UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ester Jambor

Jedna familija trokoračnih postupaka šestog reda za rešavanje nelinearnih jednačina

master rad

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Predgovor

U master radu posmatramo familiju optimalnih numeričkih postupaka šestog reda konvergencije za numeričko rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom $f(x)=0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a,b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha)\neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, u mnogim radovima date su modifikacije čiji je red konvergencije 3 ili 4. Osnovni princip za konstrukciju familije postupaka reda šest je formiranje odgovarajućeg trokoračnog postupka sa četiri računanja vrednosti funkcije i njenog prvog izvoda. U drugom i trećem koraku koriste se kao pomoćne funkcije članovi jednog niza funkcija. Ove funkcije su ranije korišćene za dobijanje poboljšanog Njutnovog postupka reda tri, što je prikazano u radu [8]. Postupajući na sličan način i koristeći rezultate tog rada dajemo familiju postupaka šestog reda konvergencije.

Master rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu rada date su oznake definicije i teoreme koje se koriste u daljem radu. Drugi deo rada sadrži teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake trećeg i šestog reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina datih u nedavno publikovanim radovima.

U trećem delu kao originalni rezultat dajemo familiju postupaka šestog reda konvergencije. Za nju, pod određenim pretpostavkama, dokazujemo konvergenciju i određujemo red konvergencije. U poslednjem delu rada prikazani su numerički eksperimenti urađene u programskom paketu *Mathematica*. Rad se završava zaključkom i delom koji sadrži korišćenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Dragoslavu Hercegu na odabiru teme, kao i na korisnim savetima i sugestijama pri pisanju rada.

Novi Sad, 26. novembar 2015. Ester Jambor

1 Neke oznake, definicije i teoreme

1.1 Oznake

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\{x_k\}$	niz brojeva $x_0, x_1, \ldots$
$D = [a, b]$	interval kojem pripada niz $\{x_k\}$
$C^k[a, b]$	skup k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$
$Lip_\gamma[a, b]$	skup funkcija koje na intervalu $[a, b]$ zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom γ
α	rešenje jednačine $f(x) = 0$
$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$	asimptotska konstanta greške
$c_r = \frac{f^{(r)}(\theta)}{r!}$	konstanta
$c_0 = f^{(0)}(\alpha)$	konstanta
$e_n = x_n - \alpha$	greška u *n*-toj iteraciji
$e_{n+1} = Ce_n{}^p + O(e_n{}^{p+1})$	jednačina greške
$C = \frac{e_{n+1}}{e_n{}^p}$	asimptotska konstanta greške

p	red konvergencije iterativnog postupka
m	broj funkcionalnih evaluacija datog postupka
$p^{1/m}$	indeks efikasnosti postupka
f_n	$f(x_n)$
f'_n	$f'(x_n)$
F_i	$\dfrac{F^{(i)}(\alpha)}{F'(\alpha)}$
$u(x)$	$\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

1.2 Definicije

Definicija 1. *Za dve jednačine kažemo da su ekvivalentne na intervalu $[a, b]$ ako su rešenja koja pripadaju intervalu $[a, b]$ jedne jednačine rešenja druge jednačine i obrnuto.*

Definicija 2. *Svaki realan broj α, za koji važi da je $f(\alpha) = 0$, nazivamo rešenje jednačine $f(x) = 0$.*

Definicija 3. *Broj α je rešenje višestrukosti k jednačine $f(x) = 0$ ako je*

$$f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$$

pri čemu je funkcija g ograničena u α i važi $g(\alpha) \neq 0$. Za k se uvek uzima pozitivan ceo broj. Ako je $k = 1$, onda kažemo da je koren prost ili jednostruk, a ako je $k > 1$ onda je višestruk.

Definicija 4. *Neka je $\varphi: D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Broj $\alpha \in D$ za koji važi $\alpha = \varphi(\alpha)$ je rešenje jednačine $x = \varphi(x)$ i naziva se nepokretna tačka funkcije φ.*

Neka je x_0 proizvoljan broj iz intervala $[a, b]$. Formirajmo niz brojeva $x_0, x_1, ...$ prema

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1, ...$$

Ovaj niz je moguće formirati samo ako $\varphi(x_k) \in [a, b]$, $k = 0,1, ...$ zbog definisanosti funkcije φ na intervalu $[a, b]$. Očigledno, ako funkcija φ preslikava interval $[a, b]$ u samog sebe, važi $\varphi(x_k) \in [a, b]$, $k = 0,1, ...$ Ako je niz $x_0, x_1, ...$ dobro definisan i ima graničnu vrednost, tj. za neko $\alpha \in [a, b]$ važi $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$, onda je α rešenje jednačine $x = \varphi(x)$ ako je funkcija φ neprekidna na intervalu $[a, b]$. Naime, iz $\varphi(x) \in [a, b]$, za svako $x \in [a, b]$ sledi $\alpha \in [a, b]$, a zbog neprekidnosti funkcije φ važi

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Dakle, ako niz $x_0, x_1, \ldots$ konvergira, njegova granična vrednost α je rešenje jednačine $x = \varphi(x)$, a članovi tog niza aproksimiraju to rešenje.

Ovaj postupak, u kome računamo vrednosti $x_0, x_1, \ldots$ prema

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\, k = 0,1 \ldots$$

se naziva iterativni postupak (postupak sukcesivnih aproksimacija), gde je $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iterativno pravilo, funkcija φ je funkcija koraka, a niz $x_0, x_1, \ldots$ je iterativni niz. Prvi član tog niza je početna aproksimacija. Kada iterativni niz konvergira kažemo da iterativni postupak konvergira.

Definicija 5. *Funkcija φ zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D ako postoji konstanta γ takva da za svako $x, y \in D$ važi*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Konstanta γ se naziva Lipšicova konstanta. Ako je $\gamma < 1$ onda se ova konstanta naziva konstanta kontrakcije, a funkcija φ se naziva kontrakcija ili kontraktivno preslikavanje.

Definicija 6. *Neka je $lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$. Ako postoji konstanta $C \in [0,1)$ i ceo broj $K \geq 0$ takav da za $k \geq K$ važi*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|$$

kaže se da je niz $x_0, x_1, \ldots$ linearno konvergentan.

Ako postoje konstante $p > 1, C \geq 0$ i ceo broj $K \geq 0$ takav da za $k \geq K$ važi

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p$$

kaže se da niz $x_0, x_1, \ldots$ konvergira ka α sa redom bar p. Za $p = 2$ konvergencija je kvadratna, a za $p = 3$ kubna.

Definicija 7. *Red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog posmatranim iterativnim postupkom.*

Da bi se odredio red konvergencije često se posmatra konstanta

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}.$$

Ukoliko ovakva konstanta postoji postupak je bar reda p. Ako je $\eta \neq 0$, postupak je reda p i η se naziva asimptotska konstanta postupka.

Definicija 8. *Jednačina greške postupka je*

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$ *greška u n-toj iteraciji, C asimptotska konstanta greške i p red konvergencije.*

Definicija 9. *Indeks efikasnosti iterativnog postupka je* $p^{1/m}$*, gde je p red konvergencije iterativnog postupka, a m broj izračunavanja vrednosti funkcija po iteraciji.*

1.3 Teoreme

Za rešavanje jednačina oblika $f(x) = 0$ posmatraćemo ekvivalentne jednačine oblika $x = \varphi(x)$ i odgovarajuće iterativne postupke oblika

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \; k = 0,1, \ldots.$$

Navodimo nekoliko teorema iz [1] koje se odnose na jednačinu $x = \varphi(x)$ i teoremu o redu konvergencije jednokoračnog postupka.

Teorema 1. *Neka je* $g(x) \neq 0$ *za* $x \in [a, b]$. *Tada su jednačine* $f(x) = 0$ *i* $x = \varphi(x)$ *sa* $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ *ekvivalentne na intervalu* $[a, b]$.

Teorema 2. *Neka je* φ *neprekidna funkcija na intervalu* $[a,b]$ *i* $\varphi(a), \varphi(b) \in [a,b]$. *Tada postoji* $\alpha \in [a,b]$ *takvo da je* $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Teorema 3. *Funkcija koja zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D je neprekidna na tom intervalu.*

Obrnuto ne mora da važi, tj. neprekidna funkcija na intervalu *D* ne mora da zadovoljava Lipšicov uslov na istom intervalu.

Teorema 4. *Ako funkcija* φ *ima u intervalu* $[a, b]$ *prvi izvod za koji na tom intervalu važi* $|\varphi'(x)| \leq \gamma$, *onda* $\varphi \in Lip_\gamma[a, b]$.

Teorema 5. *Neka je* φ *kontrakcija na intervalu* $[a, b]$ *i neka preslikava taj interval u samog sebe. Tada iterativni niz* $\{x_k\}$ *određen sa*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1, \ldots$$

sa proizvoljnim $x_0 \in [a, b]$, *konvergira ka jedinstvenom rešenju* $\alpha \in [a, b]$ *jednačine* $x = \varphi(x)$ *i važi*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|, \; k = 1,2, \ldots.$$

gde je γ *Lipšicova konstanta kontrakcije funkcije* φ.

Vrednosti $\frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}|$ i $\frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|$ definisane u prethodnoj teoremi nazivaju se aposteriorna i apriorna ocena greške.

Pored apriorne i aposteriorne, često se koristi i sledeća ocena greške koja ne zavisi od iterativne funkcije φ.

Teorema 6. *Neka $f \in C^1(D)$ i $|f^{'}(x)| \geq m > 0$ za $x \in D$. Ako je $\alpha \in D$ rešenje jednačine $f(x) = 0$ i $x_k \in D, k = 0,1, \ldots$, onda je*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}.$$

Ova ocena se naziva Lagranžova ocena greške

Teorema 7. *[1] Red konvergencije jednokoračnog postupka*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1, \ldots$$

je pozitivan ceo broj. Ovaj postupak ima red konvergencije p ako i samo ako je

$$\alpha = \varphi(\alpha),\ \varphi^{(j)}(\alpha) = 0,\quad j = 1,2,\ldots, p-1,\ \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Red konvergencije i asimptotske konstante greške svih postupaka koje posmatramo u ovom radu određujemo koristeći prethodnu teoremu. U zavisnosti od p za asimptotske konstante greške uzimamo

$$\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

a dobijeni rezultat izražavamo preko konstanti

$$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)},\quad j = 2,3,\ldots.$$

Kako su funkcije koraka posmatranih iterativnih postupaka složene i izračunavanje njihovih izvoda nije jednostavno, taj posao smo prepustili programskom paketu *Mathematica*.

2 Iterativni postupci trećeg i šestog reda konvergencije

Kada se posmatraju postupci četvrtog reda konvergencije posebno se obraća pažnja na optimalne postuke, tj. postupke kod kojih je broj izračunavanja funkcije u jednom iterativnom koraku tri. Indeks efikasnosti ovih postupaka je $4^{1/3} = 1.5874\ldots$.

Da bi se dobio viši red konvergencije i indeks efikasnosti predloženi su mnogi postupci. Većina tih postupaka čini grupu postupaka zasnovanih na poboljšanju Njutnovog postupka, čiji je red konvergencije dva, a indeks efikasnosti je $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$. U ovom delu posmatraćemo neke od tih postupaka.

Jedna od najpoznatijih postupaka za rešavanje jednačina oblika $f(x) = 0$ je Njutnov postupak (negde nazvan i Njutn-Rafsonov postupak, pošto današnji oblik potiče od Rafsona). Navešćemo nekoliko modifikacija Njtunovog postupka za rešavanje nelinearnih jednačina. Oni imaju za cilj što veću konvergenciju postupka sa što manjim brojem evaluacija funkcije i njenih izvoda.

2.1 Njutnov iterativni postupak

Njutnov postupak aproksimira datu nelinearnu funkciju linearnom funkcijom, i to u blizini nule koja se traži. Grafik linearne aproksimacije je zapravo tangenta na datu funkciju u tački $(x_0, f(x_0))$ gde je x_0 početna aproksimacija rešenja. U preseku tangente i x-ose se dobija nova aproksimacija rešenja, x_1. Nova aproksimacija se koristi za sledeći korak Njutnovog postupka, u kojem se posmatra nova tangenta na krivu, i to u tački $(x_1, f(x_1))$. Postupak se nastavlja po opisanom.

U tački $(x_0, f(x_0))$ jednačina tangente je oblika

$$y(x) = f(x_0) - f^{'}(x_0)(x - x_0).$$

Rešenje jednačine $f(x) = 0$, α aproksimiramo uzimajući rešenje jednačine $y(x) = 0$, x_1. Ako je $f^{'}(x_0) \neq 0$, imamo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}.$$

Sve dok je $f^{'}(x_k) \neq 0$, postupak se nastavlja. Naravno, na osnovu napisanih, imamo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

gde je x_k k-ta aproksimacija rešenja.

Ovaj postupak se može posmatrati i kao $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, gde je

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Navodimo sada poznate teoreme o lokalnoj i globalnoj konvergenciji Njutnovog postupka.

Teorema 8. *Lokalna konvergencija Njutnovog postupka: Neka postoje konstante γ i m > 0 takve da za svako $x, y \in (a,b)$ važi*

$$|f'(y) - f'(x)| \leq \gamma |y - x| \quad \text{i} \quad |f'(x)| \geq m.$$

Ako jednačina $f(x) = 0$ ima rešenje $\alpha \in (a,b)$ onda postoji $\delta > 0$ takvo da za x_0 sa osobinom $|x_0 - \alpha| < \delta$ niz $x_0, x_1, \ldots$ definisan Njutnovim iterativnim postupkom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1, \ldots$$

postoji i konvergira ka α. Pri tome važi

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_k - \alpha|^2, \qquad k = 0,1, \ldots$$

Teorema 9. *Teorema o globalnoj konvergenciji Njutnovog postupk. Neka funkcija f dvaput neprekidno diferecijabilna na intervalu $[a,b]$. Ako je $f(a)f(b) < 0$, a f' i f'' ne menjaju znak na intervalu $[a,b]$, onda za svako $x_0 \in [a,b]$ za koje važi $f(x_0)f''(x_0) > 0$ Njutnov iterativni postupak konvergira jedinstvenom rešenju $\alpha \in (a,b)$ jednačine $f(x) = 0$ i važi*

$x \epsilon [a,b]$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$	$x_k > x_{k+1}$	$x_k < x_{k+1}$
$f''(x) < 0$	$x_k < x_{k+1}$	$x_k > x_{k+1}$

2.2 Neta postupak

Ovaj postupak šestog reda konvergencije nalazimo u radu [4]. Iteracija se sastoji od jednog potkoraka Njutnovog postupka i dva potkoraka modifikovanog Njutnovog postupka. Postupak se izvodi na osnovu uopštenog postupka:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + Af(y_n)}{f(x_n) + Bf(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + Cf(y_n) + Df(z_n)}{f(x_n) + Gf(y_n) + Hf(z_n)}$$

gde su A, B, C, D, G i H proizvoljne konstante. Autor transformiše ovaj postupak i izborom konstanti $A = -\frac{1}{2}, B = A - 2, C = -1, D = H = 0, G = -3$ dobija se postupak šestog reda:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) - \frac{1}{2} f(y_n)}{f(x_n) - \frac{5}{2} f(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n) - 3f(y_n)}$$

sa jednačinom greške: $e_{n+1} = \frac{1}{72} C_3^2 C_2 e_n^6 + O(e_n^7)$.

Neta postupak koristi isti broj izračunavanja funkcija kao postupak sastavljen od jednog potkoraka Njutnovog postupka koji prate dva potkoraka sekant metode, tj. koristi tri evaluacije funkcije i jednu evaluaciju izvoda po iterativnom koraku. Red sekant metode je 1,62, dok je red datog postupka 5,2.

2.3 Postupak Chun-Neta

U radu [5], posmatrana je modifikacija postupka

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) - f(y_n) + \gamma f(z_n)}{f(x_n) - 3f(y_n) + \gamma f(z_n)}$$

Manjim modifikacijama i pogodnim odabirom konstanti β i γ dobija se postupak šestog reda konvergencije:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{\left[1 - \frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right]^2}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{\left[1 - \frac{f(y_n)}{f(x_n)} - \frac{f(z_n)}{f(x_n)}\right]^2}$$

Jednačina greške ovog postupka je: $e_{n+1} = (-5C_3C_2^3 + 6C_2^5 + C_2C_3^2)e_n^6 + O(e_n^7)$. Red ove metode je 1.56.

2.4 Modifikacija postupka Chun-Neta

U radu [6], autori razvijaju postupak na osnovu metode neodređenih koeficijenata. Prvo se posmatra postupak

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(u_{n+1})}$$

gde je $u_{n+1} = g_3(x_n)$ bilo koja modifikacija Njutnovog postpuka trećeg reda. Da bi izveli novi postupak, koristi se sledeći izraz za upotrebu postupka neodređenih koeficijenata:

$$f'(u_{n+1}) = Af'(x_n) + Bf'(y_n) + Cf(u_{n+1}) + Df(x_n).$$

Izrazi $f'(u_{n+1}), f'(y_n)$ i $f(u_{n+1})$ razvijaju se u okolini tačke x_n do trećeg reda. Računajući koeficijente A, B, C i D dolazi se prvo do sledećeg postupka:

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{\alpha\beta(3\beta - 2\alpha)f(u_{n+1})}{\gamma f'(x_n) + \alpha^3 f'(y_n) + 6\beta(\beta - \alpha)(f(u_{n+1}) - f(x_n))},$$

gde je $\gamma = \alpha(-\alpha^2 + 4\alpha\beta - 3\beta^2)$, $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, a u_{n+1} se računa nekim postupkom trećeg reda. Ukoliko se umesto

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(u_{n+1})}$$

koristi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)}$$

za razvoj funkcije $f'(u_{n+1})$ koristi se izraz

$$f'(u_{n+1}) = Af'(x_n) + Bf'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) + Cf(u_{n+1}) + Df(x_n).$$

Na ovaj način se dobija postupak

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{\alpha\beta(3\beta - 4\alpha) f(u_{n+1})}{\delta f'(x_n) + 4\alpha^3 f'\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) + 6\beta(\beta - 2\alpha)(f(u_{n+1}) - f(x_n))},$$

gde je

$$\delta = \alpha(-4\alpha^2 + 8\alpha\beta - 3\beta^2),$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

a u_{n+1} se računa nekim postupkom trećeg reda. Obe familije postupaka zahtevaju po dve evaluacije funkcije i njenog prvog izvoda po iteraciji. Ovaj postupak je šestog reda konvergencije.

2.5 Postupak Herceg-Herceg

U radu [9] posmatran je postupak koji se bazira na sredinama. Uočava se da dosta modifikacija trećeg stepena konvergencije ima sledeći oblik

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \phi(s(x_n)), \tag{1}$$

gde je

$$s(x) = \frac{f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)}$$

i ove metode se razlikuju samo u funkciji ϕ.

Ovaj postupak zapravo daje familiju postupaka koja obuhvata nekoliko postupaka određenih sredinama. Stepena sredina $f'(x)$ i $f'\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ je

$$M_p\left(f'(x), f'\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right) = \frac{f'(x)}{\varphi_{M,p}(s(x))}$$

gde $s(x)$ ima navedeni oblik i važi

$$\varphi_{M,p}(s) = \begin{cases} \sqrt[p]{\frac{2}{1+s^p}} & p \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s}} & p = 0 \end{cases}.$$

Ako se $f'(x)$ aproksimira pomenutom sredinom u Njutnovom metodu, dobija se nov postupak u opštem obliku

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \varphi_{M,p}(s(x)),$$

gde je $\phi = \varphi_{M,p}$.

Na naveden način umesto stepene sredine se mogu koristiti i druge sredine, tj. dobijaju se postupci oblika (1) gde je p proizvoljan parametar, a φ zavisi od vrste sredine:

$$\varphi_{M,p}(s) = \begin{cases} \sqrt[p]{\frac{2}{1+s^2}}, & p \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s}}, & p = 0 \end{cases} \quad \text{(stepena sredina)}$$

$$\varphi_{S,p}(s) = \begin{cases} \sqrt[p-2]{\frac{1+s}{1+s^{p-1}}}, & p \neq 2 \\ \sqrt[1+s]{s^s}, & p = 2 \end{cases} \quad \text{(Gini sredina)}$$

$$\varphi_{L,p}(s) = \begin{cases} \sqrt[p]{\frac{(p+1)(s-1)}{1-s^{p+1}}}, & p \neq 0 \ i \ p \neq -1 \\ \sqrt[s-1]{s^s}e, & p = 0 \\ \frac{\log(s)}{1-s}, & p = -1 \end{cases} \quad \text{(p-logaritamska sredina)}$$

$$\varphi_{Q,p}(s) = \frac{2}{s^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{p}}{2}}(1+s^{\sqrt{p}})} \quad \text{(simetrična sredina)}$$

$$\varphi_{H,p}(s) = \begin{cases} \sqrt[p]{\frac{3}{1+s^{p/2}+s^p}}, & p \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s}}, & p = 0 \end{cases} \quad \text{(Heronova sredina)}$$

$$\varphi_{N,p}(s) = \frac{1+s^{p-1}}{1+s^p}, \quad \text{(kontraharmonična sredina)}$$

Ovaj postupak je trećeg stepena konvergencije za bilo koju od navedenih sredina.

2.6 Postupak Herceg-Herceg zasnovan na sredinama

U radu [10] primećeno je da neke modifikacije Njutnovog postupka trećeg reda imaju isti oblik, i razlikuju se samo u funkciji ϕ. Ovaj rad modifikuje Njutnov postupak na osnovu Stolarsky i Gini sredina. Stolarsky sredina je data sa

$$E_{r,p}(a,b) = \begin{cases} \left(\frac{r}{s}\frac{b^p - a^p}{b^r - a^r}\right)^{1/(p-r)}, & rp(r-p) \neq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{r} + \frac{a^r \ln a - b^r \ln b}{a^r - b^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \left(\frac{1}{r}\frac{b^r - a^r}{\ln b - \ln a}\right)^{1/r}, & r \neq 0, p = 0 \\ \sqrt{ab}, & r = p = 0 \end{cases}$$

dok je Gini sredina data sa

$$G_{r,p}(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^p+b^p}{a^r+b^r}\right)^{1/(p-r)}, & r\neq p\\ \exp\left(\dfrac{a^r\ln a+b^r\ln b}{a^r+b^r}\right), & r\neq 0, p=0\\ \sqrt{ab}, & r=p=0\end{cases}$$

Aproksimacijom $f^{'}(x_n)$ u Njutnovom metodu Stolarsky sredinom dobijamo Njutnov postupak sa Stolarsky sredinom (SN) gde je funkcija ϕ data sa

$$\phi_{S,r,p}(s)=\begin{cases}\sqrt[r-p]{\dfrac{r(1-s^p)}{p(1-s^r)}}, & rp(r-p)\neq 0\\ \exp\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{s^r\ln s}{1-s^r}\right), & r=p\neq 0\\ \sqrt[r]{\dfrac{r\ln s}{s^r-1}}, & r\neq 0, p=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{s}}, & r=p=0\end{cases}$$

Ako u Njutnovom metodu $f^{'}(x_n)$ aproksimiramo Gini sredinom, dobija se nov postupak poznat kao Njutnov postupak sa Gini sredinom (GN), gde je funkcija ϕ definisana sa

$$\phi_{G,r,p}(s)=\begin{cases}\sqrt[p-1]{\dfrac{1+s^r}{1+s^p}}, & r\neq p\\ \exp\left(-\dfrac{s^r\ln s}{1+s^r}\right), & r=p\neq 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{s}}, & r=p=0.\end{cases}$$

Ovaj postupak je trećeg reda konvergencije, kako je to dokazano u samom radu.

2.7 Postupak Herceg-Herceg šestog reda

U radu [11] predstavljen je postupak šestog reda koji se zasniva na Gini i Stolarsky sredinama. Opet se koristi oblik (1) sa različitim funkcijama ϕ. Da bi se dobio Njutnov postupak zasnovan na Stolarsky sredini za ϕ se koristi

$$\phi_{S,r,p}(s) = \begin{cases} \sqrt[r-p]{\dfrac{r(1-s^p)}{p(1-s^r)}}, & rp(r-p) \neq 0 \\ \exp\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{s^r \ln s}{1-s^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \sqrt[r]{\dfrac{r \ln s}{s^r - 1}}, & r \neq 0, p = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{s}}, & r = p = 0 \end{cases}$$

Ako $f'(x_n)$ u Njutnovom metodu aproksimiramo Gini sredinama, dobija se Njutnov postupak sa Gini sredinama (GN) gde je ϕ definisan sa

$$\phi_{G,r,p}(s) = \begin{cases} \sqrt[p-1]{\dfrac{1+s^r}{1+s^p}}, & r \neq p \\ \exp\left(-\dfrac{s^r \ln s}{1+s^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{s}}, & r = p = 0. \end{cases}$$

Ako se ϕ razvija oko 1 po s (do drugog stepena) dobijaju se jednostavnije funkcije

$$\phi_{SL,r,p}(s) = 1 + \frac{1-s}{2} + \frac{(s-1)^2}{24}(9 - p - r)$$

i

$$\phi_{GL,r,p}(s) = 1 + \frac{1-s}{2} + \frac{(s-1)^2}{8}(3 - p - r).$$

Posmatra se familija iterativnih postupaka

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = F(x_k) - \frac{f\big(F(x_k)\big)}{f'(x_k)} G(x_k), \quad k = 0,1, \ldots$$

gde funkcija ϕ ima oblik $\phi(x) = F(x) - \frac{f(F(x))}{f'(x)} G(x)$, $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \phi(s(x))$ i $G(s) = \frac{s+1}{3s-1}$. Ovaj postupak je šestog reda konvergencije, i aproksimira funkciju f dvaput i prvi izvod dvaput po iteraciji.

2.8 Postupak Soleymani

U radu [13] je razvijen trokoračni postupak šestog reda konvergencije gde se zahtevaju dve evaluacije funkcije i dve evaluacije prvog izvoda po iteraciji. Posmatraju se metode Jarrat-ovog tipa gde su prva dva koraka iteracije četvrtog reda sa po dve evaluacije prvog izvoda funkcije i jednom evaluacijom same funkcije. Basu-ovom postupku se dodaje treći korak pa se dobija novi postupak dat sa

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = x_n - \left[\frac{9(f'(y_n))^2 - 2f'(y_n)f'(x_n) + 9(f'(x_n))^2}{12(f'(y_n))^2 + 4f'(y_n)f'(x_n)}\right]\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + 2f[z_n, x_n, x_n](z_n - y_n)}$$

Dok je postupak Basu-a indeksa efikasnosti 1.515 i reda konvergencije 8, novi postupak je indeksa efikasnosti 1.565.

3 Familija postupaka šestog reda

U ovom delu posmatramo familiju postupaka reda šest. Ideja za formiranje familija je preuzeta iz [7], a dokaz je izveden na osnovu rada [11].

Posmatramo familiju postupaka

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - u(x_k) \\ z_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \varphi_p\left(s(x_k)\right) \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{f'(x_k)} \varphi_q\left(s(x_k)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

sa funkcijama φ_k definisanim sa

$$\varphi_0(s) = 1, \quad \varphi_k(s) = \frac{1}{1 - s \cdot \varphi_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

i

$$\sigma(x) = 2\frac{f\left(x - u(x)\right)}{f(x)} \tag{4}$$

Funkcije φ_k se lako računaju. Navodimo prvih devet $\varphi_k(s)$, $k = 0, 1, \ldots, 8$:

$$1, \quad \frac{1}{1-s}, \quad \frac{-1+s}{-1+2s}, \quad \frac{1-2s}{1-3s+s^2}, \quad \frac{1-3s+s^2}{1-4s+3s^2}, \quad \frac{-1+4s-3s^2}{-1+5s-6s^2+s^3},$$
$$\frac{-1+5s-6s^2+s^3}{-1+6s-10s^2+4s^3}, \quad \frac{1-6s+10s^2-4s^3}{1-7s+15s^2-10s^3+s^4}, \quad \frac{1-7s+15s^2-10s^3+s^4}{1-8s+21s^2-20s^3+5s^4}$$

Indeksi p i q u (2) mogu biti i isti i različiti.

Posmatrajmo trotačkasti iterativni postupak

$$x_{n+1}=F_{p,q}\left(x_n\right), \quad n=0,1,\ldots, \tag{5}$$

gde je

$$F_{p,q}\left(x\right)=z_p\left(x\right)-\frac{f\left(z_p\left(x\right)\right)}{f'\left(x\right)}\varphi_q\left(s\left(x\right)\right) \tag{6}$$

sa

$$\begin{aligned} y\left(x\right)&=x-u\left(x\right)\\ z_p\left(x\right)&=y\left(x\right)-\frac{f\left(y\left(x\right)\right)}{f'\left(x\right)}\varphi_p\left(s\left(x\right)\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Za ovaj postupak važi sledeća teorema, čiji dokaz izvodimo uz veliko korišćenje programskog paketa *Mathematica*. Izostavljeni su glomazni izrazi i umesto njih su konačni rezultati nastali brojnim smenama i pojednostavljenima.

Teorema 10. *Pretpostavimo da funkcija* $f:\left(a,b\right)\subset R\to R$ *ima jednostruku nulu* $\alpha\in\left(a,b\right)$ *i da je* f *dovoljno neprekidno diferencijabilna u okolini nule* α*.Tada postupak* (5)-(7) *sa* $p,q\in\{2,3,\ldots\}$ *ima četvrti red konvergencije. Odgovarajuća asimptotska konstanta greške je*

$$E_{p,q}=\begin{cases}\left(c_3-2c_2^2\right)\left(c_2c_3-c_2^3\right) & p=2,\quad q=2\\ \left(c_3-2c_2^2\right)\left(c_2c_3+3c_2^3\right) & p=2,\quad q>2\\ \left(c_3+2c_2^2\right)\left(c_2c_3-c_2^3\right) & p>2,\quad q=2\\ \left(c_3+2c_2^2\right)\left(c_2c_3+3c_2^3\right) & p>2,\quad q>2\end{cases}$$

Dokaz. Dokaz izvodimoo direktnom primenom teoreme 7. Znači, dokazaćemo da je

$$F\left(\alpha\right)=\alpha,\quad F^{(k)}\left(\alpha\right)=0,\quad k=1,2,\ldots,5,$$

a asimptotsku konstantiu greške odredićemo kao

$$\frac{F_{p,q}^{(6)}}{6!}.$$

U daljem radi jednostavnosti izostavićemo indeks k kod φ. Jednosatvnim računanjima koristeći *Mathematica* dobijamo

$$\varphi\left(0\right)=1,\quad \varphi'\left(0\right)=1\quad \varphi''\left(0\right)=\begin{cases}2 & k=2\\ 4 & k>2\end{cases}, \tag{8}$$

$$\varphi'''(0)=\begin{cases}6 & k=2\\ 24 & k=3\\ 30 & k>3\end{cases}. \tag{9}$$

Za pomoćne funkcije u definisanju trokoračnog postupka dobijamo

$$\begin{aligned} y[\alpha]&=\alpha\\ y'[\alpha]&=0\\ y''[\alpha]&=2c_2\\ y^{(3)}[\alpha]&=-12\left(c_2^2-c_3\right)\\ y^{(4)}[\alpha]&=24\left(4c_2^3-7c_2c_3+3c_4\right)\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha)&=0,\\ \sigma'(\alpha)&=2c_2,\\ \sigma''(\alpha)&=4\left(-3c_2^2+2c_3\right),\\ \sigma'''(\alpha)&=12\left(8c_2^3-10c_2c_3+c_4\right),\end{aligned} \tag{11}$$

i

$$\begin{aligned} u(\alpha)&=0,\\ u'(\alpha)&=1,\\ u''(\alpha)&=-2c_2,\\ u^{(3)}(\alpha)&=12\left(c_2^2-c_3\right),\\ u^{(4)}(\alpha)&=24\left(-4c_2^3+7c_2c_3-3c_4\right),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=0\\ f''(\alpha)&=2c_2f'(\alpha)\\ f^{(3)}(\alpha)&=6c_3f'(\alpha)\\ f^{(4)}(\alpha)&=24c_4f'(\alpha)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} z_p(\alpha)&=\alpha,\\ z_p^{(k)}(\alpha)&=0,\quad k=1,2,3,\\ z_p^{(4)}(\alpha)&=\begin{cases}-24\left(-c_2^3+c_2c_3\right) & p=2\\ -24\left(3c_2^3+c_2c_3\right) & p>2\end{cases},\end{aligned} \tag{14}$$

Koristeći relacije (8)-(14) nalazimo

$$F(\alpha)=\alpha,\quad F^{(k)}(\alpha)=0,\quad k=1,2,\ldots,5 \tag{15}$$

i u zavisnosti od parametra p šesti izvod funkcije koraka $F_{p,q}$

$$\mathrm{F}_{p,q}^{(6)}(\alpha)=\begin{cases}-30\left(c_3-2c_2^2\right)z^{(4)}(\alpha) & p=2\\ -30\left(c_3+2c_2^2\right)z^{(4)}(\alpha) & p>2\end{cases} \tag{16}$$

Imajući u vidu (14) iz

$$\mathrm{F}_{p,q}^{(6)}(\alpha)=\begin{cases}-30\left(c_3-2c_2^2\right)z^{(4)}(\alpha) & p=2\\ -30\left(c_3+2c_2^2\right)z^{(4)}(\alpha) & p>2\end{cases} \tag{17}$$

dobijamo

$$\frac{\mathrm{F}_{p,q}^{(6)}(\alpha)}{720}=\begin{cases}\left(c_3-2c_2^2\right)\left(c_2c_3-c_2^3\right) & p=2,\quad q=2\\ \left(c_3-2c_2^2\right)\left(c_2c_3+3c_2^3\right) & p=2,\quad q>2\\ \left(c_3+2c_2^2\right)\left(c_2c_3-c_2^3\right) & p>2,\quad q=2\\ \left(c_3+2c_2^2\right)\left(c_2c_3+3c_2^3\right) & p>2,\quad q>2\end{cases} \tag{18}$$

Sada, iz (18) sledi tvrđenje teoreme.

4 Numerički eksperimenti

Rešavali smo jednačinu $f(x) = 0$ koristeći sledeće test funkcije iz [1], [3], [4], [5], [17] i [19] sa odgovarajućim startnim vrednostima x_0:

$f_1(x) = x^2 \sin x - \cos x$, $\alpha_1^* \approx 0.8952060453842319$, $x_0 = 1.5$,

$f_2(x) = x^3 - 10$, $\alpha_2* \approx 2.1544346900318837218$, $x_0 = 2$,

$f_3(x) = 3x^2 - e^x$, $\alpha_3* \approx 0.9100075724887090607$, $x_0 = 2$

$f_4(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha_4* \approx 1.3652300134140968458$, $x_0 = 2$

$f_5(x) = (x-1)^3 - 1$, $\alpha_5 = 2$, $x_0 = 1.8$,

$f_6(x) = (x-1)^3 - 2$, $\alpha_6^* \approx 2.259921049894873$, $x_0 = 2.0$,

$f_7(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$, $\alpha_7* \approx 1.8954942670339809471$, $x_0 = 1.5$

$f_8(x) = x^{10} - 1$, $\alpha_8 = 1$, $x_0 = 1.3$,

$f_9(x) = x - \cos x$, $\alpha_9^* \approx 0.7390851332151606$, $x_0 = 2$.

Svi rezultati dobijeni su u programskom paketu *Mathematica*. Preciznost je povećana na 20000 cifara sa funkcijom *SetPrecision*. Koristili smo izlazni kriterijum

$$|x_k - \alpha| < \varepsilon \text{ i } |f(x_k)| < \varepsilon,$$

gde je α tačno rešenje posmatrane jednačine. U slučajevima gde je tačno rešenje nepoznato koristili smo njegovu aproksimaciju $\alpha*$, koja je dobijena sa 30000 cifara. Zbog jednostavnosti uz svaku jednačinu navedeno je tačno ili približno rešenje α odnosno α^* samo sa 20 cifara.

Numerički red konvergencije (COC) računamo prema

$$COC \approx \frac{\ln\left|\left(x_{n+1}-\alpha\right)/\left(x_n-\alpha\right)\right|}{\ln\left|\left(x_n-\alpha\right)/\left(x_{n-1}-\alpha\right)\right|}.$$

U svim slučajevima je $|COC-6| \le 10^{-5}$, za $n=3,4,\ldots$. Dakle, numerički red konvergencije je veoma blizak broju 6, što potvrđuje teorijske rezultate.

	$\varphi_2,\ \varphi_2$	$\{p, q,\quad -log\lvert x_5-\alpha\rvert\}$			
f_1	3600.7	$\{10,10,\quad 5011.3\}$	$\{10,9,\quad 5010.1\}$	$\{10,8,\quad 5007.4\}$	$\{9,10,\quad 5007.3\}$
f_2	8688.4	$\{2,2,\quad 8688.4\}$	$\{2,4,\quad 8634.6\}$	$\{2,6,\quad 8616.2\}$	$\{2,10,\quad 8615.8\}$
f_3	3120.0	$\{2,10,\quad 3204.9\}$	$\{2,9,\quad 3204.9\}$	$\{2,8,\quad 3204.9\}$	$\{2,7,\quad 3204.9\}$
f_4	4485.6	$\{8,8,\quad 6133.7\}$	$\{8,2,\quad 5835.6\}$	$\{8,3,\quad 5425.1\}$	$\{8,9,\quad 5260.8\}$
f_5	4987.4	$\{2,2,\quad 4987.4\}$	$\{3,2,\quad 3806.6\}$	$\{4,2,\quad 4110.6\}$	$\{5,2,\quad 3997.2\}$
f_6	4871.6	$\{2,4,\quad 5179.7\}$	$\{2,6,\quad 5021.8\}$	$\{2,8,\quad 5006.8\}$	$\{2,10,\quad 5005.2\}$
f_7	3493.1	$\{3,4,\quad 5437.8\}$	$\{5,4,\quad 4446.1\}$	$\{7,4,\quad 4398.4\}$	$\{9,4,\quad 4392.1\}$
f_8	1060.6	$\{3,9,\quad 1134.9\}$	$\{2,2,\quad 1060.6\}$	$\{2,9,\quad 890.9\}$	$\{2,8,\quad 888.0\}$
f_9	5952.3	$\{10,10,\quad 6185.3\}$	$\{9,10,\quad 6185.3\}$	$\{8,10,\quad 6185.3\}$	$\{7,10,\quad 6185.3\}$

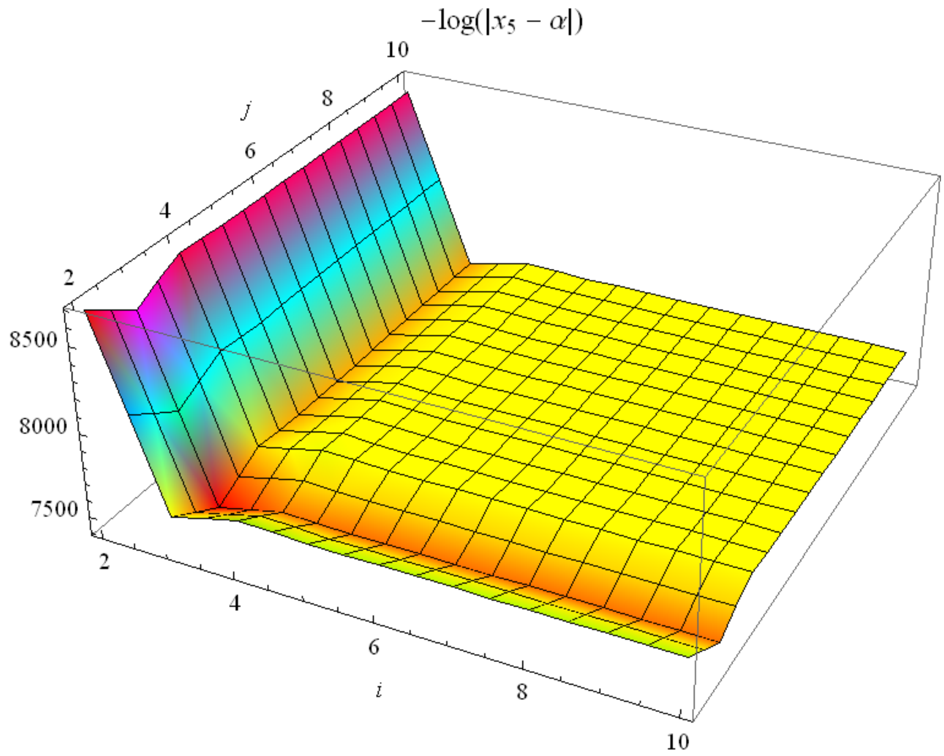
Tabela 1. Upoređenje postupaka $-log|x_5-\alpha|$

U tabeli 1 prikazani su rezultati koje smo dobili sa različitim izborima funkcija φ_i i φ_j u drugom i trećem koraku. U drugoj koloni su prikazani rezultati za izbor φ_2, φ_2, a u ostalim kolonama su date četiri najbolje vrednosti za $-log|x_5-\alpha|$ za svaki primer sa odgovarajućim indeksima funkcija φ. Tako, na primer, $\{2,2,\quad 8688.4\}$ znači da je za drugi primer najbolja vrednost dobijena sa φ_2, φ_2 i $-log|x_5-\alpha| = 8688.4$.

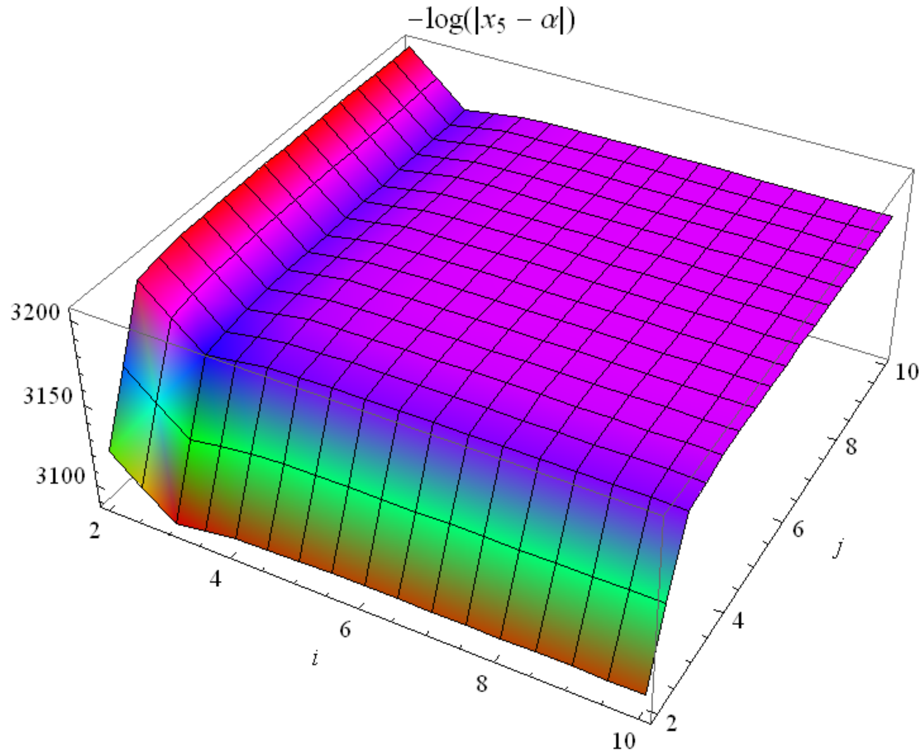
Iz tabela vidimo da se ne može reći za koji se izbor funkcija φ_i i φ_j dobijaju najbolji rezultati.

Na sledećim slikama smo prikazali za primere 2, 3, 4 i 9 vrednosti $-log|x_5-\alpha|$ u zavisnosti od izbora funkcija φ_i i φ_j u drugom odnosno trećem koraku. Pri tom $i=2,3,\ldots,10$ i $j=2,3,\ldots,10$. Slični rezultati se dobijaju i za ostale primere koje smo koristili.

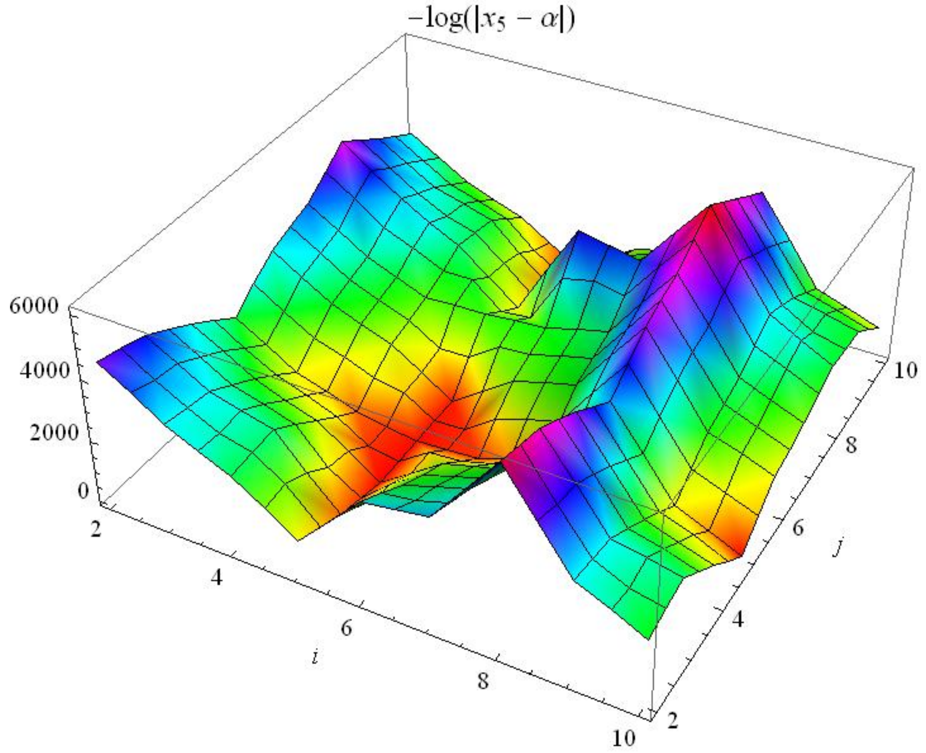
Na osnovu rezultata i priloženih slika možemo reći da ne postoji najbolji izbor funkcija φ_i i φ_j. Svaka funkcija, tj. svaki primer ima svoje izbore funkcija φ_i i φ_j koji daju najbolje rezultate.



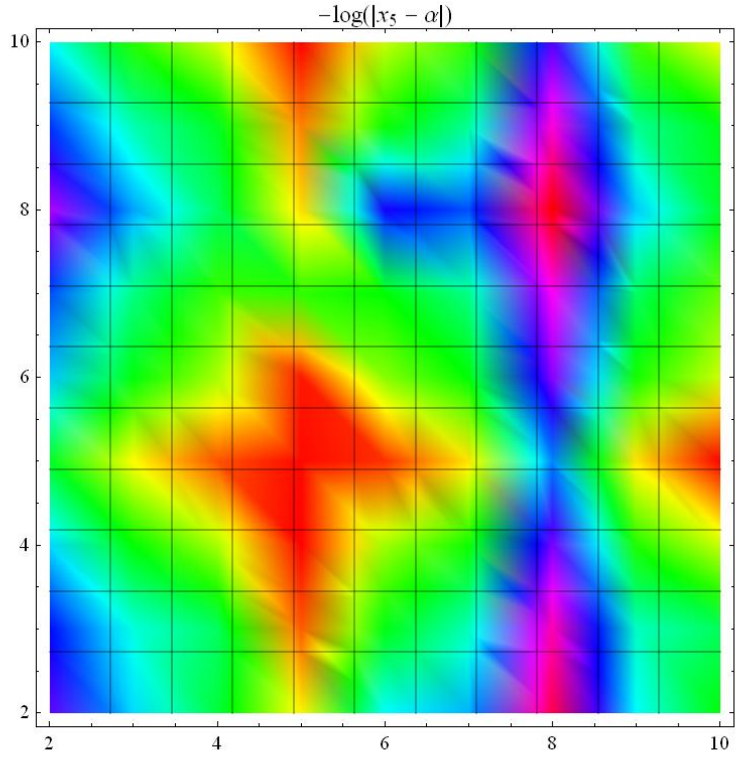
Slika 1.$-log|x_5 - \alpha|$ za primer 2.



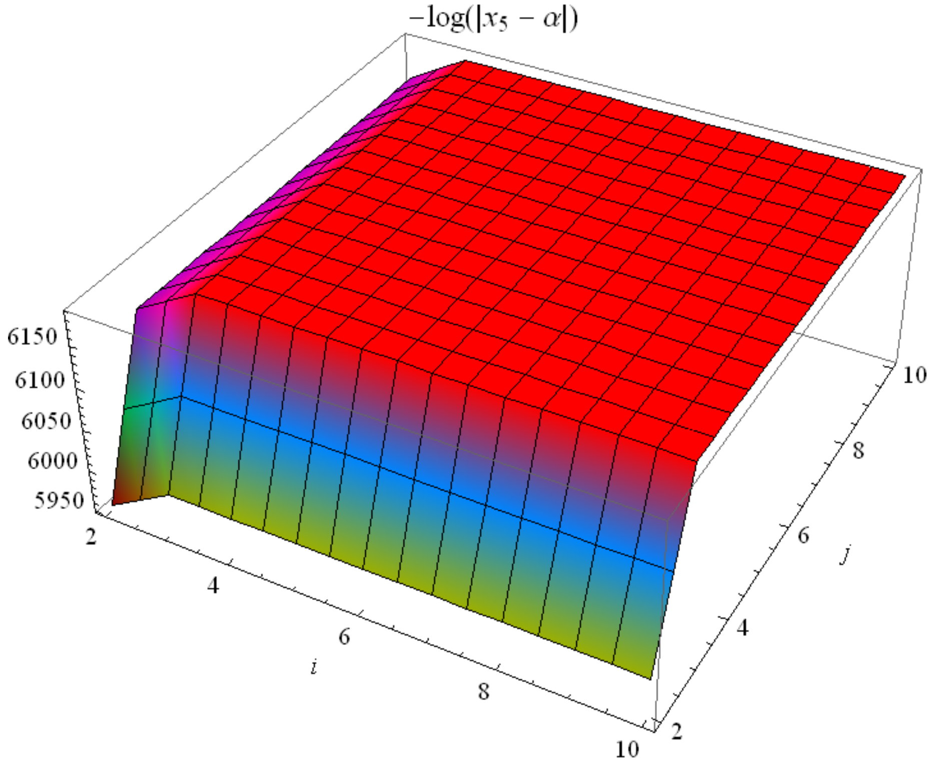
Slika 2.$-log|x_5 - \alpha|$ za primer 3.



Slika 3.$-log|x_5 - \alpha|$ za primer 4.



Slika 4.$-log|x_5 - \alpha|$ za primer 4.

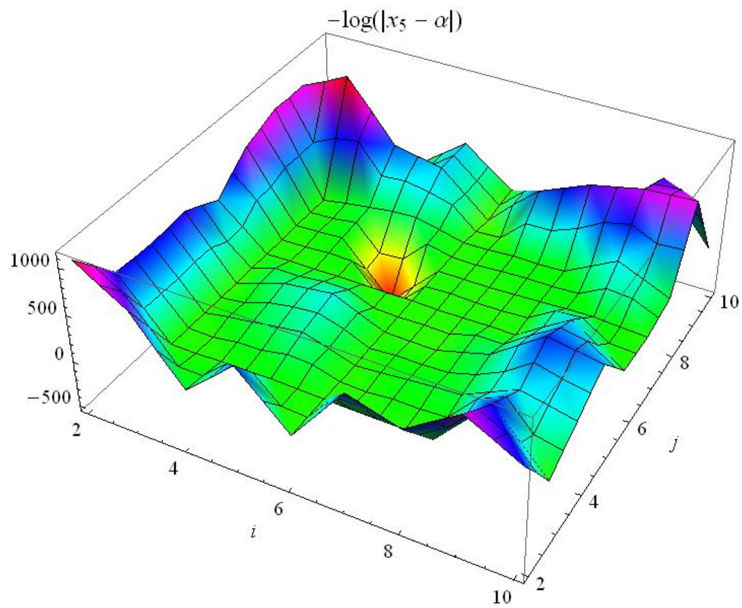


Slika 5.$-log|x_5 - \alpha|$ za primer 9.

5 Zaključak

U radu smo posmatrali postupke šestog reda konvergencije za numeričko rešavanje nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom. Indeks efikasnosti ovih postupaka je $6^{1/4} = 1.565\ldots$. Posmatrani postupci polaze od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, a povišenje reda sa dva na četiri postiže se ubrzanjem Njutnovog postupka sa dodatnim korakom. Prikazani su postupak Neta, postupak Chun-Neta, modifikovani postupak Chun-Neta, postupak Herceg-Herceg i postupak Soleymani. Postupajući na način prikazan u radu [7], dobijena je familija postupaka šestog reda konvergencije, kao originalan doprinos. Pod određenim pretpostavkama dokazali smo konvergenciju postupaka i odredili asimptotske konstante greške.

U četvrtom delu rada prikazali smo više rezultata izvedenih eksperimenata koji su urađeni u programskom paketu *Mathematica*. Numerički rezultati pokazuju da naši postupci i primeri daju dobre rezultate, slične postupcima na koje smo se ugledali. Izuzetak je samo primer 8, gde se za pojedine izbore funkcija φ_i i φ_j dobijaju lošiji rezultati, kao što se može videti sa slike 6.



Slika 6.$-log|x_5 - \alpha|$ za primer 8.

Primeri koje smo koristili za numerički eksperiment uzeti su iz relevantnih radova. Numerički rezultati su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

6 Literatura

[1] Herceg D., Krejić N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[2] A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.

[3] A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press Inc., 1966.

[4] B. Neta, A sixth order family of methods for nonlinear equations, Int. J. Comput. Math. 7 (1979) 157–161.

[5] C. Chun, B. Neta, A new sixth-order scheme for nonlinear equations, Applied Mathematics Letters 25 (2012) 185–189.

[6] C. Chun, B. Neta, Some modification of Newton's method by the method of undetermined coefficients, Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 2528–2538.

[7] C. Chun, Some improvements of Jarratt's method with sixth-order convergence, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 1432–1437.

[8] Đ. Herceg, D. Herceg, On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 87(2010), 11, 2533–2541.

[9] D. Herceg, Đ. Herceg, *Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126-6133.

[10] Đ. Herceg, D. Herceg, *Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means*, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.

[11] Đ. Herceg, D. Herceg, Sixth-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics, 267(2014), 244–253.

[12] Đ. Herceg, D. Herceg, A family of methods for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 259 (2015) 882–895.

[13] F. Soleymani, A Novel and Precise Sixth-Order Method for Solving Nonlinear Equations, Int. J. Math. Models Methods Appl. Sci., 5 (2011), pp. 730–737.

[14] H. Ren, Q. Wu, W. Bi, New variants of Jarratt's method with sixth-order convergence, Numer. Algorithm. 52 (2009) 585–603.

[15] J. Kou, On Chebyshev–Halley methods with sixth-order convergence for solving non-linear equations, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 126–131.

[16] J. Kou, X. Wang, Sixth-order variants of Chebyshev–Halley methods for solving non-linear equations, Appl. Math. Comput. 190 (2007)1839–1843.

[17] J. R. Sharma, R. K. Guha, A family of modified Ostrowski methods with accelerated sixth order convergence, Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 111-115.
[18] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.
[19] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.
[20] S.K. Parhi, D.K. Gupta, A sixth order method for nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 203 (2008) 50–55.

7 Biografija

Ester Jambor rođena je 20.8.1990. u Zrenjaninu. Osnovnu školu „Miloš Crnjanski“ u Srpskom Itebeju završila je 2005. godine sa odličnim uspehom. Iste godine je upisala opšti smer Zrenjaninske gimnazije, koji je završila 2009. godine takođe sa odličnim uspehom. Nakon završene gimnazije upisuje osnovne akademske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Osnovne studije završava 2012. godine, i na istom fakultetu upisuje master akademske studije matematike, modul nastava matematike. Do juna 2015. položila je sve ispite predviđene planom i programom i tako stekla pravo na odbranu master rada.

Novi Sad, novembar 2015. *Ester Jambor*

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Ester Jambor
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Jedna familija trokoračnih postupaka šestog reda za rešavanje nelinearnih jednačina
MR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2015.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/ 34 strana/ 1 tabela/ 20 literatura
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: red konvergencije, postupak, jednačina greške
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U master radu posmatramo teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake šestog reda konvergencije za izračunavanje jednostrukih korena nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a, b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha) \neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, dajemo modifikacije čiji je red povišen na šest. Kao originalan doprinos dajemo novu familiju postupaka. Pod određenim

pretpostavkama za posmatrane postupke dokazujemo konvergenciju šestog reda i određujemo odgovarajuće asimptotske konstante greške.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.4.2014.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Sanja Rapajić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Ester Jambor
AU
Mentor: dr. Dragoslav Herceg
MN
Title: A family of three-step sixth-order iterative methods for solving nonlinear equations
XI
Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2015.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description 4 chapters/ 34 pages/ 1 table/ 20 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: order of convergence, method, equation error
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N
The master work we consider theorems and algorithms related to the iterative procedure of the sixth-order convergence for numerical solving of the nonlinear equation . We assume that function f has a simple solution α in $[a,b]$, ie. $f'(\alpha) \neq 0$. Starting from Newton's method, which is second order convergence, we present some known methods of sixth order. As an original contribution we give a

new family procedures. Under certain conditions, for the concerned methods we prove the convergence of the sixrth order and determine corresponding asymptotic constant errors.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10. 4. 2014.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr Sanja Rapajić, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor : dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad