UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jelena Gajić

Prilozi teoriji operatora-
Banahove algebre i Šatenove klase

-master rad-

Novi Sad, 2009

Predgovor

I. M. Gelfand je objavio, 1939. godine u svom radu *"To the theory of normed rings"*, pionirska razmatranja o normiranim prstenovima, i time pokrenuo novo polje matematičkog istraživanja. Za Gelfanda, normirani prsten je bio kompletna normirana algebra. Zbog očiglednog razloga, ove algebre su postale poznatije kao " Banach-ove algebre" . Prije 1939. godine takve algebre su proučavali M. Nagumo (*" Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen"*) i K. Yosida (*" On the group embedded in the metrical complete ring"*), koji su ih nazivali "metrički prstenovi". J. von Neumann je razvio teoriju Prstenovi operatora u svom radu *"Zur Algebra der Funkionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren"*, 1929. Značajnije interesovanje za Banach-ove algebre počinje objavljivanjem, danas klasičnog rada Gelfanda *" Normierte Ringe "* iz 1941. godine. Njegov značajan rezultat je bio da je svaka komutativna Banach-ova algebra holomorfna algebri neprekidnih funkcija na kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru. C. Rickart je u svom radu *" General Theory of Banach Algebras"* iz 1960. godine zabilježio da Banach-ove algebre stoje između analize i algebre (ili možda preciznije, sa nogama u analizi i glavom u algebri).
$\mathbb{C}^\star$ su Banach-ove algebre od posebnog značaja. Njihov odnos prema ostalim Banach-ovim algebrama impliciran je značajnom ulogom Hilbert-ovih prostora među ostalim Banach-ovim prostorima.

U ovom radu su izloženi osnovni rezultati iz teorije Banach-ovih algebri i Schatten-ovih klasa operatora. Osnovna literatura je knjiga R. Meise, D. Vogt *"Introduction to Functional Analysis"*, preciznije poglavlja 15-19. U izučavanju ove oblasti sam koristila knjige: W. Rudin *"Functional Analysis"* i S. Kurepa *"Funkcionalna analiza"* a u manjoj mjeri knjige: M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić [2], C. Rickart [9], J.B. Conway [4], V. Rakočević [8], А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин [5], B. Blackadar [3] i S. Aljančić [1].

Organizacija materijala i izlaganje pojedinih tema u ovom radu predstavljaju moje viđenje poznatih definicija i tvrđenja.

Prvo poglavlje Banach-ove algebre je posvećeno uopštenoj teoriji Banach-ovih algebri i dat je opis navažnijeg primjera $\mathcal{B}(E)-$ algebra ograničenih linearnih operatora na Banach-ovom prostoru E.
U drugom poglavlju Ideali dokazano je da je $\mathcal{K}(E)$ zatvoren ideal Banach-ove algebre $\mathcal{B}(E)$.
U trećem poglavlju Invertibilni elementi Banach-ove algebre, dokazano je da je grupa invertibilnih elemenata otvoren skup.

U četvrtom poglavlju Spektar i rezolventni skup elemenata Banach-ove algebre dokazana je Gelfand-Mazur-ova teorema.
U petom poglavlju Kompleksni homomorfizmi uočavamo " 1-1" korespodenciju između maksimalnih ideala komutativne Banach-ove algebre $\mathcal{A}$ i elemenata $S_p(\mathcal{A})$.
U šestom poglavlju Spektar nekih klasa operatora bitno je učiti da je spektar operatora $A \in \mathcal{B}(E)$ neprazan skup, a spektar neograničenog operatora može biti i prazan.
U sedmom poglavlju Kompaktni operatori na Hilbert-ovim prostorima definišemo *Schatten-ovu p klasu.* Pri $1 \leq p < \infty$ svaki od prostora $S_p(H)$ je Banach-ov i ideal je prostora $\mathcal{B}(H)$. Ako je H beskonačno dimenzionalan Hilbert-ov prostor, onda I nije kompaktan operator te $S_p(H)$ dodajemo jedinicu i dobijamo da je $S_p(H) \times \mathbb{C}$ Banach-ova algebra.
U osmom poglavlju $\mathbb{C}^{\star}-$ algebre teorema 8.1. ima značajnu ulogu za $\mathbb{C}^{\star}-$ algebre. Prostoru $\mathcal{K}(H)$ dodajemo jedinicu i dobijamo $\mathbb{C}^{\star}-$ algebru $\mathcal{K}(H) \times \mathbb{C}$. Uvodimo pojam Riemann-Stieltjes-ovog integrala vektorske funkcije u odnosu na skalarnu funkciju kao i pojam Riemann-Stieltjes-ovog integrala skalarne funkcije u odnosu na vektorsku funkciju. Integracija po spektralnoj mjeri je $*-$ homomorfizam sa komutativne $\mathbb{C}^{\star}-$ algebre $\mathcal{M}_{\infty}(Y)$ u $\mathcal{B}(H)$. Svakim normalnim operatorom A jednoznačno je određena spektralna mjera E na Borel-ovim podskupovima od $\sigma(A)$.

◇ ◇ ◇

Na ovom mjestu želim da izrazim svoju zahvalnost svima koji su me podržavali tokom izrade master rada.
Posebno bih željela da se zahvalim mentoru, profesoru Stevanu Pilipoviću.

Novi Sad, 2009. *Jelena Gajić*

Sadržaj

1 Banach-ove algebre

Definicija 1.1. *$\mathbb{C}$ algebra je $\mathbb{C}$ vektorski prostor $\mathcal{A}$ u kojem je množenje $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definisano tako da je $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ prsten sa jediničnim elementom e i tako da je*

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \quad \text{za sve } a, b \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Linearan potprostor $\mathcal{B}$ $\mathbb{C}$ algebre $\mathcal{A}$ je podalgebra od $\mathcal{A}$ ako $\mathcal{B}$ sadrži jedinični element i ako $ab \in \mathcal{B}$ za $a, b \in \mathcal{B}$.
$\mathbb{C}$ algebra $\mathcal{A}$ je komutativna ako je $ab = ba$ za sve $a, b \in \mathcal{A}$.

Definicija 1.2. *Za algebru $\mathcal{A}$ kaže se da je normirana algebra ako postoji norma $\|\cdot\|$ sa osobinama:*

1° $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, *za sve* $a, b \in \mathcal{A}$

2° $\|e\| = 1$.

Normirana algebra $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ je Banach[1]-ova algebra ako je $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ Banach-ov prostor.
U svakoj normiranoj algebri $\mathcal{A}$, množenje je neprekidno, zato što je za svako $(a, b), (c, d) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$,

$$\|ab - cd\| = \|(a - c)b + c(b - d)\| \leq \|a - c\| \cdot \|b\| + \|c\| \cdot \|b - d\|.$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ $\mathbb{C}$ algebre, onda je linearno preslikavanje $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ algebarski homomorfizam ako je

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \text{za sve } a, b \in \mathcal{A} \text{ i } \varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}.$$

Primjeri:
1. Neka je $K \neq \emptyset$ kompaktan topološki prostor. Onda je $C(K, \mathbb{C})$ komutativna Banach-ova algebra sa supremum normom

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in K\}.$$

2. Neka je $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Onda je disk algebra

$$A(\bar{D}) := \{f \in C(\bar{D}, \mathbb{C}) : f \text{ je analitička na } D\}$$

zatvorena podalgebra od $C(\bar{D}, \mathbb{C})$ i otuda Banach-ova algebra.

[1] Stefan Banach (1892-1945)

3. Wiener[2]-ova algebra.

$$\mathcal{A} := l_1(\mathbb{Z}) := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \|x\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty \right\}$$

i definišimo

$$x \star y = \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_m y_{n-m} \right)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{za } x, y \in \mathcal{A}.$$

Onda važi:

$$\sum_n |(xy)_n| \le \sum_m \sum_n |x_m|\,|y_{n-m}| = \sum_m |x_m| \sum_n |y_{n-m}| = \sum_m |x_m| \|y\| = \|x\|\,\|y\|.$$

Prema tome $x \star y \in l_1(\mathbb{Z})$. Jedinični element je dat sa $e = (\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{Z}}$.
Pa je $\mathcal{A}$ komutativna Banach-ova algebra.

4. Neka je E Banach-ov prostor nad $\mathbb{C}$. Onda je sa $\mathcal{B}(E)$ sa kompozicijom $A \circ B = AB$ kao množenjem, Banach-ova algebra.
$\mathcal{B}(E)$ nije komutativna ako je $\dim E > 1$.

2 Ideali

Definicija 2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}-$ algebra. Ideal $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}$ je linearni potprostor takav da je $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ i za koji važi*

$$a\mathcal{I} \subset \mathcal{I} \;\text{ i }\; \mathcal{I}a \subset \mathcal{I} \;\text{ za svako } a \in \mathcal{A}.$$

Maksimalan ideal $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}$ je ideal koji nije sadržan ni u jednom strogo većem idealu.

Napomena 2.1. Ako je $\mathcal{I}$ ideal u $\mathbb{C}-$algebri $\mathcal{A}$, onda je množenje na količničkom vektorskom prostoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ defisano sa

$$(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) := ab + \mathcal{I} \;\text{ za svako } a, b \in \mathcal{A}.$$

Tada je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ $\mathbb{C}-$ algebra.

Lema 2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra. Onda važi:*

(*i*) *$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je Banach-ova algebra za svaki zatvoren ideal $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}$.*

(*ii*) *$\overline{\mathcal{I}}$ je ideal za svaki ideal $\mathcal{I}$ u $\mathcal{A}$.*

[2]Norbert Wiener (1894-1964)

(*iii*) *Svaki maksimalan ideal u $\mathcal{A}$ je zatvoren.*

(*iv*) *Svaki ideal u $\mathcal{A}$ je sadržan u maksimalnom idealu.*

Dokaz:
(*i*) Kako je $\mathcal{I}$ zatvoren potprostor, postoji količnička norma

$$\|a + \mathcal{I}\| = \inf_{x \in I} \|a + x\|, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ i $\epsilon > 0$. Izaberimo $x, y \in \mathcal{I}$ tako da je $\|a + x\| < \|a + \mathcal{I}\| + \epsilon$, $\|b + y\| < \|b + \mathcal{I}\| + \epsilon$. Tada je

$$\|(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I})\| = \|ab + \mathcal{I}\| \leq \|ab + \underbrace{(ay + xb + xy)}_{\in \mathcal{I}}\| = \|(a + x)(b + y)\|$$

$$\leq \|a + x\| \, \|b + y\| \leq (\|a + \mathcal{I}\| + \epsilon)(|b + \mathcal{I}\| + \epsilon).$$

Kako je $\epsilon > 0$ proizvoljno malo

$$\|(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I})\| \leq \|a + \mathcal{I}\| \, \|b + \mathcal{I}\|.$$

Za jedinični element $e + \mathcal{I}$ od $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ važi $\|e + \mathcal{I}\| \leq \|e\| = 1$, (uzimajući da je $x = 0$.). Dalje je, $\|a + \mathcal{I}\| = \|(a + \mathcal{I})(e + \mathcal{I})\| \leq \|a + \mathcal{I}\| \, \|e + \mathcal{I}\|$, pa je $\|e + \mathcal{I}\| \geq 1$. Dakle, $\|e + \mathcal{I}\| = 1$.
Trebamo još dokazati da je $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ Banach-ov prostor. Podsjetimo se da je normiran prostor X Banach-ov akko u njemu svaki apsolutno konvergentan red konvergira.

Neka je $(a_n + \mathcal{I})_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ tako da je $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n + \mathcal{I}\| < \infty$. Prema definiciji infimuma, za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji $x_n \in \mathcal{I}$ tako da je

$$\|a_n + x_n\| < \|a_n + \mathcal{I}\| + \frac{1}{2^n}.$$

Onda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n + x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n + \mathcal{I}\| + 1 < \infty.$$

S obzirom da je $\mathcal{A}$ Banach-ov prostor postoji $a \in \mathcal{A}$ tako da je
$a = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + x_k)$. Tada

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + \mathcal{I}) \longrightarrow a + \mathcal{I} \ \text{ u } \mathcal{A}/\mathcal{I}.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}
\left\|(a+\mathcal{I})-\sum_{k=1}^{n}(a_k+\mathcal{I})\right\| &= \left\|(a-\sum_{k=1}^{n}a_k)+\mathcal{I}\right\| \\
&= \inf_{x\in\mathcal{I}}\left\|(a-\sum_{k=1}^{n}a_k)+x\right\| \\
&= \left\|a-\sum_{k=1}^{n}(a_k+x_k)\right\| \to 0 \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Znači, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je Banach-ova algebra.

(*ii*) Ako $x \in \overline{\mathcal{I}}, y \in \mathcal{A}$ onda postoji niz $x_n \in \mathcal{I}$ tako da $x_n \to x$. Onda $x_n y \in \mathcal{I}$ i $x_n y \to xy$ zbog neprekidnosti množenja, tako da $xy \in \overline{\mathcal{I}}$.

(*iii*) Iz $\mathcal{I} \subset \overline{\mathcal{I}}$ i (*ii*) $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$.

(*iv*) Neka je $\mathcal{I}$ ideal u $\mathcal{A}$. Definišimo

$$\mathcal{Z} := \{\mathcal{J} \subset \mathcal{A} : \mathcal{J} \text{ je ideal u } \mathcal{A}, \mathcal{I} \subset \mathcal{J}\}.$$

$(\mathcal{Z}, \subset)$ je uređen skup. Ako je $\mathcal{K}$ lanac u $\mathcal{Z}$ onda je $\mathcal{J}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\mathcal{J}\in\mathcal{K}} \mathcal{J}$ ideal u $\mathcal{A}$. $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_{\mathcal{K}}$ za svako $\mathcal{J} \in \mathcal{K}$. Prema Zorn[3]-ovoj lemi $\mathcal{Z}$ ima maksimalan ideal $\mathcal{J}_0$. $\mathcal{J}_0$ je maksimalan ideal u $\mathcal{A}$ koji sadrži $\mathcal{I}$. □

Napomena 2.2. Banach-ova algebra

$$A(\bar{D}) := \{f \in C(\bar{D}, \mathbb{C}) : f \text{ je analitička na } D\}$$

nema minimalan ideal.

Neka je J minimalan ideal i za $n \geq 0$ uvedimo $I_n = \{f \in \mathcal{A} : f(0) = f'(0) = \ldots = f^n(0) = 0\}$. Onda je $(I_n)_{n\geq 0}$ strogo opadajući niz ideala. Pretpostavimo da $0 \neq f \in J$, onda $0 \neq z^{n+1} f \in I_n \cap J$. Dakle, $I_n \cap J = J$. Otuda je $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap J = J$ i $J = \emptyset$, jer je $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Definicija 2.2. *Ako je E Banach-ov prostor, onda je*

$$\mathcal{F}(E) := \{A \in \mathcal{B}(E) : \dim R(A) < \infty\}$$

skup operatora konačnog ranga.

[3]Max Zorn (1906-1993)

Linearna kombinacija operatora konačnog ranga je operator konačnog ranga. Ako $B \in \mathcal{B}(E)$, onda je $A \circ B$ i $B \circ A$ operator konačnog ranga za $A \in \mathcal{F}(E)$. Dakle, $\mathcal{F}(E)$ je ideal u Banach-ovoj algebri $\mathcal{B}(E)$.

Definicija 2.3. *Neka su E i F normirani prostori i neka je* $U := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ *zatvorena jedinična lopta u E. Linearan operator* $A : E \to F$ *je kompaktan, ako je* $A(U)$ *relativno kompaktan skup u F. Definišemo*

$$\mathcal{K}(E, F) := \{A : E \to F : A \text{ kompaktan}\}.$$

Teorema 2.1. $\mathcal{K}(E)$ *je zatvoren ideal Banach-ove algebre* $\mathcal{B}(E)$ *koji sadrži sve konačno dimenzionalne operatore.*

Dokaz: Za svako $A \in \mathcal{K}(E)$ vrijedi

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup\{\|y\| : y \in A(U)\} < \infty.$$

Ako su $A, B \in \mathcal{K}(E)$ i $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen niz u E, onda zbog kompaktnosti operatora A niz $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz $(Ax_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Ograničenost niza $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i kompaktnost operatora B povlače egzistenciju podniza $(x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ niza $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ takvog da $(Bx_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ konvergira u E. Konvergencija nizova $(Ax_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ i $(Bx_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ povlači da za svaki par skalara α, β i niz $(\alpha Ax_{n_{k_l}} + \beta Bx_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ konvergira. Kako za svaki ograničen niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz E postoji podniz $(x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ takav da niz $((\alpha A + \beta B)x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ konvergira u E, to je $\alpha A + \beta B$ kompaktan operator. Dakle, $\mathcal{K}(E)$ je linearan potprostor od $\mathcal{B}(E)$.
Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz kompaktnih operatora na E i neka je $A \in \mathcal{B}(E)$ takav da je $\lim_{n \to \infty} \|A_n - A\| = 0$. Pokažimo da je slika $A(U)$ zatvorene jedinične lopte U u E relativno kompaktan skup. Zadajmo $\epsilon > 0$ i odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $\|A_n - A\| < \epsilon$. Skup $A_n(U)$ je relativno kompaktan na osnovu kompaktnosti operatora A_n. Neka $y \in A(U)$, tada je $y = Ax$ za neko $x \in U$ pa je $\|A_n x - y\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \|x\| < \epsilon$. Pokazali smo da je relativno kompaktan skup $A_n(U)$ jedna $\epsilon-$mreža za $A(U)$, pa slijedi da je $A(U)$ relativno kompaktan. Znači, prostor svih kompaktnih operatora $\mathcal{K}(E)$ je zatvoren potprostor od $\mathcal{B}(E)$.
Neka su $B, C \in \mathcal{B}(E)$. Onda je $B(U)$ ograničen u E. Za $A \in \mathcal{K}(E)$ skupovi $A \circ B(U)$ i $C \circ A \circ B(U)$ su relativno kompaktni. □

Propozicija 2.1. *Neka je E normiran prostor. Ako je U kompaktan skup u E, onda je E konačno dimenzionalan.*

Dokaz: Ako je U kompaktan skup onda je i $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ kompaktan. Neka je x_1 takav da je $\|x_1\| = 1$ i L_1 potprostor generisan elementom

x_1. Ako je $L_1 = E$ onda je $\dim E = 1$. Ako nije, i kako je L_1 zatvoren, onda na osnovu Riesz[4]-ove leme postoji $x_2 \in E$ takav da je $\|x_2\| = 1$ i $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Neka je L_2 potprostor generisan elementima x_1 i x_2. Ako je $L_2 = E$, onda je $\dim E = 2$. Ako je $L_2 \neq E$ ponovna primjena Riesz-ove leme daje postojanje elementa x_3 takvog da je $\|x_3\| = 1$ i $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ i $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Nastavimo ovaj proces. Može se desiti da se neki od potprostora poklopi sa E i tada je E konačno dimenzionalan. Ako je $L_n \neq E$ za svako n, tada dolazimo na, ovaj način, do niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvog da je $\|x_n\| = 1$ i $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ za svako $n \neq m$. Ovo je nemoguće jer je S kompaktan skup a sadrži niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz kojeg se ne može izdvojiti Cauchy[5]-jev podniz. Znači u procesu konstrukcije potprostora L_n desiće se da za neko $n \in \mathbb{N}$ važi $L_n = E$, pa je E konačno dimenzionalan. □

Napomena 2.3. Neka je E Banach-ov prostor, $\dim E < \infty$. Onda je $\mathcal{K}(E)$ podalgebra od $\mathcal{B}(E)$.

Napomena 2.4. Ako je H beskonačno dimenzionalan i separabilan Hilbert[6]-ov prostor, onda je $\mathcal{K}(H)$ minimalan i maksimalan zatvoren ideal u $\mathcal{B}(H)$. Ako H nije separabilan onda $\mathcal{K}(H)$ nije maksimalan ideal.

Napomena 2.5.[Calkin] Ideal $\mathcal{K}(l_2)$ je jedini netrivijalni zatvoren ideal u $\mathcal{B}(l_2)$.

Napomena 2.6.[Gohberg[7], Marcus[8] i Feldman[9]] Za $E = c_0$ i $E = l_p$, $1 \leq p < \infty$, ideal $\mathcal{K}(E)$ je jedini netrivijalni zatvoren ideal u $\mathcal{B}(E)$.

3 Invertibilni elementi Banach-ove algebre

Definicija 3.1. *Za element a Banach-ove algebre $\mathcal{A}$ kažemo da je invertibilan ako postoji $b \in \mathcal{A}$ takav da je $ab = ba = e$.*
Skup

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} := \{a \in \mathcal{A} : a \text{ je invertibilan}\}$$

je grupa invertibilnih elemenata od $\mathcal{A}$ s obzirom da $xy \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ za sve $x, y \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ i da je $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

[4]Frigyes Riesz (1880-1956)
[5]Augustin Louis Cauchy (1789-1857)
[6]David Hilbert (18962-1943)
[7]Israel Gohberg (1928-)
[8]Solomon Marcus(1925-)
[9]Naum Il'ich Feldman (1928-1994)

Lema 3.1. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra i neka $x \in \mathcal{A}$ tako da je $\|e-x\| < 1$. Onda je x invertibilan i važi*

$$\|x^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|e-x\|}, \quad \|e-x^{-1}\| \leq \frac{\|e-x\|}{1-\|e-x\|}.$$

Dokaz: Za $N \geq M$ imamo

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n - \sum_{n=0}^{M}(e-x)^n\right\| &= \left\|\sum_{n=M+1}^{N}(e-x)^n\right\| \\ &\leq \sum_{n=M+1}^{N}\|e-x\|^n \\ &\leq \|e-x\|^{M+1}\frac{1}{1-\|e-x\|}\end{aligned}$$

i niz parcijalnih suma $\left(\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ je Cauchy-jev niz.

Ako je $y = \sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$, onda je

$$\begin{aligned}xy = [e-(e-x)]\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n &= \lim_{N\to\infty}\left([e-(e-x)]\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}(e-(e-x)^{N+1}) = e,\end{aligned}$$

s obzirom da je $\lim\limits_{N\to\infty}\|(e-x)^{N+1}\| = 0$.
Analogno je $yx = e$, tako da je x invertibilan i $x^{-1} = y$.

$$\|y\| = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n\right\| \leq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\|e-x\|^n = \frac{1}{1-\|e-x\|}.$$

Kako je $e-x^{-1} = -(e-x)x^{-1}$ imamo

$$\|e-x^{-1}\| \leq \|e-x\|\cdot\|x^{-1}\| \leq \frac{\|e-x\|}{1-\|e-x\|}.$$

□

Propozicija 3.1. *U svakoj Banach-ovoj algebri $\mathcal{A}$, grupa $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ invertibilnih elemenata je otvoren skup i inverzija $x \mapsto x^{-1}$ je neprekidno preslikavanje na $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$.*

Dokaz: Neka $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ i $b \in \mathcal{A}$ tako da je $\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Onda je $1 > \|a^{-1}\| \, \|a - b\| \geq \|e - a^{-1}b\|$. Na osnovu prethodne leme $a^{-1}b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ i otuda $b = a(a^{-1}b) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. Zbog toga $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ sadrži otvorene lopte radijusa $\|a^{-1}\|^{-1}$ oko svakog elementa $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, pa je $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ otvoren.
Uzmimo $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. Ako je $b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ i $\|b - a\| < \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, onda

$$\|b^{-1}\| - \|a^{-1}\| \leq \|b^{-1} - a^{-1}\| = \|b^{-1}(a - b)a^{-1}\| \leq \|b^{-1}\| \, \|a - b\| \, \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}\|b^{-1}\|,$$

pa je $\|b^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|$ i $\|b^{-1} - a^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|^2\|a - b\|$. □

4 Spektar i rezolventni skup elemenata Banach-ove algebre

Definicija 4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra i neka $a \in \mathcal{A}$. Spektar od a je podskup $\sigma(a)$ od $\mathbb{C}$ dat sa*

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\}.$$

Rezolventni skup $\rho(a)$ od a definišemo sa

$$\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a).$$

Spektralni radijus $r(a)$ elementa a definišemo sa

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Napomena 4.1. Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra i neka $a \in \mathcal{A}$. Ako je p kompleksan polinom stepena n, onda je

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j z^j = \alpha \prod_{j=1}^{n} (z - z_j).$$

Neka je

$$p(a) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a^j = \alpha \prod_{j=1}^{n} (a - z_j e).$$

$p(a)$ je invertibilan akko sve nule od p leže van $\sigma(a)$.

Lema 4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra i neka $a \in \mathcal{A}$. Tada važi:*

(i) $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$ *za svaki kompleksan polinom p.*

(ii) *Ako je a invertibilan, onda je $\sigma(a^{-1}) = (\sigma(a))^{-1}$.*

Dokaz:
(i) Neka $\lambda \in \sigma(p(a))$. Onda $q(a) = (p - \lambda)(a) = p(a) - \lambda e \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. Ako su λ_i, $1 \leq i \leq n$ nule polinoma q onda na osnovu prethodne napomene za neko i, $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \in \sigma(a)$. Ali $p(\lambda_i) = \lambda$, pa $\lambda \in p(\sigma(a))$.
Neka $\lambda \in p(\sigma(a))$ tj. neka je $\mu \in \sigma(a)$ i $\lambda = p(\mu)$. Onda je $\mu = \lambda_i$ za neko i, $1 \leq i \leq n$, pa $q(a) \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ i otuda $\lambda \in \sigma(p(a))$.
(ii) Neka je a invertibilan, onda $0 \notin \sigma(a)$. Za neko $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, imamo

$$a - \lambda e = a(e - \lambda a^{-1}) = a\lambda(\lambda^{-1}e - a^{-1}),$$

iz čega slijedi da $a - \lambda e$ nije inveribilan akko nije ni $a^{-1} - \lambda^{-1}e$. □

Lema 4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra i neka $a \in \mathcal{A}$.*
Tada važi:

(i) *$\sigma(a)$ je kompaktan i neprazan.*

(ii) *$\rho(a)$ je otvoren u $\mathbb{C}$.*

(iii) $r(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Dokaz:
(i) Za dato $a \in \mathcal{A}$, $a - \lambda e$ je invertibilan kadgod je $|\lambda| > \|a\|$. Zaista, za $\lambda \in \mathbb{C}$, tako da je $|\lambda| > \|a\|$, imamo

$$(a - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Otuda je $\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$.
Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ preslikavanje dato sa $f(\lambda) = a - \lambda e$. Onda $\lambda \notin \sigma(a)$ akko $a - \lambda e \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. Zato je $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = f^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$. Kako je $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ neprekidna funkcija i $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ otvoren slijedi da je $f^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ otvoren i zato je $\sigma(a)$ zatvoren skup. S obzirom da je $\sigma(a)$ zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{C}$, $\sigma(a)$ je kompaktan.
Moramo pokazati da je $\sigma(a) \neq \emptyset$ za svako $a \in \mathcal{A}$. Pretpostavimo suprotno da postoji $a \in \mathcal{A}$ tako da je $\sigma(a) = \emptyset$. Onda je $a - \lambda e$ invertibilan za svako $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ako $\epsilon \to 0$ u $\mathbb{C}$, onda

$$\frac{(a-(\lambda+\epsilon)e)^{-1}-(a-\lambda e)^{-1}}{\epsilon} = \frac{(a-(\lambda+\epsilon)e)^{-1}(a-\lambda e-(a-(\lambda+\epsilon)e))(a-\lambda e)^{-1}}{\epsilon}$$
$$= \frac{(a-(\lambda+\epsilon)e)^{-1}\epsilon(a-\lambda e)^{-1}}{\epsilon} \longrightarrow (a-\lambda e)^{-2}.$$

Neka $\varphi \in \mathcal{A}'$. Onda je $h(\lambda) \equiv \varphi(-(a-\lambda e)^{-1})$ cijela funkcija. Za dovoljno veliko $|\lambda|$, imamo

$$\begin{aligned}(a-\lambda e)^{-1} &= -\lambda^{-1}\left(e-\tfrac{a}{\lambda}\right)^{-1}\\ &= -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\lambda^n}.\end{aligned}$$

Kada $|\lambda| \to \infty$, $h(\lambda) \to 0$. Na osnovu Liouville[10]-ove teoreme, $h \equiv 0$ na $\mathbb{C}$. Imamo da je $\varphi(-(a-\lambda e)^{-1}) = 0$ za svako $\varphi \in \mathcal{A}'$, odakle slijedi da je $(a-\lambda e)^{-1} = 0$. To nije moguće s obzirom da je $(a-\lambda e)^{-1}(a-\lambda e) = e \neq 0$.
(iii) Na osnovu leme 4.1.(i) $\sigma(a^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(a)\}$ i $r(a^n) = r(a)^n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ali $r(a^n) \leq \|a^n\|$ (zbog (i)) tako da imamo

$$\begin{aligned}&r(a)^n = r(a^n) \leq \|a^n\|\\ &\Rightarrow r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}\\ &\Rightarrow r(a) \leq \liminf_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Neka je $\varphi \in \mathcal{A}'$. Kao što smo vidjeli pod (i) funkcija $h(\lambda) \equiv \varphi(-(a-\lambda e)^{-1})$ je holomorfna na $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ i ima Laurent[11]-ov razvoj na $\{\lambda : |\lambda| > r(a)\}$

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(a^n)}{\lambda^{n+1}}, \quad \text{za} \quad |\lambda| > \|a\|.$$

Stavimo $\lambda = \mu^{-1}$. Radijus konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(a^n)\mu^{n+1}$ je

$$\frac{1}{\limsup|\varphi(a^n)|^{\frac{1}{n}}}$$

i vrijedi

$$\frac{1}{r(a)} \leq \frac{1}{\limsup|\varphi(a^n)|^{\frac{1}{n}}}$$

odnosno

$$r(a) \geq \limsup|\varphi(a^n)|^{\frac{1}{n}}.$$

[10]Joseph Liouville (1809-1882)
[11]Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)

Uzimajući $\|a\| = \max_{\varphi \in \mathcal{A}'} |\varphi(a)|$ vrijedi $r(a) \geq \limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. $\square$

Teorema 4.1 (Gelfand[12]-Mazur[13]). *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra. Ako svaki element $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$ ima inverzni element x^{-1}, onda je algebra $\mathcal{A}$ izometrički izomorfna algebri kompleksnih brojeva.*

Dokaz: Za $a \in \mathcal{A}$ na osnovu leme 4.2. (i) postoji $z \in \sigma(a)$, pa $a - ze \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. No tada je $a - ze = 0$, odakle je $a = ze$. To pokazuje da je

$$\mathcal{A} = \{ze : z \in \mathbb{C}\}.$$

Sa $z(a)$ označimo jedini element spektra elementa a. Tada je $a = z(a)e$ i $\|a\| = |z(a)|$. Za $\alpha \in \mathbb{C}$ i $a, b \in \mathcal{A}$ imamo:

$$\begin{gathered} z(\alpha a)e = \alpha a = \alpha \cdot a = \alpha \cdot z(a)e, \\ z(a+b)e = a + b = z(a)e + z(b)e, \\ z(ab)e = ab = z(a)e \cdot z(b)e. \end{gathered}$$

Odavde slijedi da je $a \mapsto z(a)$ izometrički izomorfizam algebri $\mathcal{A}$ i $\mathbb{C}$. $\square$

Propozicija 4.1. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra. Ako za svaki invertibilan element $a \in \mathcal{A}$ vrijedi $\|a^{-1}\| \leq \|a\|^{-1}$, onda je algebra $\mathcal{A}$ izometrički izomorfna sa algebrom kompleksnih brojeva.*

Dokaz: Za $\epsilon > 0$ stavimo

$$A_\epsilon = \{a \in \mathcal{A} : \|a\| \geq \epsilon\}, \quad G_\epsilon = \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cap A_\epsilon.$$

Pretpostavimo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in G_\epsilon$ konvergira ka $a \in \mathcal{A}$. Tada

$$\|a_i^{-1} - a_j^{-1}\| = \|a_i^{-1}(a_j - a_i)a_j^{-1}\| \leq \|a_i\|^{-1}\|a_j - a_i\|\,\|a_j\|^{-1} \leq \epsilon^{-2}\|a_j - a_i\|$$

pokazuje da je (a_i^{-1}) Cauchy-jev niz u $\mathcal{A}$. No $a_i^{-1} \to a_0$ zajedno sa $a_i \to a$ povlači $a_i a_i^{-1} \to a \cdot a_0$ i $a_i^{-1} a_i \to a_0 a$. Odavde je $aa_0 = a_0 a = e$, tj. $a_0 = a^{-1}$. Budući da je $\|a^{-1}\| = \|a_0\| = \lim \|a_i\|^{-1}$, to je $\|a^{-1}\| \geq \epsilon$, što pokazuje da je skup G_ϵ zatvoren. Vrijedi:
1. Metrički prostor A_ϵ je povezan.
2. G_ϵ je zatvoren u A_ϵ.
3. G_ϵ je otvoren u A_ϵ.
4. $G_\epsilon \neq \emptyset$ jer $\epsilon e \in G_\epsilon$.

Odavde slijedi da je $G_\epsilon = A_\epsilon$, što pokazuje da je svaki element iz A_ϵ invertibilan. Kako iz $b \in \mathcal{A}$ i $b \neq 0$ slijedi da $b \in A_\epsilon$ za $\epsilon = \|b\|$, to je b invertibilan element. Tvrđenje slijedi na osnovu teoreme 4.1. $\square$

[12] Израиль Моисеевич Гельфанд (1913-)
[13] Stanislaw Mazur (1905-1981)

Propozicija 4.2. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra i ako postoji $M < +\infty$ tako da je*

$$\|a\|\,\|b\| \leq M\|ab\| \quad (a, b \in \mathcal{A}),$$

onda je algebra $\mathcal{A}$ izometrički izomorfna sa $\mathbb{C}$.

Propozicija 4.3. *Neka je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra. Ako za sve $a, b \in \mathcal{A}$ vrijedi $\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$, onda je algebra $\mathcal{A}$ izometrički izomorfna algebri kompleksnih brojeva.*

5 Kompleksni homomorfizmi

Teorema 5.1 (Gleason[14], Kahan[15], Zelazko)**.** *Ako je φ linearan funkcional na Banach-ovoj algebri $\mathcal{A}$, takav da je $\varphi(e) = 1$ i $\varphi(x) \neq 0$ za svaki invertibilan element $x \in \mathcal{A}$, onda je*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \ \ (x, y \in \mathcal{A}).$$ [16]

Definicija 5.1. *Ako je $\mathcal{A}$ Banach-ova algebra, onda skup*

$$S_p(\mathcal{A}) := \{\varphi \in \mathcal{A}' : \varphi \ \text{ je algebarski homomorfizam}\}$$

nazivamo spektar od $\mathcal{A}$.

Teorema 5.2. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banach-ova algebra.*

(i) Svaki maksimalan ideal od $\mathcal{A}$ je jezgro za neko $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$.

(ii) Ako je $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$, jezgro od φ je maksimalan ideal od $\mathcal{A}$.

(iii) Element $x \in \mathcal{A}$ je invertibilan u $\mathcal{A}$ akko je $\varphi(x) \neq 0$ za svako $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$.

(iv) $\lambda \in \sigma(x)$ akko $\varphi(x) = \lambda$ za neko $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$.

Dokaz:
(*i*) Neka je M maksimalan ideal. Tada je $\mathcal{A}/M$ Banach-ova algebra je na osnovu leme 2.1. Izaberimo $x \in \mathcal{A} \setminus M$ i stavimo

$$J = \{ax + y : a \in \mathcal{A},\ y \in M\}.$$

Onda je J ideal koji je veći od M, jer $x \in J$. ($a = e, y = 0$) Prema tome $J = \mathcal{A}$ i $ax + y = e$ za neko $a \in \mathcal{A}$ i $y \in M$. Ako je $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/M$ količničko

[14]Andrew Mattei Gleason (1921-2008)
[15]William Morton Kahan (1933-)
[16]Dokaz se može naći u [10]

preslikavanje, onda je $\pi(a)\pi(x) = \pi(e)$. Svaki nenula element $\pi(x)$ Banach-ove algebre $\mathcal{A}/M$ je zbog toga invertibilan u $\mathcal{A}/M$. Na osnovu teoreme 4.1., postoji izomorfizam j sa $\mathcal{A}/M$ na $\mathbb{C}$. Stavimo $\varphi = j \circ \pi$. Onda $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$ i M je nula prostor od φ.
(ii) Ako $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$, onda je $\varphi^{-1}(\{0\})$ ideal u $\mathcal{A}$ koji je maksimalan zato što je kodimenzije 1.
(iii) Ako je x invertibilan u $\mathcal{A}$ i ako $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$, onda je

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1,$$

tako da je $\varphi(x) \neq 0$. Ako x nije invertibilan, onda e nije element skupa $I = \{ax : a \in \mathcal{A}\}$, te je taj skup ideal u $\mathcal{A}$. Na osnovu leme 2.1. sadržan je u maksimalnom idealu M. Zbog *(i)* postoji $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$ tako da je $M = N(\varphi)$. Kako $x \in I \subset M$, imamo $\varphi(x) = 0$.
(iv) Na osnovu *(iii)* $\lambda \in \sigma(x)$ akko postoji $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$ tako da je $0 = \varphi(x - \lambda e) = \varphi(x) - \lambda$, pa je $\varphi(x) = \lambda$. □

6 Spektar nekih klasa operatora

Definicija 6.1. *Neka je E Banach-ov prostor i neka $A \in \mathcal{B}(E)$. Spektar od A je skup dat sa*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ nije izomorfizam od } E\}.$$

Rezolventni skup $\rho(A)$ od A definišemo sa

$$\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A).$$

Broj $\lambda \in \mathbb{C}$ nazivamo sopstvena vrijednost od A ako je

$$E_\lambda := \{x \in E : Ax = \lambda x\} = N(\lambda I - A) \neq \{0\}.$$

E_λ nazivamo prostor sopstvenih vektora operatora A za sopstvenu vrijednost λ.

Lema 6.1. *Neka je E beskonačno dimenzionalan Banach-ov prostor i neka $A \in \mathcal{K}(E)$. Onda važi:*

(i) $0 \in \sigma(A)$

(ii) *Za svaku sopstvenu vrijednost $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ operatora A odgovarajući prostor sopstvenih vektora E_λ je konačne dimenzije.*

(iii) Operator A ima najviše prebrojivo mnogo sopstvenih vrijednosti. Jedino moguće gomilište sopstvenih vrijednosti operatora A je nula.

Dokaz:
(i) Pretpostavimo da $0 \notin \sigma(A)$, onda je $I = A \circ A^{-1} \in \mathcal{K}(E)$ i $I(U) = U$ je kompaktan skup. Na osnovu propozicije 2.1. je E konačno dimenzionalan što je suprotno pretpostavci.
(ii) Za zatvorenu jediničnu loptu V prostora $N(I - \lambda A)$ važi $\lambda A(V) = V$. Kako je $\lambda A \in \mathcal{K}(E)$, V je relativno kompaktan skup i prema tome kompaktan skup. No onda je $\dim N(I - \lambda A) < \infty$.
(iii) S obzirom da je $\mathcal{B}(E)$ Banach-ova algebra iz dokaza leme 4.2. *(i)* imamo da je za svako $A \in \mathcal{B}(E)$, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$. Neka je $0 < \alpha \leq \|A\|$. Trebamo pokazati da može postojati samo konačno mnogo sopstvenih vrijednosti λ takvih da je $|\lambda| \geq \alpha$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji niz $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ različitih sopstvenih vrijednosti pri čemu je $|\lambda_i| \geq \alpha$. Neka su x_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ sopstveni elementi koji odgovaraju tim sopstvenim vrijednostima, tj. $Ax_n = \lambda_n x_n$. Pokažimo sada su elementi $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisni za svako $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 1$ to je trivijalno. Neka su $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisni. Ako pretpostavimo da je $x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$, to primjenom operatora A na obje strane jednakosti dobijamo $\lambda_{k+1} x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i x_i$, tj. $x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}} x_i$. No tada bi bilo i $\sum_{i=1}^{k} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}} - 1\right) x_i = 0$. Kako je $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}, (i = 1, 2, \ldots, k)$ posljednja relacija je nemoguća zbog linearne nezavisnosti elemenata $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Ako je $\mathfrak{L}_k = Lin_{1 \leq j \leq k} x_j$ za svako $k = 1, 2, \ldots$, imaćemo da je $\mathfrak{L}_k$ pravi potprostor od $\mathfrak{L}_{k+1}$. Na osnovu Riesz-ove leme postoji element $y_{k+1} \in \mathfrak{L}_{k+1}$ takav da je $\|y_{k+1}\| = 1$ i $\|y_{k+1} - x\| \geq \frac{1}{2}$ za svako $x \in \mathfrak{L}_k$. Ocenimo razliku $\|Ay_m - Ay_n\|$ pri $m > n$. U daljem sa T_λ označavamo operator $T_\lambda = A - \lambda I$. Tada je $Ay_m - Ay_n = \lambda_m y_m - \tilde{x}$, gdje je $\tilde{x} = \lambda_n y_n + T_{\lambda_n} y_n - T_{\lambda_m} y_m$. Primjetimo da je

$$T_{\lambda_m} y_m = Ay_m - \lambda_m y_m = A\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right) - \lambda_m \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_m) c_i x_i.$$

Dakle $T_{\lambda_m} y_m \in \mathfrak{L}_{m-1}$. Kako je $y_n \in \mathfrak{L}_n \subset \mathfrak{L}_{m-1}$, $T_{\lambda_n} y_n \in \mathfrak{L}_{n-1} \subset \mathfrak{L}_{m-1}$, to je $\tilde{x} \in \mathfrak{L}_{m-1}$. Stavljajući $\tilde{x} = \lambda_m \tilde{y}$ i $\tilde{y} \in \mathfrak{L}_{m-1}$ dobijamo

$$\|Ay_m - Ay_n\| = |\lambda_m| \, \|y_m - \tilde{y}\| \geq |\lambda_m| \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{\alpha}{2},$$

pa dakle ni jedan podniz niza $(Ay_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne konvergira, što je nemoguće s obzirom da je A kompaktan operator i $\|y_n\| = 1$ za $n = 1, 2, \ldots$. □

Definicija 6.2. *Operator A sa H u G je linearno preslikavanje A definisano na linearnom potprostoru $\mathcal{D}(A)$ od H čije su vrijednosti u G. $\mathcal{D}(A)$ je domen operatora A, a $\mathcal{R}(A) := \{Ax : x \in \mathcal{D}(A)\}$ je slika operatora A.*
Linearan potprostor $\mathcal{G}(A) := \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$ od $H \times G$ nazivamo grafik od A.
Operator A sa H u G je zatvoren, ako je $\mathcal{G}(A)$ zatvoren u $H \times G$.

Definicija 6.3. *Neka je A operator u H. Skup*

$$\rho(A) := \{z \in \mathbb{C} : (zI - A) \text{ je injektivan i } \mathcal{R}(zI - A) = H\}$$

je rezolventni skup od A, a $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ je spektar od A.

Propozicija 6.1. (*i*) *$\sigma(A)$ je zatvoren za svaki zatvoren operator A u H.*

(*ii*) *Ako je A zatvoren operator u H tako da je $\sigma(A) = \emptyset$, onda je $A^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ i $\sigma(A^{-1}) = \{0\}$.*

Dokaz: (*i*) Dokažimo da je $\rho(A)$ otvoren. Neka je $z_0 \in \rho(A)$ fiksirano. Onda je $z_0 I - A$ injektivan operator i $\mathcal{D}(z_0 I - A) = \mathcal{D}(A)$. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{D}(z_0 I - A) = \mathcal{D}(A)$, tako da $x_n \to x$ i $(z_0 I - A)x_n \to y$. Kako je $z_0 I$ neprekidno preslikavanje $(-Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((z_0 I - A)x_n - z_0 x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $y - z_0 x$. S obzirom da je A zatvoren, $x \in \mathcal{D}(A)$ i $-Ax = y - z_0 x$, tj. $(z_0 I - A)x = y$. Dakle, $z_0 I - A$ je zatvoren. Onda je i $(z_0 I - A)^{-1}$ zatvoren i kako $z_0 \in \rho(A)$, $\mathcal{D}((z_0 I - A)^{-1}) = \mathcal{R}(z_0 I - A) = H$. Na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku $(z_0 I - A)^{-1}$ je neprekidan pa $(z_0 I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Neka je $z \in \mathbb{C}$ tako da je $|z - z_0| < \|(z_0 I - A)^{-1}\|^{-1}$. Kako je $\|(z - z_0)(z_0 I - A)^{-1}\| < 1$ operator $I + (z - z_0)(z_0 I - A)^{-1}$ je invertibilan pa je $zI - A$ "1-1" i "na", jer je $zI - A = ((z - z_0)(z_0 I - A)^{-1} + I)(z_0 I - A)$.
(*ii*) Kako je $\sigma(A) = \emptyset$, uzimajući da je $z_0 = 0$ imamo iz dokaza pod (*i*) da $A^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Na osnovu leme 4.2. $\sigma(A^{-1}) \neq \emptyset$. Dovoljno je da dokažemo da je $\sigma(A^{-1}) \subset \{0\}$. Neka je $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ fiksirano. Ako $x \in N(zI - A^{-1})$, onda je $0 = (zI - A^{-1})x = -z\left(\frac{1}{z}I - A\right)A^{-1}x$. Kako je $\mathcal{R}(A^{-1}) \subset \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}\left(\frac{1}{z}I - A\right)$, $A^{-1}x \in N\left(\frac{1}{z}I - A\right)$. Kako je $\sigma(A) = \emptyset$, $x = 0$, pa je $zI - A^{-1}$ "1-1".
Neka je $y \in H$ proizvoljno. Kako je $\frac{1}{z}I - A$ "na", postoji $\xi \in \mathcal{D}\left(\frac{1}{z}I - A\right) = \mathcal{D}(A)$ tako da je $\left(\frac{1}{z}I - A\right)\xi = -\frac{y}{z}$. Definišimo $x = A\xi$. Onda je

$$(zI - A^{-1})x = -z\left(\frac{1}{z}I - A\right)A^{-1}A\xi = -z\left(\frac{1}{z}I - A\right)\xi = y,$$

pa je $zI - A^{-1}$ "na". Tada je $zI - A^{-1}$ izomorfizam na H i $\sigma(A^{-1}) \subset \{0\}$. $\square$

7 Kompaktni operatori na Hilbert-ovim prostorima

Za razliku od opšte situacije u Banach-ovom prostoru, kompaktni operatori u Hilbert-ovom prostoru mogu se mnogo detaljnije opisati.

Lema 7.1. *Neka je $A \in \mathcal{B}(H)$ kompaktan i samoadjungovan operator. Onda je $\|A\|$ ili $-\|A\|$ sopstvena vrijednost operatora A.*

Dokaz: Neka je $\|A\| > 0$. Kako je A samoadjungovan operator možemo pretpostaviti da je

$$\|A\| = \sup\{< Ax, x >: \|x\| = 1\},$$

s obzirom da u drugom slučaju možemo posmatrati $-A$. Onda postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u H tako da je

$$\|A\| = \lim_{n\to\infty} < Ax_n, x_n > \ \text{ i } \ \|x_n\| = 1 \text{ za svako } \ n \in \mathbb{N}.$$

Kako je A kompaktan možemo izabrati niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira. Onda je $(Ax_n - \|A\|x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nula niz jer važi

$$\begin{aligned} \|Ax_n - \|A\|x_n\|^2 &= \|Ax_n\|^2 - 2\|A\| < Ax_n, x_n > +\|A\|^2\|x_n\|^2 \\ &\leq 2\|A\|^2 - 2\|A\| < Ax_n, x_n > . \end{aligned}$$

Prema tome postoji $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, i

$$Ax_0 = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} \|A\|x_n = \|A\|x_0.$$

$x_0 \neq 0$, jer je $< Ax_0, x_0 >= \|A\| > 0$. Prema tome $\|A\|$ je sopstvena vrijednost operatora A. □

Propozicija 7.1. *Neka je $A \in \mathcal{B}(H)$ kompaktan i samoadjungovan operator. Onda postoji ortonormiran niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u H i niz realnih brojeva λ_n takvi da je:*

(i) *$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ opadajući nula niz*

(ii) $Ae_n = \lambda_n e_n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$

(iii) $Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n, \ \ (x \in H).$

Dokaz: Na osnovu leme 7.1. postoje jedinični vektor $e_0 \in H$ i realan broj λ_0, $|\lambda_0| = \|A\|$ takvi da je $Ae_0 = \lambda_0 e_0$. Stavimo $H_0 = H$ i $H_1 = \{x \in H :< x, e_0 >= 0\}$. Potprostor H_1 je invarijantan za A jer

$$< x, e_0 >= 0 \Rightarrow < Ax, e_0 >=< x, Ae_0 >=< x, \lambda_0 e_0 >= \lambda_0 < x, e_0 >= 0;$$

dakle $x \in H_1 \Rightarrow Ax \in H_1$. Sa A_1 označimo operator kojeg $A_0 = A$ inducira na H_1. A_1 je kompaktan i samoadjungovan na H_1. Ako je $A_1 \neq 0$ onda prema lemi 7.1. postoje jedinični vektor $e_1 \in H_1$ i realan broj λ_1 takvi da je $A_1 e_1 = \lambda_1 e_1$, gdje je

$$\begin{aligned} |\lambda_1| = \|A_1\| &= \sup\{\, | < A_1 x, x > | : \|x\| = 1, x \in H_1\} \\ &= \sup\{\, | < Ax, x > | : \|x\| = 1, x \in H_1\} \\ &\leq \sup\{\, | < Ax, x > | : \|x\| = 1, x \in H\} = \|A\| = |\lambda_0|. \end{aligned}$$

Dakle $|\lambda_0| \geq |\lambda_1|, < e_1, e_0 >= 0$ i $Ae_1 = A_1 e_1 = \lambda_1 e_1$. Neka je $H_2 = (Lin_{0 \leq n \leq 1} e_n)^{\perp}$. H_2 je invarijantan potprostor u odnosu na operator A, a operator A_2, induciran na H_2 operatorom A je samoadjungovan i kompaktan. Ako je $A_2 \neq 0$, onda prema lemi 7.1. postoje jedinični vektor $e_2 \in H_2$ i realan broj λ_2 takvi da je $A_2 e_2 = \lambda_2 e_2$ i

$$\begin{aligned} |\lambda_2| = \|A_2\| &= \sup\{\, | < A_2 x, x > | : \|x\| = 1, x \in H_2\} \\ &= \sup\{\, | < A_1 x, x > | : \|x\| = 1, x \in H_2\} \\ &\leq \sup\{\, | < A_1 x, x > | : \|x\| = 1, x \in H_1\} = \|A_1\| = |\lambda_1|. \end{aligned}$$

Dakle $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2|, Ae_2 = A_2 e_2 = \lambda_2 e_2$ i e_0, e_1, e_2 su ortonormirani. Nastavimo ovaj proces. Dolazimo do opadajućeg niza $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i ortonormiranog niza $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ za koje vrijedi $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Kako je $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton postoji $a = \lim_{n \to \infty} |\lambda_n|$. Kada bi bilo $a > 0$, onda bi niz $\left(\frac{e_n}{\lambda_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bio ograničen. Budući da je $e_n = A\left(\frac{e_n}{\lambda_n}\right)$ i $\left\|\frac{e_n}{\lambda_n}\right\| \leq \frac{1}{a}$ to bi zbog kompaktnosti operatora A niz $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ imamo konvergentan podniz. To je nemoguće. Dakle $a = 0$.

Za $x \in H$ vektor $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} < x, e_n > e_n$ je ortogonalna projekcija od x na $Lin_{0 \leq n \leq k} e_n$ pa vektor

$$y_k = x - \sum_{n=0}^{k} < x, e_n > e_n$$

pripada prostoru H_k, pa je

$$\|Ay_k\| = \|A_k y_k\| \leq |\lambda_k| \, \|y_k\| \leq |\lambda_k| \, \|x\|$$

te je $\lim_{k\to\infty} \|Ay_k\| = 0$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \left\| Ax - \sum_{n=0}^{k} \lambda_n < x, e_n > e_n \right\| = 0;$$

dakle vrijedi (*iii*). □

Propozicija 7.2. *Za $A \in \mathcal{K}(H, G)$ postoje: opadajući nula niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in [0, \infty)$ i ortonormirani sistemi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u H i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u G, tako da je*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} s_n < \cdot, e_n > f_n,$$

gdje red konvergira u normi operatora.

Dokaz: A^*A je kompaktan i samoadjungovan operator. Za $\lambda \in \sigma(A^*A)\backslash\{0\}$ i $x \in N(\lambda I - A^*A)$ tako da je $\|x\| = 1$, važi

$$\lambda =< \lambda x, x >=< A^*Ax, x >=< Ax, Ax >\geq 0.$$

Kako je $\mathcal{B}(H)$ Banach-ova algebra, $\sigma(A^*A) \subset [0, \|A\|^2]$. Na osnovu propozicije 7.1. postoje opadajući nula niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i ortonormiran sistem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u H tako da je

$$A^*A = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 < \cdot, e_n > e_n. \tag{1}$$

Za $n \in \mathbb{N}_0$ tako da je $s_n > 0$, definišemo $f_n := s_n^{-1}Ae_n$. Onda je za $n, m \in \mathbb{N}_0, s_n > 0, s_m > 0$:

$$< f_n, f_m >= \frac{1}{s_n}\frac{1}{s_m} < Ae_n, Ae_m >= \frac{1}{s_n s_m} < A^*Ae_n, e_m >= \frac{s_n^2}{s_n s_m} < e_n, e_m >= \delta_{n,m}.$$

Ako je $N = \{n \in \mathbb{N}_0 : s_n > 0\}$ konačan skup, onda produžujemo ortonormiran sistem $(f_n)_{n\in N}$ u ortonormiran sistem $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u G. Za $y \in H$ tako da je $y \perp e_n$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$, imamo, na osnovu (1),

$$\|Ay\|^2 =< Ay, Ay >=< A^*Ay, y >= 0.$$

Za svako $x \in H$ vrijedi

$$\begin{aligned} Ax &= A\left(x - \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n\right) + A\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > Ae_n = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} s_n < x, e_n > f_n. \end{aligned}$$

Kao i u dokazu propozicije 7.1., analogno dobijamo da red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n < \cdot, e_n > f_n$ konvergira ka A u normi operatora. □

Definicija 7.1. *Ako $A \in \mathcal{K}(H,G)$, onda reprezentaciju operatora A koja ima osobine date u propoziciji 7.2. nazivamo Schmidt[17]-ova reprezentacija operatora A.*

Definicija 7.2. *Ako je $A = \sum_{n=0}^{\infty} s_n < \cdot, e_n > f_n$ je Schmidt-ova reprezentacija operatora $A \in \mathcal{K}(H,G)$, onda ortonormirani sistemi $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nisu jedinstveno određeni.*
Međutim, niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je jedinstveno određen operatorom A, jer je $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monotono opadajući niz sopstvenih vrijednosti operatora $A^*A = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 < \cdot, e_n > e_n$.
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nazivamo niz singularnih brojeva kompaktnog operatora A i zapisujemo $(s_n(A))_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Definicija 7.3. *Ako su H i G Hilbert-ovi prostori, tada za $1 \leq p < \infty$ definišemo Schatten[18]-ovu p klasu sa*

$$S_p(H,G) := \{A \in K(H,G) : (s_n(A))_{n\in\mathbb{N}_0} \in l_p\}$$

i $v_p(A) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)^p\right)^{\frac{1}{p}}$. *Elemente od $S_2(H,G)$ respektivno $S_1(H,G)$ nazivamo Hilbert-Schmidt-ovim operatorima respektivno nuklearnim operatorima.*

Definicija 7.4. *Za $A \in S_1(H)$ definišemo trag od A sa*

$$trag(A) := \sum_{i\in I} < Ae_i, e_i >,$$

gdje je $(e_i)_{i\in I}$ ortonormirana baza u H.

Lema 7.2. *Neka su E, F, G i H Hilbert-ovi prostori. Za $1 \leq p < \infty$ važi:*
1. $S_p(H,G)$ je linearan potprostor od $\mathcal{K}(H,G)$
2. Ako $A \in S_p(H,G)$, $T \in \mathcal{B}(E,H)$ i $S \in \mathcal{B}(G,F)$ onda $SAT \in S_p(E,F)$.

Dokaz:
1. Za svaki $A \in \mathcal{K}(H,G)$ $(s_n(A))_{n\in\mathbb{N}_0}$ je opadajući niz i $s_0(A) = \|A\|$.
Dokažimo da je za svako $A \in \mathcal{K}(H,G)$ i sve $n \in \mathbb{N}_0$

$$s_n(A) = \inf\{\|A - B\| : B \in \mathcal{B}(H,G), \dim R(B) \leq n\} := \alpha_n(A).$$

Za svako $n \in \mathbb{N}_0$ i $x \in H$

$$\left\| Ax - \sum_{j=0}^{n-1} s_j < x, e_j > f_j \right\|^2 \leq \sum_{j=n}^{\infty} s_j^2 | < x, e_j > |^2 \leq s_n^2 \|x\|.$$

[17]Erhard Scmidth (1876-1959)
[18]Robert Schatten (1911-1977)

Prema tome $\alpha_n(A) \leq s_n$.
Neka je dato $B \in \mathcal{B}(H,G), \dim R(B) \leq n$. Onda je $N\left(B_{|Lin\{e_0,\ldots,e_n\}}\right) \neq \{0\}$, pa postoji $y = \sum_{j=0}^{n} \xi_j e_j$, $\|y\| = 1$ i $By = 0$. Na osnovu Pitagorine[19] teoreme je

$$\|A - B\|^2 \geq \|(A-B)y\|^2 = \|Ay\|^2 = \left\| \sum_{j=0}^{n} s_j \xi_j f_j \right\|^2 = \sum_{j=0}^{n} s_j^2 |\xi_j|^2 \geq s_n^2.$$

Za $A, B \in \mathcal{K}(H,G)$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, postoje $A_0, B_0 \in \mathcal{B}(H,G)$ tako da je $\dim R(A_0) \leq m$, $\dim R(B_0) \leq n$ i da vrijedi

$$\|A - A_0\| \leq s_m(A) + \frac{\epsilon}{2} \text{ i } \ \|B - B_0\| \leq s_n(B) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Kako je $\dim R(A_0 + B_0) \leq m + n$, onda je
$s_{m+n}(A+B) \leq \|A+B-(A_0+B_0)\| \leq s_m(A)+s_n(B)+\epsilon$. Kako je $\epsilon > 0$ proizvoljno malo

$$s_{m+n}(A+B) \leq s_m(A) + s_n(B) \quad \text{za sve } \ m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Dalje je,

$$s_{2n+1}(A+B) \leq s_{2n}(A+B) \leq s_n(A) + s_n(B).$$

Odatle slijedi da $(s_n(A+B))_{n\in\mathbb{N}_0} \in l_p$, tj. $A + B \in S_p(H,G)$.
Za $A \in S_p(H,G)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(s_n(\lambda A))_{n\in\mathbb{N}_0} = (|\lambda| s_n(A))_{n\in\mathbb{N}_0},$$

pa $\lambda A \in S_p(H,G)$.
2. Za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\epsilon > 0$ izaberimo $A_0 \in \mathcal{B}(H,G)$, $\dim R(A_0) \leq n$ i $\|A - A_0\| \leq s_n(A) + \epsilon$. Onda je, s obzirom da je $\dim R(SA_0T) \leq n$

$$s_n(SAT) \leq \|SAT - SA_0T\| \leq \|S\| \, \|A - A_0\| \, \|T\| \leq \|S\|(s_n(A) + \epsilon)\|T\|.$$

Dakle, $(s_n(SAT))_{n\in\mathbb{N}_0} \in l_p$, tj. $SAT \in S_p(E,F)$. □

Lema 7.3. *Neka je $A \in \mathcal{B}(H)$ kompaktan operator, $(\lambda_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ niz sopstvenih vrijednosti operatora A i $N = \{j \in \mathbb{N}_0 : \lambda_j(A) \neq 0\}$. Onda postoji ortonormirana dekompozicija $H = H_0 \oplus H_1$ od H i ortonormirana baza $(e_j)_{j\in N}$ od H_0 tako da za ortogonalnu projekciju P_j od H na H_j i $A_{j,k} := P_j A P_k$, $j, k = 0, 1$, važi:*

(*i*) *$A_{1,0} = 0$, tj. $AH_0 \subset H_0$.*

(*ii*) *$A_{0,0}|_{H_0} = A|_{H_0} \in \mathcal{B}(H_0)$ ima, u odnosu na odgovarajuće $(e_j)_{j\in N}$, gornju trougaonu matricu tako da je $< Ae_j, e_j >= \lambda_j(A)$ za svako $j \in N$.*

(*iii*) *$\sigma(A_{1,1}) = \{0\}$.*[20]

[19] Pythagoras (570 p.n.e-495 p.n.e)
[20] Dokaz se može naći u [7]

Notacija: Pod pretpostavkama iz leme 7.3. $H = H_0 \oplus H_1$ nazivamo Schur[21]-ovom dekompozicijom od H, a $(e_j)_{j\in N}$ Schur-ovom bazom za niz sopstvenih vrijednosti $(\lambda_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ kompaktnog operatora A.

Primjenom leme 7.3. dobićemo vezu između nizova $(\lambda_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ i $(s_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ kompaktnog operatora A.

Weyl[22]-ijeva nejednakost *Za svaki $A \in \mathcal{K}(H)$ važi*

$$\prod_{j=0}^{n} |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=0}^{n} s_j(A) \quad \text{za svako } \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz: Koristimo Schur-ovu dekompoziciju i posmatramo Schur-ovu bazu $(e_j)_{j\in N}$ za dati niz sopstvenih vrijednosti $(\lambda_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ i za $n \in N$ definišimo

$$P_n x = \sum_{k=0}^{n} < x, e_k > e_k.$$

Onda je P_n ortogonalna projekcija od H na $E_n := Lin\{e_j : 0 \leq j \leq n\}$. Kako je matrica od $A|_{H_0}$, koja odgovara $(e_j)_{j\in N}$, gornje trougaona, imamo da je $a_{j,k} =< Ae_k, e_j >= 0$ za $j > k$ i otuda je $AE_n \subset E_n$. Za $A_n := A|_{E_n}$, imamo da je

$$s_j(A_n) = s_j(P_n A P_n) \leq s_j(A) \quad \text{za } \; 0 \leq j \leq n.$$

Na osnovu leme 7.3 (*ii*) i definicije singularnih brojeva, onda dobijamo:

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n} |\lambda_j(A)| &= \prod_{j=0}^{n} |a_{j,j}| = |\det A_n| = (\det A_n^* A_n)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n} s_j(A_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \prod_{j=0}^{n} s_j(A) \end{aligned}$$

za svako $n \in N$. Ako je N konačan onda ovo važi trivijalno za sve ostale $n \in \mathbb{N}_0$. □

Dokazaćemo sljedeću pomoćnu lemu da dobijemo još jednu nejednakost između $(\lambda_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ i $(s_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ kompaktnog operatora A.

Lema 7.4. *Za $(x_j)_{j=0}^m = x$ i $(y_j)_{j=0}^m = y$ iz $\mathbb{R}_+^{m+1}$ neka je $x_0 \geq \ldots \geq x_m$, $y_0 \geq \ldots \geq y_m$ i $\sum_{j=0}^n x_j \leq \sum_{j=0}^n y_j$ za $0 \leq n \leq m$. Dalje, neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija takva da je $\varphi(t) \leq \varphi(|t|)$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Onda je*

$$\sum_{j=0}^{m} \varphi(x_j) \leq \sum_{j=0}^{m} \varphi(y_j).$$

[21]Issai Schur (1875-1941)

[22]Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955)

Dokaz: Neka je B konveksna ljuska sljedećeg podskupa od $\mathbb{R}^{m+1}$:

$$\{(\varepsilon_j y_{\pi(j)})_{j=0}^m : \varepsilon_j = \pm 1 \text{ za } 0 \le j \le m, \pi \text{ je permutacija od } \{0, \ldots, m\}\}.$$

Ako pretpostavimo da $x = (x_j)_{j=0}^m$ ne pripada B, onda postoji linearno preslikavanje na $\mathbb{R}^{m+1}$ tako da je $z(x) > 1$ i $z(\xi) \le 1$ za sve $\xi \in B$. Kako je B invarijantan u odnosu na zamjenu znaka i razmjenu koordinata, možemo pretpostaviti da je $z_0 \ge \ldots \ge z_m \ge 0$, tako da je

$$z(\xi) = \sum_{j=0}^m z_j \xi_j \quad \text{za sve } \xi \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Sada dobijamo, na osnovu pretpostavke, sljedeću kontradikciju:

$$\begin{aligned} 1 < z(x) &= \sum_{j=0}^m z_j x_j = \sum_{k=0}^{m-1} (z_k - z_{k+1}) \sum_{j=0}^k x_j + z_m \sum_{j=0}^m x_j \\ &\le \sum_{k=0}^{m-1} (z_k - z_{k+1}) \sum_{j=0}^k y_j + z_m \sum_{j=0}^m y_j = \sum_{j=0}^m z_j y_j = z(y) \le 1. \end{aligned}$$

Prema tome $x \in B$, tj. postoji $M \in \mathbb{N}, \lambda \in [0,1]^M$ tako da je $\sum_{\mu=1}^M \lambda_\mu = 1$ i $\xi^{(\mu)} \in B$, $\xi^{(\mu)} = (\varepsilon_j^{(\mu)} y_{\pi_\mu(j)})_{j=0}^m, 1 \le \mu \le M$, tako da je $x = \sum_{\mu=1}^M \lambda_\mu \xi^{(\mu)}$. Na osnovu osobina od φ imamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \varphi(x_j) &= \sum_{j=0}^m \varphi\left(\sum_{\mu=1}^M \lambda_\mu \varepsilon_j^{(\mu)} y_{\pi_\mu(j)} \right) \le \sum_{j=0}^m \sum_{\mu=1}^M \lambda_\mu \varphi(\varepsilon_j^{(\mu)} y_{\pi_\mu(j)}) \\ &\le \sum_{\mu=1}^M \lambda_\mu \sum_{j=0}^m \varphi(y_{\pi_\mu(j)}) = \sum_{\mu=1}^M \lambda_\mu \sum_{j=0}^m \varphi(y_j) = \sum_{j=0}^m \varphi(y_j). \end{aligned}$$

□

Propozicija 7.3. *Za svaki $A \in \mathcal{K}(H)$ i svako $p \in (0, \infty)$*

$$\sum_{j=0}^n |\lambda_j(A)|^p \le \sum_{j=0}^n s_j(A)^p.$$

Dokaz: Ako je $\lambda_n(A) \ne 0$, onda je i, na osnovu Weyl-ijeve nejednakosti, $s_n(A) \ne 0$. Prema tome, možemo pretpostaviti b.o.o. da je $\lambda_n(A) \ge 1$ i $s_n(A) \ge 1$. Ako stavimo da je $x_j := p \ln |\lambda_j(A)|$ i $y_j := p \ln s_j(A)$ za $0 \le j \le n$ i

$\varphi(t) = e^t$ za svako $t \in \mathbb{R}$, onda vrijedi $x_0 \geq \ldots \geq x_n$, $y_0 \geq \ldots \geq y_n$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} x_j = p \sum_{j=0}^{n} \ln |\lambda_j(A)| = p \ln \prod_{j=0}^{n} |\lambda_j(A)| \\ \leq^{Weyl-ijeva\ nejednakost} p \ln \prod_{j=0}^{n} s_j(A) = p \sum_{j=0}^{n} \ln s_j(A) = \sum_{j=0}^{n} y_j,\end{aligned}$$

pa je

$$\sum_{j=0}^{n} |\lambda_j(A)|^p = \sum_{j=0}^{n} e^{x_j} \leq^{lema\ 7.4.} \sum_{j=0}^{n} e^{y_j} = \sum_{j=0}^{n} s_j(A)^p.$$

Indukcijom iz ovoga slijedi tvrđenje. □

Korolar 7.1. *Za $p \in [1, \infty)$, $(S_p(H), v_p)$ je Banach-ov prostor.*

Dokaz: Da pokažemo da je v_p norma na $S_p(H)$, moramo jos pokazati nejednakost trougla. Neka su $A, B \in S_p(H)$, i neka je

$$A + B = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(A + B) < \cdot, e_j > f_j$$

Schmidt-ova reprezentacija operatora $A + B$ i neka je $n \in \mathbb{N}_0$ dato. Dalje, neka je $U_n := \sum_{k=0}^{n} < \cdot, e_k > f_k$, i otuda $U_n^* = \sum_{k=0}^{n} < \cdot, f_k > e_k$. Podsjetimo se Lidskii[23]-jevog teorema koji glasi: Ako je $A \in S_1(H)$ i ako je $(\lambda_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0}$ niz sopstvenih vrijednosti od A, onda je $(\lambda_j(A))_{j\in\mathbb{N}_0} \in l_1$ i

$$trag(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(A).$$

Dokaz te teoreme može se naći u [7].
Sada na osnovu te teoreme i propozicije 7.3. važi:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} s_j(A + B) &= \sum_{j=0}^{\infty} s_j(A + B) < U_n^* f_j, e_j >= trag(U_n^*(A + B)) \\ &= |trag(U_n^* A) + trag(U_n^* B)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} (|\lambda_j(U_n^* A)| + |\lambda_j(U_n^* B)|) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (s_j(U_n^* A) + s_j(U_n^* B)) \leq \sum_{j=0}^{n} \|U_n^*\| (s_j(A) + s_j(B)) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} (s_j(A) + s_j(B)).\end{aligned}$$

[23]Victor Borisovich Lidskii (1924-2008)

Kako ove nejednakosti važe za svako $n \in \mathbb{N}_0$, dobijamo, na osnovu leme 7.4. uzimajući da je $\varphi(t) = |t|^p$

$$\sum_{j=0}^{n} s_j(A+B)^p \leq \sum_{j=0}^{n} (s_j(A) + s_j(B))^p \text{ za svako } n \in \mathbb{N}_0.$$

Znači, $v_p(A+B) \leq v_p(A) + v_p(B)$.
Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchy-jev niz u $(S_p(H), v_p)$. Onda je, za svako $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|A_n - A_m\| = s_0(A_n - A_m) \leq v_p(A_n - A_m).$$

Kako je niz operatora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jev u ν_p-normi on je Cauchy-jev i u uniformnoj normi pa konvergira ka kompaktnom operatoru A. S obzirom da je

$$\sum_j s_j(A_n - A_m)^p \leq \epsilon^p,$$

kada pustimo da $m \to \infty$, dobijamo da je

$$\sum_j s_j(A_n - A)^p \leq \epsilon^p.$$

Iz dokaza leme 7.2. vidimo da važi nejednakost

$$s_{m+n}(A+B) \leq s_m(A) + s_n(B) \text{ za sve } m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Prema tome, važi

$$\begin{aligned} s_{2j}(A) &\leq s_j(A - A_n) + s_j(A_n) \\ s_{2j+1}(A) &\leq s_{j+1}(A - A_n) + s_j(A_n) \\ s_{2j+2}(A) &\leq s_{j+1}(A - A_n) + s_{j+1}(A_n) \end{aligned}$$

Dakle $(s_j(A))_j \in l_p$. □

Korolar 7.2. *Neka je H beskonačno dimenzionalan Hilbert-ov prostor i neka $p \in [1, \infty)$. Onda je $S_p(H) \times \mathbb{C}$ je Banach-ova algebra.*

Dokaz: $\mathcal{A} = S_p(H) \times \mathbb{C}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ kada se operacije sabiranja i množenja skalarom definišu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (A, \alpha) + (B, \beta) &= (A + B, \alpha + \beta) \\ \lambda(A, \alpha) &= (\lambda A, \alpha). \end{aligned}$$

Definišimo množenje $\cdot : (S_p(H) \times \mathbb{C}) \times (S_p(H) \times \mathbb{C}) \to S_p(H) \times \mathbb{C}$ sa

$$(A, \alpha)(B, \beta) = (AB + \beta A + \alpha B, \alpha\beta).$$

Jedinični element je $(O, 1)$ i važi

$$\lambda[(A, \alpha)(B, \beta)] = [\lambda(A, \alpha)](B, \beta) = (A, \alpha)[\lambda(B, \beta)].$$

Dakle, $\mathcal{A} = S_p(H) \times \mathbb{C}$ je $\mathbb{C}-$ algebra.

$$\bar{v}_p((A, \alpha)) = v_p(A) + |\alpha|$$

je norma na $S_p(H) \times \mathbb{C}$ i važi:

$$\begin{array}{rcl} \bar{v}_p((A, \alpha)(B, \beta)) & = & \bar{v}_p((AB + \beta A + \alpha B, \alpha\beta)) \\ & = & v_p(AB + \beta A + \alpha B) + |\alpha\beta| \\ & \leq & v_p(A)v_p(B) + |\beta|v_p(A) + |\alpha|v_p(B) + |\alpha|\,|\beta| \\ & = & (v_p(A) + |\alpha|)(v_p(B) + |\beta|) \\ & = & \bar{v}_p((A, \alpha)) \cdot \bar{v}_p((B, \beta)) \end{array}$$

$$\bar{v}_p((O, 1)) = 1.$$

S obzirom da su $(S_p(H), v_p)$ i $(\mathbb{C}, |\,|)$ Banach-ovi prostori, $S_p(H) \times \mathbb{C}$ je Banach-ova algebra. □

Ako je $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u L_2, onda za svako $f \in L_2$ imamo

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} < f, \varphi_i > \varphi_i, \ \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | < f, \varphi_i > |^2$$

Ako je H bilo koji separabilan Hilbertov prostor, $\dim H = \infty$, i ako je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u H, onda je sa

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} < x, e_n > \varphi_n \quad (x \in H)$$

dan izometrički izomorfizam prostora H na prostor L_2. Za takav izomorfizam kažemo da je reprezentacija prostora H pomoću prostora L_2. Za $A \in \mathcal{B}(H)$ sa $\hat{A} = \varphi \circ A \circ \varphi^{-1}$ definiran je ograničen operator na L_2, reprezentacija operatora A. Očigledno je $\|\hat{A}\| = \|A\|$, pa je reprezentacija $A \mapsto \hat{A}$ izometrički izomorfizam Banachove algebre $\mathcal{B}(H)$ na Banach-ovu algebru $\mathcal{B}(L_2)$.

8 $\mathbb{C}^\star-$ algebre

8.1 Definicije i osnovna tvrđenja

Definicija 8.1. *Algebra $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ je involutivna ako je definisano preslikavanje $a \mapsto a^*$ sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}$ sa osobinom da, za svako $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo:*

$$\begin{aligned}(a+b)^* &= a^* + b^*,\\ (ab)^* &= b^* a^*,\\ (\lambda a)^* &= \bar{\lambda} a^*,\\ a^{**} &= a.\end{aligned}$$

Definicija 8.2. *Involutivna Banach-ova algebra $\mathcal{A}$ je $\mathbb{C}^\star-$ algebra ako je*

$$||aa^*|| = ||a||^2 \quad \text{za svako } a \in \mathcal{A}.$$

Napomena 8.1. Ako je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra, onda važi
1. $||a^*|| = ||a||$ za svako $a \in \mathcal{A}$. Zaista, iz $||a||^2 = ||a^*a|| \leq ||a^*||\,||a||$, slijedi da je $||a|| \leq ||a^*||$. Zamjenom a sa a^*, dobijamo da je $||a^*|| \leq ||a||$.
2. Uočimo i da je $e^* = e$, jer je $e^* = ee^* = (e^*)^*e^* = (ee^*)^* = (e^*)^* = e$.

Definicija 8.3. *Algebarski homomorfizam $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ između dvije $\mathbb{C}^\star-$ algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je $*-$ homomorfizam ako je $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ za svako $a \in \mathcal{A}$.*

Primjeri:
1. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sa $* : \lambda \mapsto \bar{\lambda}$ je $\mathbb{C}^\star-$ algebra.

2. Ako je $X \neq \emptyset$, $l_\infty(X)$ je je $\mathbb{C}^\star-$ algebra, ako f^* definišemo sa $f^* : x \mapsto \overline{f(x)}$.

3. Ako je $H \neq \{0\}$ kompleksan Hilbertov prostor, onda je $\mathcal{B}(H)$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra.
Dokaz: Postoji operator A^* takav da je

$$< Ax, y >=< x, A^*y > \quad \text{za sve } x, y \in H.$$

Za fiksirano $y \in H$, $x \mapsto < Ax, y >$ je linearan ograničen funkcional na H. Na osnovu Riesz-Fréchet[24]-ove leme postoji $z \in H$ tako da je $< Ax, y >=< x, z >$ za svako $x \in H$. Stavimo $A^*y = z$.
$< x, A^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) >=< Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 >= \overline{\alpha_1} < Ax, y_1 > + \overline{\alpha_2} < Ax, y_2 >= \overline{\alpha_1} < x, A^*y_1 > + \overline{\alpha_2} < x, A^*y_2 >=< x, \alpha_1 A^*y_1 + \alpha_2 A^*y_2 >$.
$< x, (A \circ B)^*y >=< (A \circ B)x, y >=< Bx, A^*y >=< x, (B^* \circ A^*)y >$.
$< y, (A^*)^*x >=< A^*y, x >= \overline{< x, A^*y >} = \overline{< Ax, y >} =< y, Ax >$.
$||A^*y||^2 =< A^*y, A^*y >=< y, AA^*y > \leq ||y|| \cdot ||AA^*y|| \leq ||y|| \cdot ||A|| \cdot ||A^*y||$,

[24]René Maurice Fréchet (1878-1973)

odakle slijedi da je $\|A^*y\| \leq \|A\|\,\|y\|$, a odatle $\|A^*\| \leq \|A\|$. Obrnuta nejednakost slijedi zbog $A^{**} = A$.
$\|A\|^2 = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|^2 = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} < Ax, Ax >= \sup\limits_{\|x\|\leq 1} < x, A^*Ax > \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2$. □

4. $\mathcal{K}(H),\ \dim H < \infty$ je $\mathbb{C}^\star$ algebra.

5. **Calkin:** $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ je $\mathbb{C}^\star-$ algebra.

6. Neka je X lokalno kompaktan, $\sigma-$ kompaktan topološki prostor. Neka je

$$\mathcal{M}_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ je Borel[25] mjerljiva i ograničena}\}$$

i definišimo $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$ za $f \in \mathcal{M}_\infty(X)$. Dalje, definišimo preslikavanje $* : \mathcal{M}_\infty(X) \to \mathcal{M}_\infty(X)$ sa $* : f \to \bar{f}$. Onda je $\mathcal{M}_\infty(X)$ komutativna $\mathbb{C}^\star-$ algebra.

7. Neka je H Hilbertov prostor $\dim H = \infty$. Onda je

$$\mathcal{A} = \{A + \alpha I : A \in \mathcal{K}(H),\ \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$\mathbb{C}^\star-$ algebra.
Dokaz: $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)\times\mathbb{C}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ kada se operacije sabiranja i množenja skalarom definišu na sljedeći način:

$$\begin{aligned}(A,\alpha) + (B,\beta) &= (A + B, \alpha + \beta)\\ \lambda(A,\alpha) &= (\lambda A, \alpha).\end{aligned}$$

Definišimo množenje $\cdot : (\mathcal{K}(H) \times \mathbb{C}) \times (\mathcal{K}(H) \times \mathbb{C}) \to \mathcal{K}(H) \times \mathbb{C}$ sa

$$(A,\alpha)(B,\beta) = (AB + \beta A + \alpha B, \alpha\beta).$$

Jedinični element je $(O, 1)$ i važi

$$\lambda[(A,\alpha)(B,\beta)] = [\lambda(A,\alpha)](B,\beta) = (A,\alpha)[\lambda(B,\beta)].$$

Dakle, $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H) \times \mathbb{C}$ je $\mathbb{C}-$ algebra.

$$|||A + \alpha I||| = \sup\{\,\|AK + \alpha K\| : K \in \mathcal{K}(H), \|K\| \leq 1\}$$

je norma na $\mathcal{A}$.
Neka je x jedinični vektor u H i neka je $P : H \to H$ jednodimenzionalna

[25] Émile Borel (1871-1956)

ortogonalna projekcija u $\mathcal{B}(H)$ tako da je $P(x) = x$. Onda je $P \in \mathcal{K}(H)$ i $\|P\| = 1$ tako da je

$$\begin{aligned}\|(A+\alpha I)x\| = \|Ax + \alpha x\| &= \|(AP+\alpha P)x\| \\ &\leq \|AP + \alpha P\| \\ &\leq \||A + \alpha I\||.\end{aligned}$$

Uzimajući supremum preko svih takvih $x \in H$, dobijamo da je

$$\|A + \alpha I\| \leq \||A + \alpha I\||.$$

Sa druge strane je, za bilo koje $K \in \mathcal{K}(H)$ tako da je $\|K\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}\|AK + \alpha K\| &\leq \|A + \alpha I\|\,\|K\| \\ &\leq \|A + \alpha I\|,\end{aligned}$$

pa uzimajući supremum preko svih takvih K, vrijedi

$$\||A + \alpha I\|| \leq \|A + \alpha I\|.$$

Dakle, $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H) \times \mathbb{C}$ je normirana algebra. Kako je $\mathcal{K}(H)$ Banach-ov prostor, $\mathcal{A}$ je Banach-ova algebra.
Ako definišimo involuciju na $\mathcal{A}$ sa $(A + \alpha I)^* = A^* + \bar{\alpha} I$, onda je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra. □

Definicija 8.4. *Neka je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra. Za element $a \in \mathcal{A}$ kažemo da je samoadjungovan ako je $a^* = a$, unitaran ako je $a^* = a^{-1}$, normalan ako je $aa^* = a^*a$.*

Primjetimo da je u komutativnoj $\mathbb{C}^\star-$ algebri $\mathcal{A}$ svaki element normalan.

Napomena 8.2. Svaki element $a \in \mathcal{A}$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju

$$a = \frac{1}{2}(a + a^*) + i\frac{1}{2i}(a - a^*).$$

Uočimo da su $\frac{a+a^*}{2}$ i $\frac{a-a^*}{2i}$ samoadjungovani elementi u $\mathcal{A}$. Obrnuto, ako su h i k samoadjungovani elementi u $\mathcal{A}$ i $a = h + ik$, onda je $a^* = h - ik$, tako da je $h = \frac{a+a^*}{2}$ i $k = \frac{a-a^*}{2i}$. Dekompozicija $a = h + ik,\ h = h^*, k = k^*$ u $\mathcal{A}$ je jedinstvena.

8.2 Gelfand-ova transformacija komutativne Banach-ove algebre

Podsjetimo se definicije ω^*- topologije na A' dualnom prostoru Banach-ovog prostora A.

Definicija 8.5. *ω^*- topologija na A' generisana je okolinama*

$$O(\varphi, S, \epsilon) = \{\omega \in A' : |\omega(a) - \varphi(a)| < \epsilon \ \text{ za svako } \ a \in S\},$$

gdje je $\varphi \in A'$, S konačan podskup od A.
Skup $G \subset A'$ je otvoren u ω^*- topologiji akko za svako $\psi \in G$ postoji $O(\psi, S, \epsilon)$ tako da je $O(\psi, S, \epsilon) \subset G$.

Koristićemo teoremu Banach-Alaoglu[26] da je zatvorena jedinična lopta u A' ω^*- kompaktan skup.

Propozicija 8.1. *Spektar $S_p(\mathcal{A})$ komutativne Banach-ove algebre $\mathcal{A}$ je ω^*- zatvoren podskup jedinične lopte u $\mathcal{A}'$, i otuda kompaktan skup.*

Dokaz: Svako $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$ je neprekidno i $\|\varphi\| = 1$, pa je $S_p(\mathcal{A})$ sadržano u jediničnoj lopti U u $\mathcal{A}'$.
Neka je $\psi \in U \backslash S_p(\mathcal{A})$. Ako je $\psi = 0$ imamo $0 = \psi \in O(0, \{e\}, \frac{1}{2}) \subset U \backslash S_p(\mathcal{A})$ jer je $\varphi(e) = 1$ za svako $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$. Neka je $\psi \neq 0$. Onda postoje $a, b \in \mathcal{A}$ tako da je $|\psi(ab) - \psi(a)\psi(b)| = 3\epsilon$. Posmatrajmo okolinu $O(\psi, \{a, b, ab\}, \epsilon)$ od ψ. Ako je ϵ dovoljno malo za bilo koje $\omega \in O(\psi, \{a, b, ab\}, \epsilon)$ važi $|\omega(ab) - \omega(a)\omega(b)| = |\psi(ab) - \psi(a)\psi(b) - (\psi(ab) - \omega(ab)) - (\omega(a) - \psi(a))\psi(b) - (\omega(b) - \psi(b))\omega(a)| \geq |\psi(ab) - \psi(a)\psi(b)| - |\psi(ab) - \omega(ab)| - |\omega(a) - \psi(a)|\,|\psi(b)| - |\omega(b) - \psi(b)|\,|\omega(a)| > 3\epsilon - \epsilon - \epsilon - \epsilon = 0$. Znači, za dovoljno malo ϵ, $O(\psi, \{a, b, ab\}, \epsilon) \subset U \backslash S_p(\mathcal{A})$ i $S_p(\mathcal{A})$ je ω^*- zatvoren.

Teorema 8.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banach-ova algebra. Za $a \in \mathcal{A}$ i $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$, definišemo $\hat{a} : S_p(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ sa*

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a).$$

Onda važi:

(i) $\widehat{a}(S_p(\mathcal{A})) = \sigma(a)$ *za svako* $a \in \mathcal{A}$.

(ii) Preslikavanje $\hat{}: \mathcal{A} \to C(S_p(\mathcal{A}))$ *je algebarski homomorfizam i* $\|\widehat{a}\| = r(a) \leq \|a\|$.

[26] Leonidas Alaoglu (1914-1981)

Dokaz:
(i) Da je λ slika od $\hat{a}$ znači da je $\lambda = \hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$ za neko $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$. Na osnovu teoreme 5.2. *(iv)* ovo je moguće akko $\lambda \in \sigma(a)$.
(ii) Za $a, b \in \mathcal{A},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$(\widehat{\alpha a + \beta b})(\varphi) = \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha\hat{a}(\varphi) + \beta\hat{a}(\varphi)$$

$$\hat{e}(\varphi) = \varphi(e) = 1.$$

Ako je $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ onda je $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a) \neq 0$. (teorema 5.2. *(iii)*) $\widehat{a}(S_p(\mathcal{A})) = \sigma(a) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq ||a||\}$ pa je $|\hat{a}(\varphi)| \leq ||a||$ za sve $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$. Prema tome $||\hat{a}|| \leq ||a||$. □

Teorema 8.2 (Gelfand-Naimark[27]). *Neka je $\mathcal{A}$ involutivna komutativna Banach-ova algebra. Gelfand-ova transformacija $\hat{}: \mathcal{A} \to C(S_p(\mathcal{A}))$ je izometrični $*-$ izomorfizam akko je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra.*

Dokaz: Neka je $\hat{}$ izometrički $*-$ izomorfizam. Onda za svako $a \in \mathcal{A}$, vrijedi

$$||a^*a|| = ||\widehat{a^*a}|| = ||\widehat{(a^*)}\widehat{a}|| = ||\bar{\hat{a}}\,\hat{a}|| = ||\,|\hat{a}|^2|| = ||\hat{a}||^2 = ||a||^2,$$

pa je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra.
Obrnuto, neka je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra i neka $a \in \mathcal{A}$. Prethodno dokažimo da je $\sigma(h) \subset \mathbb{R}$ kadgod je h samoadjungovan element. Za $x \in \mathcal{A}$, definišemo

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

onda je $(e^x)^* = e^{x^*}$, $(e^x)^{-1} = e^{-x}$ i $e^{x+y} = e^x e^y$. Dalje je za $t \in \mathbb{R}$

$$(e^{ith})^* = e^{-ith^*} = e^{-ith} = (e^{ith})^{-1}$$

i

$$1 = ||(e^{ith})^{-1}e^{ith}|| = ||(e^{ith})^* \cdot e^{ith}|| = ||e^{ith}||^2,$$

pa je $||e^{ith}|| = 1$ za svako $t \in \mathbb{R}$.
Neka $\varphi \in S_p(\mathcal{A})$. Onda je,

$$\varphi(e^{ith}) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} h^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \varphi(h)^k = e^{it\varphi(h)}.$$

[27] Марк Аронович Наймарк (1909-1978)

Kako je $\|\varphi\| = 1$, imamo $|\varphi(e^{ith})| \leq \|e^{ith}\| = 1$, i otuda je $|e^{it\varphi(h)}| \leq 1$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Prema tome $\varphi(h) \in \mathbb{R}$.
Iz

$$\begin{aligned}\widehat{(a^*)}(\varphi) = \varphi(a^*) &= \varphi\left(\frac{a+a^*}{2} - i\frac{a-a^*}{2i}\right) = \varphi\left(\frac{a+a^*}{2}\right) - i\varphi\left(\frac{a-a^*}{2i}\right)\\ &= \overline{\varphi\left(\frac{a+a^*}{2}\right) + i\varphi\left(\frac{a-a^*}{2i}\right)} = \overline{\varphi(a)} = \overline{\hat{a}(\varphi)}\end{aligned}$$

slijedi da je $\hat{}$ $*-$ homomorfizam.
Za svaki element $a \in \mathcal{A}$,

$$\|a^2\|^2 = \|(a^2)^* a^2\| = \|(a^*a)^*(a^*a)\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4$$

i prema tome $\|a^2\| = \|a\|^2$ i $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu leme 4.2. (*iii*) je

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|,$$

pa je

$$\|\widehat{a}\| = r(a) = \|a\|.$$

Dakle, $\hat{}$ je izometrija (a time i injekcija).
Kako je $\hat{}$ izometrija, $\widehat{\mathcal{A}}$ je zatvorena podalgebra od $C(S_p(\mathcal{A}))$. Dalje, ako je $\varphi_1 \neq \varphi_2$, onda postoji $a \in \mathcal{A}$ takvo da je $\varphi_1(a) \neq \varphi_2(a)$, tj. $\widehat{a}(\varphi_1) \neq \widehat{a}(\varphi_2)$. Na osnovu Stone[28]-Weierstrass[29] -ove teoreme imamo $\widehat{\mathcal{A}} = C(S_p(\mathcal{A}))$. □

Ako je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^\star-$algebra i $a \in \mathcal{A}$, označimo sa $\mathcal{A}(a)$ $\mathbb{C}^\star-$algebru od $\mathcal{A}$ generisanu sa a, tj.

$$\mathcal{A}(a) := \overline{\{p(a, a^*) : p \text{ je polinom po } a \text{ i } a^*\}}.$$

Ako je a normalan element onda je $\mathcal{A}(a)$ komutativna $\mathbb{C}^\star-$algebra. Na osnovu teoreme 8.1. $\hat{a}$ je neprekidna funkcija na $S_p(\mathcal{A}(a))$ čija je slika $\sigma(a)$. Neka su $\varphi_1, \varphi_2 \in S_p(\mathcal{A}(a))$ i neka je $\widehat{a}(\varphi_1) = \widehat{a}(\varphi_2)$ tj. $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$. Kako je $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, onda je $\varphi_1(a^*) = \varphi_2(a^*)$. Ako je p bilo koji polinom po dvije promjenljive onda je $\varphi_1(p(a, a^*)) = \varphi_2(p(a, a^*))$, jer su φ_1, φ_2 homomorfizmi. Iz neprekidnosti φ_1, φ_2 slijedi da je $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ za svako $x \in \mathcal{A}(a)$ pa je $\varphi_1 = \varphi_2$. Kako je $S_p(\mathcal{A}(a))$ kompaktan $\hat{a}$ je homeomorfizam sa $S_p(\mathcal{A}(a))$ na $\sigma(a)$. Definišimo $\alpha : C(S_p(\mathcal{A}(a))) \to C(\sigma(a))$ sa $\alpha(f) = f \circ \hat{a}^{-1}$. Onda je α izometrički $*-$ izomorfizam sa $C(S_p(\mathcal{A}(a)))$ na $C(\sigma(a))$. Na osnovu prethodne teoreme $\alpha \circ \hat{} : \mathcal{A} \to C(\sigma(a))$ je izometrički $*-$ izomorfizam. Time smo dokazali

[28]Marshall Harvey Stone (1903-1989)
[29]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Teorema 8.3. *Neka je $\mathbb{C}^\star-$ algebra $\mathcal{A}(a)$ generisana sa normalnim elementom a. Onda postoji izometrični $*-$ izomorfizam između $\mathcal{A}$ i algebre neprekidnih funkcija na $\sigma(a)$.*

Komutativne $\mathbb{C}^\star-$ algebre se mogu potpuno opisati pomoću teoreme 8.2. U opštem slučaju svaka $\mathbb{C}^\star-$ algebra $\mathcal{A}$ je izometrički $*-$ izomorfna zatvorenoj podalgebri $\mathcal{B}(H)$ za neki Hilbert-ov prostor H. To su dokazali Gelfand, Naimark i Segal[30] nezavisno jedan od drugog. Taj dokaz moguće je pronaći u [10].

Navedimo jedan primjer Gelfand-ove reprezentacije.
Primjer: Neka je K kompaktan topološki prostor. Onda je

$$\Delta : K \to S_p(C(K)),\ \Delta(x) : f \to f(x)$$

homomorfizam i vrijedi

$$\hat{f} \circ \Delta = f \quad \text{za svako } f \in C(K).$$

Dokaz: Očigledno je $\Delta(x) \in S_p(C(K))$, za svako $x \in K$. Na osnovu Urysohn[31]-ove leme slijedi da je Δ "1-1". Da pokažemo da je Δ i "na", fiksirajmo $\varphi \in S_p(C(K))$. Onda je, na osnovu teoreme 5.2.*(ii)*, $I := N(\varphi)$ maksimalan ideal u $C(K)$. Pretpostavimo da za svako $x \in K$, postoji $f_x \in I$ tako da je $f_x(x) \neq 0$; onda, za svako $x \in K$ postoji otvorena okolina U_x od x tako da je $f_x(y) \neq 0$ za sve $y \in U_x$. Kako je K kompaktan iz otvorenog pokrivača $(U_x)_{x\in K}$ od K možemo izdvojiti konačan potpokrivač $(U_{x_j})_{j=1}^n$. Funkcija $f := \sum_{j=1}^n \overline{f}_{x_j} f_{x_j} = \sum_{j=1}^n |f_{x_j}|^2$ je u I. Kako f nema nula, f je invertibilna u $C(K)$. Otuda ideal I sadrži invertibilan element, što je suprotno definiciji ideala. Prema tome, postoji $x_0 \in K$ tako da je $f(x_0) = 0$ za sve $f \in I$. Znači

$$N(\varphi) = I \subset N(\Delta(x_0)).$$

Kako je I maksimalan ideal, $I = N(\Delta(x_0))$. S obzirom da je $\varphi(1) = \Delta(x_0)[1]$ slijedi da je $\varphi = \Delta(x_0)$.
Neka je $\mathcal{O} \subset S_p(C(K))$ neprazan otvoren skup i neka je $x_0 \in \Delta^{-1}(\mathcal{O})$ tako da je $\Delta(x_0) \in \mathcal{O}$. Kako je $\mathcal{O}$ otvoren, postoji $\epsilon > 0$ i konačan skup $S \subset C(K)$ tako da je ω^*- okolina $O(\Delta(x_0), S, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Svako $f \in S$ je neprekidno u x_0 i zato postoje otvorene okoline V_f od x_0 u K tako da je $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ za svako $x \in V_f$. Stavimo $V = \bigcap_{f\in S} V_f$. Onda za bilo koje $x \in V$, imamo

[30] Irving Ezra Segal (1918-1998)
[31] Павел Самыилович Урысон (1898-1924)

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ za sve $f \in S$, tj. $|\Delta(x)(f) - \Delta(x_0)(f)| < \epsilon$ za sve $f \in S$. Otuda je $\Delta(V) \subset O(\Delta(x_0), S, \epsilon)$ i $x_0 \in V \subset \Delta^{-1}(O(\Delta(x_0), S, \epsilon))$ i slijedi da je Δ neprekidno. □

8.3 Riemann-Stieltjes-ov integral

Označimo sa P podjelu

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \tag{2}$$

segmenta $\Delta = [a, b]$ i sa $\delta(P)$ dijametar podjele P, tj. $\delta(P) = \max_{1 \le k \le n}(t_k - t_{k-1})$. Ako je $f : \Delta \to X$ vektorska funkcija i $\alpha : \Delta \to \mathbb{C}$ skalarna funkcija, onda za izbor tačaka $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$ Riemann[32]-Stieltjes[33]-ovu sumu definišemo sa

$$\sigma(f, \alpha, P) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k)[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})]. \tag{3}$$

Definicija 8.6. *Ako postoji vektor x_0 Banach-ovog prostora X sa osobinom da za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za svaku podjelu P i za svaki izbor tačaka $s_1, \ldots, s_n$ vrijedi*

$$\delta(P) < \delta \Longrightarrow |\sigma(f, \alpha, P) - x_0| < \epsilon, \tag{4}$$

onda kažemo da je funkcija f $RS-$integrabilna u odnosu na funkciju α i vektor x_0 nazivamo $RS-$integralom funkcije f u odnosu na funkciju α. Vektor x_0 označavamo sa

$$\int_a^b f(t)\, d\alpha(t) \tag{5}$$

i kažemo da je integral (5) uzet u smislu jake konvergencije odnosno u smislu jake topologije.

Iz (4) izlazi da je x_0 svojevrsni limes $RS-$suma pa pišemo

$$\int_a^b f\, d\alpha = \lim_{\delta(P) \to 0} \sigma(f, \alpha, P).$$

Propozicija 8.2. *Ako je $f : \Delta \to X$ na $\Delta = [a, b]$ jako neprekidna funkcija i $\alpha : \Delta \to \mathbb{C}$ funkcija ograničene varijacije, onda postoji integral (5) u smislu jake topologije i vrijedi:*

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha \right| \le V(\alpha, \Delta) \sup\{\, |f(t)| : t \in \Delta\}. \tag{6}$$

[32]Georg Fridrich Bernhard Riemann (1826-1866)
[33]Thomas Jan Stieltjes (1856-1894)

Dalje je

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha \tag{7}$$

za svaki broj $c \in (a, b)$.

Dokaz: Neprekidnost funkcije f na Δ povlači ograničenost i ravnomjernu neprekidnost te funkcije na Δ. Prema tome za $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je

$$|t' - t''| < \delta \Longrightarrow |f(t') - f(t'')| < \epsilon.$$

Uzmimo da podjela P' nastaje profinjenjem podjele P tako da se uzme tačka $t' \in (t_{j-1}, t_j)$. Neka je $s' \in (t_{j-1}, t')$ i $s'' \in (t', t_j)$. Dalje, neka je $\delta(P) < \frac{\delta}{2}$ (a time i $\delta(P') < \frac{\delta}{2}$). Onda važi:

$$\begin{aligned} |\sigma(f, \alpha, P') - \sigma(f, \alpha, P)| = \Bigg| \sum_{k \neq j} [f(s_k) - f(s'_k)][\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})] \\ + f(s_j)[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] - f(s')[\alpha(t') - \alpha(t_{j-1})] - f(s'')[\alpha(t_j) - \alpha(t')] \Bigg| \\ \leq \epsilon \left[\sum_{k \neq j} |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})| + |\alpha(t_j) - \alpha(t')| + |\alpha(t') - \alpha(t_{j-1})| \right] \leq \epsilon V(\alpha, \Delta). \end{aligned}$$

Analogno slijedi da je za svako profinjenje P' podjele P važi

$$|\sigma(f, \alpha, P') - \sigma(f, \alpha, P)| \leq \epsilon V(\alpha, \Delta),$$

bez obzira na izbor tačaka (s'_j). Ako su dakle P_1 i P_2 podjele od Δ i ako je

$$\delta(P_1) < \frac{\delta}{2} \text{ i } \delta(P_2) < \frac{\delta}{2},$$

onda je

$$|\sigma(f, \alpha, P_1) - \sigma(f, \alpha, P_2)| \leq 2\epsilon V(\alpha, \Delta). \tag{8}$$

Iz (8) i kompletnosti prostora X slijedi egzistencija vektora $x_0 \in X$ takvog da vrijedi (4). Iz (4) izlazi

$$\begin{aligned} |x_0| &\leq \epsilon + |\sigma(f, \alpha, P)| = \epsilon + \left| \sum_{k=1}^{n} f(s_k)[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})] \right| \\ &\leq \epsilon + |f| \sum_{k=1}^{n} |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})| \leq \epsilon + |f| \cdot V(\alpha, \Delta), \end{aligned}$$

gdje je $|f| = \sup\{\,|f(t)| : t \in \Delta\}$. Odavde zbog proizvoljnosti broja ϵ slijedi $|x_0| \leq |f| \cdot V(\alpha, \Delta)$, a to i jeste nejednakost (6). □

Propozicija 8.3. *Neka su X i Y Banach-ovi prostori, $f : \Delta \to X$ jako neprekidna funkcija i $\alpha : \Delta \to \mathbb{C}$ funkcija ograničene varijacije na segmentu $\Delta = [a, b]$. Ako je $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, onda je*

$$A\left(\int_a^b f\,d\alpha\right) = \int_a^b (Af(t))\,d\alpha(t). \tag{9}$$

Dokaz: Iz (3) izlazi da je

$$A\sigma(f, \alpha, P) = \sigma(Af, \alpha, P).$$

Kako je $A \circ f$ neprekidna funkcija, iz

$$\lim_{\delta(P)\to 0} \sigma(f, \alpha, P) = \int_a^b f\,d\alpha \Longrightarrow$$

$$\lim_{\delta(P)\to 0} A\sigma(f, \alpha, P) = \lim_{\delta(P)\to 0} \sigma(Af, \alpha, P) = \int_a^b (Af)\,d\alpha.$$

S druge strane, neprekidnost operatora A daje

$$\lim_{\delta(P)\to 0} A\sigma(f, \alpha, P) = A \lim_{\delta(P)\to 0} \sigma(f, \alpha, P),$$

dakle važi (9). □

$RS-$integral skalarne funkcije u odnosu na vektorsku funkciju definišemo na isti način kao i $RS-$integral vektorske funkcije u odnosu na skalarnu funkciju. Ako je $f : \Delta \to \mathbb{C}$ skalarna funkcija i $\alpha : \Delta \to X$ vektorska funkcija, onda (3) ima smisla. U vezi sa tim ima smisla i (4) pa se u ovom slučaju vektor x_0 naziva $RS-$ integral skalarne funkcije u odnosu na vektorsku funkciju i označava sa (5). I ovaj put je integral (5) uzet u smislu jake topologije.

Propozicija 8.4. *Neka je $f : \Delta \to X$ vektorska i $\alpha : \Delta \to \mathbb{C}$ skalarna funkcija. Ako postoji jedan od RS-integrala*

$$\int_a^b f\,d\alpha, \quad \int_a^b \alpha\,df, \tag{10}$$

onda postoji i drugi i vrijedi

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha\,df. \tag{11}$$

Dokaz: Neka je P podjela data sa (2). Izaberimo tačke $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $(k = 1, \dots n)$ i sa P' označimo podjelu

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_n < s_{n+1} = b,$$

tako da je $\delta(P') \leq 2\delta(P)$. Tvrđenje slijedi iz

$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k)[\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})] = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \sum_{i=0}^{n} \alpha(t_i)[f(s_{i+1}) - f(s_i)].$$

□

8.4 Funkcionalni račun u Banach-ovim algebrama

Označimo sa $\mathcal{A}$ kompleksnu Banach-ovu algebru, sa X kompleksan Banach-ov prostor i sa $\mathcal{B}(X)$ pripadnu Banach-ovu algebru ograničenih linearnih operatora. Dalje sa $\sigma(a)$ i $R_\lambda(a) = (\lambda e - a)^{-1}$ označavamo spektar i rezolventu elementa $a \in \mathcal{A}$. Sa $\mathfrak{F}(\sigma)$ označavamo skup svih kompleksnih funkcija f koje su analitičke na nekom otvorenom skupu Ω_f koji sadrži kompaktan skup σ.
Uvedimo relaciju ekvivalencije $\sim$ na $\mathfrak{F}(\sigma)$ na sljedeći način: $f \sim g$ ako je $f(\lambda) = g(\lambda)$ za $\lambda \in \sigma$. Klasu ekvivalencije elementa f ćemo označavati sa $\tilde{f}$ i zovemo je klica funkcije f na σ, a sa $\widetilde{\mathfrak{F}}(\sigma)$ skup svih klica $\tilde{f}$. Za $f \in \tilde{f}$ i $g \in \tilde{g}$ postoji otvoren skup $\Omega \supset \sigma$ takav da su f i g analitičke na Ω. Na Ω definišemo funkcije h i k na slijedeći način

$$h(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda),\ k(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda),\ \lambda \in \Omega.$$

Onda $h, k \in \mathfrak{F}(\sigma)$. Primijetimo da funkcije h i k zavise od Ω, a da njihove klice $\tilde{h}$ i $\tilde{k}$ zavise samo od $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$, pa su sa $\tilde{h} = \tilde{f} + \tilde{g}$, $\tilde{k} = \tilde{f}\tilde{g}$ i $\widetilde{\alpha f} = \alpha \cdot \tilde{f}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ zadane operacije na $\widetilde{\mathfrak{F}}(\sigma)$ u odnosu na koje je $\widetilde{\mathfrak{F}}(\sigma)$ algebra.
Podsjetimo da
Ako je $\sigma \subset \mathbb{C}$ kompaktan skup i $\Omega \subset \mathbb{C}$ otvoren skup koji sadrži σ, onda postoji Cauchy-jeva oblast Ω_0 takva da je

$$\sigma \subset \Omega_0,\ \overline{\Omega}_0 \subset \Omega.$$

Neka $a \in \mathcal{A}$. Ako je f analitička funkcija na otvorenom skupu Ω i ako Ω sadrži $\sigma(a)$, onda postoji Cauchy-jeva oblast Ω_0 takva da je $\sigma(a) \subset \Omega_0$ i $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Sa

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\, d\lambda \tag{12}$$

je definisana vrijednost funkcije f na elementu a. Pri tome je $\Gamma = \partial\Omega_0$ pozitivno orjentisana kriva.
Dokažimo da integral u (12) ne zavisi od izbora Cauchy-jeve oblasti.
Neka je $([a,b],\lambda)$ parametrizacija konture Γ i λ funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$. Ako je $\Omega \subset \mathbb{C}$ otvoren skup koji sadrži Γ i $f : \Omega \to X$ neprekidna funkcija sa Ω u Banach-ov prostor X, onda je funkcija $f \circ \lambda$ neprekidna pa je ona $RS-$integrabilna u odnosu na funkciju λ. Krivolinijski integral funkcije f duž krive Γ definišemo sa

$$\int_\Gamma f(\lambda)\, d\lambda = \int_a^b f(\lambda(t))\, d\lambda(t). \tag{13}$$

Teorema 8.4. *Ako je Γ kontura i $f : \Omega \to X$ analitička funkcija sa otvorenog skupa Ω koji sadrži Γ i unutrašnju oblast od Γ, onda je*

$$\int_\Gamma f(\lambda)\, d\lambda = 0. \tag{14}$$

Dokaz: Za $y \in X'$ funkcija $y \circ f$ je analitička na Ω, pa je

$$\int_a^b (y \circ f \circ \lambda)(t)\, d\lambda(t) = 0.$$

Na osnovu propozicije 8.3. je

$$y\left(\int_a^b (f \circ \lambda)(t)\, d\lambda(t)\right) = 0,$$

tj.

$$y\left(\int_\Gamma f(\lambda)\, d\lambda\right) = 0. \tag{15}$$

Kako (15) važi za svaki funkcional $y \in X'$, prema korolaru Hahn[34]-Banach-ovog teorema, važi (14). $\square$

Propozicija 8.5. *Neka je $f : \Omega \to X$ analitička funkcija i neka konture Γ_1, Γ_2 leže u otvorenom skupu Ω. Ako je Γ_1 sadržano u unutrašnjoj oblasti od Γ_2 i ako skup, koji se nalazi između Γ_1 i Γ_2, leži u Ω, onda je*

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{16}$$

[34]Hans Hahn (1879-1934)

Dokaz: Za $y \in X'$ skalarna funkcija $y \circ f$ je analitička u okolini zatvarača skupa koji se nalazi između Γ_1 i Γ_2, pa je

$$\int_{\Gamma_1} (y \circ f)(\lambda)\, d\lambda = \int_{\Gamma_2} (y \circ f)(\lambda)\, d\lambda.$$

Odavde je

$$y\left(\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\, d\lambda - \int_{\Gamma_2} f(\lambda)\, d\lambda\right) = 0,$$

pa kako je y proizvoljan funkcional, slijedi (16). □

Propozicija 8.6. *Ako Cauchy-jeve oblasti Ω_1 i Ω_2 sadrže kompaktan skup σ i ako je f vektorska analitička funkcija u okolini skupa $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \backslash \sigma$, onda je*

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda)\, d\lambda, \tag{17}$$

gdje je Γ_i rub skupa Ω_i $(i = 1, 2)$.

Dokaz: Postoji Cauchy-jeva oblast Ω_0 takva da je $\sigma \subset \Omega_0$ i $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. Primjenom propozicije 8.5. na komponente Ω_0 i Ω_1 dobijamo

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{\Gamma_0} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Analogno se dobija

$$\int_{\Gamma_2} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{\Gamma_0} f(\lambda)\, d\lambda,$$

pa je time (17) dokazano. □

Na osnovu prethodne propozicije integral u (12) ne zavisi od izbora Cauchy-jeve oblasti; dakle za $\tilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{F}}(\sigma(a))$ i $f_1, f_2 \in \tilde{f}$ imamo $f_1(a) = f_2(a)$, odnosno sa

$$\tilde{f} \longmapsto f(a) \ \ (f \in \tilde{f})$$

je dato preslikavanje sa algebre $\widetilde{\mathfrak{F}}(\sigma(a))$ u algebru $\mathcal{A}$.

Teorema 8.5. *Preslikavanje $f \longmapsto f(a)$ zadano sa (12) ima sljedeće osobine:*

1. *Za $f(\lambda) = 1$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ imamo $f(a) = e$.*
2. *Za $f(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ imamo $f(a) = a$.*

3. *Ako je* $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\ f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$*, onda je* $f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$ *i*
$$f(a) = \alpha_1 f_1(a) + \alpha_2 f_2(a).$$

4. *Ako je* $f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda),\ f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$*, onda je* $f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$ *i*
$$f(a) = f_1(a) f_2(a).$$

5. *Ako za niz* (f_k) *iz* $\mathfrak{F}(\sigma(a))$ *postoji otvoren skup* Ω *takav da je* $\sigma(a) \subset \Omega$ *i da niz* (f_k) *uniformno na* Ω *konvergira funkciji* f*, onda je* $f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$ *i niz* $(f_k(a))$ *konvergira ka* $f(a)$.

Dokaz ove teoreme moguće je pronaći u [6].

Teorema 8.6. *Pretpostavimo da preslikavanje* $f \longmapsto f_a$ *sa* $\mathfrak{F}(\sigma(a))$ *u* $\mathcal{A}$ *ima osobine* $1-5$ *iz teoreme 8.5. s tim da umjesto* $f(a)$ *stoji* f_a*. Tada je* $f_a = f(a)$ *za svako* $f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$.

Dokaz: Iz $1-4$ slijedi da je $p_a = p(a)$ za svaki polinom p. Ako μ nije u spektru elementa a, onda je funkcija $\lambda \longmapsto f_0(\lambda) = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$ analitička na $\sigma(a)$. No onda $f_0(\lambda)(\mu - \lambda) = 1$ u okolini skupa $\sigma(a)$ zajedno sa $(fg)_a = f_a g_a$ povlači
$$(f_0)_a(\mu e - a) = e.$$
Prema tome
$$\left(\frac{1}{\mu - \lambda}\right)_a = (\mu e - a)^{-1},\ \mu \notin \sigma(a).$$
Za $f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$ imamo
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t - \lambda},$$
pri čemu su kriva Γ i Cauchy-jeva oblast Ω, $\sigma(a) \subset \Omega$, kojoj je ona granica, sadržane u oblasti analitičnosti funkcije f. Navedeni integral je limes na $\overline{\Omega}$ uniformno konvergentnog niza funkcija
$$f_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n} \frac{f(t_k)(t_{k+1} - t_k)}{t_k - \lambda}\ \ (t_k \in \Gamma, \lambda \in \Omega, n = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$
Dalje je
$$(f_n)_a = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n} f(t_k)(t_k e - a)^{-1}(t_{k+1} - t_k)\ \ (t_k \in \Gamma). \tag{19}$$

Na desnoj strani formule (19) je integralna suma za

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(t)(te-a)^{-1}\,dt,$$

a desna strana od (19) prema osobini 5 iz teoreme 8.5. konvergira ka f_a. Odavde i iz (12) dobijamo $f_a = f(a)$. $\square$

Teorema 8.7. *(Teorema o preslikavanju spektra) Ako je $a \in \mathcal{A}$ i $f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$, onda je*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)). \tag{20}$$

Dokaz: Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Na oblasti analitičnosti funkcije f, funkcija

$$g(t) = \frac{f(\lambda) - f(t)}{\lambda - t}$$

takođe je analitička. Prema teoremi 8.5. imamo

$$f(\lambda)e - f(a) = (\lambda e - a)g(a).$$

Kako $\lambda e - a \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, onda i $(\lambda e - a)g(a) \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, pa $f(\lambda)e - f(a) \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, odnosno $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$. Dakle

$$f(\sigma(a)) \subset \sigma(f(a)). \tag{21}$$

S druge strane, ako $\mu \notin f(\sigma(a))$ onda je funkcija

$$h(t) = \frac{1}{f(t) - \mu}$$

analitička u okolini skupa $\sigma(a)$. Dakle, $h \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$. No onda je prema teoremi 8.5.

$$h(a)[f(a) - \mu e] = e,$$

pa je $f(a) - \mu e$ invertibilan element algebre $\mathcal{A}$. Dakle, $\mu \notin \sigma(f(a))$. Znači $\sigma(f(a)) \subset f(\sigma(a))$. Odavde i iz (21) dobijamo (20). $\square$

Teorema 8.8. *(Složena funkcija od a) Ako $f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$ i $g \in \mathfrak{F}(\sigma(f(a)))$, onda je $h = g \circ f \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$ i $h(a) = g(f(a))$.*

Dokaz: Neka je Ω Cauchy-jeva oblast takva da ona i njena granica Γ leže u oblasti analitičnosti funkcije g i da je $\sigma(f(a)) \subset \Omega$. Kako je f neprekidna funkcija i kompaktan skup $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ je sadržan u Ω, onda postoji otvoren skup Ω_0 takav da je $\sigma(a) \subset \Omega_0$ i da je f analitička na Ω_0 i $f(\overline{\Omega_0}) \subset \Omega$. Onda postoji Cauchy-jeva oblast Ω' takva da je: $\sigma(a) \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega_0$.

Očigledno je $f(\Omega' \cup \Gamma') \subset \Omega$, $\Gamma' = \partial\Omega'$. Kako je $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ za svako $\lambda \in \Omega_0$, to je h analitička funkcija na Ω_0, tj. $h \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$.
Uzmimo $\lambda \in \Gamma'$. Kako $\lambda \notin f(\sigma(a))$, onda je funkcija

$$g_0(\xi) = \frac{1}{\lambda - f(\xi)}$$

analitička u okolini skupa $\Omega' \cup \Gamma'$; dakle $g_0 \in \mathfrak{F}(\sigma(a))$ i

$$g_0(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{1}{\lambda - f(\xi)} (\xi e - a)^{-1}\, d\xi. \tag{22}$$

Sa druge strane, na osnovu teoreme 8.5. i

$$(\lambda - f(\xi)) g_0(a) = 1$$

u okolini skupa $\Omega' \cup \Gamma'$ imamo

$$(\lambda e - f(a)) g_0(a) = e.$$

Odavde i iz (22) dobijamo

$$(\lambda e - f(a))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{1}{\lambda - f(\xi)} (\xi e - a)^{-1}\, d\xi.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
g(f(a)) &= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda)(\lambda e - f(a))^{-1}\, d\lambda \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda) \left(\tfrac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \tfrac{(\xi e - a)^{-1}}{\lambda - f(\xi)}\, d\xi \right) d\lambda \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (\xi e - a)^{-1} \left(\tfrac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \tfrac{g(\lambda)}{\lambda - f(\xi)}\, d\lambda \right) d\xi \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} g(f(\xi))(\xi e - a)^{-1} d\xi \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} h(\xi)(\xi e - a)^{-1} d\xi \\
&= h(a).
\end{aligned}$$

□

8.5 Spektralna teorema za normalne operatore

Definicija 8.7. *Neka je Y lokalno kompaktan, $\sigma-$ kompaktan topološki prostor i neka je $\mathfrak{B}(Y)$ Borel-ova σ algebra. Spektralna mjera na Y je preslikavanje $E : \mathfrak{B}(Y) \to \mathcal{B}(H)$ sa sljedećim osobinama:*

1. *$E(M)$ je ortogonalna projekcija za svako $M \in \mathfrak{B}(Y)$; $E(\emptyset) = 0, E(Y) = I$.*
2. *$E(M_1 \cap M_2) = E(M_1)E(M_2)$ za sve $M_1, M_2 \in \mathfrak{B}(Y)$.*
3. *$E(M_1 \cup M_2) = E(M_1) + E(M_2)$ za sve $M_1, M_2 \in \mathfrak{B}(Y)$ tako da je $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.*
4. *Za svako $x \in H, y \in H$ $E_{x,y} : M \to < E(M)x, y >$ je mjera na Y.*

Lema 8.1. *Ako su $A, B \in \mathcal{B}(H)$ i ako je $< Ax, x >=< Bx, x >$ za svako $x \in H$, onda je $A = B$.*

Dokaz: Ako je $D := A - B$, onda je $< Dx, x >= 0$ za svako $x \in H$. Stoga je

$$0 =< D(x + y), x + y >=< Dx, y > + < Dy, x > \quad \text{za sve } \; x, y \in H. \qquad (*)$$

Zamjenom y sa iy u $(*)$, dobijamo da je $0 = - < Dx, y > + < Dy, x >$, tj. $< Dx, y >=< Dy, x >$. Sada iz $(*)$ dobijamo da je $0 = 2 < Dy, x >$ za sve $x, y \in H$. Otuda je $D = 0$. □

Prostor $\mathcal{M}_\infty(Y)$ definisan je u potpoglavlju 8.1. primjer 6.

Teorema 8.9. *Neka je E spektralna mjera na Y. Onda za svako $f \in \mathcal{M}_\infty(Y)$ postoji jedinstveno određen operator $\int f dE \in \mathcal{B}(H)$ sa sljedećim osobinama:*

(i) $< \int f dE\, x, x >= \int f dE_{x,x}$ *za svako $x \in H$*

(ii) $\left\| \int f dE x \right\|^2 = \int |f|^2 dE_{x,x}$ *za svako $x \in H$*

Preslikavanje $f \to \int f dE$ je $*-$ homomorfizam sa $\mathcal{M}_\infty(Y)$ u $\mathcal{B}(H)$.

Dokaz: Neka je $T := Lin\{\chi_M : M \in \mathfrak{B}(Y)\} \subset \mathcal{M}_\infty(Y)$. T je gust linearan potprostor od $\mathcal{M}_\infty(Y)$. Za $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{M_j} \in T$ i $x \in H$,

$$< \sum_{j=1}^n \lambda_j E(M_j)x, x >= \sum_{j=1}^n \lambda_j < E(M_j)x, x >= \int f dE_{x,x} \qquad (23)$$

Kako je $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j E(M_j) \in \mathcal{B}(H)$, prema lemi 8.1. i (23), ovaj operator zavisi samo od f a ne zavisi od izabrane reprezentacije. Prema tome $\Psi : T \to \mathcal{B}(H)$,

$$\Psi : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{M_j} \to \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E(M_j), \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{M_j} \in T,$$

je dobro definisano preslikavanje. Ψ je linearan i zadovoljava

$$\Psi(\bar{f}) = \Psi(f)^* \quad \text{za sve } f \in T. \tag{24}$$

Ako $f, g \in T$, onda je

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{M_j} \text{ i } g = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi_{M_j}$$

gdje su skupovi $M_1, \ldots, M_n$ međusobno disjunktni. Tada je $fg = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j \chi_{M_j}$ i prema tome

$$\Psi(f)\Psi(g) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \mu_k E(M_j)E(M_k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j E(M_j) = \Psi(fg). \tag{25}$$

Sada, iz (23) − (25) za $f \in T$ i $x \in H$ slijedi

$$||\Psi(f)x||^2 =< \Psi(f)^*\Psi(f)x, x >=< \Psi(\bar{f}f)x, x >= \int |f|^2 dE_{x,x}. \tag{26}$$

Kako je $E_{x,x}(Y) = ||x||^2$ imamo

$$||\Psi(f)x||^2 = \int |f|^2 dE_{x,x} \leq ||f||^2_{\mathcal{M}_\infty(Y)} E_{x,x}(Y) = ||f||^2_{\mathcal{M}_\infty(Y)} ||x||^2. \tag{27}$$

Otuda je Ψ neprekidan i ima neprekidno linearno produženje $\widetilde{\Psi}$ na $\mathcal{M}_\infty(Y)$. Stavljajući $\int f dE := \widetilde{\Psi}(f)$, dobijamo tražene osobine graničnim prelazom. Na osnovu leme 8.1. $\int f dE$ je jedinstveno određen sa (i). □

Teorema 8.10. *Ako je $\mathcal{A}$ zatvorena normalna podalgebra od $\mathcal{B}(H)$, onda postoji jedinstvena spektralna mjera E na Borel-ovim podskupovima od $S_p(\mathcal{A})$, tako da važi*

$$A = \int_{S_p(\mathcal{A})} \hat{A} \, dE \tag{28}$$

za svako $A \in \mathcal{A}$, gdje je $\hat{A}$ Gelfand-ova transformacija od A.

Formula (28) je kraći zapis formule

$$< Ax, y >= \int_{S_p(\mathcal{A})} \hat{A}\, dE_{x,y} \quad (x \in H, y \in H, A \in \mathcal{A}). \tag{29}$$

Dokaz: Kako je $\mathcal{B}(H)$ $\mathbb{C}^\star-$ algebra, onda je i $\mathcal{A}$ komutativna $\mathbb{C}^\star-$ algebra. Iz dokaza Gelfand-Naimark-ove teoreme vidimo da je $A \to \hat{A}$ izometrički $*-$ izomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $C(S_p(\mathcal{A}))$.
Neka E zadovoljava (29). Kako je $\hat{A} \in C(S_p(\mathcal{A}))$, $E_{x,y}$ je jedinstveno određena sa (29). Na osnovu definicije

$$< E(M)x, y >= E_{x,y}(M)$$

svaka projekcija $E(M)$ je takođe jedinstveno određena sa (29).
Ako $x \in H, y \in H$, koristeći teoremu 8.2. vidimo da je

$$\hat{A} \to < Ax, y >$$

ograničen linearan funkcional na $C(S_p(\mathcal{A}))$ norme manje od ili jednake $\|x\|\,\|y\|$, jer je $\|\hat{A}\| = \|A\|$. Na osnovu teoreme Riesz-a o reprezentaciji postoji jedinstvena regularna Borel-ova mjera $\mu_{x,y}$ na $S_p(\mathcal{A})$, tako da je

$$< Ax, y >= \int_{S_p(\mathcal{A})} \hat{A}\, d\mu_{x,y} \quad (x \in H, y \in H, A \in \mathcal{A}). \tag{30}$$

Ako je A realan, onda je A i samoadjungovan, tako da su $< Ax, y >$ i $< Ay, x >$ kompleksno konjugovani.
Otuda je

$$\mu_{x,y} = \overline{\mu}_{y,x} \quad (x \in H, y \in H). \tag{31}$$

Za fiksirano $A \in \mathcal{A}$, lijeva strana od (30) je linearna po x i antilinearna po y. Iz jedinstvenosti mjere $\mu_{x,y}$ slijedi da je $\mu_{x,y}(M)$, za svaki Borel-ov skup $M \subset S_p(\mathcal{A})$, seskvilinearan funkcional. Kako je $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|\,\|y\|$, slijedi da je

$$\int_{S_p(\mathcal{A})} f\, d\mu_{x,y}$$

ograničen seskvilinearan funkcional na H, za svaku ograničenu Borel-ovu funkciju f na $S_p(\mathcal{A})$. Onda postoji operator $\Phi(f) \in \mathcal{B}(H)$ tako da je

$$< \Phi(f)x, y >= \int_{S_p(\mathcal{A})} f\, d\mu_{x,y} \quad (x \in H, y \in H). \tag{32}$$

Upoređujući sa (30), vidimo da je

$$\Phi(\hat{A}) = A, \quad (A \in \mathcal{A}) \tag{33}$$

Prema tome Φ je proširenje preslikavanja $\hat{A} \to A$ koje preslikava $C(S_p(\mathcal{A}))$ na $\mathcal{A}$.
Ako je f realna, onda iz (31) slijedi da su $< \Phi(f)x, y >$ i $< \Phi(f)y, x >$ konjugovano kompleksni, pa je $\Phi(f)$ samoadjungovan.
Dokažimo da je

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g), \tag{34}$$

za ograničene Borel-ove funkcije f i g.

Ako $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{A}$ onda $\widehat{AB} = \hat{A}\hat{B}$ i iz (30) slijedi

$$\int_{S_p(\mathcal{A})} \hat{A}\hat{B}\, d\mu_{x,y} =< ABx, y >= \int_{S_p(\mathcal{A})} \hat{A}\, d\mu_{Bx,y}. \tag{35}$$

Kako je $\hat{A} = C(S_p(\mathcal{A}))$, slijedi da je

$$\hat{B}\, d\mu_{x,y} = d\mu_{Bx,y}.$$

za svaki izbor x, y i B. Integrali u (35) ostaju jednaki i ako $\hat{A}$ zamijenimo sa f. Otuda je

$$\begin{aligned} \int_{S_p(\mathcal{A})} f\hat{B}\, d\mu_{x,y} &= \int_{S_p(\mathcal{A})} f\, d\mu_{Bx,y} \\ &= < \Phi(f)Bx, y >=< Bx, z >= \int_{S_p(\mathcal{A})} \hat{B}\, d\mu_{x,z}, \end{aligned}$$

gdje je $z = \Phi(f)^* y$.
Ako $\hat{B}$ zamijenimo sa bilo kojom ograničenom Borel-ovom funkcijom g i tada važi

$$\int_{S_p(\mathcal{A})} fg\, d\mu_{x,y} = \int_{S_p(\mathcal{A})} g\, d\mu_{x,z}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} < \Phi(fg)x, y > &= \int_{S_p(\mathcal{A})} fg\, d\mu_{x,y} = \int_{S_p(\mathcal{A})} g\, d\mu_{x,z} \\ &= < \Phi(g)x, z >=< \Phi(f)\Phi(g)x, y >, \end{aligned}$$

pa važi (34).
Ako je M Borel-ov podskup od $S_p(\mathcal{A})$, neka je f karakteristična funkcija na

M i stavimo $E(M) = \Phi(f)$.
Na osnovu (34), $E(M \cap M') = E(M)E(M')$. Ako je $M = M'$, vidimo da je svako $E(M)$ projekcija. Kako je $\Phi(f)$ samoadjungovan, kada je f realna, svako $E(M)$ je samoadjungovano. Jasno je da je $E(\emptyset) = \Phi(0) = 0$. Da je $E(S_p(\mathcal{A})) = I$ slijedi iz (33). Konačna aditivnost od E je posljedica od (32), kao i relacija

$$< E(M)x, y >= \mu_{x,y}(M). \tag{36}$$

Otuda je E spektralna mjera. (29) slijedi iz (30) i (36). □

Teorema 8.11. *Ako je $A \in \mathcal{B}(H)$ normalan operator, onda postoji jedinstvena spektralna mjera E na Borel-ovim podskupovima od $\sigma(A)$ tako da važi*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dE(\lambda). \tag{37}$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ najmanja zatvorena podalgebra od $\mathcal{B}(H)$ koja sadrži A i A^*. kako je A normalan, možemo primjeniti teoremu 8.10. na $\mathcal{A}$. Na osnovu teoreme 8.3. $S_p(\mathcal{A})$ se može identifikovati sa $\sigma(A)$ tako da je $\hat{A}(\lambda) = \lambda$ za svako $\lambda \in \sigma(A)$. Egzistencija mjere E slijedi iz prethodne teoreme.
S druge strane, ako postoji E tako da važi (37), iz teoreme 8.9. vidimo da je

$$p(A, A^*) = \int_{\sigma(A)} p(\lambda, \overline{\lambda}) \, dE(\lambda), \tag{38}$$

gdje je p proizvoljan polinom po dvije promjenljive. Na osnovu Stone-Weierstrass-ove teoreme, ovi polinomi su gusti u $C(\sigma(A))$. Zbog toga je projekcija $E(M)$ jedinstveno određena integralom (38), otuda sa A. □

Primjer: Neka je m Lebesgue[35]-ova mjera na [0,1] i neka je $H := L_2([0, 1], m)$. Onda je $A : H \to H$, definisan sa

$$Ax : t \to tx(t),$$

samoadjungovan operator i $A \in \mathcal{B}(H)$. Da pokažemo da je $\sigma(A) = [0, 1]$, uočimo da je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, s obzirom da je A samoadjungovan operator. Ako $\lambda \in \mathbb{R} \backslash [0, 1]$, onda je $t \to (\lambda - t)^{-1}$ u $C[0, 1]$. Iz ovog slijedi da je

$$R(\lambda) : H \to H, \;\; R(\lambda)x : t \to \frac{1}{\lambda - t} x(t), \;\; t \in [0, 1],$$

[35]Henri Leon Lebesgue (1875-1941)

ograničen linearan operator na H i da je inverz operatora $\lambda I - A$. Prema tome, $\sigma(A) \subset [0,1]$. Ako $\lambda \in (0,1)$, onda definišimo $x_n \in H$ sa

$$x_n : t \to \begin{cases} (\lambda - t)^{-1} & \text{za} \quad |t - \lambda| \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{za} \quad |t - \lambda| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Onda je

$$\|(\lambda I - A)x_n\|^2 \leq \int 1 dm = 1 \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

S druge strane, za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\|^2 = \int_{|t-\lambda| \geq \frac{1}{n}} |(t-\lambda)^{-1}|^2 \, dm \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1-\lambda} \tau^{-2} \, dm = n - (1-\lambda)^{-1} \to \infty.$$

Dakle, $\lambda \in \sigma(A)$ za svako $\lambda \in (0,1)$. Iz ovoga slijedi da je $\sigma(A) = [0,1]$. Definišimo $E : \mathfrak{B}([0,1]) \to \mathcal{B}(H)$ sa $E(M) : x \to \chi_M x$. Onda je E spektralna mjera na [0,1]. Specijalno, za svako $x \in H$ i svako $M \in \mathfrak{B}([0,1])$, imamo

$$E_{x,x}(M) =< E(M)x, x >= \int \chi_M \, |x|^2 \, dm = \int_M |x|^2 dm.$$

Onda za svako $x \in H$, važi

$$< \int t \, dEx, x >= \int t dE_{x,x} = \int_0^1 t|x(t)|^2 dm(t) =< Ax, x > .$$

Na osnovu prethodne teoreme, E je spektralna mjera operatora A. Primijetimo da operator A nema sopstvene vrijednosti.

Literatura

[1] Aljančić, S., *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu,* Građevinska knjiga, Beograd, 1974.

[2] Arsenović, M., Dostanić M., Jocić D., *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Matematički fakultet Univerziteta, Beograd, 1998.

[3] Blackadar, Brus, *Operator Algebras*, Springer, New York, 2001.

[4] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis,* Springer, 1990.

[5] Колмогоров, А. Н., Фомин, С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1972.

[6] Kurepa, S., *Funkcionalna analiza,* Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[7] Meise, R., Vogt D., *Introduction to Functional Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[8] Rakočević, Vladimir, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[9] Rickart, Charles, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, New York, 1960.

[10] Rudin, Walter, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

Kratka biografija sa bibliografijom

Jelena Gajić je rođena 16. 01. 1976. godine u Banjaluci, gdje je završila osnovnu školu i Gimnaziju. Na Prirodno-Matematičkom fakultetu u Banjaluci je odbranila diplomski rad 07. 03. 2001. godine pod naslovom " Primjena teoreme Baire-a u funkcionalnoj analizi", te stekla zvanje diplomirani matematičar i informatičar. Tokom studiranja radila je kao demonstrator na PMF-u.
Od 25. decembra 2001. godine izabrana je za asistenta na Tehnološkom fakultetu u Banjaluci na predmetima Matematika 1, Matematika 2 i Primijenjena statistika. Honorarno je bila angažovana na PMF-u u Banjaluci u periodu od 2003 do 2005 i 2006 do 2007 godine na predmetu Realne i kompleksne funkcije, a na Medicinskom fakultetu odsjek-farmacija od 2004 do 2006 godine na predmetu Matematika.

KNJIGE

1. Nevenka Skakić, Jelena Gajić: *Zbirka riješenih zadataka iz Teorije vjerovatnoće i matematičke statistike,* Prirodno-matematički fakultet, Banjaluka, 2008 godine.

NAUČNI RADOVI

1. Jelena Gajić, Sandra Kosić-Jeremić: *Jedan zadatak sa kompleksnim brojevima,* Nastava matematike, Društvo matematičara Srbije, Beograd, LIV_2-3/2009, 24-26.

2. D. Grujić, S. Janjić, M. Ristić, J. Gajić: *Ispitivanje sorpcionih svojstava tkanina različitih sirovinskih sastava,* I međunarodni kongres " Inženjerstvo, materijali i menadžment u procesnoj industriji", Jahorina, 14-16. 10. 2009.

3. Jelena Gajić, Sandra Kosić-Jeremić: *Neki zadaci sa kompleksnim brojevima,* XVI-ta godišnja skupština Naučnog društva matematičara, Banja Luka, 12-13. 06. 2009.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Jelena Gajić
AU
Mentor: Akademik Stevan Pilipović
MN

Naslov rada: Prilozi teoriji operatora-Banahove algebre i Šatenove klase
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
Godina: 2009
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mjesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 8/52/10/0/0/0/0/
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Funkcionalna analiza
ND
Predmetna odrednica/ Ključne riječi: Banach-ova algebra, spektar, kompaktni operatori, Hilbert-ovi prostori, singularni brojevi, $\mathbb{C}^{\star}-$ algebre, Gelfand-ova transformacija, spektralna mjera
PO

UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U ovom radu su izloženi osnovni rezultati iz teorije Banach-ovih algebri i Schatten-ovih klasa operatora. Uspostavljena je "1-1" korespodencija između maksimalnih ideala komutativne Banach-ove algebre $\mathcal{A}$ i elemenata spektra Banach-ove algebre $\mathcal{A}$. Pri $1 \leq p < \infty$ svaki od prostora $S_p(H)$ je Banach-ov i ideal je prostora $\mathcal{B}(H)$. Ako je H beskonačno dimenzionalan Hilbert-ov prostor, onda I nije kompaktan operator te $S_p(H)$ dodajemo jedinicu i dobijamo da je $S_p(H) \times \mathbb{C}$ Banach-ova algebra. Involutivna komutativna Banach-ova algebra $\mathcal{A}$ je izometrički $*-$ izomorfna $C(S_p(\mathcal{A}))$ akko je $\mathcal{A}$ $\mathbb{C}^{\star}-$ algebra. Integracija po spektralnoj mjeri je $*-$ homomorfizam sa komutativne $\mathbb{C}^{\star}-$ algebre $\mathcal{M}_\infty(Y)$ u $\mathcal{B}(H)$. Svakim normalnim operatorom A jednoznačno je određena spektralna mjera E na Borel-ovim podskupovima od $\sigma(A)$.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN vijeća:
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsjednik: dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Nenad Teofanov, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO