UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Vojnović

Uopštena rešenja zakona održanja

-završni rad-

Novi Sad, 2011

Predgovor

Modeli za većinu fizičkih sistema, uključujući dinamiku gasova, mehaniku fluida, elastičnost, relativnost, ekologiju, neurologiju, termodinamiku i mnoge druge, su nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine. Mnogi fundamentalni fenomeni koji su prisutni u modernim istraživanjima, kao što su haos, stabilnost, formiranje singulariteta, asimptotske osobine, nisu mogli da se detektuju u periodu kada nije bilo računara. Razvitak tehnologije je doprineo poboljšanju odgovarajućih numeričkih postupaka. Takođe su se razvile i nove matematičke teorije, analitičke metode i to sve je vodilo ka boljem razumevanju nelinearnih sistema. Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda su modeli za nelinearne talase i pojavljuju se u dinamici gasova, teoriji vodenih talasa, hemijskim reakcijama, biološkim i ekološkim sistemima. Jedan od najznačajnijih nelinearnih fenomena je formiranje prekidnih udarnih talasa. Poznat primer je supersonični udar koji proizvede avion kada probije zvučni zid.

Nelinearne hiperbolične sisteme parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda, koje su u divergentnom obliku, zovemo hiperboličnim sistemima zakona održanja. Slaba (distributivna) rešenja zakona održanja nisu jedinstvena u opštem slučaju, dolazi do formiranja prekidnih rešenja (udarni talasi, kontaktni diskontinuiteti i sl.), pa zato uvodimo entropijske uslove. Ovu vrstu uslova nazivamo entropijskim uslovima zbog jednačina gasne dinamike, gde entropija igra važnu ulogu.

Master rad se sastoji od tri poglavlja. Napominjemo da smo za krajeve dokaza, lema i propozicija koristili, redom, oznake $\blacksquare$, $\clubsuit$ i $\diamondsuit$.

U prvom poglavlju je data klasična teorija zakona održanja. Definisana su slaba rešenja, uveden je Rankin - Igonoov uslov. Razmatra se Rimanov problem. U slučaju skalarnog zakona održanja smo koristili Laks - Oleinik formulu da bismo dobili jedinstvenost rešenja Rimanovog problema. Zatim smo razmatrali sisteme zakona održanja. Po analogiji sa skalarnim zakonom održanja i ovde se definišu slaba rešenja i pojavljuje se Rankin - Igonoov uslov. Da bismo našli rešenja u obliku talasa razmatrali smo strogo hiperbolične sisteme zakona održanja. Tražili smo rešenja Rimanovog problema u obliku jednostavnog talasa. U tu svrhu smo koristili pojmove razređujuće krive, prirodno nelinearnih i linearno degenerisanih parova. Da bi se postigla jedinstvenost rešenja i ovde se uvode razni entropijski uslovi. Definisano je i entropijsko rešenje i dokazano je da je to rešenje odgovarajućeg zakona održanja.

U drugom poglavlju je dat kratak pregled Kolomboove teorije uopštenih funkcija, sa osvrtom na problem množenja distribucija, koji je inspirisao nastanak Kolomboovih algebri. Izložene su osobine specijalne Kolomboove algebre, čije elemente zovemo uopštenim funkcijama. Definišu se pojmovi umerenih i nula funkcija i objašnjeno je na koji način se prostori glatkih funkcija, distribucija, distribucija sa kompaktnim nosačem i temperiranih distribucija utapaju u prostor uopštenih funkcija.

Treće poglavlje je posvećeno rešavanju skalarnog zakona održanja u Kolomboovoj algebri. Radimo u algebri koja je modifikovana u odnosu na specijalnu algebru iz drugog poglavlja, ali tok konstrukcije ove modifikovane algebre prati šemu izloženu u prethodnom poglavlju. Posebno se posmatraju slučajevi kada je fluks - funkcija nezavisna od prostorne pormenljive i kada je fluks - funkcija eksplicitno zavisna od prostorne promenljive. U oba slučaja se dokazuje egzistencija i jedinstvenost uopštenih rešenja, uz date pretpostavke o početnom uslovu i fluks - funkciji. Za dobijanje klasičnih rešenja smo koristili Duhamel -ov princip.

Na kraju želim da izrazim zahvalnost svom mentoru, dr Jeleni Aleksić, na savetima, uputstvima, strpljenju. Bez njene pomoći rad ne bi imao sadašnji oblik. Zahvaljujem se i dr Stevanu Pilipoviću i dr Marku Nedeljkovu, članovima komisije za odbranu ovog rada.

Novi Sad, 2011 Ivana Vojnović

Sadržaj

Poglavlje 1

Zakoni održanja - klasična rešenja

1.1 Motivacija

Primer 1.1.1 (Burgersova[1] jednačina) *Posmatrajmo početni problem za Burgersovu jednačinu, kvazilinearnu jednačinu prvog reda oblika*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

Ova jednačina predstavlja model za kretanje talasa, gde je $u(x,t)$ visina talasa u tački x i trenutku t. Ako je $\phi^{'}(x) < 0$ može se desiti da se projektovane karakteristike seku, zbog čega imamo teškoću sa definisanjem rešenja iza tačke preseka. Do ovoga dolazi zbog "lomljenja" (sudaranja) talasa, Da bismo definisali rešenja za ovaj problem moramo da odredimo kako da definišemo rešenja iza tačke gde se projektovane karakteristike seku. Dakle, moramo da uzmemo u obzir i rešenje koja možda neće biti neprekidno! Kako funkcija, koja nije neprekidna, a kamoli diferencijabilna, može da zadovoljava diferencijalnu jednačinu? Pre nego što odgovorimo na ovo pitanje navešćemo još jedan primer.

Primer 1.1.2 (Kretanje u saobraćaju) *Posmatrajmo ulicu koja počinje u tački x_1, a završava se u tački x_2. Neka $u(x,t)$ predstavlja gustinu automobila u tački x i trenutku t. Dakle, ukupan broj automobila između tačaka x_1 i x_2 u trenutku t iznosi*

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx.$$

Brzina promene broja automobila između tačaka x_1 i x_2 u trenutku t je data sa

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

[1] Johannes (Jan) Martinus Burgers (1895 - 1981), holandski fizičar

gde f predstavlja brzinu protoka automobila koji ulaze u ulicu i onih koji izlaze iz ulice. Pretpostavljajući da su u i f C^1 funkcije vidimo da je

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)dx = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t)),$$

Odavde dobijamo

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} u_t(x,t)dx = \frac{f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))}{x_2 - x_1},$$

odnosno

$$u_t = -[f(u)]_x$$

kad $x_2 \to x_1$. Drugim rečima, veličina u nije ni stvorena ni uništena, totalna količina veličine u, koja je sadržana unatar datog intervala $[x_1, x_2]$, se menja samo zahvaljujući protoku u preko graničnih tačaka.

1.2 Slaba rešenja, Rankin - Igonoov uslov

U ovom odeljku ćemo se baviti početnim problemom za skalarne zakone održanja u jednoj prostornoj dimenziji

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

Funkcije $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su date, a $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je nepoznata, $u = u(x,t)$. U Primeru (1.1.1) smo naglasili da u opštem slučaju ne postoji glatko rešenje problema (1.1). Neka je $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ rešenje početnog problema (1.1). Neka je v funkcija sa sledećim osobinama

$$\begin{cases} v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ je glatka} \\ v \text{ ima kompaktan nosač} \end{cases} \tag{1.2}$$

Funkciju v zovemo test funkcijom. Skup svih test funkcija iz $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ u $\mathbb{R}$ označavamo sa $C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty); \mathbb{R})$. Pretpostavimo da je u glatka funkcija i pomnožimo jednačinu $u_t + [F(u)]_x = 0$ sa v. Koristeći parcijalnu integraciju, činjenicu da v nestaje u beskonačnosti (ima kompaktan nosač) i Fubinijevu teoremu dobijamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u_t + [F(u)]_x] v dx dt \\
&= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt + \Big[\int_{-\infty}^\infty u v dx \Big]|_{t=0} \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u) v_x dx dt \\
&= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + F(u) v_x) dx dt \\
&\quad - \int_{-\infty}^\infty \phi(x) v(x,0) dx.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Vidimo da je

$$
\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + F(u) v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x) v(x,0) dx = 0. \tag{1.4}
$$

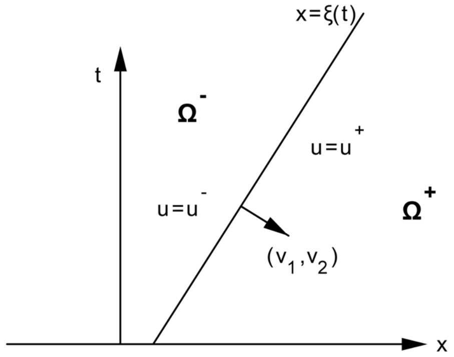
Poslednju jednakost smo izveli uz pretpostavku da je u glatko rešenje za (1.1). No, čak i ako funkcija u koja zadovoljava (1.4) nije glatka, ali jeste ograničena, zvaćemo je slabim rešenjem, odnosno uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 1.2.1 *Kažemo da je* $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ *(u je do na skup mere nula ograničena funkcija) slabo rešenje za* (1.1)*, ako jednakost* (1.4) *važi za sve test funkcije* v*, tj.* $v \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty); \mathbb{R})$.

Na osnovu prethodnih razmatranja vidimo da važi sledeća teorema

Teorema 1.2.2 *Ako je* u *klasično rešenje za* (1.1)*, onda je* u *slabo rešenje za* (1.1).

Kao što smo već napomenuli, pojam slabog rešenja dopušta i rešenja u koja nisu neprekidna. Ipak, postoje određena ograničenja kada je u pitanju vrsta prekida ovih rešenja.
Na primer, pretpostavimo da je u slabo rešenje za (1.1) i da u ima prekide duž glatke krive $x = \xi(t)$ i da je u glatko sa obe strane krive. Neka je $u^-(x,t)$ granična vrednost od u ka (x,t) sa leve strane, a $u^+(x,t)$ granična vrednost od u ka (x,t) sa desne strane. Tvrdimo da kriva $x = \xi(t)$ nije proizvoljna, već da postoji relacija između $x = \xi(t)$, u^- i u^+.



Slika 1.1: Rankin - Igonoov uslov

Teorema 1.2.3 *Ako je u slabo rešenje za (1.1) tako da u ima prekide duž krive $x = \xi(t)$, onda u mora da zadovoljava uslov*

$$\frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} = \xi^{'}(t) \tag{1.5}$$

gde je $u^-(x,t)$ granična vrednost od u ka (x,t) sa leve strane, a $u^+(x,t)$ granična vrednost od u ka (x,t) sa desne strane.

Dokaz.
Ako je u slabo rešenje za (1.1), onda

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(uv_t + F(u)v_x)dxdt + \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)v(x,0)dx = 0$$

za sve funkcije $v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \times [0,\infty); \mathbb{R})$. Definišimo

$$\Omega^- := \{(x,t) : 0 < t < \infty, -\infty < x < \xi(t)\}$$

$$\Omega^+ := \{(x,t) : 0 < t < \infty, \xi(t) < x < +\infty\}$$

1. Prvo izaberimo test funkciju v sa nosačem u Ω^-. Tada (1.4) postaje

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(uv_t + F(u)v_x)dxdt \\ &= -\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(u_t + F(u)_x)vdxdt, \end{aligned} \tag{1.6}$$

pri čemu je parcijalna integracija dozvoljena zato što je u klase C^1 u Ω^- i v nestaje u okolini granice od Ω^-. Identitet (1.6) važi za sve test funkcije sa nosačem u Ω^-, pa imamo da u Ω^- važi

$$u_t + F(u)_x = 0 \tag{1.7}$$

Slično dobijamo da u Ω^+ takođe važi $u_t + F(u)_x = 0$.

2. Izaberimo sada test funkciju v koja ne nestaje duž krive $x = \xi(t)$. Ponovnom primenom (1.4) izvodimo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty uv_t + F(u)v_x dxdt \\ &= \iint_{\Omega^-} uv_t + F(u)v_x dxdt \\ &\quad + \iint_{\Omega^+} uv_t + F(u)v_x dxdt \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pošto v ima kompaktan nosač i prema (1.7) imamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^-} uv_t + F(u)v_x dxdt &= -\iint_{\Omega^-} (u_t + F(u)_x) v dxdt \\ + \int_{x=\xi(t)} (u^- v\nu_2 + F(u^-)u\nu_1) ds &= \int_{x=\xi(t)} (u^- v\nu_2 + F(u^-)v\nu_1) ds \end{aligned} \tag{1.9}$$

gde je $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ spoljašnja jedinična normala na Ω^-.
Slično dobijamo

$$\iint_{\Omega^+} uv_t + F(u)v_x dxdt = -\int_{x=\xi(t)} (u^+ v\nu_2 + F(u^+)v\nu_1) ds$$

Ako saberemo poslednju jednakost sa (1.9) i iskoristimo (1.8) dobijamo

$$\int_{x=\xi(t)} [(F(u^-) - F(u^+))\nu_1 + (u^- - u^+)\nu_2] v ds = 0.$$

Pošto je ovo tačno za sve test funkcije v imamo

$$(F(u^-) - F(u^+))\nu_1 + (u^- - u^+)\nu_2 = 0$$

što implicira

$$\frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} = -\frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Kriva $x = \xi(t)$ ima nagib koji je jednak recipročnoj vrednosti normale na krivu, tj.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\xi'(t)} = -\frac{\nu_1}{\nu_2},$$

odnosno

$$\frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} = -\frac{\nu_2}{\nu_1} = \xi^{'}(t).$$

što smo i hteli da dokažemo.

■

Radi kraćeg označavanja definišemo

$$\begin{cases} [[u]] = u^- - u^+ = \text{skok od } u \text{ preko krive prekida} \\ [[F(u)]] = F(u^-) - F(u^+) = \text{skok od F(u) preko krive prekida} \\ \sigma = \xi^{'}(t) = \text{brzina krive prekida} \end{cases}$$

Dakle, u Teoremi 1.2.3 smo dokazali da je

$$[[F(u)]] = \sigma[[u]]. \tag{1.10}$$

duž krive prekida. Uslov (1.10) zove se **Rankin - Igonoov uslov**[2].

Primer 1.2.4 *(Udarni talasi)*
Posmatrajmo početni problem za Burgersovu jednačinu

$$\begin{cases} u_t + [\frac{u^2}{2}]_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.11}$$

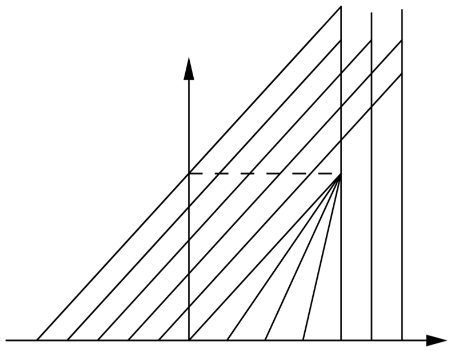
sa početnim uslovom

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \tag{1.12}$$

Koristćemo metodu karakteristika da bismo pokušali da rešimo ovu jednačinu. Ako su početni uslovi

$$\begin{aligned} t(r,0) &= 0 \\ x(r,0) &= r \\ z(r,0) &= \phi(r) \end{aligned}$$

[2]William John Macquorn Rankine (1820 - 1872), škotski fizičar; Pierre-Henri Hugoniot (1851 - 1887), francuski matematičar i fizičar; zbog toga u nastavku pišemo RH - uslov



Slika 1.2: Formiranje udarne krive

vidimo da je rešenje dato sa

$$\begin{aligned} t &= s \\ x &= \phi(r)s + r \\ z &= \phi(r) \end{aligned}$$

gde je $r \in \mathbb{R}$ *parametar, odakle dolazimo do rešenja za* (1.11) *u implicitnom obliku*

$$u = \phi(x - ut).$$

Bilo koje glatko rešenje za (1.11) *i* (1.12) *je konstantno duž projektovanih karakteristika,* $x = \phi(r)t + r$*. Vidimo da je za* $r < 0, \phi(r) = 1$*, a odavde zaključujemo da su projektovane karakteristike date sa* $x = t+r$*, za* $-\infty < r < 0$*, i* $u(x,t) = 1$ *duž ovih krivih. Za* $0 < r < 1$*,* $\phi(r) = 1 - r$ *i projektovane karakteristike su date sa* $x = (1-r)t+r$*, Duž ovih krivih je* $u(x,t) = z(r,s) = 1-r = (1-x)/(1-t)$*. Konačno, za* $r > 1$*,* $\phi(r) = 0$*, pa su projektovane karakteristike date sa* $x = r$ *i* $u = 0$*. Dakle, za* $t \leq 1$ *rešenje je definisano sa*

$$u(x,t) := \begin{cases} 1, & x \leq t, 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & x \geq 1, 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

Ipak, za $t \geq 1$ *ove metoda nam ne pomaže pošto se projektovane karakteristike seku. Više nemamo klasično rešenje. Kako da definišemo* u *za* $t \geq 1$*?*
Na osnovu Teoreme 2 znamo da rešenje mora da zadovoljava Rankin - Igonoov uslov. Cilj nam je da definišemo krivu $x = \xi(t)$ *tako da je* $u = 1$*, ako je* $x < \xi(t)$ *i* $u = 0$*, ako je* $x > \xi(t)$*, odnosno da je* $u^- = 1$*,* $u^+ = 0$*. Sada iz Rankin - Igonoovog uslova zaključujemo da je*

$$\xi'(t) = \frac{1}{2}.$$

Dodatno, želimo da kriva sadrži tačku $(x,t) = (1,1)$. *Odavde dobijamo da je* $x = \frac{t+1}{2}$. *Dakle, za* $t \geq 1$ *imamo*

$$u(x,t) := \begin{cases} 1, & x < \frac{t+1}{2} \\ 0, & x > \frac{t+1}{2} \end{cases} \tag{1.14}$$

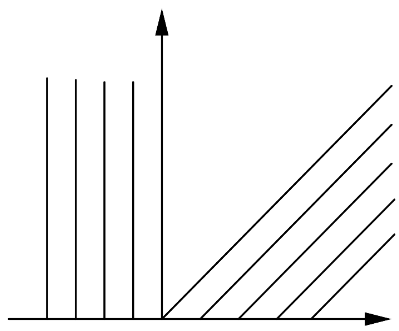
Rešenje u *definisano sa* (1.14) *je klasično rešenje sa svake strane krive* $x(t) = \frac{t+1}{2}$ *i* u *zadovoljava RH uslov, pa je* u *slabo rešenje za* (1.11), *ako je* $t \geq 1$.

1.3 Entropijski uslov

Primer 1.3.1 *Ponovo posmatramo početni problem* (1.11) *sa početnim uslovom*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Ako primenimo metod karakteristika videćemo da ovog puta neće doći do njihovog presecanja, ali ipak imamo problem pošto nemamo dovoljno informacija za oblast $\{0 < x < t\}$.



Slika 1.3: Karakteristične krive

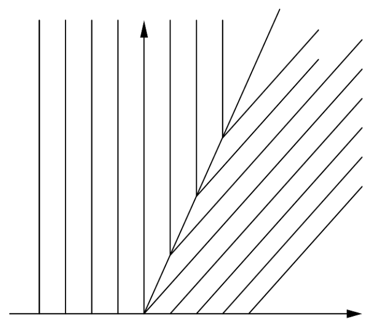
Neka je

$$u_1(x,t) := \begin{cases} 0, & x < \frac{t}{2} \\ 1, & x > \frac{t}{2} \end{cases} \tag{1.16}$$

Lako se proverava da RH uslov važi i da je u *slabo rešenje za* (1.11). *Međutim, možemo da definišemo i drugo rešenje na sledeći način*

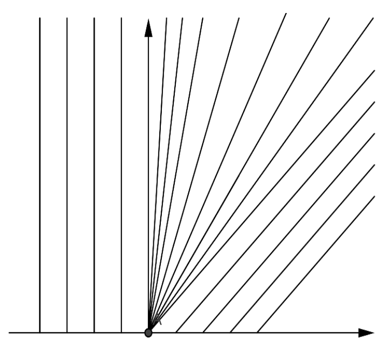
$$u_2(x,t) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & x > t \end{cases} \tag{1.17}$$

Primetimo da je u_2 neprekidno rešenje za (1.11). Funkcija u_2 se zove **razređujući talas**.



Slika 1.4: Prvo rešenje

Dakle, vidimo da u opštem slučaju slaba rešenja nisu jedinstvena. Ako pretpostavimo da među nađenim rešenjima ima i onih koja su fizički neprihvatljiva, postavlja se pitanje da li postoji kriterijum pomoću kog možemo da ih isključimo i da obezbedimo jedinstvenost rešenja.



Slika 1.5: Razređujući talas

Posmatrajmo ponovo skalarni zakon održanja u obliku

$$u_t + F(u)_x = 0.$$

Rešenje u, ako je glatko, će biti konstanto duž projektovanih karakteristika i brzina rešenja u je data sa

$$\frac{dx}{dt} = F'(u).$$

Kroz prethodne primere smo videli da dolazi do problema presecanja karakteristika i prekida rešenja ako se pomeramo ”napred” po vremenskoj promenljivoj. Ipak se nadamo da je moguće da neće doći do njihovog presecanja ako počnemo od neke tačke u $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ i ako idemo ”nazad” po vremenskoj promenljivoj, duž karakteristika. Drugim rečima, posmatrajmo po delovima glatka slaba rešenja za (1.1) sa osobinom da pri kretanju ”unazad” po vremenskoj promenljivoj nećemo naići na krive prekida za u.
Pretpostavimo da na nekoj tački krive prekida C rešenje u ima različite leve i desne limese, u^- i u^+ i da se karakteristike sa leve i desne strane seku u ovoj tački krive C. U Primeru 1.2.4. smo videli da se početni talas sa leve strane kretao brže od talasa sa desne strane (za Burgersovu jednačinu brzina rešenja u je $dx/dt = u$, pa se viši talasi kreću brže od nižih, odnosno, preciznije, talasi veće amplitude se kreću brže od talasa manje amplitude). Posledica ovakvog kretanja talasa je nastajanje krive prekida. U Primeru 1.3.1. talas sa desne strane se kreće brže. Zbog toga rešenje u_2 prihvatamo kao fizički relevantnije.
Na osnovu prethodnih razmatranja zaključujemo da nam odgovara da važi uslov

$$F'(u^-) > \sigma > F'(u^+) \tag{1.18}$$

Poslednji uslov je poznat kao **uslov entropije**. Kriva prekida za u je **udarna kriva** ako u zadovoljava RH uslov i entropijski uslov.

1.4 Formula Laks - Oleinik, Rimanov problem

U ovom odeljku ćemo pokušati da dobijemo formulu za slabo rešenje početnog problema (1.1) uz pretpostavku da je fluks funkcija F uniformno konveksna. F je uniformno konveksna ako postoji konstanta θ tako da je $F'' \geq \theta > 0$, što znači da je F' strogo rastuća. Pošto je F' pod ovom pretpostavkom i sirjektivna funkcija koristićemo oznaku $G := (F')^{-1}$ Neka je, bez umanjenja opštosti, $F(0) = 0$. Za $g \in L^\infty$(R) definišimo

$$h(x) := \int_0^x g(y)dy, x \in \mathbb{R} \tag{1.19}$$

Neka je

$$w(x,t) := \min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tF^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\} \tag{1.20}$$

Sa F^* je označena Ležandrova transformacija od F koja je definisana na sledeći način

$$F^*(p) := \sup_{q\in\mathbb{R}^n}\{p\cdot q - F(q)\}$$

pri čemu je $p \in \mathbb{R}^n$.

Može se pokazati[3] da je w jedinstveno slabo rešenje za sledeći početni problem (Hamilton - Jakobijeve jednačine)

$$\begin{cases} w_t + F(w_x) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ w = h, & x\in\mathbb{R}, t = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Pretpostavimo da je w glatko i diferencirajmo pretodnu jednačinu po promenljivoj x. Tada dobijamo

$$\begin{cases} w_x t + F(w_x)_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ w_x = g, & x\in\mathbb{R}, t = 0 \end{cases}$$

Ako je $w_x = u$ zaključujemo da u rešava problem (1.1). Rešenje w u opštem slučaju nije glatko, ali se može pokazati da je w skoro svuda diferencijabilno. Stoga imamo sledeću formulu

$$u(x,t) := \tfrac{\partial}{\partial_x}\Big[\min_{y\in\mathbb{R}}\Big\{tF^*\Big(\tfrac{x-y}{t}\Big) + h(y)\Big\}\Big] \tag{1.22}$$

koja je definisana za skoro sve (x,t). Sledeću teoremu navodimo bez dokaza. Zainteresovane čitaoce upućujemo na [2], poglavlja 3.3 i 3.4.

Teorema 1.4.1 (Laks - Oleinik[4] formula) *Pretpostavimo da je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatka, uniformno konveksna funkcija i da $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Tada važi*

1. *Za svako $t > 0$ postoji za sve osim za najviše prebrojivo mnogo vrednosti $x \in \mathbb{R}$ jedinstvena tačka $y(x,t)$ tako da je*

$$\min_{y\in\mathbb{R}}\Big\{tF^*\Big(\frac{x-y}{t}\Big) + h(y)\Big\} = tF^*\Big(\frac{x-y(x,t)}{t}\Big) + h(y(x,t)).$$

2. *Preslikavanje $x \mapsto y(x,t)$ je neopadajuće*

3. *Za svako $t > 0$ funkcija u definisana sa (2.22) je*

$$u(x,t) = G\Big(\tfrac{x-y(x,t)}{t}\Big) \tag{1.23}$$

za skoro sve (x,t).

---

[3]pogledati [2], poglavlje 3.3

[4]Olga Arsenievna Oleinik (1925 - 2001), ruski matematičar; Peter David Lax (rođen 1926), američki matematičar

Teorema 1.4.2 *Pod pretpostavkama Teoreme 1.4.1., funkcija u definisana sa* (1.23) *je slabo rešenje početnog problema* (1.1).

Dokaz. Neka je

$$w(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}} \left\{ tF^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\}$$

Može se pokazati ([2], na strani 127 je dokazana Lipšic neprekidnost, pa se primenom Rademajherove teoreme dobija da je Lipšic neprekidna funkcija diferencijabilna skoro svuda) da je ovako definisana funkcija w Lipšic neprekidna, diferencijabilna za skoro sve (x,t) i da je rešenje za početni problem

$$\begin{cases} w_t + F(w_x) = 0, & \text{za skoro sve}(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ w = h, & x \in \mathbb{R}, t = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

Neka je v proizvoljna test funkcija. Pomnožimo jednačinu $w_t + F(w_x) = 0$ sa v_x. Dobijamo

$$0 = \textstyle\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [w_t + F(w_x)] v_x dxdt. \tag{1.25}$$

Odatle izvodimo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_t v_x dxdt &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w v_{tx} dxdt - \int_{-\infty}^\infty w v_x dx|_{t=0} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_x v_t dxdt + \int_{-\infty}^\infty w_x v dx|_{t=0} \end{aligned}$$

Parcijalna integracija je dozvoljena pošto je preslikavanje $x \mapsto w(x,t)$ Lipšic neprekidno, pa i apsolutno neprekidno, za svako $t > 0$. Isto tako je i preslikavanje $t \mapsto w(x,t)$ apsolutno neprekidno za svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je $w(x,0) = h(x) = \int_0^x g(y)dy$ i $w_x(x,0) = g(x)$ za skoro sve x. Dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_x v_t dxdt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_x v_t dxdt + \int_{-\infty}^\infty g v dx|_{t=0}.$$

Ako ovaj identitet uvrstimo u (1.25) i uzmemo u obzir da je $u = w_x$ skoro svuda dobijamo izraz (1.4), što smo i hteli da dokažemo. ■

1.4.1 Slaba rešenja, jedinstvenost

Već smo videli da slaba rešenja za (1.1) u opštem slučaju nisu jedinstvena. Da bi se pokazalo da Laks - Oleinik formula daje ”tačno” (fizički prihvatljivo) rešenje za (1.1) moramo prvo da ustanovimo da li to rešenje zadovoljava neki oblik entropijskog uslova.

Lema 1.4.3 *(Jednostrani uslov skoka) Pod pretpostavkama Teoreme 1.4.1. postoji konstanta C tako da funkcija u definisana formulom Laks - Oleinik* (1.23) *zadovoljava nejednakost*

$$u(x+z,t) - u(x,t) \leq \frac{C}{t}z \tag{1.26}$$

za sve $t > 0$ i $x, z \in \mathbb{R}$, $z > 0$.

Definicija 1.4.4 *Nejednakost* (1.26) *zovemo LO (Lax - Oleinik) - entropijski uslov.*

Napomena 1.4.5 *Iz* (1.26) *sledi da je za $t > 0$ funkcija $x \mapsto u(x,t) - \frac{C}{t}x$ nerastuća i da zato ima levi i desni limes u svakoj tački. Zato i $x \mapsto u(x,t)$ ima levi i desni limes u svakoj tački i važi $u^-(x,t) \geq u^+(x,t)$. Vidimo da početni oblik entropijskog uslova važi u svakoj tački krive prekida.*

Dokaz Leme 1.4.3.

Za računanje minimuma u (1.23) treba da uzmemo u obzir one tačke y za koje je $|\frac{x-y}{t}| \leq C$ za neku konstantu C (za dokaz videti [2], strane 121 - 130). Stoga možemo da pretpostavimo da je G Lipšic neprekidna.
Kako su $G = (F')^{-1}$ i $y(\cdot, t)$ neopadajuće imamo

$$\begin{aligned} u(x,t) &= G\Big(\frac{x - y(x,t)}{t}\Big) \\ &\geq G\Big(\frac{x - y(x+z,t)}{t}\Big) \text{ za } z > 0 \\ &\geq G\Big(\frac{x + z - y(x+z,t)}{t}\Big) - \frac{Lip(G)z}{t} \\ &= u(x+z,t) - \frac{Lip(G)z}{t}. \end{aligned}$$

Napominjemo da je za Lipšic neprekidnu funkciju f, $Lip(f)$ definisano sa
$Lip(f) := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$. ♣

Definicija 1.4.6 *Kažemo da je funkcija $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ entropijsko rešenje za početni problem*

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.27}$$

ako važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + F(u)v_x)dxdt + \int_{-\infty}^\infty g(x)v(x,0)dx = 0. \tag{1.28}$$

za sve test funkcije $v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$*, i*

$$u(x+z,t) - u(x,t) \leq C(1 + \frac{1}{t})z \tag{1.29}$$

za neku konstantu $C > 0$ *i za skoro sve* $x, z \in \mathbb{R}$*,* $t > 0$ *i* $z > 0$*.*

Teorema 1.4.7 (Jedinstvenost entropijskih rešenja)
Pretpostavimo da je F *konveksna i glatka funkcija. Tada postoji najviše jedno entropijsko rešenje za* (1.27)*, do na skup mere nula.*

Dokaz izostavljamo i upućujemo zainteresovane na [2], strana 151. Primenu ove teoreme ćemo videti već u sledećem odeljku, u kom rešavamo Rimanov problem.

1.4.2 Rimanov problem

Početni problem (1.1) sa po delovima glatkim i konstantnim početnim uslovom

$$g(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0 \\ u^+, & x > 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

se zove Rimanov[5] problem za skalarni zakon održanja. Ovde su $u^-, u^+ \in \mathbb{R}$ levo i desno početno stanje, redom, $u^- \neq u^+$. Pretpostavljamo i dalje da je F uniformno konveksna i C^2 funkcija i koristimo oznaku $G = (F')^{-1}$. Tada je uslov (1.18) ekvivalentan sa

$$u^- > u^+ \tag{1.31}$$

duž krive prekida.

Teorema 1.4.8 (Rešenje Rimanovog problema)

1. *Ako je* $u^- > u^+$*, onda je jedinstveno rešenje Rimanovog problema* (1.1)*,* (1.30)

[5]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), nemački matematičar

$$u(x,t) := \begin{cases} u^-, & \frac{x}{t} < \sigma \\ u^+, & \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \tag{1.32}$$

gde je

$$\sigma := \frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} \tag{1.33}$$

2. *Ako je $u^- < u^+$, onda je jedinstveno rešenje Rimanovog problema*

$$u(x,t) := \begin{cases} u^-, & \frac{x}{t} < F'(u^-) \\ G(\frac{x}{t}), & F'(u^-) < \frac{x}{t} < F'(u^+) \\ u^+, & \frac{x}{t} > F'(u^+) \end{cases} \tag{1.34}$$

Napomena 1.4.9 *U prvom slučaju su stanja u^- i u^+ razdvojena udarnim talasom sa konstantnom brzinom σ. U drugom slučaju su odvojena razređujućim talasom.*

Dokaz Teoreme 1.4.8.

1. Pretpostavimo da je $u^- > u^+$. Jasno, u definisano sa (1.32) i (1.33) je slabo rešenje naše jednačine. Zbog (1.33) važi RH uslov. Primetimo da je

$$F'(u^+) < \sigma = \frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} = \fint_{u^+}^{u^-} F'(r)dr < F'(u^-).$$

Pošto je $u^- > u^+$ i F je konveksna entropijski uslov takođe važi. Jedinstvenost sledi iz Teoreme 1.4.7. Koristili smo oznaku
$\fint_{B(x,r)} f dy = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)} f dy$, gde je $\alpha(n)$ zapremina jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$.

2. Pretpostavimo da je $u^- < u^+$. Prvo moramo da proverimo da je u definisano sa (1.34) rešenje zakona održanja u oblasti $\{F'(u^-) < \frac{x}{t} < F'(u^+)\}$. Da bismo to potvrdili odgovorićemo na pitanje kada je funkcija u oblika

$$u(x,t) = v(\frac{x}{t})$$

rešenje za (1.1)[6]. Računamo

$$\begin{aligned} u_t + F(u)_x &= u_t + F'(u)u_x \\ &= -v'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{x}{t^2} + F'(v)v'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{1}{t} \\ &= v'\Big(\frac{x}{t}\Big)\frac{1}{t}\Big[F'(v) - \frac{x}{t}\Big]. \end{aligned}$$

[6]rešenje ovakvog oblika zovemo samoslično rešenje

Ako pretpostavimo da je $v' \neq 0$ (odbacujemo trivijalna rešenja), zaključujemo da je $F'(v(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t}$.

