UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivana Đurđev

Rang i idempotentni rang u nekim polugrupama transformacija

-master teza-

Mentor:

dr Igor Dolinka

Novi Sad, 2015

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog rada spada u domen relativno mlade discipline apstraktne algebre – teorije polugrupa. Iako naizgled bliska razvojenoj i uvažavanijoj "rođaci", teoriji grupa, ona u velikoj meri dobija na posebnosti, raznolikosti i širini zbog manjeg broja uslova koje strukture u njenom fokusu moraju da ispunjavaju. To predstavlja plodnu podlogu za brojna istraživanja, postavljanja analogija i traženja razlika i specifičnosti, koje će se pokazati već u prvoj glavi rada. Upravo povlačenjem analogija sa teorijom grupa se, po ugledu na kombinatornu teoriju grupa, razvija i kombinatorna teorija polugrupa sa sličnim pitanjima i problemima, ali sa sopstvenim pristupom, pojmovima i oruđima, prilagođenim polugrupama. Ovde ćemo izdvojiti dva bitna svojstva konačne polugrupe sa aspekta kombinatorne teorije polugrupa, rang i idempotentni rang, i ispitivati ih na polugrupama transformacija.

Prva glava sadrži kratak teorijski uvod u obliku pregleda pojmova i tvrđenja iz osnova teorije polugrupa potrebnih u nastavku rada. Jedan od njih je i pojam kompletno 0-proste polugrupe, jer se ispostavlja da su takve polugrupe gradivni elementi svih konačnih polugrupa. Zbog toga čitavu drugu glavu posvećujemo detaljnom ispitivanju ranga tih, kompletno 0-prostih polugrupa i njihovih uopštenja. Ovaj deo sadrži materijal iz čak tri naučna rada i svoju kompleksnost duguje opštosti glavnog rezultata na kraju glave. Treba napomenuti da bitnu ulogu u svemu igraju posebni grafovi određeni našim polugrupama, što nam daje prvi uviđaj u povezanost grafovsko-kombinatornih pitanja sa pitanjima generisanosti i idempotentne generisanosti.

Nakon tih pripremnih glava prelazimo na proučavanje konkretnih primera polugrupa transformacija. Počinjemo sa osnovnom, punom polugrupom transformacija (nad konačnim skupom), $\mathcal{T}_n$, koja je i istorijski prva ispitivana iz ovog aspekta. Tu se uspostavlja i sistem koji će biti primenjivan u svim sledećim primerima: proučavanje Grinovih relacija i ideala datog tipa polugrupa, dokazivanje odnosa generisanosti između maksimalnih glavnih faktora i ostatka polugrupe i na kraju izvođenje zaključaka iz toga o rangu tipa polugrupe. Idempotentni rang, sa druge strane, uvek zahteva specifičan pristup. Ako postoji, cilj nam je da ga nađemo za čitavu polugrupu, a ako ne postoji, zanima nas idempotentno generisana potpolugrupa. Pošto spadaju u značajne rezultate, u nekim slučajevima (na primer, baš u trećoj glavi) su ispitivani i rangovi i idempotentni rangovi ideala polugrupa na kojima radimo. Time nastaje potreba za dodatnom teorijskom podlogom vezanom za idempotentnu generisanost i rangove, koja u trećoj glavi dolazi u obliku zasebnog poglavlja sa prikazom dela rada [16]. Nakon toga, glavu završavamo izračunavanjem tih rangova i idempotentnih rangova, kao i karakterizacijom idempotentnih baza u terminima grafova.

Kao prirodan nastavak prethodne glave sledi i proučavanje polugrupa $\mathcal{PT}_n$ i $\mathcal{IS}_n$ u četvrtoj, istim pristupom. Ovde se, oslanjanjem na osobine $\mathcal{T}_n$, uz nešto tehničkih razlika, paralelno dobijaju potrebni rezultati za oba tipa polugrupa, što zaokružuje suštinski najbitnije primere u radu.

Naredni primer pomalo odskače od ostatka po prirodi objekata kojima se bavi, jer su u pitanju monoidi matrica nad konačnim poljem. Ipak, nakon izlaganja njihovih svojstava se lako uviđa da razlika nije suštinski velika, jer Grinove relacije i ideali imaju istu strukturu kao i u prethodnim slučajevima. Čak se nakon malo ispitivanja ispostavlja da je moguće ponovo primeniti teoriju iz rada [16] da bi se izračunali rangovi i idempotentni rangovi tih ideala, kao i rang same polugrupe. Objašnjavanje suštine sličnosti osobina ovog i prethodnih tipova polugrupa izlazi iz okvira ovog rada, ali je bitno naglasiti da u oba slučaja postoji duboka povezanost pitanja idempotentne generisanosti ideala sa uslovom Hola za egzistenciju savršenog mečinga u bipartitnim grafovima.

Za kraj analiziramo polugrupe punih i parcijalnih transformacija nad konačnim skupom koje očuvavaju poredak, $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$. Već ustaljenim sistemom ispitivanja, uz malo dodatnog istraživanja o idempotentnoj generisanosti, izvodimo formule za njihove rangove i idempotentne rangove u zavisnosti od n, čime završavamo rad, iako preostaje još mnogo primera koji bi sigurno bili vredni pažnje.

Želela bih da se zahvalim svojim roditeljima, Katalin i Draganu, i sestri Kseniji na bezgraničnoj ljubavi, podršci i pomoći koju mi uvek pružaju. Takođe, zahvaljujem Marku Brkoviću na ljubavi, strpljenju, bodrenju i tome što je uvek tu da mi pomogne da prebrodim dane kada mi ništa ne ide od ruke. Uz to, zahvaljujem i Maji Jolić koja mi je tokom studija bila cimerka, prijateljica i saradnica kakva se samo poželeti može. Zahvalnost dugujem i članovima komisije, dr Nebojši Mudrinskom i dr Petru Markoviću, na korisnim sugestijama i predlozima, a najviše svom mentoru, dr Igoru Dolinki, na izboru teme, pomoći, podršci i pružanju slobode u radu. Rad posvećujem svom nastavniku matematike, Ljubomiru Miletiću, koji nažalost nije doživeo da ga pročita.

Novi Sad, septembar 2015.

Ivana Đurđev

Uvod

Jedan od najbitnijih pojmova proučavanju (konačne) grupe sa aspekta kombinatorne teorije grupa je njen rang, tj. minimalna kardinalnost njenog generišućeg skupa. Kao "mlađi" tip struktura u smislu početka njihovog proučavanja, polugrupe su nasledile taj i mnoge druge pojmove i probleme od grupa, a oni su kasnije ugrađeni u kombinatornu teoriju polugrupa. Naravno, one su pored toga dobile i sopstvena oruđa i pojmove specifične za svoje odlike. Na primer, ako (konačna) polugrupa može biti generisana svojim idempotentima, onda ima i idempotentni rang koji predstavlja minimalnu kardinalnost skupa idempotenata koji generiše celu polugrupu. Jasno, rang i idempotentni rang polugrupe mogu, ali ne moraju da budu jednaki.

Ovaj rad će se fokusirati na istraživanje te dve odlike, ali na posebnom tipu polugrupa. Njihovi elementi će biti transformacije, koje su analogon permutacija za grupe i predstavljaju osnovu za razumevanje odnosa u polugrupama, jer je svaka od njih izomorfna nekoj polugrupi transformacija. Odatle uviđamo značaj teme našeg rada i širinu potencijalnog polja izučavanja. Ipak, ovde ćemo se ograničiti na sistematski pregled nekoliko primera koji su najzastupljeniji u literaturi i na neki način se već smatraju klasičnim rezultatima na ovom polju.

Treba napomenuti da je pionir istraživanja u ovoj oblasti bio Džon Hauvi koji je 1966. u radu [22] pokazao da je polugrupa singularnih transformacija nad konačnim skupom idempotentno generisana. Nastavljajući rad u tom smeru (kako sam, tako i u saradnji sa drugim autorima), on računa rang i idempotentni rang te polugrupe [10, 24], rang i idempotentni rang njenih ideala [27] i istražuje mnoge odlike njihovih minimalnih generatornih skupova. Te rezultate sa koautorima proširuje i na druge tipove polugrupa transformacija i njihove generatorne skupove, što podstiče dalji razvoj zanimanja za tu temu i seriju istraživanja koja je aktivna do danas (kao primere možemo navesti radove [5–7, 9, 11, 16, 23]).

Glava 1

Osnovi teorije polugrupa

U ovoj glavi ćemo izložiti kratak pregled pojmova i teorije potrebnih za dalji rad. Radi kompaktnijeg zapisa, mnoge standardne definicije će biti date unutar teksta (bez posebne oznake), a neke čak i podrazumevane (npr. definicija relacije ekvivalencije), jer su uobičajene u osnovama teorije svih algebarskih struktura, a nisu u fokusu sadržaja rada. S obzirom na obim materije koju ćemo izložiti u ovoj glavi, preskočićemo i standardne primere, upućujući ovim putem čitaoca na literaturu. Pored toga, rezultati koji će biti prikazani u ovoj glavi su fundamentalni u teoriji polugrupa, te se nećemo pozivati na izvore kada iznosimo konkretan rezultat, nego će za sve njih ovde biti date zajedničke reference, koje između ostalog sadrže i detaljniji i potpuniji uvod u teoriju polugrupa: [1, 3, 19, 26](korišćena je i [12]).

Nakon osnovnih definicija i standardnih povezanosti kongruencija i homomorfizama, biće opisane Grinove relacije, koje čine bazu teorije ideala polugrupa. Uz mali osvrt na idempotente, koji igraju značajnu ulogu u pronalaženju podgrupa polugrupe, biće opisana struktura $\mathcal{D}$-klasa, gde je Grinova lema suštinski najbitniji rezultat, koji će dati osnovu za dokaz Risove teoreme i omogućiti opisivanje glavnih faktora konačnih polugrupa.

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.1. *Polugrupa* je uređen par $\mathbf{S} = (S, \cdot)$, gde je S neprazan skup (nazivamo ga nosač), a $\cdot$ je binarna operacija nad S (tj. funkcija $\cdot : S\times S \to S$, gde $(a, b)\cdot$ obeležavamo sa $a \cdot b$) koja zadovoljava uslov *asocijativnosti*: za svaku trojku elemenata x, y i z iz S važi $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Znak operacije se u multiplikativnoj notaciji često izostavlja, pa tako ab zamenjuje izraz $a \cdot b$. Pored toga, ako je jasno o kojoj operaciji se radi, često identifikujemo polugrupu sa njenim nosačem, pa zapis $(S, \cdot)$ skraćujemo na S.

Element e polugrupe $(S, \cdot)$ koji za svako $x \in S$ zadovoljava $e \cdot x = x \cdot e = x$ naziva se *jedinični element* ili *jedinica* polugupe. Lako se uočava da je jedinični element, ukoliko postoji, jedinstven. Polugrupa koja sadrži jedinični elemenat se naziva *monoid.* Nekada se jedinica "veštački" dodaje polugrupi na sledeći način: definišemo novi element 1 tako da je $s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$ za svaki $s \in S$ i $1 \cdot 1 = 1$, pa je tada

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{ako } S \text{ ima jedinicu;} \\ S \cup \{1\}, & \text{ako } S \text{ nema jedinicu.} \end{cases}$$

monoid dobijen iz S pridruživanjem jedinice, ako je to neophodno.

Nula polugrupe je u nekom smislu suprotna, jer je to element (označimo ga sa 0) koji za svako $x \in S$ (pri čemu posmatramo polugrupe sa najmanje 2 člana) zadovoljava $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$. Opet se lako uviđa da je nula polugrupe, ako postoji, jedinstvena. Pridruživanje nule polugrupi se vrši na isti način kao i u slučaju jedinice. Nakon što definišemo novi element 0 sa odgovarajućim svojstvom, imamo da je

$$S^0 = \begin{cases} S, & \text{ako } S \text{ ima nulu;} \\ S \cup \{0\}, & \text{ako } S \text{ nema nulu.} \end{cases}$$

Ukoliko je polugrupa S sa nulom 0 takva da je za sve njene elemente a i b $ab = 0$, nazivamo je *nula-polugrupa.*

Element a polugrupe S sa osobinom $aa = a$ nazivamo *idempotentan* element (*idempotent*). Skup svih idempotenata polugrupe S obeležavamo sa $E(S)$. Prirodno, nema ograničenja na broj idempotenata u polugrupi: ne mora da ih bude, a može ih biti i više. U ekstremnom slučaju kada su svi elementi polugrupe idempotenti, takvu polugrupu nazivamo *traka.*

Navedimo primer takve polugrupe. Neka su I i J neprazni skupovi, $T = I \times J$ i binarna operacija $\cdot$ nad T definisana sa $(i,j) \cdot (k,l) = (i,l)$. Asocijativnost i idempotentnost za svaki elemenat se jednostavno proveravaju. Ovaj tip polugrupe nazivamo *pravougaona traka.*

Elemenat a polugrupe S je *regularan* ako postoji $x \in S$ takav da je $a = axa$. Polugrupa je *regularna* ako je svaki njen elemenat regularan.

Ako su A i B podskupovi nosača polugrupe S, tada definišemo njihov proizvod kao $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. U slučaju da je neki od ta dva skupa singlton, recimo $A = \{a\}$, umesto $\{a\}B$ pišemo aB.

Monoid S sa jedinicom 1 u kome za svaki $a \in S$ postoji $b \in S$ tako da je $ab = ba = 1$ nazivamo *grupa.*

Skup $T \subseteq S$ zajedno sa restrikcijom operacije $\cdot\restriction_T$ je *potpolugrupa* polugrupe S ako i samo ako je zatvorena za operaciju $\cdot$, tj. ako za sve $x, y \in T$ važi $x \cdot y \in T$. Lako se dokazuje da je neprazan presek familije $\{T_i : i \in I\}$ potpolugrupa polugrupe S takođe potpolugrupa S. Odatle je za proizvoljan neprazan skup $A \subseteq S$ presek $\bigcap\{T : T \text{ je potpolugrupa } S \text{ i } A \subseteq T\}$ takođe potpolugrupa S; označavamo je sa $\langle A \rangle$ i nazivamo *potpolugrupa polugrupe S generisana podskupom A* (specijalno, potpolugrupu generisanu skupom idempotenata $E(S)$ označavamo sa $F(S)$). Iz definicije se vidi da je u pitanju minimalna potpolugrupa koja sadrži A, a može se dokazati da se ona može dobiti i kao skup svih konačnih proizvoda elemenata iz A.

Napomena 1. Pošto nam to često olakšava razmatranja, a ne remeti osnovne osobine definicije, uzimamo da za svaki skup A i polugrupu S^0 važi $0 \in \langle A \rangle$.

Potpolugrupa T polugrupe S koja je grupa u odnosu na odgovarajuću restrikciju operacije se naziva *podgrupa* polugrupe S.

Neka su $(S, \cdot)$ i $(T, *)$ polugrupe. Tada nad Dekartovim proizvodom $S \times T$ definišemo operaciju $(s,t) \diamond (s', t') = (s \cdot s', t * t')$, i polugrupu $(S \times T, \diamond)$ nazivamo *direktan proizvod polugrupa A i B.*

1.2 Homomorfizmi i kongruencije

Definicija 1.2. Neka su $(S, \cdot)$ i $(T, *)$ polugrupe. Funkcija $\phi : S \to T$ je *homorfizam polugrupa* ako i samo ako je je za sve $a, b \in S$

$$(a \cdot b)\phi = (a)\phi * (b)\phi.$$

Ukoliko su u pitanju monoidi, ϕ će biti *homomorfizam monoida* ako i samo ako pored datog uslova zadovoljava i $(1_S)\phi = 1_T$.

Injektivni homomorfizam nazivamo *monomorfizam*, a sirjektivni *epimorfizam*, dok je bijektivni homomorfizam *izomorfizam*. Ukoliko je u pitanju homomorfizam skupa u samog sebe, nazivamo ga *endomorfizam*, a bijektivan endomorfizam je *automorfizam*. Kolekcija svih endomorfizama skupa $S \neq 0$ zajedno sa operacijom kompozicije čini monoid $\mathrm{End}(S)$ sa jedinicom id_S, dok je skup svih automorfizama istog skupa grupa $\mathrm{Aut}(S)$, koja je podgrupa $\mathrm{End}(S)$.

Ukoliko je $\phi : S \to T$ homomorfizam, skup $\mathrm{Im}(\phi) = \{(s)\phi : s \in S\}$ nazivamo *homomorfna slika* skupa S. Ako je funkcija ϕ injektivna, kažemo da se S utapa u T (što se obeležava sa $S \hookrightarrow T$), a tada važi i da su S i $\mathrm{Im}(\phi)$ izomorfne, što označavamo sa $S \cong \mathrm{Im}(\phi)$.

Za homomorfizam $\phi : S \to T$ se definiše binarna relacija $\ker(\phi) \subseteq S \times S$ na sledeći način: $a \ \ker(\phi) \ b \Leftrightarrow (a)\phi = (b)\phi$. Tu relaciju $\ker(\phi)$ nazivamo *jezgro homomorfizma*. Pošto je vezana za relaciju jednakosti nad T, jasno je da je u pitanju relacija ekvivalencije nad S. Pored toga, ona je i kongruencija nad S, jer je ϕ homomorfizam, odakle sledi saglasnost $\ker(\phi)$ sa operacijom $\cdot$. Kao posledica tih razmatranja se dobija sledeća teorema.

Teorema 1.1 (Prva teorema o izomorfizmu za polugrupe)**.** *Neka je $\phi : S \to T$ epimorfizam polugrupa (monoida). Tada je $S/\ker(\phi) \cong T$.*

Naravno, važi i obratno: za svaku kongruenciju ρ nad S, binarna operacija nad skupom klasa $S/\rho = \{[a] : a \in S\}$ definisana sa $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ je dobro definisana i $(S/\rho, \cdot)$ je polugrupa (nazivamo je *faktor (ili količnička) polugrupa S po ρ*), a za prirodno preslikavanje $\nu_\rho : S \to S/\rho$, $(s)\nu_\rho = [s]$ važi $\rho = \ker(\nu_\rho)$.

1.3 Ideali i Grinove relacije

Nakon kratkog opšteg uvoda, došao je red na definicije i teoreme na koje će se direktno nadovezati ostatak rada, te ćemo ovde izlagati malo detaljnije, obrazlažući dokaze i svrhu uvođenja konkretnog pojma ili rezultata.

Kao što je već spomenuto, Grinove[1] relacije su osnovno oruđe za ispitivanje idealske strukture polugrupe, što je bitno za ispitivanje same polugrupe, koja može da bude izuzetno komplikovana, jer ima samo jedno fiksirano svojstvo – asocijativnost.

Definicija 1.3. Podskup $\emptyset \neq I \subseteq S$ nosača polugrupe S je

- *desni ideal* polugrupe ako i samo ako važi $IS \subseteq I$,
- *levi ideal* polugrupe ako i samo ako važi $SI \subseteq I$,
- *ideal* polugrupe ako i samo ako važi $IS \cup SI \subseteq I$.

Jasno, svi ideali polugrupe S su i njene potpolugrupe. Ideal $I \neq S$ se naziva *pravi* ideal.

Ako je I pravi ideal polugrupe S, lako se utvrđuje da je $\rho_I = \{(s, s) : s \in S\} \cup (I \times I)$ kongruencija nad S. Pri tome je S/ρ_I zgodno posmatrati kao $(S \setminus I) \cup \{0\}$, gde su svi proizvodi koji ne upadaju u $S \setminus I$ jednaki 0 (ovo ćemo detaljnije objasniti u poglavlju 1.6). Kongruenciju ovog tipa nazivamo *Risova*[2] *kongruencija*, a homomorfizam koji joj odgovara *Risov homomorfizam*. Skup S/ρ_I označavamo sa S/I i nazivamo ga *Risov količnik S u odnosu na I*.

Definicija 1.4. Neka je S polugrupa. Ako je njen jedini ideal skup S, kažemo da je ona *prosta*. Ukoliko je u pitanju polugrupa sa nulom 0 za koju važi $S^2 \neq 0$ i njeni jedini ideali su skupovi S i $\{0\}$, onda je nazivamo *0-prostom*.

Grinove relacije su vezane za specijalne vrste ideala, koje ćemo uvesti u nastavku. Posmatrajmo polugrupu S. Za svaki elemenat $a \in S$, skup aS^1 je desni ideal polugrupe S, i to najmanji desni ideal koji sadrži a (zbog $a1 = a$ sadrži a, zbog $aS^1S \subseteq aS^1$ je ideal, a $a \in I \Rightarrow aS^1 \subseteq IS^1 = I \cup IS$ nam daje minimalnost). Simetrično, S^1a je najmanji levi ideal koji sadrži a i, očekivano, S^1aS^1 je najmanji ideal koji sadrži a. Oni se redom nazivaju *glavni desni*, *glavni levi* i *glavni ideal generisan sa a*.

U proučavanju odnosa koji važe među glavnim desnim (levim) idealima nam pomažu sledeći zaključci:

[1] James Alexander "Sandy" Green (1926–2014)
[2] David Rees (1918–2013)

Lema 1.1 (Lema o glavnim desnim idealima)**.** *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna*

(i) $aS^1 \subseteq bS^1$,
(ii) $a \in bS^1$,
(iii) $a = bt$ *za neko* $t \in S^1$,
(iv) $a = b$ *ili* $a = bt$ *za neko* $t \in S$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$ je jasno, a $(ii) \Rightarrow (i)$ sledi iz pretpostavke $a \in bS^1$ i činjenice da je aS^1 najmanji desni ideal koji sadrži a. □

Naravno, simetrično važi i

$$\begin{aligned} S^1a \subseteq S^1b &\Leftrightarrow a \in S^1b \Leftrightarrow a = tb \text{ za neko } t \in S^1 \\ &\Leftrightarrow a = b \text{ ili } a = tb \text{ za neko } t \in S. \end{aligned}$$

Očekivano, sličan zaključak se može izvući i za (dvostrane) ideale:

$$\begin{aligned} S^1aS^1 \subseteq S^1bS^1 &\Leftrightarrow a \in S^1bS^1 \Leftrightarrow a = tbs, \text{ za neke } s,t \in S^1 \\ &\Leftrightarrow a = b \vee a = sb \vee a = bt \vee a = sbt, \text{ za neke } s,t \in S. \end{aligned}$$

Najzad možemo da definišemo relacije koje igraju ključnu ulogu teoriji polugrupa, čuvene *Grinove relacije*.

Definicija 1.5. Neka su a i b elementi polugrupe S. Tada je

$$\begin{aligned} a\,\mathcal{R}\,b &\Leftrightarrow aS^1 = bS^1, \\ a\,\mathcal{L}\,b &\Leftrightarrow S^1a = S^1b, \\ a\,\mathcal{J}\,b &\Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1, \end{aligned}$$

pri čemu je $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ i $\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.

Iz definicija je jasno da su $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{J}$ i $\mathcal{H}$ relacije ekvivalencije (prve tri jer se definišu preko relacije jednakosti, a četvrta kao presek dve relacije ekvivalencije). Za relaciju $\mathcal{D}$ je jasna refleksivnost, ali simetričnost i tranzitivnost slede iz sledeće leme:

Lema 1.2. $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$

Dokaz. Dokazaćemo samo $(\subseteq)$, jer je dokaz druge nejednakosti dualan. Neka u polugrupi S važi $a\,\mathcal{R} \circ \mathcal{L}\,b$. Odatle sledi da postoji $c \in S$ tako da je $a\,\mathcal{R}\,c\,\mathcal{L}\,b$, te iz osobina desnih i levih glavnih ideala znamo da postoje $u, v, s, t \in S^1$ koji zadovoljavaju $a = cu$, $c = av$, $c = sb$ i $b = tc$. Uočimo elemenat $d = bu$. Za njega važi

$$d = bu = tcu = ta \quad \text{i} \quad a = cu = sbu = sd,$$

pa imamo $d \,\mathcal{L}\, a$. Pored toga, možemo zaključiti i

$$b = tc = tav = tcuv = buv = dv,$$

pa uz $d = bu$ dobijamo i $d \,\mathcal{R}\, b$. Odatle je $a \,\mathcal{L}\, d \,\mathcal{R}\, b$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Kao posledica ove leme se dobija da je $\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L} \Big(= (\mathcal{R} \circ \mathcal{L})^{\infty} \Big)$, odakle se onda jednostavno dokazuju i simetričnost i tranzitivnost. Dokaze ćemo preskočiti, jer bi zauzeli dosta prostora, a svode se na tehničku proveru.

Jasno je da je $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ i $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$, kao i da je $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$ i $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$, a pošto je $\mathcal{D}$ najmanja relacija koja sadrži i $\mathcal{R}$ i $\mathcal{L}$, sledi da je i $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Zaključujemo da među našim relacijama važe odnosi prikazani na slici 1.1.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathcal{J} \arrow[d] & \\
 & \mathcal{D} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{L} \arrow[dr] & & \mathcal{R} \arrow[dl] \\
 & \mathcal{H} &
\end{tikzcd}$$

Slika 1.1: Hase dijagram Grinovih relacija

Neka je $a \in S$. Njegove klase unutar relacija $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{J}$ obeležavamo redom sa R_a, L_a, H_a, D_a i J_a. Koristeći osobine glavnih ideala i relacije inkluzije, možemo definisati parcijalna uređenja među klasama relacija $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}
R_a \leq R_b &\Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1, \\
L_a \leq L_b &\Leftrightarrow S^1 a \subseteq S^1 b, \\
J_a \leq J_b &\Leftrightarrow S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Relacija $\leq$ nad $\{J_a : a \in S\}$ će nam biti od koristi kada budemo opisivali glavne faktore polugrupe, te ćemo nadalje često obraćati posebnu pažnju na svojstva relacije $\mathcal{J}$.

Da bismo izveli dalje zaključke, bitno je da imamo u vidu još neke osobine Grinovih relacija.

- Prvo primetimo da je relacija $\mathcal{R}$ leva kongruencija (jer za svako $c \in S$ $aS^1 = bS^1 \Rightarrow caS^1 = cbS^1 \Rightarrow ca \,\mathcal{R}\, cb$), a relacija $\mathcal{L}$ desna kongruencija.

- Osim toga, imamo da za klasu D relacije $\mathcal{D}$ pretpostavka $a, b \in D$ povlači $a \,\mathcal{D}\, b$, što važi ako i samo ako postoji $c \in S$ takvo da je $a \,\mathcal{R}\, c \,\mathcal{L}\, b$, odakle zaključujemo da je

$$R_a \cap L_b = R_c \cap L_c = H_c \neq \emptyset, \tag{1.2}$$

pa $\mathcal{D}$-klasu D možemo na zgodan način predstaviti kao dijagram u obliku tabele (takozvani *egg-box dijagram*), čije će vrste predstavljati $\mathcal{R}$-klase unutar D, kolone $\mathcal{L}$-klase unutar D i polja $\mathcal{H}$-klase unutar D. Na slici 1.2 je prikazan oblik takvog dijagrama i elementi a, b i c u prethodno opisanim ulogama. Primetimo da nam razmatranje (1.2) obezbeđuje da je svako polje dijagrama bilo koje $\mathcal{D}$-klase proizvoljne polugrupe S neprazno.

a		c
		b

Slika 1.2: Egg-box dijagram

- Na kraju, uočimo sledeće:

Lema 1.3. *Polugrupa S je prosta (0-prosta) ako i samo ako je $\mathcal{J} = \omega$, tj. univerzalna relacija (odnosno akko je $\mathcal{J} = (0,0) \cup \{(a,b) : a,b \in S \setminus \{0\}\}$).*

Dokaz. Za svako $a \in S$ važi $a = 1a1 \in S^1aS^1$, odakle za $a \neq 0$ sledi $S^1aS^1 \neq \{0\}$. Ako je polugrupa S prosta (samim tim ne sadrži nulu), to znači da je S tada njen jedini ideal, samim tim i jedini glavni ideal. Odatle sledi da je za proizvoljne $a, b \in S$ važi $S^1aS^1 = S = S^1bS^1$, te je $\mathcal{J} = \omega$. Obratno, ako je $\mathcal{J} = \omega$, to znači da je S jedini glavni ideal polugrupe S, a pošto su glavni ideali elemenata istovremeno i minimalni ideali koji ih sadrže, zaključujemo da drugih i nema, te je S prosta.

Dokažimo i drugu varijantu tvrđenja. Pretpostavimo da je S 0-prosta, što znači da su njeni jedini ideali skupovi S i $\{0\}$. Imajući u vidu $a \in S^1aS^1$, zaključujemo da to znači

$$S^1aS^1 = S = S^1bS^1 \text{ za sve } a,b \in S \setminus \{0\} \quad \wedge \quad S^10S^1 = 0.$$

Drugim rečima, $\mathcal{J} = (0,0) \cup \{(a,b) : a,b \in S \setminus \{0\}\}$. Obrat sledi ponovo zbog minimalnosti glavnih ideala, slično kao u prethodnom slučaju. $\square$

1.4 Idempotenti i podgrupe

Postojanje podgrupa je, sa aspekta proučavanja polugrupe, lepo svojstvo. Unutar njih imamo inverzne elemente, jedinicu, često mnogo jednostavnije možemo da odredimo neka njihova svojstva i znamo da nam nijedan proizvod ne može "pobeći" u neku nulu. Pored toga, videćemo da postoji bitna povezanost između $\mathcal{H}$-klasa polugrupe i njenih podgrupa, što je razlog više za njihovo proučavanje.

Da bi potpolugrupa S bila i njena podgrupa, ona mora da sadrži jedinicu. To, naravno, ne mora biti jedinica čitave polugrupe, ali je jasno da mora biti idempotent. Zato ćemo u nastavku proučiti odnose Grinovih relacija i idempotentnih elemenata polugrupe. Naravno, prirodno je prvo proučiti osobine glavnih levih i desnih ideala idempotenata.

Lema 1.4. *Neka je S polugrupa i neka važi $a \in S$ i $e \in E(S)$. Tada je*

$$S^1a \subseteq S^1e \Leftrightarrow ae = a$$
$$aS^1 \subseteq eS^1 \Leftrightarrow ea = a.$$

Dokaz. Dokazaćemo samo prvu ekvivalenciju, jer se druga analogno dokazuje. Neka je S polugrupa, $a \in S$, $e \in E(S)$ i $S^1a \subseteq S^1e$. Tada je $a = te$ za neko $t \in S^1$, pa je $ae = (te)e = t(ee) = te = a$. Obratno, neka je $ae = a$. Tada $a \in S^1e$, pa je $S^1a \subseteq S^1e$. □

Posledica 1.1. *Neka je S polugrupa i $e \in E(S)$. Tada važi*

$$a\,\mathcal{R}\,e \Rightarrow ea = a,$$
$$a\,\mathcal{L}\,e \Rightarrow ae = a,$$
$$a\,\mathcal{H}\,e \Rightarrow ea = ae = a.$$

Primetimo da to znači da je idempotent jedinica svoje $\mathcal{H}$-klase.

U nastavku proučavamo kolika može da bude podgrupa u odnosu na $\mathcal{H}$-klasu svog jediničnog elementa.

Lema 1.5. *Ako je G podgrupa (polugrupe S) sa jedinicom e, tada važi $G \subseteq H_e$.*

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi leme. Tada za proizvoljan $a \in G$ važi $ea = ae = a$ i postoji $a^{-1} \in G$ tako da je $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, pa iz $ae = a$ i $a^{-1}a = e$ sledi $a\,\mathcal{L}\,e$, a iz druge dve jednakosti $a\,\mathcal{R}\,e$, te dobijamo $a\,\mathcal{H}\,e$. Odatle je $G \subseteq H_e$. □

Teorema 1.2 (Teorema o maksimalnoj podgrupi)**.** *Neka je $e \in E(S)$. Tada je H_e maksimalna podgrupa grupe S sa jedinicom e.*

Dokaz. Iz prethodne leme sledi da za podgrupu G (polugrupe S) sa jedinicom e važi $G \subseteq H_e$, pa nam preostaje da pokažemo da je H_e podgrupa sa jedinicom e. Iz posledice 1.1 znamo da je e neutralni element za H_e. Pokažimo zatvorenost za operaciju: neka $a, b \in H_e$, tada je $b \,\mathcal{H}\, e$, pa $b \,\mathcal{R}\, e$ i zbog leve kompatibilnosti relacije $\mathcal{R}$ dobijamo $ab \,\mathcal{R}\, ae = e$; analogno se dobija i $ab \,\mathcal{L}\, eb = e$, te je $ab \,\mathcal{H}\, e$.

Sada ćemo za svaki elemenat $a \in H_e$ pronaći inverzni unutar H_e. Pošto je $a \,\mathcal{H}\, e$, postoje $s, t \in S^1$ tako da je $at = e$ i $sa = e$. Pri tome je $e = ee = (at)e = ((ae)t)e = a(ete)$ i slično $e = (ese)a$. Uvedimo oznake $x = ete$ i $y = ese$. Sada možemo zaključiti sledeće:

$$x = ete = eete = ex = (ya)x = y(ax) = ye = esee = ese = y.$$

Znači, $x = y$ i $e = ax = xa$, a pored toga je i $ex = xe = x$, te x ima osobine inverznog, samo treba pokazati da pripada odgovarajućoj $\mathcal{H}$-klasi. Da bismo to dokazali, treba samo da primetimo da iz $ex = x$ i $xa = e$ dobijamo $e \,\mathcal{R}\, x$, a iz druge dve jednakosti $e \,\mathcal{L}\, x$, pa imamo $x \in H_e$. $\square$

Ovim smo pokazali da $\mathcal{H}$-klase mogu biti podgrupe polugrupe, ali to naravno ne znači da one to uvek jesu. U sledećem poglavlju ćemo dokazati teoremu koja daje kriterijum za određivanje da li je H klasa podgrupa S ili ne.

1.5 Struktura $\mathcal{D}$-klasa

U ovom poglavlju ćemo razjasniti odnose manjih relacija ($\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ i $\mathcal{H}$) unutar jedne $\mathcal{D}$-klase. To će nam pomoći da kasnije shvatimo strukturu specijalne vrste 0-prostih polugrupa, koja će nam biti značajna u nastavku rada.

Za polugrupu S i element $s \in S^1$ definišimo $\rho_s : S \to S$, $(a)\rho_s = as$ (odnosno dualno $\lambda_s : S \to S$, $(a)\lambda_s = sa$). U sledećim lemama ćemo posmatrati njene sirjektivne restrikcije koje ćemo radi jednostavnosti označavati na isti način kao i nju. Do zabune ne može doći, jer će svaki put biti naglašen domen restrikcije.

Lema 1.6 (**Grinova lema**). *Neka su $a, b \in S$ u relaciji $\mathcal{R}$ i neka su elementi $s, s' \in S$ izabrani tako da je $as = b$ i $bs' = a$. Tada su (sirjektivne restrikcije) $\rho_s : L_a \to L_b$ i $\rho_{s'} : L_b \to L_a$ uzajamno inverzne bijekcije koje očuvavaju $\mathcal{R}$-klasu (ρ_s očuvava $\mathcal{R}$-klasu akko važi $c \in L_a \Rightarrow c \,\mathcal{R}(c)\rho_s$).*

Pored toga, za svako $c \in L_a$ važi: $\rho_s : H_c \to H_{cs}$ je bijekcija, sa inverznom funkcijom $\rho_{s'} : H_{cs} \to H_c$ (specijalno, za $c = a$ su u pitanju $\rho_s : H_a \to H_b$ i $\rho_{s'} : H_b \to H_a$).

Dokaz. Prvo dokažimo da važi $\mathrm{Im}(\rho_s{\restriction_{L_a}}) = L_b$. Neka je $c \,\mathcal{L}\, a$. Pošto je $\mathcal{L}$ desna kongruencija, odatle sledi $(c)\rho_s = cs \,\mathcal{L}\, as = b$, te je $(c)\rho_s \,\mathcal{L}\, b$, što smo i želeli da pokažemo. Pored toga, treba dokazati da su odgovarajuće restrikcije ρ_s i $\rho_{s'}$ uzajamno inverzne (odatle će slediti da su bijekcije). Neka je opet $c \in L_a$. Tada postoji $t \in S^1$ takav da je $c = ta$, odakle je

$$(c)\rho_s\rho_{s'} = (ta)\rho_s\rho_{s'} = tass' = tbs' = ta = c.$$

Zato važi $\rho_s\rho_{s'} = I_{L_a}$. Dualno se dokazuje $\rho_{s'}\rho_s = I_{L_b}$. Ostaje nam još da pokažemo očuvanje $\mathcal{R}$-klase. Za proizvoljno $d \in L_a$ je $ds = d \cdot s$ i $d = ds \cdot s'$, te dobijamo $d \,\mathcal{R}\, ds = (d)\rho_s$.

Drugi deo leme sada sledi zbog $\mathrm{Im}(\rho_s\restriction_{H_c}) = \mathrm{Im}(\rho_s\restriction_{L_c \cap R_c}) = L_{cs} \cap R_{sc} = H_{cs}$ (i dualno $\mathrm{Im}(\rho_{s'}\restriction_{H_{cs}}) = H_c$). $\square$

Prirodno, važi i njen dual:

Lema 1.7 (**dual Grinove leme**). *Neka su $a, b \in S$ u relaciji $\mathcal{L}$ i neka su elementi $t, t' \in S$ izabrani tako da je $ta = b$ i $t'b = a$. Tada su (sirjektivne restrikcije) $\lambda_t : R_a \to R_b$ i $\lambda_{t'} : R_b \to R_a$ uzajamno inverzne bijekcije koje očuvavaju $\mathcal{L}$-klasu.*

Pored toga, za svako $c \in R_a$ važi: $\lambda_t : H_c \to H_{tc}$ je bijekcija, sa inverznom funkcijom $\lambda_{t'} : H_{tc} \to H_c$ (specijalno, za $c = a$ su u pitanju $\lambda_t : H_a \to H_b$ i $\lambda_{t'} : H_b \to H_a$).

Odmah uočavamo da iz ovih lema sledi da su sve $\mathcal{R}$-klase ($\mathcal{L}$-klase) unutar neke $\mathcal{D}$-klase iste kardinalnosti, ali i

Posledica 1.2. *Ako važi $a \,\mathcal{D}\, b$, onda postoji bijekcija iz H_a u H_b.*

Dokaz. Iz $a \,\mathcal{D}\, b$ sledi da postoji $c \in S^1$ takav da je $a \,\mathcal{R}\, c \,\mathcal{L}\, b$, te prema Grinovoj lemi postoji bijekcija iz H_a u H_c, a prema dualu Grinove leme postoji bijekcija iz H_c u H_b, pa je kompozicija te dve funkcije bijekcija iz H_a u H_b. $\square$

Sada znamo i da su svake dve $\mathcal{H}$-klase unutar iste $\mathcal{D}$-klase iste kardinalnosti. To nas najzad dovodi do utvrđivanja bitne osobine H-klasa, koju smo najavili na kraju prethodnog poglavlja.

Teorema 1.3 (**Grinova teorema**). *Neka je H $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S. Tada važi tačno jedan od slučajeva: ili je $H^2 \cap H = \emptyset$ ili je H podgrupa S.*

Dokaz. Dokazaćemo da iz $H^2 \cap H \neq \emptyset$ sledi da je H podgrupa S. Iz naše pretpostavke sledi da postoje $a, b, c \in H$ takvi da je $ab = c$. Iz $a \,\mathcal{H}\, c$ sledi $a \,\mathcal{R}\, c$, pa je $\rho_b : H_a \to H_c$ bijekcija. Ali imamo $H_a = H_c = H$, te je $Hb = H$. Zato postoji $d \in H$ takav da je $db = b$, a zbog $d \,\mathcal{R}\, b$ postoji $s \in S^1$ sa osobinom $bs = d$. Najzad imamo $d = bs = dbs = d^2$, te H sadrži idempotent, pa iz teoreme o maksimalnoj podgrupi sledi da je H podgrupa S. $\square$

Posledica 1.3. *Klasa H_a je podgrupa ako i samo ako je $a\,\mathcal{H}\,a^2$ (specijalno, za svaki $e \in E(S)$, H_e je podgrupa S).*

Na kraju dajemo još jednu lemu koja je posledica Grinove leme, a vezana je za idempotente i Grinove relacije.

Lema 1.8. *Neka su elementi a i b u $\mathcal{D}$-klasi D polugrupe S. Tada važi $ab \in R_a \cap L_b$ ako i samo ako $L_a \cap R_b$ sadrži idempotent.*

Dokaz. Pretpostavimo da su ispunjeni dati uslovi i da $ab \in R_a \cap L_b$. To znači da postoji $s \in S^1$ tako da je $abs = a$ i po Grinovoj lemi sledi da $\rho_s : x \mapsto xs$ slika L_{ab} na L_a, očuvavajući R_x, te slika $H_b = L_b \cap R_b = L_{ab} \cap R_b$ na $L_a \cap R_b$, bijektivno. To znači da je specijalno $(b)\rho_s = bs \in L_a \cap R_b$. Sa druge strane, $\rho_b : x \mapsto xb$ slika L_a na L_{ab}, pa i $L_a \cap R_b$ na $L_{ab} \cap R_b = L_b \cap R_b = H_b$ i ona je inverzna ρ_s, pa je $bsbs = (b)\rho_s\rho_b\rho_s = (b)\rho_s = bs$, te je bs idempotent u $L_a \cap R_b$.

Pretpostavimo suprotno, neka $L_a \cap R_b$ sadrži idempotent e. Tada je prema posledici 1.1 $eb = b$, pa kao i ranije zaključujemo da ρ_b slika $H_a = L_a \cap R_a = L_e \cap R_a$ na $L_b \cap R_a$, pa $(a)\rho_b = ab \in L_b \cap R_a$. $\square$

1.6 Glavni faktori

U prethodnom poglavlju smo postavili temelj za naredno, gde ćemo izučavati kompletno 0-proste polugrupe i pokazati da imaju zgodnu karakterizaciju. Međutim, ovo poglavlje sadrži razloge zbog kojih su nam takve polugrupe interesantne. Naime, pokazaćemo bitnu tehniku dekompozicije polugrupa na određene komponente, da bismo u sledećem dokazali da su u slučaju konačnih polugrupa sve komponente baš takve specijalne, kompletno 0-proste polugrupe.

No, krenimo redom. Za početak dajemo jedan nov pojam i odmah nadovezujemo lemu o njegovom svojstvu.

Definicija 1.6. 0-*minimalan* ideal polugrupe S je minimalan ideal u skupu njenih ideala različitih od $\{0\}$.

Lema 1.9. *Ako je M 0-minimalan ideal polugrupe S, tada je ili $M^2 = \{0\}$ ili je M 0-prosta polugrupa.*

Dokaz. Pošto je M^2 ideal sadržan u M, pri čemu je M minimalan nenula ideal u S, mora da važi ili $M^2 = M$ ili $M^2 = \{0\}$. Pretpostavimo da je $M^2 = M$. Odatle sledi da je i $M^3 = M$, pa je za element $a \in M \setminus \{0\}$ skup S^1aS^1 nenula ideal (sadrži $1a1 = a$) sadržan u M (jer $a \in M$, koji je ideal), pa mora da važi $S^1aS^1 = M$. Stoga je

$$MaM \subseteq S^1aS^1 = M = M^3 = M(S^1aS^1)M = (MS^1)a(MS^1) \subseteq MaM,$$

odakle imamo $MaM = M$. Dakle, za $a \in M$ važi ili $MaM = 0$ ili $MaM = M$ pa je prema lemi 1.3 polugrupa M 0-prosta. $\square$

U slučaju da pričamo o polugrupi bez nule, dolazimo do zaključka da ona ima najviše jedan minimalan ideal (ako bi ih bilo bar dva različita, M i N, tada bi MN bio ideal sadržan u oba, a zbog njihove minimalnosti jednak i prvom i drugom, te bi i oni bili jednaki). Odatle sledi da u polugrupi bez nule ili ne postoji minimalan ideal, ili je jedinstven (u polugrupi sa nulom postoji i jedinstven je, jer je to $\{0\}$). To znači da svaka konačna polugrupa ima jedinstven minimalan ideal (jer ne može imati beskonačan opadajući lanac ideala).

Sledeća teorema koristi pojam 0-minimalnog ideala da bi odredila osobine Risovih količnika ideala, koje će nam biti potrebne za izučavanje pojma glavnih faktora.

Lema 1.10. *Ako su I i J ideali polugrupe S takvi da je $I \subset J$ i ne postoji ideal B takav da je $I \subset B \subset J$, tada je J/I ili 0-prosta ili nula-polugrupa.*

Dokaz. Ako je I pravi ideal polugrupe S, $\mathcal{A}$ skup ideala S koji sadrže I, a $\mathcal{B}$ skup ideala Risovog količnika S/I $(= \{I\} \cup \{\{x\} : x \in S \setminus I\})$, tada je preslikavanje

$$\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \ , \ (J)\theta = J/I$$

bijekcija koja očuvava poredak. Obrazložimo to ukratko. Za svaki ideal J nad S koji sadrži I važi da je $JS \cup SJ \subseteq J$, pa za $J/I = \{I\} \cup \{\{x\} : x \in J \setminus I\}$ važi $J/I \cdot S/I \cup S/I \cdot J/I \subseteq J/I$. Odatle sledi da je homomorfna slika funkcije θ baš $\mathcal{B}$. Razmotrićemo još samo sirjektivnost, jer se injektivnost i očuvanje poretka jednostavno pokazuju. Svaki ideal B iz $\mathcal{B}$ sadrži $\{I\}$ kao svoju nulu, i neke elemente $\{x\}$, gde $x \in S \setminus I$. Neka je $B = \{I\} \cup X$. Tada za svaki $\{x\} \in X$ imamo $\{x\}S/I \cup S/I\{x\} \subseteq B$, pa je $xS \cup Sx \subseteq \bigcup X \cup I$, te je $\bigcup X \cup I$ ideal nad S, takav da je $(\bigcup X \cup I)\theta = B$.

Imajući u vidu ovu bijekciju, zaključujemo da je J/I iz uslova leme minimalni ideal nad $\mathcal{B}$, pa je prema lemi 1.9 ili 0-prost, ili važi $(J/I)^2 = \{I\}$, tj. J/I je nula-polugrupa (jer je $\{I\}$ njena nula). Primetimo, u slučaju da je $I = S$, dokaz se svodi na dokaz leme 1.9. $\square$

Sada, ako posmatramo glavne ideale polugrupe S i poredak definisan u (1.1), i pretpostavimo da je $J(a) = S^1aS^1$ minimalni glavni ideal, tada je on i minimalni ideal. Dokažimo to: pretpostavimo da je $I \subseteq J_a$ ideal i da $b \in I$; sledi da je

$$J(b) = S^1bS^1 \subseteq I \subseteq S^1aS^1 = J(a),$$

a $J(a)$ je minimalan, te je $S^1bS^1 = I = S^1aS^1$. Jasno, tada je taj minimalni glavni ideal jedinstven (pa ga možemo izdvojiti i označiti sa $K(S)$) i jednak svojoj klasi J_a ($b \in J(a) \Leftrightarrow J(b) \subseteq J(a)$, a zbog minimalnosti S^1aS^1 je

$J(b) = J(a)$, pa je $b \in J_a$). Pri tome je, naravno, $K(S) = \{0\}$, ako S sadrži nulu 0. Ukoliko je ne sadrži, pronašli smo 0-minimalan ideal polugrupe S.

Sa druge strane, ako $J(a)$ nije minimalan, tada ni klasa J_a nije minimalna u $(S/\mathcal{J}, \leq)$, te je skup

$$I(a) = \{b \in J(a) : J_b < J_a\} = J(a) \setminus J_a$$

neprazan. U tom slučaju je $I(a)$ ideal polugrupe S, jer za $c \in I(a)$ imamo $J(ca) \subseteq J(c) \subset J(a)$, odakle sledi $ca \in I(a)$ (simetrično se pokazuje i $ac \in I(a)$). Pored toga, važi i $I(a) = \bigcup\{J_b : J_b < J_a\}$.

Dokažimo da je $I(a)$ maksimalan ideal $J(a)$. Posmatrajmo ideal B nad S takav da je $I(a) \subseteq B \subset J(a)$. Iz $b \in B$ imamo $J(b) \subseteq B$, pa je $J(b) \subset J(a)$, te $b \in I(a)$. To znači da je $B = I(a)$, pa su ispunjeni uslovi leme (1.10), te iz nje dobijamo da je $J(a)/I(a)$ ili 0-prosta ili nula-polugrupa. Polugrupe $K(S)$ i $J(a)/I(a)$, $a \in S$ nazivamo *glavni faktori* polugrupe S.

Ovu diskusiju možemo da sumiramo kao tvrđenje:

Teorema 1.4. *Za element a polugrupe S važi tačno jedna od mogućnosti:*

(i) $J_a = K(S)$ *i u pitanju je* 0*-minimalan ideal polugrupe* S*,*

(ii) $I(a) = \{b : J_b < J_a\} \neq \emptyset$ *i* $I(a)$ *je ideal u* $J(a)$*, a* $J(a)/I(a)$ *je* 0*-prosta ili nula polugrupa.*

Iz dokaza leme (1.10) i prethodne diskusije vidimo da za glavni faktor $J(a)/I(a)$ imamo dva moguća oblika. Ako je u pitanju nula-polugrupa, svi proizvodi padaju u $I(a)$, tj. u nižu klasu, a ako je $J(a)/I(a)$ 0-prosta, možemo je posmatrati kao polugrupu sa nulom $I(a)$ i $\mathcal{J}$-klasama $\{I(a)\}$ i J_a, gde proizvodi elemenata mogu da budu u J_a ili da upadnu u nižu klasu $J_b < J_a$. Iz tog razloga se u literaturi glavni faktor $J(a)/I(a)$ definiše kao $J_a^* = J_a \cup \{0\}$, gde je

$$st = \begin{cases} st, & s, t, st \in J_a; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

1.7 Kompletno 0-proste polugrupe i Risove matrične polugrupe

Kako smo već najavili, u ovom poglavlju ćemo se baviti specijalnom klasom 0-prostih polugrupa, koje se mogu na zgodan način predstaviti i čija nam je struktura bitna, jer ćemo videti da su glavni faktori konačnih polugrupa baš tog oblika.

Definicija 1.7. 0-prosta polugrupa se naziva *kompletno* 0*-prosta* ako i samo ako ima 0-minimalne leve i desne glavne ideale.

To je ekvivalentno sa uslovima da ne postoje beskonačni lanci oblika $S^1a_1 \supset S^1a_2 \supset S^1a_3 \supset \cdots$ (glavni levi ideali), što označavamo kao uslov M_L, odnosno oblika $a_1S^1 \supset a_2S^1 \supset a_3S^1 \supset \cdots$ (glavni desni ideali), a to je uslov M_R. Drugim rečima, M_L daje da svaki lanac oblika $S^1a_1 \supseteq S^1a_2 \supseteq S^1a_3 \supseteq \cdots$ mora postati stacionaran nakon nekog k (što znači $S^1a_k = S^1a_{k+1} = S^1a_{k+2} = \cdots$), a M_R obezbeđuje dualno za glavne desne ideale.

Jasno, pošto konačne polugrupe mogu imati samo konačno mnogo glavnih levih (desnih) ideala, one zadovoljavaju i M_L i M_R, pa je svaka konačna 0-prosta polugrupa i kompletno 0-prosta.

Sledi teorema čija posledica nam daje jasniju sliku o implikacijama uslova M_R i M_L.

Teorema 1.5. *Pretpostavimo da u polugrupi S važi*

$$(\star)\begin{cases} \forall a \in S\ \exists n \in \mathbb{N}\ (a^n \,\mathcal{L}\, a^{n+1}), \\ \forall a \in S\ \exists m \in \mathbb{N}\ (a^m \,\mathcal{R}\, a^{m+1}). \end{cases} \tag{1.3}$$

Tada je $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Dokaz. Znamo da u opštem slučaju važi $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$. Treba pokazati da $(\star)$ implicira $\supseteq$. Neka za $a, b \in S$ važi $a \,\mathcal{J}\, b$. To znači da postoje $q, r, s, t \in S^1$ takvi da je $b = qar$ i $a = sbt$. Odatle je

$$b = qar = (qs)b(tr) = (qs)qsbtr(tr) = (qs)^2b(tr)^2 = \cdots = (qs)^nb(tr)^n,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz $(\star)$ sledi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $(qs)^{n_1} \,\mathcal{L} (qs)^{n_1+1}$. Zato je $b = (qs)^{n_1}b(tr)^{n_1} \,\mathcal{L} (qs)^{n_1+1}b(tr)^{n_1} = qs((qs)^{n_1}b(tr)^{n_1}) = qsb$, te je $b \,\mathcal{L}\, qsb$, pa odatle dobijamo $S^1b = S^1qsb \subseteq S^1sb \subseteq S^1b$. Zaključujemo da je $S^1b = S^1sb$, drugim rečima $b \,\mathcal{L}\, sb$. Potpuno dualnim rezonovanjem se dobija da je $b \,\mathcal{R}\, bt$, pa je $a = sbt \,\mathcal{R}\, sb \,\mathcal{L}\, b$, pa je $a \,\mathcal{D}\, b$, što smo i želeli da dokažemo. $\square$

Posledica 1.4. *Ako polugrupa S zadovoljava M_L i M_R, tada u njoj važi $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.*

Dokaz. Utvrdili smo da uslov M_L obezbeđuje stabilizaciju svakog nerastućeg lanca levih ideala, pa za proizvoljno $a \in S$ i lanac $S^1a \supseteq S^1a^2 \supseteq \cdots$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S^1a^n = S^1a^{n+k}$, za svako $k \in \mathbb{N}$. Odatle je $a^n \,\mathcal{L}\, a^{n+1}$. Na analogan način se pokazuje da važi i drugi deo uslova $(\star)$, pa iz prethodne teoreme sledi da je $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. $\square$

Lema 1.11. *Neka polugrupa S zadovoljava uslov $(\star)$. Tada za sve $a, b \in S$ važi*

$$a \,\mathcal{J}\, ab \Leftrightarrow a \,\mathcal{D}\, ab \Leftrightarrow a \,\mathcal{R}\, ab,$$
$$b \,\mathcal{J}\, ab \Leftrightarrow b \,\mathcal{D}\, ab \Leftrightarrow b \,\mathcal{L}\, ab.$$

Dokaz. Pokazaćemo samo prvi niz ekvivalencija, jer je za drugi dokaz dualan. Pošto u S važi $(\star)$, iz teoreme 1.5 sledi da je $\mathcal{J} = \mathcal{D}$, te je prva ekvivalencija opravdana. U drugoj je smer $(\Leftarrow)$ jasan jer je $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$. Ostaje da pokažemo $(\Rightarrow)$. Ako pretpostavimo $a \,\mathcal{J}\, ab$, imamo da postoje $x, y \in S^1$ takvi da je $a = xaby = xxabyby = x^n a(by)^n$, za sve n. Iz $(\star)$ sledi da možemo izabrati m takvo da je $(by)^m \,\mathcal{R} (by)^{m+1}$, te je $a = x^m a(by)^m \,\mathcal{R}\, x^m a(by)^{m+1} = aby$, pa je $a \,\mathcal{R}\, aby$. Imamo $aS^1 = abyS^1 \subseteq abS^1 \subseteq aS^1$, odakle zaključujemo da je $aS^1 = abS^1$, tj. $a \,\mathcal{R}\, ab$. $\square$

Izvedimo još jednu izuzetno bitnu osobinu kompletno 0-prostih polugrupa.

Lema 1.12. *Ako je S kompletno 0-prosta, onda sadrži idempotent koji nije njena nula.*

Dokaz. Neka je $a \in S \setminus \{0\}$. Pošto je u pitanju 0-prosta polugrupa, za nju po definiciji važi $S^2 \neq 0$. Znamo da je S^2 ideal, pa je $S^2 = S$ i odatle $S^3 = S$. Pokazaćemo da je $SaS = S$ (znamo da je u pitanju ideal, pa su mogućnosti samo $\{0\}$ i S). Posmatrajmo skup $I = \{x \in S \mid SxS = 0\}$. Jasno, $0 \in I$, pa važi $I \neq \emptyset$. Pri tome je I ideal, jer za $x \in I$ i $s \in S$ važi $0 = 0xs0 \in SxsS \subseteq SxS = 0$, odakle je $SsxS = 0$, a simetrično se dobija i $SxsS = 0$. Sada zaključujemo da je $I = 0$ ili $I = S$. Ako pretpostavimo da je $I = S$, imamo $S^3 = SIS = \bigcup_{x \in I} SxS = 0$, i dobijamo kontradikciju sa ranije utvrđenim $S^3 = S$. Stoga zaključujemo da je $I = \{0\}$, pa iz definicije I i izbora elementa a sledi $SaS = S$.

Zato postoje elementi $u, v \in S$ takvi da je $uav = a$, pa je $u^n a v^n = a$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Iz toga možemo zaključiti da je $u^n \neq 0$, za sve n. Pošto je S 0-prosta, zadovoljava $(\star)$, pa postoje l i k takvi da je $u^l \,\mathcal{R}\, u^{l+1}$ i $u^k \,\mathcal{L}\, u^{k+1}$ (naravno, iz dokaza prethodne posledice sledi i $u^l \,\mathcal{R}\, u^{l+t}$ i $u^k \,\mathcal{L}\, u^{k+t}$ za sve t). Ako je $s = \max\{l, k\}$, imamo $u^s \,\mathcal{L}\, u^{2s}$ i $u^s \,\mathcal{R}\, u^{2s}$, pa je $u^s \,\mathcal{H}\, u^{2s}$, odakle prema posledici 1.3 dobijamo da je H_{u^s} podgrupa S, pa postoji idempotent $e \,\mathcal{H}\, u^s$. Zbog $u^s \neq 0$ i $H_0 = \{0\}$ imamo $e \neq 0$. $\square$

U nastavku ćemo konstruisati specijalan tip polugrupa koje će se pokazati odgovarajućim za opisivanje kompletno 0-prostih polugrupa, ali pre toga nam je potrebna još jedna definicija.

Definicija 1.8. Matricu nad polugrupom sa nulom nazivamo *pravilna* ako i samo ako svaka vrsta i svaka kolona imaju bar jednu nenula vrednost.

Definicija 1.9. Neka je G grupa, I i Λ neprazni skupovi, a P pravilna matrica dimenzije $\Lambda \times I$ nad $G \cup \{0\}$. Tada $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ označava skup $(I \times G \times \Lambda) \cup \{0\}$ zajedno sa binarnom operacijom datom sa

$$0n = n0 = 0, \text{ za sve } n \in \mathcal{M}^0;$$

$$(i, a, \lambda)(k, b, \mu) = \begin{cases} 0, & p_{\lambda k} = 0; \\ (i, a p_{\lambda k} b, \mu), & p_{\lambda k} \neq 0. \end{cases}$$

Tada $\mathcal{M}^0$ nazivamo *Risova matrična polugrupa nad* G.

Lema 1.13. *Za* $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *važi:*

(1) $\mathcal{M}^0$ *je polugrupa sa nulom;*
(2) (i, a, λ) *je idempotent ako i samo ako je* $p_{\lambda i} \neq 0$ *i* $a = p_{\lambda i}^{-1}$*;*
(3) $\mathcal{M}^0$ *je regularna;*
(4) $(i, a, \lambda)\, \mathcal{R}(j, b, \mu) \Leftrightarrow i = j$*;*
(5) $(i, a, \lambda)\, \mathcal{L}(j, b, \mu) \Leftrightarrow \lambda = \mu$*;*
(6) $(i, a, \lambda)\, \mathcal{H}(j, b, \mu) \Leftrightarrow i = j \wedge \lambda = \mu$*; za* $p_{\lambda i} \neq 0$ *je* $\mathcal{H}$*-klasa* $H_{i\lambda} = \{(i, a, \lambda) : a \in G\}$ *grupa sa jediničnim elementom* $(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda)$*, a inverzni za* (i, a, λ) *je* $(i, p_{\lambda i}^{-1} a^{-1} p_{\lambda i}^{-1}, \lambda)$*;*
(7) za $p_{\lambda i} \neq 0$ *i* $p_{\mu j} \neq 0$ *je* $H_{i\lambda} \cong H_{j\mu}$*;*
(8) $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ *i njihove klase su* $\{0\}$ *i* $\mathcal{M}^0 \setminus \{0\}$*;*
(9) $\mathcal{M}^0$ *je kompletno* 0*-prosta.*

Dokaz. (1) Prema definiciji $\mathcal{M}^0$ imamo nulu, zatvorenost za operaciju je posledica zatvorenosti polugrupe $G \cup \{0\}$, a asocijativnost se lako proverava.

(2) $(i, a, \lambda) = (i, a, \lambda)(i, a, \lambda) = (i, a p_{\lambda i} a, \lambda) \Leftrightarrow p_{\lambda i} \neq 0 \wedge p_{\lambda i} = a^{-1}$.

(3) $0 = 000$ je regularan. Neka je $(i, a, \mu) \in \mathcal{M}^0 \setminus \{0\}$. Tada, pošto je P pravilna matrica, postoji $j \in I$ takvo da je $p_{\lambda j} \neq 0$ i $\mu \in \Lambda$ tako da je $p_{\mu i} \neq 0$, pa je $(i, a, \lambda)(j, p_{\lambda j}^{-1} a^{-1} p_{\mu i}^{-1}, \mu)(i, a, \lambda) = (i, a, \lambda)$.

(4) Jasno, $\{0\}$ je zasebna $\mathcal{R}$-klasa. Ako imamo $(i, a, \lambda)\, \mathcal{R}(j, b, \mu)$, tada postoji $(k, c, \nu) \in \mathcal{M}^0$ (zbog regularnosti ne moramo da priključujemo 1) takav da je $(i, a, \lambda) = (j, b, \mu)(k, c, \nu) = (j, b p_{\mu k} c, \nu)$, pa je $i = j$. Obratno, neka je $i = j$. Izaberimo proizvoljno $p_{\mu k} \neq 0$. Tada je $(i, a, \lambda) = (j, b, \mu)(k, p_{\mu k}^{-1} b^{-1} a, \lambda)$, te je $(i, a, \lambda)\, \mathcal{R}(j, b, \mu)$.

(5) Dokazuje se dualno prethodnom.

(6) Posledica (4), (5), (2) i teoreme 1.2. Provera za inverzni elemenat se lako izvodi.

(7) Izomorfizam je $(i, a, \lambda) \mapsto (j, a p_{\lambda i} p_{\mu j}^{-1}, \mu)$. Ovde ćemo preskočiti dokaz, jer je se svodi na tehničku proveru.

(8) I ovde je jasno da je $\{0\}$ i $\mathcal{D}$-klasa i $\mathcal{J}$-klasa. Za proizvoljne elemente $(i, a, \lambda), (j, b, \mu) \in \mathcal{M}^0$ imamo $(i, a, \mu)\, \mathcal{R}(i, a, \lambda)\, \mathcal{L}(j, b, \mu)$, pa je $(i, a, \mu)\, \mathcal{D}(j, b, \mu)$. Zbog $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ je i $(i, a, \mu)\, \mathcal{D}(j, b, \mu)$.

(9) U prethodnoj stavci smo već dokazali da su $\mathcal{J}$-klase $\{0\}$ i $\mathcal{M}^0 \setminus \{0\}$. Izaberimo $p_{\lambda i} \neq 0$. tada je $(i, 1, \lambda)^2 \neq 0$ i time $(\mathcal{M}^0)^2 \neq \{0\}$, pa je $\mathcal{M}^0$ prema lemi 1.3 0-prosta, a pošto je konačna, onda je i kompletno 0-prosta.

□

Nakon što smo izložili brojne dobre osobine Risovih matričnih polugrupa, red je došao da pokažemo njihovu vezu sa kompletno 0-prostim polugrupama.

Teorema 1.6 (**Teorema Ris-Šuškjevič**[3]). *Neka je S polugrupa sa nulom. Tada je S kompletno 0-prosta ako i samo ako je izomorfna nekoj Risovoj matričnoj polugrupi nad grupom.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je polugrupa S izomorfna polugrupi $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$. Pošto je, prema stavci (9) prethodne leme, $\mathcal{M}^0$ kompletno 0-prosta, to važi i za polugrupu S.

($\Rightarrow$) Neka je S kompletno 0-prosta. Tada ona zadovoljava uslove M_L i M_R, a time i uslov ($\star$), pa prema teoremi 1.5 u njoj važi $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. Iz uslova da je 0-prosta dobijamo da su njene $\mathcal{J}$-klase $\{0\}$ i $S \setminus \{0\}$, pa zaključujemo da su to i $\mathcal{D}$-klase. Posmatrajmo klasu $D = S \setminus \{0\}$. Prema lemi 1.12, S sadrži nenula idempotent e, pa je $e \in D$.

Neka su $\mathcal{L}$-klase u D indeksirane sa $\{L_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, a $\mathcal{R}$-klase sa $\{R_i : i \in I\}$ (zaključujemo da su na taj način označene sve nenula $\mathcal{L}$ i $\mathcal{R}$-klase u S). Obeležimo $\mathcal{H}$-klasu $R_i \cap L_\lambda$ sa $H_{i\lambda}$. Pošto imamo da $e \in D$, prema teoremi 1.2 zaključujemo da D sadrži podgrupu H_e. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $H_e = H_{11}$ (naravno, uz pretpostavku da $1 \in \Lambda$ i $1 \in I$). Označimo grupu H_{11} sa G.

Za svako $\lambda \in \Lambda$ fiksirajmo proizvoljno $q_\lambda \in H_{1\lambda}$, pri čemu ćemo uzeti $q_1 = e$. Isto tako, za $i \in I$ odaberimo $r_i \in H_{i1}$, uz $r_i = e$. Pošto važi $eq_\lambda = q_\lambda$ (sledi iz leme 1.4 i $e \,\mathcal{R}\, q_\lambda$), prema Grinovoj lemi imamo da je $\rho_{q_\lambda} : H_e \to H_{1\lambda}$ bijekcija. Pored toga, iz $r_i e = r_i$ (što sledi iz iste leme zbog $e \,\mathcal{L}\, r_i$) sledi

$$r_i(eq_\lambda) = r_i q_\lambda. \tag{1.4}$$

Primetimo da iz $e \,\mathcal{L}\, r_i$ imamo i $eq_\lambda \,\mathcal{L}\, r_i q_\lambda$, te je $r_i q_\lambda \in L_\lambda$, a iz $e \,\mathcal{R}\, q_\lambda$ sledi $r_i e \,\mathcal{R}\, r_i q_\lambda$, tj. $r_i q_\lambda \in R_i$. Zato je $r_i q_\lambda \in L_\lambda \cap R_i = H_{i\lambda}$. Prema dualu Grinove leme iz (1.4) dobijamo da je $\lambda_{r_i} : H_{1\lambda} \to H_{i\lambda}$ bijekcija. Zaključujemo da je za svaki par $i \in I$ i $\lambda \in \Lambda$ kompozicija $\rho_{q_\lambda} \lambda_{r_i} : H_{11} \to H_{i\lambda}$ bijekcija. Odatle zbog definicije preslikavanja ρ_{q_λ} i λ_{r_i} dobijamo da se svaki element $H_{i\lambda}$ može na jedinstven način predstaviti kao proizvod $r_i a q_\lambda$, gde je $a \in H_{11} = G$, te je preslikavanje

$$\theta : (I \times G \times \Lambda) \cup \{0\} \to S$$

definisano sa $(0)\theta = 0$, $(i, a, \lambda)\theta = r_i a q_\lambda$ bijekcija.

Neka je $p_{\lambda i} = q_\lambda r_i$. Za $p_{\lambda i} \neq 0$ imamo $q_\lambda r_i \,\mathcal{D}\, q_\lambda$, a prema lemi 1.11 sledi da je $q_\lambda r_i \,\mathcal{R}\, q_\lambda$, pa pošto znamo da je $q_\lambda \,\mathcal{R}\, e$, sledi $q_\lambda r_i \,\mathcal{R}\, e$. Simetrično se dobija i $q_\lambda r_i \,\mathcal{L}\, r_i \,\mathcal{L}\, e$. Sada možemo zaključiti da za $q_\lambda r_i$ važi tačno jedna od dve mogućnosti: ili je $q_\lambda r_i = 0$, ili $q_\lambda r_i \in R_e \cap L_e = G$. Zato je matrica $P = (p_{\lambda i}) = (q_\lambda r_i)$ dimenzije $\Lambda \times I$ sa vrednostima iz $G \cup \{0\}$.

Dokazaćemo da je u pitanju i pravilna matrica. Za proizvoljno $i \in I$ smo izabrali $r_i \in G$, pa kao i u dokazu leme 1.12 imamo da važi $S r_i S = S$. Zato za neke $u, v \in S$ važi $u r_i v = e$. Stoga je $u \neq 0$ i odatle $u = r_m b q_l$, za neke $m \in I$, $l \in \Lambda$ i $b \in G$, te imamo $r_m b q_l r_i v = e \neq 0$ i zato mora biti

[3]Suschkewitsch, A.

$p_{li} = q_l r_i \neq 0$. Na analogan način za svaku kolonu $\lambda \in \Lambda$ možemo pronaći $p_{\lambda s} \neq 0$.

Sada smo dokazali sve osobine iz definicije i zaključujemo da je $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Risova matrična polugrupa nad grupom G. Pokažimo još da je funkcija θ homomorfizam. Jasno, za $x \in \mathcal{M}^0$ važi $(0x)\theta = 0 = 0 \cdot (x)\theta = (0)\theta(x)\theta$, i na isti način $(x0)\theta = (x)\theta(0)\theta$. Za (i, a, λ) i (k, b, μ) iz $\mathcal{M}^0$ će biti

$$\begin{aligned}((i,a,\lambda)(k,b,\mu))\theta &= \begin{cases} (0)\theta, & p_{\lambda k} = 0; \\ (i, a p_{\lambda k} b, \mu)\theta, & p_{\lambda k} \neq 0. \end{cases} = \begin{cases} 0, & p_{\lambda k} = 0; \\ r_i a p_{\lambda k} b q_\mu, & p_{\lambda k} \neq 0. \end{cases} \\ &= r_i a p_{\lambda k} b q_\mu = r_i a q_\lambda r_k b q_\mu \\ &= (i, a, \lambda)\theta(k, b, \mu)\theta,\end{aligned}$$

čime smo pokazali homomorfnost. Pošto je bijektivnost ranije utvrđena, dobijamo da je $S \cong \mathcal{M}^0$. □

Sumirajmo ciljeve ove glave: bilo je bitno objasniti glavne faktore polugrupe, jer ćemo preko njih ispitivati rangove i idempotentne rangove polugrupe. U slučaju konačnih polugrupa ti glavni faktori su ili nula-polugrupe ili kompletno 0-proste. Da bismo lakše radili sa ovim drugim tipom, izložili smo Risovu teoremu, koja nam daje mogućnost da ih posmatramo kao Risove matrične polugrupe, mnogo ugodnije za rad. U narednoj glavi ćemo se baviti računanjem rangova ovih specijalnih tipova polugrupa.

Glava 2

Rang Risovih matričnih polugrupa

Kao što smo i najavili, u ovoj glavi ćemo izračunavati rangove Risovih matričnih polugrupa. Radi prikazivanja opštijeg rezultata (koji će nam poslužiti u nastavku rada) iz [17], radićemo sa uopštenim Risovim matričnim polugrupama, gde strukturna matrica nije obavezno pravilna. No, to proširivanje klase polugrupa koju posmatramo će zahtevati i njihovo dodatno ispitivanje. U tu svrhu uvodimo Graham-Houghton grafove, koji će nam pomoći da izvedemo teoremu o Grejemovoj normalnoj formi opšte RMP (Risove matrične polugrupe), preko koje ćemo da je razložimo na komponente – regularne RMP. Nakon toga će uslediti prikaz radova [30] i [18] koji izračunavaju rangove povezanih, odnosno nepovezanih regularih RMP (spomenute karakterizacije su objašnjene u tekstu). Glavu završavamo rezultatom iz [17] i njegovom neposrednom posledicom, koji nam daju formule za izračunavanje ranga opšte Risove matrične polugrupe i njenu pojednostavljenu verziju za idempotentno generisane.

Prilikom navođenja izvora, često postoji potreba da se citiraju dve stavke: originalan rad i rad u kome je naveden dokaz koji smo koristili. Zato veliki broj tvrđenja ima dve reference: sa 'o' je označen izvor u kome se rezultat prvi put pojavljuje, a sa 'i' korišćen izvor. Uz to, u ovoj glavi postoje i dva dokaza koja nisu preuzeta iz literature, te su oni označeni sa [$*$].

Počnimo sa definicijom pojmova ranga i idempotentnog ranga, najvažnijih svojstava polugrupa, kada je u pitanju ovaj rad.

Definicija 2.1. *Rang* polugrupe S je minimalna kardinalnost generišućeg skupa, tj.

$$\mathrm{rank}(S) = \min\{|A| \ : \ A \subseteq S \wedge \langle A \rangle = S\}.$$

Svaki skup generatora polugrupe S kardinalnosti $\mathrm{rank}(S)$ ćemo nazivati *baza.* Prirodno, za *idempotentni rang* kao generatore posmatramo idempotente, pa u slučaju $\{A \ : \ A \subseteq E(S) \wedge \langle A \rangle = S\} \neq \emptyset$ definišemo

$$\mathrm{idrank}(S) = \min\{|A| \ : \ A \subseteq E(S) \wedge \langle A \rangle = S\}.$$

Objasnimo vezu između ranga polugrupe i rangova njenih glavnih faktora: neka je S proizvoljna konačna polugrupa, a $J_1, J_2, \ldots J_m$ njene maksimalne $\mathcal{J}$-klase (u odnosu na ranije spomenut poredak (1.1)). Ako $A \subseteq S$ generiše S, onda se za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$ skup J_i može generisati pomoću $A \cap J_i$. Obrazložimo to: prirodno, J_i ne može biti generisan elementima iz $\bigcup\{J_j : J_j < J_i\}$, jer smo na kraju poglavlja 1.6 utvrdili da proizvodi iz nižih klasa mogu samo da ostanu u njima ili da padaju u još niže. Pored toga, pošto je J_i maksimalna klasa, znamo da je $J = J_i \cup \bigcup\{J_j : J_j < J_i\}$ jedini glavni ideal koji je sadrži, te njeni elementi ne mogu biti generisani elementima iz $S \setminus J$, jer su oni članovi drugih maksimalnih glavnih ideala, pa ne mogu da generišu ništa van tih ideala. Time smo dokazali našu tvrdnju, odakle sledi da je $A \cap J_i$ generišući skup za glavni faktor J_i^*. To povlači da je

$$\mathrm{rank}(S) \geq \sum_{n=1}^{m} \mathrm{rank}(J_i^*). \tag{2.1}$$

Naravno, u opštem slučaju ovde neće važiti jednakost, ali u mnogim primerima hoće. Pored toga, i u slučajevima u kojima ne važi nam je bitno da odredimo rangove glavnih faktora maksimalnih ideala, jer zbog prethodne diskusije svaka baza S mora sadržati minimalan generatorni skup za svaku njenu maksimalnu $\mathcal{J}$-klasu. Ako je J_i^* nula-polugrupa, onda je $\mathrm{rank}(J_i^*) = |J_i|$. Ako to nije slučaj, znamo da je kompletno 0-prosta, pa je zbog Risove teoreme izomorfna nekoj Risovoj matričnoj polugrupi $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$.

2.1 Graham-Houghton grafovi

Uvedimo sada Graham-Houghton grafove (u nastavku ćemo ih nazivati GH-grafovi), prvi tip grafova koji ćemo koristiti za ispitivanje kompletno 0-prostih polugrupa. Njih prvi put definiše Grejem[1] 1968. u radu [14], da bi 1977. Houghton u [21] njegovim rezultatima dao topološku interpretaciju.

Ovde podrazumevamo osnovno poznavanje teorije grafova. Kao referencu dajemo [28], iako će svaka ozbiljnija monografska ili udžbenička forma o osnovama teorije grafova sadržati materijal za potrebno predznanje. Na ovom mestu ćemo navesti samo neke stavke, radi preciziranja notacije i terminologije. *Digraf* $\Gamma = (U, E, \iota, \tau, ^{-1})$ sadrži skup *čvorova* U, skup *grana* E i funkcije $\iota : E \to U$, $\tau : E \to U$ i $^{-1} : E \to E$ koje redom određuju *početni*, *krajnji* čvor grane i njenu *inverznu granu*. Naravno, za sliku *involucije* e^{-1} mora da važi $(e)\iota = (e^{-1})\tau$ i $(e)\tau = (e^{-1})\iota$. Ako želimo da radimo sa (neusmerenim) grafovima, definicija se svodi samo na uređeni par (U, E).

[1]Ronald L. Graham (rođen 1935.)

Neprazan *put* p je niz grana $e_1e_2\dots e_n$ takvih da je $(e_i)\tau = (e_{i+1})\iota$ za $1 \le i < n$. Funkcije ι, τ i ${}^{-1}$ proširujemo na prirodan način na puteve:

$$(p)\iota = (e_1)\iota, \quad (p)\tau = (e_n)\tau \quad \text{i} \quad p^{-1} = e_n^{-1}\dots e_2^{-1}\, e_1^{-1}. \tag{2.2}$$

Postoji i prazan put 1_v u svakom čvoru v. Ako su p i q putevi i važi $(p)\tau = (q)\iota$, možemo da definišemo njihov *proizvod* pq nadovezivanjem. Neusmeren graf je *povezan* ako se između svaka dva čvora može pronaći put (dok je za digraf uslov da se iz svakog čvora može naći put u bilo koji drugi čvor). Ako graf nije povezan, onda se particije definisane relacijom povezanosti nazivaju *komponente povezanosti* i predstavljaju maksimalne povezane podgrafove. *Orijentacija* grafa Γ se daje fiksiranjem jedinstvenog predstavnika svakog para $\{e, e^{-1}\}$, za kojeg kažemo da ima *pozitivnu* orijentaciju.

Definicija 2.2. Neka je Γ graf, a G grupa. *G-označavanje* grafa Γ je preslikavanje $V : E \to G$ takvo da je $(e^{-1})V = ((e)V)^{-1}$. Uređen par (Γ, V) nazivamo *G-označen* graf.

Naravno, takvih G-označavanja može biti više. Izabrano G-označavanje se može proširiti i na puteve, na prirodan način:

$$(e_1\dots e_n)V = (e_1)V\dots(e_n)V.$$

Primetimo da nam (2.2) obezbeđuje osobinu $(p^{-1})V = ((p)V)^{-1}$.

Sada ćemo za opštu kompletnu 0-prostu polugrupu S definisati specijalne označene grafove. Napomenimo da se detalji teorije koja leži u pozadini rezultata koji slede mogu pronaći u [29]. Mi ćemo izložiti samo onoliko koliko je potrebno za razumevanje pojmova i dokazivanje tvrđenja.

Definicija 2.3. Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ Risova matrična polugrupa nad grupom G sa pridruženom matricom $P = (p_{\lambda i})$. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $I \cap \Lambda = \emptyset$. *GH-graf polugrupe S* (koji se naziva i *graf incidencije za S*) se označava sa $\Gamma(S)$ i definiše na sledeći način: skup čvorova je $U = I \cup \Lambda$, skup grana je $E = \{(i, \lambda), (\lambda, i) \ : \ i \in I \ \wedge \ \lambda \in \Lambda \ \wedge \ p_{\lambda i} \neq 0\}$, dok su funkcije ι, τ i involucija definisane sa

$$(x, y)\iota = x, \quad (x, y)\tau = y \quad i \quad (x, y)^{-1} = (y, x).$$

Matrica P definiše strukturu G-označenog grafa (Γ, V_P) sa

$$((i, \lambda))V_P = p_{\lambda i}^{-1} \quad \text{i} \quad ((\lambda, i))V_P = p_{\lambda i}.$$

$\Gamma(S)$ orijentišemo uzimajući grane iz $\Lambda \times I$ za pozitivno orijentisane.

U nastavku ćemo oznaku $\Gamma(S)$ koristiti za neoznačen GH-graf polugrupe S, dok će označeni nositi oznaku $(\Gamma(S), V_P)$. Proučimo osobine $\Gamma(S)$. Prvo, primetimo da je postojanje grane između i i λ ekvivalentno postojanju nenula idempotenta $p_{\lambda i}^{-1}$, a time i grupne $\mathcal{H}$-klase $R_i \cap L_\lambda$, te su klase Grinovih relacija jedini faktori koji određuju graf. Pored toga, pretpostavka da je RMP S pravilna (drugim rečima, da je matrica P pravilna) je očigledno ekvivalentna pretpostavci da $\Gamma(S)$ nema izolovanih čvorova. Na kraju, primetimo da je $\Gamma(S)$ uvek bipartitan graf i da postoji bijekcija između nenula idempotenata polugrupe S i grana grafa: $(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda) \mapsto (i, \lambda)$.

Obeležimo sa $\mathcal{P}_{i,\lambda}$ skup svih puteva u $(\Gamma(S), V_P)$ sa početkom u i i krajem u λ, a sa $V_{i\lambda}$ skup svih njihovih V_P vrednosti. Sledeća teorema opravdava uvođenje ovih specijalnih grafova i daje nam prvi uvid u to kako ćemo preko njih proučavati generisanost.

Teorema 2.1 (o & i: [25])**.** *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ Risova matrična polugrupa. Tada važi*

$$F(S) = \langle E(S) \rangle = \{(i, (\pi)V_P, \lambda) \ : \ i \text{ i } \lambda \text{ pripadaju istoj komponenti povezanosti grafa } \Gamma(S) \text{ i važi } \pi \in \mathcal{P}_{i,\lambda}\} \cup \{0\}.$$

Dokaz. Neka $(i, a, \lambda) \in F(S) \setminus \{0\}$. To znači da je generisan idempotentima polugrupe S, pa postoje $i_2, \dots, i_n$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ takvi da je

$$(i, a, \lambda) = (i, p_{\lambda_1 i}^{-1}, \lambda_1)(i_2, p_{\lambda_2 i_2}^{-1}, \lambda_2) \cdots (i_n, p_{\lambda i_n}^{-1}, \lambda) \neq 0.$$

Odatle zaključujemo da su u grafu $\Gamma(S)$ parovi $i, \lambda_1;\ i_2, \lambda_2;\ \dots;\ i_n, \lambda$ u istoj komponenti povezanosti, a pošto je proizvod svaka dva susedna idempotenta iz niza različit od nule (inače bi i ceo proizvod bio 0), sledi da su i parovi $i_2, \lambda_1;\ i_3, \lambda_2;\ \dots;\ i_n, \lambda_{n-1}$ u istoj komponenti. Zato su i čvorovi i i λ u istoj komponenti, pa je $i, \lambda_1, i_2, \lambda_2, \dots, i_n, \lambda$ put od i do λ (ovde put možemo zapisati kao niz čvorova, jer između dva čvora može biti najviše jedna grana). Imamo i da je $a = p_{\lambda_1 i}^{-1} p_{\lambda_1 i_2} p_{\lambda_2 i_2}^{-1} p_{\lambda_2 i_3} \cdots p_{\lambda_{n-1} i_n} p_{\lambda i_n}^{-1}$, što je prema definiciji funkcije V_P jednako sa $(i, \lambda_1, i_2, \lambda_2, \dots, i_n, \lambda)V_P$.

Pošto po definiciji važi $0 \in F(S)$, za obratno razmatranje posmatramo samo nenula elemente. Neka je (i, a, λ) trojka za koju važi: i i λ pripadaju istoj komponenti povezanosti $\Gamma(S)$ i a je V_P-slika nekog puta između i i λ. Neka je taj put $i, \lambda_1, i_2, \lambda_2, \dots, i_n, \lambda$. Tada je, opet prema definiciji funkcije V_P,

$$a = p_{\lambda_1 i}^{-1} p_{\lambda_1 i_2} p_{\lambda_2 i_2}^{-1} p_{\lambda_2 i_3} \cdots p_{\lambda_{n-1} i_n} p_{\lambda i_n}^{-1},$$

pa važi

$$(i, a, \lambda) = (i, p_{\lambda_1 i}^{-1}, \lambda_1)(i_2, p_{\lambda_2 i_2}^{-1}, \lambda_2) \cdots (i_n, p_{\lambda i_n}^{-1}, \lambda),$$

odakle dobijamo da $(i, a, \lambda) \in \langle E(S) \rangle$. □

2.2 Izomorfnost Risovih matričnih polugrupa

U poglavlju 1.7 smo uveli Risove matrične polugrupe da bismo pojednostavili rad sa kompletno 0-prostim polugrupama, ali za fiksiranu S nismo proučili odlike i odnose članova klase Risovih matričnih polugrupa njoj izomorfnih. Sada ćemo to uraditi, da bismo kasnije mogli da izaberemo predstavnika sa odgovarajućim osobinama, koji će nam omogućiti efikasnu primenu prethodne teoreme. Ovde ponovo napominjemo da radimo sa opštim Risovim matričnim polugrupama, tj. ne obavezno pravilnim.

Teorema 2.2 (i: [26])**.** *Dve Risove matrične polugrupe* $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ *i* $T = \mathcal{M}^0(K, J, M, Q)$ *su izomorfne ako i samo ako postoje: izomorfizam* $\phi : G \to H$*, bijekcije* $\psi : I \to J$ *i* $\chi : \Lambda \to M$ *i elementi* u_i $(i \in I)$ *i* v_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *takvi da je*

$$(p_{\lambda i})\phi = v_\lambda \cdot q_{(\lambda)\chi(i)\psi} \cdot u_i, \tag{2.3}$$

za sve $i \in I$ *i* $\lambda \in \Lambda$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ukoliko imamo funkcije ϕ, ψ, χ i skupove $\{u_i : i \in I\}$ i $\{v_m : m \in M\}$ koji zadovoljavaju sve date uslove, jednostavno se proverava da je preslikavanje $\theta : S \to T$,

$$(i, a, \lambda)\theta = ((i)\psi, u_i \cdot (a)\phi \cdot v_\lambda, (\lambda)\chi)$$

izomorfizam.

($\Rightarrow$) Obratno, ukoliko postoji izomorfizam $\theta : S \to T$, tada on očuvava osobine strukture, te nenula elemente slika u nenula elemente, a i nenula $\mathcal{R}$-klase polugrupe S preslikava u nenula $\mathcal{R}$-klase polugrupe T (dualno važi i za nenula $\mathcal{L}$ klase). Samim tim, prva komponenta funkcije θ predstavlja preslikavanje $\psi : I \to J$, koje je bijekcija (sirjektivnost je jasna, jer je θ izomorfizam, a i injektivnost sledi iz iste informacije, imajući u vidu da ona implicira da je kardinalnost $\mathcal{R}$-klasa u S i T jednaka), i važi $(i, a, \lambda) \in R_{(i)\psi}$. Na isti način dobijamo da je treća komponenta θ bijekcija $\chi : \Lambda \to M$ i da je $(i, a, \lambda) \in L_{(\lambda)\chi}$. Iz ta dva zaključka sledi da θ slika nenula $\mathcal{H}$-klase u nenula $\mathcal{H}$-klase, te je $p_{\lambda i} \neq 0$ ako i samo ako je $q_{(\lambda)\chi(i)\psi} \neq 0$.

Izaberimo nenula $\mathcal{H}$-klasu polugrupe S, i označimo je sa H_{11} (bez umanjenja opštosti pretpostavljamo da $1 \in I \cap \Lambda$). Njena slika je grupa $H_{(1)\chi(1)\psi}$ u T, pa je tada $\theta\restriction_{H_{11}} : H_{11} \to H_{(1)\chi(1)\psi}$ izomorfizam. Definišimo funkcije $\alpha : G \to H_{11}$ i $\beta : K \to H_{(1)\chi(1)\psi}$, sa $(x)\alpha = (1, p_{11}^{-1}x, 1)$ i $(y)\beta = ((1)\psi, q_{(1)\chi(1)\psi}^{-1}y, (1)\chi)$. Jednostavno se dokazuje da su to izomorfizmi. Neka je sada

$$\phi = \alpha\theta\restriction_{H_{11}}\beta^{-1} : H \to K.$$

Jasno, u pitanju je izomorfizam, jer je dobijen kao proizvod izomorfizama.

Pored toga, za svako $x \in G$ važi

$$(1, p_{11}^{-1}x, 1)\theta = (x)\alpha\theta\restriction_{H_{11}} = (x)\phi\beta = ((1)\psi, q_{(1)\psi(1)\chi}^{-1} \cdot (x)\phi, (1)\chi). \tag{2.4}$$

Naravno, cilj nam je da pronađemo elemente u_i i v_λ iz (2.3). Primetimo da za svako $(i, a, \lambda) \in S$ važi

$$\begin{aligned} (i, a, \lambda) &= (i, e, 1)(1, p_{11}^{-1}a, 1)(1, p_{11}^{-1}, \lambda) \\ ((i, a, \lambda))\theta &= ((i, e, 1)(1, p_{11}^{-1}a, 1)(1, p_{11}^{-1}, \lambda))\theta \\ &= ((i, e, 1))\theta((1, p_{11}^{-1}a, 1))\theta((1, p_{11}^{-1}, \lambda))\theta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Zato definišemo elemente $u_i, v_\lambda \in K$ na sledeći način:

$$(i, e, 1)\theta = ((i)\psi, u_i, (1)\chi), \quad (1, p_{11}^{-1}, \lambda)\theta = ((1)\psi, q_{(1)\chi(1)\psi}^{-1} v_\lambda, (\lambda)\chi),$$

te iz (2.5), uz korišćenje (2.4), dobijamo oblik za $((i, a, \lambda))\theta$:

$$\begin{aligned} &((i)\psi, u_i, (1)\chi)\ ((1)\psi, q_{(1)\chi(1)\psi}^{-1}(a)\phi, (1)\chi)\ ((1)\psi, q_{(1)\chi(1)\psi}^{-1} v_\lambda, (\lambda)\chi) \\ &= ((i)\psi, u_i \cdot (a)\phi \cdot v_\lambda, (\lambda)\chi). \end{aligned}$$

Najzad, imamo sve elemente da bismo pokazali (2.3): za $p_{\lambda i} \neq 0$ je

$$\begin{aligned} ((i)\psi,\ u_i \cdot (p_{\lambda i})\phi \cdot v_\lambda,\ (\lambda)\chi) &= (i, p_{\lambda i}, \lambda)\theta \\ &= ((i, 1, \lambda)(i, 1, \lambda))\theta \\ &= ((i, 1, \lambda))\theta((i, 1, \lambda))\theta \\ &= ((i)\psi, u_i(1)\phi v_\lambda, (\lambda)\chi)((i)\psi, u_i(1)\phi v_\lambda, (\lambda)\chi) \\ &= ((i)\psi, u_i v_\lambda q_{(\lambda)\chi(i)\psi} u_i v_\lambda, (\lambda)\chi), \end{aligned}$$

odakle zbog kancelativnosti grupe dobijamo $(p_{\lambda i})\phi = v_\lambda q_{(\lambda)\chi(i)\psi} u_i$. Još ranije smo zaključili da je $p_{\lambda i} = 0$ akko je $q_{(\lambda)\chi(i)\psi} = 0$, zbog čega (2.3) važi i za taj slučaj, čime je dokaz završen. $\square$

U nastavku će nam biti potrebna posledica ove teoreme koja razjašnjava kakvog oblika mogu biti strukturne matrice, ako su svi ostali elementi isti.

Posledica 2.1 (i: [26]). *Neka su date dve Risove matrične polugrupe* $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ *i* $T = \mathcal{M}^0(G, I, \Lambda, Q)$*. Ako postoje dijagonalne matrice* $V = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$ *i* $U = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_m)$ *dimenzija* $\Lambda \times \Lambda$ *i* $I \times I$*, redom, takve da je* $P = VQU$*, tada je preslikavanje* $(i, a, \lambda) \mapsto (i, u_i a v_\lambda, \lambda)$ *izomorfizam tih Risovih matričnih polugrupa.*

Napomena 2. Radi definisanosti množenja ovih matrica uzimamo da za svaki elemenat g grupe $(G, \cdot)$ u skupu $G \cup \{0\}$ važi $g + 0 = 0 + g = g$.

2.3 Grejemova normalna forma

Naredna teorema uvodi *normalizaciju* strukturne matrice RMP na specijalan način (tj. nalaženje izomorfne RMP sa novom strukturnom matricom sa specijalnim osobinama), koristeći proizvoljnu pokrivajuću šumu njoj odgovarajućeg GH-grafa.

Teorema 2.3 (o: [14])**.** *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Risova matrična polugrupa i $\Gamma(S)$ njen GH-graf. Za svaku pokrivajuću šumu $\mathcal{F}$ grafa $\Gamma(S)$ moguće je normalizovati S, tj. pronaći $T = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q) \cong \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ tako da je $\Gamma(T) \cong \Gamma(S)$ preko identičkih preslikavanja id_Λ i id_I i $(e)V_Q = 1_G$ za svaku granu $e \in E(\mathcal{F})$.*

Dokaz. [$*$] Neka je $\mathcal{F}$ pokrivajuća šuma grafa $\Gamma(S)$ date polugrupe $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$. Na osnovu posledice 2.1, vidimo da je potrebno pronaći dekompoziciju $P = VQU$, tako da za svako $e = i\lambda \in \mathcal{F}$ važi $q_{\lambda i} = 1_G$. Tada će važiti $T = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q) \cong \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$, gde će odgovarajući izomorfizmi $G \to G$, $I \to I$ i $\Lambda \to \Lambda$ biti identičke funkcije, što će dati da je $\Gamma(T) \cong \Gamma(S)$ baš preko identičkih funkcija id_Λ i id_I. Pored toga će biti ispunjen i uslov $(e)V_Q = 1_G$ za svaku granu $e \in \mathcal{F}$.

Zato se ovaj dokaz svodi na problem: dekomponovati matricu P nad $G \cup \{0\}$ (gde je G grupa) u obliku VQU, tako da su V i U dijagonalne, a $Q = (q_{\lambda i})$ ima 1_G na koordinatama $\{q_{\lambda i} : i\lambda \in E(\mathcal{F})\}$. Pošto je $\mathcal{F}$ pokrivajuća šuma, sadrži svaki čvor, ali ne sadrži konture i u pitanju je bipartitan graf, jer je unija stabala. Radi slikovitosti, nazovimo polja matrice P koja odgovaraju granama $\mathcal{F}$ obojenim. Sva iznesena zapažanja se na matrici P odslikavaju na sledeći način: svaka vrsta λ (kolona i) koja sadrži nenula elemenat ima bar jedno obojeno polje; grane koje odgovaraju visećim čvorovima stabla predstavljaju polja koja su jedina obojena u svojoj vrsti (koloni); odsustvo kontura nam daje da napuštajući jedno obojeno polje u njega više ne možemo da se vratimo linijom iz $\mathcal{F}$.

Pošto nam je bitno samo ono što se dešava u obojenim poljima, analiziraćemo šta za njih sledi iz $P = VQU$, gde je $q_{\lambda i} = 1$ za svaku $e \in \mathcal{F}$. Time za svako stablo $F \in \mathcal{F}$ dobijamo nezavisan sistem (u smislu da jednačine drugih stabala nemaju zajedničkih nepoznatih sa njim, jer su odgovarajući čvorovi grafa nepovezani) oblika

$$\{v_{k_t} u_{j_s} = p_{k_t j_s} \ : \ k_t j_s \in F\}$$

n jednačina sa $n + 1$ nepoznatih (jer prva sadrži dve nepoznate, a svaka nova jednačina ima jednu koja se ponavlja i još jednu novu, ako pratimo strukturu stabla), koji treba da rešimo u grupi G. Pošto u njoj imamo sve potrebne osobine (zatvorenost, asocijativnost, jedinični i postojanje inverza) zaključujemo da možemo ovaj sistem da posmatramo kao neodređen sa jednim stepenom slobode. Znači, biramo proizvoljno iz G vrednost jedne nepoznate, a onda se linijama stabla F lančano dobijaju i sve ostale, s tim da nećemo naići na problem, jer ne postoje konture, pa nećemo imati protivrečnosti. Rešivši sve sisteme, dobićemo sve elemente matrica V i U koji odgovaraju vrstama i kolonama sa bar jednim nenula unosom. Preostale elemente na dijagonalama matrica U i V možemo izabrati proizvoljno iz G, jer neće uticati na rezultujuću matricu. Pošto smo odredili sve elemente matrica P i Q, konačno imamo $Q = V^{-1}PU^{-1}$. □

Iz teorije grafova znamo da svaki graf ima pokrivajuću šumu, pa je ova normalizacija uvek izvodljiva. Nakon što je izvršimo, kažemo da je strukturna matrica Q u *Grejemovoj normalnoj formi.* U tom slučaju možemo dati precizan opis $F(S)$, što ćemo videti u teoremi 2.4. No, pre toga nam je potreban još jedan tip grafa pridružen Risovoj matričnoj polugrupi.

Definicija 2.4. Za polugrupu $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ graf $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ definišemo na sledeći način: skup čvorova je $\mathbb{H}_S = \{(i, \lambda) \in I \times \Lambda : H_{i\lambda}$ je grupa$\}$ (drugim rečima, u $\mathbb{H}_S$ su tačno oni parovi (i, λ) za koje važi $p_{\lambda i} \neq 0$), a čvorovi (i, λ) i (j, μ) su povezani ako i samo ako je $i = j$ ili $\lambda = \mu$.

Primetimo da čvorovi grafa $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ odgovaraju granama grafa $\Gamma(S)$.

Lema 2.1 (o: [30]; i: [15])**.** *Sledeći uslovi su ekvivalentni za kompletno* 0*-prostu polugrupu* S*:*

(i) $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ *je povezan graf;*
(ii) $\Gamma(S)$ *je povezan graf;*

Dokaz. Graf $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ je nepovezan ako i samo ako postoje évorovi (i, λ) i (j, μ) između kojih nema puta. To važi akko ne postoji staza u $\Gamma(S)$ koja sadrži i $p_{i\lambda}$ i $p_{j\mu}$, tj. akko su parovi i, λ i j, μ u različitim komponentama grafa $\Gamma(S)$. □

Nadalje ćemo RMP S nazivati povezanom akko je njen graf $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ povezan.

Teorema 2.4 (o: [14])**.** *Neka je* $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *Risova matrična polugrupa,* $\Gamma(S)$ *njen GH-graf, a* I' *i* Λ' *skupovi njegovih izolovanih čvorova u* I *i* Λ*. Pored toga, neka su skupovi*

$$\{\{I_1, \Lambda_1\}, \{I_2, \Lambda_2\}, \dots, \{I_n, \Lambda_n\}\}$$

klase particije skupa $(I \setminus I') \cup (\Lambda \setminus \Lambda')$ *određene njegovim komponentama povezanosti. Tada postoji nula matrica* C_N *dimenzije* $\Lambda' \times I'$ *i pravilna Risova matrica* $C_R : (\Lambda \setminus \Lambda') \times (I \setminus I') \to G^0$ *tako da je*

1. $S \cong M^0(G; I, \Lambda; C_R \oplus C_N)$*, gde je*

$$C_R \oplus C_N = \begin{pmatrix} C_R & 0 \\ 0 & C_N \end{pmatrix};$$

2. Matrica C_R u blok-dijagonalnoj formi

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_n \end{pmatrix},$$

gde je $C_j : \Lambda_j \times I_j \to G^0$ pravilna strukturna matrica povezane Risove matrične polugrupe nad G^0, za $j = 1, \dots n$;

3.

$$\langle E(S) \rangle = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{M}^0(G_j; I_j, \Lambda_j; C_j), \tag{2.6}$$

gde je G_j podgrupa generisana nenula elementima matrice C_j.

Prirodno, matrice $C_1, C_2, \dots C_n$ odgovaraju komponentama povezanosti grafa $\Gamma(S)$. Pored toga, unija u jednakosti (2.6) podrazumeva da se nule svih polugrupa za $j = 1, \dots n$ smatraju istim elementom, te tako imamo takozvanu 0-direktnu uniju RMP.

Dokaz. [$*$] Na osnovu teoreme 2.3 možemo da pretpostavimo da je strukturna matrica P normalizovana. Neka je $\mathcal{F}$ odgovarajuća pokrivajuća šuma. Nazovimo dozvoljenim transformacijama one promene koje se mogu izvršiti na matrici P, tako da novonastala matrica Q daje Risovu matričnu polugrupu $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$ izomorfnu početnoj. Iz teoreme 2.3 odmah vidimo da odgovarajućim izborom izomorfizama ψ (odnosno χ) možemo da permutujemo kolone (vrste), pri čemu je $u_i = v_\lambda = 1_G$ za sve $i \in I$ i $\lambda \in \Lambda$. Zato su to dozvoljene transformacije. Odatle zaključujemo da sve nula-vrste (one odgovaraju skupu Λ') i nula-kolone (skup I') možemo permutacijama da smestimo kao poslednje vrste i kolone, i onda da se fokusiramo na deo matrice $(\Lambda \setminus \Lambda') \times (I \setminus I')$.

Neka su $T_1, \dots T_n$ sve komponente povezanosti grafa šume $\Gamma(S)$, koje nisu izolovani čvorovi. Kreiraćemo drugu matricu, zamenom vrsta i kolona, pri čemu ćemo, radi raspoznavanja elemenata, zadržavati njihovo obeležavanje $p_{\lambda i}$, a novu matricu (u kojoj položaj konkretnog elementa nije λi) ćemo posmatrati kao $m \times n$ šemu, gde je $m = |\Lambda|$ i $n = |I|$. Posmatrajmo prvo T_1. Primenimo sledeći algoritam (radi lakše čitljivosti, koristićemo programerski pristup promene vrednosti promenljivih):

(i) Pošto nije u pitanju izolovan čvor, sledi da T_1 ima bar jednu granu (λ, i), te je $p_{\lambda i} \neq 0$. Smestimo ga zamenom vrsta i kolona na poziciju $(1, 1)$ i neka je skup $M = \{i, \lambda\}$, a $k = 1$ i $l = 1$. Prelazimo na korak (ii).

(ii) Neka su u J_2 i L_2 svi čvorovi klasa I i Λ, redom, koji su povezani sa nekim čvorom iz S, a nisu u njemu. Ako je $J_2 = \emptyset$ i $L_2 = \emptyset$, prelazimo na korak (iv), inače se izvršava korak (iii).

(iii) Sve kolone sa koordinatom iz J_2 smeštamo u novu matricu kao kolone $(\cdot, k+1), (\cdot, k+2)$ i tako dalje, dok vrste sa koordinatom iz L_2 premeštamo da budu na pozicijama $(l+1, \cdot), (l+2, \cdot)$ itd. Sada je $M := M \cup J_2 \cup L_2$, a $k := k + |J_2|$ i $l := l + |L_2|$. Vraćamo se na korak (ii).

(iv) STOP.

Konačne dimenzije matrice P nam garantuju da će se procedura u jednom trenutku završiti. Nakon toga ćemo imati blok matricu C_1 dimenzije $l \times k$, čiji su indeksi vrsta i kolona u matrici P sledeći: $\Lambda_1 = \Lambda \cap M$ i $I_1 = I \cap M$. Zbog konstrukcije, ona je pravilna, pa je i odgovarajuća RMP kompletno 0-prosta, i kao podmatrica sadrži sve nenula vrednosti kolona i vrsta sa indeksima iz skupa M. Pri tome odgovara komponenti povezanosti T_1, pa je graf incidencije za polugrupu sa strukturnom matricom $C_1 : \Lambda_1 \times I_1 \to G^0$ povezan. Iz prethodne leme imamo da je i graf $\Gamma(\mathbb{H}_{\mathcal{M}^0(G;I_1,\Lambda_1;C_1)})$ povezan. Zaključujemo da smo dobili

$$P \cong \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & C_N \end{pmatrix},$$

pa W možemo da posmatramo za sebe, jer promene njenih vrsta i kolona ne utiču na ostatak matrice. Zato u njoj primenjujemo prethodni algoritam za komponente $T_2, \ldots, T_n$. Sprovodeći analizu kao u slučaju za T_1, zaključujemo da matrica C_R dobijena posle svih tih transformacija ima osobine navedene u drugom delu tvrđenja.

U dokazu trećeg dela ćemo koristiti teoremu 2.1. Ona nam daje da se generisanost idempotentima utvrđuje unutar komponenti povezanosti grafa $\Gamma(S)$, uz pomoć vrednosti označenih puteva između njihovih čvorova u $(\Gamma(S), V_P)$. Pošto je $\mathcal{F}$ pokrivajuća šuma za čiju svaku granu e važi $(e)V_P = 1_G$, za svaka dva čvora i i λ (mogu biti i čvorovi iste vrste) proizvoljne komponente T_j postoji put $\pi_{i\lambda}$ koji ih povezuje, a sve grane su mu unutar $\mathcal{F}$. Odatle zaključujemo da je $(\pi_{i\lambda})V_P = 1$. To će nam pomoći da pokažemo inkluziju $\supseteq$ u jednakosti (2.6). Neka je $p_{\lambda_1 i_1}$ proizvoljan nenula element matrice C_j, a i i λ čvorovi GH-grafa polugrupe $\mathcal{M}^0(G_j; I_j, \Lambda_j; C_j)$. Hoćemo da dokažemo prvo da $(i, p_{\lambda_1 i_1}, \lambda) \in F(S)$. Pošto je $\mathcal{F}$ pokrivajuće stablo, znamo da sadrži puteve $\pi_{i\lambda_1}$, $\pi_{i_1\lambda}$, π_{ii_1} i $\pi_{\lambda_1\lambda}$ (u indeksu su upisani čvorovi koje ti putevi povezuju) i da je $(\pi_{i\lambda_1})V_P = 1$, $(\pi_{i_1\lambda})V_P = 1$, $(\pi_{ii_1})V_P = 1$ i $(\pi_{\lambda_1\lambda})V_P = 1$. Odatle imamo da

$$\begin{aligned}
F(S) \ni & (i, (\pi_{i,\lambda_1}(\lambda_1 \to i_1)\pi_{i_1,\lambda})V_P, \lambda) = (i, (\lambda_1 \to i_1)V_P, \lambda) = (i, p_{\lambda i}, \lambda), \\
F(S) \ni & (i, (\pi_{i,i_1}(i_1 \to \lambda_1)\pi_{\lambda_1,\lambda})V_P, \lambda) = (i, (i_1 \to \lambda_1)V_P, \lambda) = (i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda).
\end{aligned}$$

Na sličan način za proizvoljan element $g = p^{s_1}_{\lambda_1 i_1} p^{s_2}_{\lambda_2 i_2} \cdots p^{s_m}_{\lambda_m i_m} \in G_j$ (gde je $s_t \in \{1, -1\}$ za $t \in \{1, \ldots, m\}$) i $\lambda \in \Lambda_j$, $i \in I_j$ možemo pronaći put π od i do λ, koji povezuje odgovarajuće čvorove, tako da je

$$F(S) \ni (i, (\pi)V_p, \lambda) = (i, g, \lambda).$$

Jedino ostaje pitanje obratne inkluzije. Drugim rečima, treba dokazati da je svaki izraz oblika $(\tau_{i\lambda})V_P$, gde je $\tau_{i\lambda}$ put od $i \in I_j$ do $\lambda \in \Lambda_j$, generisan nenula elementima iz C_j. Ali, to je jasno, jer taj put mora da bude unutar komponente T_j, pa za svaku njegovu granu $\lambda_1 i_1$ važi $(\lambda_1 i_1)V_P = p_{\lambda_1 i_1} \neq 0$, a za grane $i_2\lambda_2$ je $(i_2\lambda_2)V_P = p^{-1}_{\lambda_2 i_2} \neq 0$. Naravno, u dokazu se ne spominje generisanje nule, jer je ona sa obe strane jednakosti (2.6) podrazumevana. □

Najzad, vidimo da je cilj uvođenja GH-grafa i Grejemove normalne forme bio da i uopštene RMP možemo da posmatramo preko njihovih kompletno 0-prostih komponenti. Taj pristup će nam se kasnije isplatiti, jer ćemo dobiti opštu formulu pogodniju za primenu.

2.4 Rang pravilne Risove matrične polugrupe

U ovom poglavlju ćemo posmatrati RMP sa pravilnom strukturnom matricom, koje smo uveli u poglavlju 1.7. Počećemo sa nekoliko jednostavnih zapažanja iz [18], koja će nam kasnije biti od velike koristi.

Lema 2.2. *Za kompletnu 0-prostu polugrupu $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ važi*

$$\mathrm{rank}(S) \geq \max\{|I|, |\Lambda|\}.$$

Ovo je lako uočiti imajući u vidu da ukoliko neka klasa iz $I \cup \Lambda$ nema predstavnika u skupu generatora, onda ne može da ima ni u generisanom skupu, zbog načina množenja unutar RMP.

Za najjednostavniji oblik ovakvih polugrupa važi čak i jednakost.

Lema 2.3. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(\{1\}; I, \Lambda, P)$ (u pitanju je 0-traka sa pravilnom matricom). Tada je* $\mathrm{rank}(S) = \max\{|I|, |\Lambda|\}$.

Napomena 3. 0-traka se razlikuje od pravougaone trake utoliko što joj nisu nužno svi elementi idempotenti. Na primer, 0-traka $S = \mathcal{M}^0(\{1\}; I, \Lambda, 0))$, gde je $|\Lambda| = |I| = 1$, je u stvari nula-polugrupa sa jedinstvenim nenula elementom, a on nije idempotentan jer je $P = (0) = 0$.

Sledeći rezultat je direktna posledica Grinove leme, tačnije izomorfnosti svih $\mathcal{H}$-klasa u kompletno 0-prostoj polugrupi i svojstava Risovih matričnih polugrupa.

Lema 2.4. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ kompletno 0-prosta polugrupa, $H_{i\lambda} \cong G$ njena $\mathcal{H}$-klasa i $A \subseteq S$. Ako je $H_{i\lambda} \subseteq \langle A \rangle$ i $\langle A \rangle \cap H_{j\mu} \neq \emptyset$ za sve $j \in I$ i $\mu \in \Lambda$, tada sledi $S = \langle A \rangle$.*

U teoremi 2.1 smo videli da nam je graf incidencije omogućio da izrazimo $F(S)$ preko puteva unutar $\Gamma(S)$. Uopštimo sada GH-grafove, da bismo za proizvoljno $A \subseteq S$ izrazili $\langle A \rangle$. Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$, a A njen podskup i $0 \notin A$. Definišimo digraf $\Delta(S : A)$ na sledeći način: skup čvorova je $I \cup \Lambda$ (bez umanjenja opštosti pretpostavljamo da je $I \cap \Lambda = \emptyset$); grana $i \xrightarrow{a} \lambda$ za $i \in I$ i $\lambda \in \Lambda$ postoji ako i samo ako postoji $a \in G$ tako da $(i, a, \lambda) \in A$, dok grana $(\lambda \xrightarrow{p_{\lambda i}} i)$ postoji ako i samo ako je $p_{\lambda i} \neq 0$. Primetimo da ovaj tip grafa može imati višestruke grane $i \to \lambda$.

Sada ćemo uvesti funkcije V i W, pri čemu se V može smatrati za uopštenje ranije korišćene istoimene funkcije. Do zabune svakako neće dolaziti, jer ćemo uvek napomenuti sa kojim tipom grafa radimo.

Definicija 2.5. Neka je u $\Delta(S : A)$ $f = (i \xrightarrow{g} \lambda)$, a $e = (\lambda \xrightarrow{p_{\mu j}} i)$. Definišimo funkcije $V : E \to G$ i $W : E \cap (I \times \Lambda) \to S$ sa

$$(f)V = g, \quad (e)V = p_{\mu j}, \quad (f)W = (i, g, \lambda).$$

Pored toga, neka je za usmeren put $p = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ u grafu $\Delta(S : A)$ *vrednost* puta p

$$(p)V = (e_1)V(e_2)V \cdots (e_k)V.$$

Sa $\mathfrak{P}_{x,y}$ ćemo označavati sve puteve iz x u y unutar $\Delta(S : A)$, a kao i ranije, sa V_{xy} skup $\{(p)V : p \in \mathfrak{P}_{x,y}\}$. *Dozvoljeni* putevi će biti svi oni koji počinju u klasi I, a završavaju se u Λ. Za dozvoljeni put $p = (f_1, e_1, f_2, e_2, \ldots, f_{k-1}, e_{k-1}, f_k) \in \mathfrak{P}_{i,\lambda}$ uzimamo

$$(p)W = (f_1)W(f_2)W \cdots (f_n)W.$$

Primetimo da je $(p)W = (i, (p)V, \lambda)$.

Nakon uvođenja svih ovih definicija, lako se uočava da je $\Delta(S : E(S)) = \Gamma(S, V_P)$. To će nam poslužiti da, na isti način kao i u lemi 2.1, uspostavimo vezu između puteva u $\Delta(S : A)$ i nenula proizvoda elemenata iz A. Time dobijamo sledeći rezultat:

Lema 2.5. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ i $A \subseteq S$, a $\mathcal{R}$ skup dozvoljenih puteva u $\Delta(S : A)$. Tada je $\langle A \rangle = \{(p)W \ : \ p \in \mathcal{R}\} \cup \{0\}$.*

Nakon ovih uvodnih definicija i lema, možemo se posvetiti izračunavanju ranga pravilne RMP. Proces će imati dva slučaja: u prvom razmatramo povezane kompletno 0-proste polugrupe, a onda ćemo taj rezultat iskoristiti za nepovezane.

2.4.1 Povezane kompletno 0-proste polugrupe

Ovaj odeljak prezentuje rezultate iz [30], tako da je to referenca i za tvrđenja i za njihove dokaze, ako nije drugačije napomenuto.

Podsetimo se, ako je posmatrana kompletno 0-prosta polugrupa $S(\cong \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P))$ povezana, to znači da je njen graf $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ povezan (a iz leme 2.1 sledi da je tada i $\Gamma(S)$ povezan).

Navedimo prvo dve leme koje će nam biti potrebne tek kasnije, ali su zbog svoje primenljivosti na povezane pravilne RMP smeštene ovde.

Lema 2.6. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ povezana kompletno 0-prosta polugrupa i neka je $p_{1_\lambda 1_I} \neq 0$. Tada je preslikavanje $\psi : H_{1_I 1_\Lambda} \to G$ definisano sa $((1_I, g, 1_\Lambda))\psi = gp_{1_\Lambda 1_I}$ izomorfizam grupa koji preslikava $H_{1_I 1_\lambda} \cap F(S)$ na $V_{1_I 1_\Lambda} p_{1_\Lambda 1_I}$.*

Dokaz. Lako se proverava da je u pitanju izomorfizam, a iz teoreme 2.1 sledi da je $[F(S) \cap H_{1_I 1_\Lambda}]\psi = \{(\pi)V_P : \pi \in \mathcal{P}_{1_I 1_\Lambda}\} p_{1_\Lambda 1_I} = V_{1_I 1_\Lambda} p_{1_\Lambda 1_I}$. □

Sada za svako $i \in I$ i svako $\lambda \in \Lambda$ izaberimo put π_λ koji povezuje 1_I i λ u grafu $\Gamma(S)$ i put π_i koji povezuje i i 1_Λ u istom grafu (pri čemu je $\pi_{1_\Lambda} = \pi_{1_I} = 1_I \to 1_\Lambda$). Sve ovo je moguće jer je S povezana. Uvedimo oznaku

$$a_{\lambda i} = (\pi_\lambda)V \cdot p_{\lambda i} \cdot (\pi_i)V \cdot p_{1_\Lambda 1_I}.$$

Lema 2.7. *Uz sve pretpostavke i oznake iz prethodnog pasusa, važi da je $V_{1_I 1_\Lambda} p_{1_\Lambda 1_I}$ generisana skupom $\{a_{\lambda i} : i \in I \wedge \lambda \in \Lambda\}$.*

U nastavku nas čeka razvijanje teorije neophodne za krajnji cilj ovog odeljka, teoremu 2.5.

Lema 2.8. *Za kompletno 0-prostu polugrupu S su sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) *S je povezana;*

(ii) *$F(S) \cap H_{i\lambda} \neq \emptyset$ za svako $i \in I$ i svako $\lambda \in \Lambda$;*

(iii) *za proizvoljne $i, j \in I$ i $\lambda, \mu \in \Lambda$ postoje $(i, \lambda, j, \mu)p, (i, \lambda, j, \mu)q \in F(S)$ takvi da je preslikavanje $(i, \lambda, j, \mu)\phi : H_{i\lambda} \to H_{j\mu}$ definisano sa*

$$(i, \lambda, j, \mu)\phi = (i, \lambda, j, \mu)p \cdot x \cdot (i, \lambda, j, \mu)q$$

bijekcija. Elementi $(i, \lambda, j, \mu)p$ i $(i, \lambda, j, \mu)q$ mogu biti izabrani tako da je $((i, \lambda, j, \mu)\phi)^{-1} = (j, \mu, i, \lambda)\phi$, a da je $(i, \lambda, j, \mu)\phi$ izomorfizam grupa $H_{i\lambda}$ i $H_{j\mu}$.

Posledica 2.2. *Ako su i $H_{i\lambda}$ i $H_{j\mu}$ grupe, tada $(i, \lambda, j, \mu)\phi$ izomorfno preslikava $F(S) \cap H_{i\lambda}$ na $F(S) \cap H_{j\mu}$.*

Sve teoreme i leme do kraja ovog odeljka se nadovezuju jedna na drugu, pa u svakoj od njih pretpostavljamo da radimo sa povezanom kompletno 0-prostom polugrupom S sa skupovima I i Λ koji sadrže indekse svih $\mathcal{R}$- i $\mathcal{L}$-klasa, redom. Lema 2.8 nam daje osnovu za zaključak

Lema 2.9. *Za svako $i \in I$, svako $\lambda \in \Lambda$ i svako $a \in H_{i\lambda}$ važi*

$$a \in F(S) \cdot (a)((i, \lambda, j, \mu)\phi) \cdot F(S).$$

Dokaz. Iz $((i, \lambda, j, \mu)\phi)^{-1} = (j, \mu, i, \lambda)\phi$ imamo da je

$$\begin{aligned} a &= ((a)(i, \lambda, j, \mu)\phi)(j, \mu, i, \lambda)\phi \\ &= (j, \mu, i, \lambda)p \cdot (a)(i, \lambda, j, \mu)\phi \cdot (j, \mu, i, \lambda)q \\ &\in F(S) \cdot (a)(i, \lambda, j, \mu)\phi \cdot F(S). \end{aligned}$$

□

Lema 2.10. *Ako je $H_{i\lambda}$ grupa, važi $e_{i\lambda}F(S)e_{i\lambda} \setminus \{0\} = H_{i\lambda} \cap F(S)$.*

Dokaz. Pošto je inkluzija $(\subseteq)$ jasna, dokazujemo $(\supseteq)$. Za $p \in H_{i\lambda} \cap F(S)$ važi $e_{i\lambda}pe_{i\lambda} = p$, odakle sledi tvrđenje. □

Naredna lema će korišćenjem prethodne tri dati jednakost potrebnu za minoriranje ranga polugrupe S.

Lema 2.11. *Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq S$, gde $a_j \in H_{i_j\lambda_j}$ za $j = 1, \ldots, r$ i neka je $H_{i\lambda}$ grupa. Označimo sa*

$$B = \{(a_1)(i_1, \lambda_1, i, \lambda)\phi, \ldots, (a_r)(i_r, \lambda_r, i, \lambda)\phi\}.$$

Tada je

$$\langle F(S) \cup A\rangle \cap H_{i\lambda} = \langle (F(S) \cap H_{i\lambda}) \cup B\rangle.$$

Dokaz. $(\supseteq)$Primetimo prvo da iz definicije funkcija $(i_j, \lambda_j, i, \lambda)\phi$ sledi $B \subseteq H_{i\lambda}$. Odatle je $\langle (F(S) \cap H_{i\lambda}) \cup B\rangle \subseteq H_{i\lambda}$.

Sa druge strane, imamo $F(S) \cap H_{i\lambda} \subseteq \langle F(S) \cup A\rangle$ i $B \subseteq F(S)AF(S) \subseteq \langle F(S) \cup A\rangle$, odakle dobijamo traženu nejednakost.

$(\subseteq)$ Iz leme 2.9 dobijamo $A \subseteq F(S)BF(S) \subseteq \langle F(S) \cup B\rangle$. Odatle imamo

$$\begin{aligned} \langle F(S) \cup A\rangle \cap H_{i\lambda} &\subseteq \langle F(S) \cup \langle F(S) \cup B\rangle\rangle \cap H_{i\lambda} \\ &= \langle F(S) \cup B\rangle \cap H_{i\lambda} = e_{i\lambda}(\langle F(S) \cup B\rangle \cap H_{i\lambda})e_{i\lambda} \\ &\subseteq e_{i\lambda}\langle F(S) \cup B\rangle e_{i\lambda} \cap H_{i\lambda} \qquad \text{(jer je } e_{i\lambda}H_{i\lambda}e_{i\lambda} = H_{i\lambda}) \\ &\subseteq \langle e_{i\lambda}F(S)e_{i\lambda} \cup B\rangle \cap H_{i\lambda} \qquad \text{(jer je } B \subseteq H_{i\lambda}) \\ &= \langle (e_{i\lambda}F(S)e_{i\lambda} \setminus \{0\}) \cup B\rangle \cap H_{i\lambda} \qquad \text{(jer } 0 \notin H_{i\lambda}) \\ &= \langle (H_{i\lambda} \cap F(S)) \cup B\rangle \cap H_{i\lambda} \qquad \text{(iz leme 2.10)} \\ &= \langle (H_{i\lambda} \cap F(S)) \cup B\rangle \quad \text{(jer } (H_{i\lambda} \cap F(S)) \cup B \subseteq H_{i\lambda}).\square \end{aligned}$$

Naredni pojam će nam biti preko potreban, jer se na njemu zasniva izražavanje svih rangova koje ćemo vršiti u ovoj glavi.

Definicija 2.6. Neka je S polugrupa, i $A \subseteq S$. *Relativni rang polugrupe S u odnosu na A* je

$$\mathrm{rank}(S : A) = \min\{|X| \ : \ \langle A \cup X \rangle = S\}.$$

Najzad, imamo prvi rezultat koji će direktno poslužiti u teoremi 2.5.

Lema 2.12. *Ako je $H_{i\lambda}$ grupa, tada je*

$$\mathrm{rank}(S) \geq \mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S)).$$

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, \dots a_r\}$ bilo koji generišući skup polugrupe S i $B \subseteq H_{i\lambda}$ definisano kao u lemi 2.11. Tada iz nje sledi

$$H_{i\lambda} = S \cap H_{i\lambda} = \langle A \rangle \cap H_{i\lambda} = \langle F(S) \cup A \rangle \cap H_{i\lambda} = \langle (F(S) \cap H_{i\lambda}) \cup B \rangle,$$

odakle je $r = |A| \geq |B| \geq \mathrm{rank}(H_{i\lambda} : F(S) \cap H_{i\lambda})$. □

Sledeća lema nam nije potrebna za izvođenje ranga povezanih kompletno 0-prostih polugrupa, ali će nam biti neophodna u slučaju nepovezanih, pa je zato navodimo.

Lema 2.13. *Neka je $H_{i\lambda}$ $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S koja je grupa, a $U \subseteq F(S)$. Tada je*

$$\mathrm{rank}(S : U) \geq \mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S)).$$

Dokaz. Neka je $\{v_1, \dots, v_m\} = V \subseteq S$ takav da je $\langle U \cup V \rangle = S$ i $v_k \in H_{i_k \lambda_k}$ za $k = 1, \dots, m$. Za skup

$$B = \{(v_1)((i_1, \lambda_1, i, \lambda)\phi), \dots, (v_k)((i_k, \lambda_k, i, \lambda)\phi)\} \subseteq H_{i\lambda}$$

prema lemi 2.11 tada imamo $\langle F(S) \cup V \rangle \cap H_{i\lambda} = \langle (F(S) \cap H_{i\lambda}) \cup B \rangle$. Pošto je $U \subseteq F(S)$ važi

$$\begin{aligned} H_{i\lambda} &= S \cap H_{i\lambda} = \langle U \cup V \rangle \cap H_{i\lambda} = \langle F(S) \cup U \cup V \rangle \cap H_{i\lambda} \\ &= \langle F(S) \cup V \rangle \cap H_{i\lambda} = \langle (F(S) \cap H_{i\lambda}) \cup B \rangle, \end{aligned}$$

odakle je $|V| \geq |B| \geq \mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S))$. □

Nakon minoracija ranga, sledi nam i jedna majoracija, da bismo na kraju dokazali da se gornje i donje granice poklapaju.

Lema 2.14. *Neka je $H_{i\lambda}$ grupa i*

$$t = \max\{|I|, |\Lambda|, \mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S))\}.$$

Tada postoji generišući skup za S kardinalnosti t.

Dokaz. Prvo pokažimo da postoje $i_1, \ldots, i_t \in I$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \Lambda$ takvi da je za proizvoljne $q_1, \ldots, q_t$, gde $q_k \in H_{i_k\lambda_k}(k \in \{1, \ldots, t\})$ i svako $j \in I$, $\mu \in \Lambda$ presek $H_{j\mu} \cap \langle q_1, \ldots q_t\rangle$ neprazan. Neka je

$$T = \{(j_1, \mu_1), \ldots, (j_s, \mu_s)\}$$

maksimalan skup sa osobinom da su sve klase $H_{j_1\mu_1}, \ldots H_{j_s\mu_s}$ grupe i da su u međusobno različitim $\mathcal{R}$- i $\mathcal{L}$-klasama. Jasno, T sadrži bar jedan par i za svaku $\mathcal{H}$-klasu $H_{j\mu}$ koja je grupa važi $j \in \{j_1, \ldots, j_s\} \;\vee\; \mu \in \{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$. Pošto je $t \geq \max\{|I|, |\Lambda|\}$, članove I i Λ možemo prenumerisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} &i_1 = j_s, \quad i_2 = j_1, \quad \ldots, \quad i_s = j_{s-1}, \quad \{i_{s+1}, \ldots, i_t\} = I \setminus \{i_1, \ldots, i_s\}, \\ &\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \ldots, \quad \lambda_s = \mu_s, \quad \{\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_t\} = \Lambda \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

Neka su $q_k \in H_{i_k\lambda_k}$ proizvoljni za sve $k = 1, \ldots, t$, kao i $j = i_l \in I$ i $\mu = \lambda_m \in \Lambda$. Mogući su sledeći slučajevi:

$l \leq s \wedge m \leq s$: Proizvod $q_l q_{l+1} \cdots q_m \in H_{j_{l-1}\mu_l} H_{j_l\mu_{l+1}} \ldots H_{j_{m-1}\mu_m}$ (indeksi se računaju po modulu s) nije jednak 0, jer su $H_{j_l\mu_l}, \ldots, H_{j_{m-1}\mu_{m-1}}$ grupe. Odatle je $q_l q_{l+1} \cdots q_m \in H_{j\mu} \cap \langle q_1, \ldots q_t\rangle$.

$l \geq s+1 \wedge m \leq s$: Pošto je u pitanju 0-prosta polugrupa, L_{λ_l} sadrži bar jednu $\mathcal{H}$-klasu koja je grupa, recimo $H_{i_k\lambda_l}$. Ali, zbog maksimalnosti skupa T mora da važi $k \leq s$. Iz prethodnog slučaja imamo da $H_{i_k\lambda_m}$ sadži elemenat $q \in \langle q_1, \ldots q_t\rangle$. Posmatrajmo proizvod $q_l q \in H_{i_l\lambda_l} H_{i_k\lambda_m}$: u pitanju je nenula elemenat, jer je $H_{i_k\lambda_l}$ grupa, a važi i $q_l q \in H_{j\mu} \cap \langle q_1, \ldots, q_t\rangle$.

$l \leq s \wedge m \geq s+1$: Rešava se analogno prethodnom slučaju.

$l \geq s+1 \wedge m \geq s+1$: Izaberimo proizvoljnu grupu $H_{i_k\lambda_r}$ sa indeksima $k, r \leq s$. Iz drugog slučaja tada znamo da postoji $q' \in H_{i_l\lambda_r} \cap \langle q_1, \ldots q_t\rangle$, a iz trećeg slučaja imamo egzistenciju $q'' \in H_{i_k\lambda_m} \cap \langle q_1, \ldots q_t\rangle$, pa opet dobijamo da je $q'q''$ nenula element, jer je $H_{i_k\lambda_r}$ grupa i da $q'q'' \in H_{i\lambda} \cap \langle q_1, \ldots, q_t\rangle$.

Po definiciji t imamo $\operatorname{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S)) \leq t$, pa postoji skup $B = \{b_1, \ldots b_t\} \subseteq H_{i\lambda}$ takav da je

$$\langle (F(S) \cap H_{i\lambda}) \cup B\rangle = H_{i\lambda}. \tag{2.8}$$

Prema lemi 2.8 možemo izabrati $a_k \in H_{i_k\lambda_k}$ za $k = 1, \ldots, t$ takve da je $(a_k)(i_k, \lambda_k, i, \lambda)\phi = b_k$. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_t\}$. Izborom indeksa $i_1, \ldots i_t$ i $\lambda_1 \ldots \lambda_t$ na ranije opisan način dobijamo

$$\langle A\rangle \cap H_{j\mu} \neq \emptyset \text{ za sve } j \in I \text{ i } \mu \in \Lambda. \tag{2.9}$$

Pošto je S konačno, svaka $\mathcal{H}$-klasa je konačna, pa su elementi iz tih preseka konačnog reda, čime dobijamo $E(S) \subseteq \langle A \rangle$ (odakle je $F(S) \subseteq \langle A \rangle$). To nam daje da $(a_k)(i_k, \lambda_k, i, \lambda)\phi \in \langle A \rangle$, za $k = 1, \ldots, t$, te je $B \subseteq \langle A \rangle$. Sada iz (2.8) sledi $H_{i\lambda} \subseteq \langle A \rangle$, te uz uslov (2.9) dobijamo da su zadovoljeni uslovi leme 2.4, odakle je $\langle A \rangle = S$. □

Kao posledicu lema 2.2,2.12 i 2.14 dobijamo ključnu teoremu:

Teorema 2.5. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ povezana kompletno 0-prosta polugrupa i $H_{i\lambda}$ njena proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa koja je grupa. Tada je*

$$\operatorname{rank}(S) = \max\{|I|, |\Lambda|, \operatorname{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S))\}.$$

2.4.2 Nepovezane kompletno 0-proste polugrupe

U nastavku ćemo proučiti slučaj kada je graf $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ kompletno 0-proste polugrupe S nepovezan. Zaključno sa odeljkom 2.4.3, obrađujemo rad [18], pa odatle potiču i rezultati i njihovi dokazi. U okviru celog odeljka podrazumevaćemo da je $S \cong \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ sa ukupno k komponenti povezanosti koje su označene sa $I_1 \times \Lambda_1, \ldots, I_k \times \Lambda_k$. No, u ovom odeljku će se odvijati samo definisanje i proučavanje pojmova koji su nam potrebni nadalje, da bismo sve te pojmove i leme iskoristili u finalnom odeljku ovog poglavlja.

Definicija 2.7. Skup $A \subseteq S$ nazivamo *generatorom transverzale $\mathcal{H}$-klasa* ako i samo ako za sve $i \in I$ i sve $\lambda \in \Lambda$ važi $\langle A \rangle \cap H_{i\lambda} \neq \emptyset$.

Jasno, minimalna veličina takvog skupa je $\max\{|I|, |\Lambda|\}$. Imamo i:

Lema 2.15. *Postoji generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S veličine* $\max\{|I|, |\Lambda|\}$.

Dokaz. Preslikavanje $\varphi : (i, a, \lambda) \mapsto (i, \lambda)$ je epimporfizam S na 0-traku $T = (\{1\}; I, \Lambda, P)$, za koji iz leme 2.3 znamo da ima rang $\max\{|I|, |\Lambda|\}$. Neka je B baza za T; tada je $[B]\varphi^{-1}$ generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S. Ako iz svake klase $[a]_\varphi = \{b : (b)\varphi = (a)\varphi\}$ izaberemo po jednog predstavnika, dobijamo skup kardinalnosti $\max\{|I|, |\Lambda|\}$ koji zadržava osobinu generatora transverzale $\mathcal{H}$-klasa. □

Generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa minimalne veličine ćemo nazivati *bazom transverzale $\mathcal{H}$-klasa.*

Definicija 2.8. Elemente skupa $C \subseteq \Lambda \times I$ nazivamo *povezujućim koordinatama komponenata* ako i samo ako je $\Gamma(\mathbb{H}_S \cup C)$ povezan. Slično, skup $A \subseteq S$ nazivamo *povezujućim skupom komponenata* akko je $\{(i, \lambda) : (i, g, \lambda) \in A\}$ skup povezujućih koordinata komponenata grafa $\Gamma(\mathbb{H}_S)$.

Jasno, ako $\Gamma(\mathbb{H}_S)$ ima k komponenti, onda je minimalan broj povezujućih koordinata $k-1$. Povezujući skup komponenata te kardinalnosti nazivaćemo *minimalnim povezujućim skupom.* Sledeća lema nam garantuje da on postoji u svakom povezujućem skupu.

Lema 2.16. *Svaki povezujući skup komponenata D ima minimalni povezujući podskup $E \subseteq D$.*

Izbor takvog podskupa se vrši na sledeći način: generišemo graf čiji su čvorovi komponente povezanosti grafa $\Gamma(\mathbb{H}_S)$, a grane odgovaraju vezama koje uspostavljaju koordinate skupa D; pronađemo njegovo proizvoljno pokrivajuće stablo T. Grane stabla T će biti elementi skupa E.

Sledeća lema povezuje pojmove generatora transverzale $\mathcal{H}$-klasa i povezujućeg skupa komponenata.

Lema 2.17. *Svaki generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa je povezujući skup komponenata.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa A koji nije povezujući skup komponenata. Tada za skup $A' = \{(i, \lambda) : (i, g, \lambda) \in A\}$ zaključujemo da je graf $\Gamma(\mathbb{H}_S \cup A')$ nepovezan, te postoje bar dva nepovezana čvora (i, λ) i (j, μ). Odatle dobijamo da su i i μ u različitim komponentama grafa $\Delta(S : A)$ (sledi iz definicije ova dva tipa grafa), pa na osnovu leme 2.5 važi $\langle A \rangle \cap H_{i\mu} = \emptyset$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je A generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa. $\square$

Posledica 2.3. *Svaki generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa (a time i svaka baza transverzale $\mathcal{H}$-klasa) ima povezujući podskup komponenata minimalne veličine.*

Sledeća tema nam je definicija vrednosti $r_{\min}$, koja će figurisati u formuli za rang. Neka $\mathrm{Map}(X, Y)$ označava familiju svih preslikavanja iz skupa X u skup Y.

Definicija 2.9. Za strukturnu matricu P polugrupe S, skup $C \subseteq \Lambda \times I$ i $\omega \in \mathrm{Map}(C, G)$ definišemo $P_{C,\omega}$ kao matricu dimenzije $|\Lambda| \times |I|$ čiji su elementi $p^*_{\lambda i}$ dati sa

$$p^*_{\lambda i} = \begin{cases} ((\lambda, i))\omega, & \text{ako je } (\lambda, i) \in C; \\ p_{\lambda i}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je $S_{C,\omega} = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P_{C,\omega})$. U slučaju $|C| = 1$ (bez umanjenja opštosti, $C = \{(\lambda, i)\}$) ćemo koristiti oznaku $S(\lambda, i, ((\lambda, i))\omega)$.

Za dato $A \subseteq I \times \Lambda$ uvodimo $A^T = \{(\lambda, i) : (i, \lambda) \in A\}$ i nazivamo ga *transpozicijom* skupa A.

Definicija 2.10. Neka je $H_{i\lambda}$ proizvoljna grupna $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S, a $C \subseteq I \times \Lambda$ skup povezujućih koordinata komponenti koji je minimalne veličine. Definišimo

$$r_{\min} = \min_{\omega \in \mathrm{Map}(C^T, G)} (\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S_{C^T,\omega}))).$$

Treba da pokažemo da je definicija dobra, tj. da ne zavisi od izbora klase $H_{i\lambda}$, niti od izbora skupa C. Prvi uslov nam obezbeđuje teorema 2.5 (možemo je primeniti, jer je $S_{C,\omega}$ povezana), dok drugi sledi iz leme 2.18, čiji će dokaz biti izostavljen, ali se može pronaći u [18].

Lema 2.18. *Neka polugrupa $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ ima komponente povezanosti $I_1 \times \Lambda_1, \ldots I_k \times \Lambda_k$ i neka su $C, D \subseteq I \times \Lambda$ dva skupa povezujućih koordinata za S, oba minimalne veličine. Tada za grupnu $\mathcal{H}$-klasu $H_{i\lambda}$ važi*

$$\min_{\omega \in \mathrm{Map}(C^T, G)} (\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S_{C^T,\omega}))) =$$
$$= \min_{\omega' \in \mathrm{Map}(D^T, G)} (\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S_{D^T,\omega'}))).$$

Primetimo da u slučaju da je S povezana, imamo $C = \emptyset$ i odatle $C^T = \emptyset$, pa je

$$r_{\min} = \min_{\omega \in \mathrm{Map}(\emptyset, G)} \{\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S_{\emptyset,\omega}))\} = \mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S)).$$

Naredni cilj nam je uvođenje povezane polugrupe $\mathrm{Con}(S, C)$, koja je vezana za polugrupu S i njen minimalni povezujući skup C. Takva specijalna polugrupa će nam pomoći u primeni rezultata koje smo dobili za povezane RMP na slučaj nepovezanih.

Za polugrupe $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ i $T = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$ i skup $A \subseteq S$ sa $\langle A \rangle_S$ i $\langle A \rangle_T$ označavamo potpolugrupu generisanu sa A u S, odnosno u T.

Lema 2.19. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$, i indeksi $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ takvi da su $H_{j\lambda}$ i $H_{i\mu}$ grupe, a $H_{j\mu}$ i $H_{i\lambda}$ to nisu. Sada za $A \subseteq S$, $a = (i, g, \lambda) \in A$ i $T = S(\mu, j, p_{\mu i} g p_{\lambda j})$ važi $\langle A \rangle_S = \langle A \rangle_T$.*

Dokaz. Uvedimo oznake $\Delta_S = \Delta(S : A)$ i $\Delta_T = \Delta(T : A)$ i neka su E_S i E_T skupovi čvorova Δ_S i Δ_T, redom. Iz definicije polugrupe T vidimo da je jedina razlika između ta dva grafa grana (μ, j) označena sa $p_{\mu i} g p_{\lambda j}$ koja se nalazi u Δ_T, a nema je u Δ_S. Neka su R_S i R_T skupovi dozvoljenih puteva u Δ_S i Δ_T, redom. Tada iz leme 2.5 slede jednakosti

$$\langle A \rangle_S = \{(p)W : p \in R_S\} = \{(k, (p)V, \xi) : k \in I \wedge \xi \in \Lambda \wedge p \in \mathcal{P}^S_{k,\xi}\},$$
$$\langle A \rangle_T = \{(p)W : p \in R_T\} = \{(k, (p)V, \xi) : k \in I \wedge \xi \in \Lambda \wedge p \in \mathcal{P}^T_{k,\xi}\}.$$

Jasno, važi $\langle A \rangle_S \subseteq \langle A \rangle_T$, jer se svaki dozvoljen put u Δ_S nalazi i u Δ_T. Pokažimo obratnu inkluziju. Za svako $p \in R_T$ ćemo pronaći $p^* \in R_S$ tako da je $(p)V = (p^*)V$. To izvodimo tako što svaku pojavu grane $(\mu \xrightarrow{p_{\mu i} g p_{\lambda j}} j)$ na putu p zamenjujemo putem $\mu \xrightarrow{p_{\mu i}} i \xrightarrow{g} \lambda \xrightarrow{p_{\lambda j}} j$ (to možemo jer su $H_{i\mu}$ i $H_{j\lambda}$ grupe, a $a = (i, g, \mu) \in A$). Sada je jasno da za novi put p^* važi $(p^*)V = (p)V$. $\square$

Definicija 2.11. Neka je $C \subseteq I \times \Lambda$ minimalan skup povezujućih koordinata komponenata polugrupe S. Za svako $(i, \lambda) \in C$ izaberimo elemente $(i)\psi \in \Lambda$ i $(\lambda)\phi \in I$ takve da važi $p_{(i)\psi i} \neq 0$ i $p_{\lambda(\lambda)\phi} \neq 0$ (to možemo da uradimo jer svaka kolona i vrsta matrice P imaju bar jednu nenula vrednost). Sada definišimo

$$C^\delta = \{((i)\psi, (\lambda)\phi) : (i, \lambda) \in C\},$$

koji nazivamo *dual* skupa C.

Primetimo, za $(i, \lambda) \in C$ važi da ne postoji veza između koordinata i i λ u grafu $\Gamma(\mathbb{H}_S)$, tj. da u matrici P ne možemo, krećući se po nenula elementima naizmeničnim promenama vrsta i kolona, preći iz vrste λ u kolonu i, a ni obratno. Pošto su zbog $p_{(i)\psi i} \neq 0$ i $p_{\lambda(\lambda)\phi} \neq 0$ elementi $(i, (i)\psi)$ i $((\lambda)\phi, \lambda)$ čvorovi u posmatranom grafu, iz nepovezanisti i i λ sledi da su i oni u različitim komponentama, pa ne postoji veza između koordinata $(i)\psi$ i $(\lambda)\phi$, te je $((\lambda)\phi, (i)\psi)$ povezujuća koordinata koja veže iste dve komponente kao i (i, λ). Odatle dobijamo da je dual minimalnog skupa povezujućih koordinata takođe minimalan skup povezujućih koordinata komponenata.

Definicija 2.12. Za datu kompletno 0-prostu nepovezanu polugrupu S i $B \subseteq S$, minimalni povezujući skup sa koordinatama C, definišemo kompletno 0-prostu polugrupu

$$\mathrm{Con}(S, B) = S_{(C^\delta)^T, \alpha},$$

gde je C^δ dobijeno kao u prethodnoj definiciji, a $\alpha : C^\delta \to G$ je definisana tako da za svako $(i, g, \lambda) \in B$ važi $((i)\phi, (\lambda)\psi)\alpha = p_{(i)\phi i} g p_{\lambda(\lambda)\psi}$. Polugrupu $\mathrm{Con}(S, B)$ nazivamo *kompletiranje polugrupe S preko B*.

Primetimo da iz uslova da je C^δ skup povezujućujih koordinata komponenata sledi da je i $\mathrm{Con}(S, B)$ povezana.

Posledica 2.4. *Za svaki minimalni skup C povezujućih koordinata postoji skup $X \subseteq S$ sa koordinatama C takav da je*

$$\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(\mathrm{Con}(S, X))) = r_{\min}.$$

Dokaz. Pošto je $\mathrm{Con}(S, X) = S_{(C^\delta)^T, \alpha}$, za svaki element $(i, g, \lambda) \in X$ važi $((i)\phi, (\lambda)\psi)\alpha = p_{(i)\phi i} g p_{\lambda(\lambda)\psi}$, pa možemo središnje elemente skupa X izabrati tako da $\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S_{(C^\delta)^T, \alpha}))$ bude minimalne vrednosti. $\square$

Posledica 2.5. *Neka polugrupa $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ ima komponente povezanosti $I_1 \times \Lambda_1, \ldots, I_k \times \Lambda_k$ i neka je $B \subseteq S$ njen minimalni povezujući skup, čije su koordinate $C \subseteq I \times \Lambda$. Pored toga, neka je $H_{i\lambda}$ $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S koja je grupa. Označimo sa T polugrupu $\mathrm{Con}(S, B)$ i izaberimo proizvoljan skup $A \subseteq S$ koji zadovoljava $B \subseteq A$. Tada važi:*

(1) $B \subseteq F(T)$*;*
(2) $\langle A\rangle_S = \langle A\rangle_T$*;*
(3) $\mathrm{rank}(S : B) = \mathrm{rank}(T : B)$*.*

Dokaz. (1): Za $(i, b, \lambda) \in B$ važi $(i, b, \lambda) = \big(i, p^{-1}_{i(i)\phi}, (i)\phi\big)\big((\lambda)\psi, p^{-1}_{(\lambda)\psi\lambda}, \lambda\big)$, što je proizvod dva idempotenta. (2) se dobija višestrukom primenom leme 2.19, a (3) je direktna posledica (2). □

2.4.3 Rangovi

Najzad, došle su na red dve ključne teoreme ovog poglavlja. Prva će dati formulu za rang pravilne nepovezane RMP, dok će druga pomoći u izražavanju faktora $r_{\min}$ preko grupe G.

Teorema 2.6. *Neka je* $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *kompletno* 0*-prosta polugrupa sa komponentama povezanosti* $I_1 \times \Lambda_1, \ldots, I_k \times \Lambda_k$*. Tada je*

$$\mathrm{rank}(S) = \max\{|I|, |\Lambda|, r_{\min} + k - 1\},$$

gde je $$r_{\min} = \min_{\omega \in \mathrm{Map}(C^T, G)} \{\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(S_{C^T,\omega}))\},$$

a $C \subseteq I \times \Lambda$ *je proizvoljan minimalan skup povezujućih koordinata komponenata, dok je* $H_{i\lambda}$ *proizvoljna grupna* $\mathcal{H}$*-klasa.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da uvek možemo pronaći generišući skup ove veličine. Prema lemi 2.15 postoji generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa $B \subseteq I \times \Lambda$ dimenzije $M = \max\{|I|, |\Lambda|\}$. Prema posledici 2.3, on ima minimalan povezujući podskup D i on je dimenzije $k-1$. Sada iz posledice 2.4 zaključujemo da postoji skup $A \subseteq S$ sa koordinatama D tako da za $T = \mathrm{Con}(S, A)$ važi $\mathrm{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(T)) = r_{\min}$ (neka je $\{u_1, \ldots, u_{r_{\min}}\} = U \subseteq H_{i\lambda}$ odgovarajući skup za koji imamo $\langle U \cup (H_{i\lambda} \cap F(T))\rangle = H_{i\lambda}$). Proširićemo A do generišućeg skupa za polugrupu T, a to će, prema posledici 2.5, biti generišući skup i za polugrupu S. Razmotrićemo dva slučaja:

$M \geq r_{\min} + k - 1$**:** Prvo primetimo da važi

$$|B \setminus D| = M - (k-1) \geq r_{\min} + k - 1 - (k-1) = r_{\min}.$$

Hoćemo da nađemo $X = A \cup Y$ koristeći koordinate B. Neka skup $Y = \{y_1, \ldots, y_{r_{\min}}, \ldots, y_{M-(k-1)}\}$ ima koordinate koje odgovaraju skupu $B \setminus D$. Pošto je T povezana polugrupa, iz leme 2.8 sledi da središnje elemente uređenih trojki $y_1, \ldots, y_{r_{\min}}$ možemo birati tako da za svako $y_q \in H_{i_q\lambda_q}$ $(1 \leq q \leq r_{\min})$ važi

$$(y_q)((i_q, \lambda_q, i, \lambda)\phi) = u_q.$$

Središnje elemente trojki $y_{r_{\min}+1}, \ldots, y_{M-(k-1)}$ ćemo izabrati proizvoljno iz G. Tvrdimo da tada skup $X = A \cup Y$ generiše T. Pošto su njegove koordinate B, sledi da je X generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa, te je $E(T) \subseteq \langle X \rangle$. Pored toga, iz leme 2.11 zbog $U \subseteq H_{i\lambda}$ sledi da za $y_1, \ldots, y_{r_{\min}}$ imamo $\{u_1, \ldots, u_{r_{\min}}\} \subseteq \langle X \rangle$. Iz toga i $\langle U \cup (H_{i\lambda} \cap F(T)) \rangle = H_{i\lambda}$ sada dobijamo $H_{i\lambda} \subseteq \langle X \rangle$, što nam uz činjenicu da je X generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa prema lemi 2.4 daje $\langle X \rangle = T$. Pored toga, kardinalnost je odgovarajuća, jer je

$$|X| = |A| + |Y| = k - 1 + M - (k - 1) = M = \max\{|I|, |\Lambda|, r_{\min} + k - 1\}$$

$M < r_{\min} + k - 1$**:** Slično kao i ranije, odmah dobijamo da je $|B \setminus D| = M - (k-1) < r_{\min}$. Ovaj put će proširenje skupa A imati oblik $X = A \cup Y \cup Z$, gde će $A \cup Y$ imati koordinate B, a svi elementi $z \in Z$ će imati koordinate (i, λ). Izaberimo $Y = \{y_1, \ldots, y_\delta\}$ (gde je $\delta = M - (k-1)$) sa koordinatama $B \setminus D$ i središnjim elementima $y_q \in H_{i_q \lambda_q}$ koji za svako $q = 1, \ldots, \delta$ zadovoljavaju

$$(y_q)((i_q, \lambda_q, i, \lambda)\phi) = u_q,$$

i uzmimo $Z = \{u_{\delta+1}, \ldots, u_{r_{\min}}\}$. Analognim zaključivanjem kao i u prethodnom slučaju dobijamo da X generiše T, a time i S, a uz to je i

$$\begin{aligned} |X| &= |A| + |Y| + |Z| = (k-1) + \delta + (r_{\min} - (\delta + 1) + 1) \\ &= r_{\min} + k - 1 = \max\{M, r_{\min} + k - 1\} = \max\{|I|, |\Lambda|, r_{\min} + k - 1\}. \end{aligned}$$

Ostaje još samo da pokažemo da je to najmanja moguća kardinalnost generišućeg skupa. Neka je $A \subseteq S$ proizvoljan generišući skup za S. Iz leme 2.2 imamo $|A| \geq \max\{|I|, |\Lambda|\}$, pa ostaje još samo da pokažemo $|A| \geq r_{\min} + k - 1$. Pošto generiše ceo skup, A je i generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa, pa prema posledici 2.3 ima podskup D povezujućih koordinata koji je minimalne moguće kardinalnosti, $k-1$. Prema definiciji ranga važi $|A \setminus D| \geq \operatorname{rank}(S : D)$. Neka je $T = \operatorname{Con}(S, D)$ odgovarajuća povezana kompletno 0-prosta polugrupa, koja po posledici 2.5 zadovoljava

$$\operatorname{rank}(S : D) = \operatorname{rank}(T : D)$$

i $D \subseteq F(T)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} |A \setminus D| &\geq \operatorname{rank}(S : D) = \operatorname{rank}(T : D) \\ &\geq \operatorname{rank}(H_{i\lambda} : H_{i\lambda} \cap F(T)) \qquad \text{(iz leme 2.13)} \\ &\geq r_{\min}, \end{aligned}$$

odakle je $|A| = |D| + |A \setminus D| \geq k - 1 + r_{\min}$. $\square$

Sledeća teorema će nam dati zgodniji oblik za rang kompletno 0-proste polugrupe, tačnije $r_{\min}$ će biti izraženo preko osobina grupe G, bez pozivanja na neke nove polugrupe i funkcije.

Teorema 2.7. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ konačna pravilna Risova matrična polugrupa sa k komponenti povezanosti $I_1 \times \Lambda_1, \ldots, I_k \times \Lambda_k$. Za svako $j = 1, \ldots, k$ izaberimo $(1_{I_j}, 1_{\Lambda_j}) \in I_j \times \Lambda_j$ tako da je $p_{1_{\Lambda_j} 1_{I_j}} \neq 0$ (tj. tako da su $H_{I_j \Lambda_j}$ grupne $\mathcal{H}$-klase). Pored toga, za svako $\lambda \in \Lambda_r$ i svako $i \in I_l$ u $\Gamma(S, V_P)$ izaberimo put π_λ koji povezuje 1_{I_r} i λ u podgrafu $I_r \cup \Lambda_r$, a π_i izaberimo tako da povezuje i i 1_{Λ_l} u podgrafu $I_l \cup \Lambda_l$ (pri čemu je $\pi_{1_{I_q}} = \pi_{1_{\Lambda_q}} = 1_{I_q} \to 1_{\Lambda_q}$, označen sa $p^{-1}_{1_{\Lambda_q} 1_{I_q}}$). Neka je za svako $r = 1, \ldots, k$ i svaki par $(\lambda, i) \in \Lambda_r \times I_r$*

$$a_{\lambda i} = (\pi_\lambda)V \cdot p_{\lambda i} \cdot (\pi_i)V \cdot p_{1_{\Lambda_r} 1_{I_r}}.$$

Neka je pored svega toga G_r podgrupa grupe G generisana skupom $\{a_{\lambda i} \mid (\lambda, i) \in \Lambda_r \times I_r \wedge a_{\lambda i} \neq 0\}$. Tada je

$$\operatorname{rank}(S) = \max\{|I|, |\Lambda|, \sigma_{\min} + k - 1\}, \qquad \textit{gde je}$$
$$\sigma_{\min} = \min\left\{ \operatorname{rank}\left(G : \bigcup_{i=1}^{k} g_i G_i g_i^{-1}\right) \;\middle|\; g_1, \ldots, g_n \in G \right\}$$

Dokaz. Za svaku komponentu povezanosti $\Lambda_r \times I_r$ imamo vezanu grupu $G_r \leq G$ određenu vrednostima $a_{\lambda i}$ podmatrice $\Lambda_r \times I_r$. Prema lemama 2.6 i 2.7, grupa G_r je generisana sa $F(S) \cap H_{i\lambda}$, gde je $H_{i\lambda}$ bilo koja fiksirana grupna $\mathcal{H}$-klasa komponente $\Lambda_r \times I_r$.

Neka je C sledeći skup povezujućih koordinata:

$$C = \{(1_{I_2}, 1_{\Lambda_1}), (1_{I_3}, 1_{\Lambda_1}), \ldots, (1_{I_k}, 1_{\Lambda_1})\} \subseteq I \times \Lambda,$$

a $\omega \in \operatorname{Map}(C^T, G)$ za koje imamo $(1_{\Lambda_1}, 1_{I_r})\omega = g_r$, za sve $r = 2, \ldots, k$ (i uzmimo $g_1 = p_{1_{\Lambda_1} 1_{I_1}}$). Posmatraćemo

$$\operatorname{rank}(H_{1_{I_1} 1_{\Lambda_1}} : H_{1_{I_1} 1_{\Lambda_1}} \cap F(S_{C^T, \omega})).$$

Za početak će nas zanimati $Z = H_{1_{I_1} 1_{\Lambda_1}} \cap F(T)$, gde je $T = (S_{C^T, \omega})$ (primetimo da je ona povezana, pa ćemo moći da primenimo leme 2.6 i 2.7). Da bismo odredili Z, posmatrajmo $\Gamma(T, V_{P_{C^T, \omega}})$ (i neka je $P_{C^T, \omega} = (p^*_{\lambda i})$). On je povezan, pa sadrži put iz 1_{I_1} u svako λ (odnosno iz svakog i u 1_{Λ_1}). Ti će nam putevi biti potrebni da izračunamo Z. Za svako $\lambda \in \Lambda_r \subseteq \Lambda$ definišimo put iz 1_{I_1} u λ sa

$$\varpi_\lambda : 1_{I_1} \xrightarrow{(p^*_{1_{\Lambda_1} 1_{I_1}})^{-1}} 1_{\Lambda_1} \xrightarrow{g_r} 1_{I_r} \xrightarrow{(\pi_\lambda)V} \lambda.$$

Sada je $(\varpi_\lambda)V = (p^*_{1_{\Lambda_1} 1_{I_1}})^{-1} \cdot g_r \cdot (\pi_\lambda)V$. Slično, za svako $i \in I_1 \subseteq I$, izaberimo put ϖ_i iz i u 1_{Λ_1} tako da je

$$\varpi_i : i \xrightarrow{(\pi_i)V} 1_{\Lambda_r} \xrightarrow{p^*_{1_{\Lambda_r}1_{I_r}}} 1_{I_r} \xrightarrow{g_r^{-1}}, 1_{\Lambda_1}$$

odakle je $(\varpi_i)V = (\pi_i)V \cdot p^*_{1_{\Lambda_r}1_{I_r}} \cdot g_r^{-1}$. Uz to, izaberimo $\varpi_{1_{I_1}} = \varpi_{1_{\Lambda_1}} = 1_{I_1} \xrightarrow{(p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}})^{-1}} 1_{\Lambda_1}$. Neka je za $\lambda \in \Lambda$ i $i \in I$

$$h_{\lambda i} = (\varpi_\lambda)V \cdot p^*_{\lambda i} \cdot (\varpi_i)V \cdot p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}}.$$

Proučimo vrednosti $h_{\lambda i}$ u svim mogućim slučajevima. Za proizvoljno $(\lambda, i) \in \Lambda_m \times I_n$ $(m \neq n)$ važi ili $p^*_{\lambda i}$ (u tom slučaju je $h_{\lambda i} = 0$) ili je $(\lambda, i) \in C$, odakle je $\lambda = 1_{\Lambda_1}$, a $i = 1_{I_r}$, pa je $p^*_{\lambda i} = p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_r}} = g_r$, odakle važi

$$h_{\lambda i} = h_{1_{\Lambda_1}1_{I_r}} = (\varpi_{1_{\Lambda_1}})V \cdot g_r \cdot (1_{I_r})V p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}} = (p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}})^{-1} g_r g_r^{-1} p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}} = 1_G.$$

Ukoliko $(\lambda, i) \in \Lambda_r \times I_r$ (za neko $1 \leq r \leq k$), onda imamo

$$\begin{aligned}
h_{\lambda i} &= (\varpi_\lambda)V \cdot p^*_{\lambda i} \cdot (\varpi_i)V \cdot p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}} \\
&= (p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}})^{-1} g_r \cdot (\pi_\lambda)V \cdot p^*_{\lambda i} \cdot (\pi_i)V \cdot p^*_{1_{\Lambda_r}1_{I_r}} \cdot g_r^{-1} \cdot p^*_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}} \\
&= ((p_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}})^{-1} g_r) \cdot (\pi_\lambda)V \cdot p_{\lambda i} \cdot (\pi_i)V \cdot p_{1_{\Lambda_r}1_{I_r}} \cdot (g_r^{-1} \cdot p_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}}) \\
&= q_r \cdot a_{\lambda i} \cdot q_r^{-1},
\end{aligned}$$

gde je $q_r = (p_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}})^{-1} g_r$.

Iz prethodne diskusije sledi da je podgrupa grupe G generisana sa $\{h_{\lambda i} \mid \lambda \in \Lambda \wedge i \in I \wedge h_{\lambda i} \neq 0\}$ jednaka podgrupi generisanoj sa $\bigcup_{j=1}^{k} \{q_j a_{\lambda i} q_j^{-1} \mid (\Lambda, i) \in \Lambda_j \times I_j\}$. Odatle je

$$\begin{aligned}
r_{\min} &= \min_{\omega \in \mathrm{Map}(C^T, G)} \left\{ \mathrm{rank}(H_{1_{I_1}1_{\Lambda_1}} : H_{1_{I_1}1_{\Lambda_1}} \cap F(S_{C^T}, \omega)) \right\} \\
&= \min_{\omega \in \mathrm{Map}(C^T, G)} \left\{ \mathrm{rank}(G : V_{1_{I_1}1_{\Lambda_1}} p_{1_{\Lambda_1}1_{I_1}}) \right\} \quad \text{(lema 2.6)} \\
&= \min_{\omega \in \mathrm{Map}(C^T, G)} \left\{ \mathrm{rank}(G : \langle h_{\lambda i} \mid \lambda \in \Lambda \wedge i \in I \wedge h_{\lambda i} \neq 0 \rangle) \right\} \text{ (lema 2.7)} \\
&= \min \left\{ \mathrm{rank} \left(G : \bigcup_{i=1}^{k} g_i G_i g_i^{-1} \right) \mid g_2, \ldots, g_k \in G \right\} \quad \text{(gde je } g_1 = 1_G) \\
&= \min \left\{ \mathrm{rank} \left(G : \bigcup_{i=1}^{k} g_i G_i g_i^{-1} \right) \mid g_1, \ldots, g_k \in G \right\} \\
&= \sigma_{\min}.
\end{aligned}$$

□

Posledica 2.6. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ pravilna Risova matrična polugrupa sa k komponenti povezanosti $I_1 \times \Lambda_1, \ldots, I_k \times \Lambda_k$ sa matricom*

P u Grejemovoj normalnoj formi iz teoreme 2.4. Neka je za svako $r = 1, \ldots, k$ grupa G_r podgrupa grupe G generisana nenula vrednostima komponente $C_r = I_r \times \Lambda_r$ matrice P. Tada je

$$\operatorname{rank}(S) = \max\{|I|, |\Lambda|, \sigma_{\min} + k - 1\}, \qquad \textit{gde je}$$

$$\sigma_{\min} = \min\Big\{ \operatorname{rank}\Big(\operatorname{rank}\Big(G : \bigcup_{i=1}^{k} g_i G_i g_i^{-1}\Big) \ \mid\ g_1, \ldots, g_k \in G\Big)\Big\}.$$

2.5 Rang opšte Risove matrične polugrupe

Najzad, korišćenjem Grejemove normalne forme možemo pronaći rang proizvoljne RMP. Ovaj rezultat je dokazan u [17].

Teorema 2.8. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Risova matrična polugrupa sa strukturnom matricom u Grejemovoj normalnoj formi $P = C_R \oplus C_N$, gde C_N i C_R ispunjavaju sve uslove iz teoreme 2.4. Ako je P nula-matrica, važi*

$$\operatorname{rank}(S) = |G| \cdot |I| \cdot |\Lambda|, \tag{2.10}$$

a inače je

$$\operatorname{rank}(S) = \max\big\{\ |I \setminus I'|, |\Lambda \setminus \Lambda'|, \sigma_{\min} + n - 1\big\} + |I'| + |\Lambda'|,$$

gde je

$$\sigma_{\min} = \min\left\{ \operatorname{rank}\Big(G : \bigcup_{i=1}^{n} g_i G_i g_i^{-1}\Big) \ \Big|\ g_1, \ldots, g_n \in G \right\}.$$

Dokaz. Ako je P nula-matrica, tada je $P = C_N$ i proizvod svaka dva elementa je 0, pa ne postoji način da se generiše novi. Zato svi elementi moraju da pripadaju generišućem skupu, pa važi (2.10).

Ukoliko to nije slučaj, C_R je neprazna, pa je $T = \mathcal{M}^0(G; I \setminus I', \Lambda \setminus \Lambda'; C_R)$ Risova matrična polugrupa nad grupom G sa pravilnom matricom C_R u Grejemovoj normalnoj formi. Prema posledici 2.6 sledi

$$\operatorname{rank}(T) = \max\{|I \setminus I'|, |\Lambda \setminus \Lambda'|, \sigma_{\min} + n - 1\}.$$

Pokažimo da je $\operatorname{rank}(S) = \operatorname{rank}(T) + |I'| + |\Lambda'|$. Neka su

$$U = (I \times G \times \Lambda') \cup \{0\} \ \text{ i } \ V = (I' \times G \times \Lambda) \cup \{0\}.$$

Lako se pokazuje da su U i V ideali polugrupe S. Odatle sledi da su i $U \cup V$ i $U \cap V$ ideali. Osim toga, važi i

$$\langle S \setminus (U \cap V) \rangle = S. \tag{2.11}$$

Dokažimo to: izaberimo $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \Lambda'$ i $i_0 \in I \setminus I'$, takve da je $p_{\lambda_0 i_0} \neq 0$ (to možemo uraditi, jer je C_R neprazna i pravilna); tada je za proizvoljne $\lambda' \in \Lambda'$ i $i' \in I'$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda'$, $i \in I \setminus I'$ i $g \in G$

$$\begin{aligned}
(i', g, \lambda') &= (i', 1_G, \lambda_0)(i_0, p_{\lambda_0 i_0}^{-1} g p_{\lambda_0 i_0}^{-1}, \lambda_0)(i_0, 1_G, \lambda'), \\
(i', g, \lambda) &= (i', 1_G, \lambda_0)(i_0, p_{\lambda_0 i_0}^{-1} g p_{\lambda_0 i_0}^{-1}, \lambda_0)(i_0, 1_G, \lambda), \\
(i, g, \lambda') &= (i, 1_G, \lambda_0)(i_0, p_{\lambda_0 i_0}^{-1} g p_{\lambda_0 i_0}^{-1}, \lambda_0)(i_0, 1_G, \lambda'),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

odakle, između ostalog, sledi $U \cap V \subset (V \setminus U)T(U \setminus V)$, pa je dokazano (2.11). Definišimo $B_I = \{(i_0, 1_G, \lambda') : \lambda' \in \Lambda'\}$ i $B_\Lambda = \{(i', 1_G, \lambda_0) : i' \in I'\}$. Jasno je da je $|B_I| = |\Lambda'|$ i $|B_\Lambda| = |I'|$. Neka je B baza T ($\langle B \rangle = T$ i $\operatorname{rank}(T) = |B|$). Tada je iz (2.12) jasno da je $\langle B_I \cup B_\Lambda \cup B \rangle = S$, a imamo i $|B_I \cup B_\Lambda \cup B| = |\Lambda'| + |I'| + \operatorname{rank}(T)$.

Ostaje nam da pokažemo da ne postoji manji generatorni skup. Neka je A baza S. Pošto je $U \cup V = S \setminus T$ ideal, sledi da je $\langle A \cap T \rangle = \langle A \rangle \cap T = T$. Pored toga, iz (2.11) sledi $\langle A \setminus (U \cap V) \rangle = \langle S \setminus (U \cap V) \rangle = S$. Iz osobina Risovih matričnih polugrupa znamo da se elemenat iz neke $\mathcal{R}$-klase ($\mathcal{L}$-klase) ne može generisati ako u generatornom skupu nema elementa iz iste klase. Zato važi

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(S) = |A| &\geq |A \cap T| + |A \cap (I' \times G \times (\Lambda \setminus \Lambda'))| + |A \cap ((I \setminus I') \times G \times \Lambda')| \\
&\geq \operatorname{rank}(T) + |I'| + |\Lambda'|. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ako je S generisana idempotentima, važi $\Lambda' = I' = \emptyset$, $n = 1$ i $G_1 = G$, pa je $\sigma_{\min} = 0$. To nam daje

Posledica 2.7. *Ako je polugrupa $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$ idempotentno generisana, onda je* $\operatorname{rank}(S) = \max\{|I|, |\Lambda|\}$.

Glava 3

Monoid transformacija $\mathcal{T}_n$

Kao prvi primer polugrupa transformacija posmatramo pune polugrupe transformacija. Iako je naš fokus na konačnim polugrupama, teoreme koje važe u opštem slučaju ćemo tako i da navodimo i dokazujemo, pa će zato prvo poglavlje da se odnosi na osobine monoida transformacija $\mathcal{T}_X$ nad proizvoljnim skupom X. Analizom njihovih Grinovih relacija postavljamo osnovu za drugo poglavlje, u kome izučavamo odnose generisanosti ideala, da bismo preko niza lema pronašli $\operatorname{rank}(\mathcal{T}_n)$. Nakon toga ćemo pronaći potpolugrupu $F(\mathcal{T}_n)$, kao i njen rang. Da bismo pronašli i odgovarajući idempotentni rang, u narednom poglavlju razvijamo teoriju o RMP sa idempotentnom bazom. Kraj glave je posvećen primeni te teorije na izračunavanje idempotentnih rangova ideala, a kao posledica toga se dobija i $\operatorname{idrank}(F(\mathcal{T}_n))$. Većina tvrđenja u prva dva poglavlja spada u klasične rezultate, te ako nije drugačije napomenuto, kao reference se podrazumevaju sledeće jedinice: [3,12,26]. Pored toga, treba napomenuti da su svi dokazi počev od leme 3.3 zaključno sa teoremom 3.5 izvedeni nezavisno od literature, te se spomenute reference ne odnose na njih, samo na njima odgovarajuća tvrđenja. Za preostala dva poglavlja čitaoca upućujemo na rad [16].

Definicija 3.1. Neka je $X \neq \emptyset$. Tada je

$$\mathcal{S}_X = (\{\alpha \mid \alpha : X \to X \text{ i } \alpha \text{ je bijekcija}\}, \circ)$$

puna grupa permutacija nad X. Slično,

$$\mathcal{T}_X = (\{\alpha \mid \alpha : X \to X\}, \circ)$$

je *puna polugrupa transformacija nad* X. Ukoliko je S potpolugrupa $\mathcal{T}_X$, nazivamo je *polugrupom transformacija nad* X.

Lako se utvrđuje da su $\mathcal{S}_X$ i $\mathcal{T}_X$ respektivno grupa i polugrupa obe sa jedinicom id_X, odakle sledi da je prva podgrupa druge.

Ukoliko je $|X| = n$ možemo uspostaviti bijekciju između skupa X i skupa $\{1, \ldots, n\}$ i preko nje bijekciju između $\mathcal{T}_X$ (odnosno $\mathcal{S}_X$) i $\mathcal{T}_n$ ($\mathcal{S}_n$). Zato u tom slučaju pišemo $\mathcal{S}_n$ i $\mathcal{T}_n$ umesto $\mathcal{S}_X$ i $\mathcal{T}_X$ i radimo sa skupom $\{1, \dots, n\}$, umesto sa X.

Monoid transformacija igra sličnu ulogu u teoriji polugrupa kao grupa permutacija u teoriji grupa. To potvrđuje i sledeća teorema, analogna Kejlijevoj[1] teoremi za grupe, koja pokazuje da je svaka polugrupa izomorfna nekoj polugrupi transformacija.

Teorema 3.1. *Neka je S polugrupa (odnosno monoid). Tada se S može potopiti u $\mathcal{T}_{S^1}$.*

Dokaz. Uvedimo oznaku $X = S^1$. Neka je za svako $s \in S$ funkcija $\rho_s \in \mathcal{T}_X$ definisana sa $(x)\rho_s = sx$. Tada se lako pokazuje da je preslikavanje $\alpha : S \to \mathcal{T}_X$ dato sa $(s)\alpha = \rho_s$ monomorfizam polugrupa (monoida). $\square$

3.1 Grinova teorija za $\mathcal{T}_X$

U nastavku ćemo videti oblik idempotenata, Grinovih relacija i ideala u slučaju polugrupe $\mathcal{T}_n$.

Odmah ćemo uočiti da idempotenti imaju vrlo lepu karakterizaciju, koja se i u grafovskom prikazu transformacije (bipartitan graf sa dve istovetne klase $\{1, \dots, n\}$ – domenom i kodomenom, gde grana povezuje original i njegovu sliku) jasno uočava.

Lema 3.1. *Neka je $X \neq \emptyset$. Element $\varepsilon \in \mathcal{T}_X$ je idempotentan ako i samo ako važi*

$$\varepsilon\restriction_{\mathrm{Im}(\varepsilon)} = id_{\mathrm{Im}(\varepsilon)}.$$

Dokaz. Dokaz se zasniva na sledećem nizu zapažanja:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \in E(\mathcal{T}_X) &\Leftrightarrow \varepsilon^2 = \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X \ \left((x)\varepsilon^2 = (x)\varepsilon\right) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X \ \left(((x)\varepsilon)\varepsilon = (x)\varepsilon\right) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}(\varepsilon) \ \left((y)\varepsilon = y\right) \\
&\Leftrightarrow \varepsilon\restriction_{\mathrm{Im}(\varepsilon)} = id_{\mathrm{Im}(\varepsilon)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Nadalje ćemo podrazumevati da je $X \neq \emptyset$.

Sada se okrenimo Grinovim relacijama $\mathcal{R}$ i $\mathcal{L}$ nad $\mathcal{T}_X$. Sledeće tvrđenje će nam dati podlogu za određivanje prve od njih dve.

Lema 3.2. *Za funkcije $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$ važi*

$$\alpha\mathcal{T}_X \subseteq \beta\mathcal{T}_X \Leftrightarrow \ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha).$$

[1] Arthur Cayley (1821–1895)

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\alpha\mathcal{T}_X \subseteq \beta\mathcal{T}_X$. To znači da postoji $\gamma \in \mathcal{T}_X$ takva da je $\alpha = \beta\gamma$. Neka važi $(x, y) \in \ker(\beta)$. Tada je

$$(x)\alpha = (x)(\beta\gamma) = ((x)\beta)\gamma = ((y)\beta)\gamma = (y)(\beta\gamma) = (y)\alpha,$$

pa je i $(x, y) \in \ker(\alpha)$.

($\Leftarrow$) Neka je $\ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$. Pronaći ćemo $\gamma \in \mathcal{T}_X$ takvo da je $\beta\gamma = \alpha$ (odakle će da sledi $\alpha\mathcal{T}_X \subseteq \beta\mathcal{T}_X$). Znamo da je za svako $z \in \mathrm{Im}(\beta)$ skup $[z]\beta^{-1} = \{x \in X : (x)\beta = z\}$ neprazan, pa možemo za svako takvo z izabrati i fiksirati predstavnika x_z klase $[z]\beta^{-1}$ (ako je X beskonačan, koristimo AC). Sada definišimo $\gamma : X \to X$ sa

$$(z)\gamma = \begin{cases} (x_z)\alpha, & z \in \mathrm{Im}(\beta); \\ z, & z \notin \mathrm{Im}(\beta). \end{cases}$$

Pošto smo fiksirali transverzalu $\{x_z : z \in \mathrm{Im}(\beta)\}$ particije relacije $\ker(\beta)$, funkcija γ je dobro definisana, a iz njene definicije sledi da važi $\beta\gamma = \alpha$. □

Posledica 3.1. *Važi* $\alpha \,\mathcal{R}\, \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

Dokaz. Iz prethodne leme sledi

$$\begin{aligned} \alpha \,\mathcal{R}\, \beta &\Leftrightarrow \alpha\mathcal{T}_X = \beta\mathcal{T}_X \\ &\Leftrightarrow \alpha\mathcal{T}_X \subseteq \beta\mathcal{T}_X \wedge \beta\mathcal{T}_X \subseteq \alpha\mathcal{T}_X \\ &\Leftrightarrow \ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha) \wedge \ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta) \\ &\Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta). \end{aligned}$$ □

U nekom smislu simetrično lemi 3.2, važi:

Lema 3.3. *Za transformacije* $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$ *važi*

$$\mathcal{T}_X\alpha \subseteq \mathcal{T}_X\beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta).$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{T}_X\alpha \subseteq \mathcal{T}_X\beta$. Tada postoji $\gamma \in \mathcal{T}_X$ koja zadovoljava $\alpha = \gamma\beta$. Neka $y \in \mathrm{Im}(\alpha)$. To znači da postoji $x \in X$ takvo da je $y = (x)\alpha = (x)(\gamma\beta) = ((x)\gamma)\beta$, pa važi i $y \in \mathrm{Im}(\beta)$.

($\Leftarrow$) Neka je $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta)$. Opet tražimo funkciju $\gamma \in \mathcal{T}_X$ za koju važi $\alpha = \gamma\beta$. Za svako $z \in \mathrm{Im}(\beta)$ pronađimo i fiksirajmo, slično kao u dokazu prethodne leme, y_z takvo da je $(y_z)\beta = z$ (drugim rečima, fiksiramo transverzalu particije relacije $\ker(\beta)$). Sada uzmimo da je $\gamma : X \to X$ definisana sa $(x)\gamma = y_{(x)\alpha}$. Tada je jasno da je $(x)\gamma\beta = (y_{(x)\alpha})\beta = (x)\alpha$ za svako $x \in X$. □

Posledica 3.2. *Važi* $\alpha \,\mathcal{L}\, \beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta)$.

Posledica 3.3. *Važi* $\alpha \,\mathcal{H}\, \beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta) \wedge \ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

Primetimo da je $\mathcal{S}_X$ u stvari $\mathcal{H}$-klasa polugrupe $\mathcal{T}_X$ (jer isključivo za funkcije $\alpha \in \mathcal{S}_X$ važi $\mathrm{Im}(\alpha) = X$ i $\ker(\alpha) = \{(x,x) : x \in X\}$). Pri tome, to je klasa u kojoj se nalazi identička funkcija, te je $\mathcal{S}_X = H_{\mathrm{id}_X}$.

Proučimo sada relaciju $\mathcal{D}$ nad $\mathcal{T}_X$. Za to će nam koristiti sledeća definicija:

Definicija 3.2. Neka je $\alpha \in \mathcal{T}_X$. Tada je rang preslikavanja α

$$\rho(\alpha) = |\mathrm{Im}(\alpha)|.$$

Lema 3.4. *Za* $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$ *važi* $\quad \alpha \, \mathcal{D} \, \beta \Leftrightarrow \rho(\alpha) = \rho(\beta)$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\alpha \, \mathcal{D} \, \beta$. To znači da je $\alpha(\mathcal{R} \vee \mathcal{L})\beta$, pa postoje $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_1, \ldots, \gamma_l \in \mathcal{T}_n$ takvi da je

$$\gamma_0 = \alpha \, \mathcal{R} \, \gamma_1 \, \mathcal{L} \, \gamma_2 \, \mathcal{R} \cdots \mathcal{R} \, \gamma_l \, \mathcal{L} \, \beta = \gamma_{l+1}$$

(ili $\alpha \, \mathcal{R} \, \gamma_1 \, \mathcal{L} \cdots \mathcal{L} \, \gamma_l \, \mathcal{R} \, \beta$, ali to ne utiče na dalju diskusiju), a tada za svaki par γ_j, γ_{j+1} $(j = 0, \ldots, l)$ imamo $\rho(\gamma_j) = \rho(\gamma_{j+1})$, tj.

$$|\mathrm{Im}(\gamma_j)| = |\mathrm{Im}(\gamma_{j+1})|.$$

U slučaju $\gamma_j \, \mathcal{L} \, \gamma_{j+1}$ to je jasno iz posledice 3.2, dok se za $\gamma_j \, \mathcal{R} \, \gamma_{j+1}$ dobija iz

$$|\mathrm{Im}(\gamma_j)| = |X/\ker(\gamma_j)| = |X/\ker(\gamma_{j+1})| = |\mathrm{Im}(\gamma_{j+1})|$$

(što sledi iz osobina homomorfizma i posledice 3.2).

Iz postojanja niza transformacija sa takvim osobinama dobijamo da je $|\mathrm{Im}(\alpha)| = |\mathrm{Im}(\beta)|$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $|\mathrm{Im}(\alpha)| = |\mathrm{Im}(\beta)|$. Odatle znamo da postoji bijekcija $\varphi : \mathrm{Im}(\alpha) \to \mathrm{Im}(\beta)$. Neka je $\gamma \in \mathcal{T}_X$ definisana sa $(x)\gamma = ((x)\alpha)\varphi$. Tada je

$$\begin{aligned}(x)\gamma = (y)\gamma &\Leftrightarrow ((x)\alpha)\varphi = ((y)\alpha)\varphi \\ &\Leftrightarrow (x)\alpha = (y)\alpha \qquad \text{(jer je } \varphi \text{ bijekcija)},\end{aligned}$$

pa je zato $\ker(\gamma) = \ker(\alpha)$, odakle sledi $\gamma \, \mathcal{R} \, \alpha$. Pored toga, pošto je $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\beta)$, a $\gamma = \alpha\varphi$, važi $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\beta)$, te je $\gamma \, \mathcal{L} \, \beta$. Imamo

$$\alpha \, \mathcal{R} \, \gamma \, \mathcal{L} \, \beta,$$

pa je $\alpha \, \mathcal{D} \, \beta$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Ako se sada okrenemo relaciji $\mathcal{J}$, za njeno izučavanje će nam trebati još jedan nov pojam.

Definicija 3.3. Za svako $\kappa \leq |X|$ skup I_κ je dat sa

$$I_\kappa = \{\alpha \in \mathcal{T}_X : \rho(\alpha) \leq k\}.$$

Glavnu osobinu I_κ dobijamo kao posledicu sledeće leme:

Lema 3.5. *Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$ važi*

$$\rho(\alpha\beta) \leq \rho(\beta) \quad i \quad \rho(\alpha\beta) \leq \rho(\alpha),$$

Dokaz. Prva nejednakost sledi iz $\mathrm{Im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{Im}(\beta)$, dok je druga nejednakost posledica činjenice da kardinalnost slike ne može biti veća od kardinalnosti originala:

$$\Big|[[X]\alpha]\beta\Big| = \Big|\{((x)\alpha)\beta \ : \ x \in X\}\Big| \leq \Big|\{(x)\alpha \ : \ x \in X\}\Big| = \Big|[X]\alpha\Big|. \qquad \square$$

Posledica 3.4. *Za svako $\kappa \leq |X|$ je I_κ ideal polugrupe $\mathcal{T}_X$.*

Važi i više od toga, naime:

Lema 3.6. *Svaki ideal J polugrupe $\mathcal{T}_X$ je oblika I_κ, pri čemu je*

$$\kappa = \sup\{\rho_\alpha : \alpha \in J\}.$$

Dokaz. Neka je J ideal $\mathcal{T}_X$ i $\kappa = \sup\{\rho_\alpha : \alpha \in J\}$. Pokazaćemo da je $J = I_\kappa$. Pošto je κ supremum rangova, sledi da u J nema funkcija većeg ranga, tj. da je $J \subseteq I_\kappa$. Treba da pokažemo da su sve funkcije manjeg ili jednakog ranga unutra. Neka je $\beta \in \mathcal{T}_X$ takva da je $\rho(\beta) \leq \kappa$. Tada postoji funkcija $\alpha \in J$ takva da je $\rho(\beta) \leq \rho(\alpha)(\leq \kappa)$. Zbog te osobine znamo da postoji sirjekcija $\varphi : \mathrm{Im}(\alpha) \to \mathrm{Im}(\beta)$. Tu sirjekciju proširujemo do $\varphi^* : X \to X$ na sledeći način: izaberimo proizvoljno $y \in \mathrm{Im}(\beta)$ i fiksirajmo ga; definišimo

$$(x)\varphi^* = \begin{cases} (x)\varphi, & x \in \mathrm{Im}(\alpha); \\ y, & x \notin \mathrm{Im}(\alpha). \end{cases}$$

Sada je jasno da važi $\mathrm{Im}(\alpha\varphi^*) = \mathrm{Im}(\beta)$, pa je $\beta \, \mathcal{L} (\alpha\varphi^*)$, te iz osobina levih ideala sledi da postoji $\gamma \in \mathcal{T}_n$ tako da je $\gamma\alpha\varphi^* = \beta$, odakle je

$$\beta \in \mathcal{T}_X \alpha \mathcal{T}_X = J_\alpha \subseteq J$$

(jer je J_α najmanji ideal koji sadrži elemenat α). Zato je $I_\kappa \subseteq J$. Iz ove i ranije dobijene nejednakosti zaključujemo da je $I_\kappa = J$. $\square$

Posledica 3.5. *U $\mathcal{T}_X$ važi* $\alpha \, \mathcal{J} \, \beta \Leftrightarrow \alpha \, \mathcal{D} \, \beta \Leftrightarrow \rho(\alpha) = \rho(\beta)$.

Dokaz. Druga ekvivalencija je dokazana još u lemi 3.4. Pošto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ važi uvek, treba pokazati $\supseteq$. Neka je $\alpha \, \mathcal{J} \, \beta$. Tada važi $J_\alpha = J_\beta$, dok je prema prethodnoj lemi $J_\alpha = \mathcal{T}_X \alpha \mathcal{T}_X = I_{\rho(\alpha)}$ i $J_\beta = \mathcal{T}_X \beta \mathcal{T}_X = I_{\rho(\beta)}$ (funkcije većih rangova ne mogu biti generisane, što sledi iz leme 3.5). Odatle je $\rho(\alpha) = \rho(\beta)$, pa iz leme 3.4 sledi $\alpha \, \mathcal{D} \, \beta$. $\square$

3.2 Rang i idempotenti polugrupe $\mathcal{T}_n$

U nastavku ćemo se ograničiti na slučaj kada je $|X| < \aleph_0$. Zato pretpostavimo da posmatramo polugrupu $\mathcal{T}_n$ i uvedimo oznaku $N = \{1, \ldots, n\}$.

Definicija 3.4. Neka za svako $k = 1, \ldots, n$ skup D_k označava $\mathcal{D}$-klasu polugrupe $\mathcal{T}_n$ koja se sastoji od svih transformacija ranga k.

Prema ranije pokazanom, važi $D_k = I_k \setminus I_{k-1}$. Pošto su $\mathcal{D}$-klase istovremeno i $\mathcal{J}$-klase, zaključujemo da su D_k^0 glavni faktori polugrupe $\mathcal{T}_n$. Primetimo i da u njoj važi $D_n = \mathcal{S}_n$. Uvedimo sada

Definicija 3.5. *Singularni ideal* polugrupe $\mathcal{T}_n$, u oznaci Sing_n je skup koji sadrži sve njene elemente koji nisu bijekcije ($\mathrm{Sing}_n = \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n$).

Iz ranijih lema je jasno da je u pitanju ideal i da je $\mathrm{Sing}_n = I_{n-1}$. Ovom konstatacijom smo dovršili pripremu za naredni niz lema koji će nas, korak po korak, dovesti prvo do teoreme o rangu $\mathcal{T}_n$, a onda i do rangova njene idempotentno generisane potpolugrupe, za koju će se ispostaviti da je upravo Sing_n.

Lema 3.7. *U polugrupi $\mathcal{T}_n$ skup D_k generiše I_k za svako $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po k. Neka je n fiksirano, veće od 1 (za $n = 1$ je jasno da tvrđenje važi).

Baza indukcije je slučaj $k = 1$. Pošto je $I_1 = D_1$, tvrđenje trivijalno važi.

Pretpostavimo da je $I_k \subseteq \langle D_k \rangle$ (pri čemu je $1 < k < n-1$) i dokažimo da isto važi i za $k+1$. Imamo da D_k generiše I_k. Ako bismo dokazali da D_{k+1} generiše D_k, imali bismo da je $I_{k+1} = D_{k+1} \cup I_k$ generisan sa D_{k+1}. Neka je $\alpha \in D_k$. To znači da je $\rho(\alpha) = k$. Tada zbog $k < n-1$ postoje $a, b \in X$ tako da je $|[a]_{\ker(\alpha)}| > 1$ i $b \notin \mathrm{Im}(\alpha)$. Definišimo funkciju $\beta \in \mathcal{T}_n$ tako da je za $x \in X$

$$(x)\beta = \begin{cases} (x)\alpha, & x \neq a; \\ b, & x = a. \end{cases}$$

Tada se α i β razlikuju samo u slici elementa a i jasno $\mathrm{Im}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha) \cup \{b\}$, te je $\beta \in D_{n+1}$. Definišimo još jednu funkciju, $\gamma \in \mathcal{T}_n$, tako da je za svako $x \in X$

$$(x)\gamma = \begin{cases} x, & x \in \mathrm{Im}(\alpha); \\ (a)\alpha, & x = b; \\ b, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primetimo da je $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\alpha) \cup \{b\}$ (jer zbog $k < n-1$ postoje elementi koji spadaju u slučaj "inače"), te je i $\gamma \in D_{k+1}$. Sada je

$$(x)\beta\gamma = \begin{cases} ((x)\alpha)\gamma, & x \neq a; \\ (b)\gamma, & x = a. \end{cases} = \begin{cases} (x)\alpha & x \neq a; \\ (a)\alpha, & x = a. \end{cases}$$

Odatle sledi da je $\gamma\beta = \alpha$, tj. $\alpha \in \langle D_{k+1} \rangle$ i time $D_k \subseteq \langle D_{k+1} \rangle$, pa je zbog ranije diskusije indukcijski korak dokazan. $\square$

Pošto smo utvrdili odnose generisanosti D_{k-1} i D_k za $k \leq n-1$, ostaje pitanje kako generisati D_{n-1}. Na to nam odgovor daje sledeća lema.

Lema 3.8. *Neka je $n \geq 2$ i $\alpha \in D_{n-1} \subseteq \mathcal{T}_n$. Tada je $\mathcal{S}_n \alpha \mathcal{S}_n = D_{n-1}$.*

Dokaz. Jasno, kompozicijom transformacije ranga k sa bijekcijom se dobija opet transformacija ranga k, pa stoga važi $\subseteq$. Dokažimo drugu inkluziju. Podsetimo se oznake $N = \{1, \ldots, n\}$. Neka su ispunjeni uslovi leme i neka je $\beta \in D_{n-1}$. Tada je $\rho(\alpha) = \rho(\beta) = n-1$, pa jezgra transformacija α i β imaju particije sa po $n-2$ jednočlana i po jednim dvočlanim skupom. Neka su to $\{\{i_1\}, \ldots, \{i_{n-2}\}, \{i_{n-1}, i_n\}\}$ i $\{\{j_1\}, \ldots, \{j_{n-2}\}, \{j_{n-1}, j_n\}\}$, redom (primetimo, to znači da su $\alpha\restriction_{N \setminus \{i_{n-1}, i_n\}}$ i $\beta\restriction_{N \setminus \{j_{n-1}, j_n\}}$ bijekcije). Definišimo funkciju $\delta' : \mathrm{Im}(\alpha) \to \mathrm{Im}(\beta)$ sa

$$((i_k)\alpha)\delta' = (j_k)\beta$$

za $k = 1, \ldots, n$. Jasno, preslikavanje jeste dobro definisano i jeste bijekcija (i_{n-1} i i_n su u istoj klasi $\ker(\alpha)$, te $(j_{n-1})\beta = (j_n)\beta$ ne pravi problem). No, tada imamo $|N \setminus \mathrm{Im}(\alpha)| = |N \setminus \mathrm{Im}(\beta)| = 1$. Neka su $a, b \in N$ takvi da je $\{a\} = N \setminus \mathrm{Im}(\alpha)$ i $\{b\} = N \setminus \mathrm{Im}(\beta)$. Posmatrajmo ekstenziju $\delta : N \to N$ fukcije δ' datu sa

$$(x)\delta = \begin{cases} (x)\delta', & x \in \mathrm{Im}(\alpha); \\ b, & x = a. \end{cases}$$

Sada je jasno da $\delta \in \mathcal{S}_n$ i $\mathrm{Im}(\alpha\delta) = \mathrm{Im}(\beta)$, kao i da je $|[x]_{\ker(\beta)}| = |[x]_{\ker(\alpha\delta)}|$ za svako $x \in X$. Definišimo $\gamma \in \mathcal{T}_n$ sa $(j_l)\gamma = i_l$, za $1 \leq l \leq n$. Jasno, u pitanju je bijekcija. Sada je za svako l, prema definiciji funkcije δ':

$$(j_l)\gamma\alpha\delta = (i_l)\alpha\delta = (i_l)\alpha\delta' = (j_l)\beta,$$

odakle zaključujemo da je $\beta = \gamma\alpha\delta$, gde su $\gamma, \delta \in \mathcal{S}_n$. $\square$

Posledica 3.6. *Za $n \geq 2$ i proizvoljno $\alpha \in D_{n-1}$ važi $\langle \{\alpha\} \cup \mathcal{S}_n \rangle = \mathcal{T}_n$.*

Dokaz. Iz leme 3.7 sledi $\langle D_{n-1} \rangle = I_{n-1}$, a iz leme 3.8 je $\mathcal{S}_n \alpha \mathcal{S}_n = D_{n-1}$, pa imamo da $\langle \{\alpha\} \cup S_n \rangle = \mathcal{T}_n$. $\square$

Sada se već uviđa ideja za računanje ranga: za generisanje $\mathcal{T}_n$ nam je potrebna samo jedna transformacija iz D_{n-1} i grupa $\mathcal{S}_n$. Iz teorije grupa imamo rezultat:

Lema 3.9. *Rang $\mathcal{S}_n$ za $n \geq 3$ je 2, dok je* $\mathrm{rank}(\mathcal{S}_1) = \mathrm{rank}(S_2) = 1$.

Naravno, rang $\mathcal{S}_n$ posmatrane kao polugrupe se ne razlikuje od njenog ranga kada je posmatramo kao grupu, jer svaki generator samostalno generiše i jedinicu i svoj inverz (zbog konačnog reda svakog elementa).

Iz prethodnih lema sledi značajan rezultat koji je prvi uočio Vorobjev u radu [32].

Teorema 3.2. *Za $n \geq 3$ je* $\mathrm{rank}(\mathcal{T}_n) = 3$, *a* $\mathrm{rank}(\mathcal{T}_2) = 2$ *i* $\mathrm{rank}(\mathcal{T}_1) = 1$.

Dokaz. Za slučaj $n = 1$ rezultat sledi trivijalno iz $\mathcal{T}_1 = \mathcal{S}_1$, dok za $n = 2$ i $n \geq 3$ sledi iz naredne diskusije. Neka je A baza $\mathcal{T}_n$. Iz posledice 3.6 i leme 3.9 sledi da je $|A| \leq 3$ ($|A| \leq 2$ u slučaju $n = 2$). Pokažimo i drugu nejednakost. Znamo da generator ranga manjeg od n ne može da učestvuje u generisanju elementa većeg ranga, te mora važiti $\mathcal{S}_n = \langle A \cap \mathcal{S}_n \rangle$, odakle je

$$|A \cap \mathcal{S}_n| \geq 2 \tag{3.1}$$

($|A \cap \mathcal{S}_n| \geq 1$ u slučaju $n = 2$). Pošto je $\mathcal{S}_n$ zatvoren, mora biti ispunjeno i $A \setminus \mathcal{S}_n \neq \emptyset$, što nam uz (3.1) daje $|A| \geq 3$ (odnosno $|A| \geq 2$), odakle, uz prethodno dokazano, sledi $|A| = 3$ (i $|A| = 2$ za $n = 2$). $\square$

Kao što smo i najavili, sada na red dolazi proučavanje idempotentno generisane potpolugrupe u $\mathcal{T}_n$. Sledeća teorema će nam pomoći u njenoj karakterizaciji.

Lema 3.10. *Za svako $k = 1, \ldots, n-1$ ideal I_k polugrupe $\mathcal{T}_n$ ($n \geq 2$) je idempotentno generisan.*

Dokaz. Prema lemi 3.7 je dovoljno pokazati da je svaki D_k ($k = 1, \ldots, n-1$) idempotentno generisan u $\mathcal{T}_n$. U slučaju $k = 1$ tvrđenje trivijalno važi, jer su svi članovi D_1 idempotenti. Stoga posmatrajmo $k \geq 2$. Neka je $\alpha \in D_k$ proizvoljno.

Odaberimo proizvoljnu transverzalu $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ klasa ekvivalencije relacije $\ker(\alpha)$. Neka je transformacija $e_0 \in D_k$ definisana sa $(x)e_0 = a_i$, gde je $a_i \ker(\alpha) x$. Jasno, e_0 je dobro definisana, i idempotentna na osnovu kriterijuma iz leme 3.1. Pošto je

$$|\mathrm{Im}(\alpha) \setminus \mathrm{Im}(e_0)| = |\mathrm{Im}(e_0) \setminus \mathrm{Im}(\alpha)| = k - |\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(e_0)|,$$

postoji bijekcija $\phi : (\mathrm{Im}(e_0) \setminus \mathrm{Im}(\alpha)) \to (\mathrm{Im}(\alpha) \setminus \mathrm{Im}(e_0))$. Neka je a proizvoljan element iz $\mathrm{Im}(\alpha)$. Definišimo transformaciju $e_1 \in \mathcal{T}_n$ sa

$$(x)e_1 = \begin{cases} (x)\phi, & x \in \mathrm{Im}(e_0) \setminus \mathrm{Im}(\alpha); \\ x, & x \in \mathrm{Im}(\alpha) \setminus \mathrm{Im}(e_0); \\ x, & x \in \mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(e_0); \\ a, & \text{inače.} \end{cases}$$

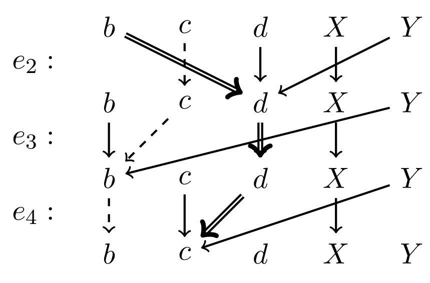
Sada je $|\mathrm{Im}(e_1)| = |(\mathrm{Im}(\alpha) \setminus \mathrm{Im}(e_0)) \cup (\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(e_0))| = |\mathrm{Im}(\alpha)| = k$, pa je $e_1 \in D_k$, a iz definicije se vidi i da je u pitanju idempotent. Primetimo da je $\mathrm{Im}(e_0 e_1) = \mathrm{Im}(\alpha)$ i $\ker(e_0 e_1) = \ker(\alpha)$.

Sada je jedino potrebno idempotentima skupa D_k generisati funkciju iz D_k, čija će restrikcija na $\mathrm{Im}(\alpha)$ biti odgovarajuća permutacija elemenata iz $\mathrm{Im}(\alpha)$ (koja slika $(x)e_0e_1$ u $(x)\alpha$ za svako $x \in \{1, \dots, n\}$). Znamo da se svaka permutacija konačnog skupa može generisati konačnim brojem njegovih transpozicija. Znači, ako za proizvoljnu transpoziciju skupa $\mathrm{Im}(\alpha)$ uspemo idempotentima skupa D_k da generišemo transformaciju iz D_k čija će restrikcija na $\mathrm{Im}(\alpha)$ biti odabrana transpozicija, rešili smo problem. Neka su $b, c \in \mathrm{Im}(\alpha)$ $(b \neq c)$ i $d \in N \setminus \mathrm{Im}(\alpha)$ (takvi elementi postoje, jer je $1 < k < n$); generišimo transformaciju koja zamenjuje pozicije elemenata b i c, ostale elemente $\mathrm{Im}(\alpha)$ fiksira, a sve preostale slika u c. Posmatrajmo funkcije $e_2, e_3, e_4 \in \mathcal{T}_n$ date sa

$$(x)e_2 = \begin{cases} x, & x \in \mathrm{Im}(\alpha) \setminus \{b, c\}; \\ c, & x = c; \\ d, & \text{inače.} \end{cases} \qquad (x)e_3 = \begin{cases} x, & x \in \mathrm{Im}(\alpha) \setminus \{b, c\}; \\ d, & x = d; \\ b, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$(x)e_4 = \begin{cases} x, & x \in \mathrm{Im}(\alpha) \setminus \{b, c\}; \\ b, & x = b; \\ c, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada kompozicija $e_2e_3e_4$ preslikava elemente na način prikazan na slici 3.1 (gde je $X = \mathrm{Im}(\alpha) \setminus \{b, c\}$, a $Y = \{1, 2, \dots, n\} \setminus (\mathrm{Im}(\alpha) \cup \{d\})$)



Slika 3.1: Preslikavanje $e_2e_3e_4$

Prema definiciji je jasno da su e_2, e_3 i e_4 idempotenti, kao i da $e_2e_3e_4$

ispunjava uslove koje smo zahtevali (putanje slikanja elemenata b i c su označene duplim, odnosno isprekidanim linijama radi lakše uočljivosti). Pored toga, imamo

$$|\operatorname{Im}(e_2)| = |\operatorname{Im}(e_3)| = |\operatorname{Im}(e_4)| = |X| + 2 = k,$$

te sve tri transformacije pripadaju D_k. Dakle, generisali smo idempotentima proizvoljno izabranu transpoziciju $\operatorname{Im}(\alpha)$, pa je na osnovu prethodne diskusije tvrđenje dokazano. $\square$

Naredna teorema sledi kao posledica prethodne leme, ali je u pitanju značajan rezultat iz rada [22] iz 1966. godine.

Teorema 3.3. $F(\mathcal{T}_n) = \langle E(\mathcal{T}_n)\rangle = \operatorname{Sing}_n \cup \{\mathrm{id}_N\}$.

Za izlaganje sledećeg tvrđenja vezanog za $F(\mathcal{T}_n)$ nam treba jedan kombinatorni pojam.

Definicija 3.6. *Stirlingov broj druge vrste*, $\mathrm{S}(n,k)$, označava broj particija n-članog skupa na k klasa.

Rekurzivna formula za Stirlingov broj druge vrste je data sa:

$$\mathrm{S}(n+1,k) = k\,\mathrm{S}(n,k) + \mathrm{S}(n,k-1), \qquad \mathrm{S}(1,0) = 0, \qquad \mathrm{S}(1,1) = 1. \tag{3.2}$$

Daćemo i objašnjenje za ovu formulu. Konstruišimo proizvoljnu particiju I sa k klasa skupa X, gde je $|X| = n+1$. Neka je $a \in X$ proizvoljno odabran; imamo dve mogućnosti:

(1) $\{a\} \in I$, tj. klasa elementa a će biti jednoelementna;
(2) $|[a]_I| > 1$, što znači da će klasa elementa a imati više od jednog elementa.

U prvom slučaju preostale klase možemo odabrati na $\mathrm{S}(n,k-1)$ načina (jer je preostalo n elemenata koje želimo da smestimo u $k-1$ klasa), dok u drugom slučaju imamo $\mathrm{S}(n,k)$ načina da generišemo naših k klasa (bez elementa a), a onda bilo kojoj od tih k klasa možemo pridružiti posmatrani element a.

Za Stirlingov broj druge vrste važi i sledeće pravilo koje će nam biti potrebno:

Lema 3.11. *Za svako $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ za koje je $n \geq k$ i $n \neq 1$, $k \neq 1$ važi*

$$\mathrm{S}(n,k) \geq \binom{n}{k}.$$

Dokaz. Prvo dokažimo indukcijom po n da je $\mathrm{S}(n,2) \geq \binom{n}{2}$, koristeći formulu (3.2). Ovo moramo odvojeno da pokazujemo, jer je $\mathrm{S}(n,1) = 1 < n = \binom{n}{1}$, pa ne možemo koristiti iste argumente kao za slučaj $k \geq 3$. Za $n = 2$ je

$\mathrm{S}(2,2) = 1 = \binom{2}{2}$, pa baza indukcije važi. Pretpostavimo da je za neko n zadovoljeno $\mathrm{S}(n,2) \geq \binom{n}{2}$ i dokažimo da je $\mathrm{S}(n+1,2) \geq \binom{n+1}{2}$. Uz pomoć indukcijske hipoteze možemo zaključiti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(n+1,2) =& 2\,\mathrm{S}(n,2) + \mathrm{S}(n,2-1) = 2\,\mathrm{S}(n,2) + 1 \\
\geq& 2\binom{n}{2} + 1 = 2\frac{n(n-1)}{2} + 1 = n^2 - n + 1 \\
\geq& \frac{n^2+n}{2} = \binom{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Poslednja nejednakost sledi iz

$$n^2 - n + 1 \geq \frac{n^2+n}{2} \;\Leftrightarrow\; n^2 - 3n + 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; n \leq 1 \lor n \geq 2,$$

i zadovoljena je jer posmatramo samo $n \geq 2$.

Sada ćemo takođe indukcijom po n, koristeći formulu (3.2) dokazati da za svako $2 \leq k \leq n$ važi $\mathrm{S}(n,k) \geq \binom{n}{k}$. Baza indukcije je $n = 2$, ali je tada jedina mogućnost $k = 2$, a taj slučaj je dokazan u prethodnoj diskusiji. Neka za sve $m \leq n$ i sve $2 \leq k \leq m$ važi $\mathrm{S}(m,k) \geq \binom{m}{k}$. Pri tome, ne zaboravimo da je za sve $n \geq 2$ jednakost dokazana u slučaju $k = 2$. Dokažimo da je za $3 \leq k \leq n+1$:

$$\mathrm{S}(n+1,k) \geq \binom{n+1}{k}.$$

Iz formule (3.2) i indukcijske hipoteze imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(n+1,k) =& k\,\mathrm{S}(n,k) + \mathrm{S}(n,k-1) \\
\geq& k\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(1 + \frac{1}{n-k+1}) \\
=& \frac{n!(n-k+2)}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \cdot \frac{k(n-k+2)}{n+1} \\
=& \binom{n+1}{k} \cdot \frac{k(n-k+2)}{n+1}
\end{aligned}$$

Ostaje još da proučimo da li je faktor $\frac{k(n-k+2)}{n+1}$ veći ili manji od 1. Imamo

$$\frac{k(n-k+2)}{n+1} > 1 \Leftrightarrow -k^2 + k(n+2) - (n+1) > 0 \Leftrightarrow 1 < k < n+1,$$

što je zadovoljeno izborom k. Zato je $\mathrm{S}(n+1,k) \geq \binom{n+1}{k}$, pa je i indukcijski korak pokazan. □

Najzad, imamo sve stavke potrebne za dokaz teoreme koja daje rangove i I_k, a time i Sing_n (za Sing_n je rezultat pokazan u [10], a za I_k, $k < n-1$ u [27]).

Teorema 3.4. *U $\mathcal{T}_n$ $(n \geq 3)$ za $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ važi*

$$\mathrm{rank}(I_k) = \mathrm{S}(n, k).$$

Dokaz. Neka je $n \geq 3$ i $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Prvo, primetimo da iz leme 3.7 zbog leme 3.5 sledi da u $\mathcal{T}_n$ važi

$$\mathrm{rank}(D_k) = \mathrm{rank}(I_k). \tag{3.3}$$

Pri tome, na početku ovog poglavlja smo utvrdili da je D_k^0 glavni faktor polugrupe $\mathcal{T}_n$. Iz diskusije sa kraja poglavlja 1.6 sledi da je u pitanju ili nula-polugrupa ili 0-prosta polugrupa. Pošto sadrži idempotent, prvi slučaj otpada, a pošto je konačna, prema Risovoj teoremi sledi da je izomorfna nekoj pravilnoj RMP. Prema lemi 3.10 je ona idempotentno generisana (jer se ta osobina prenosi izomorfizmom), te je prema posledici 2.7

$$\mathrm{rank}(D_k^0) = \max\{|I_{D_k}|, |\Lambda_{D_k}|\}. \tag{3.4}$$

Sada, zbog ranije datih karakterizacija $\mathcal{R}$ i $\mathcal{L}$-klasa u polugrupi $\mathcal{T}_n$, znamo da fiksiranu $\mathcal{R}$-klasu i čine sve transformacije sa istim jezgrom ς_i (koje je u potpunosti određeno svojom particijom π_i skupa $\{1, \ldots, n\}$), a fiksiranu $\mathcal{L}$-klasu λ čine sve transformacije sa istom slikom $S_\lambda \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Pošto posmatramo D_k, jasno je da su u njoj tačno one $\mathcal{R}$-klase i za koje važi $|\pi_i| = k$, i tačno one $\mathcal{L}$-klase λ za koje je $|S_\lambda| = k$. Najzad, sledi da je

$$|I_{D_K}| = \mathrm{S}(n, k), \qquad |\Lambda_{D_k}| = C_k^n = \binom{n}{k}.$$

Iz (3.4) i leme 3.11 imamo da je

$$\mathrm{rank}(D_k^0) = \max\left\{ \mathrm{S}(n, k), \binom{n}{k} \right\} = \mathrm{S}(n, k).$$

Naravno, pošto je generisanost nule podrazumevana, važi

$$\mathrm{rank}(D_k^0) = \mathrm{rank}(D_k).$$

Sada iz prethodnog zaključka i iz (3.3) sledi

$$\mathrm{rank}(I_k) = \mathrm{S}(n, k). \qquad \square \tag{3.5}$$

Kao njena posledica se dobija značajna teorema iz rada [10] (deo je dokazan u [24]):

Teorema 3.5. *Za* $n \geq 3$ *je* $\operatorname{rank}(\mathrm{Sing}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Dokaz. Iz definicije singularnog ideala Sing_n i prethodne teoreme sledi

$$\operatorname{rank}(\mathrm{Sing}_n) = \operatorname{rank}(I_{n-1}) = \mathrm{S}(n, n-1).$$

Dokažimo indukcijom po n da je $\mathrm{S}(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Za $n = 2$ je $\mathrm{S}(2, 1) = 1 = \frac{2 \cdot 1}{2}$, pa baza indukcije važi. Pretpostavimo da je za neko n zadovoljeno $\mathrm{S}(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ i dokažimo da je $\mathrm{S}(n+1, n) = \frac{(n+1)n}{2}$. Uz pomoć indukcijske hipoteze i formule (3.2) možemo zaključiti:

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(n+1, n) &= n\,\mathrm{S}(n, n) + \mathrm{S}(n, n-1) \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2}. \end{aligned}$$ □

3.3 Idempotentno generisane kompletno 0-proste polugrupe

U prethodnom poglavlju smo pokazali da su ideali polugrupe $\mathcal{T}_n$ idempotentno generisani, pa imaju definisan i idempotentni rang. Međutim, da bismo pronašli te rangove, trebaće nam ipak i dodatno istraživanje, koje ćemo sada sprovesti. Od ranije znamo da su za $1 \leq k \leq n-1$ ideali I_k u $\mathcal{T}_n$ pravilne Risove matrične polugrupe, te je za naš cilj bitno posebno razmotriti idempotentno generisane pravilne RMP. Za početak, podsetimo se, u diskusiji na kraju druge glave smo zaključili da je svaka idempotentno generisana RMP pravilna i povezana.

Sledeća dva poglavlja se oslanjaju na sadržaj rada [16], te je to i glavna referenca za sve navedene rezultate i dokaze.

Izložimo (radi utvrđivanja notacije i terminologije) samo nekoliko dodatnih pojmova iz teorije grafova koji će nam biti potrebni u ovom delu rada. *Susedi* čvora $v \in V$ u grafu $\Gamma = (V, E)$ su svi čvorovi u za koje postoji grana $\{uv\} = e \in E$ i njihov skup se označava sa $N_\Gamma(v)$ ili sa $N(v)$ kada je jasno o kom grafu se radi (za skup $W \subseteq V$ *skup suseda* je $N_\Gamma(W) = \bigcup_{v \in W}(N_\Gamma(v)) \setminus W)$; *stepen čvora* v je tada $d(v) = |N_\Gamma(v)|$. Graf je k-*regularan* ($k \in \mathbb{N}$) akko je stepen svakog njegovog čvora k. Graf je *bipartitan* ako i samo ako se skup njegovih čvorova može napisati kao disjunktna unija dva skupa X i Y, tako da svaka njegova grana ima po jedan čvor u jednom i jedan čvor u drugom skupu; označavamo ga sa $G(X, Y)$. Bipartitan graf $G(X, Y)$ nazivamo *balansiranim* akko je $|X| = |Y|$. *Mečing* grafa je skup njegovih grana gde nijedne dve nemaju zajednički čvor. *Savršen mečing* je mečing koji pokriva svaki čvor grafa. Za balansiran bipartitan graf postoji ekvivalentan uslov za postojanje savršenog mečinga, koji je jedan od klasičnih rezultata teorije grafova:

Teorema 3.6 (Filip Hol, [20])**.** *Bipartitan balansiran graf* $G(X, Y)$ *ima savršen mečing ako i samo ako važi*

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

za svako $S \subseteq X$*.*

Za graf koji zadovoljava uslov iz prethodne teoreme ćemo govoriti da zadovoljava Holov uslov.

Cilj nam je da pokažemo da u polugrupi $\mathcal{T}_n$ važi $\mathrm{rank}(I_k) = \mathrm{idrank}(I_k)$. U tu svrhu ćemo ispitivati polugrupe koje se odlikuju tim svojstvom:

Definicija 3.7. Za idempotentno generisanu polugrupu S za koju važi $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{idrank}(S)$ kažemo da ima *idempotentnu bazu.*

Videćemo da su rang i idempotentni rang RMP čvrsto vezani za njoj pridruženu 0-traku definisanu u nastavku.

Definicija 3.8. Za RMP $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *prirodna* 0*-traka* je polugrupa $T = \mathcal{M}^0(\{1\}; I, \Lambda; Q)$, gde je $q_{\lambda i} = 1$ ako i samo ako je $p_{\lambda i} \neq 0$ (inače je $q_{\lambda i} = p_{\lambda i} = 0$). Koristićemo oznaku $T = S\natural$.

Lako je uvideti da je preslikavanje $\natural : S \to T$ dato sa $(i, g, \lambda)\natural = (i, 1, \lambda)$ i $(0)\natural = 0$ epimorfizam i da je $T \cong S/\mathcal{H}$ (znamo da je $\mathcal{H}$ kongruencija).

Pošto je središnja komponenta nenula elemenata iz T uvek 1, možemo je zanemariti i posmatrati ih kao uređene parove (i, λ). Tada polugrupu T identifikujemo sa $T' = (I \times \Lambda \cup \{0\}, \cdot)$ sa operacijom definisanom sa

$$(i, \lambda) \cdot (j, \mu) = \begin{cases} (i, \mu), & q_{\lambda j} = 1; \\ 0, & q_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

i $(i, \lambda) \cdot 0 = 0 \cdot (i, \lambda) = 0 \cdot 0 = 0$.

Prvi znak povezanosti rangova o kojoj smo pričali uviđamo u narednoj lemi.

Lema 3.12. *Neka je* $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *idempotentno generisana RMP i* $T = S\natural$ *njena prirodna* 0*-traka. Uz to, neka je* $B \subseteq T$ *skup generatora polugrupe* T*. Ako je* $A \subseteq S$ *takav da je* $[A]\natural = B$*, onda je* $\langle A \rangle = S$*.*

Dokaz. Imamo $\langle B \rangle = T$, odakle sledi da je A generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S. Pošto je svaka nenula $\mathcal{H}$ klasa H konačna grupa, svi njeni elementi su konačnog reda, te ako generišemo bar jedan njen element, možemo da generišemo i njenu jedinicu. Zato je $E(S) \subseteq \langle A \rangle$. Imamo da je S idempotentno generisana, odakle sledi $\langle A \rangle = S$. □

Najzad, potpuna slika spomenute veze se dobija u tekstu sledećeg tvrđenja.

Lema 3.13. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ idempotentno generisana RMP i $T = S\natural$ njena prirodna 0-traka. Tada važi*

(i) $\operatorname{rank}(S) = \operatorname{rank}(T) = \max\{|I|, |\Lambda|\}$;
(ii) $\operatorname{idrank}(S) = \operatorname{idrank}(T)$.

Specijalno, ako S ima idempotentnu bazu, tada i T ima idempotentnu bazu.

Dokaz. (i) Znamo da je $\operatorname{rank}(S) \geq \operatorname{rank}(T)$, jer je T homomorfna slika polugrupe S (pa je svaka slika generišućeg skupa za S generišući skup za T). Obratno, neka je Y baza polugrupe T. Iz leme 3.12, pri izboru

$$A = \{(i, 1, \lambda) : (i, \lambda) \in Y\},$$

sledi da je $\langle A \rangle = S$, a pošto je $|A| = |Y| = \operatorname{rank}(T)$, imamo $\operatorname{rank}(S) \leq \operatorname{rank}(T)$. Na kraju, poslednja jednakost je dobijena iz leme 2.3.

(ii) Ako je $X \subseteq E(S)$ skup generatora za S, tada je $[X]\natural \subseteq E(T)$ (jer je $\natural$ homomorfizam) skup generatora T i važi $|[X]\natural| \leq |X|$. Odatle je $\operatorname{idrank}(T) \leq \operatorname{idrank}(S)$. Obrat nam opet daje lema 3.12, pri izboru

$$A = \{(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda) : (i, \lambda) \in Y\},$$

gde je $Y \subseteq E(T)$ generatorni skup za T. □

Naravno, ako pričamo o idempotentnoj generisanosti RMP, pomoći će nam ranije uvedeni grafovi vezani za njih. Posmatrajući GH-grafove RMP S i odgovarajuće prirodne trake $T = S\natural$, zaključujemo da su oni izomorfni jer je oblik strukturne matrice isti. Zato ubuduće ne moramo da pravimo razliku između ta dva grafa.

Prvo ćemo analizirati kvadratne ($|I| = |\Lambda| = n$) idempotentno generisane kompletno 0-proste polugrupe $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$. Ako posmatramo GH-graf $\Gamma(S)$ proizvoljno odabrane polugrupe koja ispunjava te uslove, možemo zaključiti da je on zbog idempotentne generisanosti povezan, a pored toga i balansiran i bipartitan graf. Kada takva polugrupa ima idempotentnu bazu? U nastavku ćemo objasniti, ali prvo primetimo da pretpostavkom da je ima, zbog dimenzije idempotentne baze i činjenice da svaka baza mora da "seče" svaku vrstu i kolonu, dobijamo da grane koje odgovaraju njenim elementima čine savršen mečing grafa $\Gamma(T)$. Drugim rečima, u matrici P polja koja odgovaraju tim granama zauzimaju po jedno mesto u svakoj vrsti i svakoj koloni.

Definicija 3.9. Podskup A polugrupe $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ se naziva *minimalan pokrivač* S ako i samo ako je $|A| = \max\{|I|, |\Lambda|\}$ i A seče svaku $\mathcal{R}$-klasu $i \in I$ i svaku $\mathcal{L}$-klasu $\lambda \in \Lambda$.

Lema 2.3 implicira da svaka 0-traka ima minimalan pokrivač koji je generiše. Kao posledicu leme 3.13 dobijamo da isto važi i za svaku idempotentno generisanu RMP.

Na početku ovog poglavlja smo naveli Holov uslov za bipartitne balansirane grafove. Sada ćemo formulisati jedan jači uslov za koji će se ispostaviti da primenjen na GH-graf idempotentno generisane RMP ima čvrstu vezu sa postojanjem njene idempotentne baze.

Lema 3.14. *Neka je $G(\Lambda, I)$ povezan, balansiran, bipartitan graf. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) za svako $\emptyset \neq X \subset I$ važi $N_G(X) > |X|$;
(ii) za svako $\emptyset \neq Y \subset \Lambda$ važi $N_G(Y) > |Y|$;

Dokaz. $(ii) \Rightarrow (i)$ Dokazivaćemo kontrapozicijom. Pretpostavimo da postoji $\emptyset \neq X \subset I$ i $|N_G(X)| \leq |X|$. Odatle zbog $|I| = |\Lambda|$ sledi da je

$$\begin{aligned} |\Lambda| - |N_G(X)| &\geq |I| - |X|, \qquad \text{što je analogno sa} \\ |\Lambda \setminus N_G(X)| &\geq |I \setminus X| \geq |N_G(\Lambda \setminus N_G(X))| \end{aligned}$$

Sada imamo da je $\Lambda \setminus N_G(X) \neq \Lambda$ (u pitanju je povezan graf) i $\Lambda \setminus N_G(X) \neq \emptyset$ ($|N_G(X)| \leq |X| < |\Lambda|$), pa je $\Lambda \setminus N_G(X)$ primer skupa koji pokazuje da (ii) ne važi.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Pokazuje se analogno. □

Ako povezan balansiran bipartitan graf zadovoljava bar jedan uslov iz leme 3.14 (iz nje sledi da zadovoljava i drugi), kažemo da zadovoljava *jak Holov uslov* (the strong Hall condition-SHC). Za RMP $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ sa $|I| = |\Lambda|$ kažemo da zadovoljava SHC, ako ga njen graf $\Gamma(S)$ zadovoljava.

Teorema 3.7. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ idempotentno generisana kompletno 0-prosta kvadratna ($|I| = |\Lambda| = n$) polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{idrank}(S)$
(2) Svaki minimalan pokrivač polugrupe S generiše S.
(3) S zadovoljava SHC.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je za dokazivanje ovog niza ekvivalencija dovoljno pokazati da on važi za prirodne 0-trake. Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ proizvoljna idempotentno generisana kompletno 0-prosta kvadratna polugrupa, a $T = S\natural$ njena prirodna 0-traka. Iz leme 3.13 sledi da je $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{idrank}(S)$ ako i samo ako je $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{idrank}(T)$. Dalje, činjenica da S zadovoljava SHC akko T zadovoljava SHC sledi iz izomorfnosti grafova $\Gamma(S)$ i $\Gamma(T)$ koju smo ranije konstatovali. Na kraju, pokažimo da svaki minimalan pokrivač polugrupe S generiše S ako i samo ako svaki minimalan pokrivač polugrupe T generiše T. Prvo, za svaki minimalan pokrivač A polugrupe S je $[A]\natural$ minimalan pokrivač polugrupe T, a iz leme 3.12 i osobina homomorfizma znamo da A generiše S ako i samo ako $[A]\natural$ generiše T. Obratno, neka je B neki minimalan pokrivač polugrupe T; tada je $[B]\natural^{-1}$ generator transverzale $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S, pa možemo pronaći transverzalu $\mathcal{H}$-klasa B' takvu da je $B' \subseteq [B]\natural^{-1}$. Kao i malopre, prema lemi 3.12 i osobinama homomorfizma B generiše T ako i samo ako B' generiše S.

Neka je T 0-traka nad skupom $(I \times \Lambda) \cup \{0\}$, takva da je $I = \Lambda = \{1, \ldots, n\}$. Tada je uslov (2) ekvivalentan sa tvrdnjom da je za svako $\beta \in \mathcal{S}_n$ skup $X_\beta = \{(1, (1)\beta), \ldots, (n, (n)\beta)\}$ generišući skup za T.

((1) $\Rightarrow$ (2)) Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je

$$E' = \{(1, 1), \ldots, (n, n)\}$$

idempotentna baza za T. Neka je $\beta \in \mathcal{S}_n$ proizvoljan i neka je skup $X_\beta = \{(1, (1)\beta), \ldots, (n, (n)\beta)\}$. Ako je k red elementa β u grupi $\mathcal{S}_n$, tada je za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(i, i) = (i, (i)\beta^k) = (i, (i)\beta) \cdot ((i)\beta, (i)\beta^2) \cdots ((i)\beta^{k-1}, (i)\beta^k),$$

gde uočavamo da su parovi $(i, (i)\beta)$ i $((i)\beta^s, (i)\beta^{s+1}) = ((i)\beta^s, ((i)\beta^s)\beta)$ za $s \in \{1, \ldots, k-1\}$ u skupu X_β, odakle je $E' \subseteq \langle X_\beta \rangle$, te je zbog $\langle E' \rangle = S$ i X_β idempotentna baza za T.

((2) $\Rightarrow$ (3)) Ovu implikaciju ćemo dokazati kontrapozicijom. Pretpostavimo da T ne zadovoljava SHC i neka je $\emptyset \neq J \subset I$ takav da je $|N_{\Gamma(T)}(J)| \leq |J|$. Cilj nam je da pronađemo minimalan pokrivač polugrupe T koji je ne generiše. Neka su koordinate $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ i $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a naši skupovi $J = \{i_1, \ldots, i_q\}$ i $N_{\Gamma(T)}(J) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$, gde važi $1 \leq l \leq q < n$. Tvrdimo da minimalan pokrivač

$$Y = \{(i_1, \lambda_1), \ldots, (i_n, \lambda_n)\}$$

ne generiše T. To ćemo pokazati tako što ćemo dokazati da $(i_n, \lambda_1) \notin \langle Y \rangle$. Posmatrajmo put u $\Gamma(T)$ koji počinje u i_n, završava se u Λ i odgovara nekom proizvodu elemenata iz Y. Neka je taj put $i_n \to \lambda_n \to i_{q_1} \to \lambda_{q_1} \to \cdots \to i_{q_t} \to \lambda_{q_t}$. Znamo da važi $N(\Lambda \setminus N(J)) \subseteq I \setminus J$, odakle zbog $\lambda_n \in \Lambda \setminus N(J)$ sledi $i_{q_1} \in I \setminus J$. Iz te informacije imamo da je $\lambda_{q_1} \in N(I \setminus J) = \Lambda \setminus N(J)$, te je opet $i_{q_2} \in I \setminus J$. Nastavljajući tako, dobićemo da $\lambda_{q_t} \in \Lambda \setminus N(J)$, te je $\lambda_{q_t} \neq \lambda_1 \in N(J)$, te se nijedan takav put ne završava u λ_1, pa Y ne generiše element (i_n, λ_1).

((3) $\Rightarrow$ (1)) Neka T zadovoljava SHC. Tada zadovoljava i slabiji, Holov uslov. Prema tome, iz teorije grafova znamo da graf $\Gamma(T)$ ima savršen mečing $\pi : I \to \Lambda$. Dokažimo da $M = \{(i, (i)\pi) : i \in I\}$ generiše T. Uzmimo proizvoljan elemenat $(i, \lambda) \in T$ i dokažimo njegovu generisanost u $\langle M \rangle$. Posmatrajmo prvo put $i \to (i)\pi$. Ako je $(i)\pi = \lambda$, gotovi smo. Inače, iz zadovoljenosti uslova SHC imamo $|N(\{(i)\pi\})| > 1$, pa postoji $i_2 \in N(\{(i)\pi\}) \setminus \{i\}$ i možemo produžiti put do $i \to (i)\pi \to i_2 \to (i_2)\pi$. Opet, ako je $(i_2)\pi = \lambda$, završili smo. Inače, prema SHC imamo da je $|N(\{(i)\pi, (i_2)\pi\})| > 2$, pa postoji $i_3 \in N(\{(i)\pi, (i_2)\pi\}) \setminus \{i, i_2\}$, te slično kao i ranije možemo da produžimo naš put. Pošto je π savršen mečing, mora postojati $i' \in I$ takvo da je $\lambda = (i')\pi$. Ako nastavimo da produžavamo put na isti način, zbog konačne dimenzije n i povezanosti $\Gamma(T)$ u nekom trenutku se i' mora pojaviti u procesu, odakle sledi da se neki put dobijen na taj način mora završavati u λ. Pošto je prema konstrukciji svaka njegova veza oblika (i_k, λ_k) u π, odgovarajući elemenat je generisan elementima iz M. $\square$

Iako zgodna, prethodna teorema se može primeniti samo na kvadratne idempotentno generisane RMP. Sledeća lema će nam dati način da je iskoristimo i kod nekvadratnih, što će nam poslužiti za naš krajni cilj – dokaz da D_k ima idempotentnu bazu u $\mathcal{T}_n$.

Lema 3.15. *Neka je $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ idempotentno generisana kompletno 0-prosta polugrupa. Ako $\Gamma(S)$ ima povezan, balansiran bipartitan podgraf sa $2\min\{|I|, |\Lambda|\}$ čvorova koji zadovoljava SHC, tada je*

$$\operatorname{idrank}(S) = \operatorname{rank}(S) = \max\{|I|, |\Lambda|\}.$$

Dokaz. Pretpostavimo bez umanjenja opštosti da je $|I| \le |\Lambda|$ (u suprotnom možemo raditi sa polugrupom $S^T = \mathcal{M}^0(G; \Lambda, I; P^T)$ i dokaz če teći na isti način). Iz leme 3.13 je dovoljno dokazati tvrđenje samo za prirodne 0-trake. Neka je $T = \mathcal{M}^0(\{1\}; I, \Lambda; P)$ sa povezanim balansiranim bipartitnim podgrafom G sa $2\min\{|I|, |\Lambda|\} = 2|I|$ čvorova koji zadovoljava SHC. Neka su njegovi čvorovi $I \cup \Lambda'$ i označimo preostale čvorove sa $\Lambda''(= \Lambda \setminus \Lambda')$. Prema teoremi 3.7 0-podtraka $I \times \Lambda'$ koja odgovara grafu G ima idempotentnu bazu kojoj odgovara savršen mečing grafa G; neka je taj mečing $\pi : I \to \Lambda'$. Definišimo $\tau : \Lambda'' \to I$, tako da za svako $\lambda \in \Lambda''$ postoji grana $((\lambda)\tau, \lambda) \in \Gamma(T)$ (takva funkcija postoji, jer je P pravilna matrica). Dokažimo da je $A = B_1 \cup B_2 = \{(i, (i)\pi) : i \in I\} \cup \{((\lambda)\tau, \lambda) : \lambda \in \Lambda''\}$ idempotentna baza polugrupe T. Neka je $(i, \lambda) \in I \times \Lambda$ proizvoljna nenula vrednost T. Ako je $\lambda \in \Lambda'$, onda $(i, \lambda) \in \langle B_1 \rangle$; inače je $\lambda \in \Lambda''$, pa imamo $(i, ((\lambda)\tau)\pi) \in \langle B_1 \rangle$ i $((\lambda)\tau, \lambda) \in \langle B_2 \rangle$, odakle je

$$(i, \lambda) = (i, ((\lambda)\tau)\pi) \cdot ((\lambda)\tau, \lambda) \in \langle A \rangle.$$

$\square$

Ispunjenost zadovoljenosti uslova SHC može biti komplikovano i vremenski zahtevno proveriti. Zato dajemo dva tvrđenja koja za specijalne slučajeve pojednostavljuju taj posao.

Lema 3.16. *Ako je graf $G(X, Y)$ k-regularan, povezan, balansiran bipartitan graf, tada G zadovoljava SHC.*

Dokaz. Neka je $\emptyset \ne Z \subseteq X$. Brojevi grana povezanih sa skupovima Z i $N(Z)$ su $k|Z|$ i $k|N(Z)|$, redom. Pošto grane koje imaju jedan kraj u Z, drugi kraj moraju da imaju u $N(Z)$, odatle imamo da je $k|Z| \leq k|N(Z)|$. Sada zaključujemo da je $|Z| \leq |N(Z)|$.

Pretpostavimo da je $|Z| = |N(Z)|$; u tom slučaju prema ranijoj diskusiji sve grane sa jednim krajem u $N(Z)$ drugi kraj imaju u Z, te je $Z \cup N(Z)$ komponenta povezanosti grafa G. Iz povezanosti istog sada sledi da je $Z \cup N(Z) = V(G)$, tj. $Z = X$. Dakle, pokazali smo da jednakost $|Z| = |N(Z)|$ važi samo tada, a inače je $|Z| < |N(Z)|$, što znači da G ima SHC. □

Definicija 3.10. Za balansiran bipartitan graf $G(X,Y)$ sa savršenim mečingom određenim bijekcijom $\pi : X \to Y$ ($\{(x,(x)\pi) : x \in X\}$) kažemo da ima *simetričnu distribuciju grana u odnosu na mečing* π ako i samo ako je $d(x) = d((x)\pi)$ za svako $x \in X$.

Lema 3.17. *Ako je $G(X,Y)$ povezan, balansiran bipartitan graf koji ima simetričnu distribuciju grana u odnosu na neki savršen mečing određen sa $\pi : X \to Y$, tada G zadovoljava SHC.*

Dokaz. Neka je $\emptyset \neq A \subseteq X$. Iz $|[A]\pi| = |A|$ i $[A]\pi \subseteq N(A)$ sledi $|N(A)| \geq |[A]\pi| = |A|$.

Ako pretpostavimo $|N(A)| = |A|$, dobijamo $|N(A)| = |[A]\pi|$, pa je $[A]\pi = N(A)$. Ukupan broj grana čiji jedan čvor leži u A je $\sum_{a\in A} d(a)$, dok je ukupan broj grana sa jednim čvorom iz $N(A) = [A]\pi$:

$$\sum_{b\in(A)\pi} d(b) = \sum_{a\in A} d((a)\pi) = \sum_{a\in A} d(a).$$

Opet imamo da je $A \cup N(A) = A \cup [A]\pi$ komponenta povezanosti grafa G, pa je zbog njegove povezanosti $A = X$, što smo i hteli da pokažemo. □

Ispitajmo odnose uslova iz prethodne teoreme: ako je $G(X,Y)$ povezan, balansiran bipartitan k-regularan graf, tada iz teorije grafova znamo da zadovoljava Holov uslov, koji implicira da postoji savršen mečing. Iz k-regularnosti sledi da je taj mečing ima simetričnu distribuciju grana, pa su zadovoljeni uslovi druge leme. Odatle su za primenu leme 3.16 potrebni jači uslovi nego za lemu 3.17.

Definicija 3.11. Kažemo da polugrupa $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ ima *k-unifomnu distribuciju idempotenata* ako i samo ako je graf $\Gamma(P)$ k-regularan. Za istu polugrupu kažemo da ima *simetričnu distribuciju idempotenata u odnosu na neki savršen mečing* ako i samo ako $\Gamma(S)$ ima simetričnu distribuciju grana u odnosu na neki savršen mečing.

3.4 Idempotentni rang ideala polugrupe T_n

U prethodnom poglavlju smo postavili teorijsku podlogu sa ciljem da pokažemo da je $\operatorname{rank}(I_r) = \operatorname{idrank}(I_r)$, što ćemo ovde i sprovesti. Za to će nam biti potrebne oznake $\mathcal{F}_r$ i $\mathcal{K}_r$ koje će označavati, redom, sve podskupove skupa $N = \{1, \ldots, n\}$ kardinalnosti r, odnosno sve njegove particije sa r klasa. Znamo od ranije da su za $1 < r < n$ $\mathcal{J}$-klase D_r idempotentno generisane kompletno 0-proste polugrupe. Graf $\Gamma(D_r)$ ima skup čvorova $\mathcal{F}_r \cup \mathcal{K}_r$, gde su $A \in \mathcal{F}_r$ i $K \in \mathcal{K}_r$ povezani ako i samo ako postoji grupna $\mathcal{H}$-klasa u D_r sa jezgrom K i slikom A, drugim rečima akko u $\mathcal{T}_n$ postoji idempotent sa jezgrom K i slikom A, tj. ako i samo ako je skup A transverzala particije K.

Cilj nam je da pronađemo odgovarajući podgraf $\Gamma(D_r)$ koji zadovoljava SHC, da bismo iskoristili lemu 3.15.

Pošto ćemo raditi na skupu $N = \{1, \ldots, n\}$, pri korišćenju modularne aritmetike ćemo uzimati da je $\mathrm{mod}_m(m) = m$, jer nemamo 0 u svom "opsegu".

Definicija 3.12. Za dato $a, b \in N$ definišimo *interval* između a i b kao

$$[a, b] = \{\mathrm{mod}_n(a), \mathrm{mod}_n(a + 1), \ldots, \mathrm{mod}_n(b)\}.$$

Definicija 3.13. Definišimo $\phi : \mathcal{F}_r \to \mathcal{K}_r$ sa

$$(I)\phi = \{[i_1, i_2 - 1], [i_2, i_3 - 1], \ldots, [i_r, i_1 - 1]\},$$

gde je $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \in \mathcal{F}_r$ i $i_1 < \cdots < i_r$.

ϕ je injekcija, jer je iz definicije jasno da se za različite originale dobijaju različite particije.

Lema 3.18. *Balansiran bipartitan graf* $\Gamma' = \Gamma(D_r)[\mathcal{F}_r \cup [\mathcal{F}_r]\phi]$ *(podgraf grafa* $\Gamma(D_r)$ *generisan čvorovima* $\mathcal{F}_r \cup [\mathcal{F}_r]\phi$*) je povezan i ima simetričnu distribuciju grana u odnosu na savršen mečing* ϕ*.*

Dokaz. Prvo pokažimo da je Γ' povezan. Primetimo da je svaki element $A \in \mathcal{F}_r$ povezan sa $(A)\phi \in \mathcal{K}_r$, jer je $(A)\phi$ definisan tako da je A njegova transverzala. Iz te povezanosti zaključujemo da je Γ' povezan ako i samo ako je povezan graf Γ'' koji nastaje od Γ' kao homomorfna slika preslikavanja koje sve parove $\{A, (A)\phi\}$ kolapsira u po jedan čvor. Graf Γ'' ima $\binom{n}{r}$ čvorova, jer ih toliko ima i skup $\mathcal{F}_r$, pa svaki čvor grafa Γ'' možemo da označimo skupom $A \in \mathcal{F}_r$ koji sadrži. Za čvor $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ (gde je $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$) imamo da je povezan sa svakim skupom $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\} \in \mathcal{F}_r$ koji se od A razlikuje u tačno jednoj vrednosti i ta se vrednost razlikuje tačno za 1. Pokažimo to: neka je za neko $i \in \{1, \ldots, r\}$ bez umanjenja opštosti $b_i = a_i + 1$ i $b_j = a_j$ za $j \neq i$ (da bi bilo $B \in \mathcal{F}_r$, mora važiti $a_i + 1 < a_{i+1}$); tada je $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \ldots, a_r\}$ transverzala skupa

$$(A)\phi = \{[a_1, a_2 - 1], [a_2, a_3 - 1], \ldots, [a_{i-1}, a_i - 1], [a_i, a_{i+1} - 1], \ldots, [a_r, a_1 - 1]\},$$

odakle su B i $(A)\phi$ povezani u Γ' (čvorovi $C \in \mathcal{F}_r$ i $D \in \mathcal{K}_r$ su povezani ako i samo ako je C transverzala skupa D), pa su B i A povezani u Γ''. Sada iz prethodne diskusije za $I = \{i_1, \dots, i_r\} \in \mathcal{F}_r$ ($i_1 < \cdots < i_r$) sledi sledeći niz povezanosti ($\sim$ će označavati povezanost čvorova u Γ''):

$$\begin{aligned}\{1,\dots,r-1,r\} \sim \{1,\dots,r-1,r+1\} &\sim \cdots \sim \{1,\dots,r-1,i_r\}\\ \sim \{1,\dots,r,i_r\} &\sim \cdots \sim \{1,\dots,i_{r-1},i_r\}\\ &\sim \cdots \sim \{1,\dots,i_{r-2},i_{r-1},i_r\}\\ &\quad\ddots \qquad \vdots\\ &\qquad\quad \sim \{i_1,\dots,i_{r-2},i_{r-1},i_r\}.\end{aligned}$$

Dokazali smo da je svako $I \in \mathcal{F}_r$ povezano sa čvorom $\{1,\dots,r\}$, pa je graf Γ'' povezan, a time isto važi i za Γ'.

Ostaje nam da pokažemo da Γ' ima simetričnu distribuciju u odnosu na savršen mečing ϕ (on to jeste, jer je ϕ injekcija, a Γ' je definisan nad skupom $\mathcal{F}_r \cup [\mathcal{F}_r]\phi$). Ako posmatramo proizvoljan čvor $K = \{[i_1, i_2 - 1], [i_2, i_3 - 1], \dots, [i_r, i_1 - 1]\} \in [\mathcal{F}_r]\phi$, broj njegovih suseda je broj podskupova skupa $\{1,\dots,n\}$ koji su transverzale skupa K, a to je $\prod_{j=1}^{r} |[i_j, i_{j+1} - 1]|$ (gde je $i_{r+1} = i_1$). Sa druge strane, za fiksirani element $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ ($i_1 < \cdots < i_r$) imamo da je transverzala elementa $J = \{[j_1, j_2 - 1], [j_2, j_3 - 1], \dots, [j_r, j_1 - 1]\} \in \mathcal{K}_r$, gde je bez umanjenja opštosti $i_1 \in [j_1, j_2 - 1]$, ako i samo ako za svako $1 \le l \le r$ i za $i_{r+1} = i_1$ i $j_{r+1} = j_r$ važi

$$j_l \le i_l \le j_{l+1} - 1 < j_{l+1} \le i_{l+1} \quad \text{tj.} \quad i_l + 1 \le j_{l+1} \le i_{l+1},$$

pa je $d(I) = \prod_{j=1}^{r} |[i_j + 1, i_{j+1}]|$. Najzad, imamo da je

$$d((A)\phi) = \prod_{j=1}^{r} |[i_j, i_{j+1} - 1]| = \prod_{j=1}^{r} |[i_j + 1, i_{j+1}]| = d(I),$$

što upravo znači da Γ' ima simetričnu distribuciju u odnosu na ϕ. $\square$

Sledeća teorema je prvi put objavljena u [27], i predstavlja ispunjenje našeg plana iz prethodnog poglavlja

Teorema 3.8. *Za sve ideale I_r polugrupe $\mathcal{T}_n$ $(1 < r < n)$ važi*

$$\operatorname{idrank}(I_r) = \operatorname{rank}(I_r) = \mathrm{S}(n, r).$$

Dokaz. Iz lema 3.17 i 3.18 sledi da $\Gamma' = \Gamma(D_r)[\mathcal{F}_r \cup [\mathcal{F}_r]\phi]$ ima SHC, pa uz pomoć leme 3.15 dobijamo da D_r ima idempotentnu bazu, dok iz teoreme 3.4 imamo $\operatorname{rank}(D_r) = \operatorname{rank}(I_r) = \mathrm{S}(n, r)$. Znamo da je $\operatorname{idrank}(I_r) \ge \operatorname{rank}(I_r)$, a iz leme 3.5 sledi da idempotenti ranga manjeg od r ne mogu da generišu D_r, odakle je $\operatorname{idrank}(I_r) \ge \operatorname{idrank}(D_r)$, te najzad dobijamo $\operatorname{idrank}(I_r) =$

idrank(D_r). $\square$

Kao direktna posledica prethodne teoreme i teoreme 3.5, dobija se i (rezultat objavljen u [10]):

Posledica 3.7. *Za* $n \geq 3$ *je* $\mathrm{idrank}(\mathrm{Sing}_n) = \mathrm{rank}(\mathrm{Sing}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Za kraj, daćemo karakterizaciju (iz [24]) idempotentne baze polugrupe Sing_n i pokazati da svaki njen idempotentan generatorni skup sadrži idempotentnu bazu. Primetimo da je D_{n-1} maksimalna $\mathcal{J}$-klasa polugrupe Sing_n, pa za generišući skup A imamo da $A \cap D_{n-1}$ generiše D_{n-1}, te je $|A \cap D_{n-1}| \geq \mathrm{rank}(D_{n-1}) = \frac{n(n-1)}{2}$, odakle dobijamo da su sve (idempotentne) baze polugrupe Sing_n u stvari (idempotentne) baze polugrupe D_{n-1} u $\mathcal{T}_n$.

Opišimo sada pojmove koje ćemo koristiti. Znamo da digraf T koji nastaje od kompletnog grafa sa n čvorova (K_n) pridruživanjem smera svakoj grani nazivamo *turnir* i da za njega važi $V(K_n) = V(G)$ i za svaki par $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ je tačno jedna od grana (x, y) i (y, x) u skupu $E(G)$. Pored toga, za proizvoljan digraf G kažemo da je *jako povezan* akko za svako $x, y \in V(G)$ postoji usmeren put iz x u y. Skup svih jako povezanih turnira nad skupom čvorova $N = \{1, \ldots, n\}$ ćemo označavati sa $\mathbb{T}_n$. Uvedimo konvenciju da za $n = 2$ skup $\mathbb{T}_n$ sadrži samo jedan elemenat, i to graf sa čvorovima $1, 2$ i granama $(1, 2)$ i $(2, 1)$.

Definišimo za $x, y \in N$ i $x \neq y$ transformaciju $\varepsilon_{xy} \in E(\mathcal{T}_n)$ sa

$$(z)\varepsilon_{xy} = \begin{cases} x, & z = y; \\ z, & z \neq y. \end{cases}$$

Neka je za $U \subseteq E(D_{n-1})$ graf Γ_U dat sa $V(\Gamma_U) = N$ i $(x, y) \in E(\Gamma_U)$ akko $\varepsilon_{xy} \in U$.

Teorema 3.9. *Za* $\mathcal{T}_n$ *(gde je* $n \geq 2$*) i skup*

$$U \subseteq E(D_{n-1})$$

sa osobinom $|U| = \frac{n(n-1)}{2}$ *je* U *idempotentna baza polugrupe* Sing_n *ako i samo ako* $\Gamma_U \in \mathbb{T}_n$. *Broj idempotentnih baza polugrupe* Sing_n *je* $|\mathbb{T}_n|$.

Pri tome, vrednost $|\mathbb{T}_n|$ je izračunata u [34], a mi ćemo je dati u sledećem tvrđenju:

Teorema 3.10. *Uvedimo oznaku* $w_n = |\mathbb{T}_n|$ *i definišimo* $w_1 = 1$. *Tada je za* $n \geq 2$

$$w_n = F_n - \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} w_s F_{n-s},$$

gde je $F_i = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Minimalnost generišućeg skupa algebre u smislu kardinalnosti i minimalnost u smislu najmanjeg mogućeg podskupa nekog generatornog skupa koji zadržava osobinu generativnosti su u opštem slučaju različiti pojmovi. Jedan od jednostavnijih primera za to je skup transpozicija $A = \{(1\,2), (2\,3), (3\,4)\}$ koji generiše čitavu grupu $\mathcal{S}_n$, pri čemu nijedan njegov pravi podskup nije generatorni, iako je $|A| = 3$, a $\mathrm{rank}(\mathcal{S}_n) = 2$. Kao što ćemo videti u sledećoj teoremi, za idempotentne generišuće skupove polugrupe Sing_n, ove dve minimalnosti se poklapaju.

Teorema 3.11 (o & i: [4])**.** *Svaki idempotentni generatorni skup polugrupe* Sing_n *(*$n \geq 2$*) ima podskup koji je idempotentna baza.*

Dokaz. U slučaju da je $n = 2$ imamo da je $V = \{\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}\}$ jedinstven (u svakom smislu) minimalni generišući skup za $\mathrm{Sing}_2 = \{1, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}\}$, pa je tvrđenje trivijalno zadovoljeno.

Ako je $n \geq 3$ i V proizvoljan idempotentni generatorni skup za Sing_n, imamo prema ranijoj diskusiji da je i skup $U = D_n \cap V$ idempotentni generatorni skup za Sing_n. Odatle prema teoremi 3.9 sledi da digraf Γ_U sadrži jako povezan turnir, te je i sam jako povezan. Znamo da Γ_U ima $\binom{n}{2} + k$ grana, gde je $k \geq 0$. Ako je $k = 0$, skup je minimalan u smislu kardinalnosti, pa je u pitanju idempotentna baza. U slučaju $k \geq 1$ imamo da graf sa n čvorova ima više od $\binom{n}{2}$ grana, pa postoje bar dva "duplo" povezana čvora, tj. postoje $x, y \in V(\Gamma_U)$ takvi da je $(x, y), (y, x) \in E(\Gamma_U)$. Neka su digrafovi Γ' i Γ'' dobijeni od grafa Γ_U izostavljanjem grana (x, y), odnosno (y, x). Ako pokažemo da je bar jedan od ta dva grafa jako povezan, ponavljanjem koraka k puta ćemo dobiti da U sadrži idempotentnu bazu. Pretpostavimo bez umanjenja opštosti da Γ' nije jako povezan i da su njegove komponente jake povezanosti $G_1, \ldots, G_k$ povezane na sledeći način: $G_1 \to \cdots \to G_k$. Pošto je Γ_U jako povezan, mora da važi $y \in G_1$ i $x \in G_k$, te je digraf Γ'' jako povezan, jer sadrži (x, y). $\square$

Glava 4

Monoidi $\mathcal{PT}_n$ i $\mathcal{IS}_n$

Kada se govori polugrupama transformacija nad konačnim skupom, osim polugrupe $\mathcal{T}_n$, neizbežne su i $\mathcal{PT}_n$ i $\mathcal{IS}_n$, kao njeni najbliskiji "srodnici". Zato ćemo u ovoj glavi proučiti njihove osobine vezane za rang i idempotente, kao i idempotentne rangove. Počećemo sa ispitivanjem Grinovih relacija i ideala u tim polugrupama, da bi nam to dalo osnovu za dokaze o generisanosti i rangovima. Pošto je tema rada vezana i za idempotentni rang, ispitaćemo idempotentno generisanu potpolugrupu kod oba tipa polugrupa, kao i njen rang i idempotentni rang. Sadržaj ove glave je uglavnom nezavisan od literature, mada se delom oslanja na [8].

Definicija 4.1. Ako je $A \subseteq X \neq \emptyset$, preslikavanje $\alpha : A \to X$ nazivamo *parcijalna transformacija* skupa X. U tom slučaju skup A nazivamo *domen* transformacije α i pišemo $\mathrm{dom}(\alpha)$ (a $X \setminus A = \overline{\mathrm{dom}}(\alpha)$).

Kolekcija svih parcijalnih transformacija nad X zajedno sa kompozicijom preslikavanja čini polugrupu koju nazivamo *polugrupa parcijalnih transformacija* i označavamo sa $\mathcal{PT}_X$.

Kolekcija svih parcijalnih injektivnih transformacija skupa X sa kompozicijom preslikavanja čini *simetričnu inverznu polugrupu* $\mathcal{IS}_X$.

Da bismo pokazali da prethodna definicija ima smisla, moramo samo obrazložiti zatvorenost odgovarajućih skupova za kompoziciju (jer je njena asocijativnost poznata od ranije). Prvo, napomenimo da za $\alpha, \beta \in \mathcal{PT}_X$, za razliku od standardne kompozicije preslikavanja, $\alpha\beta$ imamo uvek definisano, jer dozvoljavamo da bude $\mathrm{dom}(\beta) \neq \mathrm{Im}(\alpha)$, jer za svako $x \in \mathrm{dom}(\alpha) \cap [\overline{\mathrm{dom}}(\beta)]\alpha^{-1}$ podrazumevamo $x \in \overline{\mathrm{dom}}(\alpha\beta)$. Što se tiče zatvorenosti kompozicije nad skupovima $\mathcal{PT}_X$ i $\mathcal{IS}_X$, kod parcijalnih transformacija je ona prilično jasna, jer kompozicija elemenata α i β ima original

$$\mathrm{dom}(\alpha) \cap [\mathrm{dom}(\beta)]\alpha^{-1} \subseteq X,$$

a sliku $[\mathrm{Im}(\alpha)]\beta \subseteq X$; ni kod injektivnih nema problema, jer od ranije znamo da je kompozicija dve injekcije injekcija.

Radi jednostavnosti rada sa parcijalnim transformacijama, za $\alpha \in \mathcal{PT}_X$ možemo uvesti proširenje $\alpha' : X \to X \cup \{\emptyset\}$ tako da je za $a \in \overline{\mathrm{dom}}(\alpha)$ slika $(a)\alpha' = \emptyset$. Od sada nećemo praviti razliku između α i na prethodan način definisane α'.

Lako se uviđa da su i $\mathcal{PT}_X$ i $\mathcal{IS}_X$ monoidi sa jedinicom id_X, da su $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{PT}_X \setminus \mathcal{T}_X$ i $\mathcal{IS}_X$ potpolugrupe $\mathcal{PT}_X$, kao i da je $\mathcal{S}_X$ podgrupa polugrupa $\mathcal{PT}_X$ i $\mathcal{IS}_X$. Kada je X konačan ($|X| = n < \aleph_0$), kao i u prethodnoj glavi, identifikujemo ga sa skupom $N = \{1, \ldots, n\}$.

4.1 Grinove relacije i ideali polugrupa $\mathcal{PT}_n$ i $\mathcal{IS}_n$

U ovom poglavlju ćemo da izložimo osnovne osobine Grinovih relacija naših polugrupa, ali u donekle skraćenom obliku, jer se skoro sve poklapaju sa osobinama $\mathcal{T}_n$ koje smo detaljno proučili u prethodnoj glavi.

Lema 4.1. *(1)* $\alpha \in E(\mathcal{PT}_n) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha) \wedge \alpha\restriction_{\mathrm{Im}(\alpha)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(\alpha)}$*;*
(2) $\alpha \in E(\mathcal{IS}_n) \Leftrightarrow \alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(\alpha)}$.

Dokaz. (1) Jasno, niz ekvivalencija iz leme 3.1 važi i ovde, ali u malo izmenjenom obliku:

$$\begin{aligned}
\alpha \in E(\mathcal{PT}_X) &\Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X \ (((x)\alpha)\alpha = (x)\alpha) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}(\alpha) \ (y \in \mathrm{dom}(\alpha) \wedge (y)\alpha = y) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha) \wedge \alpha\restriction_{\mathrm{Im}(\alpha)} = id_{\mathrm{Im}(\alpha)}.
\end{aligned}$$

(2) Na osnovu prethodnog slučaja i osobina $\mathcal{IS}_n$ odmah sledi tvrđenje. □

Iako je, naravno, poželjnije da se tvrđenja koja važe uopšteno tako i izlažu i dokazuju, ponekad to povlači dodatne detalje i obrazlaganja. Zbog uštede na prostoru i činjenice da se rad fokusira na konačne skupove, od sada ćemo posmatrati skup $X = N = \{1, \ldots, n\}$, gde $n \in \mathbb{N}$.

Posledica 4.1. *Za* $n \geq 1$ *je* $F(\mathcal{IS}_n) = E(\mathcal{IS}_n)$.

Lema 4.2. *Važi* $\mathrm{rank}(F(\mathcal{IS}_n)) = \mathrm{idrank}(F(\mathcal{IS}_n)) = |E(D_{n-1})| + 1 = n + 1$ *za sve* $n \geq 1$.

Dokaz. Jednostavno se dokazuje da za $\alpha, \beta \in E(\mathcal{IS}_n)$ važi

$$\alpha\beta = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\alpha) \cap \mathrm{dom}(\beta)} . \tag{4.1}$$

Odatle se lako pokazuje da se svaki elemenat iz $E(D_k)$ za $0 \leq k \leq n-2$ može generisati elementima iz $E(D_{k+1})$. Iz leme 4.1 dobijamo da su idempotenti u potpunosti određeni svojim domenom, pa ih u D_k ima koliko i k-članih podskupova skupa N, čime dobijamo da ih u D_{n-1} ima $\binom{n}{n-1} = n$. Odatle je $\operatorname{rank}(F(\mathcal{IS}_n)) \leq n+1$, jer je $E(D_{n-1}) \cup \{\mathrm{id}_N\}$ generišući skup. Sa druge strane, rang ne može biti manji, jer iz (4.1) sledi da se elementima nižeg ranga ne može generisati element višeg i da proizvod dva različita elementa istog ranga daje element nižeg ranga. $\square$

Lema 4.3. *Za $n \geq 1$ u polugrupama $\mathcal{PT}_n$ i $\mathcal{IS}_n$ važi*

(i) $\alpha \,\mathcal{L}\, \beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta)$*;*
(ii) $\alpha \,\mathcal{R}\, \beta \Leftrightarrow \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) \wedge \ker(\beta) = \ker(\alpha)$*;*
(iii) $\alpha \,\mathcal{H}\, \beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta) \wedge \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) \wedge \ker(\alpha) = \ker(\beta)$*;*
(iv) $\alpha \,\mathcal{J}\, \beta \Leftrightarrow \rho(\alpha) = \rho(\beta)$*;*
(v) $\alpha \,\mathcal{D}\, \beta \Leftrightarrow \rho(\alpha) = \rho(\beta)$*.*

Dokaz. (i) U ovom dokazu možemo skoro u potpunosti da se oslonimo na dokaz leme 3.3, sa ciljem da pokažemo

$$\mathcal{PT}_n\alpha \subseteq \mathcal{PT}_n\beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta),$$

i isto tvrđenje za $\mathcal{IS}_n$. Za $\mathcal{PT}_n$ je dokaz analogan, a jedina razlika je što u smeru ($\Leftarrow$) preslikavanje γ definišemo tako da je $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{dom}(\alpha)$. Za $\mathcal{IS}_n$ je uz to samo potrebno napomenuti da injektivnost γ sledi iz injektivnosti α, jer je $\gamma\beta = \alpha$.

(ii) Ovde ćemo objasniti modifikacije dokaza leme 3.2 da bismo pokazali

$$\alpha\mathcal{PT}_n \subseteq \beta\mathcal{PT}_n \Leftrightarrow \mathrm{dom}(\beta) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha) \wedge \ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha)$$

i analogno tvrđenje za $\mathcal{IS}_n$. U smeru ($\Rightarrow$) je potrebno dodatno obrazložiti $\mathrm{dom}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\beta)$. Neka je $\gamma \in \mathcal{PT}_n$ ($\mathcal{IS}_n$) takvo da je $\beta\gamma = \alpha$ i $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$. Tada je jasno $x \in \mathrm{dom}(\beta)$.

U drugom smeru možemo na skoro isti način kao u pomenutom dokazu da izaberemo γ, jer nam uslov $\mathrm{dom}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\beta)$ obezbeđuje njenu dobru definisanost (pod uslovom da podrazumevamo da za $x \in \overline{\mathrm{dom}}(\alpha)$ važi $(x)\alpha = \emptyset$). Konkretno, γ će biti dato sa $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{Im}(\beta)$ i $(z)\gamma = (x_z)\alpha$, gde je x_z definisano kao i tamo. Jedino preostaje da se pokaže da je u slučaju $\mathcal{IS}_n$ i $\gamma \in \mathcal{IS}_n$. No, to se lako uviđa, pošto imamo da su α i β u $\mathcal{IS}_n$ i

$$(z)\gamma = (y)\gamma \Leftrightarrow (x_z)\alpha = (x_y)\alpha \Rightarrow x_z = x_y \Leftrightarrow (x_z)\beta = (x_y)\beta \Rightarrow z = y.$$

(iii) Ovaj deo sledi iz prethodna dva i definicije relacije $\mathcal{H}$.

(iv) Dokazaćemo da za $\alpha \in \mathcal{PT}_n$ važi

$$\mathcal{PT}_n\alpha\mathcal{PT}_n = \{\beta \in \mathcal{PT}_n : \rho(\beta) \leq \rho(\alpha)\}$$

i da je za $\alpha \in \mathcal{IS}_n$

$$\mathcal{IS}_n \alpha \mathcal{IS}_n = \{\beta \in \mathcal{IS}_n : \rho(\beta) \leq \rho(\alpha)\}.$$

Inkluzija $\subseteq$ u oba slučaja sledi iz teoreme 3.5, koja važi u opštem slučaju.

Za dokaz druge inkluzije pretpostavimo da je $\mathrm{Im}(\alpha) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ i da je $\beta \in \mathcal{PT}_n$ ($\mathcal{IS}_n$) gde je $\mathrm{Im}(\beta) = \{b_1, \ldots, b_m\}$ i $m \leq k$. Za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ izaberimo i fiksirajmo predstavnika c_i iz $[a_i]\alpha^{-1}$. Definišimo sada $\gamma \in \mathcal{PT}_n$ tako da je $\mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{dom}(\beta)$ i da za svako $j \in \{1, \ldots, m\}$ i svako $y \in [b_j]\beta^{-1}$ važi $(y)\gamma = c_j$. Neka je uz to δ proizvoljna permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ koja za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$ slika a_i u b_i. Sada se prostim izračunavanjem proverava da je $\gamma\alpha\delta = \beta$.

Jasno, $\delta \in \mathcal{IS}_n$. Pored toga, iz jednakosti $\gamma\alpha\delta = \beta$ sledi da je γ injektivno, ako je β injektivno.

(v) Pošto su posmatrane polugrupe konačne, imaju i konačan broj desnih i levih ideala, pa ne postoje beskonačni opadajući lanci desnih (levih) ideala, odakle zbog posledice 1.4 dobijamo da je $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. $\square$

Upravo smo videli da je karakterizacija klasa u našim polugrupama skoro potpuno ista kao u $\mathcal{T}_n$. Naredna teorema će nam dati tu analogiju i za ideale, pa ćemo opremljeni tim činjenicama moći da pokažemo da su i odnosi generisanosti isti i da se može uspostaviti paralela i u računanju rangova.

Lema 4.4. *Svi ideali polugrupe S ($S \in \{\mathcal{IS}_n, \mathcal{PT}_n\}$) su oblika*

$$\{\alpha \in S \mid \rho(\alpha) \leq r\}$$

za neko $1 \leq r \leq n$.

Dokaz. Neka je I ideal polugrupe S i $\alpha \in I$ takav da je $\beta \in I \Rightarrow \rho(\beta) \leq \rho(\alpha)$ (takav elemenat postoji u I, jer su vrednosti ρ ograničene odozgo sa n). Tada je $I_1 = S\alpha S = \{\gamma \in S : \rho(\gamma) \leq \rho(\alpha)\}$ najmanji ideal koji sadrži α, odakle dobijamo $I_1 \subseteq I$. Sa druge strane, pošto je α maksimalnog ranga u I, on ne može da sadrži elemenat većeg ranga, te imamo $I \subseteq I_1$. $\square$

4.2 Generisanost i rangovi u $\mathcal{PT}_n$ i $\mathcal{IS}_n$

Došli smo do zaključka da su $\mathcal{D} = \mathcal{J}$-klase elemenata određene njihovim rangovima i da je ideal u stvari unija tih klasa koja sadrži sve klase manje od svoje maksimalne klase. Sada ćemo izložiti neke rezultate o tome kako možemo generisati ideale, što će nam pomoći u računanju rangova. Pri tome, u radu sa $\mathcal{PT}_n$ moraćemo pažnju da posvetimo potpolugrupi $\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n$, jer je njen komplement proučavan u prethodnoj glavi.

Lema 4.5. *Neka je u polugrupi S ($S \in \{\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n, \mathcal{IS}_n\}$) α sa $\rho(\alpha) = k$ proizvoljan (gde je $k \in \{1, \ldots, n-2\}$). Tada postoje elementi β, γ sa osobinama $\rho(\beta) = \rho(\gamma) = k+1$ takvi da je $\beta\gamma = \alpha$.*

Dokaz. Pošto je $\rho(\alpha) \leq n-2$, moraju postojati bar dva elementa $z, w \in \{1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{Im}(\alpha)$. Pored toga, postoje i bar dva elementa x i y od kojih je svaki ili u $\overline{\mathrm{dom}}(\alpha)$, ili važi $|[x]_{\ker(\alpha)}| \geq 2$ (odnosno $|[y]_{\ker(\alpha)}| \geq 2$). Neka su β i γ sa domenima $\mathrm{dom}(\alpha) \cup \{x\}$ i $\mathrm{Im}(\alpha) \cup \{w\}$ redom, dati sa

$$(a)\beta = \begin{cases} (a)\alpha, & a \in \mathrm{dom}(\alpha) \setminus \{x\}; \\ y, & a = x; \end{cases} \qquad (a)\gamma = \begin{cases} a, & a \in \mathrm{Im}(\alpha); \\ w, & a = w. \end{cases}$$

Sada je jasno da je $\alpha = \beta\gamma$ i da je $\rho(\beta) = \rho(\gamma) = k+1$. Pri tome, ako je u pitanju $\mathcal{IS}_n$, iz injektivnosti α sledi $\beta \in \mathcal{IS}_n$ (a injektivnost γ imamo po definiciji). $\square$

Posledica 4.2. *U polugrupi S ($S \in \{\mathcal{PT}_n, \mathcal{IS}_n\}$) za svako $1 \leq k \leq n-1$ važi*

$$\langle D_k \rangle = I_k = \{\alpha \in S : \rho(\alpha) \leq k\}.$$

Lema 4.6. *U polugrupi S ($S \in \{\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n, \mathcal{IS}_n\}$) važi: ako je $\alpha \in S$ za koju važi $\rho(\alpha) = n-1$, za svako $\beta \in S$ sa $\rho(\beta) = n-1$ postoje $\gamma, \delta \in \mathcal{S}_n$ tako da je $\gamma\alpha\delta = \beta$.*

Dokaz. Primetimo da i u slučaju $S = \mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n$ važi $\alpha, \beta \in \mathcal{IS}_n$, zbog prirode polugrupe S i podataka $\rho(\alpha) = n-1$ i $\rho(\beta) = n-1$. Odatle imamo da postoje $x \in \overline{\mathrm{dom}}(\alpha)$, $y \in \overline{\mathrm{dom}}(\beta)$, kao i elementi $z \in \{1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{Im}(\alpha)$ i $w \in \{1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{Im}(\beta)$. Neka je $\gamma \in \mathcal{S}_n$ proizvoljna permutacija koja zadovoljava $(y)\gamma = x$, a $\delta \in \mathcal{S}_n$ definisana sa $(z)\delta = w$ i $(a)\gamma\alpha\delta = (a)\beta$ za $a \in \mathrm{dom}(\beta)$ (moguće je pronaći ovakvu permutaciju, jer je $\mathrm{dom}(\gamma\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ i $\gamma\alpha$ je injekcija na $\mathrm{Im}(\alpha)$, koja je dimenzije $n-1$). $\square$

Slede teoreme o rangovima $\mathcal{PT}_n$ i $\mathcal{IS}_n$, gde ćemo koristiti slične metode kao za računanje ranga $\mathcal{T}_n$. Razlog tome jeste delom u povezanosti ovih polugrupa, ali i u univerzalnosti tehnike za računanje rangova koja se postiže zbog primene Grejevih rezultata prikazanih u drugoj glavi.

Teorema 4.1. *Za $n \geq 3$ je $\mathrm{rank}(\mathcal{PT}_n) = 4$, a $\mathrm{rank}(\mathcal{PT}_2) = 3$ i $\mathrm{rank}(\mathcal{PT}_1) = 2$.*

Dokaz. Za $n = 1$ se trivijalno proverava da oba elementa polugrupe moraju biti u generišućem skupu, jer nijedan ne može da generiše drugog. Za $n \geq 2$ prvo uviđamo da proizvoljan generišući skup A mora da sadrži generišući skup A_1 grupe $\mathcal{S}_n$, jer je ona maksimalna $\mathcal{J}$ klasa i može biti generisana samo svojim elementima. Uz A_1 mora postojati i bar jedan element iz $\mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n$ i bar jedan iz $\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n$, jer je

$$\langle \mathcal{S}_n \cup (\mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n) \rangle = \mathcal{T}_n, \text{ a}$$

$$\langle \mathcal{S}_n \cup (\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n)\rangle = (\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n) \cup \mathcal{S}_n$$

(ovi odnosi važe jer su $\mathcal{T}_n$ i $(\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n) \cup \mathcal{S}_n$ potpolugrupe $\mathcal{PT}_n$). Odatle dobijamo da je $\mathrm{rank}(\mathcal{PT}_n) \geq \mathrm{rank}(\mathcal{T}_n) + 1$.

Dokažimo i suprotnu nejednakost, tako što ćemo naći generatorni skup kardinalnosti $\mathrm{rank}(\mathcal{T}_n) + 1$. Neka je B baza polugrupe $\mathcal{T}_n$ i α proizvoljan elemenat ranga $n-1$ u $\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n$. Prema prethodnoj lemi, tada α generiše sve elemente ranga $n-1$ u $\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n$, pa je time generisan i ceo D_{n-1} polugrupe $\mathcal{PT}_n$. Iz posledice 4.2 sledi da skup $B \cup \{\alpha\}$ generiše čitavu polugrupu. $\square$

Teorema 4.2. *Za* $n \geq 1$ *je* $\mathrm{rank}(\mathcal{IS}_n) = \mathrm{rank}(\mathcal{S}_n) + 1$.

Dokaz. Pošto je $\mathcal{S}_n$ maksimalna $\mathcal{J}$-klasa polugrupe $\mathcal{IS}_n$, a pri tome i zatvorena, zaključujemo da je $\mathrm{rank}(\mathcal{IS}_n) > \mathrm{rank}(\mathcal{S}_n)$, odakle sledi $\mathrm{rank}(\mathcal{IS}_n) \geq \mathrm{rank}(\mathcal{S}_n) + 1$.

Pokažimo i drugu nejednakost. Neka je B baza polugrupe $\mathcal{S}_n$ i α proizvoljan element iz klase D_{n-1} polugrupe $\mathcal{IS}_n$. Prema lemi 4.6 imamo da $B \cup \{\alpha\}$ generiše čitavu klasu D_{n-1}, pa i čitavu polugrupu, zbog posledice 4.2. Zato je $\mathrm{rank}(\mathcal{IS}_n) \geq |B \cup \{\alpha\}| = \mathrm{rank}(\mathcal{S}_n) + 1$. $\square$

Posledica 4.3. *Važi* $\mathrm{rank}(\mathcal{IS}_1) = \mathrm{rank}(\mathcal{IS}_2) = 2$ *i* $\mathrm{rank}(\mathcal{IS}_n) = 3$ *za* $n \geq 3$.

U lemi 4.2 smo proučili rang i idempotentni rang idempotentno generisane potpolugrupe $\mathcal{IS}_n$. Sada ćemo to da uradimo i za $\mathcal{PT}_n$. Videćemo da tu imaju mnogo više sličnosti sa osobinama $\mathcal{T}_n$ nego u $\mathcal{IS}_n$.

Teorema 4.3. *Svi ideali polugrupe* $\mathcal{PT}_n$ *su idempotentno generisani.*

Dokaz. Prema lemi 4.4 svi pravi ideali polugrupe $\mathcal{PT}_n$ su oblika

$$I_k = \{\alpha \in \mathcal{PT}_n : \rho(\alpha) \leq k\}$$

za neko $1 \leq k \leq n-1$. Iz posledice 4.2 znamo da je dovoljno pokazati da je klasa D_k za svako $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ idempotentno generisana. Pošto smo to u lemi 3.10 pokazali za ideale polugrupe $\mathcal{T}_n$, sada nam ostaje da pokažemo da su za navedene indekse k skupovi $A_k = (\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{T}_n) \cap D_k$ idempotentno generisani. Znamo da za proizvoljno $\alpha \in A_k$ možemo pronaći preslikavanje $\varphi : \overline{\mathrm{dom}}(\alpha) \to \mathrm{Im}(\alpha)$. No, tada je transformacija $\alpha' : N \to N$ data sa

$$(x)\alpha' = \begin{cases} (x)\alpha, & x \in \mathrm{dom}(\alpha); \\ (x)\varphi, & x \in \overline{\mathrm{dom}}(\alpha). \end{cases}$$

u $\mathcal{T}_n$, i važi $\rho(\alpha') = k$, te je α' idempotentno generisana. Znači, postoje idempotenti $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ takvi da je $\alpha' = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l$. Ali tada za idempotent $\varepsilon_0 \in \mathcal{PT}_n$ sa domenom $\mathrm{dom}(\varepsilon_0) = \mathrm{dom}(\alpha)$ i definicijom $\varepsilon_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\alpha)}$, imamo da je $\varepsilon_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_l = \alpha$, te je i α idempotentno generisan. $\square$

Posledica 4.4. *Za* $n \geq 1$ *važi* $F(\mathcal{PT}_n) = I_{n-1} \cup \{\mathrm{id}_N\} = (\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{S}_n) \cup \{\mathrm{id}_n\}$.

Teorema 4.4. *Za polugrupu $\mathcal{PT}_n$ $(n \geq 1)$ i $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ je*

$$\operatorname{rank}(I_k) = \mathrm{S}(n+1, k+1).$$

Dokaz. Znamo da je u $\mathcal{PT}_n$ klasa D_k sadrži maksimalne elemente idela I_k, odatle zbog leme 3.5 dobijamo $\operatorname{rank}(D_k) \leq \operatorname{rank}(I_k)$. Sa druge strane, iz posledice 4.2 dobijamo da je $I_k = \langle D_k \rangle$, te je $\operatorname{rank}(I_k) \leq \operatorname{rank}(D_k)$. Odatle imamo $\operatorname{rank}(I_k) = \operatorname{rank}(D_k)$.

Pošto je D_k^0 glavni faktor polugrupe $\mathcal{PT}_n$ (nastaje od klase D_k procesom opisanim na kraju poglavlja 1.6), a ima idempotentnih elemenata za svako $1 \leq k \leq n-1$ te nije 0-polugrupa, iz diskusije na kraju poglavlja 1.6 imamo da je u pitanju kompletno 0-prosta polugrupa. Sada iz teoreme 4.3 imamo da su svi I_k idempotentno generisani, pa nam posledica 2.7 daje da važi

$$\operatorname{rank}(D_k^0) = \max\{|I|, |\Lambda|\},$$

gde I i Λ označavaju skupove svih nenula $\mathcal{R}$- i $\mathcal{L}$-klasa u D_k^0, redom. Broj $|\Lambda|$ se jednostavno izračunava, jer je u pitanju broj različitih slika transformacija ranga k, tj. broj različitih k-članih podskupova n-članog skupa, a to je $\binom{n}{k}$. Sa druge strane, $\mathcal{R}$-klasa je određena domenom i jezgrom svojih transformacija i imamo da je za $\alpha \in D_k$ skup $\overline{\operatorname{dom}}(\alpha) \cup \pi_\alpha$ (gde je π_α particija skupa $\operatorname{dom}(\alpha)$ koja odgovara relaciji ekvivalencije $\ker(\alpha)$) particija skupa $N = \{1, \ldots, n\}$ sa $k+1$ klasa. Međutim, birajući $k+1$-elementnu particiju skupa N nismo utvrdili koja je klasa $\overline{\operatorname{dom}}$, te nismo odredili precizno $\mathcal{R}$-klasu. Ali ukoliko posmatramo $k+1$-članu particiju skupa $\{0, 1, \ldots, n\}$ i za skup $\overline{\operatorname{dom}}$ uzimamo onaj u kome se nalazi elemenat 0, onda smo u potpunosti odredili $\mathcal{R}$-klasu, jer za svaki izbor znamo i skup $\overline{\operatorname{dom}}$ i relaciju ker. Zato je $|I| = \mathrm{S}(n+1, k+1)$. Sada iz leme 3.11 imamo

$$\mathrm{S}(n+1, k+1) \geq \binom{n+1}{k+1},$$

dok se lako dokazuje $\binom{n+1}{k+1} \geq \binom{n}{k}$ za $1 \leq k \leq n$.

Iz svega navedenog dobijamo

$$\operatorname{rank}(I_k) = \operatorname{rank}(D_k^0) = \mathrm{S}(n+1, k+1). \qquad \square$$

Teorema 4.5 (o: [9])**.** *Za $n \geq 1$ u polugrupi $\mathcal{PT}_n$ je*

$$\operatorname{rank}(I_k) = \operatorname{idrank}(I_k) = \mathrm{S}(n+1, k+1)$$

za $2 \leq k \leq n-1$.

Dokaz. Iz prethodne teoreme imamo $\operatorname{rank}(I_k) = \mathrm{S}(n+1, k+1)$, pa nam preostaje da pokažemo da polugrupa I_k ima idempotentnu bazu. Prema lemi

3.15 je dovoljno pronaći balansiran bipartitan, povezan podgraf dimenzije

$$2\min\{|I_{I_k}|, |\Lambda_{I_k}|\} = 2\min\{\binom{n}{k}, \mathrm{S}(n+1, k+1)\} = 2\binom{n}{k}$$

grafa $\Gamma(I_k)$. Međutim, ako se prisetimo da je $\mathcal{T}_n$ potpolugrupa polugrupe $\mathcal{PT}_n$ i da je samim tim polugrupa $S_1 = D_k^{\mathcal{T}_n} \cup \{0\}$ potpolugrupa polugrupe $S_2 = D_k^{\mathcal{PT}_k} \cup \{0\}$ (gde je $D_k^P \cup \{0\}$ glavni faktor sa elementima ranga k polugrupe P), znamo da je $\Gamma(S_1)$ podgraf grafa $\Gamma(S_2)$. Sada možemo zaključiti da je graf $\Gamma' = \Gamma(D_r)[\mathcal{F}_r \cup [\mathcal{F}_r]\phi]$ iz leme 3.18 balansiran bipartitan graf sa simetričnom distribucijom grana u odnosu na neki savršen mečing (postojanje savršenog mečinga nam daje povezanost) i pritom je i podgraf grafa $\Gamma(S_2)$. Iz leme 3.17 sledi da Γ' ima SHC, a iz njegove definicije imamo da je dimenzije $2\binom{n}{k}$, te je Γ' podgraf grafa $\Gamma(S_2)$ koji nam garantuje postojanje idempotentne baze. □

Posledica 4.5. *Za $n \geq 1$ važi*

$$\mathrm{rank}(F(\mathcal{PT}_n)) = \mathrm{idrank}(F(\mathcal{PT}_n)) = \mathrm{S}(n+1, n) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Glava 5

Monoid matrica nad konačnim poljem F

Sledeći slučaj kojim ćemo se baviti se prirodno javlja, s obzirom na veliku primenu matrica u svim granama matematike. Naime, u linearnoj algebri se takođe sreću problemi generisanosti, baza i ideala, a pošto za operaciju množenja matrica (kada su dimenzije odgovarajuće) nad proizvoljnim poljem važi asocijativnost, ali ne i komutativnost, nameće se proučavanje tih pitanja preko teorije polugrupa.

Neka je V n-dimenzioni vektorski prostor nad poljem F konačne kardinalnosti q (ove pretpostavke ćemo zadržati tokom čitave glave). Tada se monoid svih linearnih transformacija $\mathrm{End}(V)$ prostora V može posmatrati kao monoid $M_n(F)$ matrica dimenzija $n \times n$ nad poljem F, jer su u pitanju izomorfni monoidi. Na tu vezu ćemo se nadalje stalno oslanjati bez posebnih napomena, podrazumevajući odgovarajuće predznanje čitaoca iz osnova linearne algebre (referenca može biti recimo [31]). To znači da sve što u ovoj glavi navedemo kao obeležje monoida $\mathrm{End}(V)$, važi i za monoid $M_n(F)$ i obratno, pri čemu nam je samo bilo zgodnije da koristimo prvu odnosno drugu terminologiju.

Prvo poglavlje ove glave je posvećeno ispitivanju Grinovih relacija našeg monoida $\mathrm{End}(V)$, sa osvrtom na njegove ideale. Na kraju dajemo dve leme koje se tiču kardinalnosti $\mathcal{R}$- i $\mathcal{L}$-klasa u fiksiranom idealu, odnosno broja njihovih idempotenata. Nakon drugog poglavlja, u kome pokazujemo idempotentnu generisanost ideala, one će nam biti od pomoći kada primenjujemo teoriju iz poglavlja 3.3 da bismo izračunali rangove ideala monoida $\mathrm{End}(V)$. Za kraj, pomoću rezultata za rang $\mathrm{Aut}(F)$ (tj. $GL_n(F)$) i prethodno iznesenih tvrđenja dajemo formulu za rang $\mathrm{End}(V)$.

Napomenimo da će u ovoj glavi često biti reč o rangu elementa α iz $\mathrm{End}(V)$ (tj. $M_n(F)$), kao o dimenziji potprostora $\mathrm{Im}(\alpha)$. Taj rang, naravno, ne treba mešati sa našim rangom polugrupe, a razlika će biti uvek jasna, jer se jedan pojam odnosi na fiksirani endomorfizam vektorskog prostora, a drugi na neku polugrupu endomorfizama.

5.1 Grinove relacije monoida $M_n(F)$

Nastavljamo sa izlaganjem rezultata iz rada [16], koji ćemo pratiti kroz celokupnu glavu, sa izuzetkom poglavlja 5.2.

Jezgro linearnog preslikavanja $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ označavamo sa $\mathrm{Null}(\alpha)$, a definisano je sa $\mathrm{Null}(\alpha) = \{v \in V : (v)\alpha = 0_V\}$. Naziv ovog pojma možda može da zvuči zbunjujuće pošto smo ranije spominjali relaciju koju smo nazivali jezgrom preslikavanja, ali zbog osobina linearnosti i konačnih vektorskih prostora imamo da za $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ skup $\mathrm{Null}(\alpha)$ određuje relaciju $\ker(\alpha)$, pa tako jednaki nazivi imaju smisla. Obrazložićemo spomenutu zavisnost. Neka je $\mathrm{Null}(\alpha) = S$; lako se pokazuje da je S potprostor V, pa ima bazu $A' = \{a_1, \dots, a_t\}$ (gde je $t \leq n$). Dopunimo A' do baze $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ prostora V. Znamo da je $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(\alpha)) + \dim(\mathrm{Null}(\alpha))$, pa je $\dim(\mathrm{Im}(\alpha)) = n - t$, te slike $(a_{t+1})\alpha, \dots, (a_n)\alpha$ moraju biti linearno nezavisne, da bi generisale prostor dimenzije $n - t$. To znači da su dva elementa iz V u istoj klasi jezgra $\ker(\alpha)$ ako i samo ako su im u prezentaciji preko baze A koeficijenti ispred elemenata $a_{t+1}, \dots, a_n$ jednaki. Odatle zaključujemo da za $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(V)$ važi

$$\mathrm{Null}(\alpha) = \mathrm{Null}(\beta) \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta).$$

Lema 5.1. *U n-dimenzionom vektorskom prostoru V nad poljem F za $A, B \in \mathrm{End}(F)$ imamo*

(i) $A \,\mathcal{L}\, B \Leftrightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$;
(ii) $A \,\mathcal{R}\, B \Leftrightarrow \mathrm{Null}(A) = \mathrm{Null}(B)$;
(iii) $A \,\mathcal{J}\, B \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(B))$.

Dokaz. (i). Pokazaćemo da je

$$A \in L_B \Leftrightarrow \mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(B) \text{ za } A, B \in \mathrm{End}(V), \tag{5.1}$$

odakle će slediti traženo. Ako pretpostavimo da je $A \in L_B$, to znači da postoji $C \in \mathrm{End}(V)$ takvo da je $CB = A$. Neka $y \in \mathrm{Im}(A)$. Odatle znamo da postoji $x \in V$ tako da je $(x)A = y$. Ali tada je i $(x)CB = y$, pa $y \in \mathrm{Im}(B)$. Time je dokazan smer $(\Rightarrow)$ ekvivalencije 5.1.

Dokažimo drugu implikaciju. Neka je $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(B)$. Znamo da linearnu transformaciju određuje slika proizvoljne baze prostora originala. Neka je $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ proizvoljna baza prostora V i neka je $(e_i)A = a_i$ za $i = 1, \dots, n$. Pošto važi $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(B)$, postoje vektori $b_1, \dots, b_n$ takvi da je $(b_i)B = a_i$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka je sada $C : V \to V$ dato sa $(e_i)C = b_i$ za $i = 1, \dots, n$. Pošto je E baza prostora V, ovim je C u potpunosti određeno, a iz informacije da je $(e_i)CB = (e_i)A$ za sve elemente neke baze, sledi $CB = A$.

(ii). Slično kao u prethodnoj stavci, pokazivaćemo ekvivalenciju koja će nam primenjena dva puta dati traženu:

$$A \in R_B \Leftrightarrow \mathrm{Null}(B) \subseteq \mathrm{Null}(A) \text{ za } A, B \in \mathrm{End}(V).$$

Neka je $A \in R_B$. To znači da postoji funkcija $C \in \mathrm{End}(V)$ takva da je $BC = A$. Ako je $a \in \mathrm{Null}(B)$, tada je $(a)BC = (0_V)C = 0_V = (a)A$, pa $a \in \mathrm{Null}(A)$. Pokazali smo smer $(\Rightarrow)$.

Obratno, neka je $\mathrm{Null}(B) \subseteq \mathrm{Null}(A)$. Odatle sledi $\ker(B) \subseteq \ker(A)$. Tražimo egzistenciju preslikavanja $C \in \mathrm{End}(V)$ takvog da je $BC = A$. Neka je $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ proizvoljna baza prostora V i neka je $(e_i)A = a_i$ i $(e_i)B = b_i$ za $i = 1, \dots, n$. Definišimo preslikavanje $C' : \mathrm{Im}(B) \to V$ sa

$$(b_i)C' = a_i, \text{ za } i = 1, \dots, n.$$

Pokažimo dobru definisanost. Ako je $b_k = b_l$ za neke $k, l \in \{1, \dots, n\}$, to znači da je $e_k \ker(B) e_l$, te zbog $\ker(B) \subseteq \ker(A)$ sledi $e_k \ker(A) e_l$, odakle je $a_k = a_l$. Neka je $C : V \to V$ proizvoljno linearno proširenje funkcije C' (primer takvog proširenja: ako proizvoljnu bazu prostora $\mathrm{Im}(A)$ proširimo do baze vektorskog prostora V i novodobijene bazne vektore sve preslikamo u 0_V, takvo linearno proširenje funkcije C' ispunjava tražene uslove). Tada je $(e_i)BC = (e_i)A$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$, te pošto je E baza, sledi $BC = A$.

(iii) Opet ekvivalenciju svodimo na jednostavniju:

$$A \in J_B \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(A)) \leq \dim(\mathrm{Im}(B)) \text{ za } A, B \in \mathrm{End}(V).$$

Neka je $A \in J_B$. Tada postoje funkcije $C, D \in \mathrm{End}(V)$ takve da je $CAD = B$. Iz ove jednakosti sledi da je $CA \in R_B$, $A \in L_{CA}$, te iz dokaza slučajeva (ii) i (i) redom sledi $\ker(B) \subseteq \ker(CA)$ i $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathrm{Im}(CA)$. Tada je

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) \leq \dim(\mathrm{Im}(CA)) = |\ker(CA)| \leq |\ker(B)| = \dim(\mathrm{Im}(B)).$$

Pokažimo i drugu implikaciju. Neka je $k = \dim(\mathrm{Im}(A)) \leq \dim(\mathrm{Im}(B)) = m$. Pošto su u pitanju prostori konačnih dimenzija, važi $\mathrm{Im}\, A \cong F^k$ i $\mathrm{Im}(B) \cong F^m$. Znamo da je $k \leq m$, te postoji (linearni) epimorfizam iz F^m na F^k. Iz prethodno iznesenih stavki dobijamo egzistenciju linearnog epimorfizma $C' : \mathrm{Im}(B) \to \mathrm{Im}(A)$. Sada kao i u slučaju (ii) posmatrajmo proizvoljno linearno proširenje $C : V \to \mathrm{Im}(A)$ funkcije C'. Dobijamo da je $\mathrm{Im}(BC) = \mathrm{Im}(A)$, te iz (i) znamo $BC \,\mathcal{L}\, A$, što znači da postoji $D \in \mathrm{End}(V)$ takvo da je $DBC = A$, pa imamo da je $A \in J_B$. □

Posledica 5.1. *U monoidu* $\mathrm{End}(V)$ *važi* $A \,\mathcal{H}\, B \Leftrightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B) \wedge \mathrm{Null}(A) = \mathrm{Null}(B)$.

Ako se čitalac podseti osobina pune polugrupe transformacija $\mathcal{T}_n$, videće da su ove tri relacije određene na sličan način kao za monoid $M_n(F)$. Razlog tome leži u sličnosti njihovih algebarskih svojstava, što je detaljno objašnjeno u [13]. Ta analogija će da se pokaže i u strukturi ideala, kao i kasnije u osobinama generisanosti i rangova, odnosno idempotentnih rangova.

Teorema 5.1. *Svi ideali polugrupe* $\mathrm{End}(V)$ *su oblika*

$$I(r,n,q) = \{A \in \mathrm{End}(V) : \dim(\mathrm{Im}(A)) \leq r\}$$

za neko $1 \leq r \leq n$.

Dokaz. Neka je I proizvoljan ideal polugrupe $\mathrm{End}(V)$ i $A \in I$ elemenat maksimalne dimenzije slike (drugim rečima, njemu odgovarajuća matrica ima maksimalni rang u skupu svih matrica vezanih za preslikavanja iz I). Takav elemenat postoji, jer su dimenzije slika ograničene dimenzijom prostora V. Neka je $k = \dim(\mathrm{Im}(A))$. Zbog te maksimalnosti imamo da je $I \subseteq I(k,n,q) = \{A \in \mathrm{End}(V) : \dim(\mathrm{Im}(A)) \leq k\}$. Tada iz stavke (*iii*) prethodne leme sledi $J_A = I(k,n,q) \subseteq I$, jer je J_A minimalan ideal koji sadrži A. $\square$

Za $1 \leq r \leq n-1$ uvedimo oznaku $J(r,n,q) = I(r,n,q) \setminus I(r-1,n,q)$. Uviđamo da su $J(r,n,q)^0$ ustvari glavni faktori polugrupe $\mathrm{End}(V)$, dok su $I(r,n,q)$ unije $\mathcal{J}$-klasa manjih ili jednakih sa $J(r,n,q)$ i istovremeno i jedini ideali. U literaturi se umesto $J(r,n,q)^0$ često koristi oznaka $PF(r,n,q)^0$. Ako se prisetimo posledice 1.4, zbog konačnog broja levih i desnih ideala dobijamo zadovoljenost uslova M_R i M_L i još jednu osobinu monoida $\mathrm{End}(V)$.

Lema 5.2. *U monoidu* $\mathrm{End}(V)$ *važi* $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Naredne dve leme će ispitati broj klasa unutar fiksirane $\mathcal{J}$-klase, u cilju dokazivanja da je bipartitan graf $\Gamma(PF(r,n,q)^0)$ balansiran i regularan za sve $0 < r < n$.

Lema 5.3. *Broj nenula* $\mathcal{L}$*-klasa (odnosno nenula* $\mathcal{R}$*-klasa) u* $J(r,n,q)$ *je* $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$*, gde je*

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

Dokaz. U nenula $\mathcal{L}$-klasi ($\mathcal{R}$-klasi) sa elementom α se nalaze sva preslikavanja sa fiksiranom slikom $\mathrm{Im}(\alpha)$ (odnosno sa jezgrom $\mathrm{Null}(\alpha)$). Pošto smo u $J(r,n,q)$, sve funkcije su ranga r, tj. to je dimenzija njihove slike, a nulitet (drugim rečima, dimenzija jezgra) je $n-r$. Sračunajmo koliko ima potprostora prostora V dimenzija r (odnosno $n-r$): od q^n-1 različitih nenula n-dimenzionih vektora biramo r (odnosno $n-r$), sa tim da svaki sledeći biramo van prostora generisanog prethodno izabranim vektorima; pri tome, jasno je da smo napravili prostora za ponavljanje izbora potprostora promenom baze ili redosleda vektora u njoj, pa dobijeni proizvod moramo da podelimo brojem ponavljanja, tj. brojem mogućih načina izbora proizvoljne baze fiksiranog r-dimenzionog ($n-r$-dimenzionog) prostora. To nam daje tačno $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ mogućih potprostora dimenzije r, odnosno $\begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ (ova jednakost se jednostavno dokazuje) potprostora dimenzije $n-r$. □

Lema 5.4. *Broj idempotenata svake nenula $\mathcal{L}$-klase ($\mathcal{R}$-klase) unutar $\mathcal{J}$-klase $J(r,n,q)$ je $q^{r(n-r)}$.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ idempotent. Tada je $\alpha^2 = \alpha$, odakle je $\mathrm{Null}(\alpha^2) = \mathrm{Null}(\alpha)$, pa je $\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Null}(\alpha) = \{0\}$. Pošto je u pitanju idempotent, jasno je da za svako $x \in \mathrm{Im}(\alpha)$ mora da važi $(x)\alpha = x$. Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ baza prostora $\mathrm{Im}(\alpha)$, a $Y = \{y_1, \ldots, y_{n-r}\}$ baza $\mathrm{Null}(\alpha)$. Tada je prema prethodno rečenom $X \cap Y = \emptyset$. Dokažimo da je $X \cup Y$ linearno nezavisan skup: neka je za $a_1, \ldots a_n \in F$

$$a_1x_1 + \ldots + a_rx_r + a_{r+1}y_1 + \ldots + a_ny_{n-r} = 0 \tag{5.2}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
(a_1x_1 + \ldots + a_rx_r + a_{r+1}y_1 + \ldots + a_ny_{n-r})\alpha &= (0)\alpha = 0 \\
a_1(x_1)\alpha + \ldots + a_r(x_r)\alpha + a_{r+1}(y_1)\alpha + \ldots + a_n(y_{n-r})\alpha &= 0 \\
a_1x_1 + \ldots + a_rx_r &= 0,
\end{aligned}$$

odakle zbog linearne nezavisnosti skupa X imamo $a_1 = \cdots = a_r = 0$, pa iz (5.2) imamo $a_{r+1}y_1 + \ldots + a_ny_{n-r} = 0$ i sada iz linearne nezavisnosti Y dobijamo i $a_{r+1} = \ldots = a_n = 0$. Dokazali smo da je skup $X \cup Y$ linearno nezavisan, pa pošto je kardinalnosti n zaključujemo da je baza prostora V. Znači, za fiksiran prostor slika S dimenzije r idempotenata nema manje nego sa njim disjunktnih potprostora V dimenzije $n-r$, jer svaki takav potprostor N određuje idempotent α_N koji je za proizvoljnu bazu $\{x_1, \ldots, x_r\}$ prostora S i proizvoljnu bazu $\{y_1, \ldots, y_{n-r}\}$ prostora N određen sa $(x_i)\alpha_N = x_i$ za $i \in \{1, \ldots, r\}$ i $(y_j)\alpha_N = 0$ za $j = 1, \ldots, n-r$. To je ujedno i jedini takav idempotent, zbog uslova $\mathrm{Null}(\alpha) = N$ i $\alpha\restriction_S = \mathrm{id}_S$. Simetričan argument važi i ako fiksiramo jezgro dimenzije $n-r$ i ispitujemo sve disjunktne potprostore dimenzije r.

Dakle, cilj nam je da za fiksiran potprostor S prostora V dimenzije r (odnosno $n-r$) izračunamo broj sa njim disjunktnih potprostora dimenzije $n-r$ (odnosno r). Taj broj ćemo izračunati tako što ćemo za proizvoljnu bazu prostora S broj njenih dopuna do baze prostora V podeliti sa brojem baza fiksiranog potprostora dimenzije $n-r$ (odnosno r). U prvom slučaju broj mogućih potprostora je

$$\frac{(q^n - q^r)(q^n - q^{r+1}) \cdots (q^n - q^{n-1})}{(q^{n-r} - 1)(q^{n-r} - q) \cdots (q^{n-r} - q^{n-r-1})} = (q^r)^{n-r},$$

dok je u drugom

$$\frac{(q^n - q^{n-r})(q^n - q^{n-r+1}) \cdots (q^n - q^{n-1})}{(q^r - 1)(q^r - q) \cdots (q^r - q^{r-1})} = (q^{n-r})^r. \qquad \square$$

5.2 Idempotentna generisanost ideala $M_n(F)$

U ovom poglavlju ćemo ukratko (i sa umanjenom opštošću) izneti rezultate rada [7], a cilj nam je da pokažemo da je $I(r, n, q)$ idempotentno generisan za sve $0 \leq r \leq n - 1$.

Primetimo, za $n = 1$ jedini ideal polugrupe $M_n(F)$ je $I(0, 1, q)$, čiji su svi elementi konstante, pa su u pitanju idempotenti. Odatle vidimo da je ideal trivijalno idempotentno generisan. Zato pretpostavimo da je $n \geq 2$.

Lema 5.5. *Neka je $\alpha \in D_{r-1}$, gde je $1 \leq r < n$. Tada postoje endomorfizmi $\beta, \gamma \in D_r$ takvi da je $\alpha = \beta\gamma$.*

Dokaz. U slučaju da je $r = 1$, znamo da važi $D_0 = \{0_V\}$. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna baza prostora V. Definišimo $\beta, \gamma \in \mathrm{End}(V)$ sa $(x_1)\beta = x_1$ i $(x_i)\beta = 0$ za $1 < i \leq n$, a $(x_1)\gamma = 0$ i $(x_i)\gamma = x_1$ u slučaju $1 < i \leq n$. Tada je $0_V = \beta\gamma$, i važi $\dim(\mathrm{Im}(\beta)) = \dim(\mathrm{Im}(\gamma)) = 1$.

Pretpostavimo da je $r \geq 2$. Tada postoji baza $\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ prostora $\mathrm{Im}(\alpha)$. Ona se može dopuniti do baze $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ prostora V. Neka su elementi y_i takvi da je $x_i = (y_i)\alpha$ za $i = 1, \ldots, r-1$. Iz linearne nezavisnosti skupa $\{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ sledi da je i $\{y_1, \ldots, y_{r-1}\}$ linearno nezavisan, pa ga možemo dopuniti do baze $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ prostora V. Jasno, važi $(y_i)\alpha \in \langle x_1, \ldots, x_{r-1}\rangle$. Definišimo sada preslikavanja β i γ preko baza Y, odnosno X:

$$(y_i)\beta = \begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq r; \\ (y_i)\alpha, & r < i \leq n. \end{cases} \qquad (x_i)\gamma = \begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq r-1; \\ (y_i)\alpha, & i = r - 1; \\ x_r, & r < i \leq n. \end{cases}$$

Lako se uviđa da je $(y_i)\beta\gamma = (y_i)\alpha$ i $\mathrm{Im}(\beta) = \mathrm{Im}(\gamma) = \langle x_1, \ldots, x_r\rangle$, pa fukcije β i γ ispunjavaju tražene uslove. $\square$

Upravo smo dokazali da u $\mathrm{End}(V)$ važi $D_{r-1} \subseteq \langle D_r\rangle$ za $1 \leq r < n$. Naredne leme će u priču da uvedu i idempotente, da bismo u poslednjoj teoremi poglavlja pokazali da su odnosi generisanosti isti kao kod ideala polugrupe $\mathcal{T}_n$.

Lema 5.6. *Za svaki par $\alpha, \beta \in E(D_{n-1})$, postoji idempotent $\varepsilon \in E(D_{n-1})$ takav da je $\alpha\varepsilon\beta \in D_{n-1}$.*

Dokaz. Neka je $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ baza za $\mathrm{Im}(\alpha)$. Pošto je α idempotent, važi $(x_i)\alpha = x_i$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Neka je x_n dopuna skupa $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ do baze prostora V. Znamo da je $\mathrm{Im}(\beta) = \langle (x_1)\beta, \ldots, (x_n)\beta \rangle$. Pošto je rang preslikavanja β jednak $n-1$, postoji linearno nezavisan podskup kardinalnosti $n-1$ skupa $\{(x_1)\beta, \ldots, (x_n)\beta\}$.

Ukoliko je skup $\{(x_1)\beta, \ldots, (x_{n-1})\beta\}$ linearno nezavisan, zbog $(x_i)\alpha\beta = (x_i)\beta$ za $i = 1, \ldots, n-1$ imamo da je $\alpha\beta$ ranga $n-1$, pa je za izbor $\varepsilon = \alpha$ ispunjeno $\alpha\varepsilon\beta \in D_{n-1}$.

U slučaju da je $\{(x_1)\beta, \ldots, (x_{n-1})\beta\}$ linearno zavisan, možemo bez umanjenja opštosti pretpostaviti da je $\{(x_2)\beta, \ldots, (x_n)\beta\}$ linearno nezavisan. Pri tome važi $(x_n)\beta \notin \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$ (u suprotnom bismo imali $(x_n)\beta = (x_n)\beta^2 \in \langle (x_1)\beta, \ldots, (x_{n-1})\beta \rangle$, pa bi važilo $\mathrm{Im}(\beta) = \langle (x_1)\beta, \ldots, (x_{n-1})\beta \rangle$, odakle zbog ranga preslikavanja β sledi da je $\{(x_1)\beta, \ldots, (x_{n-1})\beta\}$ linearno nezavisan, što je kontradikcija). Odatle znamo da je $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, (x_n)\beta\}$ linearno nezavisan. Definišimo $\varepsilon \in \mathrm{End}(V)$ sa $(x_1)\varepsilon = (x_n)\beta$, $((x_n)\beta)\varepsilon = (x_n)\beta$ i $(x_i)\varepsilon = x_i$ za $2 \leq i \leq n-1$. Lako se proverava da je $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\dim \mathrm{Im}(\varepsilon) = n-1$ kao i da važi $\mathrm{Im}(\alpha\varepsilon\beta) = \langle (x_2)\beta, \ldots, (x_{n-1})\beta, (x_n)\beta \rangle$, odakle je $\alpha\varepsilon\beta \in D_{n-1}$. □

Posledica 5.2. *Svaka $\mathcal{H}$-klasa iz D_{n-1} sadrži element koji je proizvod najviše tri idempotenta.*

Dokaz. Neka je H proizvoljna $\mathcal{H}$-klasa u D_{n-1} i $\alpha \in H$. Pošto je polugrupa $P = PF(n-1, n, q)^0$ regularna (ovo svojstvo povlači mnoge "lepe" osobine, koje nismo mogli detaljno ispitati zbog ionako velikog obima rada; detalji se mogu pronaći u [26]), postoje idempotenti $\beta \in R_\alpha$ i $\gamma \in L_\alpha$. Prema prethodnoj lemi, postoji idempotent $\varepsilon \in D_{n-1}$ takav da je $\beta\varepsilon\gamma \in D_{n-1}$. Pri tome znamo da je P kompletno 0-prosta, te prema svojstvima pravilnih RMP, $\beta \, \mathcal{R} \, \beta\varepsilon\gamma \, \mathcal{L} \, \gamma$, pa je $\beta\varepsilon\gamma \in H$. □

Posledica 5.3. *Neka je H grupna $\mathcal{H}$-klasa unutar D_{n-1}. Tada svaki elemenat iz D_{n-1} može biti izražen u obliku proizvoda elemenata iz $H \cup E(D_{n-1})$.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in D_{n-1}$ proizvoljno i neka je $\beta = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ elemenat klase H_α koji je proizvod idempotenata ε_1, ε_2 i ε_3 iz D_{n-1} (takav postoji na osnovu prethodne posledice). Iz istog razloga postoji i elemenat $\gamma \in H$ takav da je $\gamma = \varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6$, gde su ε_4, ε_5 i ε_6 iz $E(D_{n-1})$. Iz izraza za β odnosno γ sledi redom da je $\alpha \, \mathcal{H} \, \beta \, \mathcal{R} \, \varepsilon_1$ i $\gamma \, \mathcal{R} \, \varepsilon_4$. Primenom leme 5.6 dobijamo da za ε_1 i ε_4 postoji $\varepsilon \in E(D_{n-1})$ takav da je $\varepsilon_1\varepsilon\varepsilon_4 \in D_{n-1}$, pa sledi da je $\varepsilon_1\varepsilon \in D_{n-1}$ i $\varepsilon\varepsilon_4 \in D_{n-1}$. Sada iz leme 1.8 sledi da klase $L_{\varepsilon_1} \cap R_\varepsilon$ i $L_\varepsilon \cap R_{\varepsilon_4}$ sadrže idempotente, recimo ζ i ξ redom. Dobijamo da važe sledeći odnosi:

$$\gamma \, \mathcal{R} \, \varepsilon_4 \, \mathcal{R} \, \xi \, \mathcal{L} \, \varepsilon \, \mathcal{R} \, \zeta \, \mathcal{L} \, \varepsilon_1 \, \mathcal{R} \, \beta \, \mathcal{H} \, \alpha,$$

pa iz Grinove leme i njenog duala imamo da je funkcija $f : H \to H_\alpha$ data sa $(x)f = \varepsilon_1 \varepsilon x \varepsilon_4 \xi \zeta \beta$ bijekcija (pri množenju nigde ne upadamo u nižu $\mathcal{D}$-klasu, jer proizvod dva elementa iz grupnih $\mathcal{H}$ klasa koje su u istoj $\mathcal{L}$- ili istoj $\mathcal{R}$-klasi dospeva u $\mathcal{H}$ klasu prvog ili drugog, u zavisnosti od redosleda množenja). Tada za elemenat α postoji original $\delta \in H$ takav da je $\alpha = \varepsilon_1 \varepsilon \delta \varepsilon_4 \xi \zeta \beta$, te je tvrđenje dokazano. □

Teorema 5.2. *U* $\mathrm{End}(V)$ *važi* $D_{n-1} \subseteq \langle E(D_{n-1}) \rangle$.

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po n. Baza indukcije je slučaj $n = 1$ koji je dokazan u lemi 5.5, jer su tada svi elementi D_0 idempotenti. Ako je $n = 2$, posmatrajmo bazu $\{x, y\}$ prostora V. $\mathcal{H}$-klasa

$$H = \{\alpha \in \mathrm{End}(V) : \mathrm{Im}(\alpha) = \{y\} \wedge \ker(\alpha) = Cg^V(x, y)\}$$

(gde je $Cg^V(x, y)$ glavna kongruencija generisana parom (x, y), tj. najmanja kongruencija u kojoj su x i y u istoj klasi – opširnije o tom pojmu se može naći u [2]) je sigurno grupna, jer sadrži idempotent η dat sa $(x)\eta = y$ i $(y)\eta = y$. Za proizvoljno $\alpha \in H$ tada imamo $(x)\alpha = (y)\alpha = a$, za neki element $a \in \langle y \rangle$. Definišimo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathrm{End}(V)$ sa $(x)\varepsilon_1 = (y)\varepsilon_1 = x$ i $(x)\varepsilon_2 = a$, $(y)\varepsilon_2 = y$. Odmah uviđamo da su ε_1 i ε_2 idempotenti ranga 1 i da je $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \alpha$. Pošto je $\alpha \in H$ bio proizvoljno izabran, važi $H \subseteq \langle E(D_{n-1}) \rangle$, pa iz posledice 5.3 dobijamo da je $D_{n-1} \subseteq \langle E(D_{n-1}) \rangle$.

Pretpostavimo da je za neko $n \geq 3$ i polugrupu $M_{n-1}(F)$ ispunjeno $D_{n-2} \subseteq \langle E(D_{n-2}) \rangle$ i pokažimo da i u $M_n(F)$ važi $D_{n-1} \subseteq \langle E(D_{n-1}) \rangle$. Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza vektorskog prostora V nad F dimenzije n. Posmatrajmo $\mathcal{H}$-klasu

$$H = \{\alpha \in \mathrm{End}(V) : \mathrm{Im}(\alpha) = \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \wedge \ker(\alpha) = Cg^V(x_1, x_2)\}.$$

Ponovo zaključujemo da je u pitanju grupna klasa, jer je idempotent θ definisan sa $(x_1)\theta = (x_2)\theta = x_2$ i $(x_i)\theta = x_i$ za $i = 3, \ldots, n$ u H. Za proizvoljan element $\alpha \in H$ imamo da je $(x_1)\alpha = (x_2)\alpha$, pa je zbog $\alpha \in D_{n-1}$

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \langle (x_2)\alpha, \ldots, (x_n)\alpha \rangle,$$

i skup $\{(x_2)\alpha, \ldots, (x_n)\alpha\}$ je linearno nezavisan. Pošto $x_1 \notin \mathrm{Im}(\alpha)$, sledi da je i skup $\{x_1, (x_2)\alpha, \ldots, (x_n)\alpha\}$ linearno nezavisan, pa je zbog dimenzije V to i njegova baza. Pomoću te baze definišimo $\psi \in \mathrm{End}(V)$ sa $(x_1)\psi = (x_2)\alpha$ i $((x_i)\alpha)\psi = (x_i)\alpha$ za $i = 2, \ldots, n$. Jednostavno se proverava da je ψ idempotent ranga $n - 1$. Pored toga, definišimo i idempotent φ sa $(x_1)\varphi = (x_2)\varphi = x_1$ i $(x_i)\varphi = x_i$ za $i = 3, \ldots, n$. I on je ranga $n - 1$.

Sada posmatrajmo potprostor $B = \langle x_2, \ldots, x_n \rangle$ i element $\beta' \in \mathrm{End}(B)$ dat sa $(x_2)\beta' = (x_3)\beta' = (x_3)\alpha$ i $(x_i)\beta' = (x_i)\alpha$ u slučaju $i = 4, \ldots, n$. Imamo da je $\mathrm{Im}(\beta') = \langle (x_3)\alpha, \ldots, (x_n)\alpha \rangle$, te znamo da je β' ranga $n - 2$. Prema indukcijskoj hipotezi postoje idempotenti $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_k \in \mathrm{End}(B)$ ranga

$n-2$ takvi da je $\beta' = \varepsilon_1' \cdots \varepsilon_k'$. Neka je sada $\varepsilon_i \in \mathrm{End}(V)$ za $i = 1, \ldots, n$ dato sa $(x_1)\varepsilon_i = x_1$ i $(x_j)\varepsilon_i = (x_j)\varepsilon_i'$ kada je $j = 2, \ldots, n$. Slično kao u ranijim slučajevima, imamo da su ε_i idempotenti ranga $n-1$. Ako je sada $\beta = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k$, lako se pokazuje da je $\alpha = \varphi\beta\psi$, pa zbog proizvoljnog izbora elementa $\alpha \in H$ dobijamo da je $H \subseteq \langle E(D_{n-1}) \rangle$, odakle zbog posledice 5.3 važi $D_{n-1} \subseteq \langle E(D_{n-1}) \rangle$, pa je indukcijski korak dokazan. □

Posledica 5.4. *Za* $0 \leq r \leq n-1$ *potpolugrupa* $I(r, n, q)$ *je idempotentno generisana u* $\mathrm{End}(V)$. *Štaviše, može se generisati koristeći isključivo idempotente iz njene najveće* $\mathcal{J}$*-klase,* $J(r, n, q)$.

Napomenimo da se kao direktna posledica do sada navedenih tvrđenja dobija teorema iz 1967, koja je analogon teoreme 3.3.

Teorema 5.3 (o: [6])**.** *Svaka singularna matrica može biti zapisana u obliku proizvoda idempotentnih matrica.*

5.3 Rangovi i idempotentni rangovi ideala $M_n(F)$

U ovom poglavlju koristimo rezultate prethodnih poglavlja da bismo izveli tvrđenja o rangovima i idempotentnim rangovima ideala $M_n(F)$, kao i o rangu same polugrupe.

Teorema 5.4. *Za* $1 \leq r < n$ *važi* $\mathrm{rank}(I(r, n, q)) = \mathrm{idrank}(I(r, n, q)) = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$.

Dokaz. Prema lemi 5.3 dobijamo da je graf $\Gamma(PF(r, n, q)^0)$ balansiran, dok prema lemi 5.4 dobijamo da polugrupa $PF(r, n, q)^0$ ima $q^{r(n-r)}$-uniformnu distribuciju idempotenata. Sada iz leme 3.16 sledi da $PF(r, n, q)^0$ zadovoljava SHC, te iz teoreme 3.7 dobijamo da ima idempotentnu bazu, odakle sledi da i $J(r, n, q)$ ima idempotentnu bazu (jer se razlikuju samo po elementu 0, koji je automatski generisan). Najzad, iz leme 3.13 sledi da je

$$\mathrm{rank}(PF(r, n, q)^0) = \mathrm{idrank}(PF(r, n, q)^0) = \max\{|I|, |\Lambda|\} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q. \qquad \square$$

Posledica 5.5. *Podskup skupa* $I(r, n, q)$ *veličine* $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ *je generišući za polugrupu* $I(r, n, q)$ *ako i samo ako su svi njegovi elementi ranga* r*, sa po parovima međusobno različitim jezgrima i slikama.*

Dokaz. Prema lemi 5.3 kompletno 0-prosta polugrupa $PF(r, n, q)^0$ je kvadratna, a iz prethodne teoreme znamo da ima idempotentnu bazu. Teorema 3.7 nam daje da je svaki minimalni pokrivač generišući skup polugrupe, a minimalni pokrivači odgovaraju minimalnim generišućim skupovima, tj. bazama polugrupe. □

Sledeća teorema je poznat rezultat kombinatorne teorije grupa, a biće nam potrebna za izračunavanje ranga $\mathrm{End}(V)$, jer je $\mathrm{Aut}(V)$ njegova podgrupa i istovremeno i maksimalna $\mathcal{J}$-klasa, pa ne može biti generisana učešćem elemenata iz nižih klasa.

Teorema 5.5 (i: [33])**.** *Za* $n > 1$ *je* $\mathrm{rank}(GL_n(F)) = \mathrm{rank}(\mathrm{Aut}(V)) = 2$.

Za kraj, dajemo takođe klasičan rezultat:

Teorema 5.6. *Za* $n > 1$ *važi* $\mathrm{rank}(\mathrm{End}(V)) = 3$.

Dokaz. Kao i u slučaju pune polugrupe transformacija, pokazaćemo da se za svaki par $\alpha, \beta \in D_{n-1}$ mogu pronaći $\gamma, \delta \in D_n$ tako da je $\gamma\alpha\delta = \beta$. Odatle će zbog prethodne teoreme slediti da je $\mathrm{rank}(\mathrm{End}(V)) \leq \mathrm{rank}(\mathrm{Aut}(V)) + 1 = 3$, a pošto je $\mathrm{Aut}(V)$ maksimalna $\mathcal{J}$-klasa polugrupe $\mathrm{End}(V)$ koja je zatvorena za kompoziciju, imamo da je $\mathrm{rank}(\mathrm{End}(V)) > \mathrm{rank}(\mathrm{Aut}(V)) = 2$, pa sledi navedeni rezultat.

Neka su $\alpha, \beta \in D_{r-1}$ i neka su $X' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ i $Y' = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ redom baze prostora $\mathrm{Im}(\alpha)$ i $\mathrm{Im}(\beta)$. Skupove X' i Y' možemo dopuniti do baza $X = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ i $Y = \{y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$. Sada endomorfizam δ dat sa $(x_i)\delta = y_i$ za $1 \leq i \leq n$ ima rang n (jer je $\mathrm{Im}(\delta) = \langle Y \rangle$), te je $\delta \in D_n$. Imamo da je $\mathrm{Im}(\alpha\delta) = \mathrm{Im}(\beta)$, pa znamo da važi $\alpha\delta \,\mathcal{L}\, \beta$, odakle dobijamo da postoji $\gamma' \in \mathrm{End}(V)$ takvo da je $\gamma'\alpha\delta = \beta$. Pošto je X' linearno nezavisan, imamo da je svaki skup $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ takav da je $(z_i)\alpha = x_i$ za $i = 1, \ldots, n-1$ linearno nezavisan. Pošto je $(\mathrm{Im}(\gamma'\alpha)) = \mathrm{Im}(\alpha)$ postoji takav skup $Z' = \{z_1, \ldots, z_{n-1}\} \subseteq \mathrm{Im}(\gamma')$, pa postoji linearno nezavisan skup originala $W' = \{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ takav da je $(w_i)\gamma' = z_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$. Ako su z_n i w_n dopune skupova Z' i W' do baze V, redom, onda preslikavanje γ dato sa $(w_i)\gamma = z_i$, $1 \leq i \leq n$ zadovoljava $\gamma \in D_r$ i $\gamma\alpha\delta = \beta$. $\square$

Glava 6

Monoidi $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$

Poslednji slučaj kojim ćemo se baviti je polugrupa *transformacija koje očuvavaju poredak*. Naime, ako je X totalno uređen skup, tada za preslikavanje $\alpha : X \to X$ koje za sve $a, b \in X$ zadovoljava

$$a \leq b \Rightarrow (a)\alpha \leq (b)\alpha$$

kažemo da *očuvava poredak*. Ukoliko preslikavanje $\alpha \in \mathcal{PT}_X$ zadovoljava isti uslov, nazivamo ga *parcijalna transformacija koja očuvava poredak*. Pokažimo zatvorenost skupa (parcijalnih) transformacija koje očuvavaju poredak u odnosu na operaciju kompozicije. Neka α i β očuvavaju poredak i neka su $a, b \in \mathrm{dom}(\alpha)$ i $(a)\alpha, (b)\alpha \in \mathrm{dom}(\beta)$; tada važi

$$a \leq b \Rightarrow (a)\alpha \leq (b)\alpha \Rightarrow ((a)\alpha)\beta \leq ((b)\alpha)\beta.$$

Stoga možemo uvesti sledeću definiciju:

Definicija 6.1. Skup (punih) transformacija nad nepraznim linearno uređenim skupom X koje očuvavaju poredak zajedno sa operacijom kompozicije čine polugrupu koju označavamo sa $\mathcal{O}_X$. Analogon te polugrupe koji za nosač ima skup pacijalnih transformacija koje očuvavaju poredak je polugrupa $\mathcal{PO}_X$.

Lako se uviđa da su u pitanju monoidi sa jedinicom id_X i istovremeno potpolugrupe polugrupa $\mathcal{T}_X$, odnosno $\mathcal{PT}_X$. Pored toga, $\mathcal{O}_X$ je potpolugrupa polugrupe $\mathcal{PO}_X$. Ukoliko je $|X| = n \leq \aleph_0$, kao i u prethodnim glavama, skup X identifikujemo sa $N = \{1, \ldots, n\}$.

U ovoj glavi ćemo ispitati osobine $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$ sa stanovišta ranga. Kao i u prethodnim glavama, počinjemo ispitivanjem Grinovih relacija i strukture ideala, da bismo prešli na pitanja generisanosti. Tu odmah pokazujemo da su polugrupe ovog tipa idempotentno generisane i to idempotentima svoje dve najveće klase. Odatle odmah izvodimo i njihov idempotentni rang, a zatim i sam rang. Ova glava je, kao i delovi prethodnih, pisana nezavisno od literature, uz date reference na radove gde se rezultati prvi put pojavljuju.

6.1 Grinove relacije u $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$

Primetimo prvo da svaki element $\alpha \in \mathcal{PO}_n$ ima *konveksnu particiju* π_α koja odgovara relaciji $\ker_\alpha$, tj. da za $a, b, x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ važi

$$a \leq x \leq b \quad \wedge \quad (a)\alpha = (b)\alpha \quad \Rightarrow \quad (a)\alpha = (x)\alpha = (b)\alpha.$$

To znači da možemo definisati poredak među klasama particije π_α na sledeći način: za $A, B \in \pi_\alpha$ je

$$A \leq B \Leftrightarrow \exists a \in A\ \exists b \in B\ (a \leq b).$$

Zbog konveksnosti particije, ova relacija je dobro definisana, a relacija $<$ koja se od nje dobija na prirodan način je totalno uređenje.

Sada možemo pokazati lemu koja će nam biti od velike koristi pri izučavanju ovih polugrupa.

Lema 6.1. *Ako je $\alpha \in \mathcal{O}_n$ ($\mathcal{PO}_n$), onda za $a, b \in \mathrm{Im}(\alpha)$ važi*

$$a < b \Leftrightarrow [a]_{\ker(\alpha)} < [b]_{\ker(\alpha)}.$$

Dokaz. Smer ($\Leftarrow$) sledi direktno, jer iz $[a]_{\ker(\alpha)} < [b]_{\ker(\alpha)}$ dobijamo postojanje $x_a \in [a]_{\ker(\alpha)}$ i $x_b \in [b]_{\ker(\alpha)}$ tako da je $x_a < x_b$ (ne mogu biti jednaki, jer nisu u istoj klasi $\ker_\alpha$), pa je $a = (x_a)\alpha < (x_b)\alpha = b$ (opet jednakost ne može da važi iz istih razloga).

($\Rightarrow$) Neka je $a < b$. Pretpostavimo suprotno, da je $[a]_{\ker(\alpha)} \geq [b]_{\ker(\alpha)}$. Tada postoje $x_a \in [a]_{\ker(\alpha)}$ i $x_b \in [b]_{\ker(\alpha)}$ sa osobinom $x_a \geq x_b$. Odatle je $a = (x_a)\alpha \geq (x_b)\alpha = b$, što je u kontradikciji sa početnom pretpostavkom. $\square$

Za karakterizaciju idempotenata za sada možemo da uzmemo da je ista kao i kod $\mathcal{PT}_n$ (lema 4.1, uz dodatak uslova očuvanja poretka), jer su u pitanju njene potpolugrupe. Tek u sledećem poglavlju ćemo imati potrebu da ih detaljnije ispitamo. Ovde se posvećujemo proučavanju Grinovih relacija i strukture ideala, jer želimo da istražimo kako izgledaju glavni faktori.

Lema 6.2. *Za $\alpha, \beta \in S$, ($S \in \{\mathcal{O}_n, \mathcal{PO}_n\}$) važi*

(i) $\alpha\,\mathcal{L}\,\beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta)$;
(ii) $\alpha\,\mathcal{R}\,\beta \Leftrightarrow \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) \wedge \ker(\alpha) = \ker(\beta)$;
(iii) $\alpha\,\mathcal{H}\,\beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\beta) \wedge \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) \wedge \ker(\alpha) = \ker(\beta)$;
(iv) $\alpha\,\mathcal{J}\,\beta \Leftrightarrow \rho(\alpha) = \rho(\beta)$;
(v) $\mathcal{D} = \mathcal{J}$;
(vi) Polugrupa S nema ideala koji nisu glavni.

Dokaz. (i) Pokazaćemo $S\alpha \subseteq S\beta \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta)$. Dokaz je potpuno analogan dokazu stavke (i) leme 4.3 za $\mathcal{PT}_n$, jedino što u smeru ($\Leftarrow$) treba pokazati da γ očuvava poredak. Neka su $a, b \in \mathrm{dom}(\gamma) = \mathrm{dom}(\alpha)$

i neka je $a \leq b$. Tada je $(a)\alpha \leq (b)\alpha$, pa iz leme 6.1 zbog $(a)\alpha, (b)\alpha \in \operatorname{Im}(\beta)$ (imajući na umu da radimo sa transverzalom) dobijamo $y_{(a)\alpha} \leq y_{(b)\alpha}$, tj. $(a)\gamma \leq (b)\gamma$.

(ii) Imitirajući ranije dokaze ovog tipa, pokazujemo

$$\alpha S \subseteq \beta S \Leftrightarrow \operatorname{dom}(\alpha) \subseteq \operatorname{dom}(\beta) \wedge \ker(\beta) \subseteq \ker(\alpha).$$

Naravno, opet se oslanjamo na dokaz stavke (*ii*) leme 4.3 (za $S = \mathcal{PO}_n$), kao i leme 3.2 (za $S = \mathcal{O}_n$). U prvom slučaju treba samo pokazati da je tako definisano γ u S. Neka su $a, b \in \operatorname{dom}(\gamma) = \operatorname{Im}(\beta)$ i $a \leq b$. Tada na isti način kao u prethodnoj stavci iz leme 6.1 sledi $x_a \leq x_b$, pa zbog $\alpha \in S$ imamo $(x_a)\alpha \leq (x_b)\alpha$, te je $(a)\gamma \leq (b)\gamma$.

Ipak, u drugom slučaju ne možemo baš u potpunosti da se oslonimo na dokaz leme 3.2, jer bismo imali problem na delu $\{1, \ldots, n\} \setminus \operatorname{Im}(\beta)$. Umesto toga, posmatraćemo dva slučaja, kada $1 \in \operatorname{Im}(\beta)$ i kada $1 \notin \operatorname{Im}(\beta)$. Za te slučajeve ćemo definisati funkcije $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{T}_n$ redom (uz oznaku $B = \operatorname{Im}(\beta)$), sa

$$(a)\gamma_1 = \begin{cases} (x_a)\alpha, & a \in B; \\ (a-1)\gamma_1, & a \notin B. \end{cases} \quad (a)\gamma_2 = \begin{cases} 1, & a = 1; \\ (x_a)\alpha, & a \in B; \\ (a-1)\gamma_2, & a \notin B \cup \{1\}. \end{cases}$$

Ovo je induktivan način definisanja, a cilj je da svaki element van $\operatorname{Im}(\beta)$ dobije sliku istu kao i prvi element iz $\operatorname{Im}(\beta)$ manji od njega. Ako takav ne postoji, slikaće se u 1. Dokaz da su ovako definisane funkcije u $\mathcal{O}_n$ nije težak, ali je tehnički komplikovan, pa ćemo ga preskočiti.

(iii) Sledi iz prethodne dve stavke.

(iv) Sada želimo da pokažemo da je $S\alpha S = \{\gamma \in S : \rho(\gamma) \leq \rho(\alpha)\}$. Inkluzija $(\subseteq)$ sledi iz leme 3.5. Za dokaz obratne pretpostavimo da je $\beta \in S$ i $\rho(\beta) \leq \rho(\alpha)$. Neka je $\operatorname{Im}(\alpha) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ i $A_i = [\{a_i\}]\alpha^{-1}$ za $i \in \{1, \ldots, k\}$, pri čemu je $\{x_{A_i} : 1 \leq i \leq k\}$ proizvoljna transverzala skupa $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Pored toga, uzmimo da je $\operatorname{Im}(\beta) = \{b_1, \ldots, b_m\}$, sa $B_j = [\{b_j\}]\beta^{-1}$ za $j \in \{1, \ldots, m\}$ gde je $m \leq k$. Uz sve to, pretpostavimo (bez umanjenja opštosti) da je $a_1 \leq \cdots \leq a_k$ i $b_1 \leq \cdots \leq b_m$. Neka su sada $\gamma, \delta \in \mathcal{PT}_X$ date sa $\operatorname{dom}(\gamma) = \operatorname{dom}(\beta)$, $(c)\gamma = x_{A_i}$ za sve $c \in B_i$ i $i \in \{1, \ldots, m\}$, a $\operatorname{dom}(\delta) = N$ i

$$(d)\delta = \begin{cases} b_1, & 1 \leq d \leq a_1; \\ b_j, & a_{j-1} < d \leq a_j \wedge 2 \leq j \leq m-1; \\ b_m, & a_{m-1} < d \leq n. \end{cases}$$

Uz malo analize, jednostavno se dokazuje da je $\gamma\alpha\delta = \beta$ i $\gamma, \delta \in S$.

(v) Pošto su posmatrane polugrupe i ovde konačne, imaju i konačan broj desnih i levih ideala, pa ne postoje beskonačni opadajući lanci desnih (levih) ideala, odakle zbog posledice 1.4 dobijamo da je $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

(vi) Dokaz je potpuno isti kao dokaz leme 4.4. □

Primetimo da svaka $\mathcal{H}$-klasa polugrupe S sadrži tačno jedan element, jer za fiksiranu sliku $\{a_1, \ldots, a_k\}$ (gde je bez umanjenja opštosti $a_i \leq \cdots \leq a_k$), domen A i njegovu konveksnu particiju $\{A_1, \ldots, A_k\}$ (opet, bez umanjenja opštosti pretpostavimo $A_1 \leq \cdots \leq A_k$) imamo jedinstvenu funkciju $\alpha \in S$ određenu sa $[A_i]\alpha = a_i$ za $1 \leq i \leq k$.

6.2 Generisanost i rangovi u $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$

Prvo ćemo opisati idempotente iz klase D_{n-1} polugrupe $\mathcal{O}_n$, odnosno $\mathcal{PO}_n$. U tu svrhu za $\alpha \in \mathcal{PO}_n$ definišemo skup

$$P(\alpha) = \{a \in \mathrm{Im}(\alpha) : |[\{a\}]\alpha^{-1}| \geq 2\}.$$

- Neka $\varepsilon \in E(\mathcal{O}_n)$ i $\rho(\varepsilon) = n-1$. Tada znamo da je $|P(\varepsilon)| = 1$, pa možemo da uzmemo da je $P(\varepsilon) = \{a\}$. Pored toga imamo i $|[\{a\}]\alpha^{-1}| = 2$. Pretpostavimo da je $[\{a\}]\alpha^{-1} = \{b, c\}$. Pošto je u pitanju idempotent, za sve $x \in \mathrm{Im}(\varepsilon)$ je $(x)\alpha = x$, a uz to znamo da je $b \in \mathrm{Im}(\varepsilon) \vee c \in \mathrm{Im}(\varepsilon)$. Neka je bez umanjenja opštosti $b \in \mathrm{Im}(\varepsilon)$, tj. $a = c$ i $(c)\varepsilon = (b)\varepsilon = b$. Zbog očuvanja poretka je $c = b+1 \vee c = b-1$. To znači da postoje ukupno dva idempotenta u $E(D_{n-1})$ sa slikom $\mathrm{Im}(\varepsilon) = N \setminus \{a\} = N \setminus \{b\}$. Prvi je određen sa $b+1 \mapsto b$, a drugi sa $b-1 \mapsto b$. Odatle imamo da je u $\mathcal{O}_n$

$$E(D_{n-1}) = \{\varepsilon_{b-1,b}, \varepsilon_{b+1,b} : b \in N \setminus \{1, n\}\} \cup \{\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{n-1,n}\},$$

  gde $\varepsilon_{b-1,b}$ i $\varepsilon_{b+1,b}$ označavaju idempotente definisane na prethodni način.
- Ako je $\varepsilon \in E(\mathcal{PO}_n)$ i $\rho(\varepsilon) = n-1$, zbog prirode polugrupe $\mathcal{PO}_n$ imamo dve mogućnosti: $\varepsilon \in \mathcal{O}_n$ i $\varepsilon \in \mathcal{IS}_n$. Prvi slučaj je već obrađen u prethodnoj stavci, a u drugom imamo da su svi idempotenti oblika $\varepsilon_b = \mathrm{id}_{N\setminus\{b\}}$, za neko $b \in N$. Zato je u $\mathcal{PO}_n$

$$E(D_{n-1}) = \{\varepsilon_{b-1,b}, \varepsilon_{b+1,b}, \varepsilon_b : b \in N \setminus \{1, n\}\} \cup \{\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_1, \varepsilon_{n-1,n}, \varepsilon_n\}.$$

Ova diskusija će nam puno pomoći u dokazivanju ključne leme koja sledi.

Lema 6.3 (o: [23])**.** *U polugrupi S ($S \in \{\mathcal{O}_n, \mathcal{PO}_n\}$) se svaki element $\alpha \in D_k$ ($1 \leq k \leq n-1$) može generisati pomoću elemenata iz $E(D_{n-1})$.*

Dokaz. Pokazaćemo prvo da se problem u slučaju $S = \mathcal{PO}_n$ svodi na slučaj $S = \mathcal{O}_n$. Neka je $\alpha \in \mathcal{PO}_n$. Imamo dva slučaja: ili $1 \in \mathrm{dom}(\alpha) = A$ ili $1 \in \overline{\mathrm{dom}}(\alpha) = \overline{A}$. Tim slučajevima respektivno odgovaraju $\alpha', \alpha'' \in \mathcal{O}_n$ date sa

$$(x)\alpha' = \begin{cases} (x)\alpha, & x \in A; \\ (x-1)\alpha', & x \in \overline{A}. \end{cases} \quad (x)\alpha'' = \begin{cases} (x)\alpha, & x \in A; \\ (x-1)\alpha'', & x \in \overline{A} \setminus \{1\}; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

U njima imamo da je $\alpha'\restriction_{\mathrm{dom}(\alpha)} = \alpha$, odnosno $\alpha''\restriction_{\mathrm{dom}(\alpha)} = \alpha$. Neka je $\overline{A} = \{a_1, \ldots, a_{n-k}\}$. Tada je $\varepsilon_{a_1} \cdots \varepsilon_{a_{n-k}}\alpha' = \alpha$, odnosno $\varepsilon_{a_1} \cdots \varepsilon_{a_{n-k}}\alpha'' = \alpha$. U oba slučaja zaključujemo da ukoliko dokažemo da sve elemente iz $\mathcal{O}_n$ možemo da izrazimo kao proizvode idempotenata iz D_{n-1}, to možemo da uradimo i za elemente $\mathcal{PO}_n$.

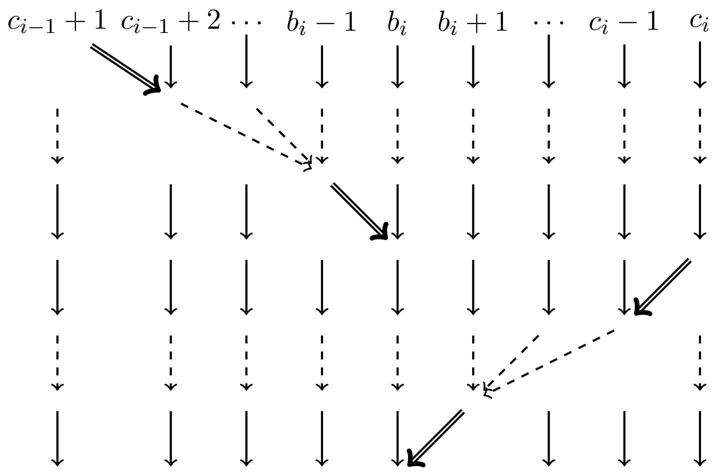
Neka je sada $\alpha \in \mathcal{O}_n$ za koju važi $\rho(\alpha) = k \leq n-1$ i $\mathrm{Im}(\alpha) = \{a_1, \ldots, a_k\}$, pri čemu je $[\{a_i\}]\alpha^{-1} = A_i$ i $c_i = \max A_i$ za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$. Definišimo skup $\{b_1, \ldots, b_k\}$ na sledeći način:

$$b_i = \begin{cases} a_i, & a_i \in A_i; \\ c_i, & a_i \notin A_i. \end{cases}$$

Posmatrajmo transformacije

$$\beta_i = \varepsilon_{c_{i-1}+1, c_{i-1}+2} \cdots \varepsilon_{b_i-1, b_i} \varepsilon_{c_i, c_i-1} \cdots \varepsilon_{b_i+1, b_i} \tag{6.1}$$

za $1 \leq i \leq k$ (gde uzimamo da je $c_0 = 0$). Slikovito prikazana na A_i (pošto jedino tu i vrši promenu, jer se na ostatku domena ponaša kao identička funkcija), transformacija β_i izgleda kao na slici 6.1:



Slika 6.1: Transformacija $\beta_i\restriction_{A_i}$

Zaključujemo da β_i slika sve elemente iz A_i u b_i za $i \in \{1, \ldots, k\}$ (primetimo, ako je $b_i = c_i$, idempotenata sa desne strane ε_{b_i-1, b_i} u izrazu (6.1) uopšte nema). Sada zbog disjunktnosti skupova A_i i A_j za $i \neq j$ imamo da transformacija $\gamma = \beta_1 \cdots \beta_k$ za sve i slika A_i u b_i. Iz definicija funkcija β_i (za $1 \leq i \leq k$) imamo da je $\gamma \in \langle E(D_{n-1}) \rangle$.

Neka je sada $S_1^- = \{i \in \{1, \ldots, k\} : b_i < a_i\} = \{i_1, \ldots, i_t\}$ i $S_1^+ = \{j \in \{1, \ldots, k\} : b_j > a_j\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$. Ako je $S_1^+ \cup S_1^- = \emptyset$, važi $\alpha = \gamma$ i tvrđenje je dokazano. Inače, definišimo transformaciju δ_1 sa

$$\delta_1 = \gamma \varepsilon_{b_{i_t}, b_{i_t}+1} \cdots \varepsilon_{b_{i_1}, b_{i_1}+1} \cdot \varepsilon_{b_{j_1}, b_{j_1}-1} \cdots \varepsilon_{b_{j_q}, b_{j_q}-1}.$$

Napomenimo da se pomoću γ svi članovi A_i "slivaju" u b_i, pa nas nadalje zanima samo gde se slikaju elementi b_i, tj. naše planove može pokvariti jedino situacija u kojoj b_i i b_j imaju iste slike za neke $i \neq j$. Međutim, do toga ne može doći, jer ćemo ih sve pomerati za po 1 dok svaki ne dođe do svoje pozicije, a pri tome pomerenja vršimo u redosledu koji garantuje da se slike neće "sresti", ni one koje se kreću u istom smeru, ni one koje idu u suprotnom (to je garantovano i očuvanjem poretka slika koje obezbeđuje α).

Dalje, neka je $S_2^- = \{i \in \{1, \ldots, k\} : (b_i)\delta_1 < a_i\} = \{l_1, \ldots, l_s\}$ i $S_2^+ = \{j \in \{1, \ldots, k\} : (b_j)\delta_1 > a_j\} = \{h_1, \ldots, h_w\}$. Opet, ako je $S_2^+ \cup S_2^- = \emptyset$ onda smo gotovi, a inače posmatramo transformaciju

$$\delta_2 = \delta_1 \varepsilon_{b_{l_s}, b_{l_s}+1} \cdots \varepsilon_{b_{l_1}, b_{l_1}+1} \cdot \varepsilon_{b_{h_1}, b_{h_1}-1} \cdots \varepsilon_{b_{h_w}, b_{h_w}-1}.$$

Nastavljajući tako, dobijamo nizove $\{S_i^+ : i \in \mathbb{N}\}$ i $\{S_i^- : i \in \mathbb{N}\}$. Primetimo da važi $S_1^+ \subseteq S_2^+ \subseteq \cdots$ i $S_1^- \subseteq S_2^- \subseteq \cdots$, jer u svakom koraku sve slike koje su izmeštene od ciljanog originala pomeramo po korak bliže tom originalu, a ostale ne diramo. Zbog tog smanjivanja razlike za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ postoji $v_i \in \mathbb{N}$ tako da je $(b_i)\delta_v = a_i$ za $v \geq v_i$. Pošto je n konačan, postoji $m \geq 1$ takav da je $(b_i)\delta_m = (b_i)\alpha$ za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$, pa je $\delta_m = \alpha$ i zbog konstrukcije funkcije δ_m sledi $\alpha \in \langle E(D_{n-1}) \rangle$. □

Posledica 6.1. *Polugrupe $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$ su idempotentno generisane.*

Sledeće dve teoreme finalizuju našu priču o polugrupama $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$, dajući eksplicitne formule za njihove rangove i idempotentne rangove. No, pre toga primetimo da je $\mathcal{O}_1 = \mathcal{PO}_1$ i njihov rang i idempotentni rang su 1.

Teorema 6.1. *U polugrupi S ($S \in \{\mathcal{O}_n, \mathcal{PO}_n\}$) važi*

$$\operatorname{idrank}(S) = |E(D_{n-1})| + 1. \tag{6.2}$$

Dokaz. Iz prethodne leme imamo nejednakost $\leq$ u (6.2), jer id_N kao jedini elemenat maksimalnog ranga ne možemo da generišemo drugim elementima, pa se iz tog razloga nalazi u svakom generatornom skupu.

Neka je A idempotentni generatorni skup plugrupe S. Tada mora važiti $E(D_{n-1}) \subseteq \langle A \cap E(D_{n-1}) \rangle$, zbog leme 3.5. Dokažimo da su za generisanje

$E(D_{n-1})$ potrebni svi idempotenti. Posmatrajmo GH-graf glavnog faktora D^0_{n-1} i ispitajmo kako su povezani njegovi čvorovi. Za fiksiran čvor $\mathcal{L}$-klase određene sa $N \setminus \{i\}$, gde je $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, imamo tačno dve (u slučaju $\mathcal{PO}_n$ tri) grane koje su incidentne sa njim, a one odgovaraju idempotentima $\varepsilon_{i,i-1}$ i $\varepsilon_{i,i+1}$ (uz ε_i za $S = \mathcal{PO}_n$). U slučajevima $N \setminus \{1\}$ i $N \setminus \{n\}$ grane sa jednim krajem u njima njima su redom $\varepsilon_{1,2}$ (uz ε_1 za $S = \mathcal{PO}_n$) i $\varepsilon_{n-1,n}$ (plus ε_n u drugom slučaju). Sa druge strane, ako fiksiramo čvor $\mathcal{R}$-klase određene sa $[i, i+1]$ (drugim rečima, u odgovarajućoj particiji su i i $i+1$ elementi jedine dvočlane klase), on je kraj grana $\varepsilon_{i,i+1}$ i $\varepsilon_{i+1,i}$ za $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. U slučaju $\mathcal{PO}_n$ imamo još jedan tip $\mathcal{R}$-klasa, $[i]$, koje su u potpunosti određene domenom svojih članova $N \setminus \{i\}$; one imaju samo jednu granu koja je predstavljena elementom ε_i. Ovom analizom dobijamo da je $\Gamma(D^0_{n-1})$ za $S = \mathcal{O}_n$ put

$$\varepsilon_{1,2}\varepsilon_{2,1}\varepsilon_{2,3}\varepsilon_{3,2}\cdots\varepsilon_{n-1,n}\varepsilon_{n,n-1},$$

a u slučaju $S = \mathcal{PO}_n$ isti taj put sa pridruženim visećim čvorovima $[i]$ koji odgovaraju granama ε_i za $i \in N$. U oba slučaja je u pitanju stablo, te zbog leme 2.1 zaključujemo da se nakon eliminacije bilo kog idempotenta on ne može generisati, jer je odgovarajući GH-graf nepovezan.

Odatle dobijamo da mora važiti $A \cap E(D_{n-1}) = E(D_{n-1})$, pa važi $E(D_{n-1}) \cup \{\mathrm{id}_N\} \subseteq A$, odakle se dobija $\geq$ u (6.2). $\square$

Posledica 6.2 (o: [11])**.** *Za $n \geq 2$ je*

$$\mathrm{idrank}(\mathcal{O}_n) = 2(n-2)+3 = 2n-1 \ \ \textit{i} \ \ \mathrm{idrank}(\mathcal{PO}_n) = 3(n-2)+5 = 3n-1.$$

Teorema 6.2 (o: [11])**.** *Za $n \geq 2$ je*

$$\mathrm{rank}(\mathcal{O}_n) = n+1 \quad \textit{i} \quad \mathrm{rank}(\mathcal{PO}_n) = 2n.$$

Dokaz. Iz leme 6.2 znamo da je za klasu

$$D_{n-1} = \{\alpha \in S : \rho(\alpha) = n-1\}$$

polugrupa D^0_{n-1} (gde proizvodi koji upadaju u nižu klasu dobijaju vrednost 0) glavni faktor polugrupe S ($S \in \{\mathcal{O}_n, \mathcal{PO}_n\}$). Pošto D_{n-1} za $n \geq 2$ sadrži nenula idempotente, nije 0-polugrupa, pa prema diskusiji na kraju poglavlja 1.6 sledi da je D^0_{n-1} kompletno 0-prosta polugrupa. Iz leme 6.3 sledi da je ona i idempotentno generisana, te primenom posledice 2.7 dobijamo da je

$$\mathrm{rank}(D^0_{n-1}) = \max\{|I|, |\Lambda|\},$$

gde su I i Λ skupovi nenula $\mathcal{R}$- odnosno $\mathcal{L}$-klasa polugrupe D^0_{n-1}. Pošto su $\mathcal{L}$-klase polugrupa $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$ određene samo slikom svojih elemenata, imamo da je u oba slučaja

$$|\Lambda| = \binom{n}{n-1} = n.$$

Sa druge strane, u slučaju polugrupe $\mathcal{O}_n$ su $\mathcal{R}$-klase u I određene konveksnim particijama skupa N na $n-1$ klasa. Birajući jedan od n elemenata čija će klasa biti dvočlana i jedan od njegovih suseda za drugog člana (a pritom računajući moguća ponavljanja), dobijamo da je

$$|I| = \frac{2(n-2)+2}{2} = n-1.$$

Slično, za $\mathcal{PO}_n$ imamo slučaj particije N na $n-1$ klasa, ali i slučaj $|\mathrm{dom}(\alpha)| = n-1$, kada su svi elementi particije jednočlani (takvi slučajevi su jedinstveno određeni izborom elementa iz N koji je u $\overline{\mathrm{dom}}(\alpha)$). Time dobijamo

$$|I| = (n-1) + n = 2n-1.$$

Iz svega navedenog zaključujemo da je za $n \geq 2$

$$\begin{aligned} &\text{u slučaju } \mathcal{O}_n: \ \mathrm{rank}(D^0_{n-1}) = \max\{n-1, n\} = n \\ &\text{u slučaju } \mathcal{PO}_n: \ \mathrm{rank}(D^0_{n-1}) = \max\{2n-1, n\} = 2n-1. \end{aligned}$$

Uz to, iz leme 6.3 (zbog id_N) imamo da je

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(\mathcal{O}_n) &\leq \mathrm{rank}(D_{n-1}) + 1 = \mathrm{rank}(D^0_{n-1}) + 1 = n+1 \quad \text{i} \\ \mathrm{rank}(\mathcal{PO}_n) &\leq \mathrm{rank}(D_{n-1}) + 1 = \mathrm{rank}(D^0_{n-1}) + 1 = 2n. \end{aligned}$$

Sa druge strane, iz leme 3.5 sledi da za generišući skup A u oba slučaja važi $D_{n-1} \cup \{\mathrm{id}_N\} \subseteq \langle A \cap (D_{n-1} \cup \{\mathrm{id}_N\})\rangle$, pa imamo i drugu nejednakost. $\square$

Zaključak

Ako povučemo paralelu između obrađenih primera polugrupa transformacija, primetićemo da su u svim analizama ranga ključnu ulogu odigrale činjenice da su sve $\mathscr{J}$-klase naših plugrupa linearno uređene, gde maksimalna klasa (uz eventualno prvu sledeću nižu) generiše ostale, kao i da su glavni faktori kompletno 0-proste polugrupe za koje znamo da izračunamo rang.

Što se tiče idempotentne generisanosti, počev od leme 2.1 i pojma GH-grafa gradimo teoriju o grafovima pridruženim određenim tipovima polugrupa i kroz ceo rad je na različite načine primenjujemo na ta pitanja. Može se reći da je to noviji pristup, jer se u većini originalnih dokaza ne koristi. Za njega je u najvećoj meri zaslužan Robert Grej, koji je Grejemovu ideju primenio u mnogo širem spektru problema i svojim radovima pokazao da se suštinska pitanja idempotentne generisanosti svode na probleme grafovsko-kombinatornog karaktera.

Literatura

[1] Stojan Bogdanović and Miroslav Ćirić. *Polugrupe*. Prosveta, Niš, 1993.

[2] Stanley Burris and Hanamantagouda P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra, Millenium Edition (2012 Update)*. Online version, `https://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html`, 2012.

[3] Alfred H. Clifford and Gordon B. Preston. *The Algebraic Theory of Semigroups*, volume 1. American Mathematical Society, 1961.

[4] Igor Dolinka and James East. Idempotent generation in the endomorphism monoid of a uniform partition. *Communications in Algebra* (in print). `http://arxiv.org/abs/1407.3312`.

[5] Igor Dolinka and James East. Variants of finite full transformation semigroups. Submitted. `http://arxiv.org/abs/1410.5253`.

[6] John A. Erdos. On products of idempotent matrices. *Glasgow Mathematical Journal*, 8:118–122, 1967.

[7] John Fountain and Andrew Lewin. Products of idempotent endomorphisms of an independence algebra of finite rank. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 35(3):493–500, 1992.

[8] Olexandr Ganyushkin and Volodymyr Mazorchuk. *Classical Finite Transformation Semigroups*, volume 9 of *Algebra and Applications*. Springer, 2009.

[9] Goje U. Garba. Idempotents in partial transformation semigroups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A, Mathematics*, 116:359–366, 1990.

[10] Gracinda M. S. Gomes and John M. Howie. On the ranks of certain finite semigroups of transformations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 101(03):395–403, 1987.

[11] Gracinda M. S. Gomes and John M. Howie. On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations. *Semigroup Forum*, 45:272–282, 1992.

[12] Victoria Gould. *Semigroup Theory*. Materials for a Masters course; *unpublished*. The University of York, UK.

[13] Victoria Gould. Independence algebras. *Algebra Universalis*, 33:294–318, 1995.

[14] Ronald N. Graham. On finite 0-simple semigroups and graph theory. *Mathematical Systems Theory*, 2(4):325–339, 1968.

[15] Robert Gray. *A graph theoretic approach to combinatorial problems in semigroup theory*. PhD thesis, University of St Andrews, 2006.

[16] Robert Gray. Hall's condition and idempotent rank of ideals od endomorphism monoids. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 51:57–72, 2008.

[17] Robert Gray. The minimal number of generators of a finite semigroup. *Semigroup Forum*, 89:135–154, 2014.

[18] Robert Gray and Nikola Ruškuc. Generating sets of completely 0-simple semigroups. *Communications in Algebra*, 33(12):4657–4678, 2005.

[19] Pierre A. Grillet. *Semigroups – An Introduction to the Structure Theory*. Mercel Dekker, 1995.

[20] Philip Hall. *The collected works of Philip Hall*. Oxford Science Publications. Clarendon Press/Oxford Univesity Press, 1988.

[21] C. H. Houghton. Completely 0-simple semigroups and their associated graphs and groups. *Semigroup Forum*, 14(1):41–67, 1977.

[22] John M. Howie. The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-41(1):707–716, 1966.

[23] John M. Howie. Products of idempotents in certain semigroups of transformations. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 17(2):223–236, 1971.

[24] John M. Howie. Idempotent generators in finite full transformation semigroups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A, Mathematics*, 81(3-4):317–323, 1978.

[25] John M. Howie. Idempotents in completely 0-simple semigroups. *Glasgow Mathematical Journal*, 19(2):109–113, 1978.

[26] John M. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*, volume 12 of *L.M.S. Monographs, New Series.* Oxford University Press, 1995.

[27] John M. Howie and Robert B. McFadden. Idempotent rank in finite full transformation semigroups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A, Mathematics*, 114(3-4):161–167, 1990.

[28] Vojislav Petrović. *Teorija grafova.* Univerzitet u Novom Sadu, PMF, 1998.

[29] John Rhodes and Benjamin Steinberg. *The q-theory of Finite Semigroups.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2009.

[30] Nikola Ruškuc. On the rank of completely 0-simple semigroups. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 116(3):325–338, 1994.

[31] Zoran Stojaković and Ivica Bošnjak. *Elementi linearne algebre.* SYMBOL, Novi Sad, 2010.

[32] N. N. Vorob'ev. On symmetric associative systems. *Leningrad Gos. Ped. Inst. Uch. Zap.*, 89:393–396, 1953.

[33] William C. Waterhouse. Two generators for the general linear groups over finite fields. *Linear and Multilinear Algebra*, 24(4):227–230, 1989.

[34] Edward M. Wright. The number of irreducible tournaments. *Glasgow Mathematical Journal*, 11:97–101, 1970.

Biografija

Ivana Đurđev je rođena u Somboru, 6. marta 1991. godine. Osnovnu školu "Ivo Lola Ribar" u istom mestu završava 2006, kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu, specijalan smer za učenike nadarene u matematici, koju završava takođe kao nosilac Vukove diplome i kao učenik generacije svog smera. Školske 2010–2011. upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, smer Matematika. Iste završava 2013. godine, sa prosekom 10.00 i upisuje master akademske studije na istom fakultetu, smer Master matematika, modul Teorijska matematika. Sve ispite predviđene planom i programom položila je u junskom roku 2015. godine, čime je stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, septembar 2015.

Ivana Đurđev

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Ivana Đurđev
AU
Mentor: dr Igor Dolinka
MN
Naslov rada: Rang i idempotentni rang u nekim polugrupama transformacija
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2015.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 6 glava/ 104 strane/ 34 reference/ 0 tabela/ 5 slika/ 0 grafika/ 0 priloga
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: polugrupa, rang, idempotentni rang, polugrupa transformacija
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: U tezi se ispituju rangovi i idempotentni rangovi u literaturi najzastupljenijih primera polugrupa transformacija nad konačnim skupom. Nakon prve glave, u kojoj su izložene potrebne osnove iz teorije polugrupa, istraženi su rangovi Risovih matričnih polugrupa, kao priprema za izračunavanje rangova u primerima, jer su RM polugrupe gradivni elementi svake konačne polugrupe. Naredne glave ispituju punu polugrupu transformacija $\mathcal{T}_n$, polugrupu parcijalnih transformacija $\mathcal{PT}_n$ i simetričnu inveznu polugrupu $\mathcal{IS}_n$, kao i monoide endomorfizama nad konačnim poljem $\mathcal{M}_n(F)$ i polugrupe punih ili parcijalnih transformacija koje očuvavaju poredak, $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{PO}_n$.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 24.3.2015.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Nebojša Mudrinski, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Igor Dolinka, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu; mentor
Član: dr Petar Marković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identi
cation number :
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master's thesis
CC
Author: Ivana Đurđev
AU
Mentor: Igor Dolinka, Ph.D.
MN
Title: Rank and idempotent rank of some transformation semigroups
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: serbian and english
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2015.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 6 chapters/ 104 pages/ 34 references/ 0 tables/ 5 pictures/ 0 graphs/ 0 appendices
FO
Scientific Feld:: Mathematics
SF
Scientific discipline:: Algebra
SD
Subject/Key words: semigroup, rank, idempotent rank, transformation

semigroup
SKW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N

Abstract: In the present thesis, the ranks and the idempotent ranks of the most commonly researched finite transformation semigroups are examined. After the first chapter, in which some basics of the semigroup theory are reviewed, we investigate the ranks of Rees matrix semigroups, as a preparation for the calculations of the ranks in the examples, because RM semigroups are the building blocks of any finite semigroup. The following sections examine the full transformation semigroups $\mathcal{T}_n$, the partial transformation semigroups $\mathcal{PT}_n$ and the symmetric inverse semigroups $\mathcal{IS}_n$, as well as endomorphism monoids over finite fields $\mathcal{M}_n(F)$ and semigroups of full and partial order-preserving transformations $\mathcal{O}_n$ and $\mathcal{PO}_n$.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 24/03/2015
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
Chair: Nebojša Mudrinski, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Member: Igor Dolinka, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad; mentor
Member: Petar Marković, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad