

Садржај

Предговор	3
1. Неке ознаке, дефиниције и теореме	4
1.1 Ознаке.....	4
1.2 Дефиниције	5
1.3 Теореме	8
2. Итеративни поступци и квадратурне формуле	11
2.1 Увод	11
2.2 Примитивне квадратурне формуле и итеративни поступци .	14
2.2.1 Формула левих правоугаоника.....	14
2.2.2 Формула десних правоугаоника.....	15
2.2.3 Формула средњих правоугаоника.....	16
2.3 Њутн-Котесове формуле и итеративни поступци	17
2.3.1 Трапезна формула	17
2.3.2 Симпсонова формула	18
2.3.3 Фамилија поступака	18
2.4 Гаусове квадратурне формуле и итеративни поступци	22
2.4.1 Гаусова формула првог реда	23
2.4.2 Гаусова формула другог реда.....	23
2.4.3 Гаусова формула трећег реда	24
3. Модификације итеративних поступака	25
3.1.1 Модификација Nasr-Al-Din Ide	25
3.1.2 Наша модификација.....	26
3.1.3 Хармонијска средина	27

4.	Нумерички експерименти	29
5.	Закључак	32
6.	Литература	33
7.	Биографија	34

Предговор

За већину нелинеарних једначина није могуће одредити тачно решење. Овакве једначине решавају се само приближно, применом неког нумеричког поступка. Област нумеричке математике која се бави нумеричким решавањем нелинеарних једначина је богата различитим поступцима и њиховим варијантама. Многи од поступака, као што је Њутнов, појављују се и као специјални случајеви неких других, општијих, поступака. У таквим случајевима се и доказ њихове конвергенције добија из доказа конвергенције целе фамилије.

Постоје бројна извођења Њутновог поступка. Један приступ овом проблему полази од Њутнове теореме у којој се појављује одређени интеграл. Апроксимацијом тог одређеног интеграла квадратурним формулама добија се Њутнов поступак и његове модификације. У мастер раду користимо Њутнову теорему и посматрамо Њутнов поступак и његове модификације трећег реда конвергенције. Приказаћемо више поступака, испитати њихову конвергенцију, одредити ред конвергенције, коефицијенте ефикасности и асимптотску константу грешке. Као оригинални резултат дајемо једну модификацију Њутновог поступка трећег реда конвергенције и два поступка добијена применом Гаусових квадратурних формула.

Мастер рад је подељен у четири дела. У првом делу рада дајемо ознаке дефиниције и теореме које ћемо користити у даљем раду. Други део рада садржи итеративне поступке за решавање нелинеарних једначина засноване на апроксимацијама помоћу квадратурних формула. Посебно посматрамо примитивне, Њутн-Котесове и Гаусове квадратурне формуле. Као специјалне случајеве добијамо неке већ познате поступке и два поступка добијена применом Гаусових квадратурних формула, која нисмо нашли у литератури. За фамилију поступака из [17] доказујемо теорему о локалној конвергенцији и одређујемо асимптотску константу грешке.

У трећем делу посматрамо неке модификације итеративних поступака описаних у другом делу. У раду [10] дата је једна модификација поступка из [17]. Ова модификација је реда конвергенције 2, док је поступак из [17] реда конвергенције 3. Поред тога, коефицијенти ефикасности ове модификације су лошији и од поступка чијом је модификацијом добијена и од Њутновог поступка, који има ред конвергенције 2. Наша модификација поступка из [17] је реда конвергенције 3 и има коефицијенте ефикасности исте као и поступак чијом модификацијом је добијена.

У последњем делу рада приказаћемо нумеричке експерименте урађене у програмском пакету *Mathematica*. Примери су узети из наведених радова, а највише из [4], [7], [8], [14] и [17]. На крају је наведена коришћена литература.

Рад се завршава петим делом, где се даје закључак и шестим делом који садржи коришћену литературу.

1. Неке ознаке, дефиниције и теореме

1.1 Ознаке

Користићемо следеће ознаке:

- $C[a, b]$ и $C(D)$ скуп свих непрекидних функција на $[a, b]$ односно на D
- $C^n[a, b]$ и $C^n(D)$ скуп свих n пута непрекидно диференцијабилних функција на D
- $\{x_k\}$ низ бројева $x_0, x_1, \dots$
- α решење једначине $f(x) = 0$, односно њој еквивалентне једначине $x = \varphi(x)$
- $C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \dots$
- једначина грешке

$$e_{k+1} = Ce_k^p + O(e_k^{p+1}),$$

где је

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k,$$

$$e_k = x_k - \alpha,$$

p је ред конвергенције итеративног поступка

C је асимптотска константа грешке

- $\frac{e_{k+1}}{e_k^p}$, $k = 1, 2, \dots$ је апроксимације асимптотске константе грешке
- d број израчунавања вредности функције и њених извода у једном кораку итеративног поступка
- p ред конвергенције итеративног поступка
- $EFF = \frac{p}{d}$ Траубов коефицијент ефикасности
- $EFF^* = \sqrt[d]{p}$ коефицијент ефикасности Островског

1.2 Дефиниције

Приближну вредност посматраног одређеног интеграла

$$I(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx,$$

где је $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и f ограничена функција на $[a, b]$, тражимо као линеарну комбинацију подинтегралне функције f

$$Q_n(f; a, b) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

коју називамо квадратурна формула.

За израчунавање вредности $Q_n(f; a, b)$ потребно је познавати чворове интеграције x_i и коефицијенте квадратурне формуле A_i .

Грешка апроксимације интеграла квадратурном формулом назива се грешка квадратурне формуле. Означава се са $E_n(f; a, b)$ и гласи

$$E_n(f; a, b) = I(f; a, b) - Q_n(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n A_i f(x_i).$$

Дефиниција 1. Квадратурна формула $Q_n(f; a, b)$ је реда тачности k ако је

$$E_n(x^i; a, b) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \text{и} \quad E_n(x^{k+1}; a, b) \neq 0.$$

При одређивању чворова x_i и коефицијената A_i квадратурне формуле уобичајена су следећа два приступа.

- Чворови x_i су унапред познати и фиксирани, а коефицијенти A_i се одређују из услова да се добије максималан степен тачности, тј. да је $E_n(x^i) = 0$ за $i = 0, \dots, n-1$. Овој класи припадају примитивне и Њутн-Котесове квадратурне формуле.
- Чворови x_i и коефицијенти A_i одређују се тако да је $E_n(x^i) = 0$ за $i = 0, \dots, 2n-1$. Овој класи припадају Гаусове квадратурне формуле.

Дефиниција 2. Квадратурна формула $Q_n(f; a, b)$ је интерполациона квадратурна формула n -тог реда ако за све $f \in C[a, b]$ важи

$$\sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = \int_a^b P_n(f, x) dx$$

где је $P_n(f, x)$ интерполациони полином n -тог степена функције f са међусобно различитим чворовима x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, за које важи $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$.

Дефиниција 3. Интерполационе квадратурне формуле n -тог реда са еквидистантним чворовима

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

називају се Њутн-Котесове квадратурне формуле затвореног типа.

Код Њутн-Котесових квадратурних формула затвореног типа сви чворови припадају интервалу $[a, b]$, а $x_0 = a$ и $x_n = b$ су први и последњи чворови интеграције, што означавамо речима „затвореног типа“.

Дефиниција 4. За чворове интеграције $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$L_n(f; a, b) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

је квадратурна формула левих правоугаоника.

Дефиниција 5. За чворове интеграције $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$D_n(f; a, b) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

је квадратурна формула десних правоугаоника.

Дефиниција 6. За чворове интеграције $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$M_n(f; a, b) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

је квадратурна формула средњих правоугаоника.

Дефиниција 7. Гаусова квадратурна формула за интеграл

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

је

$$G_n(f; -1, 1) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

при чему су коефицијенти и чворови одређени тако да је за $i = 0, \dots, 2n-1$

$$E_n(x^i; -1, 1) = \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = 0.$$

Наводимо само за $n=1, 2, 3$ коефицијенте и чворове Гаусове квадратурне формуле.

n	x_i	w_i
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

Дефиниција 8. Гаусова квадратурна формула за одређени интеграл функције f са границама a и b је

$$G_n(f; a, b) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right).$$

Дефиниција 9. (Липшицов услов) Ако за функцију $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за свако $x, y \in [a, b]$ важи

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|$$

кажемо да функција f задовољава Липшицов услов и пишемо $f \in \text{Lip}_\gamma[a, b]$.

Дефиниција 10. Нека је дат конвергентан низ $x_0, x_1, \dots$ чија је гранична вредност α . Кажемо да је $p \in [1, \infty)$ ред конвергенције тог низа ако је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = C,$$

а C је константа различита од нуле. Ако је $p=1$, онда додатно претпостављамо да је $C < 1$.

Такође, каже се да је ред конвергенције низа $x_0, x_1, \dots$ најмање p ако дозволимо да константа C може бити једнака нули.

Еквивалентан запис претходне дефиниције је следећи.

Дефиниција 11. Конвергентан низ $x_0, x_1, \dots$ чија је гранична вредност α , има ред конвергенције $p \in [1, \infty)$ ако постоје константа C различита од нуле и природан број n_0 такви да је

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p, \quad k \geq n_0$$

Ако је $p = 1$, онда додатно претпостављамо да је $C < 1$.

Ред конвергенције се користи за упоређивање брзине конвергенције низова. Претпоставимо да имамо два конвергентна низа $x_0, x_1, \dots$ и $z_0, z_1, \dots$ са истом граничном вредношћу α и нека су њихови редови конвергенције p_1 и p_2 респективно. Ако је $p_1 > p_2$ кажемо да низ $x_0, x_1, \dots$ асимптотски конвергира брже од низа $z_0, z_1, \dots$.

Дефиниција 12. Ред конвергенције итеративног поступка једнак је реду конвергенције итеративног низа добијеног посматраним итеративним поступком.

Дефиниција 13. Кажемо да је итеративни поступак са редом конвергенције p_1 бржи од итеративног поступка са редом конвергенције p_2 ако је $p_1 > p_2$.

1.3 Теореме

Теорема 1. Нека је $f \in C^1[a, b]$. Тада постоји $\tau \in (a, b)$ такво да за квадратурну формулу левих правоугаоника важи

$$\int_a^b f(x) dx - L_n(f; a, b) = \frac{1}{2} f'(\tau) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2.$$

Теорема 2. Нека је $f \in C^1[a, b]$. Тада постоји $\tau \in (a, b)$ такво да за квадратурну формулу десних правоугаоника важи

$$\int_a^b f(x) dx - D_n(f; a, b) = -\frac{1}{2} f'(\tau) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2.$$

Теорема 3. Нека је $f \in C^2[a, b]$. Тада постоји $\tau \in (a, b)$ такво да за квадратурну формулу средњих правоугаоника важи

$$\int_a^b f(x) dx - M_n(f; a, b) = \frac{1}{24} f''(\tau) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^3.$$

Теорема 4. Коефицијенти интерполационе квадратурне формуле су

$$A_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Теорема 5. *Њутн-Котесова квадратурна формула реда n гласи*

$$N_n(f; a, b) = h \sum_{i=0}^n A_{n,i} f(x_i)$$

где је $h = \frac{b-a}{n}$ и

$$A_i = A_{n-i} = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (s-j) ds, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Дефиниција 14. *Нека је $f \in C^{n+2}[a, b]$ за паран број n , односно, $f \in C^{n+1}[a, b]$ за непаран број n , тада постоји $\tau \in (a, b)$ такво да за Њутн-Котесове квадратурне формуле важи*

$$E_n(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx - N_n(f; a, b) = \begin{cases} h^{n+3} f^{(n+2)}(\tau) \int_0^n \binom{s}{n+2} ds, & n \text{ парно} \\ h^{n+2} f^{(n+1)}(\tau) \int_0^n \binom{s}{n+1} ds, & n \text{ непарно} \end{cases}.$$

Теорема 6. *Нека је $f \in C^{2n}[a, b]$ тада постоји $\tau \in (a, b)$ такво да за грешку Гаусове квадратурне формуле важи*

$$E_n(f; a, b) = \int_a^b f(x) dx - G_n(f; a, b) = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\tau).$$

Теорема 7. [14] *Ред конвергенције једнокорачног поступка*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

је позитиван цео број. Овај поступак има ред конвергенције p ако и само ако је

$$\alpha = \varphi(\alpha), \quad \varphi^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Ред конвергенције и асимптотске константе грешке свих поступака које посматрамо у овом раду одређујемо користећи претходну теорему. У зависности од p за асимптотске константе грешке узимамо

$$\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

а добијени резултат изражавамо преко константи $C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \dots$

Како су функције корака посматраних итеративних поступака сложене и израчунавање њихових извода није једноставно, тај посао смо препустили програмском пакету *Mathematica*.