Dakle
$$u(x,t) = v\Big(\frac{x}{t}\Big) = G\Big(\frac{x}{t}\Big)$$
je rešenje za zakon održanja. Vidimo i da je $v(\frac{x}{t}) = u^-$ ako je $x/t = F'(u^-)$ i slično $v(\frac{x}{t}) = u^+$, ako je $x/t = F'(u^+)$.

Zaključujemo da je rezređujući talas u definisan sa (1.34) neprekidan na $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ i da je rešenje jednačine $u_t + F(u)_x = 0$ u svakoj od oblasti definicije. Stoga se lako proverava da je u slabo rešenje za (1.1) i (1.30). Pošto, kao što smo već rekli, možemo da pretpostavimo da je G Lipšic neprekidno imamo

$$u(x+z,t) - u(x,t) = G\Big(\frac{x+z}{t}\Big) - G\Big(\frac{x}{t}\Big) \leq \frac{Lip(G)z}{t},$$

ako je $F'(u^-)t < x < x+z < F'(u^+)t$. Iz ove nejednakosti sledi da u onda zadovoljava uslov entropije. Jedinstvenost je onda posledica Teoreme 1.4.7. ∎

1.5 Sistemi zakona održanja

U ovom odeljku glavni objekat proučavanja će biti sistem zakona održanja. U najopštijoj situaciji cilj nam je da istražimo vektorsku funkciju

$$u = u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)), x \in \mathbb{R}^n$$

čije komponente su gustine raznih konzervisanih veličina u nekom fizičkom sistemu koji se proučava. Ako je data ograničena oblast $U \subset \mathbb{R}^n$ primećujemo da integral

$$\int_U u(x,t)dx \tag{1.35}$$

predstavlja ukupnu količinu ovih veličina u U u trenutku t. Zakon održanja kaže da je brzina promene u okviru U kontrolisana fluks funkcijom $F : \mathbb{R}^m \to M^{m\times n}$, koja utiče na brzinu gubitka ili porasta od u kroz ∂U, gde je $M^{m\times n}$ prostor realnih $m \times n$ matrica. Drugačije rečeno

$$\frac{d}{dt}\int_U u(x,t)dx = -\int_{\partial U} F(u)\nu dS \tag{1.36}$$

gde je ν jedinična spoljašnja normala na U. Iz prethodnog identiteta zaključujemo

$$\int_U u_t(x,t)dx = -\int_{\partial U} F(u)\nu dS = -\int_U \mathrm{div} F(u)dx. \tag{1.37}$$

Kako je oblast U bila proizvoljna izvodimo sledeći početni problem za opšti sistem zakona održanja

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{div} F(u) = 0, & \text{na } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{u } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{1.38}$$

Nadalje ćemo posmatrati početni problem za sistem zakona održanja u jednoj prostornoj dimenziji.

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0, & \text{u } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{u } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{1.39}$$

gde su $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ date i $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ je nepoznata, $u = u(x,t)$

1.5.1 Slaba rešenja

Sledeći ideje iz prethodnog odeljka pretpostavimo da $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty);\mathbb{R}^m)$, odnosno

$$\begin{cases} v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m \text{ je glatka} \\ v \text{ ima kompaktan nosač}, v = (v_1, \dots, v_m) \end{cases} \tag{1.40}$$

Ako pretpostavimo da je u glatka i skalarno pomnožimo jednačinu $u_t + F(u)_x = 0$ sa v dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + F(u)v_x)dxdt + \int_{-\infty}^\infty g(x)v(x,0)dx = 0. \tag{1.41}$$

Uvodimo sledeću definiciju

Definicija 1.5.1 *Kažemo da je $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty);\mathbb{R}^m)$ slabo rešenje za početni problem (1.39) ako jednakost (1.41) važi za sve test funkcije v, tj. $v \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty);\mathbb{R}^m)$*

Pretpostavimo da imamo slabo rešenje od (1.39) koje je glatko sa svake strane krive C, duže koje u ima prekide. Neka je $V \subset \mathbb{R} \times (0,\infty)$ neka oblast u kojoj leži kriva C i neka su V_l i V_r "leva" i "desna" strana ove oblasti u odnosu na C. Ako pretpostavimo da je u glatka sa svake strane krive C ponovo možemo pokazati da važi Rankin - Igonoov uslov. Dokaz je analogan dokazu u skalarnom slučaju do dela kada zaključujemo da je

$$(F(u_l) - F(u_r))\nu_1 + (u_l - u_r)\nu_2 = 0$$

Pošto sada radimo sa vektorima dokaz moramo da modifikujemo. Pretpostavimo da je C data parametarski u obliku $\{(x,t)|x = s(t)\}$ za neku glatku funkciju $s : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Možemo da uzmemo da je $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (1 + \dot{s}^2)^{-\frac{1}{2}}(1, -\dot{s})$. Stoga imamo

$$(F(u_l) - F(u_r) = \dot{s}(u_l - u_r)$$

u V, duž krive C. Kao i pre, uvodimo oznake

$$\begin{cases} [[u]] = u_l - u_r = \text{skok od } u \text{ preko krive prekida} \\ [[F(u)]] = F(u_l) - F(u_r) = \text{skok od F(u) preko krive prekida} \\ \sigma = \dot{s} = \text{brzina krive prekida} \end{cases},$$

odnosno

$$[[F(u)]] = \sigma[[u]]. \tag{1.42}$$

Poslednja jednakost je poznata kao Rankin - Igonoov uslov skoka. Ne zaboravimo da sad imamo vektorsku jednačinu.

1.5.2 Putujući talasi, hiperbolični sistemi

Videli smo kroz primere da slaba rešenje ne moraju da budu jedinstvena. Da bismo dobili jedinstvenost moramo da pretpostavimo dodatne uslove, kao što je entropijski uslov. Zato očekujemo da ćemo imati slične pretpostavke i za sisteme.

Posmatrajmo prvo širu klasu semilinearnih sistema koji imaju nedivergentan oblik

$$u_t + B(u)u_x = 0, \quad \text{u } \mathbb{R} \times (0,\infty) \tag{1.43}$$

gde je B matrica, $B : \mathbb{R}^m \to M^{m\times m}$. Za glatke funkcije ovaj sistem je ekvivalentan sa sistemom oblika (1.39) pri čemu je

$$B = DF = \begin{bmatrix} F^1_{z_1} & \dots & F^1_{z_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^m_{z_1} & \dots & F^m_{z_m} \end{bmatrix}$$

Pokušaćemo da nađemo rešenja koja su u obliku "putujućeg talasa"

$$u(x,t) = v(x - \sigma t), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.44}$$

gde $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ i $\sigma \in \mathbb{R}$ treba da se odrede. Zamenićemo (1.44) u (1.43) da bismo dobili jednakost

$$-\sigma v'(x - \sigma t) + B(v(x - \sigma t))v'(x - \sigma t) = 0 \tag{1.45}$$

Primetimo da iz (1.45) vidimo da je σ karakteristični koren matrice $B(v)$ koji odgovara karakterističnom vektoru v'. Ovo nas navodi na zaključka da ako želimo da nađemo rešenja u obliku talasa, onda nam treba neka vrsta pretpostavke o hiperboličnosti koja se odnosi na karakteristične korene matrice B.

Definicija 1.5.2 *Ako su za svako $z \in \mathbb{R}^m$ karakteristični koreni od $B(z)$ realni i različiti, sistem (1.43) je strogo hiperboličan.*

Napomena 1.5.3

1. *Za svako $k = 1, \ldots, m$ sa r_k označavamo odgovarajući karakterističan vektor (različit od nule) tako da važi*

   $$B(z)r_k(z) = \lambda_k(z)r_k(z) \tag{1.46}$$

   Zbog pretpostavke o strogoj hiperboličnosti vektori $r_k(z), k = 1, \ldots, m$ su vektori baze, za svako $z \in \mathbb{R}^m$.

2. *Pošto matrica i njena transponovana matrica imaju isti spektar za svako $k = 1, \ldots, m$ uvodimo karakterističan vektor $l_k(z)$ za matricu $B(z)^T$ koji odgovara karakterističnom korenu $\lambda_k(z)$ Dakle,*

   $$B(z)^T l_k(z) = \lambda_k(z)l_k(z) \tag{1.47}$$

   što obično pišemo u obliku

   $$l_k(z)B(z) = \lambda_k(z)l_k(z) \tag{1.48}$$

   Vektore $l_k(z)$ zovemo levim karakterističnim vektorima, a vektore $r_k(z)$ desnim, $k = 1, \ldots, m$.

   Primetimo da je $l_j(z) \cdot r_k(z) = 0$ za $j \neq k$

Može se pokazati da je pojam stroge hiperboličnosti nezavisan od koordinata. Važi i sledeća teorema.

Teorema 1.5.4 *(Zavisnost karakterističnih korena i karakterističnih vektora od parametara).*
Pretpostavimo da je matrica B glatka i strogo hiperbolična. Tada

1. *karakteristični koreni $\lambda_k(z)$ glatko zavise od $z \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Karakteristične vektore $r_k(z)$ i $l_k(z)$ možemo izabrati tako da glatko zavise od $z \in \mathbb{R}^m$ i zadovoljavaju*

$$|r_k(z)| = 1, |l_k(z)| = 1,$$

$k = 1, \ldots, m.$

1.5.3 Rimanov problem za sisteme zakona održanja

Ponovo razmatramo Rimanov problem, ali sada za sistem zakona održanja

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad \text{u } \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{1.49}$$

sa po delovima glatkim, konstantnim početnim uslovom

$$g = \begin{cases} u_l & \text{ako } x < 0 \\ u_r & \text{ako } x > 0. \end{cases}$$

Ovaj početni problem nazivamo Rimanov problem. Vektore u_l i u_r zovemo levim i desnim početnim stanjem, redom.

Jednostavni talasi

Tražićemo rešenja koja imaju specijalan oblik. Ovaj postupak smo već koristili kad smo tražili rešenje oblika $u(x,t) = v(x - \sigma t)$. Sada tražimo jednostavne talase. To su rešenja problema (1.49) oblika

$$u(x,t) = v(w(x,t)), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.50}$$

gde $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $v = (v_1, \ldots, v_m)$ i $w : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ treba da se odrede. Ako zamenimo (1.50) u (1.49) dobijamo

$$\dot{v}(w) + DF(v(w))\dot{v}(w)w_x = 0 \tag{1.51}$$

Ako uzmemo u obzir (1.46) sa $B = DF$ vidimo da će (1.51) da važi ako je za neko $k \in \{1, \ldots, m\}$ w rešenje jednačine

$$w_t + \lambda_k(v(w))w_x = 0 \tag{1.52}$$

i ako je v rešenje ODJ

$$\dot{v}(s) = r_k(v(s)) \tag{1.53}$$

pri čemu je $\cdot = \frac{d}{ds}$. Ako prethodne dve jendakosti važe, funkciju u definisanu sa (1.50) zovemo *k - jednostavan talas*. Dakle, (1.53) je ODJ za vektorsku funkciju v. Kad nađemo v, jednakost (1.52) je skalarni zakon održanja za w.

Da bismo odredili uslove pod kojima je moguće primeniti konstrukciju $(1.50)-(1.53)$ kako bismo dobili neprekidno rešenje u moramo da ispitamo ODJ (1.53).

Definicija 1.5.5 *Za fiksiran vektor $z_0 \in \mathbb{R}^m$ definišemo k -tu razređujuću krivu kao integralnu krivu vektorskog polja r_k kroz z_0. Označavamo je sa $R_k(z_0)$.*

Ako je rešenje v ODJ određeno, jednačinu (1.52) rešavamo kao skalarni zakon održanja u obliku

$$w_t + F_k(w)_x = 0 \tag{1.54}$$

za

$$F_k(s) := \int_0^s \lambda_k(v(t))dt \tag{1.55}$$

Tada imamo

$$F_k'(s) = \lambda_k(v(s)), \tag{1.56}$$

$$F_k''(s) = D\lambda_k(v(s)) \cdot \dot{v}(s) = D\lambda_k(v(s)) \cdot r_k(v(s)). \tag{1.57}$$

Na osnovu poslednje jednakosti zaključujemo da će funkcija F_k biti konveksna ako je

$$D\lambda_k(z) \cdot r_k(z) > 0$$

i konkavna ako je

$$D\lambda_k(z) \cdot r_k(z) < 0$$

pri čemu $z \in R^m$. Funkcija F_k je linearna ako važi

$$D\lambda_k(z) \cdot r_k(z) \equiv 0$$

Uvodimo sledeću definiciju

Definicija 1.5.6

1. *Kažemo da je par* $(\lambda_k(z), r_k(z))$ *prirodno (stvarno) nelinearan ako je*

$$D\lambda_k(z) \cdot r_k(z) \neq 0 \tag{1.58}$$

za sve $z \in \mathbb{R}^m$.

2. *Kažemo da je par* $(\lambda_k(z), r_k(z))$ *linearno degenerisan ako je*

$$D\lambda_k(z) \cdot r_k(z) = 0 \tag{1.59}$$

za sve $z \in \mathbb{R}^m$.

Ako je par (λ_k, r_k) prirodno nelinearan pišemo

$$R_k^+(z_0) := \{z \in R_k(z_0) \mid \lambda_k(z) > \lambda_k(z_0)\}$$

i

$$R_k^-(z_0) := \{z \in R_k(z_0) \mid \lambda_k(z) < \lambda_k(z_0)\}$$

Tada je

$$R_k(z_0) := R_k^+(z_0) \cup \{z_0\} \cup R_k^-(z_0)$$

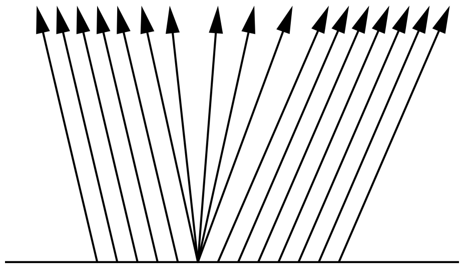
Razređujući talasi

Teorema 1.5.7 (Egzistencija k - razređujućih talasa) *Pretpostavimo da je za neko* $k \in \{1, \ldots, m\}$

1. *par* (λ_k, r_k) *prirodno nelinearan i*

2. $u_r \in R_k^+(u_l)$

Tada postoji neprekidno slabo rešenje u *Rimanovog problema* (1.49), *koje je k - jednostavan talas i koje je konstantno duž linija koje prolaze kroz koordinatni početak. Rešenje* u *zovemo k - razređujući talas.*



Slika 1.6: k - razređujući talas

Dokaz. Neka su w_l i $w_r \in \mathbb{R}$ takvi da je $u_l = v(w_l)$, $u_r = v(w_r)$. Pretpostavimo da je $w_l < w_r$.

Posmatrajmo skalarni Rimanov problem koji se sastoji od jednačine (1.54) sa početnim uslovom

$$g = \begin{cases} w_l & \text{ako } x < 0 \\ w_r & \text{ako } x > 0. \end{cases}$$

Zbog pretpostavke 2. imamo $\lambda_k(u_r) > \lambda_k(u_l)$, tj. prema (1.56), $F_k'(w_r) > F_k'(w_l)$. Tada iz pretpostavke 1. sledi da je funkcija F_k definisana sa (1.55) striktno konveksna. Sada možemo da primenimo Teoremu 1.4.8. za skalarni Rimanov problem (1.54) sa gornjim početnim uslovom, čije jedinstveno slabo rešenje je neprekidan razređujući talas koji povezuje stanja w_l i w_r. Preciznije

$$w(x,t) = \begin{cases} w_l, & \frac{x}{t} < F_k'(w_l) \\ G_k(\frac{x}{t}), & F_k'(w_l) < \frac{x}{t} < F_k'(w_r) \\ w_r, & \frac{x}{t} > F_k'(w_r) \end{cases} \tag{1.60}$$

gde je $G_k = (F_k')^{-1}$. Dakle, $u(x,t) = v(w(x,t))$, gde je v rešenje ODJ i prolazi kroz u_l, je neprekidno slabo rešenje za Rimanov problem koji smo rešavali. Slučaj $w_l > w_r$ se slično razmatra, pošto je F_k tada konkavna. ■

Udarni talasi, kontaktni diskontinuiteti

Da bismo imali udarni talas znamo da mora da važi RH uslov, odnosno $F(u_l) - F(u_r) = \sigma(u_l - u_r)$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Ovo nas motiviše da uvedemo sledeću definiciju

Definicija 1.5.8 *Za fiksirano stanje $z_0 \in \mathbb{R}^m$ definišemo udarni skup*

$$S(z_0) := \{z \in \mathbb{R}^m \mid F(z) - F(z_0) = \sigma(z - z_0) \text{ za konstantu } \sigma = \sigma(z, z_0)\}$$

Teorema 1.5.9 *Fiksirajmo $z_0 \in \mathbb{R}^m$. U nekoj okolini od z_0, $S(z_0)$ se sastoji od unije m glatkih krivih $S_k(z_0)$, $k = 1, \ldots, m$ sa sledećim osobinama*

1. *Kriva $S_k(z_0)$ prolazi kroz z_0, sa tangentom $r_k(z_0)$.*
2. $\lim_{z \to z_0} \sigma(z, z_0) = \lambda_k(z_0)$, $z \in S_k(z_0)$.
3. $\sigma(z, z_0) = \frac{\lambda_k(z) + \lambda_k(z_0)}{2} + O(|z - z_0|^2)$ *, dok* $z \to z_0$.

Za dokaz pogledati [2], strana 583.
Može se pokazati da krive $S_k(z_0)$ i $R_k(z_0)$ imaju kontakt prvog reda u tački z_0 . U slučaju linearne degenerisanosti ove krive se poklapaju.

Teorema 1.5.10 (Linearna degenerisanost) *Pretpostavimo da je za neko $k \in \{1, \ldots, m\}$ par (λ_k, r_k) linearno degenerisan. Tada za svako $z_0 \in \mathbb{R}^m$ važi*

1. $R_k(z_0) = S_k(z_0)$ *i*
2. $\sigma(z, z_0) = \lambda_k(z) = \lambda_k(z_0)$ *za sve* $z \in S_k(z_0)$.

Dokaz. Neka je $v = v(s)$ rešenje ODJ

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = r_k(v(s)) \\ v(0) = z_0 \end{cases}$$

Tada je preslikavanje $s \mapsto \lambda_k(v(s))$ konstantno i

$$\begin{aligned} F(v(s)) - F(z_0) &= \int_0^s DF(v(t))\dot{v}(t)dt = \int_0^s DF(v(t))r_k(v(t))dt \\ &= \int_0^s \lambda_k(v(t))r_k(v(t))dt = \lambda_k(z_0) \int_0^s \dot{v}(t)dt \\ &= \lambda_k(z_0)(v(s) - z_0) \end{aligned}$$

■

Pretpostavimo da je (λ_k, r_k) linearno degenerisan i

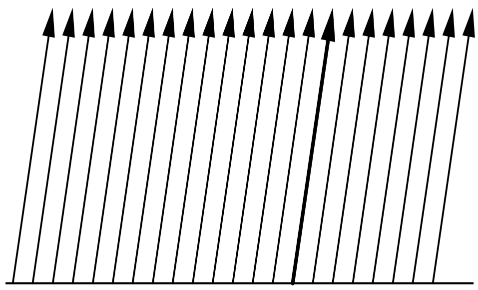
$$u_r \in S_k(u_l) \tag{1.61}$$

Tada definišemo slabo rešenje našeg sistema zakon održanja na sledeći način

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < \sigma t \\ u_r & x > \sigma t \end{cases} \tag{1.62}$$

za

$$\sigma = \sigma(u_r, u_l) = \lambda_k(u_l) = \lambda_k(u_r).$$



Slika 1.7: k - kontaktni diskontinuitet

Pošto je $\lambda_k(u_l) = \lambda_k(u_r) = \sigma(u_r, u_l) = \sigma$ projektovane kaakteristike sa obe strane krive prekida su paralelne sa krivom prekida.
Fizički ovu situaciju tumačimo tako što kažemo da čestice fluida ne prelaze preko prekida. Prava $x = \sigma t$ se zove k - kontaktni diskontinuitet.

Posmatrajmo sada slučaj kada je (λ_k, r_k) prirodno nelinearan i, kao i pre

$$u_r \in S_k(u_l). \tag{1.63}$$

Ako je slabo rešenje dato sa

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x < \sigma t \\ u_r & x > \sigma t \end{cases} \tag{1.64}$$

za

$$\sigma = \sigma(u_r, u_l) \tag{1.65}$$

vidimo da moramo da razlikujemo dva slučaja

$$\lambda_k(u_r) < \lambda_k(u_l) \tag{1.66}$$

ili

$$\lambda_k(u_r) > \lambda_k(u_l) \tag{1.67}$$

Zbog treće osobine iz Teoreme 1.5.9. važi

$$\lambda_k(u_r) < \sigma < \lambda_k(u_l) \tag{1.68}$$

ili

$$\lambda_k(u_l) < \sigma < \lambda_k(u_r). \tag{1.69}$$

Zbog analogije sa situacijom koju smo imali kod skalarnog zakona održanja odbacićemo nejednakost (1.69) i prihvatiti (1.68) kao fizički relevantniju. Intuitivno možemo da zaključimo da će tada karakteristike da se seku duž krive prekida gde se "informacije gube" i zato entropija raste. Ova interpretacija je bila matematički opravdana u slučaju skalarnog zakona održanja teoremom o jedinstvenosti za slaba rešenja, koja je zadovoljavala ovu vrstu entropijskog uslova.

Definicija 1.5.11 *Pretpostavimo da je par (λ_k, r_k) prirodno nelinearan u u_l. Kažemo da je par (u_l, u_r) dopustiv ako važi*

$$u_r \in S_k(u_l) \tag{1.70}$$

i

$$\lambda_k(u_r) < \sigma(u_r, u_l) < \lambda_k(u_l) \tag{1.71}$$

Uslov (1.71) zovemo Laksov entropijski uslov. Ako je (u_l, u_r) dopustiv, rešenje u definisano sa (1.64), (1.65) zovemo k - udarni talas.

Definicija 1.5.12 *Ako je par (λ_k, r_k) prirodno nelinearan, pišemo*

$$S_k^+(z_0) := \{z \in S_k(z_0) \mid \lambda_k(z_0) < \sigma(z, z_0) < \lambda_k(z)\}$$

i

$$S_k^-(z_0) := \{z \in S_k(z_0) \mid \lambda_k(z) < \sigma(z, z_0) < \lambda_k(z_0)\}$$

Tada je u okolini z_0

$$S_k(z_0) = S_k^+(z_0) \cup \{z_0\} \cup S_k^-(z_0)$$

Primetimo da je par (u_l, u_r) dopustiv ako i samo ako $u_r \in S_k^-(u_l)$.

Definicija 1.5.13

1. *Ako je par (λ_k, r_k) prirodno nelinearan pišemo*

$$T_k(z_0) := R_k^+(z_0) \cup \{z_0\} \cup S_k^-(z_0)$$

2. *Ako je par (λ_k, r_k) linearno degenerisan pišemo*

$$T_k(z_0) := R_k(z_0) = S_k(z_0)$$

Usvajajući prethodnu notaciju vidimo da stanja u_l i u_r mogu da budu povezana k - razređujućim talasom, udarnim talasom ili kontaktnim diskontinuitetom ako je $u_l \in T_k(u_r)$.

Ako uslov $u_l \in T_k(u_r)$ nije ispunjen može se pokazati da lokalno rešenje Rimanovog problema i dalje postoji. Za u_r i u_l koji su dovoljno blizu cilj je da pomerajući se duž krivih T_k za različite vrednosti k povežemo u_l i u_r koristeći niz razređujućih talasa, udarnih talasa ili kontaktnih diskontinuiteta. Važi sledeća teorema([2], strana 590).

Teorema 1.5.14 (Lokalno rešenje Rimanovog problema) *Pretpostavimo da je za svako $k = 1, \dots, m$ par (λ_k, r_k) prirodno nelinearan ili linearno degenerisan i da je stanje u_l dato. Tada za svako stanje u_r koje je dovoljno blizu u_l postoji slabo rešenje u Rimanovog problema, koje je konstantno duž pravih koje prolaze kroz koordinatni početak.*

1.6 Entropijski uslov za sisteme zakona održanja

Za rešavanje Rimanovog problema smo pretpostavili da važi Laksov entropijski uslov

$$\lambda_k(u_r) < \sigma(u_r, u_l) < \lambda_k(u_l) \tag{1.72}$$

za neko $k \in \{1, \dots, m\}$ koji je bio izborni kriterijum za dopustive udarne talase.

Generalno bi fizički i matematički korektna rešenja trebalo da budu granične vrednosti rešenja sistema

$$u_t^\varepsilon + F(u^\varepsilon)_x - \varepsilon u_{xx}^\varepsilon = 0 \tag{1.73}$$

gde $x \in \mathbb{R}$ i $t \in (0, \infty)$. Ideja je da se $\varepsilon u_{xx}^\varepsilon$ interpretira kao viskozni efekat (nestajuća viskoznost). Cilj je da se proučava prethodni problem kad $\varepsilon \to 0$ kako bi se dobili opštiji entropijski uslovi.

1.6.1 Nestajuća viskoznost

Prvo tražimo rešenje paraboličnog sistema (1.73) koje ima oblik

$$u^\varepsilon(x,t) = v\Big(\frac{x - \sigma t}{\varepsilon}\Big) \tag{1.74}$$

gde σ i v treba da se odrede. Ako zamenimo prethodnu jednakost u (1.73) vidimo da $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $v = v(s)$ mora da bude rešenje ODJ

$$\ddot{v} = -\sigma\dot{v} + DF(v)\dot{v} \tag{1.75}$$

Pretpostavimo da su u_l i $u_r \in \mathbb{R}^m$ dati i dalje da je

$$\lim_{s\to-\infty} v = u_l, \ \lim_{s\to\infty} v = u_r, \ \lim_{s\to\pm\infty} \dot{v} = 0 \tag{1.76}$$

Tada iz (2.74) zaključujemo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x,t) = \begin{cases} u_l, & \text{ako } x < \sigma t \\ u_r, & \text{ako } x > \sigma t \end{cases} \tag{1.77}$$

Dakle, limes kad $\varepsilon \to 0$ rešenja jednačine (1.73) daje udarni talas koji povezuje stanja u_l i u_r.

Sada treba proveriti da li postoje σ i v koji zadovoljavaju (1.75) i (1.76). Integraljenjem (1.75) dobijamo

$$\dot{v} = F(v) - \sigma v + c \tag{1.78}$$

za neku konstantu $c \in \mathbb{R}^m$. Iz (1.76) zaključujemo da je

$$F(u_l) - \sigma u_l + c = F(u_r) - \sigma u_r + c \tag{1.79}$$

Dakle, $F(u_l) - F(u_r) = \sigma(u_l - u_r)$. Jednačina (1.78) postaje

$$\dot{v} = F(v) - F(u_l) - \sigma(v - u_l). \tag{1.80}$$

Pretpostavimo da je u_l dato i da pokušavamo da dobijemo rešenje koje povezuje u_l sa u_r. Iz prethodne analize vidimo da $u_r \in S_k(u_l)$ za neko $k \in \{1,\dots,m\}$ i

$$\sigma = \sigma(u_r, u_l) \tag{1.81}$$

Teorema 1.6.1 (Postojanje putujućih talasa za prirodno nelinearne sisteme) *Pretpostavimo da je par (λ_k, r_k) prirodno nelinearan za $k = 1,\dots,m$. Stanje u_r biramo tako da bude dovoljno blizu stanju u_l. Tada postoji rešenje za (1.73) u obliku putujućeg talasa koje povezuje u_l i u_r ako i samo ako*

$$u_r \in S_k^-(u_l) \tag{1.82}$$

za neko $k \in \{1,\dots,m\}$

Pretohodna teorema zahteva pretpostavku o prirodnoj nelinearnosti, ali se uz dodatne entropijske uslove može odbaciti (pogledati [2], strana 602 i [10], strana

20, uvodi se tzv. Lijev uslov). Dalje ćemo se baviti upravo entropijskim uslovima i njihovim uticajem na rešenja zakona održanja. Jedna ideja je da slabo rešenje zadovoljava određenje nejednakosti ”entropijskog tipa’.

Definicija 1.6.2 *Dve glatke funkcije Φ i $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ zovemo entropijskim parom za zakon održanja $u_t + F(u)_x = 0$ ako važi*

$$\Phi \textit{ je konveksna} \tag{1.83}$$

i

$$D\Phi(z)DF(z) = D\Psi(z) \tag{1.84}$$

pri čemu uslov (1.83) *znači da je* $D^2\Phi\xi_i \cdot \xi_j \geq 0.$

Ako pretpostavimo da je u neprekidno diferencijabilno rešenje dobijamo

$$\begin{aligned}\Phi(u)_t + \Psi(u)_x &= D\Phi(u) \cdot u_t + D\Psi(u) \cdot u_x \\ &= (-D\Phi(u)DF(u) + D\Psi(u)) \cdot u_x = 0\end{aligned}$$

Vidimo da $\Phi(u)$ zadovoljava skalarni zakon održanja sa fluksom $\Psi(u)$.
Pomnožimo sada jednačinu $u_t^\varepsilon + F(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon$ sa $D\Phi(u^\varepsilon)$. Dobijamo

$$[\Phi(u^\varepsilon)]_t + [\Psi(u^\varepsilon)]_x = \varepsilon D\Phi(u^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon =$$

$$= \varepsilon[\partial_{xx}[\Phi(u)] - D^2\Phi(u)u_x u_x]$$

Zbog konveksnosti je $D^2\Phi(u)u_x \cdot u_x \geq 0$. Ako poslednju jednakost pomnožimo sa nenegativnom test funkcijom v i primenimo parcijalnu integraciju dobijamo

$$\iint (\Phi(u^\varepsilon)v_t + \Psi(u^\varepsilon)v_x)dxdt \geq -\varepsilon \iint \Phi(u^\varepsilon)v_{xx}dxdt$$

Kako $u^\varepsilon \to u$ kad $\varepsilon \to 0$ sledi

$$\iint (\Phi(u)v_t + \Psi(u)v_x)dxdt \geq 0$$

za svaku nenegativnu test funkciju v. Sledi da je

$$\Phi(u)_t + \Psi(u)_x \leq 0$$

(u distributivnom smislu). Dakle, važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(u)v_t + \Psi(u)v_x dxdt \geq 0 \tag{1.85}$$

Ponovo posmatramo početni problem

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{u } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \text{u } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.86}$$

Definicija 1.6.3 *Rešenje u zovemo entropijskim rešenjem za* (1.86) *ako je u slabo rešenje i zadovoljava nejednakost* (1.85) *za svaki entropijski par* (Φ, Ψ).

Ponovo očekujemo da fizički prihvatljivo rešenje u bude granična vrednost rešenja u^ε sledećeg problema

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + F(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon & \text{u } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u^\varepsilon = g & \text{u } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.87}$$

Pretpostavljamo da je u^ε glatko rešenje za (1.87) i da konvergira ka 0 kad $|x| \to \infty$ dovoljno brzo da opravda račun koji sledi. Dalje pretpostavljamo da je $\{u^\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ uniformno ograničen u L^∞ i da je

$$u^\varepsilon \to u \text{ skoro svuda kad } \varepsilon \to 0 \tag{1.88}$$

za neku graničnu funkciju u (u praksi je veoma teško proveriti ovu konvergenciju).

Teorema 1.6.4 (Entropija i nestajuća viskoznost) *Funkcija u je entropijsko rešenje zakona održanja* (1.86).

Dokaz. Izaberimo entropijski par (Φ, Ψ). Ako pomnožimo sleva (2.86) sa $D\Phi(u^\varepsilon)$ i iskoristimo (1.84) dobija se

$$\begin{aligned} \Phi(u^\varepsilon)_t + \Psi(u^\varepsilon)_x &= \varepsilon D\Phi(u^\varepsilon) u_{xx}^\varepsilon \\ &= \varepsilon \Phi(u^\varepsilon)_{xx} - \varepsilon (D^2\Phi(u^\varepsilon) u_x^\varepsilon) \cdot u_x^\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Zbog konveksnosti funkcije Φ sledi

$$(D^2\Phi(u^\varepsilon) u_x^\varepsilon) \cdot u_x^\varepsilon \geq 0. \tag{1.90}$$

Kao i pre, množenjem (1.89) sa $v \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty); \mathbb{R})$, $v \geq 0$, parcijalnom integracijom i primenom teoreme o dominantnoj konvergenciji dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(u) v_t + \Psi(u) v_x dxdt \geq 0 \tag{1.91}$$

što znači da u zadovoljava odgovarajuće entropijske nejednakosti.

Fiksirajmo $v \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty); \mathbb{R}^m)$ i skalarno pomnožimo jednačinu (1.87) sa v. Ponovnom primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^\varepsilon \cdot v_t + F(u^\varepsilon)v_x + \varepsilon u^\varepsilon \cdot v_{xx} dxdt + \int_{-\infty}^\infty g \cdot vdx|_{t=0} = 0.$$

Kada pustimo da $\varepsilon \to 0$ zaključujemo da je u slabo rešenje za (1.86). ∎

Primer 1.6.5 (Metod nestajuće viskoznosti za Burgersovu jednačinu)
Posmatramo sledeći početni problem

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + u^\varepsilon u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon & u\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u^\varepsilon = g & u\ \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.92}$$

Ako definišemo $w(x,t) := \int_{-\infty}^x u^\varepsilon(y,t)dy$ i $h(x) := \int_{-\infty}^x g(y)dy$ primenom Hof - Kolove[7] transformacije (detaljnije objašnjenje ovog načina rešavanja Burgersove jednačine dato je u Primeru 3.2.10) dobijamo prvo formulu za w, a onda koristeći da je $u = w_x$ i formulu za u^ε

$$u^\varepsilon(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^\infty \frac{x-y}{t} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{h(y)}{2\varepsilon}} dy}{\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{h(y)}{2\varepsilon}} dy}$$

Uvodimo oznaku

$$K(x,y,t) := \frac{|x-y|^2}{2t} + h(y)$$

Primetimo da iz prethodnih formula sledi da je u^ε glatka funkcija. Treba pokazati da $u^\varepsilon \to u$ kad $\varepsilon \to 0$. Koristićemo sledeću lemu ([2], strana 206)

Lema 1.6.6 *Neka su $k, l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije, da l raste najviše linearno i da k raste bar kvadratno. Pretpostavimo da postoji jedinstvena tačka $y_0 \in \mathbb{R}$ tako da je*

$$k(y_0) = \min_{y \in \mathbb{R}} k(y)$$

Tada važi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{-\infty}^\infty l(y) e^{\frac{-k(y)}{\varepsilon}} dy}{\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-k(y)}{\varepsilon}} dy} = l(y_0)$$

Vratimo se sada formulama za u^ε i $K(x,y,t)$.
Primetimo da je $K(x,y,t) = tL(\frac{x-y}{t}) + h(y)$, gde je $L = F^*$ za $F(z) = \frac{z^2}{2}$. Za svako $t > 0$ preslikavanje $y \mapsto K(x,y,t)$ dostiže minimum u jedinstvenoj

[7] Eberhard Frederich Ferdinand Hopf (1902 - 1983), matematičar i astronom; Julian David Cole (1925 - 1999), američki matematičar

tački $y = y(x,t)$ *za sve osim za najviše prebrojivo mnogo tačaka* x. *Tada lema implicira*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(x,t) = \frac{x - y(x,t)}{t} = G\Big(\frac{x - y(x,t)}{t}\Big) = u(x,t)$$

za $G = (F')^{-1}$.

Poslednja jednakost je Laks - Oleinik formula za jedinstveno entropijsko rešenje početnog problema

$$\begin{cases} u_t + (u^2/2)_x = 0 & \textit{u}\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \textit{u}\ \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.93}$$

Poglavlje 2

Kolomboove algebre uopštenih funkcija

2.1 Množenje distribucija

Teorija distribucija, čiji osnivač je L. Schwartz[1], se pokazala kao vrlo korisna za rešavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Schwartz je za svoju teoriju dobio Fildsovu medalju 1950. godine. Pokazalo se da je u nekim njenim primenama potrebno množiti dve distribucije (npr., pri rešavanju nelinearnih pdj). Mnogi matematičari su pokušavali da nađu način da definišu proizvod dve proizvoljne distribucije. Neki od njih su delimično rešili ovaj problem, ali je i dalje bilo potrebno naći potpuno rešenje. Odgovarajuću teoriju je razvio J. F. Colombeau[2], radi se o teoriji uopštenih funkcija koju ćemo razmatrati u ovom poglavlju.
Vratimo se problemu množenja distribucija. Množenje na $C^\infty \times \mathcal{D}'$ ($\langle fu, \phi \rangle := \langle u, f\phi \rangle$) je dobro definisano tako da je prirodno pretpostaviti da će množenje na $\mathcal{D}'$ biti ekstenzija ovog množenja. Ipak, sledeći primer pokazuje da tada množenje ne bi bilo asocijativno. Važi

$$0 = (\delta(x) \cdot x) \cdot vp\frac{1}{x} \neq \delta(x) \cdot (x \cdot vp\frac{1}{x}) = \delta(x)$$

Pokušajmo da definišemo δ^2 kao element prostora distribucija $\mathcal{D}'$ primenom postupka regularizacije. Za to će biti potreban pojam striktne delta mreže.

Definicija 2.1.1 *Pod striktnom delta mrežom podrazumevamo mrežu* $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$, $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *pri čemu važi*

[1] Laurent-Moise Schwartz (1915 - 2002), francuski matematičar
[2] Jean-Francois Colombeau (rođen 1947), francuski matematičar

supp$(\rho_\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \int \rho_\varepsilon(x)dx = 1, \ \varepsilon > 0$

$\int |\rho_\varepsilon(x)|dx$ *je uniformno ograničen po* ε

Vidimo da $\rho_\varepsilon \to 0$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neka je ϕ takva test funkcija da važi $\phi = 1$ u okolini 0. Tada imamo

$$\int \rho_\varepsilon^2(x)\phi(x)dx = \int \rho_\varepsilon^2(x)dx$$

Ako bi ρ_ε^2 konvergirao u $\mathcal{D}'$ imali bismo da je $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ ograničen u L^2 i zato ima L^2 konvergentan podniz. Ali tada bi važilo da je δ u L^2, što je kontradikcija. Ovi primeri ilustruju do kakvih problema može doći pri pokušajima da definišemo množenje na $\mathcal{D}'$. Jedan od načina pomoću kojih se množenje može definisati jeste da zamenimo jedan ili oba faktora glatkom funkcijom, što se postiže konvolucijmo sa tzv. molifajerom, zatim da izračunamo proizvod u $\mathcal{D}' \times C^\infty$ ili $C^\infty \times C^\infty$ i onda da pređemo na graničnu vrednost, ako je moguće.

Definicija 2.1.2 *Za* $u, v \in \mathcal{D}'$ *definišemo*

$$u \cdot [v] = \lim_{\varepsilon\to 0} u(v * \rho_\varepsilon)$$

$$[u] \cdot v = \lim_{\varepsilon\to 0} (u * \rho_\varepsilon)v$$

$$[u] \cdot [v] = \lim_{\varepsilon\to 0} (u * \rho_\varepsilon)(v * \sigma_\varepsilon)$$

$$[u \cdot v] = \lim_{\varepsilon\to 0} (u * \rho_\varepsilon)(v * \rho_\varepsilon)$$

ako granična vrednost postoji u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *za sve striktne delta mreže* $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ *i* $(\sigma_\varepsilon)_\varepsilon$*. (Vidimo da je definicija nezavisna od izbora mreže).*

Delta mreža može da se definiše i na sledeći način. Neka je ϕ test funkcija, tj. $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tako da je $\int \phi(x)dx = 1$ i neka je $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Tada se $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ zove model delta mreža. Ako u prethodnoj definiciji striktne delta mreže zamenimo model delta mrežama odgovarajuće proizvode zovemo model proizvodima.

Cilj nam je da prostor distribucija utopimo u neku algebru $(\mathcal{A}, +, \circ)$. Treba proveriti da li je moguća konstrukcija algebri koje su asocijativne, komutativne i zadovljavaju sledeće uslove:

1. $\mathcal{D}'(\Omega)$ može da se utopi u $\mathcal{A}(\Omega)$ i $f(x) = 1$ je jedinični element u $\mathcal{A}(\Omega)$

2. Postoji operator izvoda $\partial_i : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega)$ koji je linearan i zadovoljava Lajbnicovo pravilo

3. $\partial_i|_{\mathcal{D}'(\Omega)}$ je standardni parcijalni izvod.

4. $\circ|_{L^\infty_{loc}(\Omega)\times L^\infty_{loc}(\Omega)}$ se poklapa sa proizvodom funkcija po komponentama.

   Prema uslovu 2. $\mathcal{A}(\Omega)$ je diferencijalna algebra. Može se pokazati da se u bilo kojoj asocijativnoj, komutativnoj algebri koja zadovoljava uslove 1 i 2 uslovi 3 i 4 međusobno isključuju. Zato uslov 4. pokušavamo da oslabimo uslovom

5. $\circ|_{\mathcal{C}(\Omega)\times\mathcal{C}(\Omega)}$ se poklapa sa proizvodom funkcija po komponentama.

   L. Schwartz je pokazao da ne postoji asocijativna, komutativna algebra koja zadovoljava uslove $1-3$ i 5.

   Ukoliko bismo $\mathcal{C}$ zamenili sa $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ ponovo bismo dobili da odgovarajuća algebra ne postoji. Međutim, moguće je konstruisati asocijativnu, komutativnu algebru koja zadovoljava uslove $1-3$ i sledeći uslov

6. $\circ|_{\mathcal{C}^\infty(\Omega)\times\mathcal{C}^\infty(\Omega)}$ se poklapa sa proizvodom funkcija po komponentama.

   Takve algebre je definisao J. F. Colombeau, osnove ove teorije su izložene u knjigama [1], [14], [13].

2.2 Specijalna algebra - $\mathcal{G}^s(\Omega)$. Definicija i osnovne osobine.

Neka je nadalje $I=(0,1]$ i $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ znači $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in I}$.

Definicija 2.2.1 *Neka je*

$\mathcal{E}^s(\Omega) := (C^\infty(\Omega))^I$

$\mathcal{E}^s_M(\Omega) := \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega) | \forall K \subset\subset \Omega\ \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists N \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O(\mathcal{E}^{-N})$ *kad* $\varepsilon \to 0\}$

$\mathcal{N}^s(\Omega) := \{(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega) | \forall K \subset\subset \Omega\ \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \forall m \in \mathbb{N} :\}$

$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O(\mathcal{E}^{m})$ *kad* $\varepsilon \to 0\}$

Elemente skupa $\mathcal{E}^s_M(\Omega)$ zovemo umerenim funkcijama, a skupa $\mathcal{N}^s(\Omega)$ nula - funkcijama.
Specijalna Kolomboova algebra na Ω je definisana kao faktor algebra

$$\mathcal{G}^s(\Omega) := \mathcal{E}^s_M(\Omega)/\mathcal{N}^s(\Omega)$$

Prostor svih umerenih funkcija, $\mathcal{E}_M^s(\Omega)$, je diferenicijalna algebra (najveća diferenicijalna podalgebra od $\mathcal{E}^s(\Omega)$ u kojoj je $\mathcal{N}^s(\Omega)$ ideal) sa operacijama definisanim po komponentama. Dakle, $\mathcal{G}^s(\Omega)$ je asocijativna i komutativna diferencijalna algebra. Ako je $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega)$ predstavnik elementa $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ pisaćemo $u = [(u_\varepsilon)_\varepsilon]$. Jasno, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ je podalgebra algebre $\mathcal{G}^s(\Omega)$ zbog konstantnog preslikavanja $\sigma : f \mapsto (f)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega)$.

Može se pokazati (pogledati [1], strana 11) da je umerena funkcija nula - funkcija ako i samo ako važi

$$\forall K \subset\subset \Omega, \forall m \in \mathbb{N} : \sup_{x \in K} |u_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^m),\ \varepsilon \to 0.$$

U nastavku se bavimo utapanjem prostora distribucija $\mathcal{D}'(\Omega)$ u prostor $\mathcal{G}^s(\Omega)$. Traženo utapanje može da se realizuje pomoću konvolucije distribucije sa odgovarajućim molifajerom. Prvo navodimo definiciju molifajera u prostoru test funkcija $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i definiciju brzo opadajuće funkcije.

Definicija 2.2.2 *Funkcija $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se zove molifajer ako važi*

1. $\text{supp}(\rho) \subseteq \overline{B_1(0)}$

2. $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1.$

Definicija 2.2.3 *Neka je $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Kažemo da je funkcija φ brzo opadajuća ako važi*

$$\textit{za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty$$

Vektorski prostor svih brzo opadajućih funkcija na $\mathbb{R}^n$ se označava sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Za utapanje prostora $\mathcal{D}'(\Omega)$ će nam trebati molifajer ρ sa sledećim osobinama

$$\int \rho(x)dx = 1,$$

$$\int x^\alpha \rho(x)dx = 0,\ \forall\ |\alpha| \geq 1.$$

Ipak, ne postoji molifajer $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ koji zadovoljava istovremeno prethodna dva uslova. Sa druge strane, postoji $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa željenim osobinama (za detalje pogledati [1], strana 16). Dakle, u nastavku je $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, zadovoljava prethodne uslove i važi

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

Nije moguća konvolucija ovog tipa molifajera sa elementima $\mathcal{D}'(\Omega)$ bez izvesnih ograničenja. Posmatrajmo prostor distribucija sa kompaktnim nosačem, $\mathcal{E}'(\Omega)$. Važi sledeća teorema

Teorema 2.2.4 *Preslikavanje*

$$\iota_0 : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{G}^s(\Omega)$$

$$w \mapsto ((w * \rho_\varepsilon)|_\Omega)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega)$$

je linearno utapanje.

Koristeći Tejlorov razvoj i osobine molifajera ρ može se pokazati da je $\iota_0|_{\mathcal{D}(\Omega)} = \sigma$ i da za svake dve test funkcije f, g važi $\iota_0(f \cdot g) = \iota_0(f) \cdot \iota_0(g)$, pa zaključujemo da je $\mathcal{D}(\Omega)$ podalgebra algebre $\mathcal{G}^s(\Omega)$. Na isti način možemo da utopimo i $L^\infty(\Omega)$. Preslikavanje ι_0 možemo da iskoristimo da bismo utopili $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{G}^s(\Omega)$. Ovde ćemo izložiti samo ideju kako se dolazi do ovog utapanja, za precizan dokaz treba iskoristiti činjenicu da su $\mathcal{G}^s(\Omega)$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$ snopovi. Prvo biramo otvoren pokrivač $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ od Ω tako da je svaki $\overline{\Omega}_\lambda$ kompaktan podskup od Ω. Neka je $(\psi_\lambda)_\lambda$ familija test funkcija tako da je $\psi_\lambda \equiv 1$ u nekoj okolini od $\overline{\Omega}_\lambda$. Za svako $\lambda \in \Lambda$ definišemo preslikavanje

$$\iota_\lambda : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{G}^s(\Omega_\lambda)$$

$$w \mapsto \iota_\lambda(w) := (((\psi_\lambda w) * \rho_\varepsilon)|_{\Omega_\lambda})_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\Omega_\lambda).$$

Familija $(\iota_\lambda(w))_{\lambda\in\Lambda}$ je koherentna (tj. $\iota_\lambda(w)|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu} = \iota_\mu(w)|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}$, za sve $\lambda, \mu \in \Lambda$), pa se zaključuje da postoji jedinstveno $\iota(w) \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ tako da je $\iota(w)|_{\Omega_\lambda} = \iota_\lambda(w)$, za sve $\lambda \in \Lambda$. Elemenat $\iota(w)$ definiše linearno utapanje $\iota : \mathcal{D}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega)$. Za ovako definisano preslikavanje ι važi $\iota|_{\mathcal{E}'(\Omega)} = \iota_0$ i $\iota|_{\mathcal{C}^\infty(\Omega)} = \sigma$, što znači da je $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ podalgebra algebre $\mathcal{G}^s(\Omega)$. Preslikavanje ι očuvava izvode, odnosno, ako je $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$, onda je $\partial^\alpha(\iota(w)) = \iota(\partial^\alpha(w))$ i dobro je definisano, tj. ne zavisi od izbora pokrivača $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ i funkcija $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Videli samo da je za distribucije sa kompaktnim nosačem $\iota(w) = \iota_0(w) = [(w * \rho_\varepsilon)_\varepsilon]$. Ovakav direktan računa za $\iota(w)$ je moguć i za sve distribucije na Ω koje mogu da se prošire tako da budu temperirane distribucije na $\mathbb{R}^n$. Temperirana distribucija na $\mathbb{R}^n$ je neprekidna, linearna funkcionela $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, prostor temperiranih distribucija na $\mathbb{R}^n$ označavamo sa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Za $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω otvoren skup, definišemo

$$\mathcal{S}'(\Omega) = \{w \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \exists \tilde{w} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ tako da je } \tilde{w}|_\Omega = w \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega)\}$$

Na primer, svaka funkcija koja pripada $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$ je u $\mathcal{S}'(\Omega)$, ekstenzija $\tilde{f}$ je funkcija koja se poklapa sa f na Ω i koja je jednaka nuli izvan Ω. Za svako $w \in \mathcal{S}'(\Omega)$ i ekstenziju $\tilde{w} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ od w važi $\iota(w) = [((\tilde{w} * \rho_\varepsilon)|_\Omega)_\varepsilon]$

Primer 2.2.5 *1. Delta distribucija je distribucija sa kompaktnim nosačem (supp$(\delta) = \{0\}$) pa imamo*

$$\iota(\delta) = (\rho_\varepsilon)_\varepsilon + \mathcal{N}^s(\mathbb{R}).$$

Vidimo da su osobine δ određene izborom molifajera ρ. U $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$ je $\iota(x)\iota(\delta) = [(x\rho_\varepsilon(x))_\varepsilon]$. Iako je $x \cdot \delta = 0$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$ važi $(x\rho_\varepsilon(x))_\varepsilon \notin \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$.

U $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^n)$ nemamo problem sa δ^2 . Važi

$$\iota(\delta)^2 = [(\rho_\varepsilon^2)_\varepsilon].$$

2. *Za Hevisajdovu funkciju (koja je temperirana distribucija) imamo*

$$\iota(H) = [(H * \rho_\varepsilon(x))_\varepsilon] = [(\int_{-\infty}^{x} \rho_\varepsilon(y)dy)_\varepsilon].$$

U $\mathcal{G}^s(\Omega)$ je moguće definisati i kompoziciju funkcija. Posmatrajmo glatku funkciju v čiji svi izvodi (uključujući i samu funkciju) rastu najviše kao stepen od $|x|$, kad $|x| \to \infty$ (prostor ovakvih funkcija označavamo sa $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ i funkcije koje mu pripadaju su sporo rastuće funkcije). Tada je za $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{G}^s(\Omega)^m$ i $v \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ kompozicija $v \circ u := [(v \circ u_\varepsilon)_\varepsilon]$ dobro definisan element od $\mathcal{G}^s(\Omega)$.

Dva elementa $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ su jednaka ako je $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$. Pored jednakosti na $\mathcal{G}^s(\Omega)$ uvodimo i relaciju asociranosti.

Definicija 2.2.6 *Element $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ je asociran sa 0 ($u \approx 0$) ako je*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = 0, \text{ za sve } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Iz definicije zaključujemo da predstavnik $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ od u konvergira ka 0 u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ako je $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, onda je $u \approx v \Leftrightarrow u - v \approx 0$. Ako je $u = v$, onda je i $u \approx v$, ali obratno u opštem slučaju ne važi. Ako je $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ i $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$, onda $u \approx w$ znači da je $u \approx \iota(w)$. Za dve distribucije w_1 i w_2 važi $w_1 = w_2 \Leftrightarrow \iota(w_1) \approx \iota(w_2)$, odnosno dve distribucije su asocirane ako i samo ako su jednake. Važi i sledeća važna lema

Lema 2.2.7 *Ako $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ i $u \approx v$, onda*

- $\partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$;
- $\iota(f)u \approx \iota(f)v,$ *za sve* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Poglavlje 3

Zakoni održanja u Kolomboovoj algebri uopštenih funkcija

3.1 Uvod

U ovom poglavlju ćemo se baviti uopštenim rešenjima skalarnog zakona održanja, ispitivaćemo pod kojim uslovima se mogu dobiti jedinstvena rešenja.

Posmatrajmo početni problem za skalarni zakon održanja

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.1}$$

i odgovarajuću paraboličnu aproksimaciju

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2}$$

gde je $\mu > 0$, $u : \overline{\mathbb{R}^2_+} = \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Želimo da konstruišemo rešenja u algebri $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ (čiju definiciju navodimo u nastavku). Uopštena funkcija $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ koja je rešenje problema (3.1) u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ se zove *uopšteno rešenje* za (3.1). To znači da za dato $u_0 = [(u_{0\varepsilon})] \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$, $(u_{\varepsilon t} + (f(u_\varepsilon))_x)_\varepsilon \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ i $(u_\varepsilon(\cdot,0) - u_{\varepsilon 0})_\varepsilon \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R})$. Uopštena funkcija $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ koja je rešenje problema (3.1) pri čemu je jednakost zamenjena sa relacijom asociranosti, $\approx$, zove se *aproksimativno (uopšteno) rešenje* za (3.1).

Sada uvodimo osnovne definicije i osobine koje koristimo. Algebru glatkih funkcija na $\mathbb{R}$ (odnosno $\mathbb{R}^2_+$), čiji svi izvodi su ograničeni označavamo sa $\mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R})$, (tj. $\mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^2_+)$). Dalje je

$$\mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^2_+) := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2_+) : u|_{\mathbb{R}\times(0,T)} \in \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}\times(0,T)),\ \text{za sve } T > 0\},$$

odnosno, preciznije

$$\mathcal{C}_{\bar{b}}^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^{2}) := \{u \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^{2}) : \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N},\ \forall T > 0,$$

$$\|u\|_{\alpha,\beta;T} := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} |\partial_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} u(x,t)| < \infty\}.$$

Za $T = \infty$ dobijamo prostor $\mathcal{C}_{b}^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^{2})$. Ako eliminišemo $\mathbb{R}^{+}$ i posmatramo supremum nad $\mathbb{R}$ dobijamo $\mathcal{C}_{b}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Sa $\mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$ označavamo prostor svih umerenih funkcija, pri čemu mrežu funkcija $(u_{\varepsilon})_{\varepsilon\in(0,1)} \in (\mathcal{C}_{\bar{b}}^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^{2}))^{(0,1)}$ zovemo umerenom ako za sve $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2}$ i za sve $T > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da je $\|u_{\varepsilon}\|_{\alpha,\beta;T} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N})$, kad $\varepsilon \to 0$. Sa $\mathcal{N}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$ označavamo podskup elemenata $u \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$ za koje važi da je za sve $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2}, q \in \mathbb{N}, T > 0$, $\|u_{\varepsilon}\|_{\alpha,\beta,T} = \mathcal{O}(\varepsilon^{q})$, $\varepsilon \to 0$. Kao i u prethodnom poglavlju, definišemo Kolomboovu algebru kao faktor algebru $\mathcal{G}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2}) = \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}_{+}^{2})/\mathcal{N}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$. Na isti način se definiše algebra $\mathcal{G}_{g}(\mathbb{R})$

Kako je $\mathcal{C}_{\bar{b}}^{\infty}(\mathbb{R}_{+}^{2}) = \mathcal{C}_{\bar{b}}^{\infty}(\overline{\mathbb{R}_{+}^{2}})$, tj. svaki element od $\mathcal{C}_{\bar{b}}^{\infty}$ ima glatko proširenje na $\{t = 0\}$, možemo definsati restrikciju uopštene funkcije na pravoj $\{t = 0\}$. Restrikcija elementa $u \in \mathcal{G}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$ se definiše kao klasa familije $(u_{\varepsilon}(x, 0))_{\varepsilon}$, gde je $(u_{\varepsilon}(x, t))_{\varepsilon}$ predstavnik elementa u.

Kompoziciju funkcije $f : \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$ sa uopštenom funkcijom $u \in \mathcal{G}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$ tako da $f(u) \in \mathcal{G}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$, odnosno $f(x, u) \in \mathcal{G}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$, ako fluks funkcija zavisi i od prostorne promenljive x, definišemo uz pretpostavku da je f sporo rastuća.

Definicija 3.1.1 *Glatka funkcija $f : \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$ je sporo rastuća u beskonačnosti ako*

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^{2},\ \exists N_{\alpha} \in \mathbb{N},\ \exists c_{\alpha} > 0 : |\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2} f(x, y)| \leq c_{\alpha}(1 + |\lambda|)^{N_{\alpha}},$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Broj $N_{(0,0)}$ je red funkcije f.

Sada ćemo definisati utapanje prostora ograničenih distribucija, $\mathcal{D}'_{L^{\infty}}(\mathbb{R})$ u algebru $\mathcal{G}_{g}(\mathbb{R})$. Neka je $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ brzo opadajuća funkcija tako da je $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} x^{n}\rho(x)dx = 0$, za $n \in \mathbb{N}$ i neka je $\rho_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$, $w \in \mathcal{D}'_{L^{\infty}}(\mathbb{R})$. Utapanje definišemo preslikavanjem $\iota_{\rho} : w \mapsto [(w * \rho_{\varepsilon})_{\varepsilon}]$, koje komutira sa izvodom, odnosno $\partial_x \iota_{\rho}(w) = \iota_{\rho}(\partial_x w)$. Ako je $w \in \mathcal{C}_{b}^{\infty}$, onda je $(w_{\varepsilon})_{\varepsilon} = (w)_{\varepsilon}$ predstavnik uopštene funkcije $\iota_{\rho}(w)$.

Uopštena funkcija $u \in \mathcal{G}_{g}(\mathbb{R}_{+}^{2})$ je asocirana sa distribucijom $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{+}^{2})$, $u \approx w$, ako je $u^{\varepsilon} \to w$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{+}^{2})$, kad $\varepsilon \to 0$.

Definicija 3.1.2 *Element $\mu \in \mathcal{G}_{g}(\mathbb{R})$ je uopštena konstanta ako ima predstavnika $(\mu_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ tako da je $\mu_{\varepsilon}(x, t) = \mu_{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, za svako $\varepsilon \in (0, 1)$.*

Uopštena konstanta $[(\mu_\varepsilon)_\varepsilon]$ je striktno pozitivna ako

$$\exists N \in \mathbb{N}: \quad \varepsilon^N \leq \mu_\varepsilon \leq \varepsilon^{-N},\ \varepsilon \to 0.$$

Ako je μ striktno pozitivna uopštena konstanta, onda je to i $1/\mu$. Striktno pozitivna uopšten a konstanta je asocirana sa nulom, $\mu \approx 0$ ako i samo ako $\mu_\varepsilon \to 0, \varepsilon \to 0$.

Definicija 3.1.3 *Funkcija $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ je $\sqrt[r]{log}$ - tipa ako ima predstavnika $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ tako da je za svako $T > 0$*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} |u_\varepsilon(x,t)| = \mathcal{O}(\sqrt[r]{|log\varepsilon|}),\ \textit{kad}\ \varepsilon \to 0.$$

Funkcija u je ograničenog tipa ako

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} |u_\varepsilon(x,t)| = \mathcal{O}(1),\ \textit{kad}\ \varepsilon \to 0.$$

Analogna definicija važi za $\mathcal{G}_g(\mathbb{R})$. Ako je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, onda je $\iota_\rho(u_0)$ ograničenog tipa. Iz prethodnih definicija zaključujemo da važi sledeće lema

Lema 3.1.4 *Ako je $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sporo rastuća funkcija reda r i ako je $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ $\sqrt[r]{|log\varepsilon|}$ - tipa, onda $\mathrm{e}^{f(u)} \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$. Preciznije,*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} \mathrm{e}^{|f(u_\varepsilon(x,t))|} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big),$$

kad $\varepsilon \to 0$, za sve $T > 0$.

3.2 Zakoni održanja sa fluks - funkcijom nezavisnom od prostorne promenljive

Posmatramo početni problem (3.1) i njegovu paraboličnu aproksimaciju (3.2). Pretpostavljamo da je $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i da je $f = f(u)$. Prvo navodimo Gronwall - ovu nejednakost, koju ćemo da koristimo u nastavku.

Lema 3.2.1 *Neka je w nenegativna, neprekidna funkcija na $[0,\infty)$ i pretpostavimo da je*

$$w(t) \leq a + b\int_0^t \frac{w(s)}{\sqrt{t-s}} ds$$

za neke konstante $a, b \geq 0$ i za svako $t \geq 0$. Tada je

$$w(t) \leq a(1 + 2b\sqrt{t})\mathrm{e}^{\pi b^2 t}$$

U sledećoj lemi, pomoću Duhamel - ovog principa [1], dolazimo da klasičnog rešenja problema (3.2).

Lema 3.2.2 *Za* $u_0 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ *problem* (3.2) *ima jedinstveno rešenje* $u \in \mathcal{C}_b^\infty \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ *i važi*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \leq \|u_0\|_{l^\infty(\mathbb{R})} \tag{3.3}$$

Dokaz. Primetimo da je uslov (3.3) posledica primene principa maksimuma za klasična rešenja. Primenom Duhamel - ovog principa[2] i koristeći fundamentalno rešenje jednačine provođenja toplote dolazimo do rešenja za (3.2). Neka je

$$E(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\mu t}}$$

fundamentalno rešenje jednačine provođenja toplote. Na osnovu Duhamel - ovog principa tada važi

$$u(x,t) = E(t) * u_0 - \int_0^t E(s) * f(u)_x(x, t-s) ds.$$

Dalje je

$$E(t) * u_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4\mu t}} u_0(x-z) dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} u_0(x - 2\sqrt{\mu t} y) dy.$$

$$\int_0^t E(s) * f(u)_x(x, t-s) ds =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu s}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4\mu s}} \partial_z f(u(x-z, t-s)) dz ds$$

$$= -\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu s}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4\mu s}} \frac{-2z}{4\mu s} f(u(x-z, t-s)) dz ds$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}} \int_{-\infty}^{\infty} y \mathrm{e}^{-y^2} f(u(x - 2y\sqrt{\mu s}, t-s)) dy ds$$

[1] Jean-Marie Constant Duhamel (1797 - 1872), francuski matematičar

[2] Duhamel - ov princip ima široku primenu pri rešavanju ODJ i PDJ. Primer njegove primene za rešavanje jednačine provođenja toplote se može videti u [2], strana 49.

$$= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu(t-r)}} \int_{-\infty}^{\infty} y\mathrm{e}^{-y^2} f(u(x-2y\sqrt{\mu(t-r)}, r))dydr$$

pri čemu smo pored odgovarajućih smena koristili i parcijalnu integraciju. Ovako dobijeno rešenje u je rešenje u klasičnom smislu zato što operator sa desne strane prethodne jednakosti za rešenje $u(x,t)$ određuje kontrakciju u odgovarajućoj lopti u prostoru $\mathcal{C}([0,T_k] : \mathcal{C}^k_{bu}(\mathbb{R}))$, za svako $k \in \mathbb{N}$, gde $\mathcal{C}^k_{bu}(\mathbb{R})$ označava prostor funkcija sa ograničenim i uniformno neprekidnim izvodima do reda k. Ovako dobijeno rešenje je lokalno. Globalnost sledi iz principa maksimuma. Jedinstvenost sledi primenom Leme 3.2.1. ♣

Sada ćemo da se bavimo uopštenim rešenjima problema (3.2).

Teorema 3.2.3 *Pretpostavimo da je funkcija f sporo rastuća, da je $|f'|$ ograničena i $\mu > 0$. Tada za svako dato $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ postoji jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ za problem* (3.2).

Dokaz.

Fiksirajmo predstavnika $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon$ od u_0 i posmatrajmo problem

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t} + f(u_\varepsilon)_x = \mu u_{\varepsilon xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.4}$$

Prema Lemi 3.2.2 postoji jedinstveno rešenje $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_{\overline{b}}(\mathbb{R}^2_+)$ za ovaj problem. Nejednakost (3.3) i činjenica da $u_{0\varepsilon} \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R})$ impliciraju da postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ tako da rešenje u_ε zadovoljava

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2_+} |u_\varepsilon(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N_0}),\ \text{kad } \varepsilon \to 0 \tag{3.5}$$

Sada ocenjujemo $u_{\varepsilon x}$. Ako u dokazu Leme 3.2.2. zamenimo u sa u_ε, u_0 sa $u_{0\varepsilon}$ i diferenciramo po x dobijamo

$$u_{\varepsilon x}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} (u_{0\varepsilon})'(x - 2\sqrt{\mu t}y)dy +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}} \int_{-\infty}^{\infty} y\mathrm{e}^{-y^2} \partial_{u_\varepsilon}(f(u_\varepsilon(x-2y\sqrt{\mu s}, t-s)))u_{\varepsilon x}(x-2y\sqrt{\mu s}, t-s)dyds,$$

odakle sledi,

$$|u_{\varepsilon x}(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} |(u_{0\varepsilon})'(x - 2\sqrt{\mu t}y)|dy +$$

$$+\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}}\int_{-\infty}^{\infty}|y|\mathrm{e}^{-y^2}|\partial_{u_\varepsilon}(f(u_\varepsilon(x-2y\sqrt{\mu s},t-s)))||u_{\varepsilon x}(x-2y\sqrt{\mu s},t-s)|dyds.$$

Uzimajući supremum po $x \in \mathbb{R}$ za sve t dobijamo ocenu

$$\|u_{\varepsilon x(\cdot,t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f_{u_\varepsilon}\|_{L^\infty}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\|u_{\varepsilon x}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}ds$$

gde smo koristili da je $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$, $\int_{\mathbb{R}} |y|\mathrm{e}^{-y^2}dy = 1$ i smenu $t-s=r$, kao u dokazu Leme 3.2.2.

Sada ćemo da primenimo Lemu 3.2.1. Neka je $a = \|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $b = \frac{c}{\mu}\|f_{u_\varepsilon}\|_{L^\infty}$. Tada je

$$\|u_{\varepsilon x(\cdot,t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big(1+\frac{2c}{\sqrt{\mu}}\|f_{u_\varepsilon}\|_{L^\infty}\sqrt{t}\Big)\exp\Big(\pi\frac{c^2}{\mu}\|f_{u_\varepsilon}\|^2_{L^\infty}t\Big)$$

Pošto je $|f'|$ ograničena poslednja nejednakost implicira za svako $T>0$ postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]}|u_{\varepsilon x}(\cdot,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N_1}),\ \text{kad}\ \varepsilon \to 0$$

Na sličan način se pokazuje da isti tip uslova važi i za izvode višeg reda u odnosu na x. Uz pomoć jednačine (3.4) i diferenciranjem dobijamo slične uslove za izvode u odnosu na t i za mešovite izvode. Dakle, $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$, odnosno $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ je predstavnik klase u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, koja definiše uopšteno rešenje problema (3.2).

Dokažimo da je rešenje u jedinstveno. Pretpostavimo da su $u_1, u_2 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ dva rešenja problema (3.2). Tada postoje $N \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ i $n \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ tako da je

$$(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})_t + f(u_{1\varepsilon})_x - f(u_{2\varepsilon})_x = \mu(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})_{xx} + N_\varepsilon$$

$$(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})|_{t=0} = n_\varepsilon(x)$$

gde su $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}$ predstavnici elemenata u_1, u_2, a N_ε i n_ε definišu N i n, redom. Primenom Duhamel - ovog principa na prethodni problem i uz pomoć dokaza Leme 3.2.2. dobijamo

$$(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}n_\varepsilon(x-2\sqrt{\mu t}y)dy+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}N_\varepsilon(x-2\sqrt{\mu s}y,t-s)dyds$$

$$+\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}}\int_{-\infty}^{\infty} y\mathrm{e}^{-y^2}[f(u_{1\varepsilon}(x-2y\sqrt{\mu s},t-s))-f(u_{2\varepsilon}(x-2y\sqrt{\mu s},t-s))]dyds.$$

Odavde dobijamo ocenu

$$\|(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|n_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t\|N_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])}$$

$$+\frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f'\|_{L^\infty}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\|(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})(\cdot,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}ds.$$

Primenom Leme 3.2.1. sledi

$$\|(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \Big(\|n_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t\|N_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])}\Big)\Big(1+\frac{2c}{\sqrt{\mu}}\|f'\|_{L^\infty}\sqrt{t}\Big)\exp\Big(\pi\frac{c^2}{\mu}\|f'\|^2_{L^\infty}t\Big)$$

što znači da je

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} |(u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon})(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^M),\ \text{kad}\ \varepsilon\to 0$$

za svako $T>0$ i $M\in\mathbb{N}$, zato što $n\in\mathcal{N}_g(\mathbb{R})$, $N\in\mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ i $|f'|$ je ograničena. Za izvode razlike $u_{1\varepsilon}-u_{2\varepsilon}$ izvode se ocene na isti način kao u delu u kom smo dokazali egzistenciju. Dakle, $u_1-u_2\in\mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$, što smo i hteli da pokažemo. ■

Teorema 3.2.4 *Pretpostavimo da je f sporo rastuća u beskonačnosti i da je f' reda r. Tada za svako dato $u_0\in\mathcal{G}_g(\mathbb{R})$, $\sqrt[2r]{log}$ - tipa, postoji jedinstveno rešenje $u\in\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, $\sqrt[2r]{log}$ - tipa, za problem* (3.2).

Dokaz. Iz pretpostavke u teoremi sledi da predstavnik $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon$ od u_0 zadovoljava

$$\|u_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\sqrt[2r]{|log\varepsilon|}$$

za neku konstantu $C>0$. Koristeći princip maksimuma (3.3) dobijamo da za rešenje u_ε od (3.4) važi

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2_+)} \leq C\sqrt[2r]{|log\varepsilon|}$$

što implicira da je (f' je reda r)

$$\|f'(u_\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2_+)} \leq C_1\sqrt{|log\varepsilon|}.$$

Primenom istih ocena i nejednakosti kao u dokazu prethodne teoreme, kao i poslednje nejednakosti, zaključuje se da je $(u_\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ $\sqrt[2r]{log}$ - tipa i da je klasa ove familije uopšteno rešenje problema (3.2).

Sada pokazujemo jedinstvenost. Neka su $u_1, u_2 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ dve rešenja problema (3.2) sa predstavnicima $u_{1\varepsilon},\ u_{2\varepsilon}$ koji su $\sqrt[2r]{log}$ - tipa. Tada postoje $N \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ i $n \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R})$ tako da važi

$$(u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon})_t + f(u_{1\varepsilon})_x - f(u_{2\varepsilon})_x = \mu(u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon})_{xx} + N_\varepsilon$$

$$(u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon})|_{t=0} = n_\varepsilon(x).$$

Kako su $u_{1\varepsilon}$ i $u_{2\varepsilon}$ $\sqrt[2r]{log}$ - tipa, znamo da je za svako $T > 0$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \Big| \int_0^1 f'(\theta u_{1\varepsilon}(x,t) + (1-\theta)u_{2\varepsilon}(x,t))d\theta \Big| \leq C_T\sqrt{|log\varepsilon|}$$

gde je $C_T > 0$ konstanta. Na isti način na koji smo dokazali jedinstvenost u prethodnoj teoremi i ovde zaključujemo da $(u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon})_\varepsilon$ pripada $\mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$. ■

Ako u prethodnoj teoremi formalno pustimo da $r \to \infty$ dobija se sledeći rezultat za početni uslov ograničenog tipa.

Posledica 3.2.5 *Neka je f sporo rastuća u beskonačnosti. Tada za svako $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$, ograničenog tipa, postoji jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, ograničenog tipa, za problem* (3.2).

Dokaz. Po pretpostavci je $\|u_{0\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$, uniformno za sve $\varepsilon > 0$. Primenom principa maksimuma i $|u_\varepsilon|$ je ograničeno konstantom M, pa je $|f'(u_\varepsilon)|$ uniformno ograničeno nezavisno od ε. Nastavak dokaza je kao u prethodnoj teoremi. ■

Primetimo da su uopštena rešenja, koja smo konstruisali u prethodnim teoremama, uopštenja klasičnih, odnosno, ako je početni uslov $u_0 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$, onda u_0 može da se posmatra kao predstavnik za $\iota_\rho(u_0)$, pa je klasično rešenje u $\mathcal{C}_b^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ predstavnik za uopšteno rešenje.

Ponovo posmatramo problem (3.2), sada μ može da bude i uopštena konstanta.

Teorema 3.2.6 *Neka je μ uopšteni pozitivan broj takav da je $1/\mu$ log- tipa. Neka je f sporo rastuća u beskonačnosti i $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ ograničenog tipa. Tada postoji jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, ograničenog tipa, za problem* (3.2).

Dokaz. Kao u prethodnoj posledici, dobijamo da je $|f'(u_\varepsilon)|$ uniformno ograničeno nezavisno od ε. Dalje je dokaz analogan dokazima prethodnih teorema i koristi se da je $\mu_\varepsilon^{-1} = \mathcal{O}(log(1/\varepsilon))$, što sledi iz pretpostavke da je $\frac{1}{\mu_\varepsilon} = \mathcal{O}(|log\varepsilon|),\ \varepsilon \to 0$, za dobijanje odgovarajućih ocena. Na primer, imamo sledeću ocenu (dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.2.3).

$$\|u_{\varepsilon x(\cdot,t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big(1 + \frac{2c}{\sqrt{\mu_\varepsilon}}\|f_{u_\varepsilon}\|_{L^\infty}\sqrt{t}\Big)\exp\Big(\pi\frac{c^2}{\mu_\varepsilon}\|f_{u_\varepsilon}\|^2_{L^\infty}t\Big)$$

Sada primenjujemo $1/\mu_\varepsilon \leq a\ log(1/\varepsilon),\ \varepsilon \to 0,\ a > 0$ i $\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \leq b\sqrt{log(\frac{1}{\varepsilon})} \leq b\varepsilon^{-M},$ za neko M $\in \mathbb{N},\ \varepsilon \to 0,\ b > 0.$ ■

Nastavljamo sa poređenjem uopštenih rešenja sa klasičnim. Prvo navodimo poznate rezultate iz teorije klasičnih rešenja. Uvodimo pseudo - normu, koja je definisana na lokalno integrabilnim funkcijama g na $\mathbb{R}$

$$|g|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \int_0^x g(\xi)d\xi \Big|.$$

Ako su $u_1,\ u_2$ dva klasična rešenja za problem (3.2), sa početnim uslovima u_{01} i u_{02}, onda je $|(u_1 - u_2)(\cdot, t)|_* \leq 2|u_{01} - u_{02}|_*$, za sve $t > 0$. Ako $|g_\varepsilon|_* \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$, onda $g_\varepsilon \to 0$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dalje, ako je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ i ρ_ε molifajer, onda $|u_0 - u_0 * \rho_\varepsilon|_* \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$.

Neka je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ i μ pozitivna konstanta ili uopšteni pozitivan broj takav da je $1/\mu$ log - tipa. Prema poslednjoj teoremi i posledici problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \mu u_{xx} \\ u|_{t=0} = \iota_\rho(u_0) \end{cases} \tag{3.6}$$

ima jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, ograničenog tipa. Neka je $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik uopštenog pozitivnog broja μ i posmatrajmo problem

$$\begin{cases} v_{\varepsilon t} + f(v_\varepsilon)_x = \mu_\varepsilon v_{\varepsilon xx} \\ v_\varepsilon|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \tag{3.7}$$

Pretpostavljamo da $u_0 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$. Tada problem (3.7) ima jedinstveno klasično rešenje v_ε. Neka je $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik uopštenog rešenja za problem (3.6), koje je konstruisano u Teoremi 3.2.6 i prethodnim rezultatima, tj. u_ε je rešenje problema

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t} + f(u_\varepsilon)_x = \mu_\varepsilon u_{\varepsilon xx} \\ u_\varepsilon|_{t=0} = u_0 * \rho_\varepsilon(x) \end{cases} \tag{3.8}$$

Lema 3.2.7 *Razlika $u_\varepsilon - v_\varepsilon$ konvergira ka 0 u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+)$, kad $\varepsilon \to 0$.*

Dokaz. Prema prethodnim razmatranjima, $\sup_{t>0} |(v_\varepsilon - u_\varepsilon)(\cdot, t)|_* \leq 2|u_0 - u_0 * \rho_\varepsilon|_*$ konvergira ka 0, kad $\varepsilon \to 0$, a odavde se izvodi i konvergencija razlike $u_\varepsilon - v_\varepsilon$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_+)$. ♣

Propozicija 3.2.8 *Neka je f sporo rastuća u beskonačnosti, μ pozitivan realan broj i $u_0 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$. Tada je uopšteno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ za problem (3.6) asocirano sa klasičnim rešenjem v za problem*

$$\begin{cases} v_t + f(v)_x = \mu v_{xx} \\ v|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \tag{3.9}$$

Dokaz. Kako je μ klasičan realan broj, možemo da stavimo da je $\mu_\varepsilon \equiv \mu$ u (3.7) i (3.8). Tada je $v_\varepsilon \equiv v$ u (3.7) i ostaje još da primenimo Lemu 3.2.7. $\diamondsuit$

Propozicija 3.2.9 *Neka je f sporo rastuća u beskonačnosti, μ uopšteni pozitivan broj takav da je $1/\mu$ log - tipa, $u_0 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Ako je $\mu \approx 0$, onda je uopšteno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}_+^2)$ za problem (3.6) asocirano sa slabim entropijskim rešenjem $w \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ problema*

$$\begin{cases} w_t + f(w)_x = \mu_\varepsilon v_{xx} \\ w|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \tag{3.10}$$

Dokaz. Ako su $u_\varepsilon,\ v_\varepsilon$ kao u (3.7) i (3.8), onda $u_\varepsilon - v_\varepsilon \to 0$ u prostoru distribucija. Može se pokazati da rešenja $v_\varepsilon \to w$ u $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+^2)$, kad $\mu_\varepsilon \to 0$. Zato $u_\varepsilon \to w$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2)$, kad $\varepsilon \to 0$, pa je $u \approx w$. $\diamondsuit$

Napomenimo da je pod pretpostavkama iz Propozicije 3.2.9. uopšteno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}_+^2)$ takođe rešenje problema

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x \approx 0 \\ u|_{t=0} \approx u_0(x). \end{cases}$$

Ovo sledi iz činjenice da ako je u ograničenog tipa i $\mu \approx 0$, onda je $\mu u_{xx} \approx 0$.

Da bismo ilustrovali primenu teorije uopštenih funkcija koristimo Burgersovu jednačinu u sledećem primeru.

Primer 3.2.10 *Neka je μ pozitivan realan broj ili uopšten pozitivan broj. Tada za svako $A \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ ograničenog tipa postoji rešenje $U \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}_+^2)$ za početni problem*

$$\begin{cases} U_t + UU_x = \mu U_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ U|_{t=0} = A, & x \in \mathbb{R},\ t = 0 \end{cases}$$

Dokaz.

Neka je $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik uopštene funkcije A. Posmatrajmo sledeći početni problem

$$\begin{cases} U_{\varepsilon t} + U_\varepsilon U_{\varepsilon x} = \mu_\varepsilon U_{\varepsilon xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ U_\varepsilon|_{t=0} = A_\varepsilon, & x \in \mathbb{R},\ t = 0 \end{cases}$$

Primenom Hof - Kolove transformacije (pogledati Primer 1.6.5) može se izvesti klasično rešenje za Burgersovu jednačinu. Radi jednostavnosti ćemo u nastavku da izostavljamo indeks ε. Hof - Kolova transformacija je jedna od tehnika pomoću koje nelinearna PDJ može da se transformiše u linearnu jednačinu. Da bismo je primenili uvodimo funkcije $w(x,t) := \int_{-\infty}^{x} U(y,t)dy$ i $h(x) := \int_{-\infty}^{x} A(y)dy$. Sada prethodni početni problem dobija oblik

$$\begin{cases} w_t - \mu w_{xx} + \frac{1}{2}w_x^2 = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ w = h, & x \in \mathbb{R},\ t = 0 \end{cases}$$

odnosno dobili smo kvazilinearnu paraboličnu jednačinu. Da bismo je rešili uvodimo smenu $f := \Phi(w)$, gde je $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatka funkcija koja treba da se odredi, pri čemu želimo da je odabremo tako da f bude rešenje linearne jednačine. Kako je $f_t = \Phi'(w)w_t$ dobijamo $f_t = \mu f_{xx} - [\mu\Phi''(w) + \frac{1}{2}\Phi'(w)]w_x^2$. Stoga biramo Φ tako da važi $\mu\Phi''(w) + \frac{1}{2}\Phi'(w) = 0$. Kada rešimo ovu ODJ dobijamo da

$$f = e^{-\frac{1}{2\mu}w} \tag{$*$}$$

rešava početni problem za jednačinu provođenja toplote.

$$\begin{cases} f_t - \mu f_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ f = e^{-\frac{1}{2\mu}h}, & x \in \mathbb{R},\ t = 0. \end{cases}$$

Formula $(*)$ je Hof - Kolova transformacija.

Pomoću Duhamel - ovog principa dolazimo do f, a odatle i do rešenja w koristeći da je $w = -\frac{1}{2\mu}log f$. Kako je $U = w_x$ dobijamo rešenje U, kao u Primeru 1.6.5, odnosno

$$U_\varepsilon(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\mu t} - \frac{h(y)}{2\mu}} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\mu t} - \frac{h(y)}{2\mu}} dy}$$

Direktnim uvrštavanjem se proverava da je U_ε glatko klasično rešenje polazne jednačine. Princip maksimuma nam daje ocenu

$$\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))} \leq \|A_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Da bi se pokazalo da $(U_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}$ treba diferencirati eksplicitnu formulu za U_ε po x. Ocene mešovitih izvoda i izvoda po t se dobijaju pomoću same jednačine.

3.3 Zakoni održanja sa fluks - funkcijom eksplicitno zavisnom od prostorne promenljive

Ponovo se bavimo Košijevim problemom za sklarani zakon održanja, ali je sada fluks - funkcija f zavisna od prostorne promenljive, odnosno $f = f(x, u(x,t))$. Preciznije, rešavamo sledeći problem

$$\begin{cases} u_t(x,t) + f(x, u(x,t))_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.11}$$

i posmatramo njegovu paraboličnu aproksimaciju

$$\begin{cases} u_t(x,t) + f(x, u(x,t))_x = \mu u(x,t)_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.12}$$

Sve definicije i tvrđenja koja smo uveli u odeljku 3.1 važe i dalje. Već smo napomenuli da ako je početni uslov $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, da je onda $\iota(u_0) \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ ograničenog tipa. Tada su uopštena rešenja za (3.12) sa početnim uslovom $\iota(u_0)$ takođe ograničenog tipa. Ideja da se radi sa uopštenim rešenjima ograničenog tipa dolazi iz klasične teorije zakona održanja, kada je $f = f(x,u)$. Ako je početni uslov $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ ograničen, $a \leq u_0(x) \leq b$, onda za klasično rešenje problema (3.12) važi da ostaje između istih konstanti a i b i

$$f(x,a) = f(x,b) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Za dokaz postojanja i jedinstvenosti uopštenog rešenja za problem (3.12) koristićemo opštiju nejednakost Gronwall - ovog tipa, u odnosu na slučaj homogenog fluksa. Korstimo oznaku $D_x f$ za izvod po prvoj promenljivoj funkcije f, pri čemu druga promenljiva može da zavisi od x, odnosno $\partial_x f(x,u)$
$= D_x f(x,u) + \partial_u f(x,u)\partial_x u$.

Lema 3.3.1 *Nejednakost Gronwall - ovog tipa*

Neka je $w = w(t)$ nenegativna, neprekidna funkcija i pretpostavimo da je

$$w(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)w(s)ds$$

gde su $a, b \geq 0$ nenegativne funkcije i $t \in I$. Tada je

$$w(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t b(r)dr}ds$$

Posmatrajmo početni problem (3.12) sa glatkim početnim uslovom $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$, čiji svi izvodi su ograničeni. Koristeće Duhamel -ov princip, kao i pre, dobijamo da važi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} u_0(x - 2\sqrt{\mu t y}) dy + \tag{$*$}$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \mu s}} \int_{-\infty}^{\infty} y \mathrm{e}^{-y^2} f(x - 2\sqrt{\mu s} y, u(x - 2y\sqrt{\mu s}, t-s)) dy ds.$$

Koristimo $(*)$ da bismo dokazali postojanje i jedinstvenost uopštenog rešenja. Takođe koristimo i sledeću osobinu uniformne ograničenosti za uopštene funkcije ograničenog tipa.

Lema 3.3.2 *Ako je $v \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ ograničenog tipa, onda postoje konstante $a < b$, takve da za svakog predstavnika $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ postoji $\varepsilon_0 \in (0,1]$ tako da je*

$$a \le v_\varepsilon(x) \le b,\ x \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{3.14}$$

Dokaz. Neka je $v = [(v_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ ograničenog tipa, tj. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |v_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(1),\ \varepsilon \to 0$. Odatle sledi da za $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ postoje konstante $\tilde{a} < \tilde{b}$ i $\tilde{\varepsilon} \in (0,1]$ tako da je $\tilde{a} \le v_\varepsilon(x) \le \tilde{b},\ x \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$.

Neka je $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ (drugi) proizvoljni predstavnik od v, odnosno $(v_\varepsilon - w_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R})$. Pošto $v_\varepsilon - w_\varepsilon \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$, postoje konstante $\tilde{\tilde{a}} \in (\tilde{a} - 1, \tilde{a})$, $\tilde{\tilde{b}} \in (\tilde{b}, \tilde{b} + 1)$ i $\tilde{\tilde{\varepsilon}} > 0$, tako da je $\tilde{\tilde{a}} \le w_\varepsilon(x) \le \tilde{\tilde{b}},\ x \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in (0, \tilde{\tilde{\varepsilon}})$. Kako svi predstavnici od v imaju granice u intervalima $(\tilde{a} - 1, \tilde{a})$ i $(\tilde{b}, \tilde{b} + 1)$, uzimamo da je $a := \inf \tilde{\tilde{a}}$ i $b := \sup \tilde{\tilde{b}}$. ♣

Definicija 3.3.3 *Ako je $v \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ ograničenog tipa i konstante a i b su dobijene kao u dokazu prethodne leme, onda kažemo da je v a, b - ograničenog tipa.*

Teorema 3.3.4 *Ako je početni uslov $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ a, b - ograničenog tipa i fluks - funkcija f sporo rastuća i zadovoljava* (3.13), *onda postoji jedinstveno uopšteno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}_+^2)$ za (3.12) i u je ograničenog tipa.*

Dokaz. Neka je $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon$ predstavnik početnog uslova u_0. Za fiksirano ε posmatrajmo početni problem

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t}(x,t) + f(x, u_\varepsilon(x,t))_x = \mu u_{\varepsilon xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x). & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.15}$$

Integralna jednačina $(*)$ nam omogućava da dokažemo da za svako fiksno ε postoji jedinstveno rešenje $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ za problem (3.15).

Iz $a \leq u_{0\varepsilon}(x) \leq b$, $x \in \mathbb{R}$ i (3.13) imamo

$$a \leq u_\varepsilon(x,t) \leq b,\ (x,t) \in (0,T) \times \mathbb{R} \tag{3.16}$$

Da bismo to dokazali fiksirajmo ε i neka je $v_\delta^\varepsilon,\ \delta > 0$ rešenje sledećeg problema

$$\begin{cases} (v_\delta^\varepsilon)_t + (f(x, v_\delta^\varepsilon))_x = \mu (v_\delta^\varepsilon)_{xx} - \delta, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ v_\delta^\varepsilon(x,0) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.17}$$

Tada $v_\delta^\varepsilon \to u_\varepsilon,$ kad $\delta \to 0$ u $L^\infty((0,T) \times \mathbb{R})$. Pretpostavimo da je skup $K = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)\ :\ v_\delta^\varepsilon(x,t) > b\}$ neprazan. Neka je $K_1 = \{t\ :\ (x,t) \in K,$ za neko $x\}$ i $t_0 = \inf K_1$. Tada je zbog neprekidnosti $v_\delta^\varepsilon(x, t_0) \leq b$. Zbog neprekidnosti mora da postoji i x_0 tako da je $v_\delta^\varepsilon(x_0, t_0) = b$ i $v_\delta^\varepsilon(\cdot, t_0)$ ima lokalni maksimum u x_0. Dakle,

$$v_\delta^\varepsilon(x_0,t_0) = b,\ \ \partial_x v_\delta^\varepsilon(x_0,t_0) = 0,\ \ \partial_{xx} v_\delta^\varepsilon(x_0,t_0) \leq 0.$$

S druge strane, $v_\delta^\varepsilon(x_0, \cdot)$ je neopadajuća u nekoj okolini od t_0, što znači da je $\partial_t v_\delta^\varepsilon(x_0,t_0) \geq 0$. Sada posmatrajmo (3.17) u (x_0,t_0). Dobijamo

$$0 \leq \partial_t v_\delta^\varepsilon(x_0,t_0) + D_x f(x, v_\delta^\varepsilon)(x_0,t_0) + \partial_u f(x, v_\delta^\varepsilon)(x_0,t_0) \partial_x v_\delta^\varepsilon(x_0,t_0) =$$

$$= \mu (v_\delta^\varepsilon)_{xx}(x_0,t_0) - \delta \leq -\delta < 0.$$

Kako je $f_b(x) \equiv f(x,b) = 0$, sledi da je $f_b'(x) = D_x f(x,b) = 0,\ x \in \mathbb{R}$. Ova kontradikcija implicira da je skup K prazan, tj. $v_\delta^\varepsilon(x,t) \leq b,\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$, a onda je i $u_\varepsilon(x,t) \leq b$. Slično se dokazuje da je $u_\varepsilon(x,t) \geq a$.

Sada dokazujemo da je $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ umerena funkcija. Pošto je $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ a, b - ograničenog tipa iz (3.14) i (3.16) imamo da je $a \leq u_\varepsilon(x,t) \leq b$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Tada za sve $T > 0$ važi

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)} |u_\varepsilon(x,t)| \leq \max\{|a|, |b|\} \cdot \varepsilon^{-1},\ \varepsilon \to 0.$$

Da bismo ocenili izvod $u_{\varepsilon x}$ zamenićemo u sa u_ε i u_0 sa $u_{0\varepsilon}$ u $(*)$. Diferenciranjem po x dobijamo

$$u_{\varepsilon x}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} (u_{0\varepsilon})'(x - 2\sqrt{\mu t} y) dy +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \mu s}} \int_{-\infty}^{\infty} y \mathrm{e}^{-y^2} [D_x f(x - 2y\sqrt{\mu s}, u_\varepsilon(x - 2y\sqrt{\mu s}, t-s)) +$$

$$+\partial_u(f(x-2y\sqrt{\mu s},u_\varepsilon(x-2y\sqrt{\mu s},t-s))u_{\varepsilon x}(x-2y\sqrt{\mu s},t-s)]dyds,$$

odakle sledi,

$$|u_{\varepsilon x}(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}|(u_{0\varepsilon})'(x-2\sqrt{\mu t}y)|dy+$$

$$+\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}}\int_{-\infty}^{\infty}|y|\mathrm{e}^{-y^2}[c_{1,0}(1+|u_\varepsilon(x-2y\sqrt{\mu s},t-s)|)^{N_{1,0}}+$$

$$+|\partial_u(f(x-2y\sqrt{\mu s},u_\varepsilon(x-2y\sqrt{\mu s},t-s))||u_{\varepsilon x}(x-2y\sqrt{\mu s},t-s)|]dyds.$$

Uzimajući supremum po $x\in\mathbb{R}$ za sve t dobijamo ocenu

$$w(t)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_{\varepsilon x}(x,t)| = \|u_{\varepsilon x(\cdot,t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + c_1(1+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2_+)})^{N_{1,0}}\sqrt{\frac{t}{\mu}}+$$

$$+\frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f_u\|_{L^\infty}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\|u_{\varepsilon x}(\cdot,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}ds$$

Po pretpostavci je f sporo rastuća, pa iz (3.16) imamo da je f_{u_ε} ograničena. Sada primenjujemo Lemu 3.3.1. Neka je $a(t)=\|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+c_1(1+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2_+)})^{N_{1,0}}\sqrt{\frac{t}{\mu}}$, $b(s)=\frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f_u\|_{L^\infty}\frac{1}{\sqrt{t-s}}$. Iz poslednje ocene i prethodne leme dobijamo

$$w(t)\leq a(t)+\int_0^t a(s)b(s)\mathrm{e}^{\frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f_{u_\varepsilon}\|_{L^\infty}\sqrt{t-s}}$$

Uzimajući supremum u odnosu na $t\in(0,T)$ dobijamo

$$\sup_{t\in(0,T)} w(t) \leq \|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+$$

$$+c_1(1+\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2_+)})^{N_{1,0}}\sqrt{\frac{T}{\mu}}+c_2\|(u_{0\varepsilon})'\|_{L^\infty}\mathrm{e}^{\frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f_{u_\varepsilon}\|_{L^\infty}\sqrt{T}}$$

Dakle, za svako$T>0$ postoji $N_1\in\mathbb{N}$ tako da je

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)}|u_{\varepsilon x}(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N_1}),\ \varepsilon\to 0.$$

Na sličan način se ocenjuju ostali izvodi od u_ε i zaključuje se da $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$ i da je $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik elementa $u\in\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, koji definiše uopšteno rešenje za (3.12).

Jedinstvenost možemo da dokažemo potpuno analogno kao u dokazu Teoreme 3.2.3. ∎

Teorema 3.3.5 *Neka je μ uopšteni pozitivan broj takav da je $1/\mu$ log- tipa. Neka je f sporo rastuća u beskonačnosti i i neka zadovoljava* (3.13)*,* $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ a, b *- ograničenog tipa. Tada postoji jedinstveno rešenje* $u \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$*, ograničenog tipa, za problem* (3.12).

Dokaz. Dokaz se izvodi na isti način kao u prethodnoj teoremi, pri čemu koristimo da je $1/\mu_\varepsilon = \mathcal{O}(log(1/\varepsilon))$ kada treba da ocenimo izvode. ■

Ako je $\mu \approx 0$, onda je rešenje koje se dobija u prethodnoj teoremi aproksimativno rešenje za (3.11).

Zaključak

U radu je predstavljena teorija zakona održanja, prvo u klasičnom obliku, a zatim u okviru Kolomboove teorije uopštenih funkcija.

Da bi se dobila jedinstvenost rešenja i njihova neprekidna zavisnost od početnih uslova uvodimo slaba rešenja koja su dopustiva u smislu nestajuće viskoznosti i uvodimo različite entropijske uslove. Na primeru Burgersove jednačine ilustrovali smo slučajeve kada rešenja imaju oblik udarnog ili razređujućeg talasa. Posmatrali smo Rimanov problem za skalarni zakon održanja, kao i za sisteme zakona održanja i videli smo pod kojim uslovima su rešenja Rimanovog problema jedinstvena. Dalje posmatramo Košijev problem za zakone održanja u okviru Kolomboovih algebri. Posebno posmatramo slučajeve kada je funkcija fluksa zavisna, odnosno nezavisna od prostorne promenljive, što odgovara procesima u homogenoj, odnosno heterogenoj sredini. Ispitujemo pod kojim uslovima se može dobiti jedinstveno uopšteno rešenje za Košijev problem i odgovarajuću paraboličnu aproksimaciju.

U homogenom slučaju smo zaključili da se uopšteno rešenje poklapa sa klasičnim (klasično rešenje je predstavnik za uopšteno) u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, ako je $u_0 \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$. Posmatrali smo i vezu uopštenog sa klasičnim rešenjem u slučaju kada je $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ i kada je viskozni parametar μ uopšteni pozitivan broj i zaključili smo da su pod odgovarajućim pretpostavkama ova rešenja asocirana (Propozicija 3.2.8).

U heterogenom slučaju smo dokazali teoremu o postojanju i jedinstvenosti uopštenog rešenja u slučaju kada je početni uslov ograničenog tipa (preciznije, $a,\ b$ - ograničenog tipa) i za realnu konstantu μ. Pretpostavka o $a,\ b$ - ograničenosti je posle implicirala zaključak o ograničenosti f_u. Ako poredimo ovaj dokaz sa dokazom analogne teoreme u homogenom slučaju vidimo da smo u heterogenom slučaju koristili opštiju Gronvalovu nejednakost i modifikovali smo osobine funkcije f. Uveli smo i dodatne uslove za izvod po prvoj promenljivoj x funkcije f (oznaka $D_x f$). Napominjemo da u radu nismo razmatrali uopštena rešenja Rimanovog problema. U prostoru uopštenih funkcija bi se takođe mogli izvesti uslovi analogni Igonoovim. Oni zavise od koncepta rešenja koji se koristi (jednakosi ili asociranost) i od upotrebe uopštenih Hevisajdovih funkcija.

Literatura

[1] Michael Grosser, Michael Kunzinger, Michael Oberguggenberger, Roland Steinbauer, *Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[2] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[3] Günther Hörmann, Roland Steinbauer, *Theory of distributions*, Lecture notes, Faklutät für Mathematik, Universität Wien, Summer term 2009.

[4] Bogoljub Stanković, Stevan Pilipović, *Teorija distribucija*, Institut za matematiku, Univerzitet u Novom Sadu, 1983.

[5] Marko Nedeljkov, *Parcijalne diferencijalne jednačine*, Prirodno - matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2004.

[6] M. Oberguggenberger, Y. - G. Wang, *Generalized Solutions to Conservation Laws*, Journal for Analysis and Applications, Vol 13, 1994.

[7] J. Aleksić, J.F. Colombeau, M. Oberguggenberger , S. Pilipović, *Approximate generalized solutions and measure-valued solutions to conservation laws*, ITSF, Vol 20, 2009, pp 163-170

[8] J.Aleksić, *Gauss kernel method for generalized solutions to conservation laws in heterogeneous media*, ITSF, (2011), vol. 22 br. 4-5, str. 247-254

[9] Ta Ngoc Tri, *The Colombeau theory of generalized functions*, Mathematics Master thesis specialized in Analysis, KdV Institute, Faculty of Science, University of Amsterdam, The Netherlands, 2005.

[10] Alberto Bressan, *Lecture Notes on Hyperbolic Conservation Laws*, Department of Mathematics, Penn State University, USA, 2009.

[11] Nedeljkov, M.; Pilipović, S.; Rajter-Ćirić, D. *Heat equation with singular potential and singular data*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 135 (2005)

[12] Aleksić Jelena; Mitrović Darko, *On the compactness for two dimensional scalar conservation law with discontinuous flux.*, Commun. Math. Sci. 7 (2009), no. 4

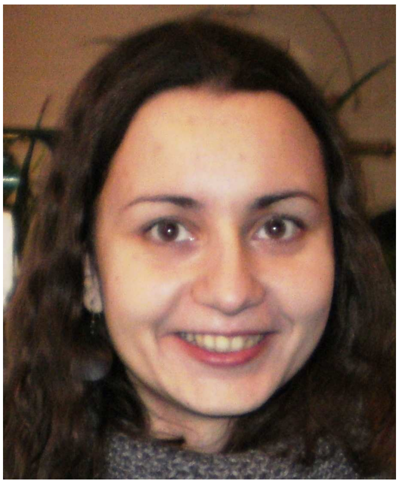
[13] Biagioni Hebe A., *A nonlinear theory of generalized functions.*, Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1421. Springer-Verlag,Berlin, 1990.

[14] Oberguggenberger Michael, *Multiplication of distributions and applications to partial differential equations.*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 259. Longman Scientific and Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

[15] Biagioni H. A.; Oberguggenberger M. *Generalized solutions to Burgers' equation*, J. Diff. Eqs., 1992., 263 - 287.

[16] Nedeljkov Marko, Pilipović Stevan, Scarpalezos, D., *The linear theory of Colombeau generalized functions.*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 385. Longman, Harlow, 1998.

Biografija



Ivana Vojnović je rođena 30.11.1987. u Zagrebu. Osnovnu školu "Ivo Lola Ribar" je završila u Rumi, 2002. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Stevan Puzić" u Rumi, prirodno - matematički smer, koju završava 2006. godine kao đak generacije. Po završetku gimnazije, 2006. godine, upisala je osnovne studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer profesor matematike, koje je završila 2010. godine, sa prosečnom ocenom 9.94. Potom je upisala master studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u junskom roku 2011. godine. Zimski semestar školske 2010/ 2011. godine je provela na Institutu za matematiku, Univerziteta u Beču, zahvaljujući stipendiji fondacije ÖAD.

Novi Sad, avgust, 2011 Ivana Vojnović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Završni rad
VR

Autor: Ivana Vojnović
AU

Mentor: dr Jelena Aleksić
MN

Naslov rada: Uopštena rešenja zakona održanja
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2011
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3, 66, 16, 0, 7, 0, 0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: zakoni održanja, entropijski uslovi, nestajuća viskoznost, Kolomboove algebre, uopštena rešenja, prostorno - zavisni fluks, prostorno - nezavisni fluks
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ
U ovom master radu se bavimo uopštenim rešenjima zakona održanja u obliku Kolomboovih uopštenih funkcija.
Prvo definišemo slaba (distributivna) rešenja zakona održanja za Košijev problem. Da bi se dobila jedinstvenost rešenja i njihova neprekidna zavisnost od početnih podataka uvodimo slaba rešenja koja su dopustiva u smislu nestajuće viskoznosti (vanishing viscosity) i uvodimo pojam entropije i kroz primere analiziramo rešenja Košijevog problema. Zatim definišemo Kolomboove algebre i uopštene funkcije i dajemo pregled svih potrebnih definicija i teorema
Dalje posmatramo Košijev problem za zakone održanja u okviru Kolomboovih algebri. Posebno posmatramo slučajeve kada je funkcija fluksa zavisna odn. nezavisna od prostorne promenljive, što odgovara procesima u homogenoj, odn. heterogenoj sredini. Ispitujemo pod kojim uslovima se može dobiti jedinstveno uopšteno rešenje za Košijev problem i odgovarajuću paraboličnu aproksimaciju.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP Jul, 2011.

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Jelena Aleksić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Ivana Vojnović
AU

Mentor: Jelena Aleksić, Ph.D.
MN

Title: Generalised solutions to conservation laws
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3, 66, 16, 0, 7, 0, 0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Partial Differential Equations
SD

Subject/Key words: conservation laws, entropy conditions, vanishing viscosity, Colombeau's algebras, generalized solutions, space - dependent flux, flux dependent only on the state variable
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
This thesis explores generalized solutions in the sense of Colombeau generalized functions to scalar conservation laws.
First we introduce weak (distributional) solutions to conservation laws. In order to achieve the uniqueness of solutions and their continuos dependence of the initial data we study entropy conditions and solutions that are admissible in the vanishing viscosity sense. In the next part of the tesis the notions of Colombeau algebras and generalized functions are introduced.
Further, we are interested in generalized solutions to the Cauchy problem for conservation laws and their parabolic approximations. We obtain existence and uniqueness results both in the homogeneous case (flux - function is dependent only on the state variable u) and for heterogeneous media (space - dependent flux - function).

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr. Jelena Aleksić, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
Member:	Dr. Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad