UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Značajne tačke i linije u trouglu

MASTER RAD

Mentor:

dr Vojislav Petrović

Autor:

Jelena Knežević

Novi Sad, *2013.*

Sadržaj

Predgovor 2
1. Uvod 3
Trilinearne koordinate 3
2. Centar opisane kružnice 6
3. Centar upisane kružnice 8
4. Težište 11
5. Ortocentar 15
6. Ojlerova prava 20
7. Ojlerova kružnica 21
8. Fermaova tačka 24
9. Napoleonove tačke 28
10. Žergonova tačka 31
11. Brokarove tačke 32
12. Presek simedijana 36
13. Nagelova tačka 41
14. središnja tačka 42
15. Mikelova tačka 45
16. Fojerbahova tačka 46
Zaključak 51
Literatura 52
Biografija 53

Predgovor

Preciznu i sveobuhvatnu definiciju značajnih tačaka i linija trougla je veoma teško dati. Pod njima se obično podrazumevaju tačke, prave, kružnice i druge krive 2. reda (elipse, parabole, hiperbole) koje su na određeni način prateći deo trougla.

Neke od značajnih tačaka i linija bile su poznate još u antičkoj matematici, neke su otkrivene u srednjem veku, a ogroman broj datira u poslednjih 40-50 godina. Poređenja radi, pre samo nekoliko meseci na spisku je bilo 5389 tih značajnih objekata. Trenutno ih je poznato 5405. Definicije i osnovne karakteristike svih do sada poznatih značajnih tačaka i linija trougla mogu se naći u [2].

Iz ogromnog broja značajnih tačaka, pravih i kružnica trougla u ovom radu je predstavljen jedan manji broj. Izbor je pao na klasične, kao što su opisane i upisane kružnice i njihovi centri, ortocentar, težište. Zatim dolaze Ojlerova prava i kružnica, Fermaova, Napoleonova, Brokarova i Žergonova tačka itd.

Za predstavljanje značajnih tačaka i linija koriste tzv. trilinearne koordinate. O njima, njihovim karakteristikama i primenama govori se u prvoj uvodnoj glavi.

Druga glava se bavi dobro poznatom opisanom kružnicom i njenim centrom. Osim definicije i trilinearnih koordinata, navode se karakteristične osobine te tačke, odnosno kružnice. U 3. glavi se daje prikaz upisane i spolja pripisanih kružnica po sličnoj šemi. Četvrta glava je posvećena težištu, a peta ortocentru trougla. Za svaku od navedenih tačaka daju se i veze sa ostalim značajnim tačkama, pravama i kružnicama.

U 6. glavi se predstavlja Ojlerova prava, a u 7. Ojlerova (Fojerbahova) kružnica, takođe poznata kao kružnica 9 tačaka. U glavama od 8. do 16. redom obrađene: Fermaova tačka, Napoleonova tačka, Žergonova tačka, Brokarova tačka, tačka preseka simediana, Nagelova tačka, središnja tačka, Mikelova tačka, Fojerbahova tačka.

Sve značajne tačke i linije su, osim definicijama i trilinearnim koordinatama, predstavljene i grafički .

Na kraju je spisak korišćene literature.

Želela bih da se zahvalim mentoru dr Vojislavu Petroviću i članovima komisije dr Bojanu Bašiću i dr Đuri Pauniću na korisnim savetima i podršci prilikom izrade ovog rada.

1. Uvod

Trilinearne koordinate

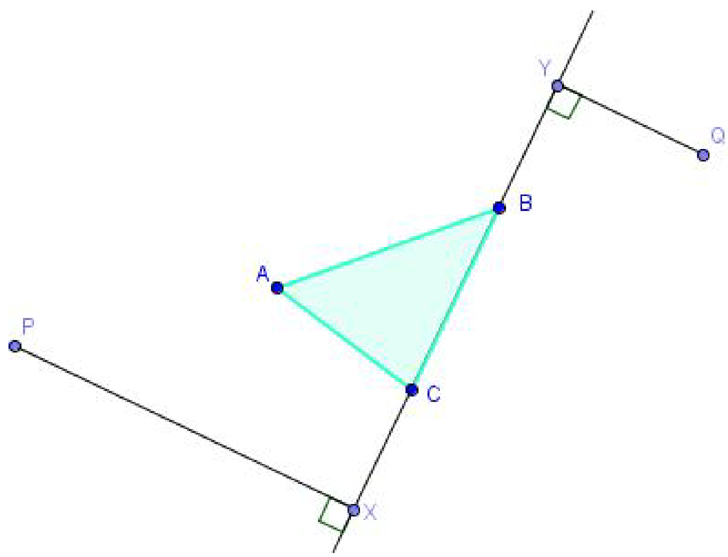
Jedan od pogodnih načina za definisanje i predstavljanje značajnih tačaka trougla su trilinearne koordinate. One predstavljaju neku vrstu odnosa rastojanja posmatrane tačke od stranica u trouglu.

Neka je data stranica s trougla ABC i tačka P. Obeležimo sa $|P,s|$ udaljenost od tačke P do prave koja sadrži s. Sada definišimo udaljenost u zavisnosti od znaka od P do s kao:

$$[P,s] = \begin{cases} |P,s|, & ako\ je\ P\ sa\ iste\ strane\ prave\ s\ kao\ i\ trougao; \\ -|P,s|, & u\ suprotnom. \end{cases}$$

Na slici 1 je $[P, BC] = |PX|$, a $[Q, BC] = -|QY|$

Na ovaj način svaki trougao obrazuje neku vrstu koordinatnog sistema u kom je tačka P data sa 3 koordinate: $\alpha = [P, BC]$, $\beta = [P, AC]$, $\gamma = [P, AB]$. Ovo zapisujemo $P = [\alpha : \beta : \gamma]$

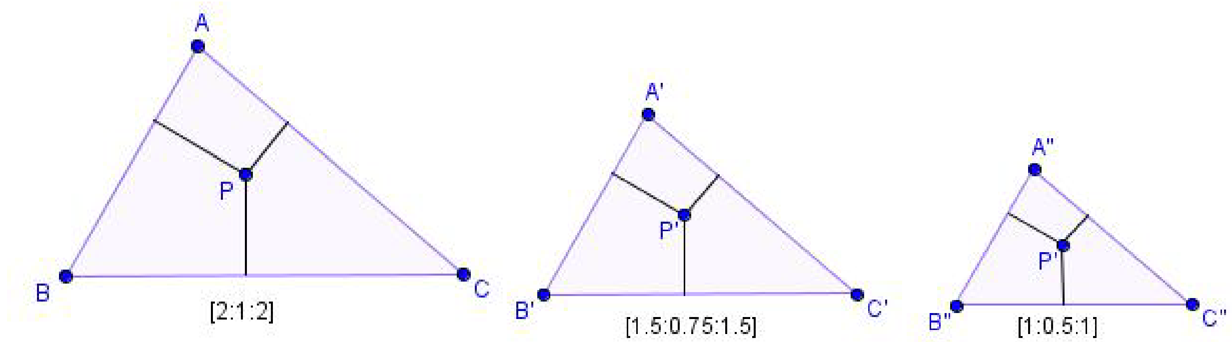


Sl. 1

Dva skupa trilinearnih koordinta $[a : b : c]$ i $[a' : b' : c']$ su ekvivalentna, zapisujemo $[a : b : c] \sim [a' : b' : c']$, ako postoji realan broj $k \neq 0$ takav da je $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$.

Posmatrajmo jednakostraničan trougao sa stranicom dužine 1. Npr. ne postoji tačka koja je od svake stranice udaljena za dva, ali $[2 : 2 : 2]$ je ekvivalentno sa $\left[\sqrt{3}/6 : \sqrt{3}/6 : \sqrt{3}/6\right]$, a postoji tačka koja je od svake stranice udaljena za $\sqrt{3}/6$, to je težište trougla.

Pretpostavimo da su trouglovi ABC i $A'B'C'$ slični, sa koeficijentom sličnosti k, pa je $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$, $|A'C'| = k|CA|$ (slika 2). Tada su koordinate tačke P u odnosu na trougao ABC ekvivalentne koordinatama tačke P' u odnosu na trougao $A'B'C'$, gde je P' tačka u trouglu $A'B'C'$ dobijena od tačke P, preslikavanjem sličnisti sa koeficijentom k (u slučaju datom na slici $k = 3/4$). Na isti način preslikavajući trougao ABC sa koeficijentom sličnosti $k = 1/2$, dobijamo tačku P'' u trouglu $A''B''C''$, čije su trilinearne koordinate ekvivalentne sa trilinearnim koordinatama tačke P (ΔABC) i sa trilinearnim koordinatama tačke P' ($\Delta A'B'C'$).



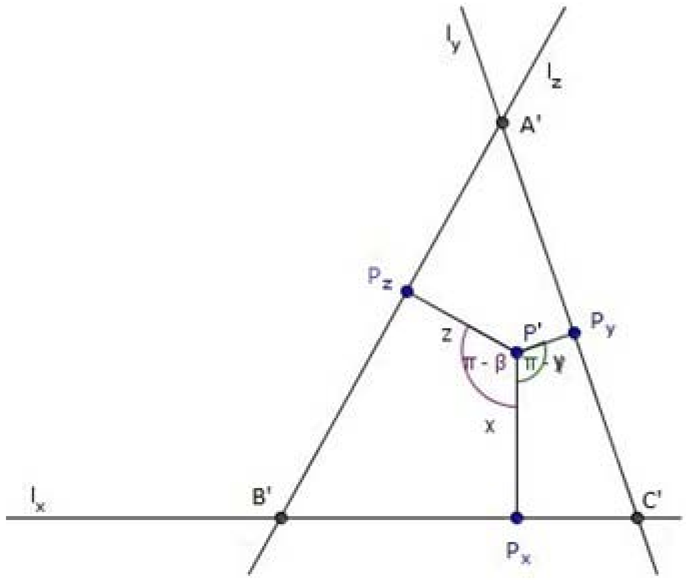
Sl. 2

Teorema 1. *Neka je dat trougao ABC i realni brojevi x, y i z koji nisu svi jednaki nuli. Tada postoji tačka P čije su trilinearne koordinate u odnosu na trougao ABC $[x : y : z]$.*

Dokaz: Imamo dve klase trilinearnih koordinata: jedna u kojoj su sve tri koordinate pozitivne i druga kad su jedna ili dve negativne. Konstruisaćemo $\Delta A'B'C'$ i tačku P' tako da je $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ i pritom $[P', B'C'] = x$, $[P', A'C'] = y$, $[P', B'A'] = z$.

Slučaj 1. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \sim x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$

Posmatrajmo slučaj kada su sve tri koordinate veće ili jednake 0. Neka je P' proizvoljna tačka. Obeležimo sa P_x tačku čija je udaljenost od tačke P' jednaka x. Sa različitih strana duži $P'P_x$ kod tačke P'nanesimo uglove $\pi - \beta$ i $\pi - \gamma$, nanesimo dužine z i y redom (slika 3). Tačke koje pri tom dobijamo nazovimo sa P_z i P_y. Neka su: l_x prava kroz P_x normalna na $P'P_x$, l_y prava kroz P_y normalna na $P'P_y$ i l_z prava kroz P_z normalna na $P'P_z$. Neka je: $l_y \cap l_z = A'$, $l_x \cap l_z = B'$ i $l_x \cap l_y = C'$.



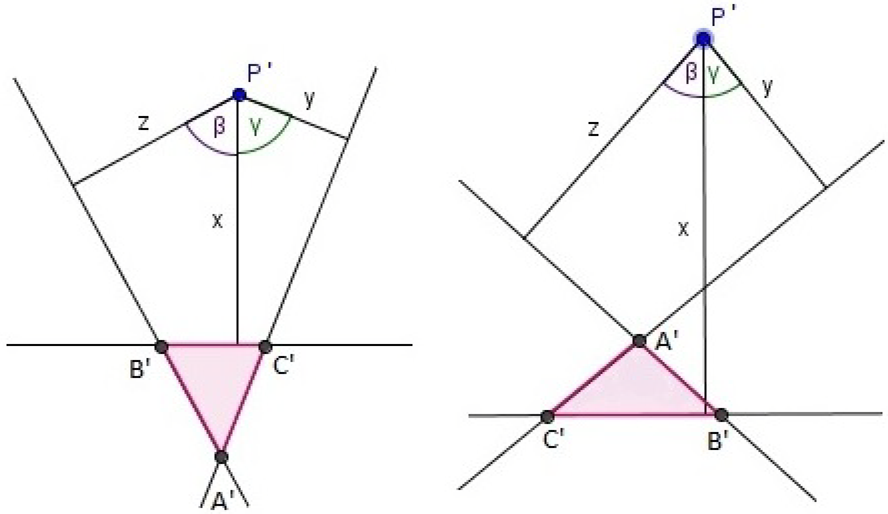
Sl.3

Sada je jasno da su trilinearne koordinate tačke P' u odnosu na trougao $A'B'C'$ $[x : y : z]$. Da bismo dokazali da su trouglovi $\Delta A'B'C'$ i ΔABC slični uporedićemo njihove unutrašnje uglove. Četvorougao $P'P_xB'P_z$ ima prave uglove kod temena P_x i P_z i ugao kod temena P' je jednak $\pi - \beta$. Odatle dobijamo da je $\sphericalangle B' = \beta$. Na isti način dobijamo da je $\sphericalangle C' = \gamma$. Odavde sledi da su trouglovi $\Delta A'B'C'$ i ΔABC slični.

Slučaj 2. $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0 \sim x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Drugi skup dobijamo od prvog, množeći ga sa -1.

U ovom slučaju za razliku od prethodnog uzećemo da je $\sphericalangle P_zP'P_x = \beta$ i $\sphericalangle P_yP'P_x = \gamma$ (slika 4). Konstrukcija i dalje daje da su trouglovi $\Delta A'B'C'$ i ΔABC slični, ali sada tačka P' leži izvan trougla. Na prvom crtežu je slučaj $x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$, tada imamo $\sphericalangle P_xB'P_z = \pi - \beta$, odakle je $\sphericalangle B' = \beta$ analogno $\sphericalangle C' = \gamma$. Na drugom crtežu je $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$, tada je $\sphericalangle P_xA'P_z = \alpha$, a da je $\sphericalangle C' = \gamma$ vidimo iz trougla koji obrazuju presečna tačka pravih $P'P_x$ i $A'C'$ i tačke C' i P_x. ■

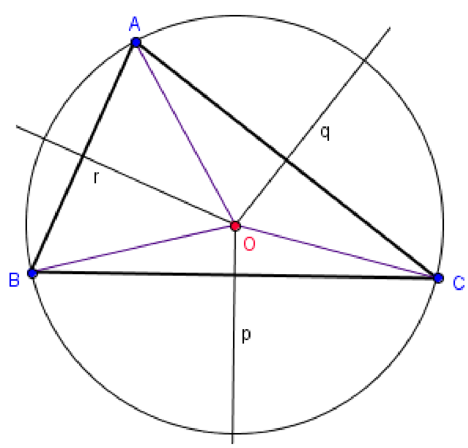


Sl. 4

2. Centar opisane kružnice

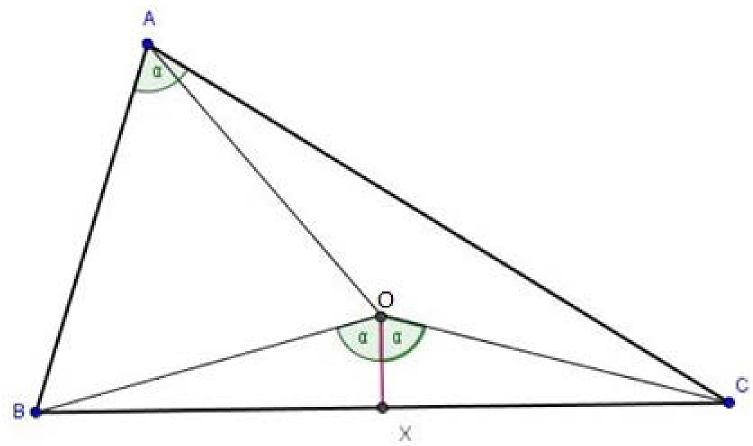
Poznato je da za svaki trougao postoji kružnica koja sadrži njegova temena. To se zasniva na činjenici da se simetrale stranica svakog trougla seku u jednoj tački. Tu tačku obično obeležavamo sa O.

Teorema 2. *Simetrale stranica svakog trougla seku se u jednoj tački.*



Sl. 5

Nađimo sada **trilinearne koordinate** za ovu tačku.



Sl. 6

$$[O, BC] = |OX| = |OB| \cos \sphericalangle BOX$$

$$\Delta BXO \cong \Delta CXO \Rightarrow \sphericalangle BOX \cong \sphericalangle COX = \alpha$$

$\sphericalangle BOC$ je centralni, a $\sphericalangle BAC$ periferijski nad tetivom BC, pa odatle sledi da je

$$\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC \;\Rightarrow\; \sphericalangle BAC = \alpha.$$

Sada imamo da je

$$|OB| \cos \sphericalangle BOX = |OB| \cos \sphericalangle BAC = |OB| \cos \alpha \quad , \text{ tj. } \; [O, BC] = |OB| \cos \alpha.$$

Analogno dobijamo da važi

$$[O, AC] = |OC| \cos \beta \quad \text{i} \quad [O, AB] = |OA| \cos \gamma \;.$$

Dobijamo da su trilinearne koordinate tačke O

$O = [|OB| \cos \alpha : \; |OC| \cos \beta : \; |OA| \cos \gamma \,]$ i važi $|OB| = |OC| = |OA|$ (poluprečnici).

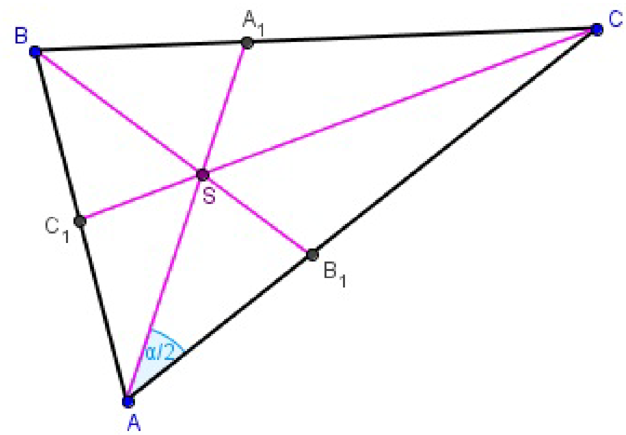
Odatle sledi da je

$$O = [\cos \alpha : \; \cos \beta : \; \cos \gamma \,].$$

3. Centar upisane kružnice

Slično kao i za simetrale stranica, za simetrale unutrašnjih uglova trougla važi tvrđenje:

Teorema 3. *Simetrale unutrašnjih uglova trougla seku se u jednoj tački.*



Sl. 7

Tačka S je jednako udaljena od stranica ΔABC, te je centar kružnice koja ih dodiruje. Ta kružnica se zove – upisana kružnica u ΔABC. Kako su rastojanja tačke S od pravih BC, CA i AB jednaka r – poluprečnik upisane kružnice, njene **trilinearne koordinate** su [1 : 1 : 1].

Osim toga, tačka S ima sledeću osobinu koja je povezuje sa opisanom kružnicom oko ΔABC.

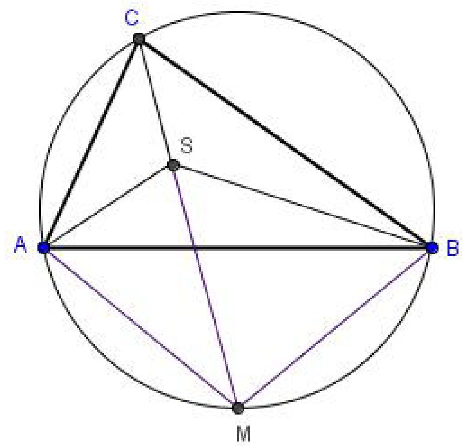
Teorema 4. *Neka simetrala $\sphericalangle ACB$ seče kružnicu opisanu oko trougla ABC u tački M. Tada je $MS = MA = MB$, gde je S centar upisane kružnice.*

Dokaz: $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM = \frac{\gamma}{2}$, odakle dobijamo da je M središte luka $\widehat{AB}$, pa je $MA = MB$ (1)

$\sphericalangle ASM = \sphericalangle SAC + \sphericalangle SCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ (2)

$\sphericalangle SAM = \sphericalangle SAB + \sphericalangle BAM = \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle BCM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ (3)

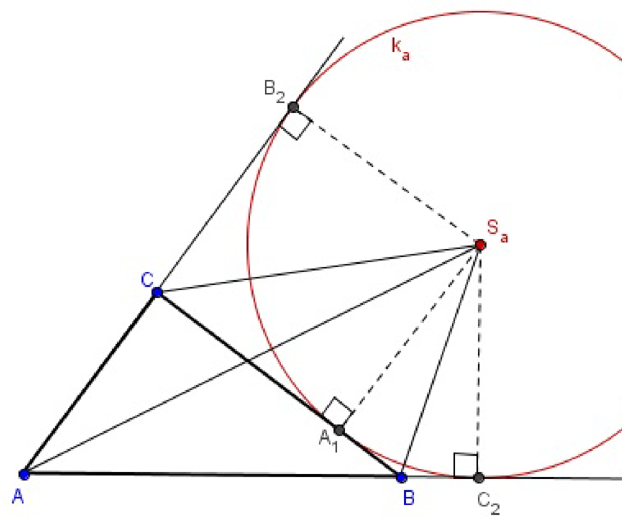
Iz (2) i (3) je $MA = MS$, a odatle i iz (1) da je $MA = MB = MS$. ■



Sl. 8

Za simetrale jednog unutrašnjeg i dva spoljašnja ugla trogla važi slična teorema:

Teorema 5. Simetrala jednog unutrašnjeg ugla trougla i simetrale spoljašnjih uglova kod druga dva temena seku se u jednoj tački - centru spolja pripisane kružnice. ■



Sl. 9

Ta tačka je centar kružnice koja dodiruje jednu stranicu trougla i produžetke druge dve. Takvu kružnicu zovemo spolja pripsanom za ΔABC. Ako dodiruje stranicu BC, centar označavamo sa S_a, a poluprečnik sa r_a. Slično su S_b i S_c centri spolja pripisanih kružnica koje dodiruju stranice CA i AB, a r_b i r_c njihovi poluprečnici. S obzirom na Teoremu 5, **trilinearne koordinate** tačaka S_a, S_b i S_c redom su $[-1 : 1 : 1], [1 : -1 : 1], [1 : 1 : -1]$.

Za upisanu i jednu od spolja pripisanih kružnica važno i korisno je sledeće tvrđenje.

Teorema 6. *Neka kružnica upisana u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA i AB redom u tačkama* A_1, B_1 *i* C_1 *i neka spolja pripisana kružnica* k_a *dodiruje stranicu BC u tački* A_2 *i produžetke stranica CA i AB u tačkama* B_2 *i* C_2 *redom. Tada je:*

a) $AC_2 = AB_2 = \frac{a+b+c}{2}$

b) $BA_2 = BC_2 = CA_1 = CB_1$
$CA_2 = CB_2 = BA_1 = BC_1$

c) $B_1B_2 = C_1C_2 = a$.

Dokaz: Primetimo da su duži AB_1 i AC_1 jednake. Obeležimo njihovu dužinu sa x. Takođe važi da je $BC_1 = BA_1 = y$ i $CA_1 = CB_1 =$ z (1). Na isti način dobijamo da je $BA_2 = BC_2$ i $CA_2 = CB_2$ (2)

Važi da je $AC_2 = AB_2$. Odatle dobijamo da je $x + y + BC_2 = x + z + CB_2$. Sada koristeći (2) imamo da je $x + y + BA_2 = x + z + CA_2$, pa je

$$x + y + BA_2 + x + z + CA_2 = (x + y) + (x + z) + (BA_2 + CA_2)$$

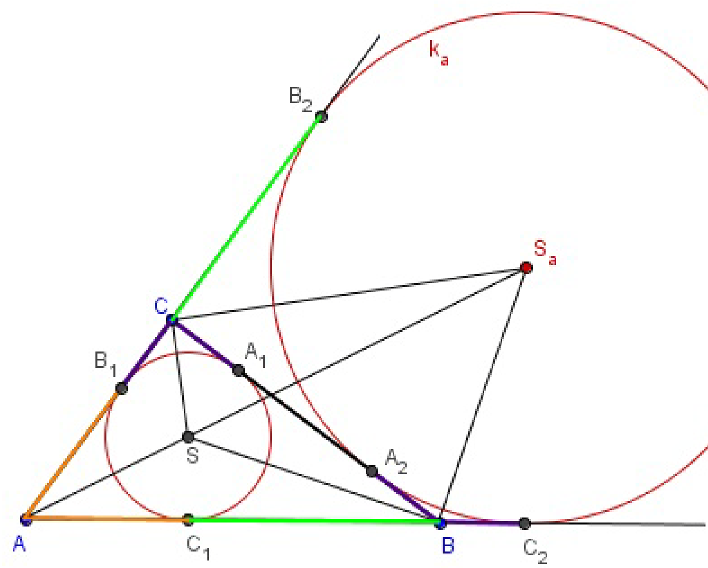
$$= a + b + c = 2(x + y + z)$$

Sada imamo $x + y + BA_2 = \frac{1}{2}(a + b + c) = x + y + z$, odakle sledi da je $BA_2 = BC_2 = z$

Takođe, $x + z + CA_2 = x + y + z$, pa je $CA_2 = CB_2 = y$.

Dobijamo: $BA_2 = BC_2 = CA_1 = CB_1 = z$ i $CA_2 = CB_2 = BA_1 = BC_1 = y$, pa je

$B_1B_2 = C_1C_2 = y + z = a$

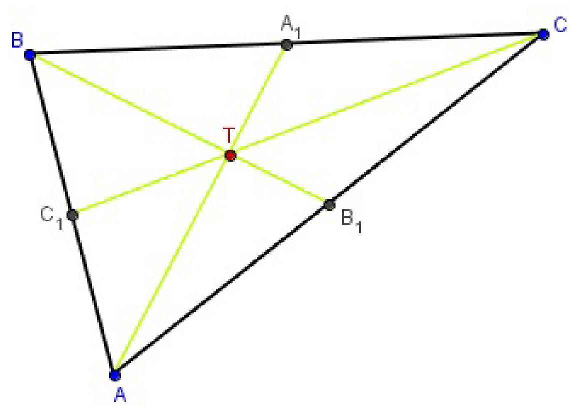


Sl. 10

4. Težište

Težične linije ili duži trougla su duži koje spajaju temena sa sredinama naspramnih stranica. Za njih važi:

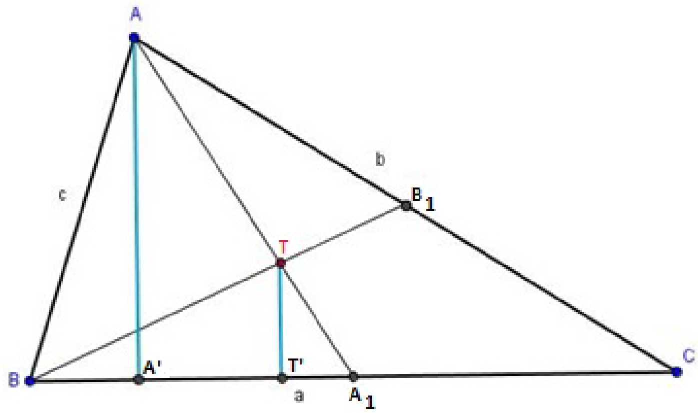
Teorema 7. *Težišne duži trougla ABC seku se u tački* T *, koja ih deli u odnosu 2:1, i to tako da je* $AT = 2TA_1$ *; gde je* A_1 *središte stranice BC.*



Sl. 11

Tačka preseka T zove se *težište* ΔABC. Njene **triliearne koordinate** se mogu dobiti na sledeći način.

Neka je tačka A_1 središte stranice BC i neka je T težište trougla ABC. Obeležimo sa T' podnožje normale iz tačke T na stranicu BC.



Sl. 12

$[T, BC] = |T\,T'| = \frac{1}{3}|AA'|$, jer su trouglovi $A\,A'A_1$ i $T\,T'A_1$ slični i važi $AT : TA_1 = 2:1$

Posmatrajući trouglove $AB\,A'$ i $A\,A'\,C$ redom dobijamo da je $\sin\beta = \frac{|AA'|}{c}$ i $\sin\gamma = \frac{|AA'|}{b}$,

Odakle dobijamo da važi: $[T, BC] = \frac{1}{3}\,c \cdot \sin\beta = \frac{1}{3}\,b \cdot \sin\gamma$.

Naisti način dobijamo da je : $[T, AC] = \frac{1}{3}\,a \cdot \sin\gamma = \frac{1}{3}\,c \cdot \sin\alpha$ i

$$[T, AB] = \frac{1}{3}\,b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{3}\,a \cdot \sin\beta.$$

Sada imamo da su trilinearne koordinate tačke T:

$$T = \left[\frac{1}{3}\,c \cdot \sin\beta \ : \ \frac{1}{3}\,a \cdot \sin\gamma \ : \ \frac{1}{3}\,b \cdot \sin\alpha\right].$$

Iz sinusne teoreme dobijamo da važi: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a}$, a odatle imamo da je

$\frac{3b}{\sin\beta} = \frac{3c}{\sin\gamma} = \frac{3a}{\sin\alpha}$ **,** pa možemo koordinate redom množiti sa ovom jednakošću

$$T = \left[\frac{1}{3}\,c \cdot \sin\beta\,\frac{3b}{\sin\beta} \ : \ \frac{1}{3}\,a \cdot \sin\gamma\,\frac{3c}{\sin\gamma} : \frac{1}{3}\,b \cdot \sin\alpha\,\frac{3a}{\sin\alpha}\right] = [\,bc \ : \ ca \ : \ ab\,].$$

Sledeće tvrđenje potvrđuje da je težište ΔABC istovremeno težište sistema tačaka $\{A, B, C\}$, tj. da odgovara fizičkom težištu.

Teorema 8. *Tačka T je težište trougla ABC ako i samo ako je* $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = 0$

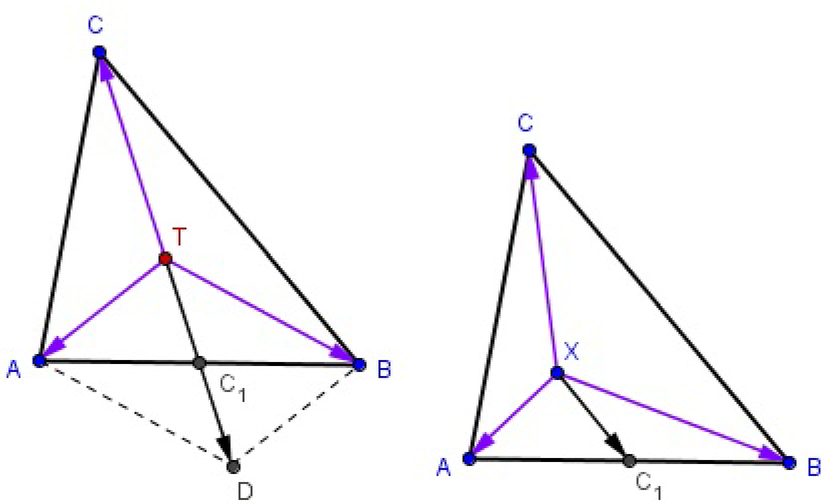
Dokaz: ($\Longrightarrow$) Neka je T težište trougla ABC i neka je tačka C_1 središte stranice AB. Tada je raspored $C - T - C_1$ i $CT = 2TC_1$. Neka je tačka D takva da važi $T - C_1 - D$ i $TC_1 = C_1D$. Sada je $TADB$ paralelogram i važi:

$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{TC_1} = -\overrightarrow{TC}$, a odatle sledi da je $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = 0$

($\Longleftarrow$) Neka je tačka X takva da važi $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 0$

$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{XC_1}$ (C_1 je središte stranice AB)

odavde sledi da je $\overrightarrow{XC} = -2\overrightarrow{XC_1}$, odakle dobijamo $C - X - C_1$ i $CX = 2XC_1$, iz čega dobijamo da je tačka X u stvari težište trougla, tj. $X = T$.



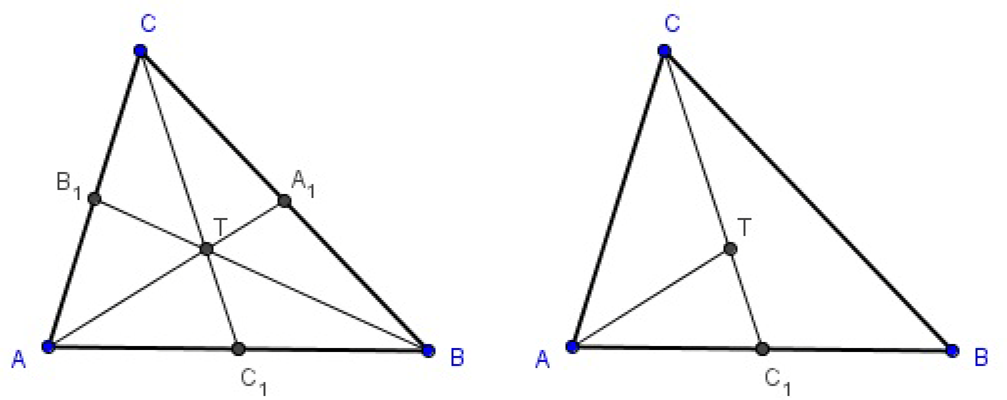
Sl.13

Osim navedenih, težište trougla ima i sledeće osobine.

Teorema 9. Težišne linije dele trougao na 6 trouglova jednakih površina.

Dokaz: $P(ABC) = S$

$P(AC_1C) = P(BC_1C) = \frac{S}{2}$ (visina iz C zajednička, a osnovice jednake $\frac{c}{2}$)



Sl. 14

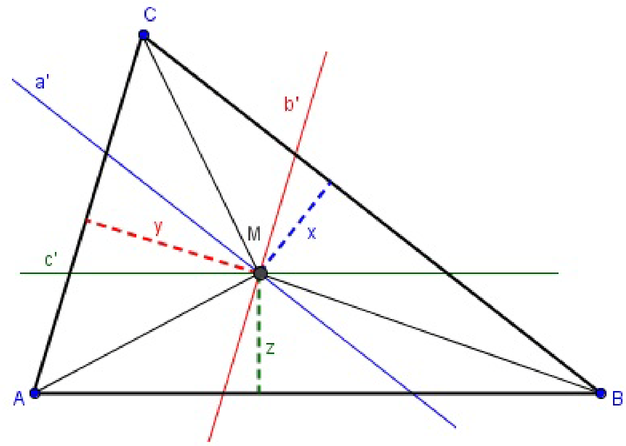
$P(AC_1T) = \frac{1}{3} P(AC_1C) = \frac{S}{6}$

Onda je $P(ATC) = \frac{S}{3}$, a trouglovi ATB_1 i B_1CT imaju jednake površine (osnovica $\frac{b}{2}$), pa su i one jednake $\frac{S}{6}$. ■

Teorema 10. *Neka je M tačka koja pripada unutrašnjosti trougla ABC. Tačka M je težište trougla ABC ako i samo ako je $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM)$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Neka je tačka M težište ΔABC. Iz prethodne teoreme $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM) = \frac{1}{3} P(ABC)$

($\Leftarrow$) Neka je tačka M iz unutrašnjosti trougla ABC za koju važi $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM)$. Odavde dobijamo da je $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM) = \frac{1}{3} P(ABC)$ (1). Obeležimo sa x, y, z rastojanja od tačke M do BC, CA *i* AB redom. Iz (1) sledi da je $x = \frac{1}{3} h_a$, $y = \frac{1}{3} h_b$, $z = \frac{1}{3} h_c$. Dobijamo da $M \in a' \cap b' \cap c' = T$, gde su a', b', c' prave paralelne sa a, b, c na udaljenosti x, y, z redom. ■



Sl.15

5. Ortocentar

Visina trouga je duž određena temenom trougla i podnožjem normale spuštene iz tog temena na naspramnu stranicu trougla. Za visine u trouglu važi sledeće tvrđenje.

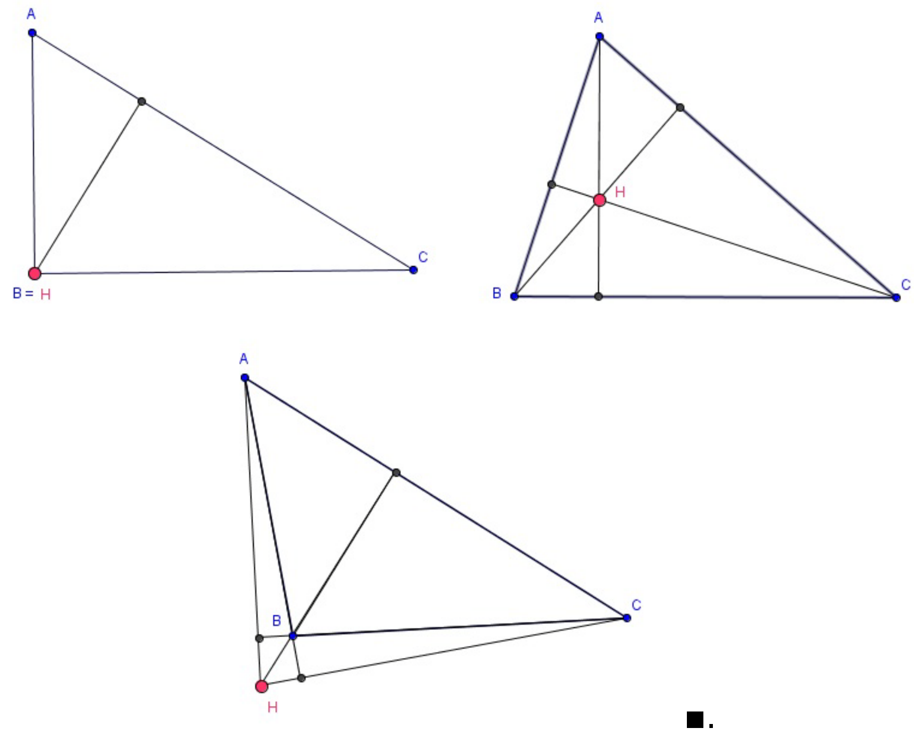
Teorema 11. *Prave određene visinama trougla seku se u jednoj tački.* ■

Tu tačku obično obeležavamo sa H i nazivamo *ortocentar trougla* ABC.

Za razliku od težišta i centra upisane kružnice koji se uvek nalaze u unutrašnjosti trougla, ortocentar i centar opisanog kruga mogu biti i u unutrašnjosti i u spoljašnjosti trougla u zavisnosti od vrste trougla. Položaj ortocentra u različitim vrstama trougla je predstavljen na slici 16.

Pogledajmo sada u kakvom su odnosu tačke A, B, C, H trougla ABC.

Teorema 12. *Ako je H ortocentar oštrouglog ili tupouglog trougla ABC tada je svaka od tačaka A, B, C, H ortocentar trougla koji obrazuju preostale tri.*



■.

Sl. 16

Ortocentar trougla ima i sledeće osobine.

Teorema 13. *Tačke simetrične ortocentru trougla u odnosu na prave određene stranicama trougla pripadaju kružnici opisanoj oko trougla.*

Dokaz: Neka je H_a presek visine trougla iz temena A sa opisanom kružnicom. Analogno dobijamo H_b i H_c.

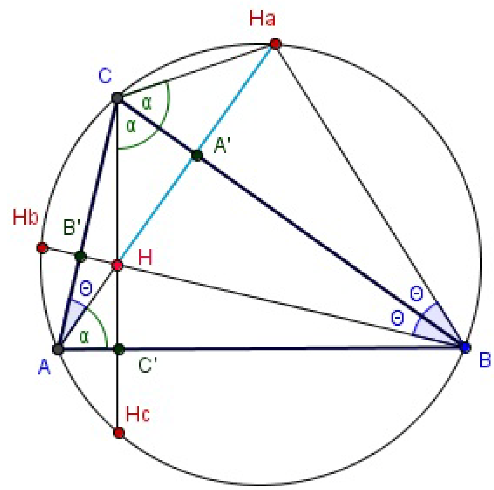
$$\sphericalangle BCH_a = \alpha = \sphericalangle BAH_a = \sphericalangle BCC^{'} = 90° - \beta$$

$$\sphericalangle CBH_a = \theta = \sphericalangle CAH_a = \sphericalangle CAA^{'} = 90° - \gamma$$

$\sphericalangle BAH_a = \sphericalangle BCC^{'}$, jer su trouglovi $CA^{'}H$ i $AC^{'}H$ slični (unakrsni uglovi i prav ugao), a iz trougla $BCC^{'}$ dobijamo da je $\sphericalangle BCC^{'} = 90° - \beta$. Odavde sledi da su trouglovi BCH_a i BCH podudarni (stav USU).

sledi da je $HA^{'} = H_aA^{'}$ i HH_a seče stranicu BC pod pravim uglom, pa je $\sigma_{BC}(H) = H_a$.

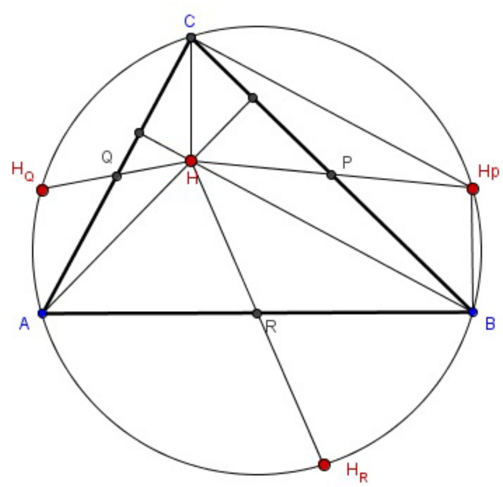
Analogno važi: $\sigma_{CA}(H) = H_b$ i $\sigma_{AB}(H) = H_c$. ■



Sl. 17

Teorema 14. *Tačke simetrične ortocentru trougla u odnosu na sredine stranica trougla pripadaju kružnici opisanoj oko trougla.*

Dokaz: Neka su P, Q i R središta stranica BC, CA, AB redom trougla ABC.

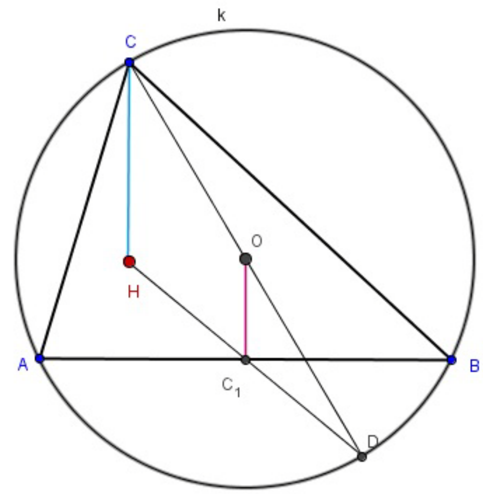


Sl. 18

$\sigma_P(H) = H_p \Rightarrow HP = H_p P$ i važi da je $BP = CP$, pa je BH_pCH paralelogram (dijagonale se polove). Odavde sledi da je $\sphericalangle BH_pC = \sphericalangle BHC = 180° - \alpha$. Odavde imamo da $H_P \in k(A, B, C)$. Slično važi:

$H_Q \in k(A, B, C)$ i $H_R \in k(A, B, C)$. ■

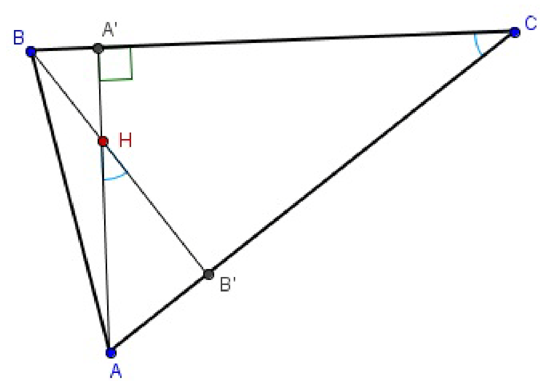
Teorema 15. *Rastojanje od temena do ortocentra trougla dvaput je veće od rastojanja centra opisane kružnice od naspramne stranice.*



Sl. 19

Dokaz: Iz prethodne teoreme dobijamo da je $HC_1 \cap CO = \{D\}$, gde $D \in k(A, B, C)$ i CD je prečnik te kružnice. Tada je OC_1 srednja linija trougla HDC odakle sledi traženo tvrđenje. ■

Trilinearne koordinate ortocentra:

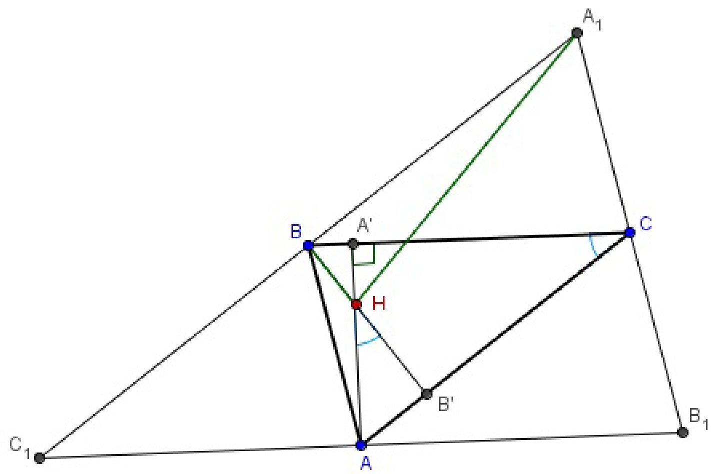


Sl. 20

Neka je H ortocentar trougla ABC. Tada je:

$$[H, BC] = |HA'| = |HB| \cos \sphericalangle A'HB$$

Trouglovi $A'HB$ i $B'CB$ su slični, jer imaju po jedan prav ugao i uglovi CBB' i $A'BH$ su podudarni, pa su i uglovi $A'HB$ i BCB' podudarni i jednaki uglu kod temena C.

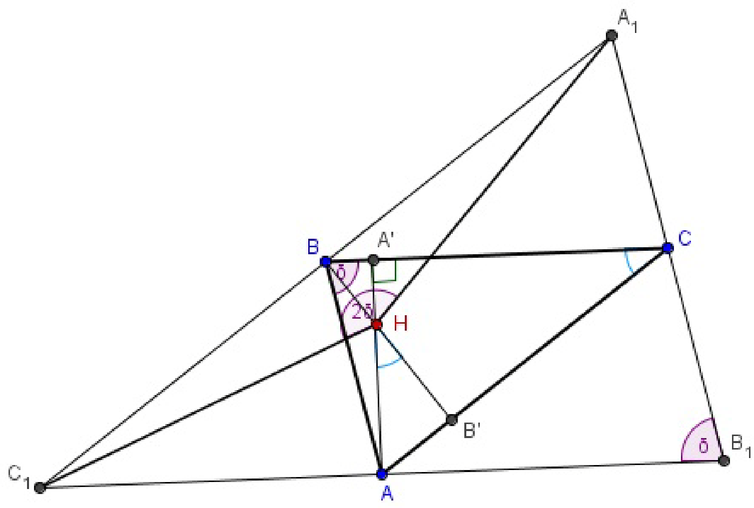


Sl. 21

Neka su B_1C_1, B_1A_1 , A_1C_1 stranice trougla koji se dobija povlačenjem paralelnih pravih kroz temena *A, C* i *B* sa stranicama *BC, BA, AC* redom. Odatle važi:

$$|HB| \cos \sphericalangle A'HB = |HB| \cos \sphericalangle C = |A_1H| \cos \sphericalangle A_1HB \ \cos \sphericalangle C \ ,$$

jer je $\cos \sphericalangle A_1HB = \dfrac{|HB|}{|A_1H|}$. Ortocentar H je u stvari centar opisane kružnice oko trougla $A_1B_1C_1$, pa je $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_1HC_1$.



Sl. 22

HB je simetrala $\sphericalangle A_1HC_1$, pa je $\sphericalangle A_1HB = \frac{1}{2}\sphericalangle A_1HC_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle ABC$ (paralelogram), pa sledi da je $|A_1H| \cdot \cos\sphericalangle A_1HB \cdot \cos\sphericalangle C = |A_1H| \cdot \cos\sphericalangle B \cdot \cos\sphericalangle C = [H, BC]$. Na isti način dobijamo:

$$[H, AC] = |HB_1| \cdot \cos\sphericalangle A \cdot \cos\sphericalangle C$$

$$[H, AB] = |HC_1| \cdot \cos\sphericalangle A \cdot \cos\sphericalangle B$$

Tada su trilinearne koordinate tačke

$$H = [|A_1H| \cdot \cos\sphericalangle B \cdot \cos\sphericalangle C : |HB_1| \cdot \cos\sphericalangle A \cdot \cos\sphericalangle C : |HC_1| \cdot \cos\sphericalangle A \cdot \cos\sphericalangle B]$$

Kako je $|A_1H| = |HB_1| = |HC_1|$ (= poluprečnik opisane kružnice oko trougla $A_1B_1C_1$), sada

$$H = [\cos\sphericalangle B \cdot \cos\sphericalangle C : \cos\sphericalangle A \cdot \cos\sphericalangle C : \cos\sphericalangle A \cdot \cos\sphericalangle B].$$

Napomena: Može se pokazati da ako se bilo koje dve tačke od O, T, S i H poklapaju, tada se poklapaju i sve četiri i trougao je jednakostraničan. Ako su bilo koje dve od njih različite, tada su sve različite.

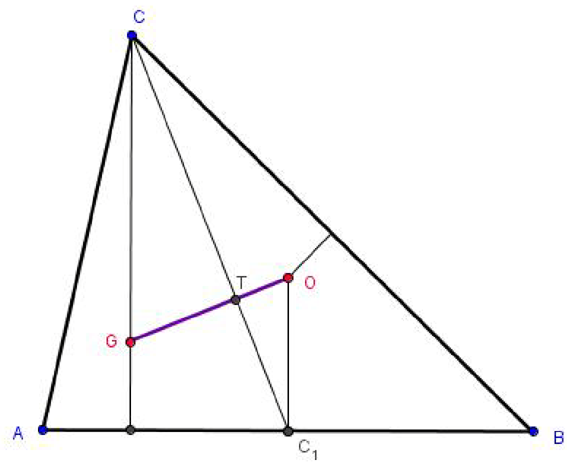
6. Ojlerova prava

Ojler je 1765. godine ustanovio da su centar opisane kružnice oko trougla, težište trougla i ortocentar uvek tri kolinearne tačke koje se u slučaju jednakostraničnog trougla poklapaju. U čast Ojlera ta prava se zove Ojlerova prava..

Posmatraćemo sada u kakvom su odnosu tačke H, T i O.

Teorema 16. *U svakom trouglu tačke H, T i O* su *kolinearne i važi $HT = 2\ TO$. Ova prava naziva se* ***Ojlerova prava***.

Dokaz: Neka su T i O težište i centar opisane kružnice i neka je G tačka na pravoj OT takva da je $GT = 2\ TO$ i $G - T - O$. Neka je C_1 središte stranice AB (slika 22). Trouglovi C_1OT i CGT su slični, zato što važi: $\sphericalangle C_1TO \cong \sphericalangle CTG$ i $C_1T : CT = OT : GT = 1 : 2$. Odatle dobijamo da su uglovi $\sphericalangle OC_1T \cong \sphericalangle GCT$, što povlači da su prave OC_1 i GC paralelne. Pošto je $OC_1 \perp AB$ dobijamo da je i $GC \perp AB$. Analogno dobijamo da su i prave BG i AG visine trougla pa se tačka G poklapa sa ortocentrom, tj. $G \equiv H$. ■



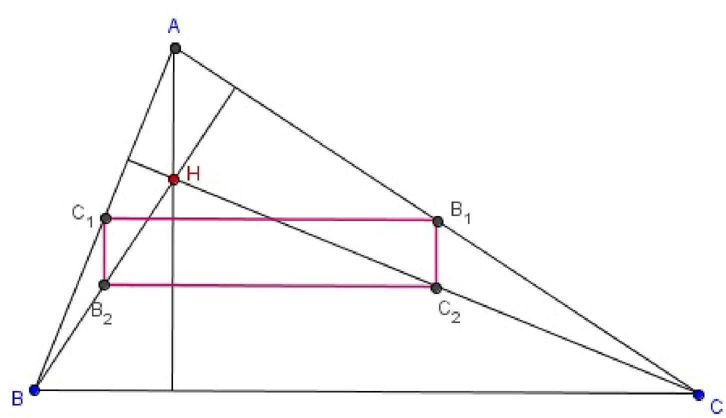
Sl. 23

7. Ojlerova kružnica

Fojerbah je otkrio da podnožja visina trougla kao i središta duži koje spajaju ortocentar sa temenima trougla pripadaju istoj kružnici, a Ojler je 1765. godine pokazao da ta kružnica sadrži i središta stranica trougla. Nju nazivamo *Ojlerovom kružnicom*, a ponekad koristimo i termin *kružnica dvet tačaka*.

Teorema 17. Središta ivica, podnožja visina i središta duži određenih ortocentrom i temenima proizvoljnog trougla pripadaju jednoj kružnici. (*Ojlerova kružnica*)

Rešenje: Pokazaćemo najpre da važi tvrđenje: ako je H ortocentar trougla ABC i ako su C_1, B_1, C_2, B_2 središta duži AB, AC, HC, HB tada je četvorougao $C_1B_1C_2B_2$ pravougaonik.

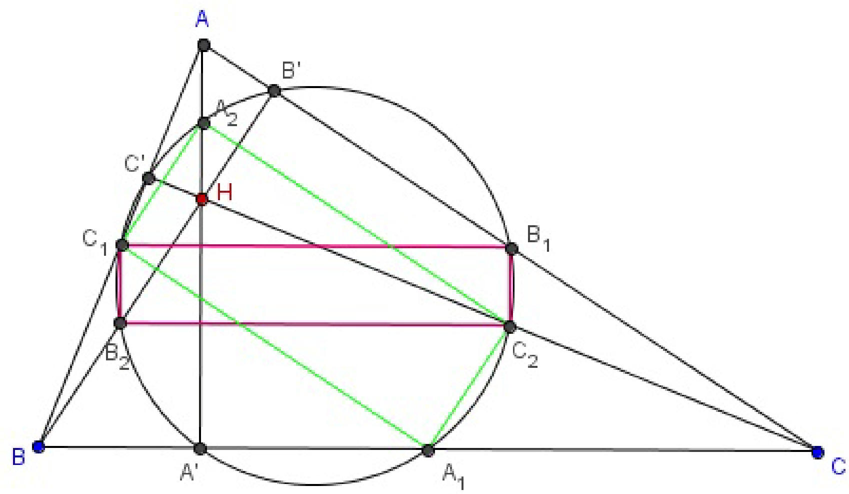


Sl. 24

Duži C_1B_1 i C_2B_2 su srednje linije trouglova ABC i HBC i odgovaraju istoj ivici BC, pa su kao takve podudarne i paralelne ($C_1B_1 \cong C_2B_2 = 1/2\, BC$; $C_1B_1\,, C_2B_2 \parallel BC$). Dakle, četvorougao $C_1B_1C_2B_2$ je paralelogram. Dovoljno je dokazati još i da mu je jedan ugao prav. Ali, duž C_1B_2 je srednja linija trougla ABH, pa je paralelna sa AH, tj. sa visinom trougla iz temena A. Dakle, C_1B_2 je normalna na ivicu BC, odnosno njoj paralelnu duž C_1B_1, pa je paralelogram $C_1B_1C_2B_2$ zaista pravougaonik.

Slično, ako je A_1 središte ivice BC i A_2 središte duži AH, tada je i $A_1C_2A_2C_1$ takođe pravougaonik. Kako je C_1C_2 zajednička dijagonala tih pravougaonika, oko njih se može opisati krug (nad C_1C_2 kao prečnikom). Ostaje da dokažemo da i podnožja visina pripadaju tom krugu. Ali tačka A', kao podnožje visine iz temena A, pripada tom krugu jer je ugao $A_2\,A'A_1$ prav (A_1A_2 prečnik). Slično se dokazuje i za preostale dve tačke. ■

U ovom primeru imamo krug koji sadrži devet tačaka, a njegov centar nazivamo *centar devet tačaka*, i on takođe spada u značajne tačke trougla.



Sl. 25

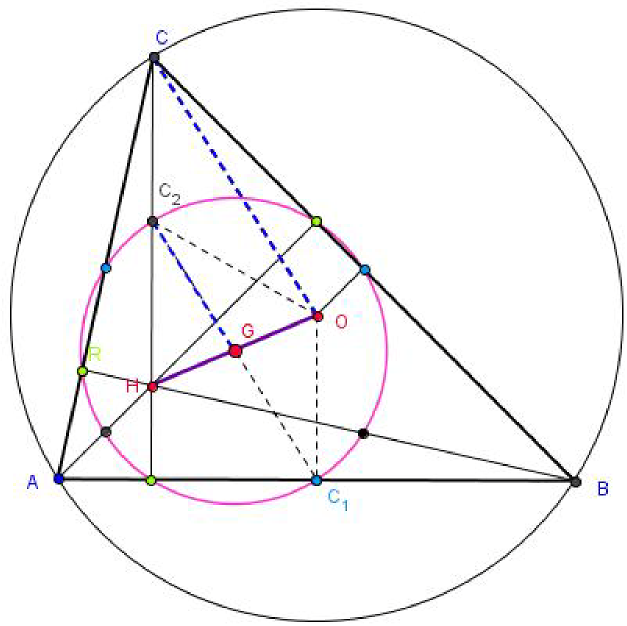
Za centar Ojlerove kružnice G i njen poluprečnik r važi sledeće tvrđenje:

Teorema 18. *Neka su O i H redom centar opisane kružnice i ortocentar trougla ABC i neka je $k(G,r)$ Ojlerova kružnica za ΔABC. Tada je G sredina duži OH i $r = \frac{1}{2}R$, gde je R poluprečnik opisane kružnice.*

Dokaz: Iz teoreme 15 imamo da važi (*) $OC_1 = C_2H = C_2C \Longrightarrow C_1OC_2H$ je paralelogram.

$C_1C_2 \perp OH$ i njihovu presečnu tačku obeležimo sa X. Tačka X je središte C_1C_2 i OH. Iz teoreme 17 dobijamo da je tačka G središte C_1C_2. Sada dobijamo da se tačke X i G poklapaju.

Iz (*) sledi da je i C_1OCC_2 takođe paralelogram, pa je $C_1C_2 = OC = R$ i $2r = R$. ■



Sl. 26

Iz prethodne teoreme dobijamo da centar G pripada Ojlerovoj pravoj i važi $HG = GO$.

Trilinearne koordinate ove tačke dobijamo kao aritmetičku sredinu koordinata ortocentra i centra opisane kružnice *:*

Znamo da je $H = [\cos\beta \cdot \cos\gamma : \cos\alpha \cdot \cos\gamma : \cos\alpha \cdot \cos\beta]$ i

$O = [\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma] = [-\cos(\beta+\gamma) : -\cos(\gamma+\alpha) : -\cos(\alpha+\beta)] = [-\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma : -\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma : -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha\sin\beta]$

kada na ovo dodamo trilinearne koordinate tačke H (pomnožene sa 2), imamo da je:

$$G = [\cos(\beta-\gamma) : \cos(\gamma-\alpha) : \cos(\alpha-\beta)].$$

U narednoj teoremi pokazaćemo zgodnu primenu Ojlerove kružnice.

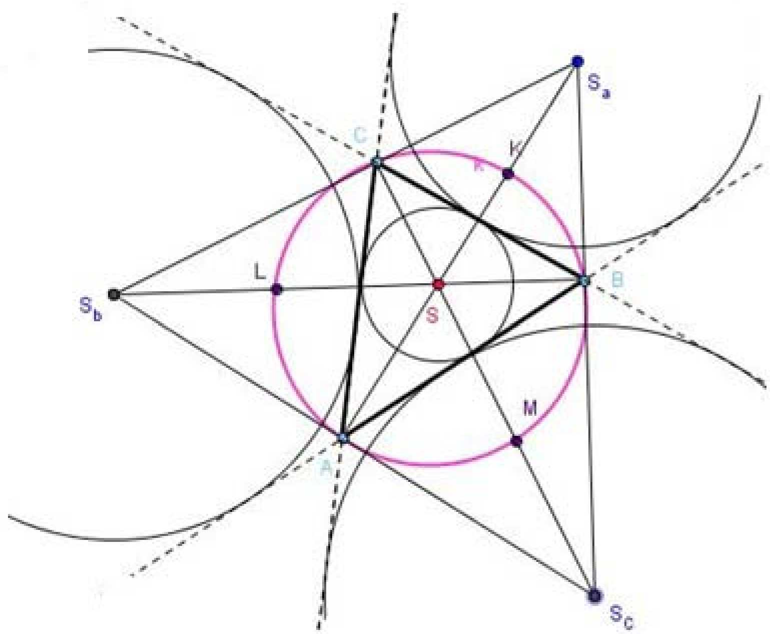
Teorema 19. *Kružnica opisana oko trougla sadrži središta duži koje spajaju centar upisane kružnice sa centrima spolja pripisanih kružnica u trougao.*

Dokaz: Neka je S centar upisane kružnice, a S_a, S_b, S_c centri spolja pripisanih kružnica ΔABC.

$SS_a \cap k = \{K\}$; $SS_b \cap k = \{L\}$; $SS_c \cap k = \{M\}$

$AS_a \perp S_bS_c$, $BS_b \perp S_cS_a$, $CS_c \perp S_aS_b$ $\Rightarrow$ AS_a , BS_b , CS_c su visine $\Delta S_aS_bS_c$

Odavde dobijamo da je tačka S ortocentar $\Delta S_aS_bS_c$, pa je $k(A, B, C)$ Ojlerova kružnica $\Delta S_aS_bS_c$, a K, L i M su središta duži SS_a, SS_b i SS_c. ■



Sl. 27

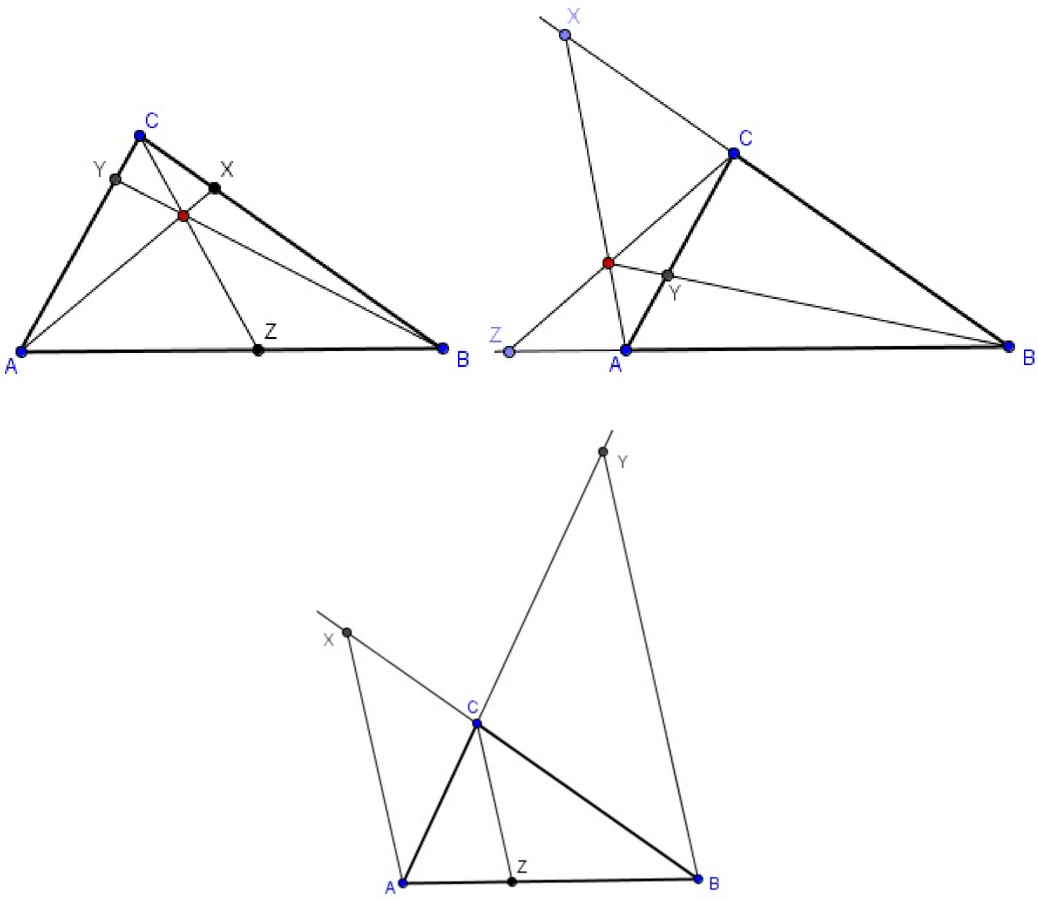
8. Fermaova tačka

Ovo je prvi centar u trouglu otkriven posle vremena starih Grka. Otkrivena je u 17. veku i dobila je ime po Pjeru de Fermau.

Da bismo pokazali teoremu koja tvrdi postojanje Fermaove tačke biće nam potrebna Čevina teorema kao i lema 1.

Teorema 20. (Čeva) *Neka je ABC proizvoljan trougao i neka su X, Y, Z, tačke na pravama BC, CA i AB redom, tako da nijedna nije teme* ΔABC. *Prave AX, BY, CZ se seku u jednoj tački ili su sve tri paralelne ako i samo ako je*

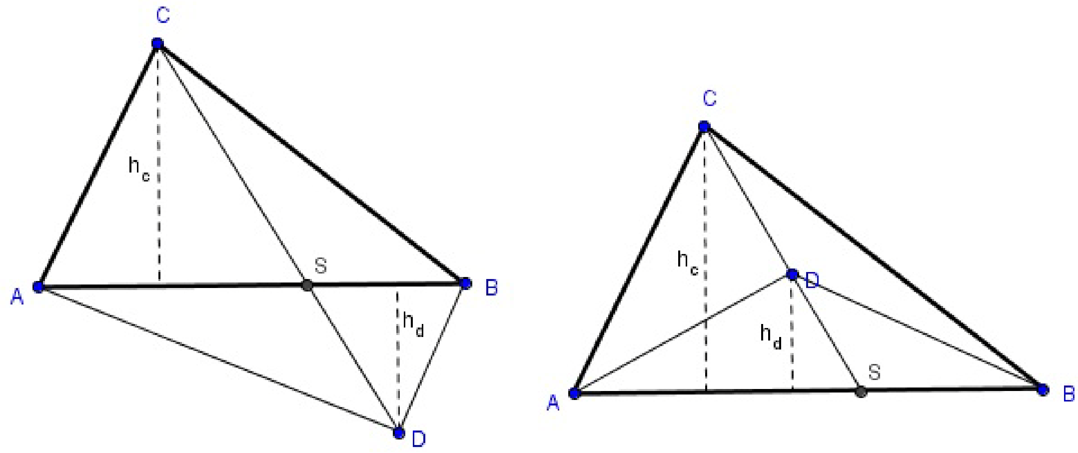
$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$$



Sl. 29

Lema 1. Neka su tačke C i D van prave AB i neka se prave CD i AB seku u tački S. Tada je $P_1 : P_2 = CS : DS$, gde je $P_1 = P(ABC)$ i $P_2 = P(ABD)$. ■

Dokaz: $P_1 : P_2 = h_c : h_d = \mathrm{CS} : \mathrm{DS}$. ■



Sl. 30

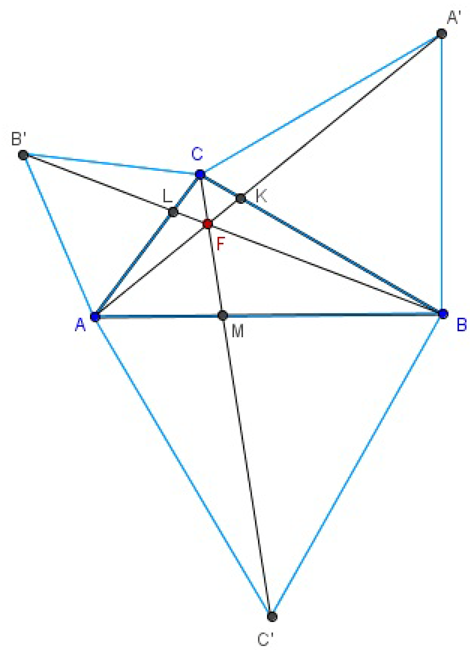
Teorema 21. *Neka je ABC proizvoljan trougao i neka su BCA', CBA', ABC' jednakostranični trouglovi, takvi da tačke A', B' i C' leže sa onih strana pravih BC, CA i AB sa kojih nisu temena A, B i C redom. Tada se prave AA', BB' i CC' seku u tački F- Fermaovoj tački ΔABC.*

Dokaz: Na slici je slučaj kada su sva tri ugla u trouglu manja od 120°.

Obeležimo $AA' \cap BC = \{K\}$, $BB' \cap CA = \{L\}$, $CC' \cap AB = \{M\}$.

Trouglovi BCB' i $A'CA$ su podudarni, jer važi: $\sphericalangle BCB' = \sphericalangle A'CA = \gamma + 60°$, stranice CA i CB' su podudarne i stranice CA' i CB su podudarne. Analogno, trouglovi CAC' i $B'AB$, kao i ABA' i $C'BC$ su podudarni. Tada je:

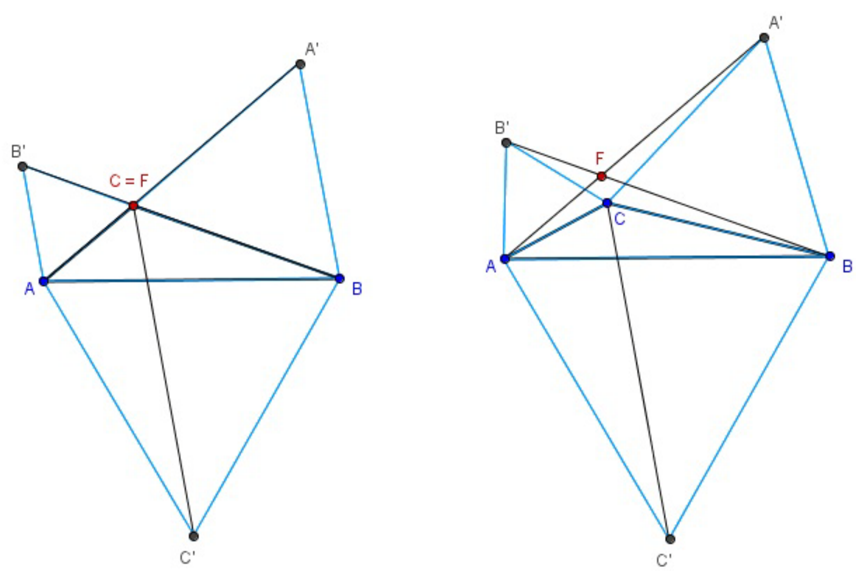
$P(BCB') = P(A'CA) = P_1$; $P(CAC') = P(B'AB) = P_2$; $P(ABA') = P(C'BC) = P_3$ (1)



Sl. 31

$$\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} \cdot \frac{AM}{MB} = \frac{P_3}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_3} = 1 \text{ (koristeći lemu)}$$

Sada iz Čevine teoreme dobijamo da se AA', BB' i CC' seku u nekoj tački F. ■

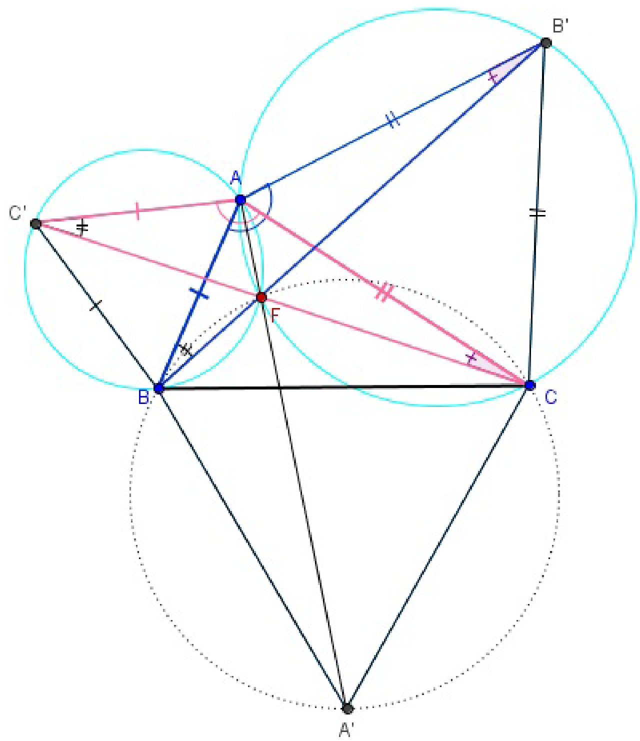


$\gamma = 120°$ $\gamma > 120°$.

Sl. 32

Za Fermaovu tačku F važe sledeća tvrđenja:

1) prave $AA', BB' \, i \, CC'$ seku jedna drugu pod uglom od 60°
2) Duži $AA', BB' \, i \, CC'$ su jednake
3) $k(B,C,A') \cap k(C,A,B') \cap (A,B,C') = \{F\}$



Sl. 33

Trilinearne koordinate ove tačke su :

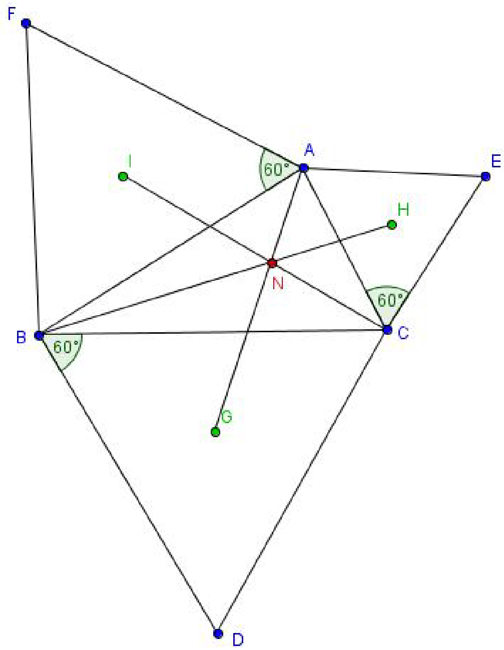
$$\mathrm{F} = \left[\csc(\propto + \tfrac{\pi}{3}) : \csc\left(\beta + \tfrac{\pi}{3}\right) : \csc(\gamma + \tfrac{\pi}{3})\right].$$

9. Napoleonove tačke

Veruje se da je postojanje ovih tačaka otkrio Napoleon Bonaparta početkom 18. veka.

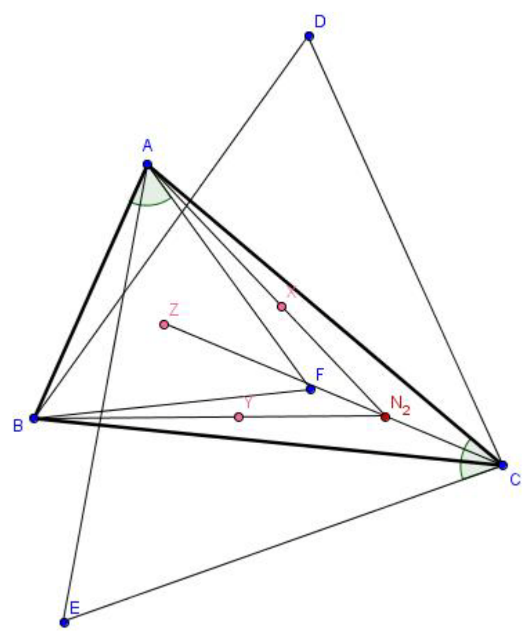
Neka je ABC trougao. Neka su D, E i F tačke, takve da važi da su trouglovi DBC, CAE, ABF jednakostranični. Neka je tačka G težište trougla DBC, tačka H težište trougla CAE i tačka I težište trougla ABF.

Prave *AG, BH i CI* seku se u tački *N*. Nju nazivamo *prva Napoleonova* tačka.



Sl. 34

Sada sa unutrašnjih strana trougla *ABC* konstruišimo jednakostranične trouglove *DBC, ECA, FAB* redom i neka su *X, Y* i *Z* njihova težišta . Tada se prave *AX, BY* i *CZ* seku u istoj tački N_2, koju nazivamo *druga Napoleonova* tačka (slika 35).



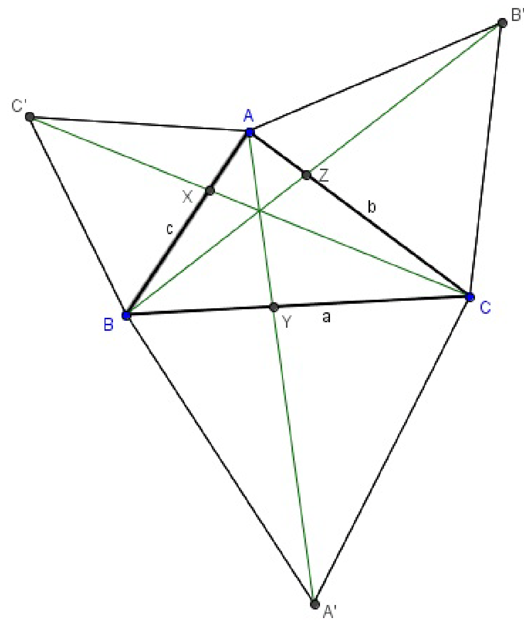
Sl. 35

Dokažimo sada postojanje prve Napoleonove tačke.

Teorema 22. *Neka je dat trougao ABC i neka su A', B' i C' tačke takve da važi*

$$\sphericalangle ABC' = \sphericalangle CBA' = \sphericalangle BCA' = \sphericalangle ACB' = \sphericalangle CAB' = \sphericalangle BAC' = 60°$$

(Pri čemu su tačke A', B' i C' ili istovremeno sa iste strane kao i tačke A, B i C, redom, u odnosu na odgovarajuće stranice trougla ABC, ili istovremeno sa različitih strana). *Tada se prave AA', BB' i CC' seku u istoj tački.*



Sl. 36

Dokaz: Neka su trouglovi ABC', $AB'C$ i $A'BC$ izvan trougla ABC. (slika 36) Drugi slučaj radi se slično.

Primećujemo da je $BC' = AC'$. Tačka X je presek AB i CC'. Površina trougla BCC' jednaka je $a \cdot BC' \cdot \sin(B + 60°)$, pa važi

$$\frac{P(ACC')}{P(BCC')} = \frac{b \cdot AC' \cdot \sin(A + 60°)}{a \cdot BC' \cdot \sin(B + 60°)} = \frac{b \cdot \sin(A + 60°)}{a \cdot \sin(B + 60°)}$$

Pošto ACC' i BCC' imaju istu stranicu CC', visine iz temena B i A na CC' moraju biti u istom odnosu kao i površine tih trouglova, pa i BX i AX (lema 1). Iz toga sledi:

$$\frac{AX}{BX} = \frac{b \cdot \sin(A + 60°)}{a \cdot \sin(B + 60°)}$$

Analogno dobijamo i za odnose $\frac{BY}{CY}$ i $\frac{AZ}{CZ}$. Množenjem ovih jednakosti dobijamo:

$$\frac{b \cdot \sin(A + 60°)}{a \cdot \sin(B + 60°)} \cdot \frac{c \cdot \sin(B + 60°)}{b \cdot \sin(C + 60°)} \cdot \frac{a \cdot \sin(C + 60°)}{c \cdot \sin(A + 60°)} = 1$$

Sada, iz Čevine teoreme dobijamo da se *XC, YA* i *ZB* seku u istoj tački, a tada se i *AA', BB' i CC'* seku u istoj tački. ■

Napomena: Kada bismo u prethodnoj teoremi umesto ugla od 60° stavili bilo koji ugao *t*, tvrđenje bi takođe važilo.

Trilinearne koordinate Napoleonovih tačaka su :

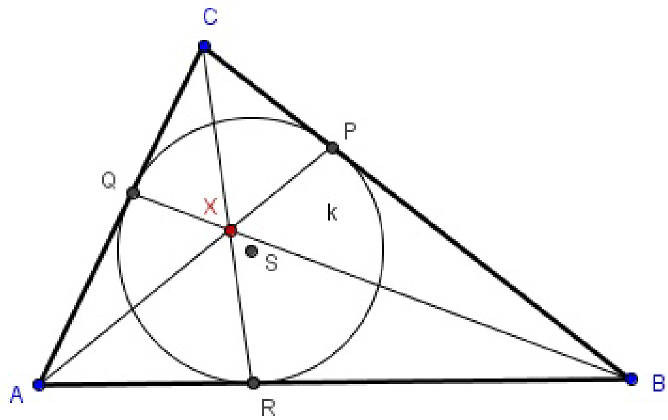
$$N = \left[\sec(\propto -\frac{\pi}{3}) : \sec(\beta - \frac{\pi}{3}) : \sec(\gamma - \frac{\pi}{3})\right]$$

$$N_2 = \left[\sec(\propto +\frac{\pi}{3}) : \sec(\beta + \frac{\pi}{3}) : \sec(\gamma + \frac{\pi}{3})\right]$$

10. Žergonova tačka

Žergonovu tačku je 1818. godine otkrio francuski matematičar J.D. Žergon (1771-1859), po kome je i dobila ime.

Neka je k kružnica upisana u trougao *ABC* i neka su njeni preseci sa stranicama *BC, CA* i *AB* tačke *P, Q* i *R,* redom. Tada se duži *AP, BQ* i *CR* seku u jednoj tački *X* i ona se naziva Žergonova tačka trougla *ABC*.



Sl. 37

Pokažimo sada postojanje ove tačke.

Teorema 23. *Prave određene temenima i dodirnim tačkama naspramnih ivica sa upisanim krugom trougla ABC seku se u jednoj tački.*

Dokaz: Neka su P, Q i R dodirne tačke kruga upisanog u trougao ABC sa njegovim ivicama BC, CA i AB redom. Tada su podudarne odgovarajuće tangentne duži: $BP \cong BR$, $CP \cong CQ$, $AQ \cong AR$. Tada je $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$. Kako važi da je raspored $(B - P - C)$, $(C - Q - A)$, $(A - R - B)$, mora biti $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Odatle sledi $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Odavde i iz Čevine teoreme prave AP, BQ i CR seku se u jednoj tački (nisu paralelne jer se AP i BQ seku na osnovu Pašove aksiome). ■

Trilinearne koordinate ove tačke su :

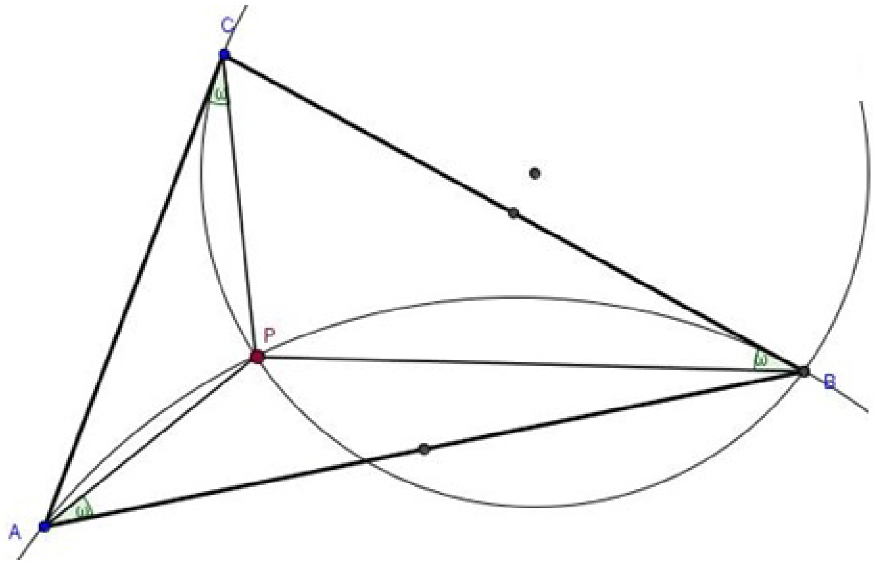
$$X = [bc/(b + c - a) : ca/(c + a - b) : ab/(a + b - c)]$$

11. Brokarove tačke

Ime su dobile po francuskom matematičaru Anriju Brokaru (1845 - 1922).

U trouglu ABC tačka P je *prva Brokarova tačka* ako važi da su uglovi između duži AP, BP i CP i stranica c, a i b redom, jednaki, tj.

$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \omega$



Sl. 38

Tačka P naziva se prva *Brokarova tačka* u trouglu ABC, a ugao ω *Brokarov ugao* trougla.

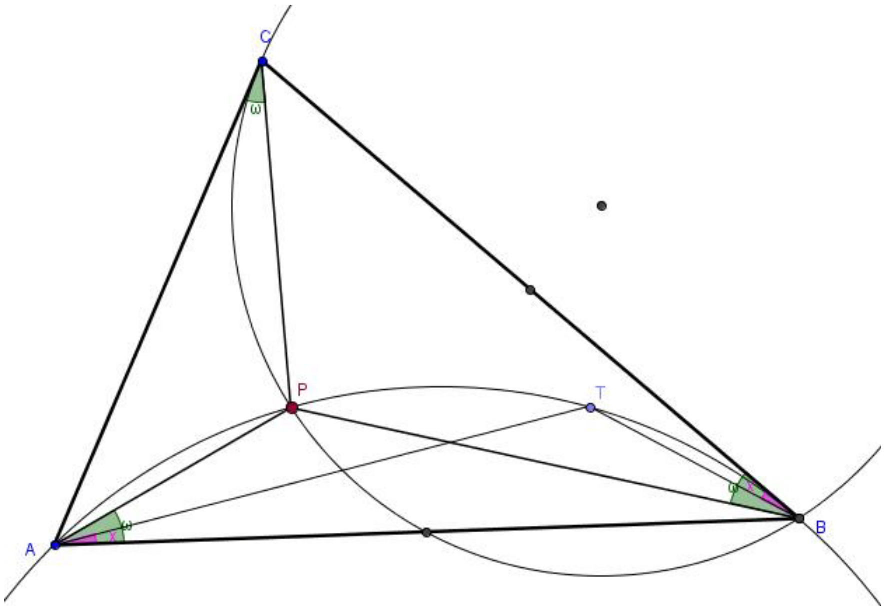
Postoji i druga Brokarova tačka Q, trougla ABC takva da su jednaki uglovi između duži AQ, BQ, CQ i stranica b, c i a redom, tj. $\sphericalangle QCB = \sphericalangle QBA = \sphericalangle QAC = \omega$.

Teorema 24. Za svaki trougao postoje prva i druga Brokarova tačka.

Dokaz: Pretpostavimo da je T tačka takva da važi $\sphericalangle TAB = \sphericalangle TBC = X$.

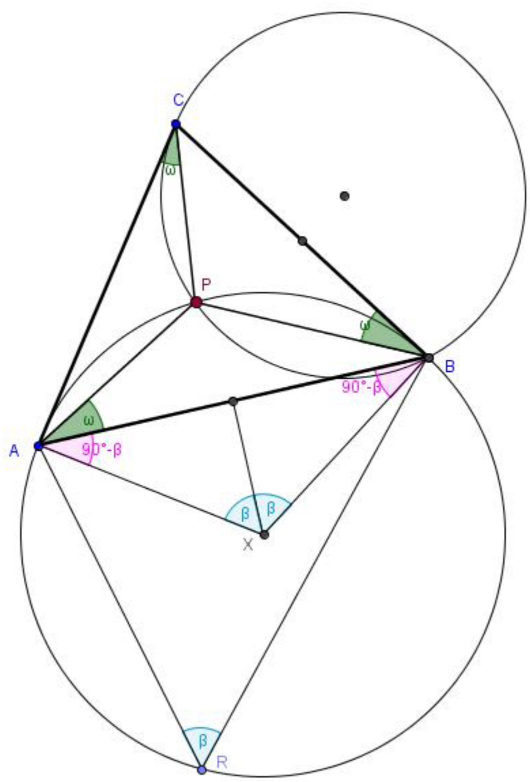
Tada je $\sphericalangle TBA = \sphericalangle B - X$, pa sledi da je $\sphericalangle BTA = 180 - \sphericalangle B$.

Odatle dobijamo da tačka T pripada geometrijskm mestu tačaka, tj. na luku pod kojim se duž AB vidi pod istim uglom. Nacrtajmo celu kružnicu koja prolazi kroz tačke A, B, T i nazovimo je C_c. Na isti način nacrtajmo kružnicu C_a (Uzmemo tačku U tako da važi: $\sphericalangle UBC = \sphericalangle UCA$). U preseku ove dve kružnice dobijamo prvu Brokarovu tačku, jer za presečnu tačku P važi : $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA$. Drugu Brokarovu tačku nalazimo analogno. ■



Sl. 39

Sa slike 40 vidimo da je $\sphericalangle APB = 180° - \sphericalangle B$.



Sl. 40

Za Brokarov ugao važe sledeće jednakosti.

Teorema 25. *Za Brokarov ugao* ω *važi jednakost*:

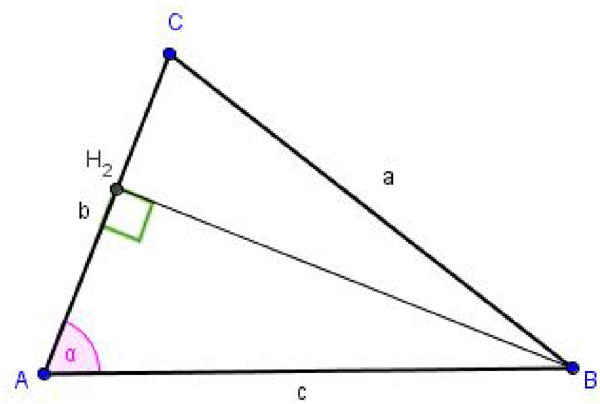
$$\cot\omega = \cot\sphericalangle A + \cot\sphericalangle B + \cot\sphericalangle C$$

Dokaz: Obeležimo sa P Brokarovu tačku trougla ABC. Iz sinusne teoreme dobijamo da važi: $\frac{CP}{\sin(A-\omega)} = \frac{AC}{\sin(\sphericalangle APC)}$, takođe važi $\frac{CP}{\sin\omega} = \frac{BC}{\sin(\sphericalangle BPC)}$. Iz prethodnog posmatranja iznad teoreme dobijamo da je $\sphericalangle APC = 180° - \sphericalangle A$ i $\sphericalangle BPC = 180° - \sphericalangle C$. Sada, deljenjem prve jednačine sa drugom dobijamo da je $\frac{\sin\omega}{\sin(A-\omega)} = \frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle C}{\sin\sphericalangle A}$. Odakle sledi da je $\sin(A-\omega) = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\sphericalangle A}{\sin\sphericalangle C}\cdot\sin\omega$. Iz sinusne teoreme znamo da važi $\frac{a}{b} = \frac{\sin\sphericalangle A}{\sin\sphericalangle B} \Rightarrow$ $\sin(A-\omega) = \frac{(\sin\sphericalangle A)^2\cdot\sin\omega}{\sin\sphericalangle B\sin\sphericalangle C}$. Sa druge strane važi i : $\sin(A-\omega) = \sin\sphericalangle A\cos\omega - \sin\omega\cos\sphericalangle A$. Sada je:

$\sin\sphericalangle A\cos\omega - \sin\omega\cos\sphericalangle A = \frac{(\sin\sphericalangle A)^2\cdot\sin\omega}{\sin\sphericalangle B\sin\sphericalangle C}$. Deljenjem jednačine sa $\sin\sphericalangle A\cdot\sin\omega$ i koristeći da je $\sin\sphericalangle A = \sin(B+C) = \sin\sphericalangle B\cos\sphericalangle C + \cos\sphericalangle B\sin\sphericalangle C$ dobijamo traženo tvrđenje. ∎

Teorema 26. *Važi:* $\cot\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$, *gde je* S *površina trougla* ABC.

Dokaz: Obeležimo sa H_2 projekciju temena B na AC, tada je



Sl.41

$$\cot\sphericalangle A = \frac{AH_2}{BH_2} = \frac{bc\cos\sphericalangle A}{2S}, \text{ jer je } S = \frac{b\cdot BH_2}{2}.$$

Iz kosinusne teoreme imamo da je $2\,bc\cos\sphericalangle A = b^2 + c^2 - a^2$,

odakle je $\cot\sphericalangle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$. Ubacujući ovaj rezultat u prethodnu teoremu dobijamo traženo tvrđenje. ■

Trilinearne koordinate Brokarovih tačaka su :

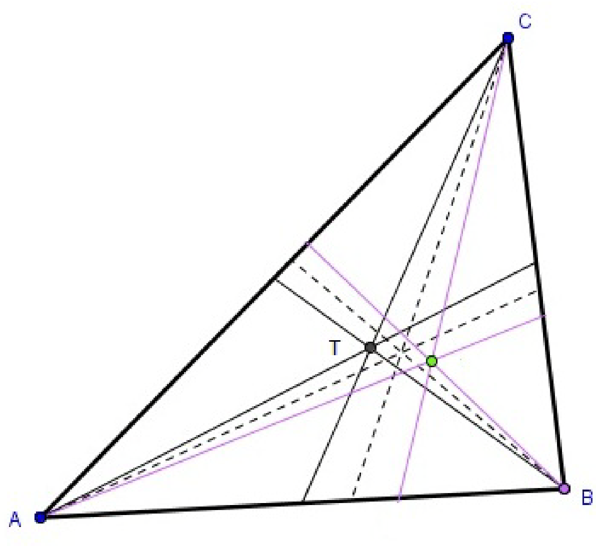
$$P = [c/b : a/c : b/a]$$

$$Q = [b/c : c/a : a/b]$$

12. Presek simedijana

Francuski matematičar Emil Lemoan dokazao je postojanje tačke preseka simedijana 1873. godine. Iz tog razloga ovu tačku često zovemo Lemoanova tačka.

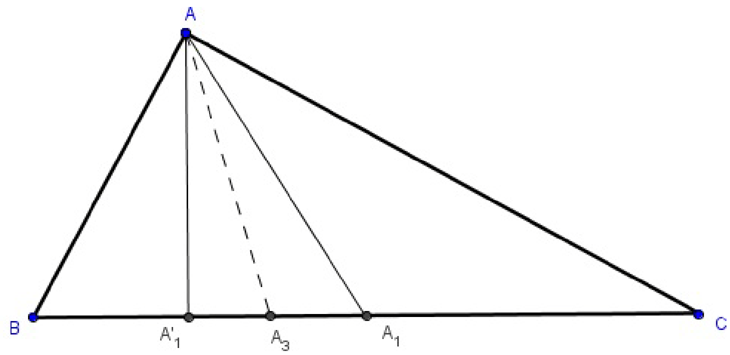
Neka su s_a, s_b i s_c simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC (na slici predstavljene isprekidanom linijom) i neka je T težište tog trougla. Ako su AT_a, BT_b, CT_c poluprave simetrične polupravama AT, BT i CT u odnosu na s_a, s_b i s_c redom, onda se one nazivaju simedijane trougla ABC.



Sl. 42

U trouglu ABC središte stranice BC obeležimo sa A_1, presek stranice BC i simetrale ugla kod temena A obeležimo sa A_3, tada će simedijana od AA_1 biti AA_1' . Prema tome

$$AA_1' = \sigma_{AA_3}(AA_1).$$

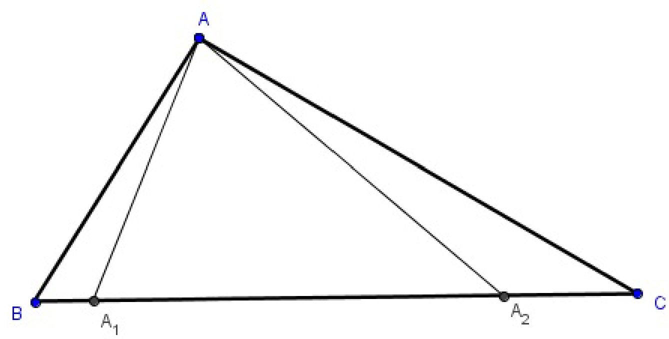


Sl. 43

Sledeće teoreme će nam biti potrebne da bismo pokazali glavno tvrđenje, teoremu 28.

Rekal Štajnerova teorema tvrdi da u trouglu ABC, ako su AA_1 i AA_2 duži koje obrazuju jednake uglove sa strnicama koje ishode iz temena A, onda važi:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1||BA_2|}{|CA_1||CA_2|}$$



Sl. 44

Teorema 27. *Duž* AA_1' *u trouglu* ABC *je simedijana* (slika 45) *ako i samo ako*

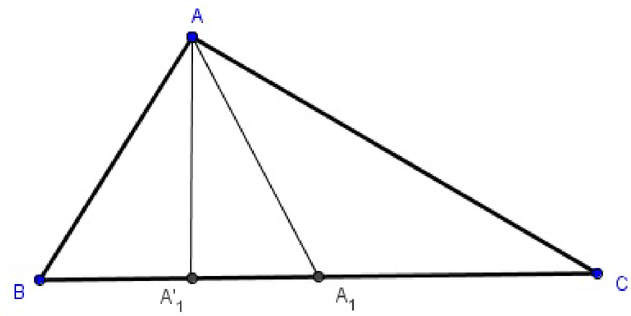
$$\frac{|BA_1'|}{|CA_1'|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Dokaz: Duž AA_1' je simedijana ako je AA_1 težišna duž i $AA_1' = \sigma_{AA_3}(AA_1)$, tj. AA_1' i AA_1 zaklapaju jednake uglove sa stranicama AB i AC redom.

Važi $|BA_1| = |CA_1|$, pa koristeći Štajnerovu teoremu, dobijamo da je AA_1' simedijana ako i samo ako

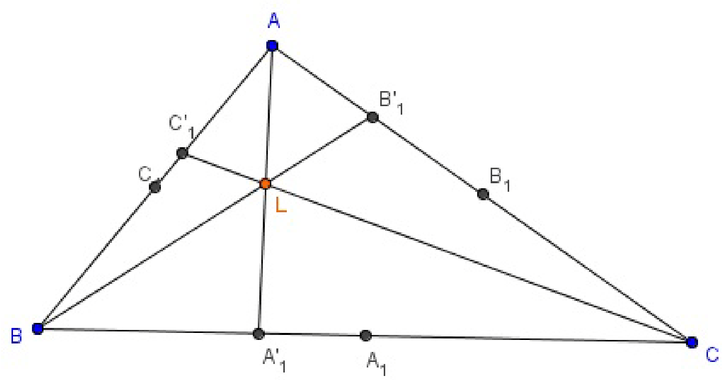
$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1{}'||BA_1|}{|CA_1{}'||CA_1|} = \frac{|BA_1{}'|}{|CA_1{}'|}.$$

Dakle, dobili smo da simedijana deli naspramnu stranicu ugla iz kojeg kreće na dva dela u proporciji kvadrata stranica koje obrazuju taj ugao. ■



Sl. 45

Teorema 28. *Neka su* AA_1', BB_1' i CC_1' *simedijane trougla. Tada se ove tri duži seku u istoj tački* L *koju nazivamo i Lemoanova tačka*.



Sl. 46

Dokaz: Koristićemo teoremu 27. Iz nje dobijamo

$$\frac{|A_1'B|}{|A_1'C|} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{|B_1'C|}{|B_1'A|} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{i} \quad \frac{|C_1'A|}{|C_1'B|} = \frac{b^2}{a^2}.$$

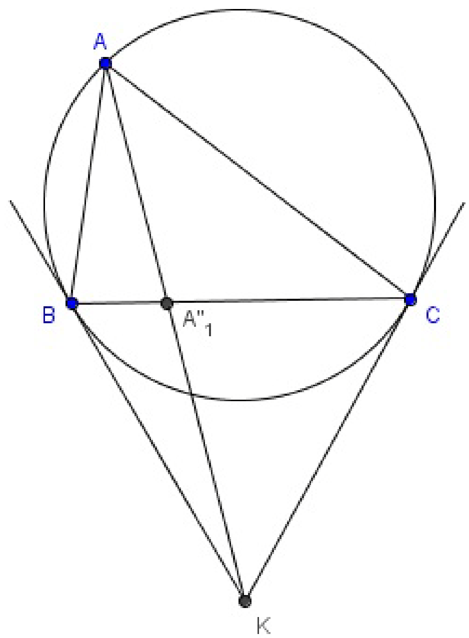
Sada, koristeći Čevinu teoremu, simedijane se seku u jednoj tački. ■

Simedijane imaju neke zanimljive osobine koje ćemo sada pokazati.

Teorema 29. *Tangente opisane kružnice oko trougla ABC kroz dva njegova temena seku se na simedijani koja polazi iz trećeg temena trougla.*

Dokaz: Neka se tangente opisane kružnice kroz temena B i C seku u tački K. Neka je tačka A_1'' presečna tačka BC i AK. Hoćemo da pokažemo da je AA_1'' simedijana iz temena A, tj.

$$\frac{|BA_1''|}{|CA_1''|} = \frac{c^2}{b^2}.$$



Sl. 47

Primetimo,

$$\frac{|BA_1''|\cdot h}{|CA_1''|\cdot h} = \frac{P(ABA_1'')}{P(ACA_1'')} = \frac{P(BKA_1'')}{P(CKA_1'')} = \frac{P(ABA_1'') + P(BKA_1'')}{P(ACA_1'') + P(CKA_1'')} = \frac{P(ABK)}{P(ACK)}$$

$$= \frac{|AB||BK|\sin(\sphericalangle ABK)}{|AC||CK|\sin(\sphericalangle ACK)}. \qquad (*)$$

Posmatrajmo sada sledeće. Imamo $|KB| = |KC|$, jer su KB i KC tangente povučene iz iste tačke K na opisanu kružnicu oko trougla ABC. Štaviše, koristeći osobinu da je ugao između tangente i tetive podudaran periferijskom uglu nad tom tetivom, imamo

$$\sphericalangle KBC = \sphericalangle KCB = \sphericalangle A.$$

Sledi $\sphericalangle ABK = \sphericalangle A + \sphericalangle B,\ tj.\ \sphericalangle ABK = 180° - \sphericalangle C.$

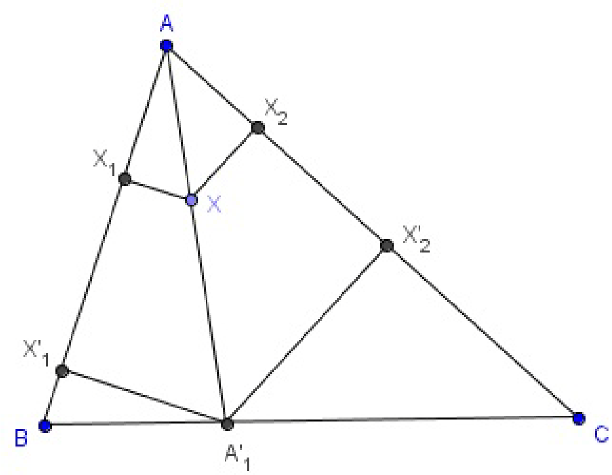
Sada je: $\sin\sphericalangle ABK = \sin\sphericalangle C$ i $\sphericalangle ACK = \sphericalangle A + \sphericalangle C$, pa je $\sin\sphericalangle ACK = \sin\sphericalangle B$

Iz (*) dobijamo $$\frac{|BA_1''|}{|CA_1''|} = \frac{|AB|\sin\sphericalangle C}{|AC|\sin\sphericalangle B} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

Iz teoreme 27 dobijamo da je AA_1'' simedijana, a AK njen produžetak. ■

Teorema 30. *Ako je X tačka na simedijani iz temena A trougla ABC, onda je udaljenost tačke X od stranica AB* i *AC proporcionalna dužini tih stranica.*

Dokaz: Neka je AA_1' simedijana iz temena A i neka je X tačka na AA_1'. Povucimo normale XX_1 i XX_2 na stranice AB i AC redom. Takođe, povucimo normale $A_1'X_1'$ i $A_1'X_2'$ na stranice AB i AC redom .



Sl. 48

Tvrdimo da je

$$\frac{d(X,AB)}{|AB|} = \frac{d(X,AC)}{|AC|}, \text{ tj. } \frac{|XX_1|}{|AB|} = \frac{|XX_2|}{|AC|}.$$

Važi: $\frac{d(X,AB)}{d(X,AC)} = \frac{d(A_1',AB)}{d(A_1',AC)}$ (zbog proporcionalnosti trouglova)

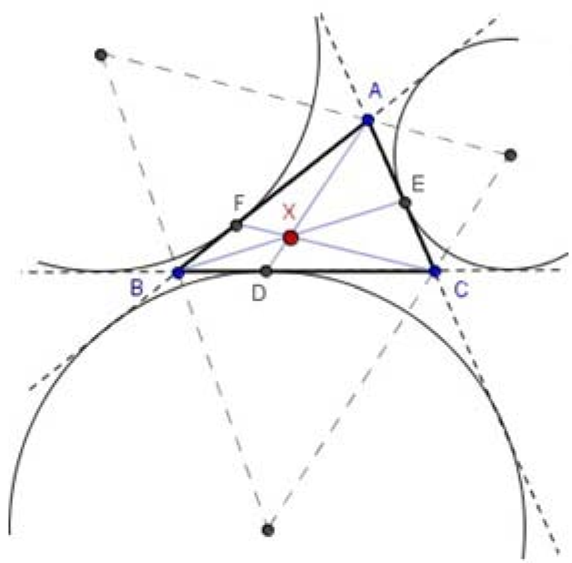
$$= \frac{|BA_1'|\sin\sphericalangle B}{|CA_1'|\sin\sphericalangle C} = \frac{|AB|^2\sin\sphericalangle B}{|AC|^2\sin\sphericalangle C} = \frac{|AB|^2\frac{h}{|AB|}}{|AC|^2\frac{h}{|AC|}} = \frac{|AB|}{|AC|}$$ (koristimo teoremu 27). ■

Trilinearne koordinate ove tačke su :

$$L = [a : b : c].$$

13. Nagelova tačka

Nagelova tačka dobila je ime po nemačkom matematičaru Kristijanu Henrihu fon Nagelu koji je pisao o njoj 1836. godine.



Sl. 49

Ako su D, E i F tačke dodira spolja pripisanih kružnica sa stranicama BC, CA i AB. Tada se prave AD, BE, CF seku u tački obeleženoj sa X na slici 49. Tu tačku nazivamo Nagelova tačka trougla ABC.

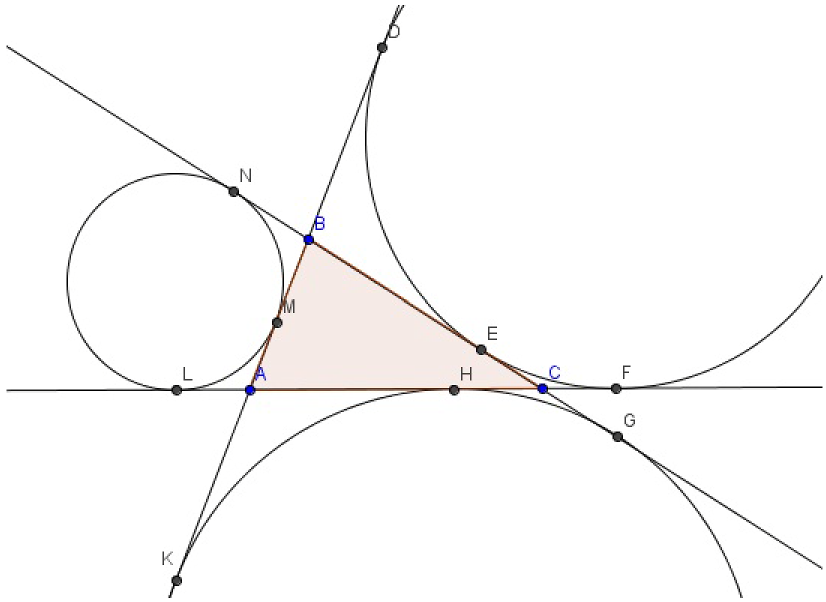
Teorema 31. Nagelova tačka postoji.

Dokaz: Posmatrajmo sliku 50. Iz teoreme 6 imamo da je $AF = AD = s$. Analogno, $BG = BK = s$ i $CL = CN = s$. Sada dobijamo da je $CF = CE = AL = AM = s - b$, na isti način je $BD = BE = AK = AH = s - c$ i $BN = BM = CG = CH = s - a$.

Dobili smo da je $AM = EC = s - b$, $BE = HA = s - c$ i $CH = MB = s - a$. Množeći ove jednakosti dobijamo da je $AM \cdot BE \cdot CH = EC \cdot HA \cdot MB$, a iz ovog važi

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CH}{HA} = 1$$

Sada na osnovu Čevine teoreme dobijamo da se AE, BH i CM seku u istoj tački. ■



Sl. 50

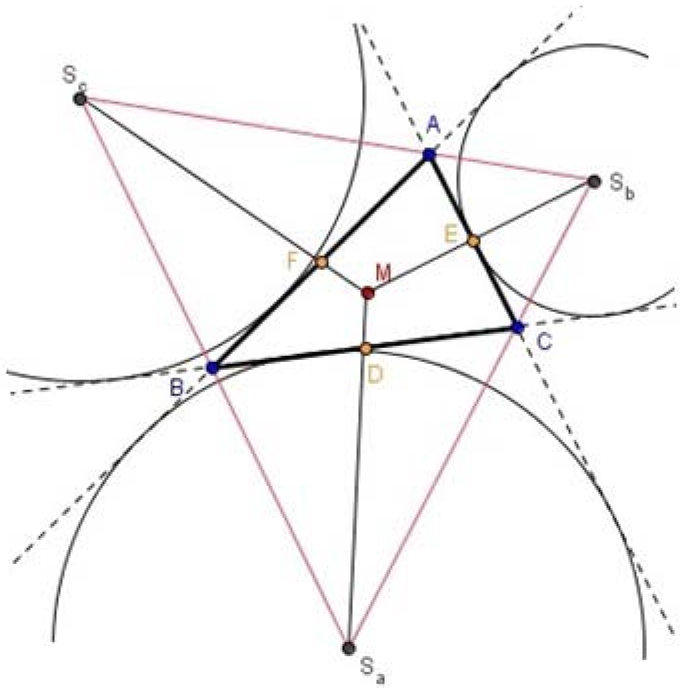
Trilinearne koordinate ove tačke su :

$$X = [(b + c - a)/a : (c + a - b)/b : (a + b - c)/c]$$

14. središnja tačka (Mittenpunkt)

Ovu tačku je proučavao Kristijan fon Nagel 1836. godine.

U bilo kom trouglu ABC, neka su: D, E i F središta stranica BC, CA i AB redom, a S_a, S_b i S_c centri spolja pripisanih kružnica napram temena A, B i C redom. Prave DS_a, ES_b i FS_c seku se u tački, na slici 51 označenoj sa M.



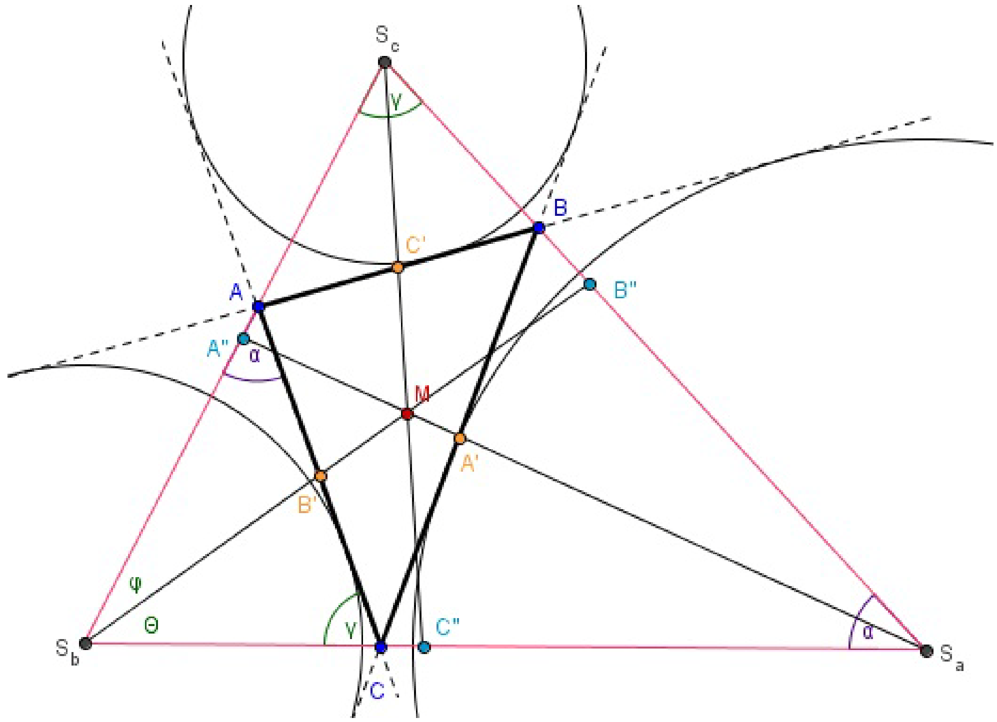
Sl. 51

Dokažimo postojanje središnje tačke:

Primetimo prvo da su duži koje spajaju tačke S_a, S_b, S_c simetrale spoljašnjih uglova trougla ABC. Zbog toga važi da su uglovi $\sphericalangle S_cBA$, $\sphericalangle S_aBC$ i $\sphericalangle CS_bA$ jednaki, analogno za uglove kod temena A i C. Obeležimo $\sphericalangle S_bS_aS_c = \sphericalangle S_bAC = \alpha$, $\sphericalangle S_bS_cS_a = \sphericalangle S_bCA = \gamma$, $\sphericalangle CS_bB' = \theta$ i $\sphericalangle AS_bB' = \varphi$, gde u A',B',C' središta stranica BC, CA *i* AB redom, kao na slici. Koristeći sinusno pravilo dobijamo sledeće jednakosti:

$$\frac{\sin\,\theta}{CB'} = \frac{\sin\,\gamma}{S_bB'} \quad \text{i} \quad \frac{\sin\,\theta}{S_aB''} = \frac{\sin\,\alpha}{S_bB''} \qquad (1)$$

$$\frac{\sin\,\varphi}{AB'} = \frac{\sin\,\alpha}{S_bB'} \quad \text{i} \quad \frac{\sin\,\varphi}{S_cB''} = \frac{\sin\,\gamma}{S_bB''} \qquad (2)$$



Sl. 52

Sada, koristeći da je $CB' = AB'$ i iz (1) i (2) dobijamo da je $\dfrac{S_a B''}{S_c B''} = \dfrac{(\sin\ \gamma)^2}{(\sin\ \alpha\ )^2}$. (3)

Obeležavajući $\sphericalangle S_a S_b S_c = \beta$, na isti način dobijamo da je:

$$\frac{S_c A''}{S_b A''} = \frac{\sin\ \beta^2}{\sin\ \gamma^2} \quad \text{i} \quad \frac{S_b C''}{S_a C''} = \frac{\sin\ \alpha\ ^2}{\sin\ \beta\ ^2}\text{ . } (4)$$

Množenjem jednačina iz (3) i (4) dobijamo:

$$\frac{S_a B''}{S_c B''}\ \frac{S_c A''}{S_b A''}\ \frac{S_b C''}{S_a C''} = \frac{\sin\ \gamma^2}{\sin\ \alpha\ ^2}\ \frac{\sin\ \beta^2}{\sin\ \gamma^2}\ \frac{\sin\ \alpha\ ^2}{\sin\ \beta\ ^2} = 1.$$

Sada iz Čevine teoreme sledi da se $S_b B''$, $S_c C''$ i $S_a A''$ seku u istoj tački, odakle sledi tvrđenje. ■

Trilinearne koordinate ove tačke su :

$$M = [b + c - a : c + a - b : a + b - c].$$

15. Mikelova tačka

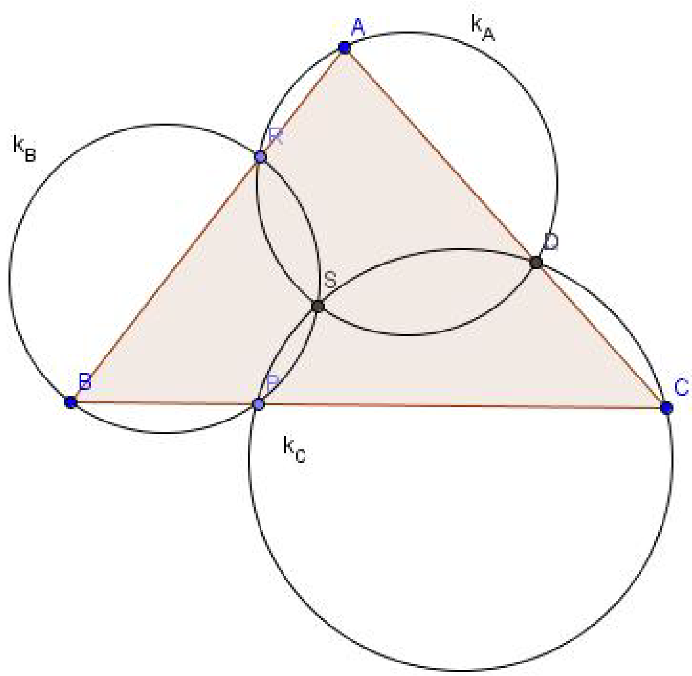
1838. godine je otkrivena ova tačka i dobila je ime po A. Mikelu.

U sledećoj teoremi dokazaćemo postojanje ove tačke (u zavisnosti od izbora tačaka *P, Q* i *R*).

Teorema 32. *Neka su P, Q, R proizvoljne tačke ivica BC, AC, AB trougla ABC. Tada se krugovi opisani oko trouglova AQR, PBR, PQC seku u jednoj tački, nju zovemo Mikelova tačka.*

Dokaz: Označimo krugove opisane oko trouglova *AQR, PBR, i PQC* sa k_A, k_B, k_C i unutrašnje uglove trougla *ABC* redom sa α, β, γ.

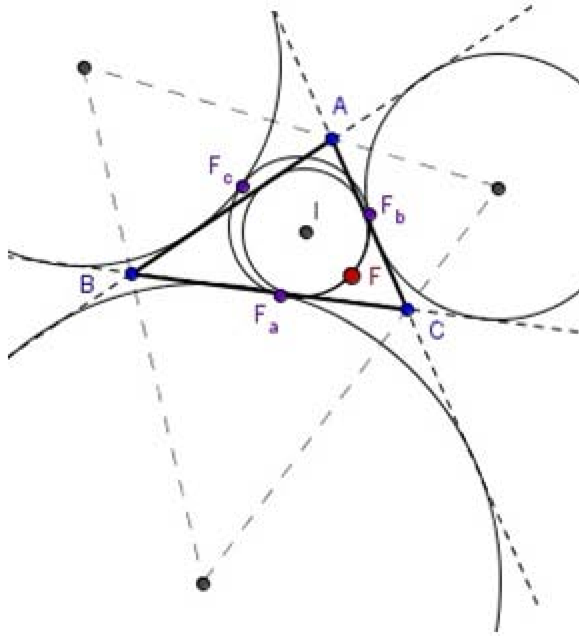
Neka je *S* druga presečna tačka krugova k_B *i* k_C. Tada su četvorouglovi *BPSR* i *PCQS* tetivni (slika 53), pa je $\sphericalangle RSP = 180° - \beta$ i $\sphericalangle QSP = 180° - \gamma$. Sledi da je $\sphericalangle RSQ = \beta + \gamma$, a zatim i $\sphericalangle RAQ + \sphericalangle RSQ = \alpha + \beta + \gamma = 180°$. Dakle i četvorougao *ARSQ* je tetivan, pa se oko njega može opisati krug. To je baš krug k_A, opisan oko trougla *AQR*, pa se dati krugovi seku u tački *S*. ■



Sl. 53

16. Fojerbahova tačka

Fojerbah je 1822. godine objavio svoj rezultat, dobro poznat kao Fojerbahova teorema.



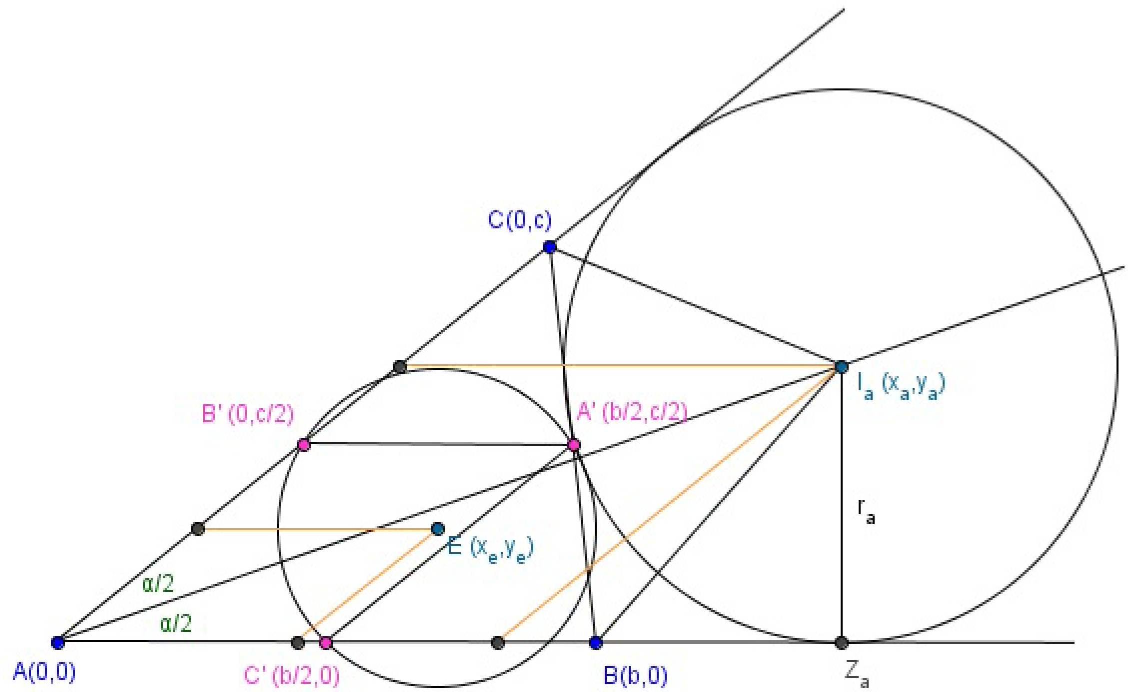
Sl. 54

Teorema 33. *Ojlerova kružnica dodiruje upisanu i sve tri spolja pripisane kružnice datog trougla. Pri tome upisana kružnica dodiruje Ojlerovu kružnicu iznutra, dok je pripisane kružnice dodiruju spolja.*

Dokaz: Neka je dat trougao ABC. Posmatrajmo kosi koordinatni sistem kome je tačka A koordinatni početak, a prave AB i AC ose koordinatnog sistema. Tada su središta stranica BC, CA i AB redom tačke $A' = (\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$, $B' = (0, \frac{c}{2})$, $C' = (\frac{b}{2}, 0)$. Neka je $I_a(x_a, y_a)$ centar i r_a poluprečnik pripisane kružnice k_a naspram temena A trougla ABC.

Očigledno je $x_a = y_a$ i $y_a \cdot \sin\alpha = r_a = \mathrm{s} \cdot \tan {}^{\alpha}/_{2}$ (1). Odatle dobijamo:

$$x_a = y_a = \frac{s}{2\,(\cos\ \frac{1}{2}\alpha)^2}$$



Sl.55

Sa druge strane , kako za poluprečnik opisane kružnice trougla ABC važe formule $R=\frac{abc}{4P}$ i $2R=\frac{a}{\sin\ \alpha}$, zbog $P=(s-a)\,r_a$ imamo:

$$r_a=\frac{P}{s-a}=\frac{abc}{4R\ (s-a)}=\frac{bc\ \ \sin\propto}{2\ (s-a)}$$, odakle iz (1) dobijamo

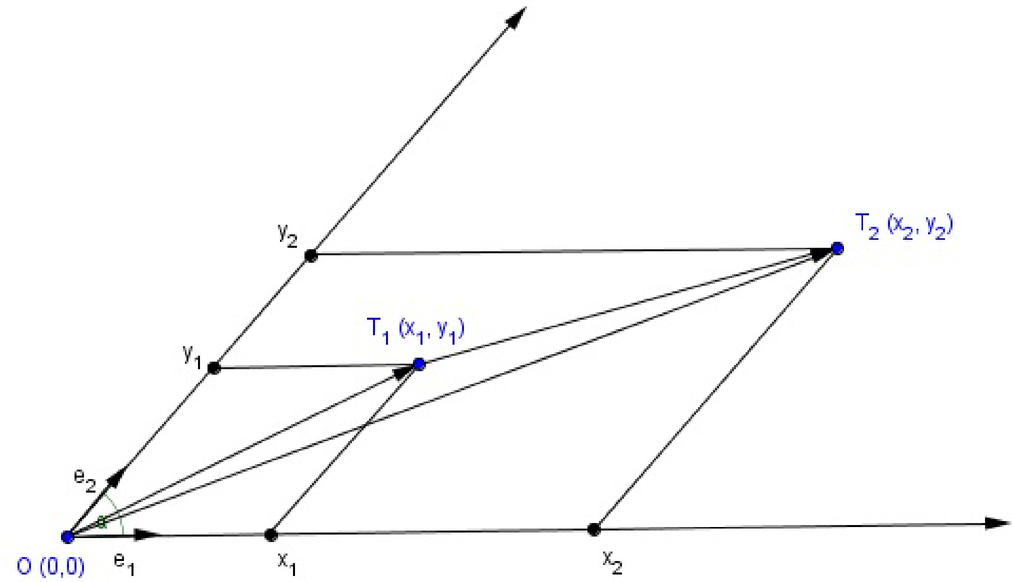
$$x_a=y_a=\frac{bc}{2\ (s-a)}\ . \quad (*)$$

Pre daljeg dokaza izvešćemo formulu za udaljenost dve tačke u kosom koorinatnom sistemu koristeći svojstva skalarnog proizvoda vektora. Neka je tačka $O\ (0,0)$ koordinatni početak čije ose zaklapaju ugao α. Neka su $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ jedinični vektori u smeru koordinatnih osa. Za tačke $T_1\ (x_1,y_1)$ i $T_2\ (x_2,y_2)$ važi:

$$\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right|^2=\overrightarrow{T_1T_2}\cdot\overrightarrow{T_1T_2}$$
$$=((x_2-x_1)\,\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)\,\overrightarrow{e_2})\cdot((x_2-x_1)\,\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)\,\overrightarrow{e_2})$$
$$=(x_2-x_1)^2\,\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)^2\,\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2}+2(x_2-x_1)\,(y_2-y_1)\,\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}$$

Odakle dobijamo:

$$\left|\overrightarrow{T_1 T_2}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^{\ 2} + 2(x_2 - x_1)\ (y_2 - y_1)\cos\alpha. \ (2)$$



Sl.54

Neka je $E\,(x_e, y_e)$ centar Ojlerove kružnice k_e trougla ABC. Po teoremi 17 njen poluprečnik je $\dfrac{R}{2}$, gde je R poluprečnik opisane kružnice trougla ABC. Kako Ojlerova kružnica prolazi kroz tačke $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ onda primenom (2) dobijamo

$$\left(x_e \ - \ \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_e \ - \ \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(x_e \ - \ \frac{b}{2}\right)\left(y_e \ - \ \frac{c}{2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0\,, \quad (3)$$

$$x_e^{\ 2} + \left(y_e \ - \ \frac{c}{2}\right)^2 + 2\,x_e\left(y_e \ - \ \frac{c}{2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0\,, \qquad (4)$$

$$\left(x_e \ - \ \frac{b}{2}\right)^2 + \ y_e^{\ 2} + 2\left(x_e \ - \ \frac{b}{2}\right) y_e\cos\alpha - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 0\,. \qquad (5)$$

Ako saberemo jednačine (5) i (4) i od tog zbira oduzmemo jednačinu (3) dobijamo

$$x_e^{\ 2} + \ y_e^{\ 2} + 2\,x_e y_e\cos\alpha = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{bc}\cos\alpha\,. \qquad (6)$$

Sada sabiramo jednačine (3) i (5) i delimo njihov zbir sa c , i dobijamo

$$ye - y_e + \frac{c}{4} - \cos\alpha\left(x_e \ - \ \frac{b}{2}\right) = 0 \qquad (7)$$

Sabirajući jednačine (3) i (4) i deljenjem njihovog zbira sa b, dobijamo

$$-x_e + \frac{b}{4} - \cos\alpha\left(y_e - \frac{c}{2}\right) = 0 \qquad (8)$$

Sada, sabiranjem jednačina (7) i (8) imamo sledeću jednakost:

$$(x_e + y_e)(1 + \cos\alpha) = \frac{b+c}{4}(1 + 2\cos\alpha). \qquad (9)$$

Zbog $P = (s-a)\, r_a$ i $R = \frac{abc}{4P}$ imamo $r_a R = \frac{abc}{4(s-a)}$ (10)

$$|EI_a|^2 = (x_a - x_e)^2 + (y_a - y_e)^2 + 2(x_a - x_e)(y_a - y_e)\cos\alpha$$

$$= {x_e}^2 + {y_e}^2 + 2\, x_e y_e \cos\propto + 4{x_a}^2\left(\cos\frac{1}{2}\alpha\right)^2 - 2x_a(x_e + y_e)(1 + \cos\alpha).$$

(jer je $x_a = y_a$)

Korišćenjem jednakosti (*), (6) i (9) iz prethodne jednačine dobijamo

$$|EI_a|^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{bc}\cos\alpha + s^2\frac{1}{\left(\cos\ \frac{1}{2}\alpha\right)^2} - \frac{1}{2}x_a\,(b+c)\,(1 + 2\cos\alpha).$$

Primenom formula (10), (*) i (1) dobijamo

$$|EI_a|^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{bc}\cos\alpha + s^2(1 + (\tan\alpha)^2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{2(s-a)}(b+c)\,(1 + 2\cos\alpha)$$

$$= \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{bc}\cos\alpha + {r_a}^2 + s^2 + r_a R - r_a R - \frac{bc}{4(s-a)}(b+c)\,(1 + 2\cos\alpha)$$

$$= \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2 - \frac{abc}{4(s-a)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{bc}\cos\alpha + s^2 - \frac{bc}{4(s-a)}(b+c)\,(1 + 2\cos\alpha)$$

$$= \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2 + s^2 - \frac{bc}{4(s-a)}\left(a - 2(s-a)\cos\alpha + (b+c)\,(1 + 2\cos\alpha)\right)$$

$$= \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2 + s^2 - \frac{bc}{4(s-a)}\cdot 2s(1 + \cos\alpha)$$

$$= \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2$$

jer iz kosinusne teoreme $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, lako sledi jednakost $4s(s-a) = 2bc(1 + \cos\alpha)$, gde je s poluobim.

Odavde sledi da Ojlerova kružnica trougla *ABC* spolja dodiruje pripisanu kružnicu trougla *ABC* naspram temena *A*. Na isti način se može pokazati da Ojlerova kružnica dodiruje i ostale dve pripisane kružnice.

Trougao određen sa tri tačke dodira Ojlerove kružnice i pripisanih kružnica poznat je pod imenom *Fojerbahov trougao* posmatranog trougla.

Preostaje da pokažemo da upisana kružnica trougla dodiruje Ojlerovu kružnicu iznutra. Neka je I (x_i, y_i) centar i r poluprečnik upisane kružnice u trougao *ABC*.

Očigledno je $x_i = y_i$ i $y_i \cdot \sin\alpha = r = (s-a) \cdot \tan {}^{\alpha}/_{2}$ (11)

$$x_i = y_i = \frac{s-a}{2\,(\cos\frac{1}{2}\alpha)^2} \qquad (12)$$

Sa druge strane važi: $r = \frac{P}{s} = \frac{abc}{4Rs} = \frac{bc\sin\alpha}{2s}$ odakle dobijamo $x_i = y_i = \frac{bc}{2s}$ (13).

Sada je

$$|EI|^2 = (x_i - x_e)^2 + (y_i - y_e)^2 + 2(x_i - x_e)\,(y_i - y_e)\cos\alpha$$

$$= {x_e}^2 + {y_e}^2 + 2\,x_e y_e\cos\alpha + 4{x_i}^2\left(\cos\frac{1}{2}\alpha\right)^2 - 2x_i(x_e + y_e)(1 + \cos\alpha).$$

Koristeći formule (6), (9), (11), (12), (13) i činjenicu da je $rR = \frac{abc}{4s}$ slično kao u prethodnom dokazu za pronalaženje udaljenosti $|EI_a|$ dobijamo sada

$$|EI|^2 = \left(\frac{R}{2} - \mathrm{r}\right)^2.$$

Odavde sledi da upisana kružnica trougla *ABC* dodiruje Ojlerovu kružnicu iznutra. ■

Tačka u kojoj se upisana kružnica i Ojlerova kružnica dodiruju naziva se *Fojerbahova tačka* tog trougla.

Trilinearne koordinate ove tačke su :

$$F = [1 - \cos(\beta - \gamma) : 1 - \cos(\gamma - \alpha) : 1 - \cos(\alpha - \beta)].$$

Zaključak

Značajne tačke i linije predstavljaju važne elemente trougla, jedne od osnovnih ravnih figura u geometriji. To je glavni razlog što iste i dan danas privlače pažnju matematičara. Stoga se može očekivati da će se ispitivanje i otkrivanje novih tačaka i linija trougla nastaviti i u budućnosti.

Literatura

[1] M. Mitrović, M. Veljković, S. Ognjanović, Lj. Petković, N. Lazarević, *Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd 2003.

[2] TRIANGLE CENTERS, http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/

[3] TRILINEAR COORDINATES, http://www.mcs.uvawise.edu/msh3e/resources/geometryBook/22TrilinearCoordinates.pdf

[4] Fermat point, WIKIPEDIA, http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point

[5] Gergonne Point Theorem, Geometry, http://gogeometry.com/gergonne.htm

[6] Nagel Point, Geometry, http://agutie.homestead.com/files/nagel_point1.htm

[7] The Napoleon Point and More, ASK DR MATH, http://mathforum.org/library/drmath/view/55042.html

[8] Z. Kolar - Begović, A. Tonković, *Feuerbachov teorem* , Osječki matematički list 9 (21-30), 2009

[9] Lemoine point, http://euclid.ucc.ie/pages/MATHENR/MathEnrichment/7.Lemoine.pdf

[10] Existence of the Brocard point, ASK DR MATH, http://mathforum.org/library/drmath/view/60812.html

Biografija

Rođena sam 02.12.1989. u Novom Sadu. Osnovnu školu "Petar Kočić" sam završila u Temerinu sa skroz odličnim uspehom. Takođe sam završila i nižu muzičku školu "Josip Slavenski" u Novom Sadu. 2008. godine završila sam gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu, odeljenje za posebno obdarene učenike u matematičkoj gimnaziji, sa skroz odličnim uspehom. Osnovne studije sam upisala na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer: matematika. Zatim, master studije matematika (nastava matematike).