2. Итеративни поступци и квадратурне формуле

2.1 Увод

Њутнов поступак је један од најпопуларнијих поступака за решавање једначина. У основи Њутновог поступка је апроксимација функције f , чије се нуле траже линеарном функцијом. Ова апроксимација се посматра у близини нуле која се тражи. Као апроксимациона функција се користи линеарна функција чији график је тангента функције f у изабраној тачки $(x_0, f(x_0))$. Пресек x_1 тангенте са x -осом се посматра као приближна вредност нуле функције f а затим се тачки $(x_1, f(x_1))$ поставља нова тангента итд.

Једначина тангенте у тачки $(x_0, f(x_0))$ је

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ако је $f'(x_0) \neq 0$, наредна апроксимација x_1 се добија као решење једначине $y(x) = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ако је x_k k -та апроксимација решења посматране једначине, следеће апроксимације се добијају према

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Њутнов поступак се може посматрати као поступак облика $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где је

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

под претпоставком да је $f'(x) \neq 0$ на интервалу у ком се тражи решење једначине $f(x) = 0$. Дакле, све теореме које се односе на поступак $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ можемо применити и на Њутнов поступак. При томе се Липшицова константа γ може одредити из

$$\gamma \geq \max\{|\varphi'(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Како је

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

следи

$$\gamma \geq \max \left\{ \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \mid x \in [a, b] \right\}.$$

Да би се Њутнов поступак могао спровести, потребно је да први извод f' постоји у свим тачкама посматраног интервала и да је $f'(x) \neq 0$ за свако x из тог интервала. У свим разматрањима која се односе на Њутнов поступак и његове модификације, претпостављамо да је $f'(x) \neq 0$.

Ако је први извод f' непрекидна функција и ако је $f'(x) \neq 0$ на посматраном интервалу, онда је f' или позитивна или негативна функција на посматраном интервалу. Као последица овога добијамо да функција f може имати највише једну нулу у посматраном интервалу.

Поред изложеног начина, постоје и бројна другачија извођења Њутновог поступка. Један приступ овом проблему полази од Њутнове теореме

$$f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^x f'(u) du,$$

где је x_k апроксимација решења α једначине $f(x) = 0$, што ћемо и ми користити. Посматраћемо Њутнов поступак и његове модификације које се добијају апроксимацијом одређеног интеграла у претходном изразу квадратурним формулама.

На примеру апроксимације одређеног интеграла

$$\int_{x_k}^x f'(u) du$$

Њутн-Котесовим квадратурним формулама n – тог реда

$$N_n(f'; x_k, x) = \frac{x - x_k}{n} \sum_{i=0}^n A_{n,i} f'(\tau_i),$$

приказаћемо добијање итеративних поступака.

За чворове посматране квадратурне формуле важи

$$\tau_i = x_k + \xi_i (x - x_k),$$

при чему су ξ_i су одговарајући чворови за интервал $[0,1]$,

$$\xi_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Из

$$0 = f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^x f'(u) du \approx f(x_k) + N_n(f'; x_k, x)$$

добивамо нову једначину

$$f(x_k) + N_n(f'; x_k, x) = 0,$$

односно,

$$f(x_k) + \frac{x - x_k}{n} \sum_{i=0}^n A_{n,i} f'(\tau_i) = 0.$$

Имајући у виду како су дефинисани чворови квадратурне формуле, добијамо једначину

$$f(x_k) + \frac{x - x_k}{n} \sum_{i=0}^n A_{n,i} f'\left(x_k + \frac{i}{n}(x - x_k)\right) = 0.$$

Из ове једначине добијамо имплицитну једначину по x

$$x = x_k - \frac{nf(x_k)}{\sum_{i=0}^n A_{n,i} f'\left(x_k + \frac{i}{n}(x - x_k)\right)}.$$

Ако x на десној страни последње једначине заменимо са $\tilde{x}_{k+1}$, добићемо нову апроксимацију решења α једначине $f(x) = 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{\sum_{i=0}^n A_{n,i} f'\left(x_k + \frac{i}{n}(\tilde{x}_{k+1} - x_k)\right)}.$$

За $\tilde{x}_{k+1}$ се најчешће бира

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

што је резултат једног корака Њутновог поступка са x_k као почетном вредношћу. Са овако изабраним $\tilde{x}_{k+1}$, добијамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{\sum_{i=0}^n A_{n,i} f' \left(x_k - \frac{i}{n} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)}.$$

Поступајући на исти начин са примитивним и Гаусовим квадратурним формулама, можемо добити нове итеративне поступке. Издвојићемо неке случајеве, познате у литератури и изведене на други начин, и за изабране поступке, под одређеним претпоставкама, доказујемо конвергенцију и одређујемо ред конвергенције.

2.2 Примитивне квадратурне формуле и итеративни поступци

2.2.1 Формула левих правоугаоника

Интеграл

$$\int_{x_k}^x f'(u) du$$

апроксимирамо формулом левих правоугаоника са $n=1$ и $a=x_k$ и $b=x$. Тако добијамо

$$\int_{x_k}^x f'(u) du \approx L_1(f'; x_k, x) = (x - x_k) f'(x_k).$$

Сада из једначине

$$f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k) = 0$$

добијамо

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

односно, итеративни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Видимо да смо добили Њутнов поступак. Ред конвергенције Њутновог поступка је 2, а његови коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{2}{2} = 1, \quad EEF^* = \sqrt{2} = 1.4142....$$

2.2.2 Формула десних правоугаоника

Интеграл

$$\int_{x_k}^x f'(u) du$$

апроксимирамо формулом десних правоугаоника са $n=1$ и $a=x_k$ и $b=x$. Тако добијамо

$$\int_{x_k}^x f'(u) du \approx D_1(f'; x_k, x) = (x - x_k) f'(x).$$

Сада из једначине

$$f(x_k) + (x - x_k) f'(x) = 0$$

добијамо

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x)}.$$

Последња једначина је имплицитна по x . Ако x на десној заменимо са $\tilde{x}_{k+1}$, добићемо нову апроксимацију

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(\tilde{x}_{k+1})}.$$

Са

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

добијамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}.$$

Овај поступак има ред конвергенције 2, а његови коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{2}{3}, \quad EEF^* = \sqrt[3]{2} = 1.25992....$$

2.2.3 Формула средњих правоугаоника

Интеграл

$$\int_{x_k}^x f'(u) du$$

апроксимирамо формулом средњих правоугаоника са $n=1$ и $a=x_k$ и $b=x$. Тако добијамо

$$\int_{x_k}^x f'(u) du \approx M_1(f'; x_k, x) = (x - x_k) f'\left(\frac{x + x_k}{2}\right).$$

Сада из једначине

$$f(x_k) + (x - x_k) f'\left(\frac{x + x_k}{2}\right) = 0$$

добијамо

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(\frac{x + x_k}{2}\right)}.$$

Последња једначина је имплицитна по x . Ако x на десној заменимо са $\tilde{x}_{k+1}$, добићемо нову апроксимацију

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(\frac{\tilde{x}_{k+1} + x_k}{2}\right)}.$$

Са

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

добијамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right)}.$$

Овај поступак је специјалан случај фамилије из [17] и можемо га наћи и у [2] и [13]. Његов ред конвергенције је 3, коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{3}{3} = 1, \quad EEF^* = \sqrt[3]{3} = 1.44224....$$

2.3 Њутн–Котесове формуле и итеративни поступци

Као што смо видели, поступци засновани на апроксимацији одређеног интеграла

$$\int_{x_k}^x f'(u) du$$

Њутн-Котесовим квадратурним формулама дају итеративне поступке облика

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{\sum_{i=0}^n A_{n,i} f' \left(x_k - \frac{i}{n} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)}.$$

Посматраћемо сада Њутн-Котесове формуле првог и другог реда, тј. трапезну и Симпсонову формулу и одговарајуће итеративне поступке. За ове поступке је доказано да су реда конвергенције 3. За формуле вишег реда је у раду [2] доказано да су такође реда 3. Како код итеративних поступка са Њутн-Котесовим формулама вишег реда има више израчунавања вредности првог извода функције, оне нису много интересантне.

2.3.1 Трапезна формула

За $n=1$ добијамо $a = x_k$, $b = x$, $A_{1,0} = A_{1,1} = \frac{1}{2}$ и

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{1}{2}(f'(x_k) + f'(x))}.$$

Последња једначина је имплицитна по x . Ако x на десној заменимо са $\tilde{x}_{k+1}$, добићемо нову апроксимацију

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{1}{2}(f'(x_k) + f'(\tilde{x}_{k+1}))}.$$

За $\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ добијамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + f' \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)}.$$

Овај поступак је посматран у бројним радовима, као и у [1], [2], [16], [8] и [17]. Он је и специјалан случај фамилије из [17]. Његов ред конвергенције је 3, коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{3}{3} = 1, \quad EEF^* = \sqrt[3]{3} = 1.44224....$$

2.3.2 Симпсонова формула

За $n = 2$ добијамо $a = x_k$, $b = x$, $\frac{a+b}{2} = \frac{x+x_k}{2}$, $A_{2,0} = A_{2,2} = \frac{1}{3}$, $A_{2,1} = \frac{4}{3}$ и

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\frac{1}{3} \left(f'(x_k) + 4f'\left(\frac{x+x_k}{2}\right) + f'(x) \right)}.$$

Последња једначина је имплицитна по x . Ако x на десној заменимо са $\tilde{x}_{k+1}$, добићемо нову апроксимацију

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\frac{1}{3} \left(f'(x_k) + 4f'\left(\frac{\tilde{x}_{k+1}+x_k}{2}\right) + f'(\tilde{x}_{k+1}) \right)}.$$

За $\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ добијамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{6f(x_k)}{f'(x_k) + 4f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right) + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}.$$

Овај поступак је посматран у више радова, као и у [3]. Он је и специјалан случај фамилије из [17]. Његов ред конвергенције је 3, коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{3}{4}, \quad EEF^* = \sqrt[4]{3} = 1.31607....$$

2.3.3 Фамилија поступака

У раду [17] посматра се линеарна комбинација формуле средњих правоугаоника и трапезне формуле

$$\int_{x_k}^x f'(u) du \approx (x - x_k) \left((1-\delta) f'\left(\frac{x+x_k}{2}\right) + \frac{\delta}{2} (f'(x_k) + f'(x)) \right)$$

и добијена једнопараметарска (са параметром δ) фамилија итеративних поступака.

Користећи наведену линеарну комбинацију, добијамо

$$0 = f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^x f'(u) du \approx f(x_k) + (x - x_k) \left((1 - \delta) f' \left(\frac{x + x_k}{2} \right) + \frac{\delta}{2} (f'(x_k) + f'(x)) \right)$$

а одатле следи

$$x = x_k - \frac{2f(x_k)}{2(1 - \delta) f' \left(\frac{x + x_k}{2} \right) + \delta (f'(x_k) + f'(x))}.$$

Из ове имплицитне формуле са $\tilde{x}_{k+1}$ уместо x добијамо експлицитну једначину за израчунавање x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{2(1 - \delta) f' \left(\frac{\tilde{x}_{k+1} + x_k}{2} \right) + \delta (f'(x_k) + f'(\tilde{x}_{k+1}))}.$$

Бирајући

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

добијамо двокорачни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{2(1 - \delta) f' \left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)} \right) + \delta \left(f'(x_k) + f' \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) \right)}$$

који се може записати у облику

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{2(1 - \delta) f' \left(\frac{\tilde{x}_{k+1} + x_k}{2} \right) + \delta (f'(x_k) + f'(\tilde{x}_{k+1}))}$$

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Нека је

$$F(x) = x - \frac{2f(x)}{2(1 - \delta) f' \left(x_k - \frac{f(x)}{2f'(x)} \right) + \delta \left(f'(x) + f' \left(x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \right)}.$$

Лако се проверава да је

$$\alpha = F(\alpha), \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0, \quad F'''(\alpha) = c_2^2 + \frac{3\delta - 1}{4}c_3.$$

Како је $F'''(\alpha)$ у општем случају различито од нуле, поступак $x_{k+1} = F(x_k)$ је реда 3.

Теорема 8. Нека је $f \in C^4(D)$ таква да је

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad x \in D.$$

Ако једначина $f(x) = 0$ има решење $\alpha \in D$ онда постоји $\eta > 0$ такво да за свако

$$x_0 \in D_\eta(\alpha) = \{x \in D : |x - \alpha| \leq \eta\}$$

поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{2(1-\delta)f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right) + \delta\left(f'(x_k) + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)\right)},$$

за коначно δ , конвергира ка α са трећим редом. Асимптотска константа грешке је $c_2^2 + \frac{3\delta - 1}{4}c_3$.

Доказ. Из услова теореме следи да једначина $f(x) = 0$ има у интервалу D једно и само једно решење. Како је $f(\alpha) = 0$, постоји $\mu > 0$ такво да за $D_\mu(\alpha) \subset D$.

Функција $x + \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}$ (за било који фиксни реалан број λ) је непрекидна у α , па за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\omega > 0$ такво да важи

$$\left|x + \lambda \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha - \lambda \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right| = \left|x + \lambda \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha\right| < \varepsilon$$

за свако $x \in D_\omega(\alpha)$. Нека је $\varepsilon = \min\{b - \alpha, \alpha - a\}$. Тада постоји $\rho > 0$ такво да је за

свако $x \in D_\rho(\alpha)$ и $\lambda \in \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

$$a < \alpha - \varepsilon < x + \lambda \frac{f(x)}{f'(x)} < \alpha + \varepsilon < b.$$

То значи да је за свако $x \in D_\rho(\alpha)$ $x - \frac{f(x)}{f'(x)}, x - \frac{f(x)}{2f'(x)} \in D$.

Нека је $q \in (0,1)$. Означимо са M константу за коју важи $|F'''(x)| \leq \frac{M}{6}$, $x \in D$.

Због $f \in C^4(D)$ следи да оваква константа M постоји. Нека је $\eta = \min \left\{ \mu, \rho, \sqrt{\frac{6q}{M}} \right\}$.

Тада је за $x \in D_\eta(\alpha) \subset D$ и функција корака посматраног итеративног поступка добро дефинисана.

На основу Тејлоровог развоја и особина функције F следи да постоји $\tau \in D_\eta(\alpha)$ такво да за $x_0 \in D_\eta(\alpha)$ важи

$$x_1 - \alpha = F(x_0) - F(\alpha) = \frac{F'''(\tau)}{3!} (x_0 - \alpha)^3.$$

Одатле следи

$$|x_1 - \alpha| = \frac{|F'''(\tau)|}{3!} |x_0 - \alpha|^3 \leq \frac{M_3}{6} \eta^2 |x_0 - \alpha| \leq q |x_0 - \alpha| \leq |x_0 - \alpha| \leq \eta,$$

што значи да $x_1 \in D_\eta(\alpha)$. Поступајући на исти начин добијамо да са $x_0 \in D_\eta(\alpha)$ важи $x_k \in D_\eta(\alpha)$, $k = 0, 1, \dots$. Конвергенција низа следи из

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq q |x_k - \alpha| \leq q^2 |x_{k-1} - \alpha| \leq \dots \leq q^{k+1} |x_0 - \alpha|$$

јер је $q \in (0,1)$. Да је ред конвергенције 3 следи на основу теореме Теорема 7.

У раду [17] доказана је локална конвергенција поступка из претходне теореме само за $\delta \in [0,1]$. Тај доказ се разликује од нашег.

Користећи средњу вредност формуле средњих правоугаоника и трапезне формуле

$$\int_{x_k}^x f'(u) du \approx \frac{x - x_k}{2} \left(f' \left(\frac{x + x_k}{2} \right) + \frac{1}{2} (f'(x_k) + f'(x)) \right)$$

добијамо итеративни поступак, [17],

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4f(x_k)}{f'(x_k) + 2f' \left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)} \right) + f' \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)}.$$

Овај поступак је специјалан случај поступка посматране фамилије за $\delta = \frac{1}{2}$. Други специјални случајеви овог поступка се добијају за $\delta = 1$, $\delta = 0$, и $\delta = \frac{1}{3}$. То су поступци [16] (добијен помоћу трапезне квадратурне формуле), [2] (добијен помоћу

формуле средњих правоугаоника) и [3] (добити помоћу Симпсонове квадратурне формуле) респективно. Његов ред конвергенције је 3, коефицијенти ефикасности су, у општем случају,

$$EEF = \frac{3}{4}, \quad EEF^* = \sqrt[4]{3} = 1.31607....$$

2.4 Гаусове квадратурне формуле и итеративни поступци

Одређени интеграл

$$\int_{x_k}^x f'(u) du$$

ћемо апроксимирати Гаусовом квадратурном формулом n – тог реда

$$G_n(f'; x_k, x) = \frac{x - x_k}{2} \sum_{i=1}^n w_i f'(\tau_i)$$

где су w_i коефицијенти а τ_i чворови квадратурне формуле. За чворове посматране квадратурне формуле важи

$$\tau_i = \frac{x - x_k}{2} \xi_i + \frac{x + x_k}{2},$$

при чему су ξ_i су одговарајући чворови за интервал $[-1, 1]$.

Из

$$0 = f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^x f'(u) du \approx f(x_k) + G_n(f'; x_k, x)$$

добивамо нову једначину

$$f(x_k) + G_n(f'; x_k, x) = 0,$$

односно,

$$f(x_k) + \frac{x - x_k}{2} \sum_{i=1}^n w_i f'(\tau_i) = 0.$$

Имајући у виду како су дефинисани чворови квадратурне формуле, добијамо једначину

$$f(x_k) + \frac{x - x_k}{2} \sum_{i=1}^n w_i f'\left(\frac{x - x_k}{2} \xi_i + \frac{x + x_k}{2}\right) = 0.$$

Из ове једначине добијамо имплицитну једначину по x

$$x = x_k - \frac{2f(x_k)}{\sum_{i=1}^n w_i f' \left(\frac{x - x_k}{2} \xi_i + \frac{x + x_k}{2} \right)}.$$

Ако x на десној страни последње једначине заменимо са $\tilde{x}_{k+1}$, добићемо нову апроксимацију

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\sum_{i=1}^n w_i f' \left(\frac{\tilde{x}_{k+1} - x_k}{2} \xi_i + \frac{\tilde{x}_{k+1} + x_k}{2} \right)}.$$

Са

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

добивамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\sum_{i=1}^n w_i f' \left(-\frac{f(x_k)}{2f'(x_k)} \xi_i + x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)} \right)}.$$

2.4.1 Гаусова формула првог реда

За $n=1$ добијамо $a = x_k$, $b = x$, $\xi_1 = 0$ $w_1 = 2$ и

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f' \left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)} \right)}.$$

Видимо да је ово исти поступак који смо добили и помоћу формуле средњих правоугаоника. Наиме, Гаусова формула првог реда и формула средњих правоугаоника су исте. Овај поступак је посматран у [2] и [13]. Његов ред конвергенције је 3, коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{3}{3} = 1, \quad EEF^* = \sqrt[3]{3} = 1.44224....$$

2.4.2 Гаусова формула другог реда

За $n=2$ добијамо $a = x_k$, $b = x$, $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\xi_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $w_1 = w_2 = 1$ и

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'\left(-\frac{f(x_k)}{2\sqrt{3}f'(x_k)} + x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right) + f'\left(\frac{f(x_k)}{2\sqrt{3}f'(x_k)} + x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right)}.$$

Овај поступак нисмо нашли у стручној литератури. Његов ред конвергенције је 3, а коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{3}{4}, \quad EEF^* = \sqrt[4]{3} = 1.31607....$$

2.4.3 Гаусова формула трећег реда

За $n = 3$ добијамо $a = x_k$, $b = x$, $\xi_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $\xi_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\xi_3 = 0$, $w_1 = w_2 = \frac{5}{9}$, $w_3 = \frac{8}{9}$ и

$$x_{k+1} = x_k - \frac{18f(x_k)}{5f'(z_1) + 5f'(z_2) + 8f'(z_0)}$$

где је

$$z_1 = -\frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\sqrt{\frac{3}{5}} + x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}, \quad z_2 = \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\sqrt{\frac{3}{5}} + x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}, \quad z_0 = x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}.$$

Овај поступак нисмо нашли у стручној литератури. Његов ред конвергенције је 3, а коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{3}{5}, \quad EEF^* = \sqrt[5]{3} = 1.24573....$$

3. Модификације итеративних поступака

У овом делу приказујемо једну модификацију из [10] поступка из [17]. Ова модификација је реда конвергенције 2, док је поступак из [17] реда конвергенције 3. Поред тога, коефицијенти ефикасности ове модификације лошији су и од поступка чијом је модификацијом добијен и од Њутновог поступка, који има ред конвергенције 2.

Модификацију сличну претходној, за исти поступак из [17], је наш допринос посматраној теми мастер рада. Ред конвергенције наше модификације је 3 и има коефицијенте ефикасности исте као и поступак чијом модификацијом је добијена.

3.1.1 Модификација Nasr-Al-Din Ide

У раду [10] предложена је следећа модификација

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4f(x_k)}{f'(x_k) - 2 \frac{f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right) - f(x_k)}{\frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}} + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}$$

поступка [17], добијеног помоћу средње вредности формуле средњих правоугаоника и трапезне формуле

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4f(x_k)}{f'(x_k) + 2f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right) + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}.$$

У овој модификације је

$$f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right)$$

апроксимирано са

$$\frac{f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right) - f(x_k)}{\frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}}.$$

За добијену модификацију аутор тврди да је боља од Њутновог поступка. Међутим, непосредним диференцираањем може се утврдити да за функцију корака

$$F(x) = x - \frac{4f(x)}{f'(x) - 2 \frac{f\left(x_k - \frac{f(x)}{2f'(x)}\right) - f(x)}{\frac{f(x)}{2f'(x)}} + f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}$$

важи

$$\alpha = F(\alpha), \quad F'(\alpha) = 0, \quad F''(\alpha) = \frac{c_2}{4}, \quad F'''(\alpha) = \frac{7c_2^2}{16} + \frac{5c_3}{8}$$

што значи да је поступак другог реда конвергенције, као и Њутнов поступак. Коефицијенти ефикасности Њутновог поступка су

$$EEF = \frac{2}{2} = 1, \quad EEF^* = \sqrt{2} = 1.4142\dots$$

Коефицијенти ефикасности модификованог поступка из [10] су

$$EEF = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad EEF^* = \sqrt[4]{2} = 1.18921\dots$$

а коефицијенти поступка који је модификован су

$$EEF = \frac{3}{4}, \quad EEF^* = \sqrt[4]{3} = 1.31607\dots$$

Значи, модификација из [10] је најлошија, узимајући наведене параметре за критеријум.

3.1.2 Наша модификација

Када се модификација [10] поједностави, добијамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4f(x_k)^2}{-4f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right)f'(x_k) + f(x_k)\left(5f'(x_k) + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)\right)}.$$

Наша модификација поступка [10] је

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4f(x_k)^2}{-2f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)f'(x_k) + f(x_k)\left(3f'(x_k) + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)\right)}$$

је боља, јер за њу важи

$$\alpha = F(\alpha), \quad F'(\alpha) = 0, \quad F''(\alpha) = 0, \quad F'''(\alpha) = c_2^2 - \frac{c_3}{4}$$

где је

$$F(x) = x - \frac{4f(x)^2}{-2f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)f'(x) + f(x)\left(3f'(x) + f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)\right)}.$$

Коефицијенти ефикасности наше модификације поступка [10] су

$$EEF = \frac{3}{4}, \quad EEF^* = \sqrt[4]{3} = 1.31607\dots$$

а ред конвергенције је 3. Ово значи да је наша модификација боља и има ред конвергенције и коефицијенте ефикасности исте као и поступак из [17], чијом модификацијом је добијена.

3.1.3 Хармонијска средина

Функција корака Њутновог поступка (поступка добијеног помоћу формуле левих правоугаоника) је

$$F_L(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Функција корака поступка добијеног помоћу формуле десних правоугаоника је

$$F_D(x) = x - \frac{f(x)}{f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}$$

Узимајући аритметичку средину формуле левих и десних правоугаоника

$$F_{LD}(x) = x - \frac{f(x)\left(f'(x) + f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)\right)}{2f'(x)f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}$$

За функцију корака F_{LD} добијамо

$$\alpha = F(\alpha), \quad F'(\alpha) = 0, \quad F''(\alpha) = 0, \quad F'''(\alpha) = \frac{c_3}{2}$$

што значи да је одговарајући итеративни поступак трећег реда конвергенције. Његови коефицијенти ефикасности су

$$EEF = \frac{3}{3} = 1, \quad EEF^* = \sqrt[3]{3} = 1.44224\dots$$

Значи, и овај поступак је бољи од модификације из [10]. Описани поступак се често среће у радовима који се односе на нумеричко решавање једначина и налазимо га и у радовима [1], [6], [7], [8], [13], [17] и [18].

4. Нумерички експерименти

У овом делу приказујемо резултате наших експеримената са описаним поступцима. Сва рачунања су урађена у *Mathematica*-и 8. Прецизност је повећана на 10000 цифара са `SetPrecision` функцијом. Користили смо следећи излазни критеријум: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ и $|f(x_k)| < \varepsilon$ где је α тачно решење посматране једначине. У случајевима када тачно решење није доступно, користили смо његову апроксимацију α^* , која је рачуната са 10000 цифара, али смо приказали само 20 цифара.

Нумерички ред конвергенције (COC) је рачуната према

$$COC = \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha) / (x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha) / (x_{n-1} - \alpha)|}.$$

У нашим модификацијама COC је био 2 или 3.

Решавали смо једначину $f(x) = 0$ користећи следеће тест функције и за њих одговарајуће стартне вредности x_0 и тачна решења α или апроксимације тачних решења α_1^* :

$$f_1(x) = \frac{1}{2} - \sin x, [4], [14], \alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731, x_0 = 0.7,$$

$$f_2(x) = x^3 - 10, [6], [16], \alpha_2^* \approx 2.1544346900318837218, x_0 = 2,$$

$$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10, [6], [8], [10], [16], [18], \alpha_4^* \approx 1.3652300134140968458, x_0 = 2$$

$$f_4(x) = e^{-x} \sin x + \ln(x^2 + 1), [7], \alpha_{11} = 0, x_0 = 2,$$

$$f_5(x) = (x-1)^3 - 1, [6], [16], [18], \alpha_5 = 2, x_0 = 1.8,$$

$$f_6(x) = (x-1)^3 - 2, [7], [8], [16], [18], \alpha_6^* \approx 2.259921049894873, x_0 = 2.0,$$

$$f_7(x) = x^2 \sin x - \cos x, [7], \alpha_{10}^* \approx 0.8952060453842319, x_0 = 1.5,$$

$$f_8(x) = e^{x^2+7x-30} - 1, [6], [16], [18], \alpha_8 = 3, x_0 = 3.1,$$

$$f_9(x) = x - \cos x, [6], [16], [18], \alpha_9^* \approx 0.7390851332151606, x_0 = 2,$$

$$f_{10}(x) = x^3 - e^{-x}, [9], [10], \alpha_{10}^* \approx 0.7728829591492101, x_0 = 1.5,$$

Приказујемо само неке од добијених резултата. Резултати за преостале тест функције се не разликују много од приказаних резултата, па их не наводимо.

У следећој табели приказане су вредности за $-\log|x_8 - \alpha|$ за наведене поступке. Итеративни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4f(x_k)}{f'(x_k) + 2f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right) + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}$$

је из [17] и појављује се као специјалан случај посматране фамилије за $\delta = 1/2$. Други специјални случајеви овог поступка се добијају за $\delta = 1$, $\delta = 0$, и $\delta = 1/3$. То су поступци из [16] (добијен помоћу трапезне квадратурне формуле), [2] (добијен помоћу формуле средњих правоугаоника) и из [3] (добијен помоћу Симпсонове квадратурне формуле) респективно.

У раду [10] предложену модификацију Њутновог поступка називамо Модификација Иде. Нашу модификацију тог поступка називамо Наша модификација. Хармонијска средина је назив поступка насталог аритметичком средином формула левих и десних правоугаоника.

Поступак	f_1	f_2	f_3	f_8	f_{10}
Њутнов	156.858	143.505	76.5611	37.7291	41.5255
Десни правоугаоници	159.113	142.836	79.0319	62.6241	54.8402
Фамилија $\delta = 1$	∞	2380.80	1264.79	546.282	646.206
Фамилија $\delta = 1/2$	2795.84	2436.88	1300.31	607.272	692.079
Фамилија $\delta = 1/3$	2686.51	2457.16	1312.18	630.584	708.99
Фамилија $\delta = 0$	2524.01	2500.55	1339.00	683.024	745.809
Гаусова фор. $n = 2$	2686.57	2457.16	1312.82	630.79	708.992
Гаусова фор. $n = 3$	2686.55	2457.16	1312.82	630.71	708.991
Модификација Иде	238.781	229.883	133.557	78.1489	84.7777
Наша модификација	2940.17	2417.43	1288.14	585.626	676.032
Хармонијска средина	2758.96	3456.71	1965.54	906.281	1070.99

Табела 1. Вредности за $-\log|x_8 - \alpha|$

У табели 2 приказујемо коефицијенте ефикасности и асимптотске константе грешке за поступке из претходне табеле. Тиме су обухваћени сви поступци које смо посматрали, узимајући у обзир да се неки појављују више пута као поступци добијени применом различитих квадратурних формула или као специјални случајеви посматране фамилије. За целу фамилију је ред конвергенције 3, коефицијенти ефикасности су, у општем случају,

$$EEF = \frac{3}{4}, \quad EEF^* = \sqrt[4]{3} = 1.31607....$$

Посебни случајеви ове фамилије дати су у табели 2.

Поступак	p	d	EEF	EEF^*	AKG
Њутнов	2	2	1	$\sqrt{2} = 1.4142\dots$	C_2
Десни правоугаоници	2	3	$2/3$	$\sqrt[3]{2} = 1.25992\dots$	$-C_2$
Фамилија $\delta = 1$	3	3	1	$\sqrt[3]{3} = 1.44224\dots$	$C_2^2 + \frac{1}{2}C_3$
Фамилија $\delta = 1/2$	3	4	$3/4$	$\sqrt[4]{3} = 1.31607\dots$	$C_2^2 + \frac{1}{8}C_3$
Фамилија $\delta = 1/3$	3	4	$3/4$	$\sqrt[4]{3} = 1.31607\dots$	C_2^2
Фамилија $\delta = 0$	3	3	1	$\sqrt[3]{3} = 1.44224\dots$	$C_2^2 - \frac{1}{2}C_3$
Гаусова фор. $n = 2$	3	4	$3/4$	$\sqrt[4]{3} = 1.31607\dots$	C_2^2
Гаусова фор. $n = 3$	3	5	$3/5$	$\sqrt[5]{3} = 1.24573\dots$	C_2^2
Модификација Иде	2	4	$1/2$	$\sqrt[4]{2} = 1.18921\dots$	$\frac{1}{4}C_2$
Наша модификација	3	4	$3/4$	$\sqrt[4]{3} = 1.31607\dots$	$C_2^2 + \frac{1}{4}C_3$
Хармонијска средина	3	3	1	$\sqrt[3]{3} = 1.44224\dots$	$\frac{1}{2}C_3$

Табела 1. Коефицијенти ефикасности и асимптотска константа грешке (AKG)

Из табеле 1 видимо да су резултати потврдили теоријска разматрања. За први пример фамилија са $\delta = 1$ даје грешку практично једнаку нули. То је специфичан пример, јер је решење одговарајуће једначине такво да у овом случају добијамо ред конвергенције 4. Такође, за први пример наша модификација даје најбољи резултат. За остале примере је карактеристично да су сви поступци реда 3 дали сличне резултате, али је најбољи поступак хармонијске средине. На ово нас упућују и резултати из табеле 2, односно коефицијенти ефикасности и асимптотске константе грешке.

5. Закључак

За извођење Њутновог итеративног поступка одабрали смо приступ који полази од Њутнове теореме у којој се појављује одређени интеграл. Апроксимацијом тог одређеног интеграла квадратурним формулама добили смо Њутнов поступак и више његових модификација. Ове модификације су другог и трећег реда конвергенције. Приказано је више поступака, одређен ред конвергенције, коефицијенти ефикасности и асимптотске константе грешке за сваки од њих. Као оригинални резултат дали смо једну модификацију Њутновог поступка трећег реда конвергенције и два поступка добијена применом Гаусових квадратурних формула, која нисмо нашли у литератури. За фамилију поступака из [17] доказли смо теорему о локалној конвергенцији и одредили асимптотску константу грешке. Овај доказ се разликује од доказа датог у [17].

У трећем делу је посебно посматрана модификација поступка из [17] дата у раду [10]. Ова модификација није побољшала оригинални поступак, јер је реда конвергенције 2, док је оригинални поступак реда конвергенције 3. Поред тога, коефицијенти ефикасности ове модификације лошији су и од поступка чијом је модификацијом добијен и од Њутновог поступка, који има ред конвергенције 2. Наша модификација поступка из [17] је реда конвергенције 3 и има коефицијенте ефикасности исте као и тај поступак.

У последњем делу рада приказани су неки резултати нумеричких експеримената, који су урађени у програмском пакету *Mathematica*. Примери су узети из наведених радова, а највише из [6], [8], [10], [16] и [18]. Нумерички резултати су у складу са теоријским разматрањима.

6. Литература

- [1] Babajee, D. K. R., Dauhoo, M. Z., An analysis of the properties of the variants of Newton's method with third order convergence, *Applied Mathematics and Computation* 183 (1) (2006), 659–684.
- [2] Frontini, M., Sormani, E., Some variants of Newton's method with third-order convergence, *Appl. Math. Comput.* 140, 2003, 419-426.
- [3] Hasanov, V.I., Ivanov, I.G., Nedzhibov, G., A new modification of Newton's method, *Applications of Mathematics in Engineering*, 27, 2002, 278-286.
- [4] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 2010, 1-9.
- [5] Herceg D., Krejić N., *Numerička analiza*, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.
- [6] Homeier, H.H.H., On Newton-type methods with cubic convergence, *J. Comput. Appl. Math.* 176 (2005), 425–432.
- [7] Kou, J., Li, Z., Wang, X., A modification of Newton method with third-order convergence, *Applied Mathematics and Computation* 181 (2006), 1106–1111.
- [8] Kou, J., Li, Y., Wang, X., Third-order modification of Newton's method, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 205 (2007), 1 – 5
- [9] Nasr-Al-Din Ide, A new Hybrid iteration method for solving algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 195 (2008) 772–774.
- [10] Nasr-Al-Din Ide, On modified Newton methods for solving a non linear algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation* 198 (2008) 138–142.
- [11] Nedzhibov, G., On a few iterative methods for solving nonlinear equations, *Application of Mathematics in Engineering and Economics*, in: *Proceedings of the XXVIII Summer School Sozopol 2002*, Heron Press, Soa, 2002.
- [12] Ostrowski, A.M., *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, Academic Press, New York, 1960.
- [13] Özban, A. Y, Some new variants of Newton's method, *Appl. Math. Lett.*, 17, 2004, 677-682.
- [14] Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.
- [15] Traub J.F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., United States of America, 1964.
- [16] Weerakoon, S., Fernando, T. G. I., A variant of Newton's method with accelerated third order convergence, *Appl. Math. Lett.* 13, 2000, 87-93.
- [17] Zafar, N., Mir, N. A., A generalized family of quadrature based iterative methods 1, *General Mathematics* Vol. 18, No. 4 (2010), 43-51.
- [18] Zhou X., A class of Newton's methods with third-order convergence, *Applied Mathematics Letters* 20 (2007), 1026–1030.

7. Биографија

Рођена сам 10.5.1983. године у Сиску. Основну школу „Михајло Пупин“ у Ветернику завршила сам 1999, Гимназију „Лаза Костић“ у Новом Саду 2002. Дипломирала сам на Природно-математичком факултету у Новом Саду, смер дипломирани математичар – професор математике 2008. године. Као професор математике радила сам од 2009. у Гимназији „Светозар Марковић“ у Новом Саду, а од 2010. године у Основној школи „Коста Трифковић“ у Новом Саду. Запослена сам и радим у Основној школи „Петефи Шандор“ у Новом Саду.

Нови Сад, септембар 2012.

Јелена Ковачевић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Мастер рад

ВР

Аутор: Јелена Ковачевић

АУ

Ментор: Др Драгослав Херцег

МН

Наслов рада: Поступци за нумеричко решавање нелинеарних једначина засновани на квадратурама

МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода: српски и енглески

ЈИ

Земља публикација: Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2012.

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3

МА

Физички опис рада: 4/ 38/ 18/3/0/0

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Нумеричка математика

НД

Кључне речи:

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод:

У раду посматрамо неке нумеричке поступке за решавање нелинеарне једначине са једном непознатом $f(x)=0$ који се заснивају на модификацијама Њутновог поступка. Полазећи од израза $f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^x f'(u) du$ и замењујући интеграл квадратурним формулама за нумеричку интеграцију, добијамо апроксимацију за $f(x)$. Изједначавајући ову апроксимацију са нулом добијамо најпре имплицитну

једначину за израчунавање приближне вредности решења једначине $f(x)=0$. Користећи Њутнов поступак из имплицитне једначине добијамо експлицитну и потом двокорачни итеративни поступак. У зависности од избора квадратурне формуле добијамо фамилију итеративних поступака. За изабране поступке, под одређеним претпоставкама, доказујемо конвергенцију и одређујемо ред конвергенције.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 9.07.2012.

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: Др Ђорђе Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: Др Хелена Зарин, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: Др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Jelena Kovačević

AU

Mentor: dr. Dragoslav Herceg

MN

Title: Quadrature based iterative method for numerical solving nonlinear equations

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description 4/ 38/ 18/3/0/0

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words:

SKW UC:

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract: In this paper, we consider some numerical methods for solving nonlinear equations $f(x)=0$ with one unknown, which are based on modifications of

Newton's procedure. Starting from the expression $f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^x f'(u) du$ and replacing the integral by quadrature formulas for numerical integration, we obtain an approximation for $f(x)$. Equating to zero this approximation we get firstly implicit equation to calculate the approximate value of solutions to the equation $f(x) = 0$. Using Newton's method we obtain from the implicit equation explicit one, and then two-step iterative method. Depending on the choice of quadrature formulas we obtained family of iterative methods. For selected procedures, under certain assumptions, we prove convergence and determine the order of convergence.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 9. 07. 2012

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr, Helena Zarin, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad