je ψ prirodni homomorfizam iz S u T. Iz Tvrđenja 2.2 slijedi da je $\mathrm{rang}(S) = \mathrm{idrang}(S)$ ako i samo ako je $\mathrm{rang}(T) = \mathrm{idrang}(T)$. Grafovi $\Delta(S)$ i $\Delta(T)$ su izomorfni, pa $\Delta(S)$ zadovoljava jaki Holov uslov ako i samo ako ga zadovoljava $\Delta(T)$. Dalje, ako je A prorijeđeni pokrivač od S, tada je očigledno i $\psi(A)$ prorijeđeni pokrivač od T. Obratno, ako je B prorijeđen pokrivač pravougaone 0-trake T, tada je $\psi^{-1}(B) \subseteq S$ unija nekih nenula $\mathcal{H}$-klasa u S, od kojih nikoje dvije ne pripadaju istoj $\mathcal{R}$-klasi, odnosno $\mathcal{L}$-klasi. Proizvoljna transverzala B' tih $\mathcal{H}$-klasa onda čini jedan prorijeđen pokrivač polugrupe S, i pri tome je $\psi(B') = B$. Iz Tvrđenja 2.2 slijedi da svaki prorijeđeni pokrivač kompletno 0-proste S generiše S ako i samo ako svaki prorijeđen pokrivač pravougaone 0-trake T generiše T.

Prema gore pokazanom, možemo pretpostaviti da je $S = (I \times \Lambda) \cup \{0\}$ konačna idempotentno generisana pravougaona 0-traka, u kojoj je, bez umanjenja opštosti $I = \Lambda = \{1, \ldots, n\}$. Tada je prema 2.1 rang$(S) = n$. Uslov (ii) možemo zapisati i kao:

(ii') Za svaku permutaciju $\beta \in \mathcal{S}_n$ polugrupa S je generisana skupom $X(\beta) = \{(1, \beta(1)), \ldots, (n, \beta(n))\}$.

(i) $\to$ (ii) Neka je skup E' idempotentna baza pravougaone 0-trake S. Vidjeli smo da tada skup grana $W = \{\{i, \lambda\} : (i, \lambda) \in E'\}$ čini savršeno sparivanje u grafu $\Delta(S)$. Odakle slijedi da skup E' možemo zapisati kao $E' = \{(1, \lambda_1), (2, \lambda_2), \ldots, (n, \lambda_n)\}$, gdje je $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ jedna permutacija skupa Λ. Da bismo pojednostavili notaciju možemo preimenovati elemente skupa Λ na sljedeći način: $1' = \lambda_1$, $2' = \lambda_2$,..., $n' = \lambda_n$. Prema tome, možemo i bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je skup E' jednak $\{(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)\}$.

Neka je $X(\beta)$ proizvoljan prorijeđen pokrivač S, gdje je $\beta \in \mathcal{S}_n$ permutacija reda k, $1 \leq k \leq n$. Za $1 \leq i \leq n$ je ispunjeno

$$(i, i) = (i, \beta(i))(\beta(i), \beta^2(i))(\beta^2(i), \beta^3(i)) \ldots (\beta^{k-1}(i), \beta^k(i)),$$

odakle slijedi $(i, i) \in \langle X(\beta) \rangle$. Odatle dobijamo da je $\langle X(\beta) \rangle \supseteq \langle E' \rangle = S$, to jest pravougaona 0-traka S je generisana prorijeđenim pokrivačom $X(\beta)$.

(ii) $\to$ (iii) Pretpostavimo suprotno, da je u S ispunjen uslov (ii), ali da $\Delta(S)$ ne zadovoljava jaki Holov uslov. Neka je $J \subseteq I$ neprazan podskup takav da je $|N(J)| \leq |J|$. Neka je $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ i $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, pri čemu je $J = \{i_1, \ldots, i_l\}$ i $N(J) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $m \leq l$. Tvrdimo da prorijeđeni pokrivač $Y = \{(i_1, \lambda_1), \ldots, (i_n, \lambda_n)\}$ polugrupe S ne generiše S. Posmatrajmo proizvoljan put kome je prva grana $\{i_n, \lambda_n\}$

$$i_n - \lambda_n - i_{q_1} - \lambda_{q_1} - \ldots - i_{q_t} - \lambda_{q_t}.$$

Znamo da je $N(\Lambda \setminus N(J)) \subseteq I \setminus J$, pa pošto je $\lambda_n \in \Lambda \setminus N(J)$ slijedi da $i_{q_1} \in I \setminus J$. Odatle dalje dobijamo da $\lambda_{q_1} \in \Lambda \setminus N(J)$, pa je $i_{q_2} \in I \setminus J$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo da $i_{q_t} \in I \setminus J$ i $\lambda_{q_t} \in \Lambda \setminus N(J)$. Dakle, nijedan put koji počinje granom $\{i_n, \lambda_n\}$ ne može završiti u čvoru λ_1. Odatle slijedi da element (i_n, λ_1) nije generisan elementima skupa Y, što je kontradikcija sa pretpostavkom (ii) da svaki je prorijeđeni pokrivač polugrupe S njen generatorni skup.

(iii) $\to$ (i) Pretpostavimo da graf $\Delta(S)$ zadovoljava jaki Holov uslov. Kao što smo već vidjeli, tada postoji savršeno sparivanje u $\Delta(S)$. Neka je $\pi : I \to \Lambda$ bijekcija određena tim savršenim sparivanjem. Pokazaćemo da je upravo skup

$$M = \{(i, \pi(i)) : i \in I\}$$

jedna idempotentna baza S. Neka je $(i, \lambda) \in S$ proizvoljni element. Pokazaćemo da postoji put od i do λ u $\Delta(S)$ čija svaka druga grana (počevši od prve) predstavlja element iz M. Definišimo prvo put $p = i - \pi(i)$. Ako je $\lambda = \pi(i)$, našli smo traženi put. U suprotnom, iz jakog Holovog uslova slijedi da $\pi(i)$ ima bar još jedan susjedni čvor, različit od i. Dakle, možemo izabrati $i_2 \in N(\{\pi(i)\}) \setminus \{i\}$ i produžiti put $p = i - \pi(i) - i_2 - \pi(i_2)$. Ako je $\pi(i_2) = \lambda$, gotovi smo. Inače, iz jakog Holovog uslova slijedi da je $|N(\{\pi(i), \pi(i_2)\})| \geq 2$, pa možemo izabrati $i_3 \in N(\{\pi(i), \pi(i_2)\}) \setminus \{i, i_2\}$. Sada opet možemo produžiti put, to jest dobijamo put $p = i - \pi(i) - i_2 - \pi(i_2) - i_3 - \pi(i_3)$ ili $p = i - \pi(i) - i_3 - \pi(i_3)$. Kako je broj čvorova u $\Delta(S)$ konačan, nastavljajući ovaj postupak moramo stići do do $i_k \in I$ takvog da je $\pi(i_k) = \lambda$. Dakle, u $\Delta(S)$ postoji put

$$p = i - \pi(i) - i_{t_1} - \pi(i_{t_1}) - \ldots - i_{t_l}\pi(i_{t_l}) - i_k - \pi(i_k) = \lambda,$$

gdje je $\{t_1, \ldots, t_l\}$ neki podniz niza indeksa $\{1, 2, \ldots, k\}$. Radi lakšeg zapisa, možemo preimenovati čvorove i_{t_m} u j_m, za $1 \leq m \leq l$. Odatle slijedi da se element $(i, \lambda) \in S$ može predstaviti kao proizvod elemenata iz M, to jest

$$\begin{aligned}
&(i, \pi(i))(j_1, \pi(j_1))(j_2, \pi(j_2)) \ldots (j_l, \pi(j_l))(i_k, \pi(i_k)) = \\
&(i, \pi(j_1))(j_2, \pi(j_2)) \ldots (j_l, \pi(j_l))(i_k, \pi(i_k)) = \\
&(i, \pi(j_2)) \ldots (j_l, \pi(j_l))(i_k, \pi(i_k)) = \ldots = \\
&(i, \pi(j_l))(i_k, \pi(i_k)) = (i, \pi(i_k)) = (i, \lambda).
\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je S generisana skupom idempotenata M, pa je $\mathrm{idrang}(S) = \mathrm{rang}(S)$. □

2.2 $*$-Regularne kompletno 0-proste polugrupe

Pošto je dijagram monoid $\mathcal{P}_n$, kao i njegovi podmonoidi $\mathcal{B}_n$ i $\mathcal{J}_n$ $*$-regularna polugrupa, razmotrićemo posljedice prethodnih tvrđenja za konačne idempotentno generisane potpuno 0-proste $*$-regularne polugrupe.

Teorema 2.4. *([9], Teorema 5.4) Neka je S konačna, idempotentno generisana kompletno 0-prosta $*$-regularna polugrupa, čije su $\mathcal{R}$-klase, odnosno $\mathcal{L}$-klase, indeksirane redom skupovima I i Λ. Tada važi*

(i) $\mathrm{rang}(S) = \mathrm{idrang}(S) = |I| = |\Lambda|$,

(ii) podskup $X \subseteq S$ je minimalan generatorni skup polugrupe S ako i samo ako je X transverzala kolekcije svih nenula $\mathcal{R}$, odnosno $\mathcal{L}$-klasa.

Dokaz. Kako je S $*$-regularna polugrupa, iz Teoreme 1.5 slijedi da svaka $\mathcal{R}$-klasa, kao i svaka $\mathcal{L}$-klasa u S sadrži tačno po jednu projekciju. Iz toga slijedi da je $|I| = |\Lambda| = |P(S)|$. Pošto je polugrupa S idempotentno generisana, a iz Teoreme 1.6 znamo da je $E(S) = P(S)^2$, slijedi da je S generisana skupom $P(S)$. Kako svaki generatorni skup polugrupe S mora imati neprazan presjek sa svakom nenula $\mathcal{R}$, odnosno $\mathcal{L}$-klasom, dobijamo

$$|I| = |\Lambda| \leq \mathrm{rang}(S) \leq \mathrm{idrang}(S) \leq |P(S)| = |I| = |\Lambda|.$$

Time smo pokazali dio tvrđenja pod (i). Iz Teoreme 2.3 onda slijedi da je svaki prorijeđen pokrivač polugrupe S njen generatorni skup, odakle dobijamo i dio (ii). $\square$

U narednom tvrđenju razmatramo polugrupe generisane nekim elementima iz jedne $\mathcal{J}$-klase polugrupe S, što će nam pomoći pri dokazu glavnih tvrđenja ovog odjeljka.

Teorema 2.5. *([9], Teorema 5.8) Neka je S konačna regularna polugrupa, J proizvoljna $\mathcal{J}$-klasa u S, $X \subseteq J$ i $T = \langle X \rangle$. Ako je T regularna polugrupa, tada je $J \cap T = J_1 \cup \ldots \cup J_l$, gdje su $J_1, \ldots, J_l$ maksimalne $\mathcal{J}$-klase polugrupe T.*

Dokaz. Prvo uvedimo sljedeću notaciju. Za polugrupu $R \in \{S, T\}$ neka $\mathcal{J}^R$ označava Grinovu $\mathcal{J}$-relaciju na polugrupi R, J_x^R klasu elementa x u relaciji $\mathcal{J}^T$, te analogno za ostale Grinove relacije. Neka je K maksimalna $\mathcal{J}^T$-klasa u T. Neka je $k = x_1 \ldots x_m$, zapis nekog elementa $k \in K$ kao proizvoda elemenata iz X. Tada važi

$$T^1 k T^1 = T^1 x_1 \ldots x_m T^1 \subseteq T^1 x_1 T^1,$$

odnosno $K \leq_{\mathcal{J}^T} J_x^T$ za neko $x \in X$. Maksimalnost klase K nam onda daje $K = J_x^T \subseteq J$. Prema tome, svaka maksimalna $\mathcal{J}^T$-klasa u T je podskup skupa J.

Obratno, neka je K $\mathcal{J}^T$-klasa u T koja ima neprazan presjek sa J. Tada je $K \leq_{\mathcal{J}^T} M$ za neku maksimalnu $\mathcal{J}^T$ klasu M. Neka su $a \in K \cap J$ i $b \in M$ proizvoljni. Iz $J_a^T = K \leq_{\mathcal{J}^T} M = J_b^T$ slijedi da postoje $u, v \in T$ takvi da je $a = ubv$. Pošto su a i b sadržani u $\mathcal{J}^S$-klasi J, ispunjeno je $a \mathcal{J}^S b$. Odatle dobijamo

$$S^1 b S^1 = S^1 a S^1 = S^1 ubv S^1 \subseteq S^1 ub S^1 \subseteq S^1 b S^1$$

pa je i element ub u $\mathcal{J}^S$ relaciji sa a i b. Polugrupa S je konačna, pa je prema Teoremi 1.3 i stabilna. Zbog toga iz $b \mathcal{J}^S ub$ i $ub \mathcal{J}^S a$ slijedi $b \mathcal{L}^S ub$ i $ub \mathcal{R}^S a$. Kako je T regularna polugrupa, iz Tvrđenja 1.16 slijedi $b \mathcal{L}^T ub$ i $ub \mathcal{R}^T a$, pa je $b \mathcal{D}^T a$. Pošto je polugrupa S, a time i T konačna, važi $\mathcal{D}^S = \mathcal{J}^S$ i $\mathcal{D}^T = \mathcal{J}^T$. Prema tome, važi i $b \mathcal{J}^T a$, čime smo pokazali da je $K = J_a^T = J_b^T = M$. Dakle, $J \cap T$ je unija maksimalnih $\mathcal{J}^T$ klasa polugrupe T. $\square$

Naredna dva tvrđenja daju nam glavne uslove za određivanje ranga i minimalnih generatornih skupova idempotentno generisanih $*$-regularnih polugrupa.

Teorema 2.6. *([9], Teorema 5.10) Neka je S konačna $*$-regularna polugrupa, J neka $\mathcal{J}$-klasa u S i $X \subseteq J$ skup projekcija. Tada za polugrupu $T = \langle X \rangle$ važi*

$$\operatorname{rang}(T) = \operatorname{idrang}(T) = |X|.$$

Štaviše, podskup $Y \subseteq T$ je minimalan generatorni skup polugrupe T ako i samo ako je Y transverzala skupa svih $\mathcal{R}$-klasa, i skupa svih $\mathcal{L}$-klasa, sadržanih u maksimalnim $\mathcal{J}$-klasama polugrupe T.

Dokaz. Pokazaćemo prvo da je T idempotentno generisana $*$-regularna polugrupa. Neka je $t \in T$, tada se t može zapisati kao proizvod $t = t_1 \dots t_n$ projekcija $t_1, \dots, t_n$ iz X. Iz osobina operacije $*$ slijedi

$$t^* = (t_1 \dots t_n)^* = t_n^* \dots t_1^* = t_n \dots t_1 \in T,$$

što znači da je polugrupa T zatvorena u odnosu na operaciju $*$.

Neka su $J_1 \dots, J_m$ maksimalne $\mathcal{J}$-klase polugrupe T. Iz Teoreme 2.5 slijedi da je $X \subseteq J \cap T = J_1 \cup \dots \cup J_m$. Dakle, T je idempotentno generisana $*$-regularna polugrupa generisana elementima svojih maksimalnih $\mathcal{J}$-klasa. Iz Leme 2.3 onda slijedi da je

$$\operatorname{rang}(T) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{rang}(J_i^*) \text{ i } \operatorname{idrang}(T) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{idrang}(J_i^*)$$

Takođe slijedi da su $J_1^*, \dots, J_m^*$ konačne idempotentno generisane kompletno 0-proste $*$-regularne polugrupe. Znamo da proizvodi elemenata iz različitih maksimalnih $\mathcal{J}$-klasa pripadaju nižim $\mathcal{J}$-klasama. Odatle slijedi da za svako $1 \leq i \leq m$ $\mathcal{J}$-klasa J_i je generisana skupom $X \cap J_i$. Kako su elementi skupa $X \cap J_i$ projekcije, slijedi da $X \cap J_i$ ima jednočlan presjek sa svakom $\mathcal{R}$, odnosno $\mathcal{L}$-klasom polugrupe T sadržanom u J_i. Iz Teoreme 2.4 onda slijedi da za sve $1 \leq i \leq m$ važi

$$\operatorname{rang}(J_i^*) = \operatorname{idrang}(J_i^*) = |P(J_i)| = |X \cap J_i|.$$

Odatle konačno dobijamo $\operatorname{rang}(T) = \operatorname{idrang}(T) = |X|$. Iz Teoreme 2.4 (ii) slijedi i drugi dio tvrđenja. $\square$

Teorema 2.7. *([9], Teorema 5.11) Neka je S konačna idempotentno generisana $*$-regularna polugrupa, i pretpostavimo da $\mathcal{J}$-klase u S čine lanac $J_0 < J_1 < \dots < J_k$. Za $0 \leq r \leq m$ neka je $I_r = J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_r$. Tada su svi ideali polugrupe S upravo skupovi $I_0, I_1, \dots, I_m$.*
Pretpostavimo da je $P(J_r) \subseteq \langle J_{r+1} \rangle$, za sve $0 \leq r \leq m-1$. Tada je za sve $0 \leq r \leq m$ ispunjeno

(i) $I_r = \langle J_r \rangle$,

(ii) I_r *je idempotentno generisana polugrupa,*

(iii) $\operatorname{rang}(I_r) = \operatorname{idrang}(I_r) = \rho_r$, *gdje je ρ_r broj $\mathcal{R}$-klasa polugrupe S sadržanih u I_r.*

Dokaz. Pošto je za sve $a, b \in S$ ispunjeno $J_{ab} \leq J_a, J_b$, slijedi da su skupovi $I_0, I_1, \ldots, I_m$ ideali u S. Neka je $I \neq S$ proizvoljan ideal u S, i neka je a element iz I takav da je indeks $\mathcal{J}$-klase kojoj a pripada maksimalan. Onda je $I \subseteq I_l$, gdje je $a \in J_l$. Pošto je S^1aS^1 minimalan ideal koji sadrži a, slijedi $S^1aS^1 \subseteq I$. Iz osobina $\mathcal{J}$-relacije znamo da je za sve $b \in J_0 \cup J_1 \cup \ldots \cup J_l$ ispunjeno $b \in J(a) = S^1aS^1$, pa imamo sljedeću jednakost $S^1aS^1 = I = I_l$.

(i) Neka je $0 \leq r \leq m-1$, pokazaćemo prvo da važi $J_r \subseteq \langle J_{r+1} \rangle$. Proizvoljan idempotent $e \in E(J_s)$ možemo zapisati kao $e = (ee^*)(e^*e) \in P(J_r)^2$, odakle dobijamo da je $E(J_r) \subseteq \langle P(J_r) \rangle \subseteq \langle J_{r+1} \rangle$. Pošto je S idempotentno generisana polugrupa, iz Tvrđenja 2.1 slijedi da je i J_r^* idempotentno generisana polugrupa, odakle dalje dobijamo

$$J_r \subseteq \langle E(J_r) \rangle \subseteq \langle J_{r+1} \rangle.$$

Dalje indukcijom po $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ pokazujemo da je $I_r = \langle J_r \rangle$. Za $r = 0$ je $I_0 = J_0 = \langle J_0 \rangle$. Pretpostavimo da je za $r \geq 0$ ispunjeno $I_r = \langle J_r \rangle$. Tada važi

$$I_{r+1} = I_r \cup J_{r+1} = \langle J_r \rangle \cup J_{r+1} \subseteq \langle J_{r+1} \rangle.$$

Iz osobina $\mathcal{J}$ relacije slijedi da je $\langle J_{r+1} \rangle \subseteq I_{r+1}$, pa dobijamo $I_{r+1} = \langle J_{r+1} \rangle$.

(ii) Vidjeli smo već da je J_r^* idempotentno generisana polugrupa, pa je prema Lemi 2.2 $I_r = \langle J_r \rangle$ idempotentno generisana polugrupa.

(iii) Kako je J_r^* idempotentno generisana kompletno 0-prosta $*$-regularna polugrupa, iz Teoreme 2.4 slijedi da je $\operatorname{rang}(J_r^*) = \operatorname{idrang}(J_r^*) = \rho_r$. S druge strane, iz Leme 2.2 dobijamo $\operatorname{rang}(I_r) = \operatorname{rang}(J_r^*)$ i $\operatorname{idrang}(I_r) = \operatorname{idrang}(J_r^*)$, odakle slijedi tvrđenje teoreme. $\square$

Za određivanje minimalnih idempotentnih generatornih skupova idempotentno generisanih kompletno 0-prostih $*$-regularnih polugrupa koristićemo takozvane grafove projekcija. Orijentisani graf, ili digraf, je graf $G = (V, E)$ sa skupom čvorova V i skupom usmjerenih grana E, gdje su elementi E uređeni parovi različitih elemenata iz V. Podgraf H digrafa G je balansiran ako je $V(G) = V(H)$ i ako je ulazni i izlazni stepen svakog čvora u H jednak jedan. Lako vidimo da su sve komponente povezanosti balansiranog podgrafa H ciklusi. Prema tome, svaki balansiran podgraf indukuje jednu permutaciju na skupu čvorova V.

Definicija 2.4. Neka je S idempotentno generisana kompletno 0-prosta $*$-regularna polugrupa. Graf projekcija $\Gamma(S)$ polugrupe S definišemo kao orijentisani graf na skupu čvorova $P(S) \setminus \{0\}$, u kome je (p, q) grana ako i samo ako je $pq \neq 0$.

Sljedeće tvrđenje nam daje vezu između minimalnih idempotentnih generatornih skupova idempotentno generisane kompletno 0-proste $*$-regularne polugrupe S i balansiranih podgrafova grafa $\Gamma(S)$.

Teorema 2.8. *([9], Teorema 5.7) Neka je S idempotentno generisana kompletno 0-prosta $*$-regularna polugrupa. Neka je G podgraf $\Gamma(S)$ i X_G sljedeći skup idempotenata*

$$X_G = \{pq : (p, q) \text{ je grana u } G\}$$

Tada je X_G minimalan generatorni skup polugrupe S ako i samo ako je podgraf G balansiran.

Dokaz. Neka je $p \in P(S) \setminus \{0\}$. Lako vidimo da je broj izlaznih grana iz p u podgrafu G jednak $|X_G \cap R_p|$, kao i da je broj ulaznih grana u p u podgrafu G jednak $|X_G \cap L_p|$.

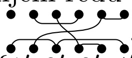
Iz Teoreme 2.4 (ii) znamo da je X_G minimalan generatorni skup polugrupe S ako i samo ako X_G ima jednočlan presjek sa svakom nenula $\mathcal{R}$- i $\mathcal{L}$-klasom, što je prema gore pokazanom ekvivalentno sa tvrdnjom da je G balansiran podgraf grafa $\Gamma(S)$. $\square$

3 Dijagram monoidi

U ovom poglavlju ćemo definisati dijagram monoide i neke od njihovih podmonoida, te izložiti njihove osnovne osobine. Predstavićemo i karakterizaciju Grinovih relacija na dijagram monoidima, oblik odgovarajućih klasa ekvivalencije i ideala. Definisaćemo i jednu involuciju na $\mathcal{P}_X$, te pokazati da su dijagram monoidi $*$-regularne polugrupe. Većina izloženih rezultata se može naći u radovima [13], [14], tako da su njihovi dokazi odavno poznati. Za neke tvrdnje i osobine su predstavljeni dokazi autora.

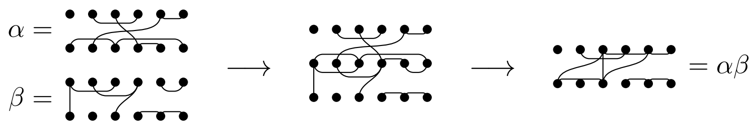
3.1 Definicija i osnovne osobine

Radi kraćeg zapisa ćemo za $n \in \mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva $\{1, 2, \ldots, n\}$ označavati sa $\bar{n}$. Slično, za $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $m < n$ ćemo skup prirodnih brojeva $\{m, m+1, \ldots, n\}$ označavati sa $[m, n]$.

Neka je X proizvoljan neprazan skup, a $X' = \{x' : x \in X\}$ kopija skupa X. Nad grafovima na skupu čvorova $X \cup X'$ definišimo relaciju ekvivalencije $\sim$ tako da su dva grafa ekvivalentna ako i samo ako imaju iste komponente povezanosti. Skup svih klasa ekvivalencije $\sim$ označavamo sa $\mathcal{P}_X$, i nazivamo skup *dijagrama* na X. Za predstavnika klase uzimamo graf sa maksimalnim brojem grana. Ove grafove crtamo na taj način da su čvorovi raspoređeni u dva reda - u gornjem redu čvorovi označeni elementima skupa X, a u donjem redu čvorovi označeni elementima skupa X'. Na primjer, dijagram $\alpha =$ . je predstavnik klase grafova na skupu čvorova $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{1', 2', 3', 4', 5', 6'\}$ sa komponentama povezanosti $\{1\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 6, 2'\}$, $\{1', 3', 6'\}$ i $\{3, 4', 5'\}$. Primijetimo da svaka klasa ekvivalencije na skupu ovih grafova jedinstveno određena jednom particijom skupa $X \cup X'$. Zbog toga elemente skupa $\mathcal{P}_X$ često nazivamo *particija.* Iz ove veze slijedi i da je broj elemenata skupa $\mathcal{P}_X$ jednak B_{2n}, za sve skupove X kardinalnosti $n \in \mathbb{N}$. Ovdje sa B_m označavamo m-ti Belov broj, to jest broj particija skupa od m elemenata.

Na skupu $\mathcal{P}_X$ definišemo binarnu operaciju na sljedeći način. Za elemente $\alpha, \beta \in Px$, prvo zapišemo dijagram α iznad dijagrama β, tako da identifikujemo čvorove $x \in X$ iz gornjeg reda β sa čvorovima $x' \in X'$ iz donjeg reda α. Čvorove iz donjeg reda β preimenujemo u $x'' \in X''$. Rezultujući graf označimo sa $\Gamma(\alpha, \beta)$. Proizvod $\alpha\beta$ definišemo kao dijagram na skupu X u kome postoji grana između x i y iz $X \cup X'$ ako i samo ako u grafu $\Gamma(\alpha, \beta)$ postoji put između čvorova x i y. Slika 1 prikazuje primjer množenja dva elementa iz skupa $\mathcal{P}_{\bar{6}}$.

Neka su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}_n$, označimo sa $\Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ graf dobijen istim postupkom nadovezivanja dijagrama kao i graf proizvoda dva elementa. Da se uvjerimo da je definisana operacija množenja na $\mathcal{P}_X$ asocijativna dovoljno je uočiti da postoji grana između x i y iz $X \cup X'''$ u grafu $\Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ ako i samo ako postoji grana između x i y iz $X \cup X''$ u grafu $\Gamma(\alpha\beta, \gamma)$, odnosno grafu



Slika 1: Dva dijagrama $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_6$ (lijevo), graf proizvoda $\Gamma(\alpha, \beta)$ (sredina) i njihov proizvod $\alpha\beta \in \mathcal{P}_6$ (desno).

$\Gamma(\alpha, \beta\gamma)$. Odatle slijedi da postoji grana između x i y u $(\alpha\beta)\gamma$ ako i samo ako postoji grana između x i y u $\alpha(\beta\gamma)$, za sve $x, y \in X \cup X'$. Dakle, važi $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, za sve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}_X$. Iz definicije operacije množenja lako vidimo da je jedinični element u $\mathcal{P}_X$ dijagram $1 = 1_{\mathcal{P}_X} = \{(i, i') : i \in X\}$.

Skup $\mathcal{P}_X$ sa ovom operacijom množenja nazivamo *monoid dijagrama*, ili *monoid particija*. U ovom radu ćemo izučavati monoide $\mathcal{P}_X$ u slučajevima kada je skup X konačan. Ako je kardinalnost skupa X jednaka $n \in \mathbb{N}$, tada možemo $\mathcal{P}_X$ poistovijeti sa monoidom dijagrama na skupu $\bar{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$, koji označavamo sa $\mathcal{P}_n$. Definišimo sada neke osnovne osobine i objekte koje ćemo koristiti u izučavanju monoida $\mathcal{P}_n$.

Ovom prilikom ćemo definisati kako se ovo množenje dijagrama koristi za definiciju dijagram algebri. Neka su α i β dijagrami iz $\mathcal{P}_n$. Sa $m(\alpha, \beta)$ označimo broj povezanih komponenti uklonjenih iz srednjeg reda grafa proizvoda $\Gamma(\alpha, \beta)$ prilikom konstrukcije proizvoda $\alpha\beta$. Neka je R komutativan prsten sa jedinicom, i $\xi \in R$ neki fiksiran element. Preslikavanje

$$\phi : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to R, (\alpha, \beta) \mapsto \xi^{m(\alpha,\beta)},$$

nazivamo uvrtanje iz $\mathcal{P}_n$ u R. Definišemo algebru $R^{\phi}[\mathcal{P}_n]$ kao R-linearno proširenje polugrupe $\mathcal{P}_n$, pri čemu se elementi baze množe na sljedeći način

$$\alpha \circ \beta = \phi(\alpha, \beta)\alpha\beta,$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$. Ova "twisted"algebra polugrupa se naziva dijagram algebra.

Neka je $\alpha \in \mathcal{P}_n$. Povezane komponente dijagrama α nazivamo blokovi, te za $x \in \bar{n}$ sa $[x]_\alpha$ označavamo blok kojemu pripada čvor x. Blok je transverzalan ukoliko sadrži čvorove i iz $\bar{n}$ i iz $\bar{n}'$, dok kažemo da je blok netransverzalan ukoliko nije transverzalan. Broj transverzalnih blokova dijagrama α nazivamo *rang dijagrama* i označavamo sa $\mathrm{rang}(\alpha)$.

Neka je α dijagram iz $\mathcal{P}_n$ i neka skupovi $A_i \cup B_i$, gdje je $A_i \subseteq \bar{n}$ i $B_i \subseteq \bar{n}'$, $i \in I$ predstavljaju transverzalne blokove α. Slično, neka su $C_j \subseteq \bar{n}$, $j \in J$ netransverzalni blokovi iz gornjeg reda, a neka su $D_k \subseteq \bar{n}'$, $k \in K$ netransverzalni blokovi iz donjeg reda čvorova. Tada dijagram α možemo zapisati na sljedeći način

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \cline{2-2} B_i & D_k \end{array} \right]_{i\in I, j\in J, k\in K}.$$

Ovakav zapis dijagrama ćemo ubuduće nazivati blok zapis.

Definicija 3.1. Za dijagram α definišemo *domen* i *kodomen* kao sljedeće skupove

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\alpha) &= \{i \in \bar{n} : [i]_\alpha \cap \bar{n}' \neq \emptyset\}, \\ \mathrm{codom}(\alpha) &= \{i \in \bar{n} : [i']_\alpha \cap \bar{n} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

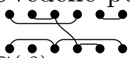
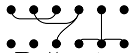
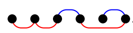
Dakle, domen (kodomen) dijagrama α predstavlja skup elementa iz $\bar{n}$ koji se nalaze u gornjem (donjem) redu α i pripadaju nekom transverzalnom bloku.

Definicija 3.2. *Kernel* i *kokernel* dijagrama $\alpha \in \mathcal{P}_n$ su relacije ekvivivalencije na skupu $\bar{n}$ definisane sa

$$\begin{aligned} \ker(\alpha) &= \{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{n} : [i]_\alpha = [j]_\alpha\}, \\ \mathrm{coker}(\alpha) &= \{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{n} : [i']_\alpha = [j']_\alpha\}. \end{aligned}$$

Iz ove definicije vidimo da relacija kernel (kokernel) dijagrama α opisuje koji elementi gornjeg (donjeg) reda se nalaze u istim blokovima. Definišimo takođe relaciju ekvivalencije $\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \bar{n}\times\bar{n}$ kao tranzitivno zatvaranje unije $\ker(\alpha) \cup \mathrm{coker}(\alpha)$, to jest

$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \ker(\alpha) \vee \mathrm{coker}(\alpha).$$

Za dijagram $\alpha \in \mathcal{P}_n$ ćemo reći da je *nesvodljiv*, odnosno *ireducibilan*, ako je $\mathrm{Ker}(\alpha) = \bar{n} \times \bar{n}$. Pojmove (ko)domena i (ko)kernela možemo predstaviti i grafički. Za dijagram $\alpha \in \mathcal{P}_n$ definišemo gornji uzorak $U(\alpha)$, kao graf na skupu čvorova $\bar{n}$, tako da su povezane komponente $U(\alpha)$ upravo $\ker(\alpha)$-klase ekvivalencije. Analogno definišemo donji uzorak $D(\alpha)$. Pri tome su transverzalne i netransverzalne komponente uzorka $U(\alpha)$ $(DT(\alpha))$ označavamo sa $UT(\alpha)$ i $UN(\alpha)$ $(DT(\alpha)$ i $DN(\alpha))$. Svaki od grafova $U(\alpha)$ i $D(\alpha)$ obojimo sa po dvije boje, na sljedeći način. Obojimo transverzalne komponente uzorka $U(\alpha)$ svijetlocrvenom bojom, a netransverzalne tamnocrvenom, i analogno, transverzalne komponente uzorka $D(\alpha)$ svijetloplavom, a netrasverzalne tamnoplavom bojom. Tada svjetliji podgrafovi grafova $U(\alpha)$ i $D(\alpha)$ određuju redom skupove $\mathrm{dom}(\alpha)$ i $\mathrm{codom}(\alpha)$. Definišimo i graf $G(\alpha)$, kao graf na skupu čvorova $\bar{n}$, čiji je skup grana jednak uniji svih grana iz $U(\alpha)$ i $D(\alpha)$. Pri tome zadržavamo bojenje grana, odnosno grane iz $U(\alpha)$ su crvene, a grane iz $D(\alpha)$ su plave. Tada su povezane komponente grafa $G(\alpha)$ upravo $\mathrm{Ker}(\alpha)$-klase ekvivalencije. Primijetimo da je graf $G(\alpha)$ povezan ako i samo ako je dijagram α nesvodljiv. Uvedene pojmove možemo ilustrovati na sljedećem primjeru. Neka su $\alpha =$  i $\beta =$  elementi $\mathcal{P}_6$. Tada je $G(\alpha) =$  dok je $G(\beta) =$ . Pošto je graf $G(\beta)$ povezan, a $G(\alpha)$ nije, zaključujemo da je β nesvodljiv idempotent, dok α nije nesvodljiv.

Važno je primijetiti da skupovi domen i kodomen, te relacije kernel i kokernel ne određuju jedinstven dijagram $\alpha \in \mathcal{P}_n$. Tačnije, ako je $r = \mathrm{rang}(\alpha)$, tada postoji $r!$ dijagrama $\beta \in \mathcal{P}_n$ (uključujući i α), za koje važi

$$\mathrm{dom}(\beta) = \mathrm{dom}(\alpha), \mathrm{codom}(\beta) = \mathrm{codom}(\alpha),$$
$$\ker(\beta) = \ker(\alpha), \mathrm{coker}(\beta) = \mathrm{coker}(\alpha),$$

Naime, možemo spojiti $\ker(\alpha)$-klase i $\mathrm{coker}(\alpha)$-klase u transverzalne blokove na tačno $r!$ načina. Naravno, svi takvi dijagrami su takođe ranga jednakog r.

Posmatrajmo sada proizvod dva dijagrama $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$. Neka je $i \in \mathrm{dom}(\alpha\beta)$, to jest i iz gornjeg reda $\alpha\beta$ pripada nekom transverzalnom bloku. Slijedi da postoji put u $\Gamma(\alpha, \beta)$ od i do nekog elementa $j'' \in \bar{n}''$, pa postoji $k' \in \bar{n}'$, tako da je $i \in [k']_\alpha$. Odatle slijedi

$$\mathrm{dom}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha). \tag{6}$$

Na sličan način dobijamo da važe i sljedeći odnosi

$$\mathrm{codom}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{codom}(\beta), \tag{7}$$
$$\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta), \tag{8}$$
$$\mathrm{coker}(\beta) \subseteq \mathrm{coker}(\alpha\beta). \tag{9}$$

Iz poslednje dvije relacije slijedi da je $\mathrm{rang}(\alpha\beta) \leq \min\{\mathrm{rang}(\alpha), \mathrm{rang}(\beta)\}$. Možemo primijetiti i da ukoliko je $[i]_\alpha$ netransverzalni blok iz gornjeg reda α, tada će taj skup biti sadržan u nekom netransverzalnom bloku gornjeg reda proizvoda $\alpha\beta$. Analogno važi za netransverzalne blokove iz donjeg reda β.

Polugrupa $\mathcal{P}_n$ nije inverzna, a nije ni kompletno regularna polugrupa, međutim jeste $*$-regularna polugrupa. Definišimo na $\mathcal{P}_n$ unarnu operaciju $*$, koja dijagram α slika u dijagram α^*, dobijen simetričnom refleksijom u odnosu na horizontalnu osu dijagrama α. Tačnije, (x, y) je grana u α^* ako i samo ako je (x', y') grana u α^* (pri tome je $x'' = x$). Koristeći blok-zapis dijagrama možemo definisati operaciju $*$ na sljedeći način:

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \hline B_i & D_k \end{array}\right]_{i\in I, j\in J, k\in K} \Rightarrow \alpha^* = \left[\begin{array}{c|c} B_i & D_k \\ \hline A_i & C_j \end{array}\right]_{i\in I, j\in J, k\in K}.$$

Iz definicije množenja u $\mathcal{P}_n$ slijedi da je $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$, a očigledno je i $(\alpha^*)^* = \alpha$, pa je $*$ zaista involucija. Takođe lako vidimo da je

$$\mathrm{dom}(\alpha^*) = \mathrm{codom}(\alpha) \text{ i } \mathrm{codom}(\alpha^*) = \mathrm{dom}(\alpha)$$
$$\ker(\alpha^*) = \mathrm{coker}(\alpha) \text{ i } \mathrm{coker}(\alpha^*) = \ker(\alpha).$$

Pokazaćemo da je $\mathcal{P}_n$ uz ovu operaciju $*$-regularna polugrupa, nakon što pokažemo sljedeću lemu.

Lema 3.1. *Neka su* $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$*, takvi da je* $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ *i* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$*. Tada važi*

(i) $\alpha\alpha^*$ *i* $\beta\beta^*$ *su idempotenti i* $\alpha\alpha^* = \beta\beta^*$*;*

(ii) $\alpha\alpha^*\beta = \beta$ *i* $\beta\beta^*\alpha = \alpha$*.*

Dokaz. (i) Neka je $i \in \mathrm{dom}(\alpha)$, i $k \in [i]_\alpha \cap \mathrm{dom}(\alpha)$. Tada postoji $j \in \mathrm{codom}(\alpha)$ tako da α sadrži grane (i, j') i (k, j'). Odatle slijedi da se grane (j, i') i (j, k') nalaze u α^*. Prema tome, u proizvodu $\alpha\alpha^*$ čvorovi i, k, i', k' pripadaju istoj komponenti povezanosti. Dakle, ako je $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\} = \mathrm{dom}(\alpha) \cap [i]_\alpha$, tada skup

$$\{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \cup \{k_1', k_2', \ldots, k_m'\} \tag{10}$$

čini jedan blok u $\alpha\alpha^*$. Neka je sada $\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$ netransverzalni blok iz gornjeg reda α, tada su

$$\{l_1, l_2, \ldots, l_m\} \text{ i } \{l_1', l_2', \ldots, l_m'\} \tag{11}$$

netransverzalni blokovi u $\alpha\alpha^*$. Dakle, svi blokovi $\alpha\alpha^*$ su oblika (10) ili (11), to jest zavise samo od $\mathrm{dom}(\alpha)$ i $\ker(\alpha)$. Odatle odmah slijedi da je $\alpha\alpha^* = \beta\beta^*$, kao i da je $\alpha\alpha^*$ idempotent.

(ii) Dokazaćemo da je $\alpha\alpha^*\beta = \beta$, druga jednakost se pokazuje analogno. Ako su $i, j \in \bar{n}$, tada je (i, j') transverzalna grana u $\alpha\alpha^*\beta$ ako i samo ako je $i \in \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ i $j \in \mathrm{codom}(\beta)$, te ako postoji put od i do j'' u grafu proizvoda $\Gamma(\alpha\alpha^*, \beta)$. Zbog strukture $\alpha\alpha^*$ i jednakosti $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$, slijedi da je taj put mora biti oblika $i - i' - j''$. Prema tome, (i, j') je transverzalna grana u $\alpha\alpha^*\beta$ ako i samo ako je transverzalna grana u β.

Dalje dobijamo da važi $(i, j) \in \ker(\alpha\alpha^*\beta)$, ako i samo ako je $(i, j) \in ker(\alpha) = \ker(\beta)$, te $(i, j) \in \mathrm{coker}(\alpha\alpha^*\beta)$ ako i samo ako je $(i, j) \in ker(\beta)$. Odatle slijedi da je (i, j), odnosno (i', j'), netransverzalna grana u $\alpha\alpha^*\beta$ ako i samo ako je netransverzalna grana u β. Time smo pokazali da je $\alpha\alpha^*\beta = \beta$. $\square$

Pokazane osobine operacije $*$ možemo zapisati u vidu sljedećeg tvrđenja.

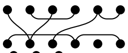
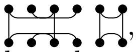
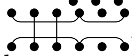
Tvrđenje 3.1. *Neka su* $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$*, tada važi*

(i) $(\alpha^*)^* = \alpha$*;*

(ii) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$*;*

(iii) $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$*.*

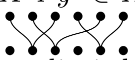
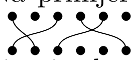
Da monoid $\mathcal{P}_n$ nije kompletno regularan monoid možemo vidjeti iz sljedećeg primjera.

Primjer 3.1. Neka je $\alpha =$  dijagram iz $\mathcal{P}_6$. Tada je $\alpha\alpha^* =$ , dok je $\alpha^*\alpha =$ . Dakle $\alpha\alpha^* \neq \alpha^*\alpha$, pa monoid $\mathcal{P}_n$ nije kompletno regularan u odnosu na unarnu operaciju $*$.

3.2 Potpolugrupe

U prvom poglavlju kao osnovne primjere polugrupa smo naveli neke polugrupe transformacija, kao što su polugrupa punih transformacija i simetrična inverzna polugrupa. Ovi monoidi se mogu prirodno predstaviti u obliku dijagrama iz $\mathcal{P}_X$. Preslikavanju $a \in \mathcal{T}_X$ dodijelimo dijagram $\alpha \in \mathcal{P}_X$ čiji su transverzalni blokovi oblika

$$\{y'\} \cup \{x \in X : a(x) = y\}$$

gdje je $y \in \mathrm{im}(a)$, a netransverzalni blokovi su skupovi $\{z'\}$, za $z \in X \backslash \mathrm{im}(a)$. Slično, parcijalnoj bijekciji $p \in \mathcal{I}_X$ dodjeljujemo dijagram π u kome elementi $x \in X$ i $y' \in X'$ čine jedan blok ako i samo ako je $p(x) = y$. Na primjer $\alpha =$  predstavlja jednu transformaciju iz $\mathcal{T}_6$, dok $\pi =$  predstavlja jednu parcijalnu bijekciju iz $\mathcal{I}_6$. Ovim smo definisali prirodne injekcije monoida $\mathcal{T}_X$ i $\mathcal{I}_X$ u dijagram monoid $\mathcal{P}_X$. Lako vidimo da su ove injekcije takođe homomorfizmi polugrupa, odnosno da dijagram monoid sadrži podmonoide $\mathfrak{T}_X$ i $\mathfrak{I}_X$ izomorfne redom sa $\mathcal{T}_X$ i $\mathcal{I}_X$.

U to se možemo se uvjeriti na primjeru skupa $\mathfrak{T}_n$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathfrak{T}_n$, tada dijagrami α i β nemaju netransverzalnih blokova, pa ni njihov proizvod $\alpha\beta$ nema netransverzalnih blokova. Dalje, pošto je $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) = \bar{n}$ slijedi da za svako $i \in \bar{n}$ postoji $k \in \bar{n}$ i put od i do k'' u grafu $\Gamma(\alpha, \beta)$. Prema tome, $\mathrm{dom}(\alpha\beta) = \bar{n}$. Dalje, pretpostavimo da je $j' \in [i']_{\alpha\beta}$ za neke $i, j \in \bar{n}$. Odatle slijedi da u grafu $\Gamma(\alpha, \beta)$ postoji čvor k' koji je povezan sa i'' i j''. Međutim, to znači da je u β k povezan sa i' i j', što zbog definicije $\mathfrak{T}_n$ daje $i = j$. Prema tome, važi i $\mathrm{coker}(\alpha\beta) = \Delta$, pa je element $\alpha\beta$ takođe dijagram transformacije iz $\mathcal{T}_n$ i skup $\mathfrak{T}_n$ je zatvoren za množenje dijagrama.

Podmonoide $\mathfrak{T}_n$ i $\mathfrak{I}_n$ možemo opisati i na sljedeći način:

$$\mathfrak{T}_n = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \mathrm{dom}(\alpha) = \bar{n}, \mathrm{coker}(\alpha) = \Delta\},$$
$$\mathfrak{I}_n = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \ker(\alpha) = \mathrm{coker}(\alpha) = \Delta\}.$$

Znamo da je simetrična grupa S_n podgrupa monoida $\mathcal{T}_n$ i $\mathcal{I}_n$, pa postoji podgrupa monoida $\mathcal{P}_n$ koja je izomorfna $\mathcal{S}_n$. Tu podgrupu možemo opisati na sljedeći način:

$$\mathfrak{S}_n = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{codom}(\alpha) = \bar{n}, \ker(\alpha) = \mathrm{coker}(\alpha) = \Delta\}.$$

Za proizvoljan podskup $A \subseteq \bar{n}$ ćemo sa id_A označavati parcijalnu bijekciju koja identički slika skup A, odnosno dijagram

$$\mathrm{id}_A = \left[\begin{array}{c|c} x & y \\ \cline{2-2} x & y \end{array}\right]_{x \in A, y \in \bar{n} \setminus A}.$$

Jedinici simetrične grupe, odgovara upravo dijagram $1_{\mathcal{P}_n} = \mathrm{id}_{\bar{n}}$. U budućem radu ćemo poistovjećivati navedene podmonoide i podgrupe $\mathcal{P}_n$ sa njihovim izomorfnim slikama.

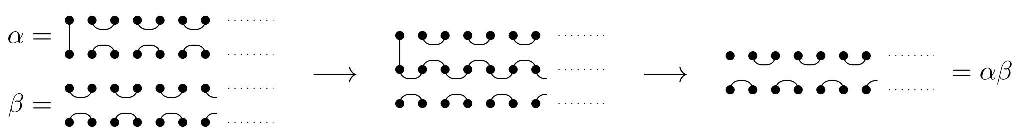
Dual simetričnog inverznog monoida $\mathcal{I}_n^*$ je inverzna polugrupa svih bijekcija između particija skupa $\bar{n}$. Ovaj monoid se takođe može potopiti u dijagram monoid $\mathcal{P}_n$, njegova homomorfna slika je

$$\mathfrak{I}_n^* = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{codom}(\alpha) = \bar{n}\}.$$

Pored navedenih podmonoida $\mathcal{P}_n$, važno je pomenuti još Brauerov monoid $\mathcal{B}_n$ i Džonsov monoid $\mathcal{J}_n$, kao i njihove parcijalne oblike, parcijalni Brauerov monoid $\mathcal{PB}_n$ i Mockinov monoid $\mathcal{M}_n$. Za proizvoljan skup X definišemo skupove $\mathcal{PB}_X$ i $\mathcal{B}_X$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_X &= \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \text{ svaki blok } \alpha \text{ je veličine } 2\}, \\ \mathfrak{PB}_X &= \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \text{ svaki blok } \alpha \text{ je veličine najviše } 2\}. \end{aligned}$$

Skup $\mathfrak{PB}_X$ je tada izomorfan $\mathcal{PB}_X$, parcijalnom Brauerovom monoidu. Međutim, skup $\mathfrak{B}_X$ je izomorfan Brauerovom monoidu $\mathcal{B}_X$ samo u slučaju kada je skup X konačan. Na Slici 2 je dat primjer množenja dijagrama α i β iz $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$, gdje vidimo da proizvod $\alpha\beta$ pripada $\mathcal{PB}_{\mathbb{N}}$, ali ne pripada $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$.



Slika 2: Dijagrami $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ (lijevo), graf proizvoda $\Gamma(\alpha, \beta)$ (sredina), i proizvod $\alpha\beta \notin \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$.

Kažemo da je dijagram iz $\mathcal{P}_X$ planaran ako se njegov graf predstavnik može nacrtati planarno u okviru pravougaonika određenog čvorovima $X \cup X'$. Mockinov monoid $\mathcal{M}_X$ i Džonsov monoid $\mathcal{J}_X$ definišemo kao skupove svih planarnih dijagrama iz $\mathcal{PB}_X$, odnosno $\mathcal{B}_X$.

Primijetimo da su podomonoidi $\mathcal{I}_n$, $\mathcal{I}_n^*$, $\mathcal{B}_n$ i $\mathcal{J}_n$ zatvoreni u odnosu na operaciju $*$, dok monoid $\mathcal{T}_n$ nije. Monoidi $\mathcal{I}_n$ i $\mathcal{I}_n^*$ sa operacijom $*$ čine inverzne polugrupe. Takođe, za proizvoljnu permutaciju $\pi \in \mathcal{S}_n$ je π^* upravo grupovni inverz elementa π.

3.3 Grinove relacije

Pojmovi domena i kernela dijagrama, te kodomena i kokernela će nam pomoći da opišemo Grinove relacije na dijagram monoidima $\mathcal{P}_n$. Sljedeća teorema je dokazana u [13], gdje su umjesto pojmova (ko)domena i (ko)kernela korišteni odgovarajući uzorci.

Teorema 3.1. *([13], Teorema 3.1) Neka su α i β iz $\mathcal{P}_n$, tada važe sljedeći uslovi*

(i) $\alpha\mathcal{R}\beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$ *i* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$*;*

(ii) $\alpha\mathcal{L}\beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{codom}(\alpha) = \operatorname{codom}(\beta)$ *i* $\operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\beta)$*;*

(iii) $\alpha\mathcal{D}\beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(\alpha) = \operatorname{rang}(\beta)$*;*

(iv) $\mathcal{D} = \mathcal{J}$*;*

(v) $\beta \in \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$ *ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(\beta) \leq \operatorname{rang}(\alpha)$*;*

(vi) $\alpha\mathcal{H}\beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$*,* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ *i* $\operatorname{codom}(\alpha) = \operatorname{codom}(\beta)$*,* $\operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\beta)$*.*

Dokaz.

(i) Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ elementi iz iste $\mathcal{R}$-klase. Tada prema Tvrđenju 1.9 postoje $\gamma, \delta \in \mathcal{P}_n$ takvi da je $\alpha = \beta\gamma$ i $\beta = \alpha\delta$. Iz osobine (6) slijedi

$$\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta\gamma) \subseteq \operatorname{dom}(\beta),$$
$$\operatorname{dom}(\beta) = \operatorname{dom}(\alpha\delta) \subseteq \operatorname{dom}(\alpha),$$

to jest $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$. Slično, iz (9) slijedi da je $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$. Pretpostavimo sada da je za $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ ispunjen uslov $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$ i $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$. Iz leme 3.1 slijedi da je

$$\alpha\alpha^*\beta = \beta \text{ i } \beta\beta^*\alpha = \alpha,$$

pa je $\alpha\mathcal{P}_n = \beta\mathcal{P}_n$, to jest $\alpha\mathcal{R}\beta$.

(ii) Dualno dokazu tvrđenja (i).

(iii) Pretpostavimo da je $\alpha\mathcal{D}\beta$, tada postoji $\gamma \in \mathcal{P}_n$ tako da je $\alpha\mathcal{R}\gamma$ i $\gamma\mathcal{L}\beta$. Iz (i) i (ii) slijedi da je $\operatorname{rang}(\alpha) = \operatorname{rang}(\gamma) = \operatorname{rang}(\beta)$.
S druge strane, neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ takvi da je $\operatorname{rang}(\alpha) = \operatorname{rang}(\beta) = r$. Neka je $\gamma \in \mathcal{P}_n$ tako da je $\operatorname{dom}(\gamma) = \operatorname{dom}(\alpha)$, $\ker(\gamma) = \ker(\alpha)$ i $\operatorname{codom}(\gamma) = \operatorname{codom}(\beta)$, $\operatorname{coker}(\gamma) = \operatorname{coker}(\beta)$ (znamo da postoji $r!$ takvih dijagrama). Onda je $\alpha\mathcal{R}\gamma\mathcal{L}\beta$, to jest $\alpha\mathcal{D}\beta$.

(iv) Znamo da je uvijek ispunjeno $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$, pa pretpostavimo da je $\alpha\mathcal{J}\beta$ za $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$. Tada postoje $\gamma, \delta, \epsilon, \phi \in \mathcal{P}_n$ tako da je $\alpha = \gamma\beta\delta$ i $\beta = \epsilon\alpha\phi$. Odatle slijedi

$$\operatorname{rang}(\alpha) = \operatorname{rang}(\gamma\beta\delta) \leq \operatorname{rang}(\beta\delta) \leq \operatorname{rang}(\beta),$$

i slično $\mathrm{rang}(\beta) \leq \mathrm{rang}(\alpha)$. Prema tome, $\mathrm{rang}(\alpha) = \mathrm{rang}(\beta)$, pa je prema (iii) ispunjeno $\alpha\mathcal{D}\beta$. Konačno, dobijamo $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. Pošto je polugrupa $\mathcal{P}_n$ konačna, a u konačnim polugrupa se relacije $\mathcal{J}$ i $\mathcal{D}$ poklapaju ([24], Teorema 2.1.4), tvrđenje smo mogli izvesti i direktno.

(v) Neka je $\beta \in \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$ za neko $\alpha \in \mathcal{P}_n$. Tada postoje $\gamma, \delta \in \mathcal{P}_n$ tako da je $\beta = \gamma\alpha\delta$, pa kao u dijelu (iv) dobijamo da je $\mathrm{rang}(\beta) \leq \mathrm{rang}(\alpha)$. Za $0 \leq k \leq n$ označimo sa id_k dijagram id_A, gdje je $A = \{1, \dots, k\}$. Primijetimo da je id_k dijagram koji odgovara parcijalnoj bijekciji $\mathrm{id}_{\{1,\dots,k\}}$, te da važi $\mathrm{id}_k \mathrm{id}_l = \mathrm{id}_l \mathrm{id}_k = \mathrm{id}_l$ za sve $0 \leq l \leq k \leq n$. Očigledno je id_k idempotent ranga k. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ takvi da je $l = \mathrm{rang}(\beta) \leq \mathrm{rang}(\alpha) = k$. Tada je $\alpha\mathcal{D}\,\mathrm{id}_k$ i $\beta\mathcal{D}\,\mathrm{id}_l$, pa iz (iv) slijedi $\alpha\mathcal{J}\,\mathrm{id}_k$ i $\beta\mathcal{J}\,\mathrm{id}_l$. Pošto je $l \leq k$, važi $\mathrm{id}_k \mathrm{id}_l = \mathrm{id}_l \mathrm{id}_k = \mathrm{id}_l$, iz čega slijedi $\mathcal{P}_n \mathrm{id}_l \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_n \mathrm{id}_k \mathcal{P}_n$. Odatle dobijamo

$$\mathcal{P}_n\beta\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \mathrm{id}_l \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_n \mathrm{id}_k \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n,$$

pa važi $\beta \in \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$.

(vi) Slijedi direktno iz definicije relacije $\mathcal{H}$ te (i) i (ii). □

Prema poslednjem tvrđenju, $\mathcal{J}$-klase u $\mathcal{P}_n$ čine lanac

$$J_0(\mathcal{P}_n) < J_1(\mathcal{P}_n) < \ldots < J_n(\mathcal{P}_n),$$

gdje je $J_k(\mathcal{P}_n) = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \mathrm{rang}(\alpha) = k\}$. Koristeći dobijene rezultate možemo sada opisati sve glavne ideale u $\mathcal{P}_n$.

Tvrđenje 3.2. *Svi glavni ideali u $\mathcal{P}_n$ su oblika*

$$I_k(\mathcal{P}_n) = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \mathrm{rang}(\alpha) \leq k\},$$

za neko $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Dokaz. Primijetimo da je skup oblika $I_k(\mathcal{P}_n)$ unija $\mathcal{J}$-klasa $J_0, J_1, \dots, J_k$. Neka je $y \in I_k(\mathcal{P}_n)$ i $z \in \mathcal{P}_n$, tada je $\mathrm{rang}(yz) \leq \mathrm{rang}(y) \leq k$, pa $yz \in I_k(\mathcal{P}_n)$. Slično dobijamo da $zy \in I_k(\mathcal{P}_n)$, pa $I_k(\mathcal{P}_n)$ jeste ideal u $\mathcal{P}_n$.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$ glavni ideal u $\mathcal{P}_n$, i neka je $k = \mathrm{rang}(\alpha)$. Tada iz prethodnog tvrđenja slijedi da za sve $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ i sve $\beta \in J_i$ važi $\beta \in \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$. Dakle, ispunjeno je

$$I_k(\mathcal{P}_n) = J_0 \cup J_1 \cup \ldots \cup J_k \subseteq \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n.$$

Pošto je $\mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$ najmanji ideal koji sadrži element α, slijedi da $I_k(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$, što smo i trebali pokazati. □

Ovime smo zapravo opisali sve ideale monoida $\mathcal{P}_n$, to jest svi ideali u $\mathcal{P}_n$ su glavni. Zaista, neka je I proizvoljan pravi ideal u $\mathcal{P}_n$, i neka je α element najvećeg ranga u I, $\mathrm{rang}(\alpha) = k$. Očigledno je $\mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n \subseteq I$ i $I \subseteq I_k(\mathcal{P}_n)$. Iz gornjeg tvrđenja slijedi da je $I_k(\mathcal{P}_n) = \mathcal{P}_n\alpha\mathcal{P}_n$, pa je $I = I_k(\mathcal{P}_n)$.

Okrenimo se sada posmatranju $\mathcal{H}$-klasa ekvivalencij u $\mathcal{P}_n$. Neka je $\alpha \in \mathcal{P}_n$ dijagram ranga r. Vidjeli smo da postoji tačno $r!$ dijagrama $\beta \in \mathcal{P}_n$ takvih da je $\mathrm{dom}(\beta) = \mathrm{dom}(\alpha)$, $\mathrm{codom}(\beta) = \mathrm{codom}(\alpha)$ i $\ker(\beta) = \ker(\alpha)$, $\mathrm{coker}(\beta) = \mathrm{coker}(\alpha)$. Iz Tvrđenja 3.1 slijedi da ti elementi upravo čine $\mathcal{H}$-klasu elementa α. Onda iz Grinovih lema slijedi da su sve $\mathcal{H}$-klasu sadržane u $\mathcal{J}$-klasi $J_r(\mathcal{P}_n)$ kardinalnosti $r!$.

Za $0 \leq r \leq n$ definišimo skup

$$\mathfrak{S}_r = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{codom}(\alpha) = \bar{r}, \ker(\alpha) = \mathrm{coker}(\alpha) = \Delta\},$$

gdje pod $\bar{0}$ podrazumijevamo prazan skup. Prema gore izloženom, ovaj skup je jedna $\mathcal{H}$-klasa u $\mathcal{P}_n$, koja sadrži idempotent id_r. Lako vidimo da je $\mathfrak{S}_r$ izomorfna kopija simetrične grupe $\mathcal{S}_r$. Iz Teoreme 1.2 slijedi da je za sve idempotente $\alpha \in \mathcal{P}_n$ ranga jednakog r ispunjeno $H_\alpha \simeq H_{\mathrm{id}_r} \simeq \mathfrak{S}_r$. Prema tome, sve maksimalne grupe u $\mathcal{P}_n$ su izomorfne simetričnoj grupi $\mathcal{S}_r$ za neko $0 \leq r \leq n$.

3.4 Rang i generatorni skupovi

U ovom dijelu rada ćemo odrediti rang monoida $\mathcal{P}_n$, te predstaviti neke (minimalne) generatorne skupove za $\mathcal{P}_n$. Dokazi sljedećih tvrđenja se mogu naći u [6], u kome je predstavljeno nekoliko prezentacija dijagram monoida, te određen rang monoida $\mathcal{P}_n$.

Prezentacije izvedene u [6] koriste faktorizaciju polugrupe $\mathcal{P}_n$ kao proizvoda polugrupa $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{I}_n$ i $\mathcal{R}_n$, gdje su $\mathcal{L}_n$ i $\mathcal{R}_n$ potpolugrupe $\mathcal{T}_n$ koje ćemo definisati u nastavku. Kao i u dosadašnjem radu, nećemo praviti razliku između transformacija iz $\mathcal{T}_n$ i dijagrama iz $\mathfrak{T}_n$ koji im odgovaraju. Za dijagram $\alpha \in \mathcal{T}_n$ ranga r označimo sa $K_1, \ldots, K_r$ klase relacije $\ker(\alpha)$. Dalje, definišimo skup $\mathrm{Mins}(\alpha) = \{\min(K_1), \ldots, \min(K_r)\}$. Za transformaciju α kažemo da čuva poredak blokova ukoliko važi

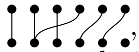
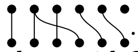
$$i < j \Rightarrow \alpha(i) < \alpha(j), \text{ za sve } i, j \in \mathrm{Mins}(\alpha).$$

Skup svih transformacija $\alpha \in \mathcal{T}_n$ koje čuvaju poredak blokova i čiji je kodomen jednak $\bar{k}$, za neko $k \in \bar{n}$, označavaćemo sa $\mathcal{L}_n$. Sliku skupa $\mathcal{L}_n$ pri involuciji $*$ na polugrupi $\mathcal{P}_n$ ćemo označiti sa $\mathcal{R}_n$, to jest $\mathcal{R}_n = \{\alpha^* : \alpha \in \mathcal{L}_n\}$. Za $1 \leq i < j \leq n$ definišemo element $\lambda_{ij} \in \mathcal{T}_n$ sa

$$\lambda_{ij}(x) = \begin{cases} x & x \leq j, \\ i & x = j, \\ x - 1 & j < x \leq n, \end{cases}$$

i element $\rho_{ij} = \lambda_{ij}^* \in \mathcal{T}_n^*$. Dijagrame λ_{ij} i ρ_{ij} možemo prestaviti u blok zapisu na sljedeći način:

$$\lambda_{ij} = \left[\begin{array}{c|c|c} x & j & y \\ x & i & y-1 \end{array}\right]_{1 \leq x \leq j, j+1 \leq y \leq n}, \rho_{ij} = \left[\begin{array}{c|c|c} x & i & y-1 \\ x & j & y \end{array}\right]_{1 \leq x \leq j, j+1 \leq y \leq n}.$$

Na primjer, u $\mathcal{P}_6$ je $\lambda_{24} =$ , dok je $\rho_{24} = \lambda_{24}^* =$ .

U [10] (Lema 1) je pokazano da je skup $\mathcal{L}_n$ zaista podmonoid $\mathcal{T}_n$, te da je generisan skupom $\Lambda = \{\lambda_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Odatle dualno dobijamo da je $\mathcal{R}_n$ podmonoid monoida $\mathcal{T}_n^* = \{\alpha^* : \alpha \in \mathcal{T}_n\}$, i da je generisan skupom $P = \{\rho_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Sljedeće tvrđenje opisuje pomenutu faktorizaciju monoida $\mathcal{P}_n$ kao proizvoda monoida $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{I}_n$ i $\mathcal{R}_n$.

Tvrđenje 3.3. *([6], Tvrđenje 9) Neka je $\alpha \in \mathcal{P}_n$, tada postoje jedinstveni elementi $\beta \in \mathcal{L}_n$, $\gamma \in \mathcal{I}_n$ i $\delta \in \mathcal{R}_n$ takvi da je $\alpha = \beta\gamma\delta$ i $\mathrm{dom}(\gamma) \subseteq \mathrm{codom}(\beta)$, $\mathrm{codom}(\gamma) \subseteq \mathrm{dom}(\delta)$.*

Dokaz. Primijetimo da je svaki dijagram iz $\mathcal{L}_n$ i $\mathcal{R}_n$ jedinstveno određen svojim kernelom, odnosno kokernelom. Prema tome, postoje jedinstveni $\beta \in \mathcal{L}_n$ i $\delta \in \mathcal{R}_n$ takvi da je

$$\ker(\beta) = \ker(\alpha) \text{ i } \operatorname{coker}(\delta) = \operatorname{coker}(\alpha).$$

Neka su kernel klase u α redom $K_1, K_2, \ldots, K_a$, pri čemu je $\min(K_1) < \min(K_2) < \ldots < \min(K_a)$. Slično, neka su $L_1, L_2, \ldots, L_b$ kokernel klase u α, gdje je $\min(L_1) < \min(L_2) < \ldots < \min(L_b)$. Definišimo dijagram $\gamma \in \mathcal{I}_n$ kao

$$\gamma(i) = \begin{cases} j & \text{ako } i \in \bar{a} \text{ i } K_i \cup L_j \text{ je blok u } \alpha \\ - & \text{inače} \end{cases}$$

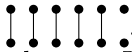
Iz konstrukcije dijagrama β, γ, δ lako vidimo da je ispunjeno $\alpha = \beta\gamma\delta$, kao i da je $\mathrm{dom}(\gamma) \subseteq \mathrm{codom}(\beta)$ i $\mathrm{codom}(\gamma) \subseteq \mathrm{dom}(\beta)$. Pretpostavimo dalje da je ispunjeno $\alpha = \beta'\gamma'\delta'$, $\mathrm{dom}(\gamma') \subseteq \mathrm{codom}(\beta')$ i $\mathrm{codom}(\gamma') \subseteq \mathrm{dom}(\delta')$ i za dijagrame $\beta' \in \mathcal{L}_n$, $\gamma' \in \mathcal{I}_n$ i $\delta' \in \mathcal{R}_n$. Odatle slijedi da je $\ker(\beta') \subseteq \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ kao i $\operatorname{coker}(\delta') \subseteq \operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\delta)$. Pokazaćemo da je važi jednakost $\ker(\beta') = \ker(\beta)$. Pretpostavimo suprotno, da je postoji $(i, j) \in \ker(\beta) \setminus \ker(\beta')$. Tada je $(i, j) \in \ker(\alpha)$, pa postoji put od i do j u grafu proizvoda $\Gamma(\beta, \gamma, \delta)$. Neka je $k = \beta'(i)$, $l = \beta'(j)$, zbog gornje pretpostavke važi $k \neq l$. Dalje, iz $\mathrm{dom}(\gamma') \subseteq \mathrm{codom}(\beta')$ i $(i, j) \in \ker(\alpha) = \ker(\beta'\gamma'\delta')$ slijedi da $k, l \in \mathrm{dom}(\gamma')$. Neka je dalje $p = \gamma(k)$ i $q = \gamma(l)$, znamo da je $p, q \in \mathrm{codom}(\gamma') \subseteq \mathrm{dom}(\delta')$. Kako je $\gamma' \in \mathcal{I}_n$ važi $p \neq q$, pa iz $\delta' \in \mathcal{R}_n$ slijedi $(p, q) \notin \operatorname{coker}(\delta')$. Iz toga slijedi da ne postoji put $i - j$ u grafu proizvoda $\Gamma(\beta', \gamma', \delta')$, što je kontradikcija sa pretpostavkom $(i, j) \in \ker(\alpha)$. Slično pokazujemo da je $\operatorname{coker}(\delta') = \operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\delta)$.
Prema prvoj napomeni, odatle slijedi da je $\beta' = \beta$ i $\delta' = \delta$, pa je ispunjeno

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\gamma') &\subseteq \mathrm{codom}(\beta) = \bar{a} \\ \mathrm{codom}(\gamma') &\subseteq \mathrm{dom}(\delta) = \bar{b}. \end{aligned}$$

Odatle dobijamo da je $K_i \cup L_j$ blok u α ako i samo ako je $i \in \mathrm{dom}(\gamma')$ i $\gamma'(i) = j$, to jest $\gamma' = \gamma$. $\square$

Sa s_i ćemo označavati transpoziciju $(i, i+1) \in \mathcal{S}_n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Poznato je ([39]) da je $\Sigma = \{s_i : 1 \leq i \leq n-1\}$ jedan generatorni skup simetrične grupe $\mathcal{S}_n$. Označimo sa $\epsilon_n \in \mathcal{I}_n$ parcijalnu bijekciju definisanu sa

$$\epsilon(x) = \begin{cases} x & \text{ako je } 1 \leq x \leq n-1, \\ - & \text{ako je } x = n \end{cases}$$

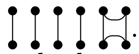
Za $n = 6$ dijagram ove parcijalne bijekcije je $\epsilon_6 =$ . U [41] je pokazano da je simetrični inverzni monoid $\mathcal{I}_n$ generisan skupom $I = \Sigma \cup \{\epsilon_n\}$. Iz Tvrđenja 3.3, i navedenih generatornih skupova za monoide $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{I}_n$ i $\mathcal{R}_n$, direktno slijedi sljedeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.4. *Dijagram monoid $\mathcal{P}_n$ je generisan skupom*

$$\Pi_1 = \{\lambda_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{s_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\epsilon_n\} \cup \{\rho_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

U [6] (Teorema 17) je izvedena i prezentacija dijagram monoida koja odgovora ovom generatornom skupu, ali je zbog ograničenog prostora za izlaganje nećemo navoditi. Skup Π_1 sadrži $\binom{n}{2} + (n-1) + 1 + \binom{n}{2} = n^2$ generatora, što je, kao što ćemo vidjeti, mnogo više od ranga monoida $\mathcal{P}_n$. Ovaj generatorni skup je ipak značajan, jer do njega dolazimo na sasvim prirodan način. Takođe, pomoću Π_1 možemo konstruisati jedan minimalan generatorni skup dijagram monoida. Definišimo dijagram $t = \lambda_{n-1,n}\rho_{n-1,n}$ odnosno, u blok zapisu

$$t = \left[\begin{array}{c|c} x & n-1, n-2 \\ x & n-1, n-2 \end{array} \right]_{1 \leq x < n-2}.$$

Na primjer, u $\mathcal{P}_6$ je $t =$ . Pokazaćemo da se svi dijagrami iz $\Lambda \cup P$ mogu izraziti kao proizvodi elemenata skupa $\Pi_2 = \Sigma \cup \{\epsilon_n, t\}$.

Uvedimo oznaku c_i za permutaciju $s_i \ldots s_{n-1}$, za $1 \leq i \leq n-1$. Direktnim množenjem dobijamo da permutaciji c_i odgovara blok zapis

$$c_i = \left[\begin{array}{c|c|c} x & i & y \\ x & n & y-1 \end{array} \right]_{1 \leq x < i, i < y \leq n}.$$

Definišimo parcijalnu bijekciju $\epsilon_i = c_i \epsilon_n c_i^{-1}$, za $1 \leq n-1$. Lako vidimo da je $\epsilon_i = \mathrm{id}_{\bar{n} \setminus \{i\}}$. Dalje, za $1 \leq i < j \leq n$ uvedimo oznaku d_{ij} za permutaciju $(s_j \ldots s_{n-1})(s_i \ldots s_{n-2})$. Direktnim množenjem dobijamo da je sa d_{ij} definisan dijagram

$$d_{ij} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} x & i & j & y & z \\ x & n-1 & n-2 & y-1 & z-2 \end{array} \right]_{1 \leq x < i, i < y < j, j < z \leq n}.$$

Za $1 \leq i < j \leq n$ neka je $\pi_{ij} = d_{ij} t d_{ij}^{-1}$. Pošto permutacija d_{ij} fiksira sve elemente $x \in \{1, \ldots, i-1\}$, slijedi da je $\{x, x'\}$ blok u π_{ij} za sve $x < i$. Dalje, za $i < y < j$ permutacija d_{ij} slika y na $y-1$, pa u grafu proizvoda $\Gamma(d_{ij}td_{ij}^{-1})$ postoji put $y-(y-1)'-(y-1)''-y'''$. Odatle slijedi da je $\{y,y'\}$ jedan blok u π_{ij}. Slično dobijamo da je $\{z,z'\}$ blok u π_{ij} za sve $j < z \leq n$. Konačno, lako vidimo da čvorovi i,j,i''',j''' i $(n-1)',n',(n-1)'',n''$ pripadaju jednoj komponenti povezanosti u grafu proizvoda $\Gamma(d_{ij}td_{ij}^{-1})$, odakle slijedi da je $\{i,j,i',j'\}$ jedan blok u π_{ij}. Dakle, blok zapis dijagrama π_{ij} je sljedeći

$$\pi_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} x & i,j \\ x & i,j \end{array}\right]_{x \in \bar{n} \setminus \{i,j\}}.$$

Dalje, dijagram $\pi_{ij}\epsilon_j$ je dobijen od π_{ij} podjelom bloka $\{i,j,i',j'\}$ u blokove $\{i,j,i'\}$ i $\{j'\}$. Tvrdimo da je $\lambda_{ij} = \pi_{ij}\epsilon_j c_j$. Očigledno je za sve $x \in \{1,\ldots,j-1\}$, $x \neq i$ skup $\{x,x'\}$ blok dijagrama $L_{ij} = \pi_{ij}\epsilon_j c_j$. Slično, za $j < y \leq n$ je $\{y,(y-1)'\}$ blok u L_{ij}. Konačno, vidimo da čvorovi i,j,i',i'' pripadaju jednoj komponenti povezanosti grafa proizvoda $\Gamma(\pi_{ij}\epsilon_j, c_j)$, pa je $\{i,j,i'\}$ jedan blok u L_{ij}. Time smo pokazali da je $L_{ij} = \lambda_{ij}$, odnosno $\lambda_{ij} \in \langle \Pi_2 \rangle$. Pošto je skup Π_2 zatvoren u odnosu na involuciju $*$, odatle slijedi $\rho_{ij} \in \langle \Pi_2 \rangle$, za sve $1 \leq i < j \leq n$. Iz Teoreme 3.4 slijedi da je

$$\mathcal{P}_n = \langle \Sigma \cup \{\epsilon_n, t\} \rangle.$$

Podsjetimo se da se simetrična grupa $\mathcal{S}_n$ može generisati sa samo dva generatora, s_{n-1} i $s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_1$. Odatle direktno slijedi sljedeće tvrđenje.

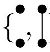
Tvrđenje 3.5. *Dijagram monoid $\mathcal{P}_n$ je generisan skupom*

$$\Pi = \{s_{n-1}, s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_1, \epsilon_n, t\}.$$

U [6] (Teorema 41) je navedena i odgovarajuća prezentacija koja sadrži samo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 5$ relacija. Takođe je pokazano da ne postoji generatorni skup monoida $\mathcal{P}_n$ sa manjim brojem generatora.

Tvrđenje 3.6. *([6] Propozicija 39)*

$$\operatorname{rang}(\mathcal{P}_n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 3 & n = 2, \\ 4 & n \geq 3. \end{cases}$$

Dokaz. Za $n = 1$ je $\mathcal{P}_n = \{$$\} = \{\epsilon_1, 1\} = \langle \epsilon_1 \rangle$, pa je rang $\mathcal{P}_1$ očigledno jednak 1. Dalje, za $n = 2$ je $s_{n-1} = s_1$, pa su generatori s_{n-1} i $s_{n-1}s_{n-2}\ldots s_1$ jednaki. Dakle, $\mathcal{P}_2$ je generisan sa tri elementa ϵ_n, t i s_1, pa je $\operatorname{rang}(\mathcal{P}_2) \leq 3$. Neka je sada $n \geq 3$, tada su svi generatori iz skupa Π različiti, pa je $\operatorname{rang}(\mathcal{P}_n) \leq 4$.

Ostaje da pokažemo da u obje nejednakosti zapravo vrijedi znak jednakosti. Neka je $n \geq 2$, i pretpostavimo da je $\mathcal{P}_n$ generisan skupom Ω. Pošto je $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ ideal u $\mathcal{P}_n$, skup Ω sadrži neprazan podskup Σ' koji generiše grupu

$\mathcal{S}_n$. Znamo da je $|\Sigma'| \geq 1$, to jest $|\Sigma'| \geq 2$ za sve $n \geq 3$. Neka je $\epsilon_n = \omega_1 \ldots \omega_k$ jedno predstavljanje dijagrama ϵ_n preko generatora iz Ω. Kako je $\mathrm{dom}(\epsilon_n) = \mathrm{codom}(\epsilon_n) = \overline{n-1}$, postoje $i, j \in \bar{k}$ takvi da je $\mathrm{dom}(\omega_i) \neq \bar{n}$ i $\mathrm{codom}(\omega_j) \neq \bar{n}$. Ako je $\omega_i \neq \omega_j$, tada zasigurno važi $|\Omega| \geq 3$, odnosno $|\Omega| \geq 4$ za $n \geq 3$. Neka je onda $\omega_i = \omega_j$. Primijetimo da monoid generisan sa $\Sigma' \cup \{\omega_i\}$ sadrži samo permutacije i dijagrame čiji je domen i kodomen pravi podskup $\bar{n}$. Prema tome, $\mathcal{P}_n \neq \langle \Sigma' \cup \{\omega_i\} \rangle$, pa $\Omega \setminus \Sigma'$ sadrži bar dva različita elementa. $\square$

4 Idempotenti dijagram monoida

Podsjetimo se da je dijagram $\alpha \in \mathcal{P}_n$ nesvodljiv ako je $\text{Ker}(\alpha) = \bar{n} \times \bar{n}$. Pokazaćemo da se pomoću nesvodljivih dijagrama mogu opisati svi idempotenti monoida $\mathcal{P}_n$. Koristeći tu karakterizaciju idempotenata $\mathcal{P}_n$ ćemo izvesti rekurentne veze za računanje ukupnog broja idempotenata u $\mathcal{P}_n$. Naredno poglavlje uglavnom prati rezulate dobijene u radu [5].

Lema 4.1. *([5] Lema 2) Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ proizvoljni dijagrami, neka su i, j elementi skupa $\bar{n}$. Tada je $(i,j) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$ ako i samo ako postoji put koji spaja i' i j' u grafu proizvoda $\Gamma(\alpha, \beta)$.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $(i,j) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$. Tada postoje $x_1, \ldots, x_t \in \bar{n}$ tako da je $(i, x_1) \in \text{coker}(\alpha)$, $(x_1, x_2) \in \text{ker}(\beta)$, $(x_2, x_3) \in \text{coker}(\alpha)$, i dalje analogno. Ovaj niz nam daje upravo put $i' - x_1 - x_2 - \ldots - x_t - j'$ između i' i j' u grafu $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Sada pretpostavimo da postoji put $x_0 = i' - x_1 - x_2 - \ldots - x_t = j'$ u grafu $\Gamma(\alpha, \beta)$. Pokazaćemo da $(i,j) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$ indukcijom po dužini puta, to jest po $t \in \mathbb{N}_0$. Za $t = 0$ je $i = j$, pa tvrđenje trivijalno slijedi. Ako je $t = 1$, tada postoji grana $i' - j'$ u grafu $\Gamma(\alpha, \beta)$. Opet trivijalno slijedi da je $(i,j) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$. Dalje, neka je $t \geq 2$, i pretpostavimo da je tvrđenje ispunjeno za sve $i, j \in \bar{n}$ povezane putem dužine s, za sve $1 \leq s \leq t-1$. Ako su $i, j \in \bar{n}$ povezani putem $x_0 = i' - x_1 - x_2 - \ldots - x_t = j'$ u grafu $\Gamma(\alpha, \beta)$ razmatramo dvije mogućnosti. Prvo, ako postoji indeks $s \in \{1, \ldots, t-1\}$ za koji je $x = y'$ za neko $y \in \bar{n}$, tada iz induktivne pretpostavke slijedi da je $(i, y) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$ i $(y, j) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$. Sada direktno dobijamo da je $(i,j) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$. S druge strane, ako ne postoji takav indeks s, onda za sve $s \in \{1, \ldots, t-1\}$ ispunjeno ili $x_i \in \bar{n}$ ili $x_i \in \bar{n}''$. Pretpostavimo da je $x_i \in \bar{n}$ za sve $s \in \{1, \ldots, t-1\}$, drugi slučaj se rješava analogno. Tada su $x_1, \ldots, x_{t-1}$ i $x_t = j'$ elementi transverzalnog bloka $[i]_\alpha$. Odatle dobijamo $(i,j) \in \text{coker}(\alpha)$, pa važi i $(i,j) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$. □

Lema 4.2. *([5] Lema 3) Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ proizvoljni dijagrami, i neka je $A \cup B'$ transverzalni blok dijagrama $\alpha\beta$. Tada je za sve $a \in A$, $b \in B$ ispunjeno*

$$c' \in [a]_\alpha \wedge d \in [b']_\beta \Rightarrow (c, d) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta).$$

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljne $c \in [a]_\alpha$ i $d \in [b']_\beta$. Pošto su a, b u istom bloku $\alpha\beta$, postoji put $a = x_0 - x_1 - \ldots - x_t = b''$ u grafu proizvoda $\Gamma(\alpha\beta)$. Neka je r najmanji indeks iz $\{0, 1, \ldots, t\}$ za koji je $x_r \notin \bar{n}$, a neka je s najveći indeks za koji je $x_s \notin \bar{n}''$. Tada je $x_r = y'$ i $x_s = z'$ za neke $y, z \in \bar{n}$, pri čemu važi $y' \in [a]_\alpha = [c']_\alpha$ i $z \in [b']_\beta = [d]_\beta$. Zbog toga po definiciji slijedi $(c, y) \in \text{coker}(\alpha)$ i $(z, d) \in \text{ker}(\beta)$. Pošto postoji put između y', z' u $\Gamma(\alpha, \beta)$, iz prethodne leme slijedi da je $(y, z) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$. Sada iz tranzitivnosti slijedi da $(c, d) \in \text{coker}(\alpha) \vee \text{ker}(\beta)$. □

Tvrđenje 4.1. *([5] Lema 4) Neka je $\alpha \in \mathcal{P}_n$ nesvodljiv dijagram. Tada je α idempotent ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(\alpha) \leq 1$.

Dokaz. Ako je $\operatorname{rang}(\alpha) = 0$ tada je α očigledno idempotent. Pretpostavimo onda da je $\operatorname{rang}(\alpha) = 1$, i neka je $A \cup B'$, gdje su $A \subseteq \bar{n}$ i $B' \subseteq \bar{n}'$, jedini transverzalni blok α. Pokazaćemo da je tada $\alpha^2 = \alpha$. Znamo da su svi netransverzalni blokovi α sadržani u netransverzalnim blokovima α^2. Zato je dovoljno da pokažemo da je $A \cup B'$ jedini transverzalni blok i u dijagramu α^2. Neka su $i \in A$, $j' \in B'$, tada u grafu proizvoda $\Gamma(\alpha, \alpha)$ postoje grane $i - j'$ i $i' - j''$. Kako je α nesvodljiv dijagram, važi

$$(i, j) \in \bar{n} \times \bar{n} = \operatorname{Ker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\alpha) \vee \ker(\alpha).$$

Iz Leme 4.1 slijedi da postoji put od i' do j' u grafu proizvoda $\Gamma(\alpha, \alpha)$. Slijedi da postoji put od i do j'' u $\Gamma(\alpha, \alpha)$, pa i i j' pripadaju istom bloku dijagrama α^2. Time smo pokazali da je $A \cup B'$ netransverzalni blok α^2, pa je $\alpha = \alpha^2$.

Pretpostavimo sada je $\operatorname{rang}(\alpha) \geq 2$, i pokažimo da α ne može biti idempotent. Neka su $A \cup B'$ i $C \cup D'$ različiti transverzalni blokovi u α, i neka su a, b, c, d elementi skupova A, B, C, D redom. Prema Lemi 4.1, iz nesvodljivosti α slijedi da postoji put od b' do d' u grafu $\Gamma(\alpha, \alpha)$. Zbog izbora elemenata a, b, c, d postoje i putevi od a do b' i od c do d' u $\Gamma(\alpha, \alpha)$. Spajanjem ovih puteva dobijamo da a i c pripadaju istom bloku α^2. Tačnije, $A \cup C$ je podskup jednog bloka dijagrama α, tako da ne može biti $\alpha^2 = \alpha$. $\square$

Sada ćemo pokazati da proizvoljan idempotent možemo predstaviti kao direktnu sumu nesvodljivih idempotenata. Da bismo definisali ove direktne sume dijagrama prvo trebamo definisati sljedeće pojmove. Neka je $\{X_i\}_{i \in I}$ particija skupa $\bar{n}$. Za ovu particiju definišemo skup dijagrama

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{P}_{X_i} = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \text{ svaki blok } \alpha \text{ je sadržan u } X_i \cup X_i' \text{ za neko } i \in I\}.$$

Lako vidimo da je ovaj skup potpolugrupa $\mathcal{P}_n$. Za dijagram $\alpha \in \bigoplus_{i \in I} \mathcal{P}_{X_i}$ definišemo dijagrame $\alpha_i \in \mathcal{P}_{X_i}$, za $i \in I$ na sljedeći način

$$\alpha_i = \alpha|_{X_i} = \{A \in \alpha : A \subseteq X_i \cup X_i'\}.$$

Dijagram α_i nazivamo restrikcija dijagrama α na skup X_i. Sada lako uočavamo da je polugrupa $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{P}_{X_i}$ izomorfna sa $\prod_{i \in I} \mathcal{P}_{X_i}$, pri čemu je izomorfizam upravo preslikavanje koje dijagramu α dodjeljuje $(\alpha_i)_{i \in I}$. Zbog toga α zapisujemo i kao direktnu sumu dijagrama α_i, $i \in I$, to jest $\alpha = \bigoplus_{i \in I} \alpha_i$.

Sada možemo dati potpunu karakterizaciju idempotenata dijagram monoida $\mathcal{P}_n$.

Teorema 4.1. *([5], Teorema 5) Neka je dijagram $\alpha \in \mathcal{P}_n$, čije su klase ekvivalencije relacije* $\operatorname{Ker}(\alpha)$ *skupovi $X_i, i \in I$. Tada je α idempotent ako i samo ako važe sljedeći uslovi* *(i)* $\alpha \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{P}_{X_i}$,

(ii) *sve restrikcije* $\alpha|_{X_i}$ *imaju rang* 1.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je α idempotent, i pretpostavimo suprotno, tačnije da prvi uslov nije ispunjen. Tada postoji blok $A \cup B'$ u α za koji ne postoji $i \in I$ tako da je $A \cup B' \subseteq X_i \cup X_i'$. Kako su skupovi X_i, $i \in I$ upravo klase ekvivalencije relacije $\ker(\alpha) \vee \operatorname{coker}(\alpha)$ slijedi da je $A \subseteq X_i$ i $B \subseteq X_j$, za neke različite indekse i i j iz I. Neka su $a \in A$, $b \in B$ proizvoljni elementi. Pošto je $\alpha^2 = \alpha$, slijedi da je $A \cup B'$ takođe blok dijagrama α^2. Odatle dobijamo da $b' \in [a]_\alpha$ i $a \in [b']_\alpha$. Prema Lemi 4.2 slijedi da je $(a, b) \in \operatorname{coker}(\alpha) \vee \ker(\alpha)$. Dakle, elementi a i b pripadaju istoj $\operatorname{Ker}(\alpha)$-klasi ekvivalencije, pa važi $X_i = X_j$, što je kontradikcija sa početnom pretpostavkom. Time smo dobili da uslov (i) mora biti ispunjen kad god je α idempotent. Odatle dalje slijedi da je $\alpha = \bigoplus_{i\in I} \alpha_{X_i}$. Sada iz $\alpha^2 = \alpha$ slijedi

$$\bigoplus_{i\in I} \alpha_i = \alpha = \alpha^2 = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i^2.$$

Iz poslednje jednakosti dobijamo $\alpha_i = \alpha_i^2$ za sve $i \in I$. Prema tome, α_i je nesvodljiv idempotent iz $\mathcal{P}_{X_i}$. Iz Tvrđenja 4.1 konačno dobijamo da je ispunjen i uslov (ii).

Sada pretpostavimo da su uslovi (i) i (ii) zadovoljeni, tada je $\alpha = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i$, $\alpha_i \in \mathcal{P}_{X_i}$ za $i \in I$. Prema 4.1, iz (ii) slijedi da je α_i idempotent, za sve $i \in I$. Odatle je dalje

$$\alpha^2 = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i^2 = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i = \alpha,$$

to jest α je idempotent. □

Vidjeli smo da je $\mathcal{P}_n$ $*$-regularna polugrupa, pa iz Teorema 1.5 i 1.6 dobijamo sljedeće osobine monoida $\mathcal{P}_n$.

Tvrđenje 4.2. *U dijagram monoidu* $\mathcal{P}_n$ *je ispunjeno*

(i) $P(\mathcal{P}_n) = \{\alpha\alpha^* : \alpha \in \mathcal{P}_n\}$,

(ii) $E(\mathcal{P}_n) = \{\alpha\beta : \alpha, \beta \in P(\mathcal{P}_n)\}$,

(iii) $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n) := \langle E(\mathcal{P}_n)\rangle = \langle P(\mathcal{P}_n)\rangle =: \mathbb{P}(\mathcal{P}_n)$.

Dakle, skup svih idempotenata monoida $\mathcal{P}_n$ možemo generisati preko skupa svih projekcija iz $\mathcal{P}_n$. Ovu osobinu ćemo često koristiti, jer projekcije u $\mathcal{P}_n$ možemo opisati na jednostavan način.

Lema 4.3. *([8], Lema 4) Dijagram* $\alpha \in \mathcal{P}_n$ *je projekcija ako i samo ako je oblika*

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \hline A_i & C_j \end{array}\right]$$

Dokaz. Po definiciji unarne operacije $*$, znamo da je $\alpha \in \mathcal{P}_n$ projekcija ako i samo ako je $\alpha \in E(\mathcal{P}_n)$ i važi

$$\left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \cline{2-2} B_i & D_k \end{array}\right] = \alpha = \alpha^* = \left[\begin{array}{c|c} B_i & D_k \\ \cline{2-2} A_i & C_j \end{array}\right]$$

Odatle slijedi da je $A_i = B_i$ za sve $i \in I$, te da je $J = K$ i $C_j = D_j$ za sve $j \in J$. □

4.1 Prebrojavanje idempotenata u $\mathcal{P}_n$

Za računanja broja idempotenata ćemo koristiti karakterizaciju idempotenata datu u Teoremi 4.1. Uvedimo prvo sljedeće oznake. Za $\Sigma \subseteq \mathcal{P}_n$ neka $C(\Sigma)$ označava skup svih nesvodljivih idempotenata u Σ, i neka je $c(\Sigma) = |C(\Sigma)|$. Broj idempotenata u nekom podskupu $\Sigma \subseteq \mathcal{P}_n$ ćemo označavati sa $e(\Sigma)$.

Podsjetimo se da je particija broja $n \in \mathbb{N}$ k-torka $\mu = (m_1, \ldots, m_k)$ prirodnih brojeva takvih da je $m_1 \geq \ldots \geq m_k$ i $m_1 + \ldots + m_k = n$. Oznaka $\mu \vdash n$ označavaće da je μ particija broja n. Za $\mu \vdash n$, koristićemo i zapis $\mu = (1^{\mu_1}, \ldots, n^{\mu_n})$, gdje je $\mu_i = |\{j \in \overline{k} : m_j = i\}|$. Prema dogovoru, $\mu = \emptyset$ je jedinstvena particija broja 0.

Za skup X particija je kolekcija $\mathcal{A} = \{X_i : i \in I\}$ po parovima disjunktnih nepraznih podskupova X, čija je unija jednaka skupu X. Particiju $\mathcal{A}$ skupa X ćemo označavati sa $\mathcal{A} \vDash X$. Neka je X konačan skup kardinalnosti n. Pretpostavimo da je $\mathcal{A} = \{X_1, \ldots, X_k\} \vDash \overline{n}$. Za $i \in \overline{n}$ definišimo skup

$$\mu_i(x) = \{j \in \overline{k} : |X_j| = i\}.$$

Tada je $\mu(\mathcal{A}) = (1^{\mu_1(\mathcal{A})}, \ldots, n^{\mu_n(\mathcal{A})})$ particija broja n. Za $\mu \vdash n$, $\mu = (1^{\mu_1}, \ldots, n^{\mu_n})$, neka je $\pi(\mu)$ broj particija $\mathcal{A}$ skupa $\overline{n}$ takvih da je $\mu(\mathcal{A}) = \mu$. Tada je

$$\begin{aligned}
\pi(\mu) =& \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{n-\mu_1+1}{1} \cdot \binom{n-\mu_1}{2} \\
& \cdot \binom{n-\mu_1-2}{2} \cdots \binom{n-\mu_1-2\mu_2+2}{2} \cdot \binom{n-\mu_1-2\mu_2}{3} \cdots \\
=& \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \ldots \frac{n-\mu_1+1}{1} \cdot \frac{(n-\mu_1)(n-\mu_1-1)}{2!} \cdot \\
& \frac{(n-\mu_1-2)(n-\mu_1-3)}{2!} \cdot \ldots \cdot \\
& \frac{(n-\mu_1-2\mu_2+2)(n-\mu_1-2\mu_2+1)}{2!} \cdot \\
& \frac{(n-\mu_1-2\mu_2)(n-\mu_1-2\mu_2-1)(n-\mu_1-2\mu_2-2)}{3!} \cdots \\
=& \frac{n!}{\Pi_{i=1}^{n} \mu_i!(i!)^{\mu_i}}.
\end{aligned}$$

Za dijagram $\alpha \in \mathcal{P}_n$ čije su Ker-klase $X_1, \ldots, X_k$ pisaćemo $\mu(\alpha) = \mu(\mathcal{A})$, gdje je $\mathcal{A} = \{X_1, \ldots, X_k\}$.

Teorema 4.2. *([5], Teorema 7) U dijagram monoidu $\mathcal{P}_n$ broj idempotenata je jednak*

$$e(\mathcal{P}_n) = n! \sum_{\mu \vdash n} \prod_{i=1}^{n} \frac{c(\mathcal{P}_i)^{\mu_i}}{\mu_i!(i!)^{\mu_i}}.$$

Takođe, važi sljedeća rekurentna veza

$$e(\mathcal{P}_0) = 1, e(\mathcal{P}_n) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} c(\mathcal{P}_m) e(\mathcal{P}_{n-m}),$$

za $n \geq 1$.

Dokaz. Fiksirajmo particiju $\mu = (m_1, \ldots, m_k) = (1^{\mu_1}, \ldots, n^{\mu_n})$ broja n. Odredićemo broj svih idempotentnih dijagrama $\alpha \in \mathcal{P}_n$ za koje je $\mu(\alpha) = \mu$. Prvo odaberimo Ker-klase $X_1, \ldots, X_k$, tako da je $|X_i| = m_i$ za sve $i \in \overline{k}$. To možemo uraditi na $\pi(\mu)$ načina. Prema Teoremi 4.1 znamo da se α može zapisati kao $\alpha = \bigoplus_{i=1}^{k} \alpha|_{X_i}$, pri čemu su $\alpha|_{X_i} \in \mathcal{P}_{X_i}$ nesvodljivi idempotenti. Za $1 \leq i \leq k$ postoji $c(\mathcal{P}_{X_i}) = c(\mathcal{P}_{m_i})$ takvih elemenata. Prema tome, postoji

$$c(\mathcal{P}_{m_i}) \ldots c(\mathcal{P}_{m_k}) = c(\mathcal{P}_1)^{\mu_1} \ldots c(\mathcal{P}_n)^{\mu_n}$$

idempotenata α čije su Ker-klase $X_1, \ldots, X_k$. Time dobijamo traženu formulu

$$\begin{aligned} e(\mathcal{P}_n) &= \sum_{\mu \vdash n} \pi(\mu) c(\mathcal{P}_1)^{\mu_1} \ldots c(\mathcal{P}_n)^{\mu_n} = \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i!(i!)^{\mu_i}} \prod_{i=1}^{n} c(\mathcal{P}_i)^{\mu_i} \\ &= n! \sum_{\mu \vdash n} \prod_{i=1}^{n} \frac{c(\mathcal{P}_i)^{\mu_i}}{\mu_i!(i!)^{\mu_i}}. \end{aligned}$$

Za dokaz rekurentne veze, prvo primijetimo da je $E(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_0 = \{\emptyset\}$, odakle slijedi $e(\mathcal{P}_0) = 1$. Neka je dalje $n \geq 1$ i $m \in \overline{n}$. Prebrojaćemo idempotente $\alpha \in \mathcal{P}_n$ takve da je Ker-klasa α koja sadrži 1 kardinalnosti m. Preostalih $m-1$ elemenata klase A možemo izabrati na $\binom{n-1}{m-1}$ načina. Restrikcija $\alpha|_A$ je nesvodljiv idempotent iz $\mathcal{P}_A$, a takvih ima $c(\mathcal{P}_A) = c(\mathcal{P}_m)$. Takođe znamo da je restrikcija $\alpha|_{\overline{n} \setminus A}$ idempotent iz $\mathcal{P}_{n-m}$, a takvih postoji $e(\mathcal{P}_{n-m})$. Odatle dobijamo rekurentnu formulu

$$e(\mathcal{P}_n) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} c(\mathcal{P}_m) e(\mathcal{P}_{n-m})$$

za sve $n \geq 1$. □

Ovim smo problem određivanja broja idempotenata u monoidu $\mathcal{P}_n$ sveli na određivanje broja nesvodljivih idempotenata u $\mathcal{P}_m$, $m \in \overline{n}$. Iz Tvrđenja 4.1 znamo da je rang svakog nesvodljivog idempotenta jednak 0 ili 1. Za $\Sigma \subseteq \mathcal{P}_n$ uvedimo oznake $c_0(\Sigma)$ i $c_1(\Sigma)$ za broj nesvodljivih idempotenata ranga 0, odnosno ranga 1, sadržanih u skupu Σ. Očigledno je ispunjeno $c(\Sigma) = c_0(\Sigma) + c_1(\Sigma)$. U sljedećim tvrđenjima daćemo rekurente veze za određivanje $c(\mathcal{K}_n)$, $c_0(\mathcal{K}_n)$ i $c_1(\mathcal{K}_n)$.

Neka $E(n)$ označava skup svih relacija ekvivalencije na skupu $\overline{n}$. Za $\sigma \in E(n)$ neka je $\overline{n}/\sigma$ particija skupa $\overline{n}$ određena ekvivencijom σ. Za $r, s \in \overline{n}$ definišimo skupove

$$E(n,r) = \{\epsilon \in E(n) : |\overline{n}/\epsilon| = r\}$$
$$E(n,r,s) = \{(\epsilon,\eta) \in E(n,r) \times E(n,s) : \epsilon \vee \eta = \overline{n} \times \overline{n}\},$$

i uvedimo oznaku $e(n,r,s) = |E(n,r,s)|$.

Tvrđenje 4.3. *([5], Tvrđenje 13) Za sve $n \geq 1$ je ispunjeno*

$$c_0(\mathcal{P}_n) = \sum_{r,s\in\overline{n}} e(n,r,s), c_1(\mathcal{P}_n) = \sum_{r,s\in\overline{n}} rs \cdot e(n,r,s),$$
$$c(\mathcal{P}_n) = \sum_{r,s\in\overline{n}} (1+rs)e(n,r,s).$$

Dokaz. Neka su $r, s \in \overline{n}$, i neka je $(\epsilon,\eta) \in E(n,r,s)$. Odredimo broj nesvodljivih idempotenata $\alpha \in \mathcal{P}_n$ za koje je $\ker(\alpha) = \epsilon$ i $\mathrm{coker}(\alpha) = \eta$. Prvo pretpostavimo da je $\mathrm{rang}(\alpha) = 0$, tada je dijagram α jedinstveno određen svojim kernelom i kokernelom. Odatle slijedi da je $c_0(\mathcal{P}_n) = \sum_{r,s\in\overline{n}} e(n,r,s)$.

Pretpostavimo dalje da je $\mathrm{rang}(\alpha) = 1$, tada je dijagram α određen sa $\ker(\alpha) = \epsilon$ i $\mathrm{coker}(\alpha) = \eta$, te po jednom klasom relacija ϵ i η, čija unija čini jedinstven transverzalni blok. Postoji rs takvih dijagrama, pa je $c_1(\mathcal{P}_n) = \sum_{r,s\in\overline{n}} rs \cdot e(n,r,s)$. Sabiranjem izvedenih rezultata dobijamo

$$c(\mathcal{P}_n) = \sum_{r,s\in\overline{n}} (1+rs)e(n,r,s).$$

□

U narednom tvrđenju ćemo dati rekurentne formule za računanje $e(n,r,s)$. Prije navođenja tih rezultata podsjetimo se definicije Stirlingovih brojeva druge vrste. Neka je X skup kardinalnosti $n \in \mathbb{N}$, i $k \in \overline{n}$. Sa $S(n,k)$ označavamo broj načina da podijelimo skup X u k međusobno disjunktnih nepraznih skupova. Primijetimo da važi $S(n,r) = |E(n,r)|$.

Tvrđenje 4.4. *([5], Tvrđenje 15) Niz brojeva* $e(n, r, s) = |E(n, r, s)|$ *zadovoljava rekurentnu vezu*

$$
\begin{aligned}
&e(n, r, 1) = S(n, r),\\
&e(n, 1, s) = S(n, s),\\
&e(n, r, s) = s \cdot e(n-1, r-1, s) + r \cdot e(n-1, r, s-1) + rs \cdot e(n-1, r, s) +\\
&\sum_{m=1}^{n-2} \binom{n-2}{m} \sum_{a=1}^{r-1} \sum_{b=1}^{s-1} (a(s-b) + b(r-a)) e(m, a, b) e(n-m-1, r-a, s-b)
\end{aligned}
$$

za sve $r, s \geq 2$.

Dokaz. Neka je $r = 1$, tada je $E(n, r) = E(n, 1) = \{\epsilon \in E(n) : |\overline{n}/\epsilon| = 1\} = \{\overline{n} \times \overline{n}\}$, pa je $|E(n, 1, s)| = |(E(n, s)| = S(n, s)$. Analogno dobijamo da je $e(n, r, 1) = S(n, r)$. Pretpostavimo dalje da je $r, s \geq 2$. U nastavku dokaza označavaćemo sa $\epsilon_{ij} \in E(n)$ relaciju ekvivalencije $\Delta \cup \{(i, j), (j, i)\}$. Primijetimo da ako je $\epsilon \in E(n, r)$ tada $\epsilon \vee \epsilon_{ij}$ ima bar $r-1$ klasa ekvivalencije. Neka je $(\epsilon, \eta) \in E(n, r, s)$. Posmatraćemo nekoliko slučajeva.

(i) Pretpostavimo prvo da je $\{n\}$ jedna klasa relacije ϵ. Definišimo

$$\epsilon' = \epsilon \cap (\overline{n-1} \times \overline{n-1}) \text{ i } \eta' = \eta \cap (\overline{n-1} \times \overline{n-1}),$$

tada je $\epsilon' \in E(n-1, r-1)$. Ako pretpostavimo da je $\{n\}$ jedna η-klasa, tada je $\{n\}$ i klasa relacije $\epsilon \vee \eta$, što je nemoguće pošto je $\epsilon \vee \eta = \overline{n} \times \overline{n}$. Slijedi da je $\eta' \in E(n-1, s)$.

Dokazaćemo da je $\epsilon' \vee \eta' = \overline{n-1} \times \overline{n-1}$. Pretpostavimo suprotno, da $\epsilon' \vee \eta'$ ima $k \geq 2$ klasa ekivalencije. Definišimo $\eta'' \in E(n)$ takvu da je $\overline{n}/\eta'' = \overline{n-1}/\eta' \cup \{\{n\}\}$. Onda $\epsilon \vee \eta''$ ima $k+1$ klasu ekvivalencije. Međutim, $\eta = \eta'' \vee \epsilon_{in}$ za neko $i \in \overline{n-1}$, odakle slijedi da $\epsilon \vee \eta = (\epsilon \vee \eta'') \vee \epsilon_{in}$ ima bar $k + 1 - 1 = k \geq 2$ klasa ekvivalencije, što je kontradikcija sa početnom pretpostavkom. Dakle $\epsilon \vee \eta' = \overline{n-1} \times \overline{n-1}$, to jest $(\epsilon', \eta') \in E(n-1, r-1, s)$. Od ovog para možemo dobiti par $(\epsilon, \eta) \in E(n, r, s)$ tako što relaciji ϵ' dodamo klasu $\{n\}$, a relaciji η' dodamo n u neku njenu postojeću klasu. To možemo izršiti na s načina, pa slijedi da postoji $s \cdot e(n-1, r-1, s)$ ovakvih parova (ϵ, η).

(ii) Ako pretpostavimo da je $\{n\}$ jedna klasa ekvivalencije η, analogno kao u prvom slučaju dobijamo da postoji $r \cdot e(n-1, r, s-1)$ takvih parova $(\epsilon, \eta) \in E(n, r, s)$.

(iii) Sada pretpostavimo da $\{n\}$ nije ni ϵ-klasa ni η-klasa. Neka je kao u prvom slučaju

$$\epsilon' = \epsilon \cap (\overline{n-1} \times \overline{n-1}) \text{ i } \eta' = \eta \cap (\overline{n-1} \times \overline{n-1}).$$

Prvo pretpostavimo da je $\epsilon' \vee \eta' = \overline{n-1} \times \overline{n-1}$. Tada se od para ekvivalencija $(\epsilon', \eta') \in E(n-1, r, s)$ može konstruisati (ϵ, η) na rs načina, što znači da postoji $rs \cdot e(n-1, r, s)$ ovakvih parova (ϵ, η).

Dalje, pretpostavimo da $\epsilon' \vee \eta'$ ima $k \geq 2$ klasa ekvivalencije. Definišimo relacije ϵ'', $\eta'' \in E(n)$ na sljedeći način:

$$\overline{n}/\epsilon'' = \overline{n-1}/\epsilon' \cup \{\{n\}\} \text{ i } \overline{n}/\eta'' = \overline{n-1}/\eta' \cup \{\{n\}\}.$$

Pretpostavimo da je $k \geq 3$, tada ekvivalencija $\epsilon'' \vee \eta''$ ima $k+1 \geq 4$ klasa ekvivalencije. Takođe važi $\epsilon = \epsilon'' \vee \epsilon_{in}$ i $\eta = \eta'' \vee \epsilon_{jn}$ za neke $i, j \in \overline{n-1}$. Odatle slijedi da $\epsilon \vee \eta$ ima $k+1-1-1 = k-1 \geq 2$ klase ekvivalencije, što je nemoguće. Dakle, $k = 2$. Neka je B_1 klasa ekvivalencije $\epsilon' \vee \eta'$ koja sadrži 1, a B_2 druga njena klasa. Tada važi $1 \leq |B_1|, |B_2| \leq n-2$, pa se B_1 može izabrati na $\sum_{m=1}^{n-2} \binom{n-2}{m}$ načina.
Definišimo sada ekvivalencije $\epsilon_i = (B_i \times B_i) \cap \epsilon$ i $\eta_i = (B_i \times B_i) \cap \eta$, $i = 1, 2$. Ako je $a = |B_1/\epsilon_1|$ i $b = |B_1/\eta_1|$, tada je $1 \leq a \leq r-1$ i $1 \leq b \leq s-1$. Prema tome, postoji $e(m, a, b) \cdot e(n-m-1, r-a, s-b)$ takvih parova $((\epsilon_1, \eta_1), (\epsilon_2, \eta_2))$. Od para (ϵ', η') možemo konstruisati par (ϵ, η) dodavanjem n u neki od postojećih blokova B_1 i B_2. Da bismo osigurali uslov $\epsilon \vee \eta = \overline{n} \times \overline{n}$, ako dodamo n u blok B_1 ekvivalencije ϵ' tada moramo dodati n u blok B_2 ekvivalencije η', i obratno. To možemo uraditi na

$$a \cdot (s-b) + (r-a) \cdot b$$

načina. Dakle, postoji ukupno

$$\sum_{m=1}^{n-2} \binom{n-2}{m} \sum_{a=1}^{r-1} \sum_{b=1}^{s-1} (a(s-b) + b(r-a)) e(m, a, b) e(n-m-1, r-a, s-b)$$

takvih parova (ϵ, η). Sabiranjem vrijednosti dobijenih za slučajeve (i)-(iii) dobijamo traženu formulu. $\square$

Poslednja tri tvrđenja nam daju rekurentni algoritam za računanje broja idempotenata u monoidu $\mathcal{P}_n$. Zbog složenosti algoritma, za ove operacije je neophodna pomoć računara. U [5] su između ostalog navedene vrijednosti $c_0(\mathcal{P}_n)$, $c_1(\mathcal{P}_n)$, $c(\mathcal{P}_n)$ te $e(\mathcal{P}_n)$ za $1 \leq n \leq 10$. U istom radu su izvedene rekurentne formule za određivanje broja idempotenata $e(D_r(\mathcal{P}_n))$ monoida $\mathcal{P}_n$ ranga jednakog $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Za potrebe poglavlja 6 navodimo u Tabeli 1 broj idempotenata ranga $n-1$ u monoidu $\mathcal{P}_n$, za $1 \leq n \leq 10$. Broj idempotenata ranga manjeg od $n-1$ raste dosta brže sa rastom n, pa i niz $e(\mathcal{P}_n)$ veoma brzo raste.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e(D_{n-1}(\mathcal{P}_n))$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

Tabela 1: Broj idempotenata ranga $n-1$ u monoidu $\mathcal{P}_n$.

5 Singularni dio dijagram monoida

Vidjeli smo u Tvrđenju 3.2 da je skup $\{\alpha \in \mathcal{P}_n : \text{rang}(\alpha) \leq n-1\} = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ ideal u $\mathcal{P}_n$. U ovome poglavlju ćemo predstaviti dvije prezentacije ovog ideala, te pokazati njegovu vezu sa polugrupom $\langle E(\mathcal{P}_n)\rangle$, generisanim skupom svih idempotenata iz $\mathcal{P}_n$. Navešćemo dvije prezentacije polugrupe $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$, od kojih jedna sadrži minimalan broj generatora, te ćemo izvesti formulu za rang ove polugrupe. Rezultati koje ćemo ovdje predstaviti su kombinacija rezultata dobijenih u radovima [7] i [8].

Prvo navedimo sljedeću jednostavnu posljedicu Tvrđenja 3.3.

Posljedica 5.1. *([7], Posljedica 2) Neka je $\alpha \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$. Tada postoje jedinstveni $\beta \in \mathcal{L}_n$, $\gamma \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{S}_n$ i $\delta \in \mathcal{R}_n$ takvi da je $\alpha = \beta\gamma\delta$,* $\text{dom}(\gamma) \subseteq \text{codom}(\beta)$ *i* $\text{codom}(\gamma) \subseteq \text{dom}(\delta)$.

Dokaz. Iz Tvrđenja 3.3 znamo da postoje jedinstveni $\beta \in \mathcal{L}_n$, $\gamma \in \mathcal{I}_n$ i $\delta \in \mathcal{R}_n$ takvi da je ispunjeno $\alpha = \beta\gamma\delta$, te

$$\text{dom}(\gamma) \subseteq \text{codom}(\beta) \text{ i } \text{codom}(\gamma) \subseteq \text{dom}(\delta). \tag{12}$$

Pretpostavimo suprotno, da je $\gamma \in \mathcal{S}_n$, tada je

$$\bar{n} = \text{dom}(\gamma) = \text{codom}(\gamma).$$

Iz uslova (12) slijedi da je $\text{dom}(\delta) = \bar{n} = \text{codom}(\beta)$, pa mora biti $\beta \in \mathcal{S}_n$ i $\delta \in \mathcal{S}_n$. Međutim, odatle dobijamo da je $\alpha = \beta\gamma\delta \in \mathcal{S}_n$, što je kontradikcija sa početnom pretpostavkom. □

Ovu faktorizaciju polugrupe $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ možemo iskoristiti za konstrukciju jedne njene prezentacije, spajajući poznate prezentacije polugrupa $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{R}_n$ i $\mathcal{I}_n \setminus \mathcal{S}_n$.

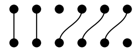
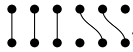
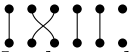
Za $1 \leq i \leq n$ definišimo dijagrame $l_i, r_i \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{S}_n$ sa

$$l_i = \left[\begin{array}{c|c|c} x & y & i \\ \hline x & y-1 & n \end{array}\right]_{1 \leq x < i, i < y \leq n},$$

$$r_i = \left[\begin{array}{c|c|c} x & y-1 & n \\ \hline x & y & i \end{array}\right]_{1 \leq x < i, i < y \leq n}.$$

Lako je uočiti da je $r_i = l_i^*$ za sve $1 \leq i \leq n$. Definišimo dalje za $1 \leq i \leq n-2$ dijagram $t_i = s_i\epsilon_n$. Blok zapis ovog dijagrama je sljedeći

$$t_i = \left[\begin{array}{c|c|c} x & i-1, i & n \\ \hline x & i-1, i & n \end{array}\right]_{x \in \bar{n} \setminus \{i-1, i, n\}}.$$

U monoidu $\mathcal{I}_6$ su na primjer $l_3 =$  i $r_4 =$ , dok je $t_3 =$ .

Uvedimo sljedeće oznake za skupove generatora $L = \{l_i : 1 \leq i \leq n\}$, $R = \{r_i : 1 \leq i \leq n\}$ i $T = \{t_i : 1 \leq i \leq n-2\}$. U [11] je pokazano da skup $L \cup T \cup R$ generiše polugrupu $\mathcal{I}_n \setminus \mathcal{S}_n$. U istom radu je data i odgovarajuća prezentacija polugrupe $\mathcal{I}_n \setminus \mathcal{S}_n$. Iz Posljedice 5.1 onda direktno slijedi sljedeće tvrđenje.

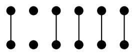
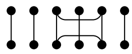
Tvrđenje 5.1. *Singularni dio $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ dijagram monoida $\mathcal{P}_n$ je generisan skupom*

$$\Psi_1 = \Lambda \cup L \cup T \cup R \cup P.$$

Generatorni skup Ψ_1 sadrži $2\binom{n}{2} + 2n + (n-2) = n^2 + n - 2$ generatora, što ga ne čini minimalnim generatornim skupom. Naime, u [7] je pokazano da je $\operatorname{rang}(\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) = \binom{n+1}{2}$, te je data jedna prezentacija koja koristi upravo minimalan broj generatora. Navešćemo pomenuti minimalni generatorni skup, i dokazati tvrđenje o rangu $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$.

Za $1 \leq i \leq n$ definišemo dijagram $\epsilon_i = l_i r_i$, a za $1 \leq i < j \leq n$ definišemo dijagram $\pi_{ij} = \lambda_{ij}\rho_{ij}$. Množenjem dobijamo da se navedeni dijagrami mogu zapisati u sljedećem obliku:

$$\epsilon_i = \left[\begin{array}{c|c} j & i \\ \cline{2-2} j & i \end{array}\right]_{j \in \bar{n} \setminus \{i\}}, \pi_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} k & i,j \\ k & i,j \end{array}\right]_{k \in \bar{n} \setminus \{i,j\}}.$$

Primijetimo da su to upravo dijagrami ϵ_i i π_{ij} definisani u poglavlju 3, zbog čega i koristimo istu notaciju. Lako vidimo da su dijagrami ϵ_i i π_{ij} projekcije. Dijagrami $\epsilon_2 =$  i $\pi_{35} =$  su primjeri ovakvih elemenata iz $\mathcal{P}_6$.

Tvrđenje 5.2. *([7] Propozicija 16) Polugrupa $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ je generisana skupom*

$$\Psi = \{\epsilon_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pi_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Dokaz. Kako su dijagrami ϵ_i i π_{ij} definisani preko dijagrama iz L, R, Λ i P, polugrupa generisana skupom Ψ je sadržana u $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$. Dovoljno je onda pokazati da se svi generatori iz Ψ_1 mogu napisati kao proizvodi elemenata iz Ψ. Očigledno je $l_n = \epsilon_n$. Primijetimo da je $l_i = \epsilon_i \pi_{i,i+1} l_{i+1}$, za sve $1 \leq i \leq n-1$, što lako provjeravamo direktnim množenjem. Odatle slijedi da je za sve $1 \leq i \leq n-1$ ispunjeno

$$\begin{aligned} l_i &= \epsilon_i \pi_{i,i+1} l_{i+1} = \epsilon_i \pi_{i,i+1} \epsilon_{i+1} \pi_{i+1,i+2} l_{i+2} = \\ &= \ldots = \epsilon_i \pi_{i,i+1} \epsilon_{i+1} \pi_{i+1,i+2} \cdots \epsilon_{n-1} \pi_{n-1,n} \epsilon_n, \end{aligned}$$

pa je $l_i \in \langle \Psi \rangle$ za sve $1 \leq i \leq n$. Kako je $r_i = l_i^*$, a ϵ_i i π_{ij} su projekcije, slijedi da je $r_i \in \langle \Psi \rangle$ za sve $1 \leq i \leq n$. Direktnom provjerom množenjem dobijamo i da je

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} &= \pi_{ij} l_j,\\ \rho_{ij} &= r_i \pi_{ij},\\ t_r &= \epsilon_r \pi_{rn} \epsilon_r \pi_{r,r+1} \epsilon_{r+1} \pi_{r+1,n} \epsilon_n,\end{aligned}$$

odakle konačno slijedi da je $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n = \langle \Psi \rangle$. $\square$

Ovime smo pokazali da je polugrupa $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ idempotentno generisana, te da je $\operatorname{idrang}(\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) \leq \binom{n+1}{2}$.

Teorema 5.1. *([7], Teorema 19) Polugrupa $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ je idempotento generisana i važi jednakost*

$$\operatorname{rang}(\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) = \operatorname{idrang}(\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) = \binom{n+1}{2}.$$

Dokaz. Znamo da je $\operatorname{rang}(\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) \leq \operatorname{idrang}(\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) \leq \binom{n+1}{2}$. Neka je Γ proizvoljan generatorni skup $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$. Pokazaćemo da Γ sadrži bar $\binom{n+1}{2}$ elemenata. Za $1 \leq i \leq n$, neka je $\epsilon_i = \gamma_1 \dots \gamma_k$, zapis elementa ϵ_i kao proizvoda generatora $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ iz Γ, pri čemu je k minimalno. Znamo da važi

$$\bar{n} \setminus \{i\} = \operatorname{dom}(\epsilon_i) = \operatorname{dom}(\gamma_1 \dots \gamma_k) \subseteq \operatorname{dom}(\gamma_1),$$

pa je $\operatorname{dom}(\gamma_1) = \bar{n}$ ili $\operatorname{dom}(\gamma_1) = \bar{n} \setminus \{i\}$. S druge strane, znamo i da važi

$$\Delta = \ker(\epsilon_i) = \ker(\gamma_1 \dots \gamma_k) \supseteq \ker(\gamma_1),$$

odakle slijedi $\Delta = \ker(\gamma_1)$. Prema tome, ne može biti $\operatorname{dom}(\gamma_1) = \bar{n}$ jer je $\gamma \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$, pa je $\operatorname{dom}(\gamma_1) = \bar{n} \setminus \{i\}$. Dakle, u Γ postoji bar n različitih dijagrama, čiji je domen pravi podskup skupa $\bar{n}$.

Neka je sada $\pi_{ij} = \eta_1 \dots \eta_l$ jedan zapis π_{ij} kao proizvoda generatora $\eta_1, \dots, \eta_l$ iz Γ. Tada važi

$$\bar{n} = \operatorname{dom}(\pi_{ij}) = \operatorname{dom}(\eta_1 \dots \eta_l) \subseteq \operatorname{dom}(\eta_1),$$

odakle slijedi $\operatorname{dom}(\eta_1) = \bar{n}$. Takođe važi

$$\Delta \cup \{(i,j)(j,i)\} = \ker(\pi_{ij}) = \ker(\eta_1 \dots \eta_l) \supseteq \ker(\eta_1),$$

pa je ili $\ker(\eta_1) = \Delta$ ili $\ker(\eta_1) = \Delta \cup \{(i,j)(j,i)\}$. Pošto $\eta_1 \notin \mathcal{S}_n$, slijedi da je $\ker(\eta_1) = \Delta \cup \{(i,j)(j,i)\}$. Time smo pokazali da Γ sadrži bar $\binom{n}{2}$ različitih dijagrama, čiji je domen jednak $\bar{n}$. Dakle, Γ sadrži bar $n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$ dijagrama, odakle slijedi tvrđenje. $\square$

Iz pokazanog tvrđenja slijedi da je polugrupa $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ sadržana u $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$, polugrupi generisanoj skupom svih idempotenata u $\mathcal{P}_n$. Za ove dvije polugrupe važi i više, naime $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n) = (\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) \cup \{1\}$. Da bi smo pokazali ovu jednakost, potrebne su nam dodatne osobine elemenata polugrupe $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$.

Neka je $\alpha \in E(\mathcal{I}_n)$, i neka je $A = \mathrm{dom}(\alpha)$, $B = \mathrm{codom}(\alpha)$. Kako je

$$|A| = |B| = \mathrm{rang}(\alpha) = \mathrm{rang}(\alpha^2) = |\,\mathrm{codom}(\alpha) \cap \mathrm{dom}(\alpha)| = |A \cap B|$$

slijedi da je $A = B$. Dalje, za sve $y \in B = A$ postoji $x \in A$ tako da je $\alpha(x) = y$, odakle slijedi da je $\alpha(y) = \alpha^2(y) = \alpha(x) = y$. Dakle, α je parcijalna bijekcija id_A. S druge strane, očigledno su sve parcijalne bijekcije oblika id_A, $A \subseteq \bar{n}$ idempotenti, pa je

$$E(\mathcal{I}_n) = \{\mathrm{id}_A : A \subseteq \bar{n}\}.$$

Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljna particija skupa $\bar{n}$, tada definišemo $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{I}_n^*$ kao identičko preslikavanje skupa $\mathcal{A}$. Slično kao u gornjem dokazu, lako dobijamo da je

$$E(\mathcal{I}_n^*) = \{\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \vDash \bar{n}\}.$$

Posmatrajmo sada idempotente polugrupe transformacija $\mathcal{T}_n$. Znamo da je preslikavanje $\alpha \in \mathcal{T}_n$ idempotent ako i samo ako je $\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}$ identičko preslikavanje skupa $\mathrm{im}(\alpha)$. Neka je $\alpha \in E(\mathcal{T}_n)$, i neka je $B = \mathrm{codom}(\alpha)$. Označimo sa A_b ker-klasu dijagrama α koja sadrži element $b \in B$. Pošto je $\alpha(b) = b$, slijedi da je $\alpha(x) = b$ za sve $x \in A_b$. Prema tome, skup B je jedna transverzala particije $\bar{n}/\ker(\alpha)$ i dijagram α možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_b & \emptyset \\ \hline b & x \end{array}\right]_{b \in B, x \in \bar{n} \setminus B}.$$

Za proizvolju particiju $\mathcal{A}$ skupa $\bar{n}$, i njenu transverzalu B označimo dijagram gornjeg oblika sa $\epsilon_{\mathcal{A},B}$. Lako vidimo da je svaki takav dijagram idempotent. Prema tome, ispunjeno je

$$E(\mathcal{T}_n) = \{\epsilon_{\mathcal{A},B} : \mathcal{A} \vDash \bar{n}, B \text{ je transverzala } \mathcal{A}\}.$$

Kao i ranije, sa $\mathcal{T}_n^*$ označavamo sliku monoida $\mathcal{T}_n$ pri involuciji $*$. Tada je ispunjeno

$$E(\mathcal{T}_n^*) = \{\eta_{B,\mathcal{A}} : \mathcal{A} \vDash n, B \text{ je transverzala } \mathcal{A}\}.$$

gdje je $\eta_{B,\mathcal{A}} = \epsilon_{\mathcal{A},B}^*$.

Naveli smo karakterizacije idempotenata podmonoida $\mathcal{I}_n$ i $\mathcal{I}_n^*$, odnosno $\mathcal{T}_n$ i $\mathcal{T}_n^*$, jer pomoću njih možemo generisati sve ostale elemente polugrupe $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$, što pokazuje sljedeća lema.

Lema 5.1. *([8], Tvrđenje 6)* $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n) = \langle E(\mathcal{I}_n) \cup E(\mathcal{I}_n^*)\rangle = \langle E(\mathcal{T}_n) \cup E(\mathcal{T}_n^*)\rangle$.

Dokaz. Neka je $\alpha \in P(\mathcal{P}_n)$ proizvoljna projekcija. Iz Leme 4.3 znamo da je α oblika

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \hline A_i & C_j \end{array} \right]_{i \in I, j \in J},$$

gdje su $A_i, i \in I$ i $C_j, j \in J$ ker(coker-klase dijagrama α. Definišimo particiju $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\} \cup \{C_j : j \in J\}$ skupa $\bar{n}$, te skup $B = \mathrm{dom}(\alpha) = \bigcup_{i \in I} A_i$. Lako vidimo da važi

$$\alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}\,\mathrm{id}_B\,\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \in \langle E(\mathcal{I}_n) \cup E(\mathcal{I}_n^*)\rangle.$$

Kako je prema Tvrđenju 4.2 $E(\mathcal{P}_n) = P(\mathcal{P}_n)^2$, iz pokazanog slijedi prvi dio jednakosti jednakost. Za drugi dio jednakosti, primijetimo da je $\mathrm{id}_B = \eta_{B,\mathcal{A}}\epsilon_{\mathcal{A},B}$ i $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} = \epsilon_{\mathcal{A},B}\eta_{B,\mathcal{A}}$. Iz ovih jednakosti slijedi da je $\alpha \in \langle E(\mathcal{T}_n) \cup E(\mathcal{T}_n^*)\rangle$, pa ponovo iz Tvrđenja 4.2 slijedi tražena jednakost. □

Koristeći ovo tvrđenje, dobijamo sljedeću značajnu osobinu polugrupe $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$.

Tvrđenje 5.3. *([8], Lema 7)* $\mathcal{S}_n \cap \mathbb{E}(\mathcal{P}_n) = \{1\}$.

Dokaz. Neka je $\pi \in \mathcal{S}_n \cap \mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$, tada postoje $\rho_1, \ldots, \rho_k \in E(\mathcal{I}_n) \cup E(\mathcal{I}_n^*)$ tako da je $\pi = \rho_1 \ldots \rho_k$. Pretpostavimo da su $\rho_1, \ldots, \rho_k$ takvi da je k najmanje moguće. Iz osobina relacije kernel znamo da je

$$\Delta = \ker(\pi) = \ker(\rho_1 \ldots \rho_k) \supseteq \ker(\rho_1),$$

odakle slijedi $\ker(\rho_1) = \Delta$. Iz toga dalje dobijamo $\rho_1 \in E(\mathcal{I}_n)$. S druge strane, znamo da je

$$\bar{n} = \mathrm{dom}(\pi) = \mathrm{dom}(\rho_1 \ldots \rho_k) \subseteq \mathrm{dom}(\rho_1),$$

odakle slijedi $\mathrm{dom}(\rho_1) = \bar{n}$. Međutim, iz toga dobijamo da je $\rho_1 \in E(\mathcal{I}_n^*)$, a jedini element koji istovremeno pripada i $E(\mathcal{I}_n)$ i $E(\mathcal{I}_n^*)$ je 1. Prema tome, $\rho_1 = 1$. Ako je $k > 1$, tada važi $\pi = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_k = 1\rho_2 \ldots \rho_k = \rho_2 \ldots \rho_k$, što je u kontradikciji sa izborom k. Dakle, mora biti $k = 1$ i $\pi = 1$. □

Ranije smo vidjeli da je $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n \subseteq \mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$, a iz poslednjeg tvrđenja slijedi da je $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n) \subseteq (\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) \cup \{1\}$, čime je dokazana sljedeća teorema.

Teorema 5.2. *([8], Teorema 9)* $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n) = (\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n) \cup \{1\}$.

Posljednji rezultat je analogan sljedećem Hauvijevom rezultatu za polugrupu transformacija $\mathcal{T}_n$.

Teorema 5.3. *([25], Teorema 1) Neka je X konačan skup. Tada je ispunjeno* $\mathbb{E}(\mathcal{T}_X) = \{1\} \cup (\mathcal{T}_X \setminus \mathcal{S}_X)$.

Teoremu 5.2 možemo dokazati i direktno, bez konstruisanja idempotentnog skupa generatora za polugrupu $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$. Dokaz koji ćemo navesti je dat u [8] (dokaz Teoreme 9).

Dokaz. Neka je $\alpha \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$, i neka je

$$\alpha = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & \dots & A_i & C_1 & \dots & C_j \\ \cline{4-6} B_1 & \dots & B_i & D_1 & \dots & D_k \end{array}\right]$$

zapis α u obliku blokova. Neka je kao i prethodnim poglavljima $\mathrm{id}_i = \mathrm{id}_{\{1,\dots,i\}}$. Definišimo još dijagrame

$$\tau_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & \dots & A_i & C_1 & \dots & C_j \\ 1 & \dots & i & i+1 & \dots & i+j \end{array}\right] \in \mathcal{T}_n,$$

$$\tau_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & i+k \\ B_1 & \dots & B_i & D_1 & \dots & D_k \end{array}\right] \in Tn^*$$

Očigledno je $\alpha = \tau_1 \,\mathrm{id}_i\, \tau_2$. Ako je $\ker(\alpha) \neq \Delta$ i $\mathrm{coker}(\alpha) \neq \Delta$, tada je $\tau_1 \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n$ i $\tau_2 \in \mathcal{T}_n^* \setminus \mathcal{S}_n$. Iz Teoreme 5.3 onda slijedi da je $\tau_1 \in \mathbb{E}(\mathcal{T}_n)$ i $\tau_2 \in \mathbb{E}(\mathcal{T}_n^*)$, pa iz Leme 5.1 dobijamo $\alpha \in \mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$. U slučaju da je $\ker(\alpha) \neq \Delta$ i $\mathrm{coker}(\alpha) = \Delta$, onda je $\tau_2 \in \mathcal{S}_n$. Odatle slijedi da je $\tau_1\tau_2 \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n \subseteq \mathbb{E}(\mathcal{T}_n)$ i $\tau_2^{-1} \,\mathrm{id}_i\, \tau_2 \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{S}_n$, pa je $\alpha = \tau_1\tau_2(\tau_2^{-1} \,\mathrm{id}_i\, \tau_2) \in \mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$. Analogno, iz $\ker(\alpha) = \delta$ i $\mathrm{coker}(\alpha) \neq \delta$ slijedi da je $\alpha \in \mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$. Konačno, pretpostavimo da je $\ker(\alpha) = \Delta = \mathrm{coker}(\alpha)$, tada je $\alpha \in \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{S}_n$. Možemo onda zapisati α kao

$$\alpha = (\tau_1 \,\mathrm{id}_i\, \tau_1^{-1})(\tau_1\tau_2),$$

pri čemu $\eta = \tau_1 \,\mathrm{id}_i\, \tau_1^{-1} \in E(\mathcal{I}_n)$ i $\tau = \tau_1\tau_2 \in \mathcal{S}_n$. Ako je $\eta = \mathrm{id}_\emptyset$, tada je i $\alpha = \mathrm{id}_\emptyset \in E(\mathcal{P}_n)$. Inače, postoje $x \in \bar{n} \setminus \mathrm{dom}(\eta)$ i $y \in \mathrm{dom}(\eta)$. Neka je $\sigma \in E(\mathcal{T}_n)$ tako da je

$$\sigma(z) = \begin{cases} z & \text{ako je } z \neq x \\ y & \text{za } z = x \end{cases}$$

Tada je $\eta = \eta\sigma$, i $\sigma\tau \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n \subseteq \mathbb{E}(\mathcal{T}_n)$ pa je $\alpha = \eta\sigma\tau \in \mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$, čime je dokaz završen. □

U ovom poglavlju smo vidjeli da je singularni dio monoida $\mathcal{P}_n$ idempotentno generisan ideal. Štaviše, vidjeli smo da je $\mathbb{E}(\mathcal{P}_n)$ najmanji monoid koji sadrži $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$. Prema Tvrđenju 3.1 znamo da je $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ upravo jedinstven maksimalni ideal u $\mathcal{P}_n$. U narednom poglavljima ćemo odrediti rang ostalih ideala u $\mathcal{P}_n$, kao i broj minimalnih generatornih skupova ideala $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$.

6 Rang i generatorni skupovi ideala monoida $\mathcal{P}_n$

Koristeći rezultate izvedene u prethodnim poglavljima, izračunaćemo opštu formulu za rang ideala dijagram monoida. Prvo se podsjetimo da $\mathcal{J}$-klase u $\mathcal{P}_n$ čine lanac $J_0(\mathcal{P}_n) < J_1(\mathcal{P}_n) < \ldots < J_n(\mathcal{P}_n)$, gdje je $J_k(\mathcal{P}_n) = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \text{rang}(\alpha) = k\}$. Takođe smo vidjeli da su svi ideali u $\mathcal{P}_n$ oblika $I_k(\mathcal{P}_n) = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \text{rang}(\alpha) \leq k\}$, za $k = 0, 1, \ldots, n$. U ovom poglavlju ćemo pratiti rezultate dobijene u radu [9], gdje su pored ranga ideala dijagram monoida izvedene i rekurentne formule za određivanje broja minimalnih idempotentnih generatornih skupova ideala $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$.

6.1 Rang i idempotentni rang ideala monoida $\mathcal{P}_n$

Lema 6.1. *([9], Lema 7.4) Za sve $0 \leq r \leq n-2$ je ispunjeno*

$$J_r(\mathcal{P}_n) \subseteq \langle J_{r+1}(\mathcal{P}_n) \rangle.$$

Dokaz. Neka je $\alpha \in J_r(\mathcal{P}_n)$, i pretpostavimo prvo da je α projekcija. Iz Leme 4.3 slijedi da je α oblika

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \hline A_i & C_j \end{array}\right]_{i\in I, j\in J},$$

gdje je $|I| = r = \text{rang}(\alpha)$, $|J| = k$. Neka je bez umanjenja opštosti $I = \bar{r}$ i $J = \bar{k}$. Razmatraćemo dva slučaja.

Slučaj 1: Neka je $k \geq 1$. Definišimo dijagrame β i γ

$$\beta = \left[\begin{array}{c|c|c} A_i & C_1 & C_j \\ \hline i & r+1 & x \end{array}\right]_{i\in I, j\in[2,k], x\in[r+2,n]}$$

$$\gamma = \left[\begin{array}{c|c|c} i & n & x \\ \hline A_i & C_1 & C_j \end{array}\right]_{i\in I, j\in[2,k], x\in[r+1,n-1]}$$

Očigledno je $\text{rang}(\beta) = \text{rang}(\gamma) = r+1$. Lako uočavamo i da je $\alpha = \beta\gamma$, odakle slijedi $\alpha \in \langle J_{r+1}(\mathcal{P}_n) \rangle$.

Slučaj 2: Neka je sada $k = 0$, onda je projekcija α oblika

$$\alpha = \begin{bmatrix} A_i \\ A_i \end{bmatrix}_{i\in I},$$

gdje je $|I| = r = \text{rang}(\alpha)$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $|A_r| \geq 2$, i posmatrajmo particiju skupa A_r na dva neprazna skupa A_r' i A_r''. Tada dijagram α možemo zapisati kao proizvod $\beta\gamma$, gdje su

$$\beta = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_i & A_r' & A_r'' & \emptyset \\ \hline i & r & r+1, r+2 & x \end{array}\right]_{i\in[1,r-1], x\in[r+3,n]},$$

$$\gamma = \left[\begin{array}{c|c|c|c} i & r, r+1 & r+2 & x \\ \cline{4-4} A_i & A'_r & A''_r & \emptyset \end{array} \right]_{i \in [1, r-1], x \in [r+3, n]}.$$

Očigledno su dijagrami β i γ ranga $r+1$, pa je $\alpha \in \langle J_{r+1}(\mathcal{P}_n) \rangle$.

Pokazali smo da je $P(J_r(\mathcal{P}_n)) \subseteq \langle J_{r+1}(\mathcal{P}_n) \rangle$. Iz dokaza Teoreme 2.7 znamo da odatle slijedi $J_r(\mathcal{P}_n) \subseteq \langle J_{r+1}(\mathcal{P}_n) \rangle$, pa je tvrđenje dokazano. $\square$

U narednoj teoremi $S(n,k)$ označava Stirlingov broj druge vrste. Sa B_n ćemo označavati n-ti Belov broj, odnosno broj svih različitih particija skupa od n elemenata.

Teorema 6.1. *([9], Teorema 7.5) Za $0 \leq r \leq n-1$ ideal $I_r(\mathcal{P}_n)$ u $\mathcal{P}_n$ je idempotentno generisan, a njegov rang je jednak*

$$\operatorname{rang}(I_r(\mathcal{P}_n)) = \operatorname{idrang}(I_r(\mathcal{P}_n)) = \sum_{j=r}^{n} S(n,j) \binom{j}{r} = \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} S(j,r) B_{n-j}.$$

Štaviše, podskup $A \subseteq I_r(\mathcal{P}_n)$ kardinalnosti $\operatorname{rang}(I_r(\mathcal{P}_n))$*, je generatorni skup ideala $I_r(\mathcal{P}_n)$ ako i samo ako su ispunjena sljedeća tri uslova*

(i) $\operatorname{rang}(\alpha) = r$ *za sve $\alpha \in A$,*

(ii) za sve $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, važi ili $\ker(\alpha) \neq \ker(\beta)$ *ili* $\operatorname{dom}(\alpha) \neq \operatorname{dom}(\beta)$*,*

(iii) za sve $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, važi ili $\operatorname{coker}(\alpha) \neq \operatorname{coker}(\beta)$ *ili* $\operatorname{codom}(\alpha) \neq \operatorname{codom}(\beta)$*.*

Dokaz. Iz Leme 6.1 i Teoreme 2.7 slijedi da je $I_r(\mathcal{P}_n) = \langle J_r(\mathcal{P}_n) \rangle$ idempotentno generisana polugrupa, te da je

$$\operatorname{rang}(I_r(\mathcal{P}_n)) = \operatorname{idrang}(I_r(\mathcal{P}_n)) = \rho_{nr}$$

gdje je ρ_{nr} broj različitih $\mathcal{R}$-klasa u $\mathcal{J}$-klasi $J_r(\mathcal{P}_n)$. Znamo da su $\mathcal{R}$-klase u $\mathcal{P}_n$ određene domenom i kernelom. Da bismo odredili jednu $\mathcal{R}$-klasu u $J_r(\mathcal{P}_n)$, prvo biramo j kernel klasa, za neko $j \in [r,n]$. Time je jedinstveno određena jedna particija skupa $\bar{n}$ na j podskupova, što možemo učiniti na $S(n,j)$ načina. Zatim, od tih j kernel klasa, biramo k klasa koje će sačinjavati transverzalne blokove, čime određujemo domen elemenata $\mathcal{R}$-klase. To možemo uraditi na $\binom{j}{r}$ načina. Slijedi da je

$$\rho_{nr} = \sum_{j=r}^{n} S(n,j) \binom{j}{r}.$$

$\mathcal{R}$-klase sadržane u $J_r(\mathcal{P}_n)$ možemo prebrojati i na sljedeći način. Prvo odaberimo j elemenata iz $\bar{n}$ koji određuju domen elemenata $\mathcal{R}$-klase. Zatim napravimo particiju tog skupa od j elemenata na r kernel klasa koje ulaze u transverzalne komponente, za što imamo $S(j,r)$ mogućnosti. Za preostale kernel klase možemo uzeti proizvoljnu particiju skupa preostalih $n-j$ elemenata, što možemo uraditi na B_{n-j} načina. Odatle dobijamo

$$\rho_{nr} = \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} S(j,r) B_{n-j}.$$

Dalje, neka je A podskup ideala $I_r(\mathcal{P}_n)$ kardinalnosti ρ_{nr}. Prema Lemi 2.2 skup A generiše ideal I_r ako i samo ako generiše glavni faktor J_r^*. Iz Teoreme 2.4 znamo da je A generatorni skup kompletno 0-proste polugrupe J_r^* ako i samo ako je A transverzala svih nenula $\mathcal{R}$-, odnosno $\mathcal{L}$-klasa u J_r. Prema Teoremi 3.1 to je upravo ekvivalentno sa sljedećim uslovima:

(i) svi elementi A pripadaju $\mathcal{J}$-klasi J_r, odnosno rang svih elementa iz A je upravo jednak r;

(ii) svaka dva različita elementa α, β iz A pripadaju različitim $\mathcal{R}$-klasama, odnosno važi $\ker(\alpha) \neq \ker(\beta)$ ili $\mathrm{dom}(\alpha) \neq \mathrm{dom}(\beta)$;

(iii) svaka dva različita elementa α, β iz A pripadaju različitim $\mathcal{L}$-klasama, odnosno važi $\mathrm{coker}(\alpha) \neq \mathrm{coker}(\beta)$ ili $\mathrm{codom}(\alpha) \neq \mathrm{codom}(\beta)$.

□

U [9], Tabela 3 su navedene neke vrijednosti izračunatih rangova ideala monoida $\mathcal{P}_n$ za $1 \leq n \leq 10$. Tu možemo vidjeti da vrijednosti ranga brzo rastu, u skladu sa veličinom polugrupe $\mathcal{P}_n$ i njenih ideala. Primijetimo da za $r = n-1$, iz 6.1 dobijamo da je rang ideala $I_{n-1} = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ jednak

$$\begin{aligned}\mathrm{rang}(I_r) = \mathrm{idrang}(I_r) = S(n,n-1)\binom{n-1}{n-1} + S(n,n)\binom{n}{n-1} \\ = \binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}.\end{aligned}$$

Dobijeni rezultat se naravno poklapa sa rezultatom dobijenim u poglavlju 3 (Teorema 5.1). Za $r = 0$ imamo

$$\mathrm{rang}(I_0) = \mathrm{idrang}(I_0) = \sum_{j=0}^{n} S(n,j) = B_n.$$

6.2 Minimalni idempotentni generatorni skupovi ideala $I_{n-1}(\mathcal{P}_n)$

Pored problema određivanja (idempotentnog) ranga ideala dijagram monoida, značajano je pitanje i određivanje broja minimalnih idempotentnih generatornih skupova tih ideala. Teorema 2.8 nam govori da je skup svih minimalnih idempotentnih generatornih skupova glavnog faktora J_r^* u uzajamno jednoznačnoj korespondenciji sa skupom svih balansiranih podgrafova grafa projekcija $\Gamma(J_r^*)$. Za razumijevanje strukture ovih grafova, neophodno je da prvo eksplicitno opišemo skup idempotenata sadržanih u $\mathcal{J}$-klasi J_r.

U [5] su pored rekurentnih formula za određivanje broja idempotenata dijagram monoida $\mathcal{P}_n$, izvedene i rekurentne formule za računanje broja idempotenata fiksiranog ranga. Tamo možemo vidjeti (Tabela 8) te vrijednosti za $1 \leq n \leq 10$, gdje uočavamo da sa smanjenjem ranga, broj idempotenata brzo raste. Zbog toga ćemo izložiti samo rezultate o broju minimalnih idempotentnih generatornih skupova ideala I_{n-1}, koji su dobijeni u [9].

Prvo ćemo opisati skup svih projekcija u $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$. U prethodnom poglavlju smo naveli jedan idempotentni generatorni skup Ψ ideala $I_{n-1}(\mathcal{P}_n)$, gdje je

$$\Psi = \{\epsilon_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pi_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Pokazaćemo da pored gore navedenih, skup $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$ ne sadrži više nijednu projekciju.

Lema 6.2. *([9], Lema 7.7) Skup projekcija u $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$ je jednak*

$$\{\epsilon_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pi_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Dokaz. Neka je $\alpha \in J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$ projekcija, tada je $\alpha^* = \alpha$. Iz Leme 4.3 znamo da je α sljedećeg oblika

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \cline{2-2} A_i & C_j \end{array}\right]_{i \in I, j \in J}.$$

Pošto je $\mathrm{rang}(\alpha) = n-1$, slijedi da je $|I| = n-1$, dok je $|J| = 1$, pri čemu su moguća dva sljedeća slučaja

Slučaj 1: Svi transverzalni blokovi dijagrama α su kardinalnosti 2, i α ima dva netransverzalna bloka kardinalnosti 1. Prema tome, dijagram α ima oblik

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} j & i \\ \cline{2-2} j & i \end{array}\right]_{j \in \bar{n} \setminus \{i\}}.$$

za neko fiksirano $i \in \bar{n}$, odnosno $\alpha = \epsilon_i$.

Slučaj 2: Dijagram α nema netransverzalnih blokova, te ima $n-2$ transverzalnih blokova kardinalnosti 2, i jedan transverzalni blok kardinalnosti 4. Tada je α sljedećeg oblika

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} k & i,j \\ k & i,j \end{array}\right]_{k \in \bar{n} \setminus \{i,j\}}.$$

za neke fiksirane $i, j \in \bar{n}$, odnosno $\alpha = \pi_{ij}$. Prema tome, sve projekcije u $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$ pripadaju skupu Ψ. $\square$

Iz Tvrđenja 4.2, te iz osobina $\mathcal{J}$-klasa, slijedi da se svi idempotenti iz $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$ mogu napisati kao proizvod dvije projekcije iz $\mathcal{J}$-klasa $J_n(\mathcal{P}_n)$ i $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$. Međutim, jedina projekcija u $J_n(\mathcal{P}_n) = \mathcal{S}_n$ je jedinični element, tako da samo trebamo odrediti sve proizvode od po dva elementa skupa Ψ. Direktnom provjerom svih slučajeva, dobijamo sljedeće rezultate množenja

$$\epsilon_i \cdot \epsilon_j = \begin{cases} \epsilon_i & \text{ako je } i = j, \\ \notin J_{n-1}(\mathcal{P}_n) & \text{inače } i \neq j \end{cases}$$

$$\epsilon_k \cdot \pi_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij} & \text{ako je } k = i, \\ \beta_{ji} & \text{ako je } k = j, \\ \notin J_{n-1}(\mathcal{P}_n) & \text{inače} \end{cases}$$

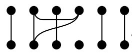
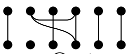
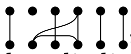
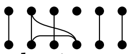
$$\pi_{ij} \cdot \epsilon_k = \begin{cases} \alpha_{ji} & \text{ako je } k = i, \\ \alpha_{ij} & \text{ako je } k = j, \\ \notin J_{n-1}(\mathcal{P}_n) & \text{inače} \end{cases}$$

$$\pi_{ij} \cdot \pi_{kl} = \begin{cases} \pi_{ij} & \text{ako je } i = k \text{ i } j = l, \\ \notin J_{n-1}(\mathcal{P}_n) & \text{inače} \end{cases}$$

gdje sa $\alpha_{ij}, \alpha_{ji}, \beta_{ij}, \beta_{ji}$, $1 \leq i < j \leq n$ označavamo sljedeće idempotente

$$\alpha_{ij} = \left[\begin{array}{c|c|c} a & i, j & \emptyset \\ \hline a & i & j \end{array} \right]_{a \in \bar{n} \setminus \{i,j\}}, \alpha_{ji} = \left[\begin{array}{c|c|c} a & i, j & \emptyset \\ \hline a & j & i \end{array} \right]_{a \in \bar{n} \setminus \{i,j\}},$$

$$\beta_{ij} = \left[\begin{array}{c|c|c} a & j & i \\ \hline a & i, j & \emptyset \end{array} \right]_{a \in \bar{n} \setminus \{i,j\}}, \beta_{ji} = \left[\begin{array}{c|c|c} a & i & j \\ \hline a & i, j & \emptyset \end{array} \right]_{a \in \bar{n} \setminus \{i,j\}}.$$

Na primjer, u $\mathcal{P}_6 \setminus \mathcal{S}_6$ imamo idempotente $\alpha_{24} =$ , $\alpha_{42} =$  i $\beta_{24} =$ , $\beta_{42} =$ 

Ovime smo pokazali sljedeće tvrđenje.

Tvrđenje 6.1. *([9], Lema 7.7) Skup idempotenata u $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$ je jednak*

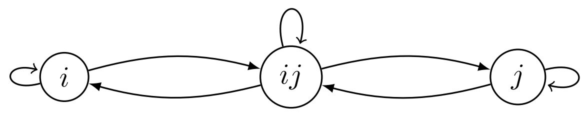
$$\{\epsilon_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pi_{ij}, \alpha_{ij}, \alpha_{ji}, \beta_{ij}, \beta_{ji}\}.$$

Prema tome, u $J_{n-1}(\mathcal{P}_n)$ postoji $n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ projekcija, te ukupno $n + 5\binom{n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$ idempotenata. Dakle, graf projekcija $\Gamma_n = \Gamma(J_{n-1}(\mathcal{P}_n))$ ima $\frac{n(n+1)}{2}$ čvorova, te $\frac{n(5n-3)}{2}$ grana. Zbog kraćeg zapisa, čvorove u Γ_n

ćemo označavati sa i za ϵ_i, $1 \leq i \leq n$, te ij za π_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$. Svaka grana u Γ_n određuje jedan idempotent na sljedeći način:

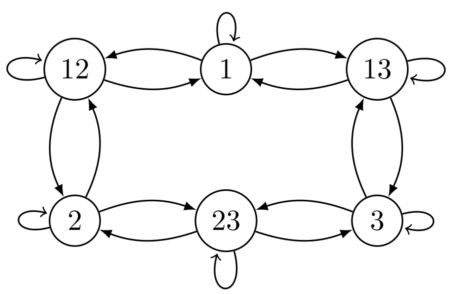
$$\begin{array}{ll} (i,i) \equiv \epsilon_i & (ij,ij) \equiv \pi_{ij} \\ (ij,i) \equiv \alpha_{ji} & (ij,j) \equiv \alpha_{ij} \\ (i,ij) \equiv \beta_{ij} & (j,ij) \equiv \beta_{ji}. \end{array}$$

Da bismo odredili broj svih minimalnih idempotentnih generatorneih skupova ideala $I_{n-1}(\mathcal{P}_n)$, prema Teoremi 2.8, trebamo prebrojati sve balansirane podgrafe orijentisanog grafa Γ_n. Primijetimo da orijentisani graf Γ_n možemo konstruisati na sljedeći način. U kompletnom grafu K_n, svaku granu $\{i,j\}$ zamijenimo orijentisanim grafom prikazanim na Slici 3.



Slika 3: Graf koji zamjenjuje granu $\{i,j\}$.

Ubuduće u oznaci čvora ij nećemo podrazumijevati da je $i < j$. Na Slici 4 je predstavljen graf projekcija Γ_n za $n = 3$.



Slika 4: Graf projekcija Γ_3.

Označimo sa $\mathcal{G}_n$ skup svih balansiranih podgrafova orijentisanog grafa Γ_n. Neka je $G \in \mathcal{G}_n$, tada je, kao što smo vidjeli ranije, graf G disjunktna unija ciklusa. Poznavajući strukturu grafa Γ_n zaključujemo da ti ciklusi mogu biti jednog od 4 oblika:

(1) $(i_1, i_1i_2, i_2, i_2i_3, \ldots i_k, i_ki_1, i_1)$, gdje je $k \geq 3$ i $i_1, \ldots i_k$ su međusobno različiti;

(2) (ij, ij);

(3) (i, i);

(4) (i, ij, i).

U grafu G_3 postoje samo dva balansirana podgrafa koji sadrže cikluse oblika (1). To su upravo ciklusi $(1, 12, 2, 23, 3, 31, 1)$ i $(1, 13, 3, 32, 21, 1)$. Preostali balansirani podgrafovi se sastoje od ciklusa oblika (2),(3) i (4), pa ih možemo podijeliti u 4 tipa, odnosno balansirane podgrafove koji se sastoje od

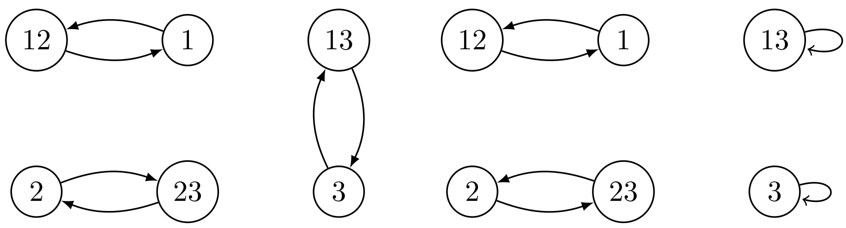
(ii) tri ciklusa tipa (4);

(iii) dva ciklusa tipa (4), te po jednog ciklusa tipa (2) i (3);

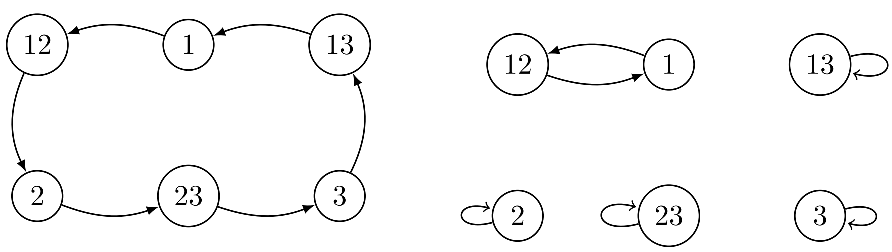
(iv) jednog ciklusa tipa (4), te po 2 ciklusa tipa (2) i (3);

(v) po 3 ciklusa tipa (2) i (3).

Postoji tačno jedan baalansiran podgraf tipa (v), kome odgovara minimalni generatorni skup Ψ. Na Slici 5, se nalazi po jedan predstavnik tipova (ii) i (iii), dok su na Slici 6 predstavnici tipova (i) i (iv).



Slika 5: Balansiran podgraf tipa (ii) (lijevo) i (iii) (desno).



Slika 6: Balansiran podgraf tipa (i) (lijevo) i (iv) (desno).

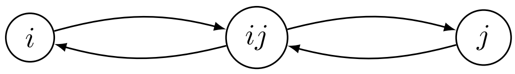
Pokazaćemo da je proizvoljan graf $G \in \mathcal{G}_n$ jedinstveno određen parom preslikavanja (π_G, τ_G), koja definišemo na sljedeći način. Za $G \in \mathcal{G}_n$ označimo sa A_G skup svih čvorova iz $V(\Gamma_n)$ koji se nalaze u ciklusima oblika (1). Primijetimo da je $|A_G| = 0$ ili $|A_G| \in [3, n]$. Definišemo sada permutaciju $\pi_G : A_G \to A_G$, takvu da njena dekompozicija na cikluse sadrži ciklus

$(i_1, i_2, \dots, i_k)$, $k > 2$ za svaki odgovarajući ciklus tog tipa u G. Zbog definicije skupa A_G ova permutacija je dobro definisana, te ne sadrži fiksne tačke ni cikluse dužine 2.

Zatim definišimo preslikavanje $\tau_G : \bar{n} \setminus A_G \to \bar{n}$ sa

$$\tau_G(i) = \begin{cases} i & \text{ako } G \text{ sadrži ciklus } (i, i), \\ j & \text{ako } G \text{ sadrži ciklus } (i, ij, i). \end{cases}$$

Primijetimo da preslikavanje τ_G takođe ne sadrži cikluse dužine 2. Naime, ako pretpostavimo da postoje $i, j \in \bar{n} \setminus A_G$ takvi da je $\tau_G(i) = j$ i $\tau_G(j) = i$, tada G sadrži podgraf prikazan na slici 6.2.



Slika 7: Nemoguć podgraf u $G \in \mathcal{G}_n$.

Međutim, to se kosi sa pretpostavkom da je podgraf G balansiran. Dakle, podgraf $G \in \mathcal{G}_n$ određuje jedinstveno par preslikavanja (π_G, τ_G). Pokazaćemo da važi i obratno, to jest da par preslikavanja (π, τ) za koji važi

(A) π je permutacija nekog podskupa $A \subseteq \bar{n}$ koja nema fiksnih tačaka ni 2-ciklusa,

(B) $\tau : \bar{n} \setminus A \to \bar{n}$ je preslikavanje koje nema 2-ciklusa,

jedinstveno određuje balansiran podgraf orijentisanog grafa Γ_n. Ovakvom paru preslikavanja (π, τ) dodjeljujemo orijentisan graf G na skupu čvorova $V(\Gamma_n)$ na sljedeći način. Za svaki ciklus $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ iz ciklusne dekompozicije permutacije π, graf G sadrži ciklus $(i_1, i_1 i_2, i_2, \dots, i_k i_1, i_1)$. Dalje, za sve $i \in \bar{n} \setminus A$ graf G sadrži ciklus

$$\begin{cases} (i, i) & \text{ako je } \pi(i) = i, \\ (i, ij, i) & \text{ako je } \pi(i) = j. \end{cases}$$

Očigledno je ovime jedinstveno određen jedan graf G iz $\mathcal{G}_n$. Za $0 \leq k \leq n$ definišimo sljedeće skupove preslikavanja

$$\begin{aligned} A_k &= \{\pi \in S_k : \pi \text{ nema } 2 - \text{ciklusa ni fiksnih tačaka}\}, \\ B_{nk} &= \{\tau : \bar{k} \to \bar{n} : \tau \text{ nema } 2 - \text{ciklusa}\}, \end{aligned}$$

te nizove $a_k = |A_k|$ i $b_{nk} = |B_{nk}|$. Za proizvoljan podskup $B \subset \bar{n}$ kardinalnosti l, skup $\{\tau : B \to \bar{n} : \tau \text{ nema } 2 - \text{ciklusa}\}$ je kardinalnosti b_{nl}.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_k	1	0	0	2	6	24	160	1140	8088	80864	809856

Tabela 2: Vrijednosti niza a_n za $0 \leq n \leq 10$.

Prema tome, za podskup $A \subset \bar{n}$, $|A| = k$, postoji tačno $a_k b_{n,n-k}$ parova preslikavanja (π, τ) koja zadovoljavaju uslove (A) i (B). Odatle slijedi da je

$$|\mathcal{G}_n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n,n-k} \tag{13}$$

Niz $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ je niz A038205 u [1], gdje je dat rekurentnom formulom

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0, a_3 = 2, a_k = \sum_{i=3}^{k} \binom{k-1}{i-1} (i-1)! a_{k-1},$$

dok se niz $\{b_{nk}\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \bar{n}}$ ne nalazi u [1]. Pokazaćemo još jednu rekurentnu formulu za niz a_k, koja se lako izvodi iz njegove gornje definicije.

Lema 6.3. *([9], Lema 7.10) Niz $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ zadovoljava sljedeću rekurentnu vezu*

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0, a_k = k a_k + k(k-1) a_{k-2}, \text{ za } k \geq 2.$$

Dokaz. Očigledno važi $a_0 = 1$, te $a_1 = a_2 = 0$. Neka je onda $k \geq 2$ i $\pi \in A_{k+1}$. Tada se $k+1$ nalazi u nekom ciklusu dužine $l \geq 3$. Ako je $l = 3$, preostala dva elementa tog ciklusa možemo izabrati na $\binom{k}{2}$ načina, pri čemu ta tri elementa određuju jedan od dva ciklusa. Slijedi da postoji

$$2 \cdot \binom{k}{2} a_{k-2} = k(k-1) a_{k-2}$$

elemenata A_{k+1} takvog oblika. Ako je $l \geq 4$, tada izbacivanjem $k+1$ iz odgovarajućeg ciklusa dobijamo permutaciju $\pi' \in A_k$. S druge strane, od permutacije $\pi' \in A_k$ možemo dobiti permutaciju $\pi \in A_k$ na k načina. Odatle slijedi da je

$$a_{k+1} = k(k-1) a_{k-2} + k a_k.$$

□

Vrijednosti niza a_k za $0 \leq k \leq 7$ su date u Tabeli 2. Vrijednosti niza za $k \geq 7$, kao i ostale osobine niza se mogu naći u [1].

Za $1 \leq r < s \leq k$, $0 \leq k \leq n$ definišimo skup

$$C_{nk}(r, s) = \{\tau : \bar{k} \to \bar{n} : (r, s) \text{ je } 2 - \text{ciklus u } \tau\}.$$

Tada skup B_{nk} možemo izraziti preko skupova $C_{nk}(r, s)$ na sljedeći način

$$B_{nk} = \bar{n}^{\bar{k}} \setminus (\bigcup_{1 \leq r < s \leq k} C_{nk}(r, s)). \tag{14}$$

Koristeći gornju jednakost izvešćemo sljedeću rekurentnu formulu za niz b_{nk}.

Lema 6.4. *([9], Lema 7.11) Za sve $0 \leq k \leq n$ važi rekurentna formula*

$$b_{nk} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{k}{2i} (2i-1)!! n^{k-2i},$$

gdje uzimamo da je $(-1)!! = 1$.

Dokaz. Neka je $1 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, i neka je $1 \leq r_j < s_j \leq k$, za $j = 1, \ldots, i$. Pretpostavimo da su ciklusi $(r_1, s_1), \ldots, (r_i, s_i)$ po parovima međusobno disjunktni. Tada je

$$|C_{nk}(r_1, s_1) \cap \ldots \cap C_{nk}(r_i, s_i)| = n^{k-2i},$$

pošto preostalih $k - 2i$ elemenata možemo rasporediti na proizvoljan način. Iz formule uključenja-isključenja onda slijedi da je

$$| \bigcup_{1 \leq r < s \leq k} C_{nk}(r, s)| = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^{i+1} \binom{k}{2i} (2i-1)!! n^{k-2i},$$

pošto postoji $\binom{k}{2i}(2i-1)!!$ načina da izaberemo i disjunktnih ciklusa iz $\bar{k}$. Iz jednakosti (14) konačno dobijamo da je

$$\begin{aligned} b_{nk} = n^k - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^{i+1} \binom{k}{2i} (2i-1)!! n^{k-2i} = \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{k}{2i} (2i-1)!! n^{k-2i}. \end{aligned}$$

$\square$

U [9], Tabela 5, su navedene vrijednosti niza b_{nk} za $0 \leq n \leq 10$. U Tabeli 3 smo naveli te izračunate vrijednosti.

Iz Lema 6.3 i 6.4 slijedi da je niz $|\mathcal{G}_n|$, dat rekurentnom formulom (13) u potpunosti određen, te smo time dokazali narednu teoremu.

Teorema 6.2. *([9], Teorema 7.13) Broj minimalnih idempotentnih generatornih skupova ideala $I_{n-1} = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$ je jednak*

$$|\mathcal{G}_n| = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n,n-k},$$

gdje su a_k i b_{nk} nizovi dati rekurentnim vezama u Lemama 6.3 i 6.4.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	3							
3	1	3	8	18						
4	1	4	15	52	163					
5	1	5	24	110	478	1950				
6	1	6	35	198	1083	5706	28821			
7	1	7	48	322	2110	13482	83824	505876		
8	1	8	63	488	3715	27768	203569	1461944	10270569	
9	1	9	80	702	6078	51894	436656	3618540	29510268	236644092

Tabela 3: Vrijednosti niza b_{nk} za $0 \leq n \leq 9$.

Primjer 6.1. Posmatrajmo opet balansirane podgrafove grafa projekcija Γ_3. Neka je $G \in \mathcal{G}_3$, odredimo odgovarajući par transformacija (π_G, τ_G). Opet ćemo posmatrati pet različitih slučajeva, odnosno tipova:

Slučaj 1: Podgraf G je jedan od ciklusa

$$(1, 12, 2, 23, 3, 13, 1) \text{ ili } (1, 13, 3, 23, 2, 12, 1).$$

Tada je $A_G = \{1, 2, 3\}$, a π_G je permutacija (123), odnosno permutacija (132). Kako je $\bar{3} \setminus A = \emptyset$, važi $\tau_G = \emptyset$. Pošto je ovo jedini tip podgrafova koji sadrži cikluse tipa (1), slijedi da je u svim ostalim slučajevima $A_G = \emptyset$ i $\pi_G = \emptyset$, dok je $\tau_G : \bar{3} \to \bar{3}$.

Slučaj 2: Podgraf G se sastoji od tri ciklusa oblika (i, ij, j), pa transformacija τ_G nema fiksnih tačaka (ni 2-ciklusa). Dakle, $\tau_G = (1, 2, 3)$ ili $\tau_G = (1, 3, 2)$.

Slučaj 3: Pošto se podgraf G sastoji od dva ciklusa oblika (i, ij, j), te po jednog ciklusa oblika (i, i) i (ij, ij), transformacija τ_G ima jednu fiksnu tačku, i nema 2-ciklusa. Postoji tačno 9 takvih transformacija.

Slučaj 4: Kada se podgraf G sastoji od jednog ciklusa oblika (i, ij, j), te po dva ciklusa oblika (i, i) i (ij, ij), transformacija τ_G ima dvije fiksne tačke. Postoji tačno 6 takvih transformacija.

Slučaj 5: Već ranije smo vidjeli da postoji samo jedan podgraf G tipa (v), njemu odgovara tranformacija τ_G koja ima tri fiksne tačke, odnosno $\tau_G = \mathrm{id}_{\bar{3}}$.

Sabiranjem gore dobijenih rezultata imamo $|\mathcal{G}_3| = 2 + 2 + 9 + 6 + 1 = 20$. S druge strane, uvrštavanjem u formulu iz poslednje teoreme dobijamo

$$|\mathcal{G}_3| = a_0 b_{3,3} + a_1 b_{3,2} + a_2 b_{3,1} + a_3 b_{3,0} = 1 \cdot 18 + 0 + 0 + 2 \cdot 1 = 20.$$

U Tabeli 4 dajemo još neke izračunate vrijednosti ([9], Tabela 6) broja minimalnih idempotentnih generatornih skupova ideala $I_{n-1}(\mathcal{P}_n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert\mathcal{G}_n\rvert$	1	1	3	20	201	2604	40915	754368	15960945	381141008

Tabela 4: Broj minimalnih idempotentnih generatornih skupova polugrupe $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$, za $0 \leq n \leq 9$.

7 Brauerov monoid

Definisali smo Brauerov monoid $\mathcal{B}_n$ kao podmonoid $\mathcal{P}_n$ koji se sastoji od dijagrama čiji su svi blokovi veličine 2. Međutim, Brauerov monoid je dosta stariji pojam od dijagram monoida, prvi put uveden u radu R. Brauera ([2]), u cilju izučavanja teorije reprezentacija nekih klasa grupa. Brauerove polugrupe predstavljaju bazu Brauerovih algebri, koje su značajan predmet izučavanja u teoriji reprezentacija.

Jednako zanimljiv predmet izučavanja je struktura Brauerovih monoida, te njihove kombinatorne osobine. Osnovne osobine Brauerovog i parcijalnog Brauerovog monoida su detaljno izučavane u [36]. Daljni razvoj istraživanja ovih polugrupa možemo pratiti u radovima [36], [33], [29] i [31]. U ovom poglavlju navešćemo osnovne osobine izvedene u [36] i [31], a zatim ćemo se posvetiti kombinatornim osobinama Brauerovog monoida koje se mogu izvesti iz dobijenih rezultata za dijagram monoide. Specijalno, navešćemo karakterizaciju i prebrojavanje idempotenata Brauerovog monoida izvedenu u [5], te primijeniti rezultate poglavlja 2 na računanje ranga ideala monoida $\mathcal{B}_n$, opet prateći rad [9].

7.1 Osnovne osobine

Nije teško vidjeti da Brauerov monoid $\mathcal{B}_n$ sadrži tačno $(2n-1)!!$ elemenata - to je upravo broj particija skupa $\bar{n} \cup \bar{n}'$ u blokove veličine 2. Zaista, možemo podijeliti skup $\bar{n} \cup \bar{n}'$ u dvočlane podskupove na

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

načina. Pri tome, redoslijed odabira skupova nije bitan za određivanje dijagrama iz $\mathcal{B}_n$, pa imamo $n!$ ponavljanja u gornjem prebrojavanju. Odatle dobijamo

$$|\mathcal{B}_n| = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n} = (2n-1)!!.$$

Neka je α proizvoljan dijagram iz $\mathcal{B}_n$. Tada je blok zapis dijagrama α oblika

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \cline{2-2} B_i & D_k \end{array}\right]_{i\in I, j\in J, k\in K}$$

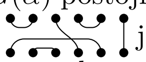
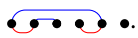
gdje je $|A_i| = |B_i| = 1$ za sve $i \in I$, i $|C_j| = |D_k| = 2$ za sve $j \in J$, $k \in K$. Pri tome mora biti ispunjeno i $|J| = |K|$, te $|I| = n - 2|J|$. Prema tome, rang elemenata iz $\mathcal{B}_n$ uzima samo vrijednosti iz skupa

$$\{n, n-2, n-4, \ldots, n_0\}$$

gdje je $n_0 = 0$ ako je n parno, odnosno $n_0 = 1$ ako je n neparno. Elementi Brauerovog monoida ranga n su upravo jedini invertiblini elemenati monoida $\mathcal{B}_n$. Grupa invertibilnih elementa $\mathcal{B}_n$ je izomorfna simetričnoj grupo $\mathcal{S}_n$. Jedinica monoida $\mathcal{B}_n$ je upravo identičko preslikavanje $\mathrm{id}_n = 1_{\mathcal{P}_n}$.

Za dijagrame iz Brauerovog monoida ćemo takođe posmatrati skupove domen i kodomen, te relacije kernel i kokernel. Neka je $\alpha \in \mathcal{B}_n$ proizvoljno. Primijetimo prvo da su klase ekvivlencije relacija $\ker(\alpha)$ i $\operatorname{coker}(\alpha)$ jednočlane ili dvočlane. Pri tome jednočlane klase ekvivalencije $\ker(\alpha)$ i $\operatorname{coker}(\alpha)$ određuju upravo skupove $\operatorname{dom}(\alpha)$ i $\operatorname{codom}(\alpha)$ redom, odnosno

$$\operatorname{dom}(\alpha) = \{i \in \bar{n} : \{i\} \text{ je klasa ekvivalencije } \ker(\alpha)\}$$
$$\operatorname{codom}(\alpha) = \{i \in \bar{n} : \{i\} \text{ je klasa ekvivalencije } \operatorname{coker}(\alpha)\}$$

Takođe važi $|\operatorname{dom}(\alpha)| = |\operatorname{codom}(\alpha)| = \operatorname{rang}(\alpha)$. Dakle, domen i kodomen dijagrama $\alpha \in \mathcal{B}_n$ su u potpunosti određeni kernelom i kokernelom. Međutim, dijagram α nije jedinstveno određen svojim kernelom i kokernelom. Naime, u $\mathcal{B}_n$ postoji postoji tačno $r!$ različitih dijagrama koji imaju isti kernel i kokernel kao α, gdje je $r = \operatorname{rang}(\alpha) = |\operatorname{dom}(\alpha)|$. Za $\alpha \in \mathcal{B}_n$ transverzalni dijelovi $UT(\alpha)$ i $DT(\alpha)$ pridruženih uzoraka su diskretni grafovi (nemaju čvorova). U netransverzalnim dijelovima $UN(\alpha)$ i $DN(\alpha)$ svaka komponenta je kardinalnosti 2. Pri tome, u grafu $G(\alpha)$ postoji jednak broj crvenih i plavih grana. Na primjer, za dijagram $\alpha =$  je $G(\alpha) =$ .

Lako vidimo da je monoid $\mathcal{B}_n$ zatvoren u odnosu na involuciju $*$ na monoidu $\mathcal{P}_n$, odnosno da je $(\mathcal{B}_n, \cdot, *)$ $*$-regularna polugrupa. Iz Teoreme 1.16 slijedi da su Grinove relacije $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{H}$ na polugrupi $\mathcal{B}_n$ upravo restrikcije odgovorajućih relacija na $\mathcal{P}_n$. Sljedeći rezultat možemo naći u [36] (Teorema 7) i [13] (Posljedica 3.2).

Tvrđenje 7.1. *Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_n$, tada je*

(i) $\alpha \mathcal{R} \beta$ *ako i samo ako je* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$;

(ii) $\alpha \mathcal{L} \beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\beta)$;

(iii) $\alpha \mathcal{D} \beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(\alpha) = \operatorname{rang}(\beta)$;

(iv) $\mathcal{J} = \mathcal{D}$;

(v) $\beta \in \mathcal{B}_n \alpha \mathcal{B}_n$ *ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(\beta) \leq \operatorname{rang}(\alpha)$;

(vi) $\alpha \mathcal{H} \beta$ *ako i samo ako je* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ *i* $\operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\beta)$.

Dokaz. (i) Iz Tvrđenja 3.1 slijedi da je $\alpha\mathcal{R}\beta$ ako i samo ako je $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ i $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$. Kako je domen Brauerovog dijagrama jedinstveno određen njegovim kernelom, slijedi da je $\alpha\mathcal{R}\beta$ ako i samo ako je $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

(ii) Analogno dokazu (i).

(iii) Ako je $\alpha\mathcal{D}\beta$, tada je $\alpha\mathcal{R}\gamma$ i $\gamma\mathcal{L}\beta$ za neko $\gamma \in \mathcal{B}_n$. Iz (i) i (ii) slijedi da je $\ker(\alpha) = \ker(\gamma)$ i $\mathrm{coker}(\gamma) = \mathrm{coker}(\beta)$. Odatle dalje slijedi da je $\mathrm{rang}(\alpha) = \mathrm{rang}(\gamma) = \mathrm{rang}(\beta)$. Dalje, neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_n$ takvi da je $\mathrm{rang}(\alpha) = \mathrm{rang}(\beta) = r$. Za $1 \le r = n - 2k \le n$ definišimo dijagram

$$f_r = \left[\begin{array}{c|c} x & r + (2y-1), r + 2y \\ \hline x & r + (2y-1), r + 2y \end{array} \right]_{1 \le x \le r, 1 \le y \le k}.$$

Neka je $\gamma \in \mathcal{B}_n$ takav da je $\ker(\gamma) = \ker(\alpha)$ i $\mathrm{coker}(\gamma) = \mathrm{coker}(f_r)$. Iz (i) i (ii) onda slijedi $\alpha\mathcal{R}\gamma$ i $\gamma\mathcal{L}f_r$, pa je $\alpha\mathcal{D}f_r$. Slično dobijamo da postoji $\delta \in \mathcal{B}_n$ takav da je $\mathrm{coker}(\delta) = \mathrm{coker}(\beta)$ i $\ker(\delta) = \ker(f_r)$. Odatle slijedi da je $\beta\mathcal{L}\delta$ i $\delta\mathcal{R}f_r$, pa je $\beta\mathcal{D}f_r$. Dakle, važi $\alpha\mathcal{D}\beta$.

(iv) Analogno dokazu dijela (iv) Teoreme 3.1.

(v) Pretpostavimo da je $\beta \in \mathcal{B}_n\alpha\mathcal{B}_n$, tada je $\beta = \gamma\alpha\delta$ za neke $\gamma, \delta \in \mathcal{B}_n$. Odatle slijedi $\mathrm{rang}(\beta) = \mathrm{rang}(\gamma\alpha\delta) \le \mathrm{rang}(\gamma\alpha) \le \mathrm{rang}(\alpha)$. Za drugi smjer, pretpostavimo da su $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_n$ takvi da je $s = \mathrm{rang}(\beta) \le \mathrm{rang}(\alpha) = r$. Znamo da postoji dijagram $\gamma \in \mathcal{B}_n$ takav da je $\ker(\gamma) = \ker(\beta)$ i $\mathrm{coker}(\gamma) = \mathrm{coker}(f_s)$ (postoji tačno $s!$ takvih dijagrama γ). Iz (i) i (ii) onda slijedi $\beta\mathcal{R}\gamma$ i $\gamma\mathcal{L}f_s$, odakle je $\beta\mathcal{D}f_s$. Slično, neka je $\delta \in \mathcal{B}_n$ takav da je $\ker(\delta) = \ker(f_r)$ i $\mathrm{coker}(\delta) = \mathrm{coker}(\alpha)$. Tada iz (i) i (ii) slijedi $\delta\mathcal{R}f_r$ i $\alpha\mathcal{L}\delta$, pa je $\alpha\mathcal{D}f_r$. Pošto je ispunjeno $f_s = f_r f_s = f_s f_r$, važi $J(f_s) = \mathcal{B}_n f_s \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_n f_r \mathcal{B}_n = J(f_r)$. Iz (iv) slijedi da je $J(f_s) = J(\beta)$ i $J(f_r) = J(\alpha)$, pa konačno dobijamo $\mathcal{B}_n\beta\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_n\alpha\mathcal{B}_n$, odakle slijedi $\beta \in \mathcal{B}_n\alpha\mathcal{B}_n$.

(vi) Slijedi direktno iz (i) i (ii). □

Za $0 \le r = n - 2k \le n$ definišimo relaciju ekvivalencije ω_r na skupu $\bar{n}$ tako da su $\{1\}, \ldots, \{r\}$ jednočlane klase, a $\{r+1, r+2\}, \ldots, \{n-1, n\}$ dvočlane klase ekvivalencije ω_r. Lako vidimo da je $\omega_r = \ker(f_r) = \mathrm{coker}(f_r)$. Posmatrajmo zatim skupove

$$\tilde{\mathcal{S}}_r = \{\alpha \in \mathcal{B}_n : \ker(\alpha) = \mathrm{coker}(\alpha) = \omega_r\}.$$

Elementi skupa $\tilde{\mathcal{S}}_r$ predstavljaju upravo $\mathcal{H}$-klasu H_{f_r}. Očigledno je skup $\tilde{\mathcal{S}}_r$ izomorfan simetričnoj grupi $\mathcal{S}_r$. Iz Tvrđenja 1.2 i 7.1 slijedi da su sve maksimalne podgrupe Brauerovog monoida izomorfne simetričnoj grupi $\mathcal{S}_r$ za neko $0 \le r = n - 2k \le n$.

Iz Tvrđenja 7.1 dobijamo i da $\mathcal{J}$-klase u $\mathcal{B}_n$ čine lanac

$$J_{n_0}(\mathcal{B}_n) < J_{n_0+2}(\mathcal{B}_n) < \ldots < J_{n-2}(\mathcal{B}_n) < J_n(\mathcal{B}_n),$$

gdje je $J_{n-2i}(\mathcal{B}_n) = \{\alpha \in \mathcal{B}_n : \operatorname{rang}(\alpha) = n - 2i\}$, za $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Iz Teoreme 2.7 slijedi da su ideali u $\mathcal{B}_n$ upravo skupovi

$$I_{n-2i}(\mathcal{B}_n) = \{\alpha \in \mathcal{B}_n : \operatorname{rang}(\alpha) \leq n - 2i\} = I_{n-2i}(\mathcal{P}_n) \cap \mathcal{B}_n.$$

Singularni dio $\mathcal{B}_n$ je prema tome ideal $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n = I_{n-2}(\mathcal{B}_n)$.

7.2 Idempotenti Brauerovog monoida

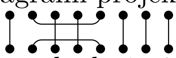
Metode klasifikacije i prebrojavanja idempotenata primijenjena na dijagram monoid u [5] se mogu primijeniti i na Brauerov monoid. Štaviše, u istom radu su izvedene formule i za broj idempotenata parcijalnog Brauerovog monoida $\mathcal{PB}_n$ i monoida transformacija $\mathcal{T}_n$. Prije samog prebrojavanja idempotenata u $\mathcal{B}_n$ opisaćemo jedan poseban tip idempotenata.

Iz Leme 4.3 slijedi da $\alpha \in \mathcal{B}_n$ projekcija ako i samo ako je oblika

$$\tau_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} x_i & y_j, z_j \\ \hline x_i & y_j, z_j \end{array}\right]_{i \in I, j \in J},$$

gdje je $|I| = n - 2|J|$. Za $1 \leq i < j \leq n$ definišimo dijagram τ_{ij} kao

$$\tau_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} k & i, j \\ \hline k & i, j \end{array}\right]_{k \in \bar{n} \setminus \{i,j\}}.$$

Očigledno su ovako definisani dijagrami projekcije. Na primjer za $i = 2, j = 5$ imamo sljedeći dijagram $\tau_{25} =$  u $\mathcal{B}_8$. Direktnim množenjem lako uočavamo da je $\tau_{ij}\tau_{kl} = \tau_{kl}\tau_{ij}$ kada je $i \neq k, l$ i $j \neq k, l$. Dijagrame τ_{ij} nazivaćemo atomima, a opravdanje za takav naziv slijedi iz narednog tvrđenja.

Tvrđenje 7.2. *([36], Posljedica 1) Svaki neinvertibilan idempotent Brauerovog monoida se može napisati kao proizvod atoma.*

Primijetimo da je jedini invertibilan idempotent u $\mathcal{B}_n$ upravo jedinica monoida $1_{\mathcal{B}_n} = \mathrm{id}_{\bar{n}}$. Prema tome, iz Tvrđenja 7.2 slijedi

$$E(\mathcal{B}_n) \setminus \{1\} \subseteq \langle \{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle.$$

Podsjetimo se da je idempotent $\alpha \in \mathcal{P}_n$ nesvodljiv ako i samo ako je $\operatorname{Ker}(\alpha) = \bar{n} \times \bar{n}$. Iz Tvrđenja 4.1 slijedi da je rang nesvodljivog idempotenta jednak 0 ili 1. Prema tome, za proizvoljan nesvodljiv idempotent $\alpha \in \mathcal{B}_n$ je ispunjeno

$$\operatorname{rang}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } n \text{ neparno}, \\ 0 & \text{ako je } n \text{ parno}. \end{cases}$$

Odatle slijedi da je nesvodljiv dijagram iz $\mathcal{B}_n$ jedinstveno određen svojim kernelom i kokernelom, odnosno pridruženim grafom $G(\alpha)$.

Posmatrajući dokaz Teoreme 4.2 lako je vidjeti da svi argumenti vrijede i u slučaju idempotenata Brauerovog monoida. Prema tome, ako $e(\mathcal{B}_n)$ označava broj idempotenata Brauerovog monoida, a $c(\mathcal{B}_n)$ broj nesvodljivih idempotenata $\mathcal{B}_n$, tada vrijedi sljedeće tvrđenje.

Teorema 7.1. *([5], Teorema 7) U Brauerovom monoidu $\mathcal{B}_n$ važi sljedeća formula*

$$e(\mathcal{B}_n) = n! \cdot \sum_{\mu \vdash n} \prod_{i=1}^{n} \frac{c(\mathcal{B}_i)^{\mu_i}}{\mu_i!(i!)^{\mu_i}}.$$

Takođe, niz brojeva $e(\mathcal{B}_n)$ zadovoljava rekurentnu vezu

$$e(\mathcal{B}_0) = 1, e(\mathcal{B}_n) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} c(\mathcal{B}_m) e(\mathcal{B}_{n-m}), \text{ za } n \geq 1.$$

Da bismo izveli rekurentnu formulu za broj nesvodljivih idempotenata u Brauerovom monoidu iskoristićemo jednostavnu osobinu grafova $G(\alpha)$.

Lema 7.1. *([5], Lema 16) Neka je $\alpha \in \mathcal{B}_n$ nesvodljiv idempotent. Tada je $G(\alpha)$ ili ciklus ili put.*

Dokaz. Za $n = 1$ tvrđenje trivijalno važi. Neka je $n \geq 2$, i $\alpha \in C(\mathcal{B}_n)$. Tada iz svakog čvora grafa $G(\alpha)$ polazi najviše jedna crvena i najviše jedna plava grana. Prema tome, stepen svakog čvora je najviše 2. Odatle slijedi da je $G(\alpha)$ unija ciklusa i puteva. Pošto je α nesvodljiv idempotent važi $\mathrm{Ker}(\alpha) = \bar{n} \times \bar{n}$, pa je graf $G(\alpha)$ povezan. Iz toga konačno dobijamo da je $G(\alpha)$ ciklus ili put, u kome su crvene i plave grane alternirajuće. $\square$

U narednom tvrđenju su date rekurentne formule za određivanje niza brojeva $c(\mathcal{B}_n)$. Kao i za dijagram monoida, $c_0(\mathcal{B}_n)$ i $c_1(\mathcal{B}_n)$ označavaju broj nesvodljivih idempotenata ranga 0, odnosno 1 u $\mathcal{B}_n$.

Tvrđenje 7.3. *([5], Tvrđenje 17) Ako je $n \geq 1$ tada je*

$$c_0(\mathcal{B}_n) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ (n-1)! & \text{ako je } n \text{ paran,} \end{cases}$$

$$c_0(\mathcal{B}_n) = \begin{cases} n! & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ 0 & \text{ako je } n \text{ paran,} \end{cases}$$

$$c_0(\mathcal{B}_n) = \begin{cases} n! & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ (n-1)! & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $\alpha \in \mathcal{B}_n$ nesvodljiv idempotent. Iz Leme 7.1 slijedi da je $G(\alpha)$ ciklus ili put. Dijagram α je jedinstveno određen svojim grafom $G(\alpha)$, i obratno, svaki ciklus/put na n čvorova određuje jedan nesvodljiv idempotent α.

Ako je n neparan broj, tada $\mathrm{rang}(\alpha)$ mora biti jednak 1. Neka je $\{i, j'\}$ jedini transverzalni blok α. Tada ne postoji grana $\{i, j\}$ u grafu $G(\alpha)$, pa $G(\alpha)$ mora biti put. Postoji $n!$ takvih puteva, pa slijedi $c(\mathcal{B}_n) = c_1(\mathcal{B}_n) = n!$. Slično, ako je n paran broj, tada je $\mathrm{rang}(\alpha) = 0$ i graf $G(\alpha)$ je ciklus. Pošto postoji $(n-1)!$ ciklusa na n čvorova, slijedi da je $c(\mathcal{B}_n) = c_0(\mathcal{B}_n) = (n-1)!$. □

Uvrštavanjem gornjih rezultata u Teoremu 7.1 dobijamo eksplicitnu formulu za broj idempotenata u $\mathcal{B}_n$.

Teorema 7.2. *([5], Teorema 18) Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tada je*

$$e(\mathcal{B}_n) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i! \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j)^{\mu_{2j}}}.$$

Dokaz. Iz Teoreme 7.1 i Tvrđenja 7.3 imamo

$$\begin{aligned} e(\mathcal{B}_n) &= n! \cdot \sum_{\mu \vdash n} \prod_{i=1}^{n} \frac{c(\mathcal{B}_i)^{\mu_i}}{\mu_i!(i!)^{\mu_i}} = \\ &= n! \cdot \sum_{\mu \vdash n} \frac{(1!)^{\mu_1}(1!)^{\mu_2}(3!)^{\mu_3}(3!)^{\mu_4}\dots}{\mu_1! \dots \mu_n! \cdot (1!)^{\mu_1}(2!)^{\mu_2}(3!)^{\mu_3}(4!)^{\mu_4}\dots} = \\ &= n! \cdot \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{\mu_1! \dots \mu_n! \cdot 2^{\mu_2} 4^{\mu_4} \dots}, \end{aligned}$$

čime je pokazano tvrđenje. □

Iz Tvrđenja 7.3 i Teoreme 4.2 slijedi i sljedeća rekurentna formula za niz brojeva $e(\mathcal{B}_n)$.

Teorema 7.3. *([5], Teorema 20) Brojevi $e(\mathcal{B}_n)$ zadovoljavaju sljedeću rekurentu vezu*

$$\begin{aligned} & e(\mathcal{B}_0) = 1, \\ & e(\mathcal{B}_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i-1} (2i-1)! e(\mathcal{B}_{n-2i}) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} (2i+1)! e(\mathcal{B}_{n-2i-1}), \end{aligned}$$

za $n \geq 1$.

Dokaz. Iz Tvrđenja 7.3 i Teoreme 4.2 slijedi $e(\mathcal{B}_0) = 1$ i

$$\begin{aligned}
e(\mathcal{B}_n) &= \sum_{m=1} \binom{n-1}{m-1} c(\mathcal{B}_m) e(\mathcal{B}_{n-m}) = \\
&= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i-1} c(\mathcal{B}_{2i}) e(\mathcal{B}_{n-2i}) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} c(\mathcal{B}_{2i+1}) e(\mathcal{B}_{n-2i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i-1} (2i-1)! e(\mathcal{B}_{n-2i}) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} (2i+1)! e(\mathcal{B}_{n-2i-1}),
\end{aligned}$$

za sve $n \geq 1$. $\square$

7.3 Rang Brauerovog monoida

U [36] je pokazano da je Brauerov monoida generisan skupom svih permutacija i proizvoljnim atomom. Koristeći poznat minimalan generatorni skup grupe permutacija $\mathcal{S}_n$ i pomenuto tvrđenje odredićemo rang Brauerovog monoida.

Tvrđenje 7.4. *([36], Lema 10) Brauerov monoid $\mathcal{B}_n$ je generisan sa $\mathcal{S}_n$ i proizvoljnim atomom.*

Dokaz. Neka je τ_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$ proizvoljan atom. Označimo sa S polugrupu generisanu skupom $\mathcal{S}_n \cup \{\tau_{ij}\}$. Neka je τ_{kl}, $1 \leq k < l \leq n$ atom, tada je $\tau_{kl} = (ik)(jl)\tau_{ij}(jl)(ik)$, pa je i $\tau_{kl} \in S$. Iz Tvrđenja 7.2 slijedi da je skup svih idempotenata $E(\mathcal{B}_n)$ sadržan u S. Neka je sada α proizvoljan dijagram iz $\mathcal{B}_n$, i neka je njegov blok zapis

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} x_i & z_j, t_j \\ \hline y_i & u_j, v_j \end{array} \right]_{i \in I, j \in J},$$

pri čemu je $z_j < t_j$ i $u_j < v_j$ za sve $j \in J$. Definišimo permutaciju $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sa

$$\sigma = \left[\begin{array}{c|c|c} y_i & u_j & v_j \\ x_i & z_j & t_j \end{array} \right]_{i \in I, j \in J}.$$

Tada je proizvod dijagrama α i σ jednak

$$\beta = \left[\begin{array}{c|c} x_i & z_j, t_j \\ \hline x_i & z_j, t_j \end{array} \right]_{i \in I, j \in J}$$

odakle lako vidimo da je $\beta = \alpha\sigma$ idempotent. Odatle slijedi $\alpha = \beta\sigma^{-1} \in S$. Time smo pokazali da je $\mathcal{B}_n = S = \langle S_n \cup \{\tau_{ij}\} \rangle$. $\square$

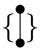
Vidjeli smo da se simetrična grupa $\mathcal{S}_n$ može generisati sa dva elementa s_{n-1} i $s_{n-1}s_{n-2}\dots s_1$. Iz gornjeg tvrđenja slijedi da je

$$\mathcal{B}_n = \langle\{s_{n-1}, s_{n-1}s_{n-2}\dots s_1, \tau_{12}\}\rangle.$$

Pokazaćemo da je navedeni generatorni skup minimalan.

Teorema 7.4. *Rang Brauerovog monoida je jednak*

$$\operatorname{rang}(\mathcal{B}_n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 2 & n = 2, \\ 3 & n \geq 3. \end{cases}$$

Dokaz. Prvo, za $n = 1$ je $\mathcal{B}_n = \{$$\}$, pa je očigledno $\operatorname{rang}(\mathcal{B}_n) = 1$. Neka je $n \geq 2$, tada znamo da je $\{s_{n-1}, s_{n-1}s_{n-2}\dots s_1, \tau_{12}\}$ jedan generatorni skup za $\mathcal{B}_n$, pa je $\operatorname{rang}(\mathcal{B}_n) \leq 3$. Pri tome je za $n = 2$ ispunjeno $s_{n-1} = s_{n-1}s_{n-2}\dots s_1 = s_1$, odakle slijedi $\operatorname{rang}(\mathcal{B}_2) \leq 2$. Pretpostavimo da je Ω generatorni skup monoida $\mathcal{B}_n$. Pošto je $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$ ideal, Ω mora da sadrži podskup Σ' koji generiše simetričnu grupu $\mathcal{S}_n$. Pri tome važi $|\Sigma'| \geq 2$ za $n \geq 3$, odnosno $|\Sigma'| \geq 1$ za $n = 2$. Pored elemenata Σ', Ω mora da sadrži bar još jedan generator, pa je $|\Omega| \geq 3$ za $n \geq 3$, odnosno $|\Omega| \geq 2$ za $n = 2$, čime je tvrđenje pokazano. $\square$

7.4 Ideali Brauerovog monoida

Pokazaćemo da se za određivanje ranga ideala Brauerovog monoida mogu koristiti rezultati Teoreme 2.7. Iz [33] znamo da je singularni dio Brauerovog monoida, odnosno maksimalni ideal $I_{n-2}(\mathcal{B}_n)$, idempotentno generisan.

Teorema 7.5. *([33], Tvrđenje 2) Singularni dio $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$ Brauerovog monoida je idempotentno generisan. Skup $\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ je jedan minimalni generatorni skup za $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$.*

Iz gornje teoreme slijedi da je $\operatorname{rang}(\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n) = \binom{n}{2}$. Vidjeli smo da se svi neinvertibilni idempotenti mogu napisati kao proizvodi nekih elemenata skupa $\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Odatle slijedi

$$\mathbb{E}(\mathcal{B}_n) \setminus \{1\} \subseteq \langle\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}\rangle.$$

Kako je $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n = \langle\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}\rangle$, iz gornje relacije dalje slijedi

$$\mathbb{E}(\mathcal{B}_n) = (\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n) \cup \{1\}.$$

Sada ćemo pokazati da se svi elementi manjeg ranga iz $\mathcal{B}_n$ mogu izraziti preko elemenata većeg ranga.

Lema 7.2. *([9], Lema 8.3) Za sve $0 \leq r \leq n-4$ važi $J_r(\mathcal{B}_n) \subseteq \langle J_{r+2}(\mathcal{B}_n)\rangle$.*

Dokaz. Prema Teoremi 2.7 znamo da je dovoljno da pokažemo tvrđenje za projekcije ranga r. Neka je $\alpha \in J_r(\mathcal{B}_n)$ projekcija. Tada je

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} A_i & C_j \\ \hline A_i & C_j \end{array} \right]_{i\in I, j\in J}.$$

Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $J = \bar{k}$, gdje je $r = n - 2k$. Za $j \in J$ neka je $C_j = \{a_j, b_j\}$, gdje je $a_j < b_j$. Tada je $\alpha = \tau_{a_1b_1} \ldots \tau_{a_kb_k}$. Pošto su dijagrami $\tau_{a_jb_j}$ međusobno komutativni, i idempotenti, slijedi da dijagram α možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \alpha &= \tau_{a_1b_1}(\tau_{a_2b_2})^2 \ldots (\tau_{a_{k-1}b_{k-1}})^2 \tau_{a_kb_k} = \\ &= (\tau_{a_1b_1}\tau_{a_2b_2} \ldots \tau_{a_{k-1}b_{k-1}})(\tau_{a_2b_2} \ldots \tau_{a_{k-1}b_{k-1}}\tau_{a_kb_k}) \end{aligned}$$

gdje su elementi $\tau_{a_1b_1}\tau_{a_2b_2} \ldots \tau_{a_{k-1}b_{k-1}}$ i $\tau_{a_2b_2} \ldots \tau_{a_{k-1}b_{k-1}}\tau_{a_kb_k}$ ranga $r + 2$. Prema tome $\alpha \in \langle J_{r+2}(\mathcal{B}_n)\rangle$. □

Teorema 7.6. *([9], Teorema 8.4) Za sve $0 \leq r = n - 2k \leq n - 2$ je ideal $I_r(\mathcal{B}_n)$ idempotentno generisan, pri čemu je*

$$\operatorname{rang}(I_r(\mathcal{B}_n)) = \operatorname{idrang}(I_r(\mathcal{B}_n)) = \binom{n}{2k}(2k-1)!! = \frac{n!}{2^k k! r!}.$$

Takođe, podskup $A \subseteq I_r(\mathcal{B}_n)$ kardinalnosti $\operatorname{rang}(I_r(\mathcal{B}_n))$ je minimalan generatorni skup za $I_r(\mathcal{B}_n)$ ako i samo ako su ispunjena sljedeća tri uslova:

(i) $\operatorname{rang}(\alpha) = r$ *za sve $\alpha \in A$;*

(ii) za sve $\alpha, \beta \in A$ važi $\ker(\alpha) \neq \ker(\beta)$ *ako je $\alpha \neq \beta$;*

(iii) za sve $\alpha, \beta \in A$ važi $\operatorname{coker}(\alpha) \neq \operatorname{coker}(\beta)$ *ako je $\alpha \neq \beta$.*

Dokaz. Iz Teoreme 7.5 znamo da je polugrupa $I_{n-2}(\mathcal{B}_n) = \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$ idempotentno generisana. Onda iz Teoreme 2.7 i Leme 7.2 slijedi da su za sve $0 \leq r \leq n-4$ ideali $I_r(\mathcal{B}_n)$ idempotentno generisane polugrupe, za koje važi

$$\operatorname{rang}(I_r(\mathcal{B}_n)) = \operatorname{idrang}(I_r(\mathcal{B}_n)) = \rho_{nr},$$

gdje je ρ_{nr} broj $\mathcal{R}$-klasa ekvivlencije sadržanih u $J_r(\mathcal{B}_n)$. Iz Teoreme 7.1 slijedi da je ρ_{nr} jednak broju relacija ekvivalencije na $\bar{n}$ koje imaju tačno k dvočlanih klasa ekvivalencije, i r jednočlanih klasa ekvivalencije. Elemente koji pripadaju dvočlanim klasama ekvivalencije možemo izabrati na $\binom{n}{2k}$ načina, a te elemente zatim možemo rasporediti u klase na $(2k-1)!!$ načina. Time su jedinstveno određene i jednočlane klase, pa je

$$\rho_{nr} = \binom{n}{2k}(2k-1)!! = \frac{n!}{(2k)!r!}(2k-1)!! = \frac{n!}{2^k k! r!}.$$

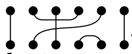
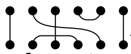
Drugi dio teoreme slijedi iz Teoreme 2.4 analogno kao u dokazu Teoreme 6.1. □

Za $r = n-2$, odnosno $k = 1$, dobijamo $\operatorname{rang}(I_{n-2}) = \binom{n}{2}$, što se naravno slaže sa rezultatom dobijenim u Teoremi 7.5.

Kao i za singularni dio dijagram monoida $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{S}_n$, problem određivanja svih minimalnih idempotentnih generatornih skupova polugrupe $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$ se svodi na problem pronalaženja svih balansiranih podgrafova grafa projekcija $\Gamma(\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n) = \Gamma(J_{n-2}(\mathcal{B}_n)^*)$. U tom cilju ćemo prvo opisati skup svih idempotenata sadržanih u $\mathcal{J}$-klasi $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ Brauerovog monoida $\mathcal{B}_n$.

Za trojke međusobno različitih brojeva $i, j, k \in \bar{n}$ definišemo dijagram σ_{ijk} kao

$$\sigma_{ijk} = \left[\begin{array}{c|c|c} x & k & i,j \\ \cline{3-3} x & k & j,k \end{array}\right]_{x \in \bar{n} \setminus \{i,j,k\}}$$

Navešćemo nekoliko primjera ovakvih dijagrama iz $\mathcal{P}_6$. Za $i < j < k$ je $\sigma_{245} =$ , dok za $k < j < i$ imamo $\sigma_{542} =$ . Odatle vidimo da je $\sigma_{ijk} = \sigma^*_{kji}$ za sve trojke i, j, k, takve da je $k < j < i$. Slično zaključujemo da je $\sigma_{ijk} = \sigma^*_{kji}$, za sve i, j, k takve da je $k < i < j$, odnosno $j < k < i$.

Direktnim množenjem lako provjeravamo da su svi dijagrami ovog oblika idempotenti ranga $n-2$. Prethodno smo posmatrali i skup projekcija $\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ ranga $n-2$ koje generišu singularni dio $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$ monoida $\mathcal{B}_n$. Pokaćemo da pored navedenih, ne postoji više idempotenata u $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$.

Lema 7.3. *([9], Lema 8.6) Skup projekcija sadržanih u $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ je jednak*

$$\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Skup idempotenata sadržanih u $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ je jednak

$$\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\sigma_{ijk} : i, j, k \in \bar{n} \text{ međusobno različiti}\}.$$

Dokaz. Znamo da su idempotenti u $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ generisani projekcijama iz viših $\mathcal{J}$-klasa. Kako je jedina projekcija u $J_n(\mathcal{B}_n)$ upravo $\mathrm{id}_{\bar{n}}$ slijedi da je $E(J_{n-2}(\mathcal{B}_n)) \subseteq P(J_{n-2}(\mathcal{B}_n))^2$. Neka je $\alpha \in J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ projekcija, tada je

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c} x_i & y_j, z_j \\ \cline{2-2} x_i & y_j, z_j \end{array}\right]_{i \in I, j \in J}$$

gdje je $|I| = \operatorname{rang}(\alpha) = n-2$. Odatle slijedi da je $|J| = 1$, pa je $\alpha = \tau_{yz}$. Prema tome, skup projekcija u $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ je jednak $\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Dalje, množenjem dobijamo da su jedini parovi projekcija iz $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ čiji proizvod leži u $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ sljedeći

(i) τ_{ij} i τ_{ij}, gdje je $\tau_{ij}^2 = \tau_{ij}$,

(ii) τ_{ij} i τ_{jk}, gdje je $\tau_{ij}\tau_{jk} = \sigma_{ijk}$.

Odatle slijedi i drugi dio tvrđenja. $\square$

Iz prethodne leme slijedi da je u glavnom faktoru $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)^*$ množenje definisano sa

$$\tau_{ij} \cdot \tau_{kl} = \begin{cases} \tau_{ij} & \text{za } i = k, j = l \\ \sigma_{ijk} & \text{za } |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 1 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema tome, u grafu $\Theta_n = \Gamma(\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n)$ je (τ_{ij}, τ_{kl}) grana ako i samo ako je $\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \emptyset$. Podsjetimo se da je Džonsonov graf $J(n,k)$ graf definisan na skupu čvorova $\{A \subseteq \bar{n} : |A| = k\}$, sa skupom grana

$$\{\{A, B\} : |A \cap B| = k - 1\}$$

Lako vidimo da je neusmjerena verzija grafa Θ_n bez petlji izomorfna upravo Džonsonovom $J(n,2)$ grafu. Za proizvoljan graf $G = (V, E)$ definišemo

- 1-faktor je dekompozicija grafa G u grane, tako da svaki čvor pripada tačno jednoj grani;
- 2-faktor je dekompozicija grafa G u cikluse, tako da svaki čvor pripada tačno jednom ciklusu;
- $(0,1,2)$-faktor je dekompozicija grafa G u čvorove, grane i cikluse, tako da svaki čvor pripada tačno jednom od tih elemenata.

Orijentisan $(0,1,2)$-faktor je $(0,1,2)$-faktor kod koga je svim ciklusima dodijeljena orijentacija (u pozitivnom ili negativnom smjeru). Primijetimo da svaki orijentisan $(0,1,2)$-faktor $\mathcal{F}$ Džonsonovog grafa $J(n,2)$ određuje jedan balansirani podgraf G grafa Θ_n, na sljedeći način. Svakom čvoru ij iz $\mathcal{F}$ odgovara ciklus oblika $ij - ij$ u G, dok svakoj grani (ij, kl) odgovara ciklus $ij - kl - ij$ u G. Ciklusima iz $\mathcal{F}$ samo dodijelimo odgovarajuće cikluse u G. Važi i obratna veza, svaki balansiran podgraf G grafa Θ_n određuje jedinstven orijentisan $(0,1,2)$-faktor Džonsonovog grafa $J(n,2)$. Iz uspostavljene veze između grafa projekcija Θ_n i Džonsonovog grafa $J(n,2)$ slijedi sljedeće tvrđenje.

Tvrđenje 7.5. *([9], Tvrđenje 8.7) Postoji jednoznačno uzajamna korespondencija između skupa minimalnih idempotentnih generatornih skupova polugrupe $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$ i skupa orijentisanih $(0,1,2)$-faktora Džonsonovog grafa $J(n,2)$.*

Nažalost, formula ili rekurentna veza za određivanje broja orijentisanih $(0,1,2)$-faktora Džonsonovog grafa $J(n,2)$ nije poznata. Međutim, lako možemo vidjeti da taj niz brojeva veoma brzo raste. Označimo sa d_n broj orijentisanih $(0,1,2)$-faktora Džonsonovog grafa $J(n,2)$. U grafu $J(n+1,2)$

čvorovi $\{i, n+1\}$, za $1 \leq i \leq n$ indukuju izomorfnu kopiju kompletnog grafa K_n, dok preostali čvorovi inudukuju kopiju grafa $J(n, 2)$. U kompletnom grafu K_n broj $(0, 1, 2)$ -faktora je $n!$, odakle slijedi $d_{n+1} \geq n! d_n$, i dalje

$$d_n \geq \prod_{i=1}^{n-1} i! = \prod_{i=1}^{n-1} i^{n-1}.$$

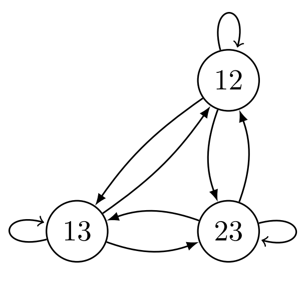
Primjer 7.1. (i) Za $n = 3$ skup projekcija ranga $n - 2 = 1$ je jednak $\{\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}\}$. Prema tome, graf projekcija Θ_3 je upravo kompletan orijentisan graf sa tri čvora (uključujući i petlju na svakom čvoru) (Slika 8). Balansirani podgraf G grafa Θ_3 može biti jednog od tri tipa:

(i) Hamiltonov ciklus $12 - 23 - 13$ iili $12 - 13 - 23$;

(ii) unija jednog ciklusa $ij - ik - ij$ i jednog ciklusa $jk - jk$ (postoje tri ovakva podgrafa);

(iii) unija ciklusa $12 - 12$, $23 - 23$ i $13 - 13$.

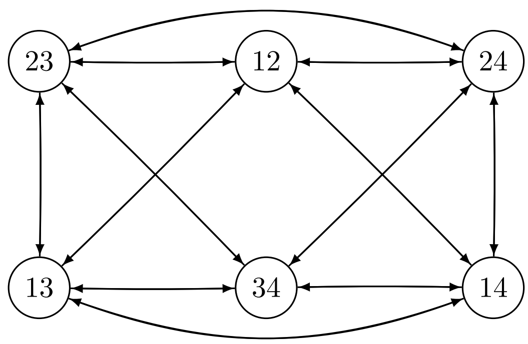
Prema tome, postoji $d_3 = 6$ balansiranih podgrafova tog grafa, pa postoji tačno 6 minimalnih idempotentnih generatornih skupova ideala $I_1(\mathcal{B}_3)$. Primijetimo i da su ovi balansirani podgrafovi grafa Θ_3, odnosno orijentisani $(0, 1, 2)$-faktori grafa $J(3, 2)$ u uzajamno jednoznačnoj vezi sa permutacijama skupa od tri elementa.



Slika 8: Graf projekcija $\Theta_3 = \Gamma(\mathcal{B}_3 \setminus \mathcal{S}_3)$

(ii) Već za $n = 4$ graf Θ_4 poprima dosta komplikovaniji oblik, pa ćemo u crtanju izostaviti petlje, te parove orijentisanih grana (ij, ik), (ik, ij) zamijeniti jednom granom $\{ij, ik\}$. Pojednostavljena verzija grafa Θ_4 je predstavljena na slici ispod. Predstavljeni graf je upravo izomorfan sa $J(4, 2)$.

Označimo čvorove grafa $J(4, 2)$ slovima a, b, c i A, B, C, tako da je presjek skupova koje određuju čvorovi x i X prazan. Na primjer, neka je $a = 12$, $b = 23$, $c = 13$, a $A = 34$, $B = 14$ i $C = 24$. Tada su orijentisani $(0, 1, 2)$-faktori grafa $J(4, 2)$ u uzajamno jednoznačnoj korespondenciji sa permutacijama skupa $\{a, b, c, A, B, C\}$ koje nikad ne slikaju x na X, i obratno, za sve $x \in$



Slika 9: Graf projekcija Θ_4 (u pojednostavljenoj formi).

n	2	3	4	5	6
d_n	1	6	265	126140	855966411

Tabela 5: Broj minimalnih idempotentnih generatornih skupova polugrupe $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{S}_n$, za $2 \leq n \leq 6$

$\{a, b, c\}$. Takve permutacije se mogu interpretirati na jedinstven način kao permutacije skupa $\bar{6} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ koje nemaju fiksnih tačaka. Očigledno važi i obratno, svaka permutacija iz $\mathcal{S}_6$ koja nema fiksnih tačaka jedinstveno određuje jednu opisanu permutaciju skupa $\{a, b, c, A, B, C\}$. Znamo da je se broj permutacija bez fiksnih tačaka skupa od n elemenata (u oznaci c_n može računati po rekurentnoj formuli

$$c_0 = 1, c_1 = 0, c_n = (n-1)(c_{n-1} + c_{n-2}), \text{ za } n \geq 2.$$

Odatle lako dobijamo da je broj orijentisanih $(0, 1, 2)$-faktora grafa $J(4, 2)$ jednak $d_4 = 265$. Dakle, postoji 265 različitih minimalnih idempotentnih generatornih skupova ideala $I_{n-2}(\mathcal{B}_n)$.

Primijetimo da je za $n \geq 4$ niz d_n ograničen odozgo brojem permutacija bez fiksnih tačaka skupa veličine $\binom{n}{2}$. Vrijednosti d_n za $n = 5, 6$ su izračunate korištenjem programskog paketa GAP (više detalja u [12] i [38]). Te vrijednosti su predstavljene u Tabeli 5.

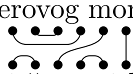
8 Džonsov monoid

Kao i Brauerov monoid, dijagrami Džonsovog monoida su povezani sa jednom familijom algebri, takozvanih Temperli-Lieb algebri. Motivacija za izučavanje particionih (ili dijagram) algebri je bila upravo u proširenju definicije Tempreli-Lieb algebri ([34] i [35]). Baza Temperli-Lieb algebre $\mathcal{TL}_n$ je takozvani Kaufmanov monoid ([30]). Kaufmanov monoid $\mathcal{K}_n$ je generisan skupom generatora $\{c, h_1, \dots, h_n\}$ koji zadovoljavaju definicione relacije

$$\begin{aligned} &h_i^2 = ch_i = h_i c, \\ &h_i h_j = h_j h_i && \text{za } |i-j| \geq 2, \\ &h_i h_j h_i = h_i && \text{za } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

Količničku polugrupu Kaufmanovog monoida, dobijenu postavljanjem $c = 1$ u gornjim relacijama, nazivamo Džonsov monoid $\mathcal{J}_n$. Kao i u slučaju Brauerove algebre, određivanje osobina Džonsovog monoida daje korisne informacije za izučavanje teorije reprezentacija odgovarajućih algebri.

8.1 Osnovne osobine

Džonsov monoid $\mathcal{J}_n$ možemo posmatrati i kao skup svih planarinih dijagrama iz $\mathcal{B}_n$. Dakle, $\mathcal{J}_n$ je presjek Brauerovog monoida $\mathcal{B}_n$ i monoida svih planarnih dijagrama $\mathcal{PP}_n$. Dijagram $\alpha =$  je primjer elementa $\mathcal{J}_6$. Elemente $\mathcal{J}_n$ možemo zapisati tako da svi čvorovi leže na jednoj pravoj, u poretku $1, 2, \dots, n, n', \dots, 2', 1'$. Tada vidimo da su dijagrami iz $\mathcal{J}_n$ u jednoznačnoj korespondenciji sa pravilnim rasporedima n parova zagrada. Prema tome, broj elemenata monoida $\mathcal{J}_n$ je upravo jednak $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, gdje C_n n-ti Katalanov broj.

Pošto je $\mathcal{J}_n$ podmonoid Brauerovog monoida, relacije kernel i kokernel takođe imaju samo dvočlane i jednočlane klase, te važi $\operatorname{rang}(\alpha) = |\operatorname{dom}(\alpha)| = |\operatorname{codom}(\alpha)|$ za sve $\alpha \in \mathcal{J}_n$. Međutim, zbog uslova planarnosti, relacije $\ker(\alpha)$ i $\operatorname{coker}(\alpha)$ zadovoljavaju i neke dodatne uslove. Da bismo lakše opisali te uslove posmatrajmo gornje i donje uzorke dijagrama iz $\mathcal{J}_n$. Graf X na skupu čvorova $\bar{n}$ je dopustiv uzorak za Džonsov monoid $\mathcal{J}_n$ ako je jednak gornjem ili donjem uzorku nekog dijagrama iz $\mathcal{J}_n$, odnosno ako zadovoljava sljedeće uslove:

(i) Stepen svakog čvora u X je najviše 1. Pri tome ćemo sa XT označavati podgraf G sastavljen od svih čvorova stepena 0, a sa XN podgraf $X \setminus XT$.

(ii) Ako je $\{i, j\}$ grana u X, i $i < j$, tada je $\deg(k) = 1$ za sve $i < k < j$.

(iii) Ako su $\{i, j\}$ i $\{k, l\}$ grane u X takve da je $i < j$, $k < l$ i $i < k$, tada je ili $j < k$ ili $l < j$.

Ako su X i Y dopustivi uzorci za Džonsov monoid, tada postoji tačno jedan dijagram α takav da je $U(\alpha) = X$ i $D(\alpha) = Y$. Dakle, dijagram iz $\mathcal{J}_n$ je jedinstveno određen svojim kernelom i kokernelom.

Očigledno je $\mathcal{J}_n$ $*$-regularan podmonoid monoida $\mathcal{B}_n$, pa iz Teoreme 1.16 slijedi da su Grinove relacije $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{H}$ u $\mathcal{J}_n$ određene restrikcijama odgovarajućih relacija na $\mathcal{B}_n$.

Tvrđenje 8.1. *([13], Posljedica 3.2) Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{J}_n$, tada je*

(i) $\alpha \mathcal{R} \beta$ *ako i samo ako je* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$*;*

(ii) $\alpha \mathcal{L} \beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\beta)$*;*

(iii) $\alpha \mathcal{D} \beta$ *ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(\alpha) = \operatorname{rang}(\beta)$*;*

(iv) $\mathcal{J} = \mathcal{D}$*;*

(v) $\beta \in \mathcal{J}_n \alpha \mathcal{J}_n$ *ako i samo ako je* $\operatorname{rang}(\beta) \leq \operatorname{rang}(\alpha)$*;*

(vi) $\alpha \mathcal{H} \beta$ *ako i samo ako je* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ *i* $\operatorname{coker}(\alpha) = \operatorname{coker}(\beta)$*.*

Dokaz. Primijetimo da dijagrami f_r, $1 \leq r \leq n$, definisani u dokazu Teoreme 7.1 pripadaju monoidu $\mathcal{J}_n$. Prema tome, dokaz se može izvesti sasvim analogno dokazu pomenute teoreme. $\square$

Pošto dopustiv gornji i donji uzorak, odnosno odgovarajuće relacije kernel i kokernel, određuju jedinstven dijagram iz $\mathcal{J}_n$, iz gornje teoreme slijedi da su sve $\mathcal{H}$-klase u $\mathcal{J}_n$ jednočlane. Dakle, maksimalne podgrupe monoida $\mathcal{J}_n$ su izomorfne groupi S_1. Iz Tvrđenja 8.1 takođe slijedi i da $\mathcal{J}$-klase u $\mathcal{J}_n$ čine lanac

$$J_{n_0}(\mathcal{J}_n) < \ldots < J_{n-2}(\mathcal{J}_n) < J_n(\mathcal{J}_n),$$

gdje je $n_0 = 0$, ako je n paran broj, a $n_0 = 1$ ako je n neparan broj. Iz Teoreme 2.7 onda slijedi da su svi ideali u $\mathcal{J}_n$ skupovi

$$I_r(\mathcal{J}_n) = \{\alpha \in \mathcal{J}_n : \operatorname{rang}(\alpha) \leq r\}$$

za neko $0 \leq r = n - 2k \leq n$, koji takođe čine jedan lanac. Jedini element ranga n u $\mathcal{J}_n$, i jedini invertibilan element je upravo je jedinični element $\mathrm{id}_{\bar{n}}$. Odatle slijedi da je singularni dio Džonsovog monoida upravo polugrupa $\mathcal{J}_n \setminus \{1\}$.

Pristup za računanje broja idempotenata koji smo koristili za monoide $\mathcal{P}_n$ i $\mathcal{B}_n$ ne daje rezultate u slučaju Džonsovog monoida. Naime, iako važi ekvivalent tvrđenja 4.2:

$$e(\mathcal{J}_n) = n! \cdot \sum_{\mu \vdash n} \prod_{i=1}^{n} \frac{c(\mathcal{J}_i)^{\mu_i}}{\mu_i!(i!)^{\mu_i}},$$

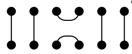
ostaje neriješen problem prebrojavanje nesvodljivih idempotenata iz $\mathcal{J}_n$. Vrijednosti $e(\mathcal{J}_n)$ za $n \leq 19$ su izračunate korištenjem matematičkog softvera GAP, i mogu se naći kao niz A225798 u [1] (autor Dž. Mičel).

Međutim, za neke vrijednosti r, jednostavno je izračunati broj svih idempotenata u $\mathcal{J}_n$ ranga jednakog r. Ako je n neparan broj, tada ne postoje elemnti ranga 0 u $\mathcal{J}_n$, dok su za n parno svi elementi ranga 0 iz $\mathcal{J}_n$ idempotenti. Prema tome, broj idempotenata ranga 0 u $\mathcal{J}_n$ je jednak

$$e(D_0(\mathcal{J}_n)) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ C_k \cdot C_k & \text{ako je } n = 2k \text{ paran,} \end{cases}$$

gdje sa C_k opet označavamo k-ti Katalnov broj.

8.2 Ideali Džonsovog monoida

Odredićemo rang ideala monoida $\mathcal{J}_n$ koristeći isti postupak kao za dijagram monoid $\mathcal{P}_n$ i Brauerov monoid $\mathcal{B}_n$. Za $1 \leq i \leq n-1$ uvedimo oznaku $\tau_i = \tau_{i,i+1}$. Na primjer, $\tau_3 =$  je jedan takav dijagram u $\mathcal{J}_6$.

Teorema 8.1. *([30]) Singularni dio $\mathcal{J}_n \setminus \{1\}$ monoida $\mathcal{J}_n$ je idempotentno generisan. Skup $\{\tau_i : 1 \leq i \leq n-1\}$ je jedan minimalan idempotentni generatorni skup.*

Iz gornje teoreme slijedi da je

$$\operatorname{rang}(\mathcal{J}_n \setminus \{1\}) = \operatorname{idrang}(\mathcal{J}_n \setminus \{1\}) = n-1.$$

Takođe slijedi da se Džonsov monoid $\mathcal{J}_n$ može generisati skupom $\{\tau_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{1\}$. Kako je 1 idempotentan element, slijedi da je $\operatorname{rang}(\mathcal{J}_n) \leq \operatorname{idrang}(\mathcal{J}_n) \leq n$. Pokazaćemo da u ovom nizu jednakosti svuda važi jednakost.

Teorema 8.2. *Džonsov monoid je idempotentno generisan i važi*

$$\operatorname{rang}(\mathcal{J}_n) = \operatorname{idrang}(\mathcal{J}_n) = n.$$

Dokaz. Neka je Ω proizvoljan generatorni skup monoida $\mathcal{J}_n$. Kako jedini element ranga n, jedinica $1 = \mathrm{id}_{\bar{n}}$, ne može biti generisan elementima nižeg ranga, mora biti $1 \in \Omega$. Singularni dio $\mathcal{J}_n \setminus \{1\}$ je ideal u $\mathcal{J}_n$, pa iz Teoreme 8.1 slijedi da je se on može generisati sa najmanje $n-1$ elemenata različitih od 1. Prema tome, važi $|\Omega| \geq n$, čime je tvrđenje pokazano. $\square$

Lema 8.1. *([9], Lema 9.3) Za sve $0 \leq r = n-2k \leq n-4$ važi*

$$J_r(\mathcal{J}_n) \subseteq \langle J_{r+2}(\mathcal{J}_n) \rangle.$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je skup $P(J_r(\mathcal{J}_n))$ sadržan u $\langle J_{r+2}(\mathcal{J}_n)\rangle$. Neka je $\alpha \in J_r(\mathcal{J}_n)$ projekcija. Kažemo da je blok $\{l, m\}$ okružen blokom $\{u, v\}$ ako je $u < l < m < v$. Razlikovaćemo dva slučaja:

Slučaj 1: α ima dva bloka $\{i, i+1\}$ i $\{j, j+1\}$ koji nisu okruženi drugim blokovima. Tada je α sljedećeg oblika

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x & i, i+1 & j, j+1, & y, z \\ \hline x & i, i+1 & j, j+1, & y, z \end{array}\right]_{x\in X, y\in Y, z\in Z}$$

gdje je $|Y| = |Z|$ i $|X| = n - 2|Y| - 4$. U tom slučaju se dijagram α može zapisati kao proizvod $\beta\gamma$, gdje je

$$\beta = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} x & i & i+1 & j, j+1, & y, z \\ \cline{4-5} x & i & i+1 & j, j+1, & y, z \end{array}\right]_{x\in X, y\in Y, z\in Z}$$

$$\gamma = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} x & j & j+1 & i, i+1, & y, z \\ \cline{4-5} x & j & j+1 & i, i+1, & y, z \end{array}\right]_{x\in X, y\in Y, z\in Z}$$

Kako je $\operatorname{rang}(\beta) = \operatorname{rang}(\gamma) = r + 2$, slijedi da je $\alpha = \beta\gamma \in \langle J_{r+2}(\mathcal{J}_n)\rangle$.

Slučaj 2: α ima bar jedan blok $\{i, j\}$ takav da je $j \geq i + 3$ i $\{i, j\}$ nije okružen drugim blokovima. U ovom slučaju je blok zapis dijagrama α

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x & i, j & k, l & y, z \\ \hline x & i, j & k, l & y, z \end{array}\right]_{x\in X, k\in K, l\in L, y\in Y, z\in Z},$$

pri čemu je $K, L \subseteq \{i + 1, \dots, j - 1\}$, $|K| = |L|$, i naravno, blokovi $\{k, l\}$ određuju jedan pravilan raspored $s = \frac{j-i}{2}$ zagrada. Tada se α može zapisati kao $\beta\gamma$, gdje je dijagram β jednak

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} x & i & j & k, l & y, z \\ \cline{4-5} x & i & i+1 & i+(2t-1)+2, i+2t+2 & y, z \end{array}\right]_{1\leq t\leq s-1},$$

dok je dijagram γ jednak

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} x & j & j-1 & i+(2t-1), i+2t & y, z \\ \cline{4-5} x & j & i & k, l & y, z \end{array}\right]_{1\leq t\leq s-1}.$$

Da bi se uvjerili da je zaista $\alpha = \beta\gamma$ potrebno je samo provjeriti kojim blokovima pripadaju i, j i i', j' u $\beta\gamma$. U grafu proizvoda $\Gamma(\beta, \gamma)$ imamo puteve $i - i' - (i+1)' - j$ i $i'' - (j-1)' - j' - j''$, odakle slijedi da su $\{i, j\}$ i $\{i'', j''\}$ blokovi $\beta\gamma$, pa je $\alpha = \beta\gamma$. □

Teorema 8.3. *([9], Teorema 9.5) Za $0 \leq r = n - 2k \leq n - 2$ ideal $I_r(\mathcal{J}_n)$ je idempotentno generisana polugrupa, čiji je rang jednak*

$$\operatorname{rang}(I_r(\mathcal{J}_n)) = \operatorname{idrang}(I_r(\mathcal{J}_n)) = \frac{r+1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

Štaviše, podskup $J_r(\mathcal{J}_n)$ *kardinalnosti* $\mathrm{rang}(I_r(\mathcal{J}_n))$ *je minimalan generatorni skup za* $I_r(\mathcal{J}_n)$ *ako i samo ako su ispunjena sljedeća tri uslova:*

(i) $\mathrm{rang}(\alpha) = r$ *za sve* $\alpha \in A$*;*

(ii) za sve $\alpha, \beta \in A$ *važi* $\ker(\alpha) \neq \ker(\beta)$ *ako je* $\alpha \neq \beta$*;*

(iii) za sve $\alpha, \beta \in A$ *važi* $\mathrm{coker}(\alpha) \neq \mathrm{coker}(\beta)$ *ako je* $\alpha \neq \beta$*.*

Dokaz. Kako je maksimalni ideal $I_{n-2}(\mathcal{J}_n) = \mathcal{J}_n \setminus \{1\}$ idempotentno generisan iz Teoreme 2.7 slijedi da su svi ideali u $\mathcal{J}_n$ idempotentno generisani, te da je

$$\mathrm{rang}(I_r(\mathcal{J}_n)) = \mathrm{idrang}(I_r(\mathcal{J}_n)) = \rho_{nr},$$

gdje je ρ_{nr} broj $\mathcal{R}$-klasa sadržanih u $\mathcal{J}$-klasi $J_r(\mathcal{J}_n)$. Proširimo definiciju ρ_{nr} sa $\rho_{nr} = 0$ za $r > n$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{J}_n$ proizvoljni. Iz Teoreme 8.1 slijedi da je $\alpha \mathcal{R} \beta$ ako i samo ako je $U(\alpha) = U(\beta)$. Prema tome, ρ_{nr} je broj grafova G na skupu čvorova $\bar{n}$ koji zadovoljavaju sljedeće uslove:

(1) stepen svakog čvora u G je najviše 1,

(2) tačno r čvorova u G je stepena 0,

(3) ako je $\{i, j\}$ grana u G i $i < j$, tada je $deg(k) = 1$ za sve $i < k < j$,

(4) ako su $\{i, j\}$ i $\{k, l\}$ grane u G takve da je $i < j$, $k < l$ i $i < k$, tada je ili $j < k$ ili $l < j$.

Označimo sa X_{nr} skup svih grafova koji zadovoljavaju uslove (1)-(4), tada je $\rho_{nr} = |X_{nr}|$. Za $n - r$ neparno je očigledno $\rho_{nr} = 0$. Ako je $r = 0$, i n paran broj, tada je broj grafova koji zadovovljavaju uslove (1)-(4) jednak broju pravilnih rasporeda $\frac{n}{2}$ zagrada. Prema tome,

$$\rho_{n0} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } n \text{ neparno,} \\ C_{\frac{n}{2}} & \text{ako je } n \text{ parno.} \end{cases}$$

Kao što smo već vidjeli, postoji samo jedan dijagram u $\mathcal{J}_n$ ranga n, pa je $\rho_{nn} = 1$. Neka je $1 \leq r \leq n - 1$, tada skup X_{nr} možemo posmatrati kao disjunktnu uniju $X_{nr}^0 \cup X_{nr}^1$, gdje je

$$X_{nr}^d = \{G \in X_{nr} : \deg(n) = d \text{ u } G\}, \text{ za } d = 0, 1.$$

Očigledno je $|X_{nr}^0| = |X_{n-1,r-1}| = \rho_{n-1,r-1}$. Konstruišimo preslikavanje $\phi : X_{nr}^1 \to X_{n-1,r+1}$ tako što grafu $G \in X_{nr}$ dodijelimo graf $\phi(G)$ dobijen uklanjanjem čvora n i grane $\{i, n\}$ sa kojom je on incidentan. Dobijeni graf $\phi(G)$ odgovara dijagramu ranga $r + 1$, pa je ovo preslikavanje dobro definisano. Zbog uslova (3) slijedi da je i najveći indeks od svih čvorova u $\phi(G)$ čiji je stepen jednak 0. Definišimo onda preslikavanje $\psi : X_{n-1,r+1} \to X_{nr}^1$

sa $\psi(F) = F \cup \{j, n\}$, gdje je j najveći indeks čvora u F čiji je stepen jednak 0. Dakle, graf $\psi(F)$ je dobijen dodavanjem čvora n i grane $\{j, n\}$ grafu F. Preslikavanje ψ je očigledno dobro definisano, i inverzno preslikavanju ϕ. Tačnije, preslikavanja ϕ i ψ su uzajamno inverzna, odakle slijedi da su ϕ i ψ bijekcije. Odatle dobijamo $|X^1_{nr}| = |X_{n-1,r+1}| = \rho_{n-1,r+1}$. Ovime smo pokazali da niz ρ_{nr} zadovoljava rekurentnu vezu

$$\rho_{nr} = \rho_{n-1,r-1} + \rho_{n-1,r++1}$$

za sve $1 \leq r \leq n-1$. Niz opisan ovom rekurentnom vezom i početnim uslovima je niz A053121 u [1], i pojavljuje se u brojnim primjerima. Rješavanjem date rekurentne jednačine, dobijamo da je

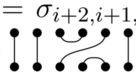
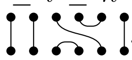
$$\rho_{nr} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } n-r \text{ neparno ili } r > n, \\ \frac{r+1}{n+1}\binom{n+1}{k} & \text{ako je } n-r = 2k \text{ parno.} \end{cases}$$

□

Za $r = n-2$, rang ideala $I_{n-2}(\mathcal{J}_n)$ je prema gornjoj teoremi jednak $\frac{n-1}{n+1}\binom{n+1}{n-1} = n-1$, što se slaže sa rezultatima iz Teoreme 8.1. Da bismo odredili ukupan broj minimalnih idempotetnih generatornih skupova singularnog dijela $\mathcal{J}_n \setminus \{1\}$ Džonsovog monoida $\mathcal{J}_n$ posmatraćemo odgovarajući graf projekcija $\Xi_n = \Gamma(I_{n-2}(\mathcal{J}_n)) = \Gamma(J_{n-2}(\mathcal{J}_n)^*)$.

U Lemi 7.3 smo pokazali da je skup svih idempotentnih dijagrama u $J_{n-2}(\mathcal{B}_n)$ jednak

$$\{\tau_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\sigma_{ijk} : i, j, k \in \bar{n} \text{ različiti}\}.$$

Lako vidimo da su jedini planarni dijagrami u navedenom skupu $\tau_i = \tau_{i,i+1}$, za $1 \leq i \leq n-1$ i $\sigma_i = \sigma_{i,i+1,i+2}$, $\sigma^i = \sigma_{i+2,i+1,i}$, za $1 \leq i \leq n-2$. Na primjer, u $\mathcal{J}_6$ imamo idempotente $\sigma_3 =$  i $\sigma^3 =$ .

Lema 8.2. *([9], Lema 9.7) Skup idempotenata u $J_{n-2}(\mathcal{J}_n)$ je jednak*

$$\{\tau_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\sigma_i, \sigma^i : 1 \leq i \leq n-2\},$$

pri čemu je skup projekcija u $J_{n-2}(\mathcal{J}_n)$ jednak

$$\{\tau_i : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

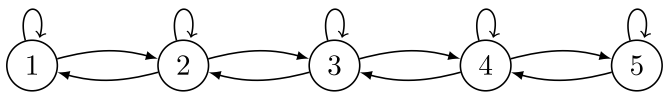
Direktnom provjerom množenjem dobijamo sljedeća pravila množenja projekcija iz $J_{n-2}(\mathcal{J}_n)$:

$$\tau_i \cdot \tau_j = \begin{cases} \tau_i & \text{ako je } j = i \\ \sigma_i & \text{ako je } j = i+1 \\ \sigma^i & \text{ako je } j = i-1 \\ \notin J_{n-2}(\mathcal{J}_n) & \text{inače.} \end{cases}$$

Odatle slijedi da su u glavnom faktoru $J_{n-2}(\mathcal{J}_n)^*$ jedini nenula proizvodi parova projekcija

$$\tau_i^2 = \tau_i, \tau_i\tau_{i+1} = \sigma_i, \tau_{i+1}\tau_i = \sigma^i.$$

Prema tome, graf projekcija Ξ_n ima skup čvorova $\{\tau_i : 1 \leq i \leq n-1\}$, sa granama (τ_i, τ_j) ako i samo ako je $|i-j| \leq 1$. Radi kraćeg zapisa, u primjerima ćemo označavati čvorove grafa Ξ_n sa i umjesto τ_i, $1 \leq i \leq n-1$. Na slici 8.2 je predstavljen graf projekcija Ξ_6.



Slika 10: Graf projekcija $\Xi_6 = \Gamma(\mathcal{J}_6 \setminus \{1\})$

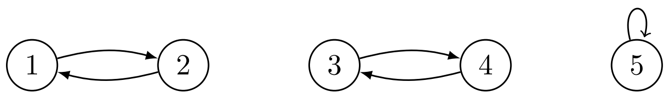
Balansirani podgrafovi Ξ_6 su disjunktne unije ciklusa oblika (τ_i, τ_{i+1}) i (τ_i, τ_i). Prema tome, balansiran podgraf grafa projekcija Ξ_6 može biti jednak uniji:

(1) dva ciklusa oblika (τ_i, τ_{i+1}) i jednog ciklusa oblika (τ_i, τ_i);

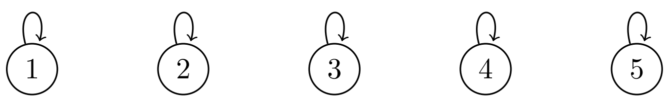
(2) jednog ciklusa oblika (τ_i, τ_{i+1}) i tri ciklusa oblika (τ_i, τ_i);

(3) pet ciklusa oblika (τ_i, τ_i).

Na slikama 8.2 i 8.2 su primjeri balansiranih podgrafova Ξ_6 tipa (1) i (2). Odatle dobijamo da postoji tačno $3+4+1 = 8$ balansiranih podgrafova Ξ_6.



Slika 11: Balansiran pograf Ξ_6 tipa (1)



Slika 12: Balansirani pograf Ξ_6 tipa (2)

Teorema 8.4. *([9], Teorema 9.8) Broj minimalnih idempotentnih generatornih skupova singularnog dijela $\mathcal{J}_n \setminus \{1\}$ Džonsovog monoida $\mathcal{J}_n$ je jednak*

f_n, n-tom Fibonačijevom broju, gdje je $f_1 = f_2 = 1$ i $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ za $n \geq 2$.

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$ označimo sa x_n broj balansiranih podgrafova grafa projekcija $\Xi_n = \Gamma(\mathcal{J}_n \setminus \{1\})$. Pokazaćemo da ovaj niz brojeva zadovoljava rekurentnu vezu i početne uslove Fibonačijevog niza. Očigledno je $x_2 = 1$. Za $n = 1$ je $\mathcal{J}_1 \setminus \{1\} = \emptyset$, pa postoji tačno jedan generatorni skup, $\emptyset$. Neka je $n \geq 3$ i neka je H balansirani podgraf grafa Ξ_n. Tada H sadrži ili ciklus (τ_{n-2}, τ_{n-1}) ili petlju (τ_{n-1}, τ_{n-1}). U prvom slučaju ostatak grafa H je jedan balansiran podgraf Ξ_{n-2}, a u drugom je balansiran podgraf Ξ_{n-1}. Odatle slijedi rekurentna veza $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, čime je dokaz završen. $\square$

Zaključak

U ovom radu smo predstavili brojne osobine dijagram monoida, i njihovih podmonoida. Značajna karakteristika dijagram monoida je upravo što se mnoge osobine prenose na njegove potpolugrupe $\mathcal{B}_n$ i $\mathcal{J}_n$. Grinove relacije se mogu opisati na veoma jednostavan način, svi ideali tih monoida su glavni, i čine lanac, i takođe su idempotentno generisani. Međutim, ne možemo odrediti sve osobine Brauerovih monoida i Džonsovnih monoida poznavajući dijagram monoide. Na primjer, pitanje broja minimalnih idempotentnih generatornih skupova singularnog dijela Brauerovog monoida ostaje otvoreno, kao i broj i povoljnija karakterizacija idempotenata Džonsovog monoida.

Većina potpolugrupa dijagram monoida je već dobro izučena, kao polugrupa tranformacija ili simetrična inverzna polugrupa. Međutim, "twisted"verzije tih polugrupa i dalje postavljaju brojna zanimljiva pitanja. Drugi smjer istraživanja može biti i uopštavanje rezultata i metoda korištenih za izučavanje dijagram monoida na druge polugrupe. Na kraju, možemo razmatrati primjenu dobijenih rezultat na odgovarajuće algebre, i njihovu strukturu i teoriju reprezentacija.

Literatura

[1] The on-line encyclopaedia of integer sequences. Dostupno na http://oeis.org/

[2] R. Brauer *On algebras which are connected with the semisimple continuous rings*, Annals of Mathematics, Vol. 38,857-872, 1937.

[3] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups, Volume I*. American Mathematical Society, 1961.

[4] A. J. Cain, *Nine Chapters on the Semigroup Art*, Lisbon, 2015.

[5] I. Dolinka, J. East, A. Evangelou, D. G. FitzGerald, N. Ham, J. Hyde, N. Loughlin, *Enumeration of idempotents in diagram semigroups and algebras*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 131, 119-152, 2015.

[6] J. East,*Generators and relations for partition monoids and algebras*, Journal of Algebra, Vol339, 1-26, 2011.

[7] J. East*On the singular part of the partition monoid*, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 21, 147-178, 2011.

[8] J. East, D. G. FitzGerald, *The semigroup generated by the idempotents of a partition monoid*, Journal of Algebra, Vol 372, 108-133, 2012.

[9] J. East, R. D. Gray,*Diagram monoids and Graham-Houghton graphs: idempotents and generating sets of ideals*,

[10] J. East, *A presentation for the singular part of the full transformation semigroup*, Semigroup Forum, Vol 81, pp 357 - 379, 2010.

[11] J. East, *A presentation for the singular part of the symmetric inverse monoid*, Communications in Algebra, Vol 34, 1671 - 1689, 2006.

[12] J. East, A. Egri-Nagy, J. D. Mitchell, Y. Peresse, *Computing with semigroups*, (preprint) 2015.

[13] D. G. FitzGerald, K. W. Lau, *Green's relations on the partition monoid and several related monoids*,

[14] D. G. FitzGerald, K. W. Lau, *On the partition monoid and some related semigroups*, Bulletin of Australian Mathematical Society, Vol. 83, 273-288, 2011.

[15] D. G. FitzGerald, *On inverses of products of idempotents in regular semigroups*, Journal od Australian Mathematical Society, vol. 13, 355-337, 1972.

[16] R. L. Graham, *On finite* 0*-simple semigroups and graph theory*, Mathematical Systems Theory, Vol. 2, 325-339, 1968.

[17] J. J. Graham, G. I. Lehrer, *Cellular algebras*, Inventiones Mathematicae, Vol. 123, 1-34, 1996.

[18] R. Gray, *Hall's condition and idempotent rank of ideals of endomorphism monoids*, Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, Vol.137, 303-331, 2007.

[19] R. Gray *The minimal number of generators of a finite semigroup*, Semigroup Forum, Vol. 89, 135-154, 2014.

[20] R. Gray, N. Ruškuc, *Generating sets of completely 0-simple semigroups*, Commutative Algebra, Vol. 33, 4657-4678, 2005.

[21] X. Guo, C. Xi, *Cellularity of twisted semigroup algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 213(1), 71-86, 2009.

[22] P. Hall, *The collected works of Philip Hall*, Oxford Science Publications (Clanderon Press/Oxford University Press), 1988.

[23] C. H. Houghton *Completely* 0*-simple semigroups and their associated graphs and groups*, Semigroup Forum, Vol. 14(1), 41-67, 1977.

[24] J. M. Howie, *Fundamentals of the Semigrup Theory*, Oxford University press, 1995

[25] J. M. Howie, *The semigroup generated by idempotents of a full transformation semigroup*, Journal of London Mathematical Society, Vol 41, 707-716, 1966.

[26] J. T. Hyde, N. J. Loughlin, M. Quick, N. Ruškuc, A. R. Wallis, *On the growth of generating sets for direct powers of semigroups*, Semigroup forum, Vol. 84, 116-130, 2012.

[27] V. F. R. Jones, *The Potts model and the symmetric group*, Subfactors (Kyuzeso, 1993), World Scientific Publishing, River Edge, New York, 259-267, 1994.

[28] G. Kudryavtseva, V. Maltcev, V. Mazorchuk, *$\mathcal{L}$- and $\mathcal{R}$-cross-sections in Brauer semigroup*, Semigroup Forum, Vol. 72, 223-248, 2006.

[29] G. Kudryavtseva, V. Mazorchuk, *On presentations of Brauer-type monoids*, Central European Journal of Mathematics, Vol. 4(3), 413-434(elektronski), 2006.

[30] K. W. Lau, D. G. FitzGerald, *Ideal structure of Kauffman and related monoids*, Commutative Algebra, Vol. 34(7), 2617-2629, 2006.

[31] D. Larsson, *Combinatorics on Brauer-type semigroups*, U.U.D.M. Project Report 2006:3. Dostupno na http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:305049/FULLTEXT01.pdf

[32] M. Lawson, *Inverse semigroups, the theory of partial symmetries*. World Scientific Publishing, 1998.

[33] V. Maltcev, V. Mazourchuk, *Presentation of the singular part of the Brauer monoid*, Mathematica Bohemica, Vol. 132(3), 297-323, 2007.

[34] P. Martin, *Temperley-Lieb algebras for nonplanar statistical mechanics - the partition algebra construction*, Journal of Knot Theory Ramifications, Vol. 3, 51-82, 1994.

[35] P. Martin, *The structure of partition algebras*, Journal of Algebra, Vol. 183, 319-358, 1996.

[36] V. Mazorchuk, *On the structure of Brauer semigroup and its partial analogue*, Problems in Algebra, Vol. 13, 29-45, 1998.

[37] V. Mazorchuk, *Endomorphisms of $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{PB}_n$ and $\mathcal{C}_n$*, Commutative Algebra, Vol. 30, No. 7, 3489–3513, 2002.

[38] J. D. Mitchell, *The Semigroups package for GAP, Version 2.8.0*, https://gap-packages.github.io/Semigroups, 2016.

[39] E. H. Moore, *Concerning the abstract groups of order $k!$ and $\frac{1}{2}k!$ holohedrically isomorphic with the symmetric and alternating substitution groups on k letters*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol 28, 357-366, 1897.

[40] T. E. Nordhal, H. E. Scheiblich, *Regular $*$-semigroups*, Semigroup forum, Vol. 16, 369-377, 1978.

[41] L. M. Popova, *Defining relations in some semigroups of partial transformations of a finite set*, Uchenye Zap. Leningrad Gos. Ped. Inst, Vol. 218, 191-212, 1961.

[42] T. Halverson, A. Ram, *Partition algebras*, European Journal of Combinatorics, Vol 26, 869-921, 2005.

[43] J. Rhodes, B. Steinberg,*The q-theory of finite semigroups*, Springer Monographs in Matehematics, Springer, New York, 2009.

[44] N. Ruškuc, *On the rank of completely 0-simple semigroups*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 116, 325-338, 1994

[45] S. Wilcox,*Cellularity of diagram algebras as twisted semigroup algebras*, Journal of Algebra, Vol. 309, 10-31, 2007.

Biografija

Jelena Radović je rođena u Mostaru, 21.3.1990. godine. Osnovnu školu "Risto Proroković"u Nevesinju završava 2005. godine, kao nosilac Vukove diplome. Srednju školu "Aleksa Šantić"u Nevesinju završava 2009. godine, ponovo kao nosilac Vukove diplome, te kao đak generacije. Iste godine upisuje osnovne studije Matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu. Osnovne studije završava u julu 2012. godine, sa prosjekom 9,96, te upisuje master studije Matematike i osnova računarskih nauka na Univerzitetu u Oksfordu, koje završava 2013. godine. Od 2014. godine zaposlena na Katedri za Matematiku Univerziteta u Istočnom Sarajevu. Iste godine upisuje master studije Matematike, smjer Teorijska matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu. Položila je sve predmete propisane planom i programom, i time stekla pravo na odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Jelena Radović
AU
Mentor: dr Igor Dolinka
MN
Naslov rada: Dijagram monoidi
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: Srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2016.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mjesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 8 poglavlja, 115 strana, 45 referenci, 5 tabela, 12 slika, 0 grafika, 0 priloga
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra
ND
Predmetna odrednica/ključne riječi: polugrupa, dijagram monoid, Brauerov

monoid, rang, idempotentni rang
PO
UDK: Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi dijagram monoidi i njihovim podmonoidima. U prvim poglavljima izlažemo osnove teorije polugrupa neophodne za razumijevanje i daljnje izučavanje ovih monoida. U trećem poglavlju se upoznajemo sa pojmom dijagram monoida i njihovim osnovnim osobinama. Četvrto poglavlje je posvećeno idempotentima dijagram monoida, i njihovom prebrojavanju, dok u petom poglavlju posmatramo singularni dio dijagram monoida i njegovu vezu sa monoidom generisanim idempotentnima. Šesto poglavlje je posvećeno određivanju ranga ostalih ideala dijagram monoida, kao i prebrojavanju minimalnih idempotentnih generatornih skupova singularnog dijela dijagram monoida. Poslednja dva poglavlja predstavljaju primjenu rezultata dobijenih za dijagram monoide na Brauerovoe i Džonsove monoide. **IZ**

Datum prihvatanja teme od strane Nastavno-naučnog vijeća: 16.6.2015.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsjednik: dr Petar Marković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Igor Dolinka, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu; mentor
Član: dr Petar Đapić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Tipe of record: Printed text
TR
Content's code: Master thesis
CC
Author: Jelena Radović
AU
Mentor: Igor Dolinka, Ph.D.
MN
Title: Diagram monoids
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2016.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 8 chapters, 115 pages, 45 references, 5 tables, 12 figures, 0 graphs, 0 appendices
FO
Scientific fiels: Mathematics
SF
Scientific discipline: Algebra
SD
Subject/key words: semigroup, diagram monoids, Brauer monoids, rank, idempotent rank **SKW**

UC: Holding data: The library of the Department of mathematics and informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note
N

Abstract: This thesis explores diagram monoids and its submonoids. In the first two chapters we give the basic notions and results from semigroup theory, necessary for the study of diagram monoids. The third chapter presents the definition of diagram monoids, and some elementary properties. The following chapter deals with idempotent elements of diagram monoids, and their enumeration, while in the fifth chapter we describe the singular part of diagram monoid and its connection with the semigroup generated by idempotents. Next, we discuss the rank and idempotent rank of ideals, and we enumerate minimal idempotent generating sets of the singular part of diagram monoid. Finally, in the last part, we apply the results obtained for diagram monoids on Brauer and Jones monoids, which can be viewed as submonoids of the diagram monoid. **AB**

Accepted by the Scientific Board on: 16.6.2015.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
KO
Chair: Petar Marković, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Član: Igor Dolinka, Ph.D., full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad; mentor
Član: Petar Đapić, Ph.D., assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad