



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Edina Jodal

O konvergenciji trigonometrijskih redova

Master rad

Mentor:
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2017

Sadržaj

Predgovor	2
1 Kratak istorijski pregled	4
2 Trigonometrijski redovi i sistemi	7
2.1 Osnovni pojmovi prostora L^2	7
2.2 Trigonometrijski redovi na intervalu 2π	9
2.2.1 Kompleksni trigonometrijski redovi	10
2.2.2 Realni trigonometrijski redovi	12
2.2.3 Veza između kompleksnih i realnih trigonometrijskih redova	16
2.3 Trigonometrijski redovi na proizvoljnom intervalu	17
2.3.1 Kompleksni trigonometrijski redovi	17
2.3.2 Realni trigonometrijski redovi	18
2.4 Kosinusni i sinusni redovi	20
3 Konvergencija trigonometrijskih redova	22
3.1 Riman-Lebegova teorema	23
3.2 Tačkasta konvergencija	24
3.3 Uniformna konvergencija	31
3.4 Fejerova teorema	34
3.5 Konvergencija u normi prostora L^2	40
4 Primeri Furijevih redova	45
5 Primena Furijevih redova	61
5.1 Opšte rešenje jednačine žice koja treperi	61
5.2 Mešoviti problem za jednačinu provođenja toplote	65
Zaključak	67
Literatura	69

Biografija	71
Ključna dokumentacija	73

Predgovor

Ovaj master rad se bavi sa proučavanjem Furijeovih redova, kao granom Furijeove analize.

U prvom poglavlju rada navodi se kratak istorijski pregled i u njemu pišemo o matematičarima 18-19-og veka koji su doprineli nastanku novih i daljem razvoju tada postojećih matematičkih teorija.

U drugom poglavlju je predstavljena tesna veza između ortogonalnih sistema funkcija i razvoja u Furijeove redove. Naime, možemo primetiti da trigonometrijski sistem sastavljen od beskonačno mnogo elemenata čini jedan potpun ortonormiran sistem na bilo kom intervalu dužine 2π . Preciznije, kompleksna ili realna kvadrat-integrabilna funkcija na proizvoljnom intervalu dužine 2π može se predstaviti kao suma funkcija koje čine trigonometrijski sistem pomnoženih sa Furijeovim koeficijentima. Pored predstavljanja 2π -periodičnih funkcija, u ovom delu rada analiziraćemo i funkcije sa proizvoljnim periodom, a na kraju ovog poglavlja biće reči o konstrukciji odgovarajućih sinusnih i kosinusnih redova.

U trećem poglavlju razmatra se konvergencija kao najvažnije pitanje Furijeovih redova. Furijeovi redovi zapravo nisu uvek jednaki (identični) sa početnom funkcijom. Upravo zbog toga se i postavlja pitanje: na koji način Furijeov red aproksimira funkciju? Ako Furijeov red funkcije konvergira prema funkciji, u ovom poglavlju dobijamo odgovor na pitanja pravog smisla konvergencije, kao i na objašnjenje raznih tipova konvergencija.

U četvrtom delu prikazujemo primere u kojima datu funkciju razvijamo u Furijeov red na osnovu prethodno izvedenih formula. Određujemo zatim n -tu parcijalnu sumu dobijenog reda čije grafike crtamo za nekoliko vrednosti n . Zbog bolje preglednosti, funkciju kao i parcijalnu sumu za nekoliko vrednosti n -a prikazujemo na zajedničkom grafiku zajedno sa komentarima. Na kraju svakog primera dajemo zaključak o konvergenciji trigonometrijskih redova. Grafici se prikazuju pomoću *GeoGebra* i *Wolfram Mathematica* programa.

Furijeove redove primenjujemo u mnogim oblastima fizike, mehanike i elektronike. U petom poglavlju prikazujemo rešavanje dva mehanička problema: opšte rešenje problema vibracije žice i rešenje jednačine provođenja

toplote.

Rad je pisan u programu L^AT_EX. Simbol $\square$ označava kraj dokaza teoreme, leme i primera, dok su $\Re$ i $\Im$ oznake za realni i imaginarni deo izraza, redom. Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R}$ su skupovi prirodnih, celih i realnih brojeva, redom.

★ ★ ★

Ovim putem želela bih da se zahvalim svom mentoru, dr Nenadu Teofanovu na svim stručnim savetima, sugestijama i primedbama u toku pripreme ovog master rada. Takođe zahvaljujem se i članovima komisije, dr Ljiljani Gajić i dr Ljiljani Teofanov.

Veliku zahvalnost dugujem svojoj porodici i svom momku na podršci tokom osnovnih i master studija.

Zahvaljujem se profesorici matematike iz srednje škole koja me je pripremila za fakultet i mnogo pomogla na početku studija.

Takođe se zahvaljujem koleginicama i kolegama sa kojima sam se pripremala za ispite. Zajedničko studiranje i druženje sa njima doprinelo da studentski dani budu lepši i nezaboravni.

Novi Sad, jun 2017.

Edina Jodal

1

Kratak istorijski pregled

Početak teorije trigonometrijskih redova vezuje se za jedan mehanički problem, koji je nastao sredinom 18. veka kao rezultat neslaganja oko ispitivanja vibracija žice između Dalamberta¹, Ojlera² i Bernulija³.

Godine 1715. Tejlor⁴ je objavio svoju teoriju treperenja žice zasnovanu na diferencijalnoj jednačini:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

koja se odnosila na male vibracije. Ovde je $y = y(x, t)$ nepoznata funkcija, $t, x \in \mathbb{R}$, a k^2 je konstanta proporcionalnosti. Za slučaj, kada je žica bila fiksirana na oba kraja, kao rešenje jednačine (1.1), dobio je sledeću funkciju:

$$y(x, t) = A \cdot \sin at \cdot \sin bx, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

gde su A, a, b konstante.

Dalamber je 1747. godine došao do još opštijeg rešenja, kada je rešenje diferencijalne jednačine (1.1) prikazao kao zbir dva talasa. Ojler je takođe došao do opštih rešenja 1750. godine.

Nakon dugih pokušaja i ispitivanja 1755. godine Daniel Bernuli je uspeo da dobije rešenje problema kretanja vibrirajuće žice koja je fiksirana na oba kraja putem sinusnog reda.

Problem je rešio tek godine 1807. Furije⁵ koji je upotrebio trigonometrijske redove u rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina u svojoj teoriji provođenja toplote. Tvrdio je da se svaka 2π -periodična realna funkcija f sa

¹Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783), francuski matematičar

²Leonhard Paul Euler (1707-1783), švajcarski matematičar i fizičar

³Daniel Bernoulli (1700-1782), švajcarski matematičar, fizičar, botaničar

⁴Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar

⁵Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematičar

jednom promenljivom, ako je integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi]$, može razviti u trigonometrijski red oblika:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.2)$$

gde su:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Red (1.2) nazvan Furijeovim redom po imenu pronalazača, dok su $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$ - koje je odredio Ojler u zavisnosti od funkcije f - Furijeovi koeficijenti (ili Ojler-Furijeovi koeficijenti).

Godine 1829. Dirihle⁶ je dokazao da se funkcije definisane svakom konačnom krivom sastavljenom od konačno mnogo neprekidnih duži, mogu prikazati kao sume trigonometrijskih redova. On je prvi definisao kriterijum konvergencije Furijeovih redova. Dikson⁷ je 1873. godine pokazao da postoje takve neprekidne funkcije čiji Furijeovi redovi divergiraju u nuli.

Lebeg⁸ i Kantor⁹ su se bavili definisanjem integracije, kao i skupovima nad kojima se mogu dokazati potrebni i dovoljni uslovi konvergencije Furijeovih redova. U teoriji Furijeovih redova se danas koriste Rimanovi¹⁰ i Lebegovi integrali. Prema Riman-Lebegovoj teoremi, ako se funkcija može razviti u Furijeov red, onda njeni Furijeovi koeficijenti teže ka nuli.

U matematičkoj analizi Parsevalova¹¹ jednakost predstavlja osnovni rezultat o sumabilnosti Furijeovog reda funkcije, koju je postavio i dokazao Parseval 1799. godine. Geometrijski, Parsevalova jednakost predstavlja Pitagorinu teoremu u vektorskom prostoru L^2 .

U razvoju pojma funkcije potrebno je spomenuti Ris-Fišerovu teoremu. Prema njoj, Košijev uslov konvergencije važi i za slučaj konvergencija koja se podrazumeva u prostoru kvadrat-integrabilnih funkcija. Ovu teoremu su 1907. godine nezavisno jedan od drugog dokazali mađarski i nemački matematičari, Ris¹² i Fišer¹³.

⁶Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar

⁷Paul duBois-Reymond (1831-1889), nemački matematičar

⁸Henri Léon Lebesgue (1875-1941), francuski matematičar

⁹Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), nemački matematičar

¹⁰Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nemački matematičar

¹¹Marc-Antoine Parseval (1755-1836), francuski matematičar

¹²Frigyes Riesz (1880-1956), mađarski matematičar

¹³Ernst Sigismund Fischer (1875-1954), nemački matematičar

Godine 1900. Fejer¹⁴ je došao do značajnog otkrića u oblasti teorije Furijeovih redova. Dokazao je, da ako je 2π -periodična, integrabilna funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$, onda aritmetička sredina njenih parcijalnih suma Furijeovog reda uniformno konvergira ka funkciji $f(x)$. Fejerova teorema je postala polazna tačka u čitavom nizu istraživanja u oblasti teorije Furijeovih redova i uopšte u teoriji redova ortogonalnih funkcija.

Godine 1926. Kolmogorov¹⁵ je dokazao da postoji integrabilna funkcija čiji Furijeov red divergira skoro svuda.

Polazeći od konstrukcije neprekidnih funkcija u kojoj se skup divergencije Furijeovog reda sastoji od beskonačno mnogo tačaka s tim, da je skup mere u svim slučajevima jednak nuli, Luzin¹⁶ je 1915. godine u doktorskoj disertaciji formulisao svoju poznatu pretpostavku: u slučaju neprekidnih funkcija, trigonometrijski Furijeov red predstavlja funkciju sa izuzetkom skupa mere nula. Posle istraživanja mnogih matematičara, godine 1966. Karleson¹⁷ je dokazao Luzinovo tvrđenje. Iste godine, Kacnelson i Kahan su dokazali da za proizvoljan skup mere nula postoji neprekidna funkcija čiji Furijeov red na tom skupu divergira.

Furijeovi redovi imaju ogroman značaj u oblasti obrade signala jer se signal može opisati sinusnim ili kosinusnim funkcijama koje su matematički i informatički vrlo dobro obradive. Sa stanovišta obrade signala, najveća prednost je ta da je rezultujući signal nakon propuštanja sinusnog odnosno kosinusnog signala kroz jedan linearni sistem takođe sinusni odnosno kosinusni. Izlazni signal se ne razlikuje od ulaznog u frekvenciji, eventualno se može razlikovati u fazi i amplitudi. Pored obrade signala, Furijeovi redovi su našli široku primenu u mnogim oblastima fizike, elektrotehnike, akustike i optike.

¹⁴Lipót Fejér (1880-1959), mađarski matematičar

¹⁵Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), ruski matematičar

¹⁶Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950), ruski matematičar

¹⁷Lennart Axel Edvard Carleson (1928), švedski matematičar

2

Trigonometrijski redovi i sistemi

U ovoj sekciji upoznaćemo se sa definicijama i teoremama vezanim za trigonometrijske redove i sisteme. Pomoću njih možemo doći do razvijanja funkcije u Furijeov red. Pre toga ćemo se u sledećem poglavlju podsetiti na najvažnije definicije i teoreme funkcionalne analize, koji će nas pratiti tokom rada.

Osnovna literatura koju smo koristili je [1], [5], [9], [14] i [15].

2.1 Osnovni pojmovi prostora L^2

Posmatrajmo po delovima neprekidne funkcije definisane na Hilbertovim¹⁸ prostorima $L^2([a, b], \mathbb{C})$, odnosno $L^2([a, b], \mathbb{R})$. Navedeni prostori su skupovi kompleksnih funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, odnosno realnih funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, redom, koje su kvadrat-integrabilne na proizvoljnom intervalu $[a, b]$, to jest:

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Na tim prostorima možemo definisati skalarni proizvod na sledeći način:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \text{ gde su } f, g \in L^2([a, b], \mathbb{C}),$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt, \text{ gde su } f, g \in L^2([a, b], \mathbb{R}),$$

a norma, u oznaci $\|\cdot\|_2$, je sledeća:

¹⁸David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt} < \infty, \text{ gde je } f \in L^2([a, b], \mathbb{C}),$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} < \infty, \text{ gde je } f \in L^2([a, b], \mathbb{R}).$$

Primetimo da je na konačnom intervalu ograničena funkcija kvadrat-integrabilna. Ova klasa sadrži neprekidne i po delovima neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Na proizvoljnom, ne obavezno ograničenom intervalu, funkcije koje su ograničene i integrabilne su ujedno i kvadrat-integrabilne na tom intervalu.

Lema 2.1.1. (Koši¹⁹-Švarcova²⁰ nejednakost) Ako su $f, g \in L^2([a, b], \mathbb{R})$, tada važi:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

to jest:

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}.$$

Koši-Švarcova nejednakost za redove sa realnim koeficijentima je specijalan slučaj Helderove nejednakosti:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2}$$

Lema 2.1.2. (Nejednakost trougla) Ako su $f, g \in L^2([a, b], \mathbb{R})$, tada važi:

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Dokaz. Dokazaćemo primenom Koši-Švarcove nejednakosti:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|_2^2 \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|g\|_2^2 \\ &= (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2. \end{aligned}$$

□

¹⁹Baron Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

²⁰Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), nemački matematičar

Slično se formuliše Koši-Švarcova nejednakost i nejednakost trougla u prostoru $L^2([a, b], \mathbb{C})$.

Pojam ortogonalnosti u Hilbertovom prostoru $L^2([a, b], \mathbb{R})$ omogućava nam da uvedemo pojam ortonormirane baze (potpun ortonormiran sistem) tako da se svaki element iz $L^2([a, b], \mathbb{R})$ može izraziti kao linearna kombinacija elemenata ortonormirane baze.

Definicija 2.1.1. Skup vektora $S = \{s_i : i \in I\}$ u Hilbertovom prostoru $L^2([a, b], \mathbb{R})$ je *ortogonalan skup*, ako važi:

$$(\forall \alpha, \beta \in I)(\alpha \neq \beta \Rightarrow \langle s_\alpha, s_\beta \rangle = 0).$$

Skup S je *normiran skup*, ako važi:

$$(\forall \alpha \in I) \|s_\alpha\|_2 = 1.$$

Za skup vektora S kažemo da je *ortonormiran skup* (ili *ortonormiran sistem*), ako je S ortogonalan i normiran skup.

Skup S je *potpun ortonormiran sistem*, ako je maksimalan ortonormiran sistem, to jest ako nije sadržan ni u jednom širem (u skupovnom smislu) ortonormiranom sistemu.

U nastavku imaćemo više poglavlja gde možemo posebno posmatrati trigonometrijske redove na intervalu 2π , na proizvoljnom intervalu, kao i sinusne i kosinusne redove.

2.2 Trigonometrijski redovi na intervalu 2π

U ovoj sekciji ćemo koristiti periodičnost, kao jednu važnu osobinu funkcije. Podsetimo se definicije:

Definicija 2.2.1. Za funkciju $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je *periodična* sa periodom T , ako postoji pozitivna konstanta T tako da važi:

$$f(t + T) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osnovni period funkcije f je najmanji broj $T > 0$ za koji važi prethodna jednakost.

Specijalno, ako je posmatrana funkcija 2π -periodična, onda važi:

$$f(t + 2k\pi) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

U sledeća dva poglavlja bavićemo se sa trigonometrijskim redovima baziranim na trigonometrijskom sistemu funkcija koje su 2π -periodične. Za razmatranje takvog sistema uzećemo interval dužine 2π , to jest interval oblika $[a, a + 2\pi], a \in \mathbb{R}$. U nastavku, u većini slučaja, uzećemo da je $a = -\pi$ ili $a = 0$. Dokazaćemo sledeću lemu koja će biti korisna u nastavku:

Lema 2.2.1. Neka je f 2π -periodična funkcija i neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada važi:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

Dokaz. Uvedimo smenu $t = x - 2\pi$ i koristeći osobinu da je f 2π -periodična funkcija, dobijamo da je:

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(t)dt = \int_{\pi}^{\pi+a} f(x - 2\pi)dx = \int_{\pi}^{\pi+a} f(x)dx.$$

U slučaju, kada je $a \geq 0$, na osnovu prethodne jednakosti imamo da je:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(t)dt &= \int_{-\pi+a}^{-\pi} f(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi+a} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi+a} f(t)dt - \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi+a} f(t)dt - \int_{\pi}^{\pi+a} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi+a} f(t)dt + \int_{\pi+a}^{\pi} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt. \end{aligned}$$

Na sličan način se dokazuje kada je $a < 0$. □

2.2.1 Kompleksni trigonometrijski redovi

Posmatrajmo sistem kompleksnih funkcija $t \mapsto e^{ikt}$ definisanih na intervalu $[0, 2\pi]$:

$$S_1 = \{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Teorema 2.2.1. Skup funkcija S_1 je ortogonalan sistem u Hilbertovom prostoru $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

Dokaz. Neka su k i n različiti celi brojevi. Tada važi:

$$\begin{aligned}\langle e^{ikt}, e^{int} \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{ikt} \overline{e^{int}} dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = \frac{1}{i(k-n)} (e^{i(k-n)t}) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{i(k-n)} (e^{i(k-n)2\pi} - 1) = 0,\end{aligned}$$

čime je dokazana teorema. □

Normu elemenata trigonometrijskog sistema S_1 računamo na sledeći način:

$$\begin{aligned}\|e^{ikt}\|_2 &= \sqrt{\langle e^{ikt}, e^{ikt} \rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} e^{ikt} \overline{e^{ikt}} dt} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt} = \sqrt{\int_0^{2\pi} dt} = \sqrt{2\pi},\end{aligned}$$

gde je $k \in \mathbb{Z}$.

Da bismo dobili ortonormiran sistem vektora, dovoljno je postići da elementi sistema S_1 budu normirani. Očigledno, deljenjem svih elemenata iz S_1 sa $\sqrt{2\pi}$, možemo definisati novi sistem funkcija, koji je pre svega i potpun.

Teorema 2.2.2. Skup funkcija definisan sa:

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.1)$$

čini potpun ortonormiran sistem u $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

Sledeća lema je potrebna za dalje izvođenje. Njen dokaz se može naći u [1] i [14].

Lema 2.2.2. Neka je I indeksni skup i neka je $S = \{s_i : i \in I\}$ ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru X . Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. S je potpun ortonormiran sistem u prostoru X ,

2. za skoro sve $x \in X$ važi $x = \sum_{i \in I} \langle x, s_i \rangle s_i$,
3. za svaki element $x \in X$ važi: $\langle x, s_i \rangle = 0, \forall i \in I \Rightarrow x = 0$.

Koristeći prethodnu lemu, za svaku funkciju $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, dobijamo:

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt},$$

i time možemo formulirati definiciju kompleksnog trigonometrijskog reda funkcije f :

Definicija 2.2.2. Neka $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Kompleksni trigonometrijski red Furije funkcije f je red oblika:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

pri čemu su $c_k, k \in \mathbb{Z}$, Furijeovi koeficijenti definisani sa:

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Napomena 2.2.1. Oznaka $\sim$ jednostavno pokazuje da funkciji f odgovara njen Furijeov red. Međutim, kaže se da predstavlja razvoj funkcije f u Furijeov red.

Sledeća lema govori o jedinstvenosti Furijeovih koeficijenata, a njen dokaz vodi poreklo iz potpunosti skupa $S_{\mathbb{C}}$, kao i na osnovu leme 2.2.2.

Lema 2.2.3. Neka je $S_{\mathbb{C}}$ skup funkcija definisan sa (2.1). Ako za neku funkciju $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ važi da svi njeni Furijeovi koeficijenti $c_k, k \in \mathbb{Z}$, definisani u definiciji 2.2.2., jednaki nuli, to jest ako je f ortogonalna na $S_{\mathbb{C}}$, tada $f(t) = 0$, za sve $t \in [0, 2\pi]$.

2.2.2 Realni trigonometrijski redovi

Posmatrajmo sada Hilbertov prostor $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ i definišimo skup funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$ sa:

$$S_2 = \{1, \cos kt, \sin kt : k \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 2.2.3. Skup funkcija S_2 je ortogonalan sistem u Hilbertovom prostoru $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

Dokaz 1. Neka $k \in \mathbb{N}$. Koristeći Ojlerove formule:

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \quad \sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i},$$

dobijamo funkcije $\cos kt$ i $\sin kt$ izražene kao linearne kombinacije funkcija e^{ikt} i e^{-ikt} . Važi i obrnuto, to jest da funkcije e^{ikt} i e^{-ikt} možemo prikazati kao linearnu kombinaciju funkcija $\cos kt$ i $\sin kt$. Koristeći činjenicu da ako je jedna funkcija ortogonalna na funkcije e^{ikt} i e^{-ikt} , onda je ona ortogonalna i na funkcije $\cos kt$ i $\sin kt$, dobićemo da $\cos kt$ i $\sin kt$ su ortogonalne na bilo koju funkciju $e^{\pm int}$, gde $\pm n \neq k$. Oдавde sledi da su $\cos kt$ i $\sin kt$ ortogonalne na bilo koji $\cos nt$ i $\sin nt$, kao i na konstantnu funkciju 1. Pokazaćemo još da su i funkcije $\cos kt$ i $\sin kt$ uzajamno ortogonalne.

$$\begin{aligned} \langle \cos kt, \sin kt \rangle &= \left\langle \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right\rangle \\ &= \frac{\langle e^{ikt}, e^{ikt} \rangle - \langle e^{ikt}, e^{-ikt} \rangle + \langle e^{-ikt}, e^{ikt} \rangle - \langle e^{-ikt}, e^{-ikt} \rangle}{4i} \\ &= \frac{(2\pi - 0 + 0 - 2\pi)}{4i} = 0. \end{aligned}$$

□

Dokaz 2. Podsetimo se trigonometrijskih formula koje će biti potrebne u dokazu:

$$\begin{aligned} \sin kt \cos nt &= \frac{1}{2}[\sin(k+n)t + \sin(k-n)t], \\ \sin kt \sin nt &= \frac{1}{2}[\cos(k-n)t - \cos(k+n)t], \\ \cos kt \cos nt &= \frac{1}{2}[\cos(k+n)t + \cos(k-n)t]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Računamo skalarni proizvod po definiciji koji ima elemente iz sistema S_2 :

$$\begin{aligned} \langle 1, \sin kt \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin ktdt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \langle 1, \cos kt \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = \begin{cases} t \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi, & k = 0 \\ \frac{\sin kt}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & k=1,2,\dots \end{cases} \end{aligned}$$

Iz poslednje dve relacije možemo zaključiti da je konstantna funkcija 1 ortogonalna na svaku od preostalih funkcija sistema S_2 . U daljem radu korišćićemo formule (2.2).

$$\begin{aligned}
\langle \sin kt, \cos nt \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos ntdt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+n)t dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-n)t dt = 0 \\
\langle \cos kt, \cos nt \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos ntdt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)t dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)t dt \\
&= \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi, & k = n \neq 0, \\ 2\pi, & k = n = 0, \end{cases} \\
\langle \sin kt, \sin nt \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \sin ntdt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)t dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)t dt \\
&= \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi, & k = n \neq 0, \\ 0, & k = n = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da su svake dve različite funkcije iz trigonometrijskog sistema S_2 ortogonalne. $\square$

Normu elemenata trigonometrijskog sistema S_2 računamo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
||1||_2 &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1dt} = \sqrt{2\pi}, \\
||\cos kt||_2 &= \sqrt{\left\langle \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \right\rangle} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\langle e^{ikt}, e^{ikt} \rangle + \langle e^{ikt}, e^{-ikt} \rangle + \langle e^{-ikt}, e^{ikt} \rangle + \langle e^{-ikt}, e^{-ikt} \rangle} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{2\pi + 0 + 0 + 2\pi} = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Slično se dobija i $||\sin kt||_2 = \sqrt{\pi}$.

Na sličan način kao i u slučaju kompleksnih trigonometrijskih redova, možemo normirati svaki vektor skupa S_2 , da bismo dobili ortonormiran sistem vektora. U tom slučaju konstantnu funkciju 1 podelimo sa $\sqrt{2\pi}$, dok funkcije $\cos kt$ i $\sin kt$ sa $\sqrt{\pi}$.

Teorema 2.2.4. Skup funkcija definisan sa:

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} : k \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.3)$$

čini potpun ortonormiran sistem u $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

Koristeći lemu 2.2.2., dobijamo:

$$f(t) \sim \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(t), \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(t), \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}$$

i time možemo formulirati definiciju realnog trigonometrijskog reda funkcije f .

Definicija 2.2.3. Neka $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Realni trigonometrijski red Furijea funkcije f je red oblika:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

pri čemu su a_0 , a_k i b_k , $k \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti definisani sa:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt. \end{aligned}$$

Trigonometrijski red Furijea će se skraćeno zvati *Furijeov red*.

Sledeća lema govori o jedinstvenosti Furijeovih koeficijenata. Slično kao kod leme 2.2.3., i ovu lemu možemo dokazati na osnovu potpunosti skupa $S_{\mathbb{R}}$ i leme 2.2.2.

Lema 2.2.4. Neka je $S_{\mathbb{R}}$ skup funkcija definisan u (2.3). Ako za neku funkciju $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ važi da svi njeni Furijeovi koeficijenti $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$, definisani u definiciji 2.2.3., jednaki nuli, to jest ako je f ortogonalna na $S_{\mathbb{R}}$, onda je $f(t) = 0$, za sve $t \in [-\pi, \pi]$.

2.2.3 Veza između kompleksnih i realnih trigonometrijskih redova

U ovom poglavlju posmatraćemo šta je veza između kompleksnog i realnog Furijeovog reda. Dokazaćemo da se jedan oblik može izvesti iz drugog, kao i obrnuto.

Razdvojimo kompleksni red na pozitivne i negativne članove:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \quad (2.4)$$

Na osnovu Ojlerove formule:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

dobijamo:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(-kt) + i \sin(-kt)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt + i \sin kt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \end{aligned}$$

to jest $c_{-k} = \overline{c_k}$, pa sledi:

$$c_{-k} e^{-ikt} = \overline{c_k} \overline{e^{ikt}} = \overline{c_k e^{ikt}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Koristeći prethodnu jednakost, iz (2.4) sledi:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikt} + \overline{c_k e^{ikt}}) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re(c_k e^{ikt}),$$

gde je:

$$\begin{aligned} 2\Re(c_k e^{ikt}) &= 2\Re\left[\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt - i\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt\right)(\cos kt + i \sin kt)\right] \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx\right) \cos kt + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kxdx\right) \sin kt \\ &= a_k \cos kt + b_k \sin kt. \end{aligned}$$

Dalje,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Prema tome, dobijamo:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

što predstavlja realni oblik Furijeovog reda funkcije f .

2.3 Trigonometrijski redovi na proizvoljnom intervalu

U poglavlju 2.2 smo se upoznali sa funkcijama koje su 2π -periodične. Sada ćemo se baviti sa funkcijama sa proizvoljnim periodom $2l$.

2.3.1 Kompleksni trigonometrijski redovi

Neka su funkcije f i g 2π -periodične. Tada su funkcije:

$$\tilde{f}(t) = f\left(\frac{2\pi t}{2l}\right) \text{ i } \tilde{g}(t) = g\left(\frac{2\pi t}{2l}\right)$$

$2l$ -periodične i važi:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \tilde{f}(t) \overline{\tilde{g}(t)} dt &= \int_{-l}^l f\left(\frac{\pi t}{l}\right) \overline{g\left(\frac{\pi t}{l}\right)} dt \\ &= \frac{l}{\pi} \int_{-\frac{\pi l}{l}}^{\frac{\pi l}{l}} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{l}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \end{aligned}$$

gde smo koristili smenu $\frac{\pi t}{l} = x$.

Primetimo, da ako pomnožimo elemente skupa $S_{\mathbb{C}}$ sa $\sqrt{\frac{2\pi}{2l}}$, dobijamo niz funkcija:

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{ik\pi t}{l}}$$

definisan na intervalu $[-l, l]$ na sledeći način:

$$S_{\mathbb{C}}^{[-l, l]} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{\frac{ik\pi t}{l}} : k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.5)$$

Analogno kao u prethodnom poglavlju možemo formulirati sledeću teoremu:

Teorema 2.3.1. Skup funkcija $S_{\mathbb{C}}^{[-l, l]}$ definisan u (2.5) čini potpun ortonormiran sistem u $L^2([-l, l], \mathbb{C})$.

Definicija 2.3.1. Neka $f \in L^2([-l, l], \mathbb{C})$. Kompleksni trigonometrijski red Furijske funkcije f je red oblika:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi t}{l}},$$

pri čemu su c_k , $k \in \mathbb{Z}$, Furijski koeficijenti definisani sa:

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-\frac{ik\pi t}{l}} dt.$$

2.3.2 Realni trigonometrijski redovi

Slično kao i kod kompleksnih trigonometrijskih redova na intervalu $[-l, l]$, pomnožimo elemente skupa $S_{\mathbb{R}}$ sa $\sqrt{\frac{2\pi}{2l}}$ da bismo dobili niz funkcija na intervalu $[-l, l]$ definisan na sledeći način:

$$S_{\mathbb{R}}^{[-l, l]} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos \frac{k\pi t}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin \frac{k\pi t}{l}}{\sqrt{l}} : k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.6)$$

Teorema 2.3.2. Skup funkcija $S_{\mathbb{R}}^{[-l,l]}$ definisan u (2.6) čini potpun ortonormiran sistem u $L^2([-l, l], \mathbb{R})$.

Definicija 2.3.2. Neka $f \in L^2([-l, l], \mathbb{R})$. Realni trigonometrijski red Furijske funkcije f je red oblika:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l}), \quad (2.7)$$

pri čemu su a_0 , a_k i b_k , $k \in \mathbb{N}$, Furijski koeficijenti definisani sa:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt. \end{aligned}$$

Napomenimo još da se u primenama u fizici i tehnici uzima da je $l = \frac{T}{2}$, gde je T period, a $\frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{T} = \omega$ označava kružnu učestanost. Tada prethodne formule glase:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt, \end{aligned}$$

a Furijski red (2.7) ima oblik:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

2.4 Kosinusni i sinusni redovi

Definicija 2.4.1. Kažemo da je Furijeov red funkcije f :

- *kosinusni red*, ako sadrži samo kosinusne elemente, to jest ako je $b_k = 0$, za svako $k \in \mathbb{N}$;
- *sinusni red*, ako sadrži samo sinusne elemente, to jest ako je $a_k = 0$, za svako $k = 0, 1, 2, \dots$

Do sada nismo koristili osobinu trigonometrijskih funkcija da je $\cos t$ parna, a $\sin t$ neparna funkcija. Ova osobina će biti potrebna u daljem radu.

Teorema 2.4.1. Ako je funkcija f :

- *parna* ($f(x) = f(-x)$), onda važi:

$$\int_{-l}^l f(t)dt = 2 \int_0^l f(t)dt;$$

- *neparna* ($f(-x) = -f(x)$), onda važi:

$$\int_{-l}^l f(t)dt = 0.$$

Teorema 2.4.2. Neka $f \in L^2([-l, l], \mathbb{R})$.

1. Ako je f parna funkcija, onda je njen Furijeov red kosinusni red;
2. Ako je f neparna funkcija, onda je njen Furijeov red sinusni red.

Dokaz.

1. Neka je f parna funkcija. Tada je $f(t) \sin \frac{k\pi t}{l}$ neparna kao proizvod neparne i parne funkcije, pa na osnovu prethodne teoreme sledi:

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2. Neka je f neparna funkcija. Tada je i $f(t) \cos \frac{k\pi t}{l}$ takođe neparna funkcija, pa na osnovu prethodne teoreme sledi:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

□

Posmatrajmo funkciju $f(t)$ koja je definisana na intervalu $[0, l]$. Ona se može na jedinstven način produžiti na $[-l, l]$ tako da se dobija parna funkcija. Definišimo funkciju:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, l], \\ f(-t), & t \in [-l, 0). \end{cases}$$

Nova funkcija $\tilde{f}(t)$ je parna na intervalu $[-l, l]$. Za nju možemo primeniti prethodnu teoremu, pa je Furijeov red po kosinusima funkcije f na intervalu $[0, l]$ dat sa:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi t}{l}, \quad (2.8)$$

gde je:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Posmatranu funkciju $f(t)$ definisanu na intervalu $[0, l]$ možemo na jedinstven način produžiti na $[-l, l]$ tako da se dobije neparna funkcija. Definišimo funkciju:

$$\tilde{\tilde{f}}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, l], \\ -f(-t), & t \in [-l, 0). \end{cases}$$

Nova funkcija $\tilde{\tilde{f}}(t)$ je neparna na intervalu $[-l, l]$. Za nju možemo primeniti prethodnu teoremu, pa je Furijeov red po sinusima funkcije f na intervalu $[0, l]$ dat sa:

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi t}{l}, \quad (2.10)$$

gde je:

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Iz prethodnog razmatranja odmah sledi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.4.3. Skupovi funkcija:

$$S_{cos} = \{1, \cos kt : k \in \mathbb{N}\} \text{ i } S_{sin} = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$$

čine ortogonalan sistem na intervalu $[0, \pi]$.

3

Konvergenција trigonometrijskih redova

U ovoj sekciji ispitaćemo problem konvergenције trigonometrijskih redova Furijea, kao jedno od osnovnih pitanja u teoriji Furijeovih redova.

Koristili smo reference [1], [2], [3], [6], [7], [8] i [11].

Podsetimo se, ako $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, onda je njen Furijeov red na intervalu $[-\pi, \pi]$ dat sa:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \\ &= \frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \end{aligned}$$

ako prethodni limes postoji, pri čemu su $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti definisani u definiciji 2.2.3.

Kažemo da Furijeov red funkcije f *konvergira* ka funkciji f , ako prethodni limes postoji, kada $n \rightarrow \infty$.

Za svako $n \in \mathbb{N}$, označimo sa:

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (3.1)$$

što predstavlja n -tu parcijalnu sumu Furijeovog reda funkcije f .

Drugim rečima, ispitivanje konvergenције Furijeovog reda funkcije f praktično se svodi na ispitivanje konvergenције niza S_n ka funkciji f .

Preciznije, za trigonometrijski red kažemo da je konvergentan tačkasto, uniformno, odnosno konvergira u normi prostora L^2 , ako njegov niz parcijalnih suma konvergira tačkasto, uniformno, odnosno konvergentan je u normi prostora L^2 , redom.

3.1 Riman-Lebegova teorema

Neka je $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Tada, koristeći trigonometrijski sistem:

$$S_2 = \{1, \cos kt, \sin kt : k \in \mathbb{N}\},$$

dobijamo **Beselovu**²¹ **nejednakost** za trigonometrijske redove:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt &\geq \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \|1\|_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 \|\cos kt\|_2^2 + b_k^2 \|\sin kt\|_2^2) \\ &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \pi. \end{aligned}$$

Dalje,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Prema tome, važi sledeća lema:

Lema 3.1.1. Suma kvadrata Furijeovog koeficijenata bilo koje funkcije koja je kvadrat-integrabilna je uvek konvergentna.

Da bi se razmatrala konvergencija Furijeovog reda neke funkcije, neophodno je da Furijeovi koeficijenti konvergiraju nuli, o čemu se govori u sledećoj teoremi:

Teorema 3.1.1. (Riman-Lebegova teorema) Neka je f po delovima neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Tada $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$, to jest:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos ktdt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin ktdt = 0.$$

Dokaz. Na osnovu Beselove nejednakosti i prethodne leme dobijamo da je red:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

konvergentan, pa odakle slede jednakosti $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k^2 + b_k^2) = 0$, to jest $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. $\square$

²¹Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), nemački matematičar, astronom

3.2 Tačkasta konvergencija

Pre nego što pređemo na dve osnovne teoreme ovog poglavlja, odredićemo definiciju tačkaste konvergencije, a potom navešćemo definiciju koja će biti potrebna u nastavku.

Definicija 3.2.1. Kažemo da niz funkcija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira tačkasto ka funkciji f na intervalu $[a, b]$, ako za svako $t \in [a, b]$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$ za svako $n \geq n_0(\varepsilon, t)$ takav da je:

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Drugim rečima, za svako $t \in [a, b]$ važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t).$$

Definicija 3.2.2. Funkcija f ima *levi izvod* u svakoj tački $t \in [-\pi, \pi]$, ako postoji:

$$f'(t-0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t-0)}{h}, \quad \forall t \in (-\pi, \pi],$$

gde je $f(t-0) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(t-\xi)$ leva granična vrednost funkcije f u tački t .

Funkcija f ima *desni izvod* u svakoj tački $t \in [-\pi, \pi]$, ako postoji:

$$f'(t+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t+0)}{h}, \quad \forall t \in [-\pi, \pi),$$

gde je $f(t+0) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(t+\xi)$ desna granična vrednost funkcije f u tački t .

Sledeća teorema nam pokazuje kako konvergira Furijeov red po delovima neprekidne funkcije ka datoj funkciji u tačkama prekida.

Teorema 3.2.1. (Dirihleova teorema) Neka je $f(t)$ po delovima neprekidna, 2π -periodična funkcija i neka je t neki prekid prve vrste²². Pretpostavimo da u toj tački postoje jednostrani izvodi. Tada trigonometrijski red Furijea funkcije f konvergira ka:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}.$$

Specijalno, u tačkama $t = \pm\pi$ Furijeov red funkcije f konvergira ka:

$$\frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Dokaz. Za svako $n \in \mathbb{N}$, neka je $S_n(t)$ n -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije f definisana u (3.1). Dokazaćemo da:

$$S_n(t) \rightarrow \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Koristeći formule a_0 , a_k , b_k , (3.1) zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \cdot \cos kt + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \cdot \sin kt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cdot \cos kt + \sin kx \cdot \sin kt) \right] dx. \end{aligned}$$

Za smenu koristimo adicijonu formulu:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

dobijamo:

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right] dx.$$

Posle uvođenja smene $s = x - t$, $S_n(t)$ postaje:

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right] ds.$$

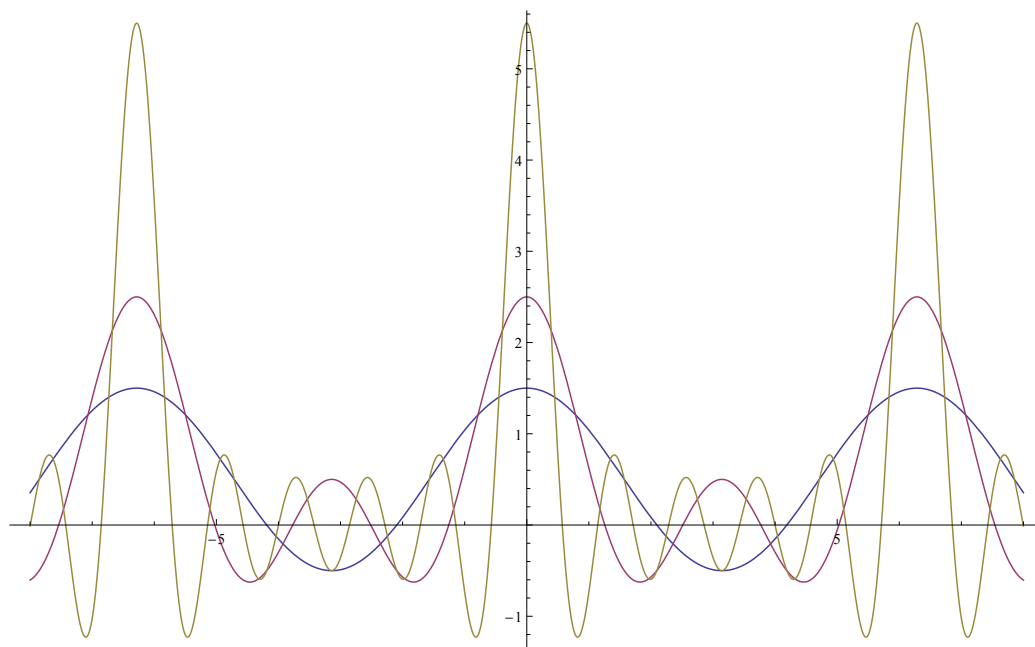
²²Funkcija f ima prekid prve vrste u tački t_0 , ako postoje granične vrednosti $\lim_{t \rightarrow t_0-0} f(t)$ i $\lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t)$, s tim da je barem jedan od njih različit od $f(t_0)$.

Sada, koristeći lemu 2.2.1., sledi:

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right] ds.$$

Definicija 3.2.3. *Dirihleovo jezgro* reda $n \in \mathbb{N}$ je definisano sa:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Slika 1: *Dirihleovo jezgro* $D_1(t)$, $D_2(t)$ i $D_5(t)$

Napomena 3.2.1. Znajući da je:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

sledi:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} e^{ikt} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} e^{-ikt} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} e^{ikt} + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{2} e^{ikt} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2} e^{ikt} - \frac{1}{2} e^0
\end{aligned}$$

Prema tome, kompleksni oblik Dirihleovog jezgra je:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za dalje izvođenje potrebna nam je sledeća lema.

Lema 3.2.1. Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Dokaz. Neka je $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$. Koristeći trigonometrijski identitet:

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)],$$

sledi da za svako $k \in \mathbb{N}$ i svako $t \in \mathbb{R}$ važi:

$$\cos kt \sin \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t \right], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Množenjem leve strane jednakosti (3.2) sa $\sin \frac{1}{2}t$ i posle sređivanja dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\sin \frac{1}{2}t \left[\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \left[\left(\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t \right) + \left(\sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \dots + \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) t \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right], \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Posle deljenja obe strane jednakosti sa $\sin \frac{1}{2}t$, dobijamo traženo. $\square$

Dakle, na osnovu prethodne leme imamo:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Tačke $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, u kojima je imenilac jednak nuli, su tačke otklonjivog²³ prekida.

Napomena 3.2.2. Dirihleovo jezgro je neprekidna, parna i 2π -periodična funkcija, što sledi iz same definicije 3.2.3. Takođe važi:

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2}.$$

Lema 3.2.2. Za Dirihleovo jezgro reda $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1.$$

Dokaz. Kako je Dirihleovo jezgro parna funkcija, to je:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt,$$

pa odavde sledi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 D_n(t) dt + \int_0^{\pi} D_n(t) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} dt + \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \cos ktdt \right] \end{aligned}$$

²³Funkcija f ima otklonjiv prekid u tački t_0 , ako postoje granične vrednosti $\lim_{t \rightarrow t_0-0} f(t)$ i $\lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t)$, takve da je $\lim_{t \rightarrow t_0-0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t) = a$, pri čemu ili $f(t_0)$ nije definisana ili $f(t_0) \neq a$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2}\pi + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin kt \right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2}\pi + 0 \right] = 1.
\end{aligned}$$

□

Nastavljamo sa dokazom Dirihleove teoreme.
Dokazaćemo da je:

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) D_n(s) ds \rightarrow \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2},$$

kada $n \rightarrow \infty$. Podelimo prethodnu graničnu jednačinu na dva dela, to jest ona će biti ekvivalentna sa sledećim jednačinama:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t+s) D_n(s) ds \rightarrow \frac{f(t+0)}{2},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t+s) D_n(s) ds \rightarrow \frac{f(t-0)}{2}.$$

Sređivanjem prethodne dve jednačine, dobijamo:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+s) - f(t+0)) D_n(s) ds \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(t+s) - f(t-0)) D_n(s) ds \rightarrow 0,$$

što ćemo dokazati u nastavku.

Koristeći (3.3), želimo da dokažemo:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(t+s) - f(t+0)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right] ds \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{f(t+s) - f(t-0)}{2 \sin(\frac{s}{2})} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right] ds \rightarrow 0.$$

Dokazaćemo da važi (3.4). Da bismo koristili Riman-Lebegovu teoremu, potreban je uslov da funkcija $\frac{f(t+s)-f(t+0)}{2 \sin(\frac{s}{2})}$ bude po delovima neprekidna.

Označimo je sa:

$$g(s) = \frac{f(t+s) - f(t+0)}{2 \sin(\frac{s}{2})}, \quad s \in (0, \pi].$$

Kako je f po delovima neprekidna funkcija, sledi da je i g po delovima neprekidna funkcija na intervalu $(0, \pi]$. Pokazaćemo da postoji $\lim_{s \rightarrow 0^+} g(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(t+s) - f(t+0)}{s}}_{\text{desni izvod u } t} \underbrace{\frac{\frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2}}}_{\text{teži ka } 1}.$$

Znajući da funkcija f ima odgovarajuće jednostrane izvode na intervalu $[-\pi, \pi]$, sledi da $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(t+0)}{s}$ postoji, pa je g po delovima neprekidna funkcija na celom intervalu $[0, \pi]$, dakle, za nju možemo primeniti Riman-Lebegovu teoremu.

Analogno se dokazuje da je funkcija $g(s)$, definisana sa $g(s) = \frac{f(t+s) - f(t-0)}{2 \sin(\frac{s}{2})}$, $s \in [-\pi, 0]$ po delovima neprekidna, i takođe posle primene Riman-Lebegove teoreme sledi tvrđenje. $\square$

Prethodnu Dirihleovu teoremu zovemo i teoremom o konvergenciji Furi-jeovog reda u tački prekida.

Sledeća teorema takođe potiče od Dirihlea koja govori o konvergenciji u tački neprekidnosti. Ona - u suprotnosti sa prethodnom teoremom - zahteva i neprekidnost funkcije pored periodičnosti.

Teorema 3.2.2. (Dirihleova teorema) Neka je $f(t)$ neprekidna, 2π -periodična funkcija. Tada u svakoj tački t , gde postoji izvod od f , Furijeov red funkcije f konvergira tačkasto ka funkciji f .

Dokaz. Slično kao prethodni Dirihleov dokaz, samo u ovom slučaju dovoljno je dokazati da $S_n(t) \rightarrow f(t)$, kada $n \rightarrow \infty$. $\square$

Postavlja se pitanje, da ako o funkciji znamo samo da je neprekidna u tački t , da li njen Furijeov red konvergira u toj tački? Odgovor na pitanje je dao Dibo-Rejmond 1873. godine.

Teorema 3.2.3. (Dibo-Rejmondova teorema) Postoji neprekidna, 2π -periodična funkcija $f(t)$ čiji Furijeov red divergira u tački $t = 0$. Drugim rečima, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0)$ ne postoji.

3.3 Uniformna konvergencija

Definicija 3.3.1. Kažemo da niz funkcija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira uniformno ka funkciji f na intervalu $[a, b]$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da važi:

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_0(\varepsilon)$ i za svako $t \in [a, b]$.

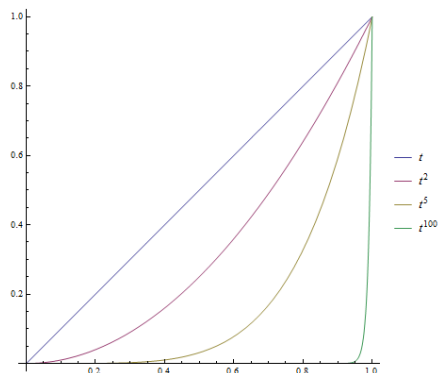
Definicija 3.3.2. Kažemo da Furijeov red funkcije f konvergira uniformno ka funkciji f , ako za njenu n -tu parcijalnu sumu reda važi:

$$S_n(t) \rightarrow f(t)$$

uniformno, kada $n \rightarrow \infty$.

Iz definicije tačkaste i uniformne konvergencije možemo primetiti da između te dve konvergencije postoji značajna razlika. Kod uniformne konvergencije broj n_0 zavisi samo od ε , dok je u slučaju tačkaste konvergencije n_0 zavisi i od tačke t i od broja ε .

Uniformna konvergencija ne dozvoljava da se niz funkcija f_n u bilo kojoj tački u velikoj meri razlikuje od približavane funkcije f , dok se u definiciji tačkaste konvergencije isto ne isključuje. Odakle sledi da ako niz funkcija f_n uniformno konvergira ka funkciji f , onda on konvergira i tačkasto ka toj funkciji, to jest uniformna konvergencija je strožija od tačkaste konvergencije. Obrnuto ne mora da važi, što pokazuje niz $f_n(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$ (Slika 2). U slučaju $t \in [0, 1)$, niz tačkasto konvergira ka nuli, za što veće n , dok je u



Slika 2: Funkcija $f_n(t) = t^n$, za $n = 1, 2, 5, 100$

blizini $t = 1$, konvergencija sve sporija. S druge strane, ova konvergencija nije uniformna na intervalu $[0, 1]$, što pokazujemo na sledeći način: za svako $n \in \mathbb{N}$ se može izabrati tačka $t_n \in [0, 1]$, tako da je $f_n(t_n) = \frac{1}{2}$. Tada za $\varepsilon = \frac{1}{4}$ i za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $|f_n(t_n) - f(t_n)| > \varepsilon$, pa konvergencija nije uniformna. Možemo još napomenuti, da niz neprekidnih funkcija ne može da konvergira uniformno na nekom intervalu ka funkciji koja ima prekid u nekoj tački tog intervala.

Lema 3.3.1. Ako su redovi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ i $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ konvergentni, tada Furijeov red funkcije f uniformno i apsolutno konvergira ka funkciji f , pri čemu su $a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$, Furijeovi koeficijenti funkcije f .

Dokaz. Neka je:

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt), n \in \mathbb{N}.$$

Tada je:

$$\begin{aligned} f(t) - S_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \end{aligned}$$

Sada, kako važi nejednakost:

$$|a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leq |a_k \cos kt| + |b_k \sin kt| \leq |a_k| + |b_k|,$$

dobijamo sledeću uniformnu ocenu:

$$|f(t) - S_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|), \quad (3.5)$$

koja važi za sve $t \in \mathbb{R}$. Kako po pretpostavci red $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ konvergira, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n > n_0$ važi $\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \varepsilon$. Prema tome, (3.5) postaje:

$$|f(t) - S_n(t)| < \varepsilon$$

za sve $n > n_0$ i za sve $t \in \mathbb{R}$. Primetimo, da broj n ne zavisi od promenljive t , samo od brzine konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$, dakle, konvergencija

reda $S_n(t)$ jeste uniformna. □

O nizu parcijalnih suma S_n znamo da je konačna suma neprekidnih funkcija, pa prema tome je i sama funkcija S_n neprekidna za svako $n \in \mathbb{N}$. Takođe znamo da je 2π -periodična, pa važi $S_n(-\pi) = S_n(\pi)$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Takođe, ako neku funkciju $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ želimo periodično produžiti na $\mathbb{R}$, onda mora da važi uslov $f(-\pi) = f(\pi)$.

Teorema 3.3.1. (O uniformnoj konvergenciji) Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$, pri čemu važi $f(-\pi) = f(\pi)$ i neka je f' po delovima neprekidna funkcija na $[-\pi, \pi]$. Tada Furijeov red funkcije f uniformno konvergira ka f na $[-\pi, \pi]$.

Dokaz. Neka su:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

i

$$f'(t) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt).$$

Odredimo najpre vezu između Furijeovih koeficijenata funkcija f i f' .

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{\pi} f(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Za $k \geq 1$, koristeći parcijalnu integraciju, dobijamo:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos ktdt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(t) \cos kt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot k \cdot \sin ktdt \right] \\ &= \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \\ &= k \cdot b_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin ktdt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[f(t) \sin kt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot k \cdot \cos ktdt \right] \\
&= -\frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \\
&= -k \cdot a_k.
\end{aligned}$$

Dakle, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = kb_k$ i $\beta_k = -ka_k$, $k \in \mathbb{N}$. Koristeći prethodno dobijene veze, na osnovu nejednakosti Koši-Švarca, sledi:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_k|^2 + |b_k|^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\left| \frac{\alpha_k}{k} \right|^2 + \left| \frac{\beta_k}{k} \right|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sqrt{|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2)}.
\end{aligned}$$

Koristeći lemu 3.1.1., zaključujemo da je red $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2)}$ konvergentan, i znajući da je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$, sledi i konvergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_k|^2 + |b_k|^2}$.
Nejednakosti:

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leq \sqrt{|a_k|^2 + |b_k|^2}, \\
|b_k| &\leq \sqrt{|a_k|^2 + |b_k|^2}
\end{aligned}$$

impliciraju da su i redovi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ i $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ konvergentni. Konačno, na osnovu prethodne leme sledi da Furijeov red funkcije f uniformno konvergira ka istoj funkciji, što je i trebalo dokazati. $\square$

3.4 Fejerova teorema

Fejer je dokazao teoremu o konvergenciji neprekidnih funkcija. Njegova ideja je zasnovana na tome da umesto parcijalne sume Furijeovog reda funkcije koristimo njegove aritmetičke sredine, što definišemo na sledeći način:

Definicija 3.4.1. *Fejerova (Cezarova) suma* reda $n \in \mathbb{N}$ se definiše na sledeći način:

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(t),$$

gde je $S_n(t)$ n -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije f u kompleksnom obliku:

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}.$$

Kažemo da je red:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Cezaro sabirljiv ka $\sigma(t)$, ako važi:

$$\sigma_n(t) \rightarrow \sigma(t), \text{ kada } n \rightarrow \infty.$$

Definicija 3.4.2. Fejerovo jezgro reda $n \in \mathbb{N}$ se definiše na sledeći način:

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t),$$

gde je $D_n(t)$ kompleksni oblik Dirihleovog jezgra:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}.$$

Lema 3.4.1. Neka je $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada važi:

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) F_n(x) dx.$$

Dokaz. U dokazu Dirihleove teoreme koristili smo n -tu parcijalnu sumu oblika:

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_n(x) dx, \quad (3.6)$$

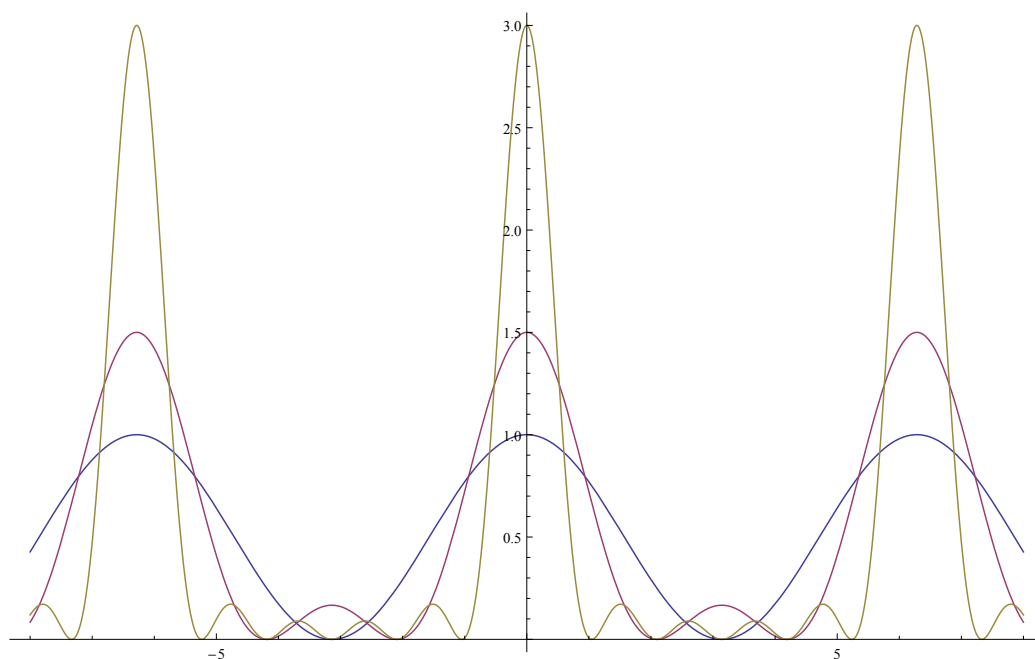
dok druga jednakost sledi iz parnosti Dirihleovog jezgra i na osnovu 2π -periodičnosti funkcije f .

Pomoću (3.6), n -tu Fejerovu sumu Furijeovog reda funkcije f izražavamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(t) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_k(x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) \right] dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) F_n(x) dx.
\end{aligned}$$

□



Slika 3: Fejerovo jezgro $F_1(t)$, $F_2(t)$ i $F_5(t)$

Lema 3.4.2. Osobine Fejerovog jezgra reda n su sledeće:

$$(1) \quad F_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)} \cdot \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2, & t \neq 0, \\ \frac{n+1}{2}, & t = 0. \end{cases}$$

(2) Integral Fejerovog jezgra jednak 1, to jest

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1.$$

(3) Fejerovo jezgro F_n je neprekidna, nenegativna i parna funkcija.

(4) Za proizvoljno $\delta > 0$ i za svako t takvo da je $\delta \leq |t| \leq \pi$ važi:

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt \rightarrow 0 \text{ uniformno, kada } n \rightarrow \infty.$$

Dokaz.

(1) Koristeći formulu za Dirihleovo jezgro:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})t]}{\sin \frac{t}{2}},$$

iz definicije Fejerovog jezgra dobijamo:

$$\begin{aligned} (n+1)F_n(t) &= \sum_{k=0}^n D_k(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\sin[(k + \frac{1}{2})t]}{\sin \frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \Im \left\{ \sum_{k=0}^n e^{i(k + \frac{1}{2})t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \Im \left\{ e^{\frac{it}{2}} \cdot \sum_{k=0}^n e^{ikt} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \Im \left\{ e^{\frac{it}{2}} \cdot \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \Im \left\{ \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \Im \left\{ \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{2i \sin \frac{t}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \Im \{ -i(\cos[(n+1)t] + i \sin[(n+1)t] - 1) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \Im \{ -i \cos[(n+1)t] + \sin[(n+1)t] + i \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \cos[(n+1)t]}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2[\frac{(n+1)t}{2}]}{\sin^2(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

Kako je $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$, sledi:

$$\begin{aligned} F_n(0) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} \right) = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

(2) Koristeći definiciju Fejerovog jezgra i lemu 3.2.2., dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} D_k(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{1}{n+1} (n+1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) Osobine neprekidnosti i nenegativnosti očigledno slede iz (1) ove leme. Kako iz definicije 3.4.2., Fejerovo jezgro zavisi od Dirihleovog jezgra, i znajući da je $D_k(t)$ parna funkcija, odmah sledi parnost funkcije $F_n(t)$.

(4) Neka je $\delta > 0$ fiksirano. Za proizvoljno $\delta \leq |t| \leq \pi$ imamo da $\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})} \leq \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}$. Tada važi:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt &= \frac{1}{2(n+1)} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &\leq \frac{1}{2(n+1)} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{\pi - \delta}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

Sad smo u mogućnosti da formulišemo i dokažimo najvažniju teoremu ovog poglavlja.

Teorema 3.4.1. (Fejerova teorema) Neka je $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, pri čemu važi $f(-\pi) = f(\pi)$. Tada niz Fejerovih suma σ_n uniformno konvergira ka funkciji f na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Dokaz. Koristeći lemu 3.4.1. kao i osobinu da je integral Fejerovog jezgra jednak 1, sledi:

$$\begin{aligned} |\sigma_n(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) F_n(x) dx - f(t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) F_n(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) (f(t-x) - f(t)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) |f(t-x) - f(t)| dx. \end{aligned}$$

Kako je f neprekidna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, to je i uniformno neprekidna, to jest za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da iz $|x - y| \leq \delta$ sledi $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Rastavimo prethodni integral na dva integrala u okolini δ i izvan nje, pa dobijamo:

$$\begin{aligned} |\sigma_n(t) - f(t)| &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{|x| \leq \delta} F_n(x) |f(t-x) - f(t)| dx \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) |f(t-x) - f(t)| dx \right) = I + II. \end{aligned}$$

Zbog uniformne neprekidnosti funkcije f imamo:

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{|x| \leq \delta} F_n(x) \cdot \frac{\varepsilon}{2} dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) \cdot \frac{\varepsilon}{2} dx = \frac{\varepsilon}{2},$$

to jest integral I je ograničen odozgo.

Iz neprekidnosti i periodičnosti funkcije f sledi i ograničenost te funkcije, pa postoji $M > 0$ takvo da $|f(t)| \leq M$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Uzmimo $M = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |f(t)|$, pa sledi:

$$II = \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) \cdot 2M dx = \frac{2M}{\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) dx,$$

to jest i integral II je ograničen odozgo. Koristeći lemu 3.4.2. pod (4) sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za svako $n \geq n_0$ važi $\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon \cdot \pi}{4M}$. Konačno, za svako $n \geq n_0$,

$$|\sigma_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \pi}{4M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

čime je teorema dokazana. $\square$

3.5 Konvergencija u normi prostora L^2

U prethodnom poglavlju videli smo kako teži ka funkciji njen Furijeov red u zavisnosti od neprekidnosti. Postavlja se pitanje, šta se dešava ako Furijeov red funkcije ne konvergira po tačkama ili uniformno? U tim slučajevima on još uvek može konvergirati u nešto slabijem smislu, kao što je konvergencija u normi prostora L^2 .

Definicija 3.5.1. Kažemo da niz funkcija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira ka funkciji f u normi prostora $L^2([a, b], \mathbb{C})$ ($L^2([a, b], \mathbb{R})$), ako važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Drugim rečima, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za svako $n \geq n_0$ važi:

$$\|f_n - f\|_2 < \varepsilon.$$

Teorema 3.5.1. Ako niz funkcija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformno konvergira ka funkciji f na intervalu $[a, b]$, tada $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ teži ka f i u normi prostora L^2 .

U opštem slučaju, tačkasto konvergentan niz ne mora da konvergira u normi prostora L^2 . Ali ako pored tačkaste konvergenije niza f_n ka funkciji f važi da postoji $M \geq 0$ takav da $|f_n| \leq M$, onda je zadovoljena i konvergencija u normi L^2 .

Definicija 3.5.2. Kažemo da Furijeov red funkcije f konvergira ka f u normi prostora $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ($L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$), ako važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - S_n(t)\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt = 0,$$

pri čemu je $S_n(t)$ n -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije f u kompleksnom (realnom) obliku.

Lema 3.5.1. Neka je $f \in L^2([a, b], \mathbb{R})$ i neka je $S = \{1, \cos kt, \sin kt : 1 \leq k \leq n\}$ potprostor prostora $L^2([a, b], \mathbb{R})$. Tada je niz parcijalnih suma Furijeovog reda funkcije f , $S_n(t)$ najbliži funkciji f u normi L^2 , to jest važi:

$$\|f - S_n\|_2 = \min_{g \in S} \|f - g\|_2.$$

Ideju dokaza možemo naći u [8]. □

Sledeće teoreme pokazuju nam glavni rezultat ovog poglavlja, koji ćemo navesti prvo u kompleksnom, a zatim i u realnom obliku.

Teorema 3.5.2. Neka je $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ i neka su c_k Furijeovi koeficijenti funkcije f . Tada n -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije f :

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$$

konvergira ka funkciji f u normi prostora $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, kada $n \rightarrow \infty$.

Teorema 3.5.3. Neka je $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ i neka su a_k i b_k Furijeovi koeficijenti funkcije f . Tada n -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije f :

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

konvergira ka funkciji f u normi prostora $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$, kada $n \rightarrow \infty$.

Ideja dokaza teoreme 3.5.2. i teoreme 3.5.3. Dokaz se sastoji iz dva osnovna koraka. U prvom koraku treba dokazati da se svaka funkcija $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ($f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$) može dobro aproksimirati glatkom 2π -periodičnom funkcijom g . U drugom koraku treba uniformno aproksimirati funkciju g sa Furijeovim redom. Oдавde sledi konvergencija u normi prostora L^2 . □

Važna posledica prethodne dve teoreme jeste Parsevalova jednakost, koju ćemo takođe posmatrati i u kompleksnom i u realnom obliku.

Teorema 3.5.4. (Parsevalova jednakost) Neka je $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Tada važi:

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (3.7)$$

Štaviše, ako su $f, g \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, tada važi:

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}. \quad (3.8)$$

Dokaz. Dokazaćemo (3.8). Neka su:

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}, R_n(t) = \sum_{l=-n}^n d_l e^{ilt}$$

n -te parcijalne sume Furijeovih redova funkcija f i g , redom. Na osnovu teoreme 3.5.2., redovi S_n i R_n konvergiraju ka funkcijama f i g , redom u prostoru $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Računamo skalarni proizvod tih parcijalnih suma:

$$\begin{aligned} \langle S_n, R_n \rangle &= \left\langle \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}, \sum_{l=-n}^n d_l e^{ilt} \right\rangle \\ &= \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n c_k \overline{d_l} \langle e^{ikt}, e^{ilt} \rangle. \end{aligned}$$

U poglavlju 2.2.1 smo već videli da je skup funkcija $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ ortonormiran, pa prethodna jednačina postaje:

$$\begin{aligned} \langle S_n, R_n \rangle &= \sum_{k=-n}^n c_k \overline{d_k} \langle e^{ikt}, e^{ikt} \rangle \\ &= 2\pi \sum_{k=-n}^n c_k \overline{d_k}. \end{aligned}$$

Treba još pokazati da važi:

$$\langle S_n, R_n \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle, n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Koristeći nejednakosti trougla i Koši-Švarcove nejednakosti, dobijamo:

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle - \langle S_n, R_n \rangle| &= |(\langle f, g \rangle - \langle f, R_n \rangle) + (\langle f, R_n \rangle - \langle S_n, R_n \rangle)| \\ &\leq |\langle f, g \rangle - \langle f, R_n \rangle| + |\langle f, R_n \rangle - \langle S_n, R_n \rangle| \\ &= |\langle f, g - R_n \rangle| + |\langle f - S_n, R_n \rangle| \\ &\leq \|f\|_2 \cdot \|g - R_n\|_2 + \|f - S_n\|_2 \cdot \|R_n\|_2. \end{aligned}$$

Tada na osnovu teoreme 3.5.2. sledi da su:

$$\|f - S_n\|_2 \rightarrow 0 \text{ i } \|g - R_n\|_2 \rightarrow 0,$$

pa važi (3.9). $\square$

Napomena 3.5.1. Relacija (3.7) trivijalno sledi iz prethodnog dokaza, ako stavimo $f = g$.

Teorema 3.5.5. (Parsevalova jednakost) Neka je $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Tada važi:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

Dokaz. Dokazujemo na sličan način kao i prethodnu teoremu. $\square$

Prethodne Parsevalove jednakosti važe za 2π -periodične funkcije. Naravno, te jednakosti postoje i za funkcije sa proizvoljnim periodom.

Posledica 3.5.1. Neka je $f \in L^2([-l, l], \mathbb{C})$. Tada važi:

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Posledica 3.5.2. Neka je $f \in L^2([-l, l], \mathbb{R})$. Tada važi:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(t) dt.$$

Na kraju ovog poglavlja navešćemo Ris-Fišerovu teoremu, takođe i u kompleksnom i u realnom prostoru.

Teorema 3.5.6. (Ris-Fišerova teorema) Za proizvoljne konstante $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, za koje važi:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty,$$

postoji funkcija $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ takva da su $c_k, k \in \mathbb{Z}$, njeni Furijeovi koeficijenti.

Teorema 3.5.7. (Ris-Fišerova teorema) Za proizvoljne konstante $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, za koje važi:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

postoji funkcija $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ takva da su $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$, njeni Furije-ovi koeficijenti.

Takođe, i Ris-Fišerova teorema važi i u prostorima $L^2([-l, l], \mathbb{C})$ i $L^2([-l, l], \mathbb{R})$.

4

Primeri Furijeovih redova

U ovoj sekciji prikazujemo neke primere u kojima različite funkcije razvijamo u Furijeov red. U rešavanju tih primera koristimo formule koje su izvedene u glavi 2, a zaključci su formulisani na osnovu glavne teoreme o konvergenciji Furijeovih redova.

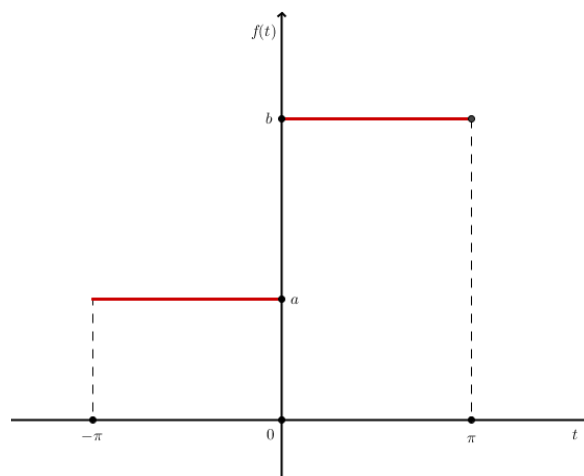
Koristili smo reference [4] i [7].

Primer 4.1. Neka je data funkcija:

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in (-\pi, 0], \\ b, & t \in (0, \pi], \end{cases}$$

gde su $a, b \in \mathbb{R}$. Odredimo Furijeov red funkcije f .

Rešenje. Grafik funkcije f je dat na sledećoj slici:



Slika 4: *Funkcija* $f(t)$

Furijeove koeficijente polazne funkcije računamo pomoću formula određenih u definiciji 2.2.3.:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 a dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} b dt = a + b,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 a \cos kt dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} b \cos kt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot a \cdot \left. \frac{\sin kt}{k} \right|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \cdot b \cdot \left. \frac{\sin kt}{k} \right|_0^{\pi} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 a \sin kt dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} b \sin kt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot a \cdot \left(-\frac{\cos kt}{k} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \cdot b \cdot \left(-\frac{\cos kt}{k} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{a}{k\pi} - \frac{a}{k\pi}(-1)^k + \frac{b}{k\pi} - \frac{b}{k\pi}(-1)^k \\ &= \frac{b-a}{k\pi} + (-1)^k \frac{a-b}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

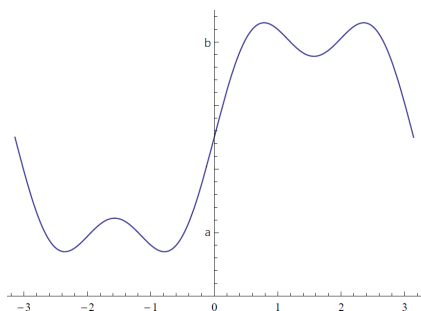
Prema tome, Furijeov red funkcije f , na osnovu definicije 2.2.3., je sledeći:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a+b}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b-a}{k\pi} + (-1)^k \frac{a-b}{k\pi} \right] \sin kt \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^k}{k} \right] \sin kt \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi} \left[\frac{2 \sin t}{1} + \frac{2 \sin 3t}{3} + \frac{2 \sin 5t}{5} + \dots \right] \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}. \end{aligned}$$

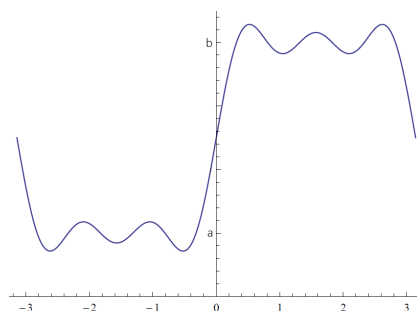
Posmatrajmo sada n -tu parcijalnu sumu dobijenog reda:

$$S_n(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}.$$

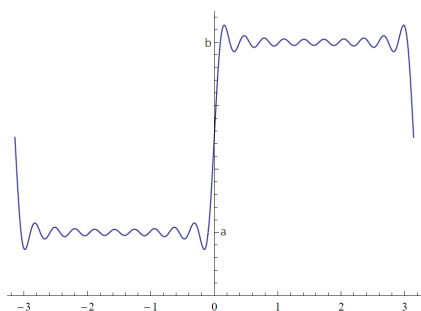
Za različite vrednosti n , dobijamo sledeće grafike:



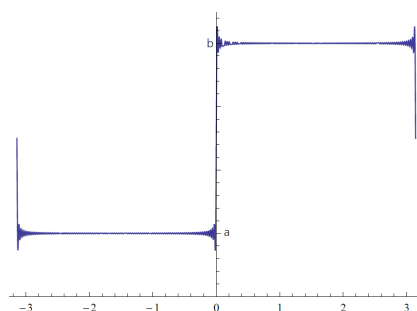
Slika 5: Funkcija $S_2(t)$



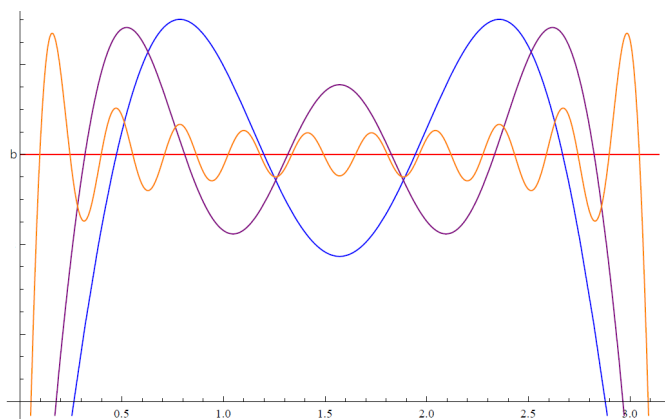
Slika 6: Funkcija $S_3(t)$



Slika 7: Funkcija $S_{10}(t)$



Slika 8: Funkcija $S_{100}(t)$



Slika 9: Funkcije $f(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$ i $S_{10}(t)$ na intervalu $[0, \pi]$

Slika 9 omogućava bolji grafički prikaz, gde je na jednom grafiku uvećano nacrtana data funkcija i n -te parcijalne sume njenog Furijeovog reda za $n = 2, 3, 10$. Odavde je još očiglednija konvergencija Furijeovog reda za povećanje broja n .

Primetimo da funkcija $f(t)$ nije periodična. Njeno periodično produženje sa osnovnim periodom 2π označimo sa $\tilde{f}(t)$. Na osnovu Dirihleove teoreme, Furijeov red:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

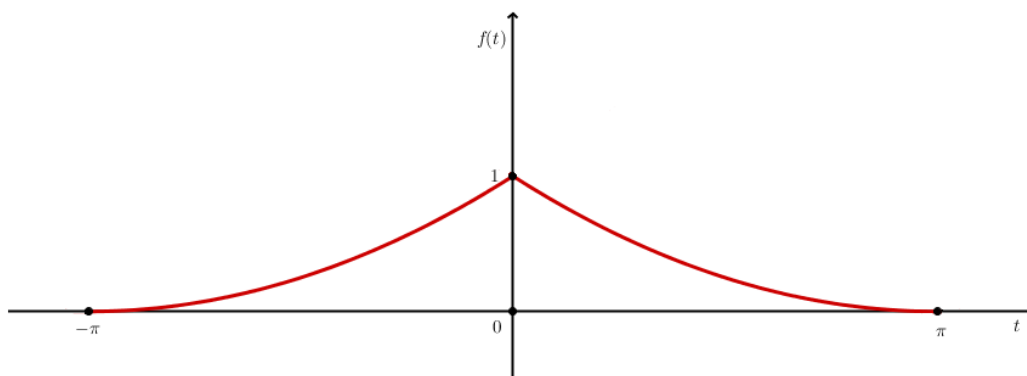
konvergira ka vrednosti $\tilde{f}(t)$ u tačkama gde je $\tilde{f}$ neprekidna, dok je u tačkama prekida funkcije $\tilde{f}$, to jest u tačkama $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on konvergira ka aritmetičkoj sredini levog i desnog limesa funkcije $\tilde{f}$ u tački t . $\square$

Primer 4.2. Neka je data funkcija:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2}(t+\pi)^2, & t \in [-\pi, 0], \\ \frac{1}{\pi^2}(t-\pi)^2, & t \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Odredimo Furijeov red funkcije f .

Rešenje. Grafik funkcije f je dat na sledećoj slici:



Slika 10: Funkcija $f(t)$

Primetimo da je data funkcija parna, pa odatle sledi da je $b_k = 0, k \in \mathbb{N}$. Za izračunavanje ostalih Furijeovih koeficijenata koristimo formule (2.9):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\pi^2}(t+\pi)^2 dt = \frac{2}{\pi^3} \cdot \frac{(t+\pi)^3}{3} \Big|_{-\pi}^0 = \frac{2}{3}.$$

Kod izračunavanja koeficijenta a_k dva puta koristimo parcijalne integracije, prvo:

$$\begin{aligned} u_1 &= (t + \pi)^2 \Rightarrow du_1 = 2(t + \pi)dt, \\ dv_1 &= \cos kt dt \Rightarrow v_1 = \frac{\sin kt}{k}, \end{aligned}$$

a zatim:

$$\begin{aligned} u_2 &= t + \pi \Rightarrow du_2 = dt, \\ dv_2 &= \sin kt dt \Rightarrow v_2 = -\frac{\cos kt}{k}. \end{aligned}$$

Prema tome:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\pi^2} (t + \pi)^2 \cos kt dt \\ &= \frac{2}{\pi^3} \left[(t + \pi)^2 \cdot \frac{\sin kt}{k} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{2}{k} \int_{-\pi}^0 (t + \pi) \sin kt dt \right] \\ &= -\frac{4}{k\pi^3} \left[-(t + \pi) \cdot \frac{\cos kt}{k} \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\cos kt}{k} dt \right] \\ &= -\frac{4}{k^2\pi^3} \left[-\pi + \frac{\sin kt}{k} \Big|_{-\pi}^0 \right] \\ &= \frac{4}{k^2\pi^2}. \end{aligned}$$

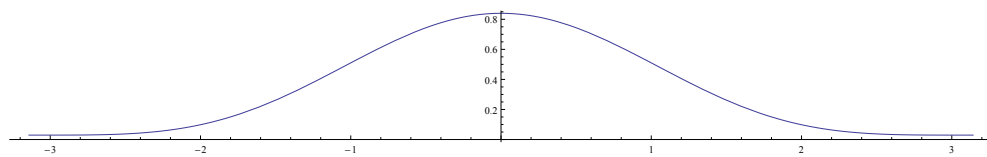
Tada Furijeov red funkcije f , prema (2.8), dat je sa:

$$f(t) \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{k^2\pi^2} \cos kt \right] = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}, \quad (4.1)$$

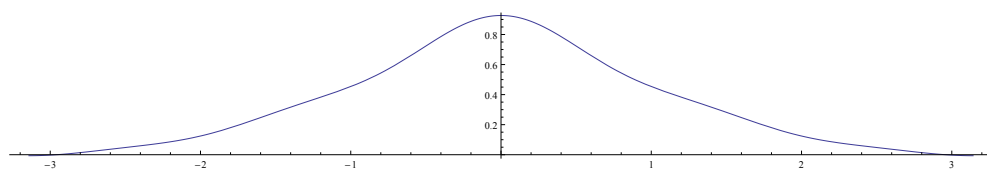
dok je njegova n -ta parcijalna suma:

$$S_n(t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{\cos kt}{k^2}.$$

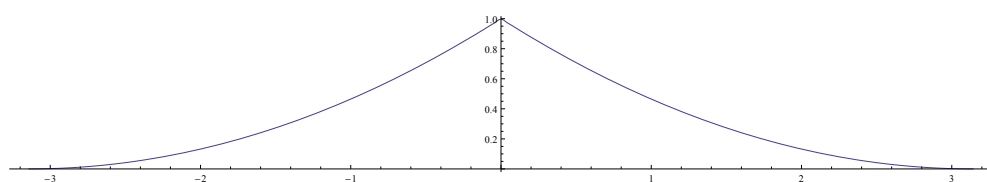
Za različite vrednosti n , dobijamo sledeće grafike:



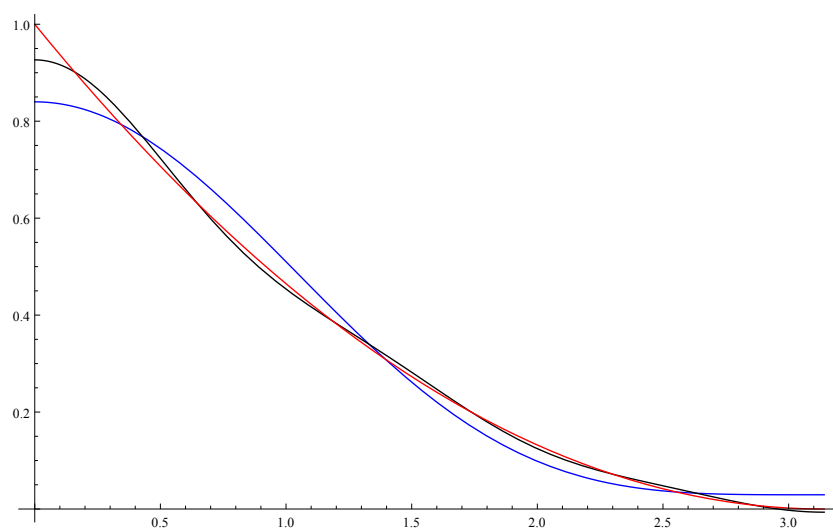
Slika 11: *Funkcija* $S_2(t)$



Slika 12: *Funkcija* $S_5(t)$



Slika 13: *Funkcija* $S_{100}(t)$



Slika 14: *Funkcije* $f(t)$, $S_2(t)$ i $S_5(t)$ na intervalu $[0, \pi]$

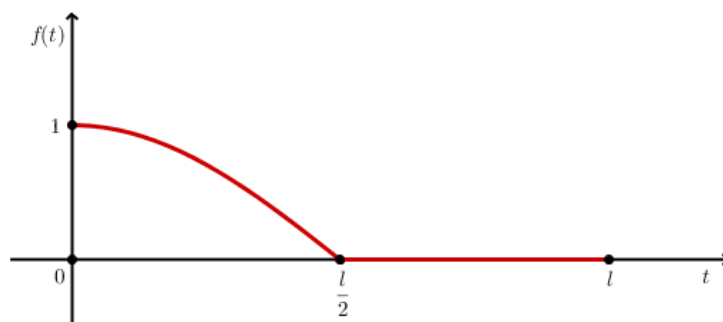
Posle posmatranja grafika parcijalnih suma Furijeovog reda funkcije f , takođe možemo zaključiti da za što veće vrednosti n , grafik funkcije S_n još više "liči" na datu funkciju, to jest da je $S_n(t) \rightarrow f(t)$, kada $n \rightarrow \infty$. Aproximacija Furijeovog reda funkcije $f(t)$ bolje se vidi na slici 14.

Funkcija $f(t)$ nije periodična, ali možemo odrediti njeno periodično produženje sa osnovnim periodom 2π . Ta nova funkcija $\tilde{f}(t)$ je neprekidna za svako $t \in \mathbb{R}$ i funkcija $\tilde{f}'(t)$ ima prekid prve vrste u tačkama $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pa na osnovu Dirihleove teoreme, red (4.1) tačkasto konvergira ka $\tilde{f}(t), t \in \mathbb{R}$. Ova konvergencija je i uniformna na $[-\pi, \pi]$ po teoremi 3.3.1. $\square$

Primer 4.3. Razvijmo u kosinusni red funkciju, definisanu sa:

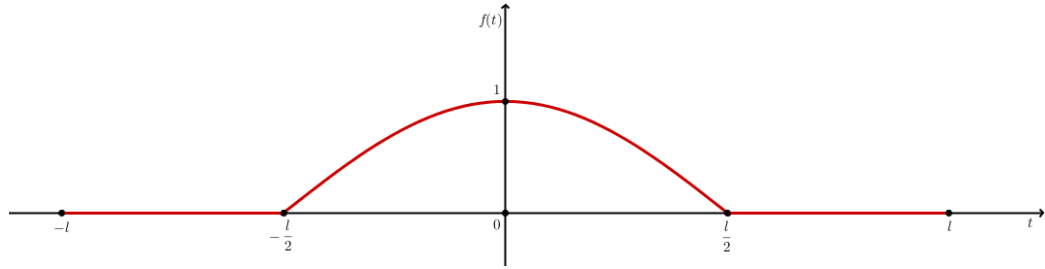
$$f(t) = \begin{cases} \cos \frac{\pi t}{l}, & t \in [0, \frac{l}{2}], \\ 0, & t \in (\frac{l}{2}, l]. \end{cases}$$

Rešenje. Grafik funkcije f je dat sa:



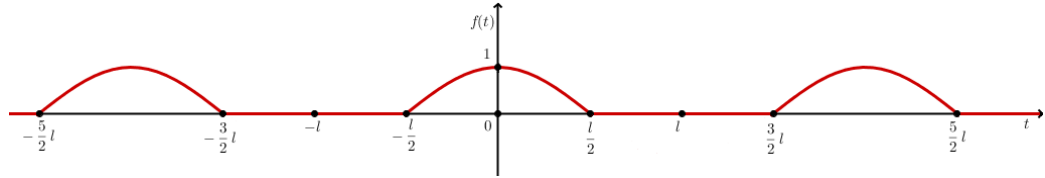
Slika 15: Funkcija $f(t)$

Primetimo da data funkcija ima parno produženje na intervalu $[-l, 0]$ što je prikazano na sledećoj slici:



Slika 16: *Parno produženje funkcije $f(t)$ na $[-l, l]$*

a zatim funkciju možemo produžiti na celu brojevnu osu sa osnovnim periodom $2l$:



Slika 17: *Parno produženje funkcije $f(t)$ na celu brojevnu osu*

Koristeći Furijeove koeficijenate (2.9), i kako za $t \in (\frac{l}{2}, l]$ imamo da je $f(t) = 0$, sledi:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi t}{l} dt \stackrel{\frac{\pi t}{l} = s}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos s ds = \frac{2}{\pi} \sin s \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi},$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi t}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} dt.$$

Koristeći smenu $\frac{\pi t}{l} = x$ i trigonometrijski identitet:

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)],$$

dobijamo:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\cos(k+1)x + \cos(k-1)x] dx.$$

Dalje, za $k = 1$, dobijamo:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\cos 2x + 1] dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin 2x}{2} + x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2},$$

dok za $k > 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k+1)x}{k+1} + \frac{\sin(k-1)x}{k-1} \right] \Big|_0^{\pi/2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Odavde sledi da je za neparno $k > 1$:

$$a_k = 0,$$

dok je za parno k :

$$a_k = -\frac{2(-1)^{k/2}}{\pi(k^2 - 1)}, \quad b_k = 0.$$

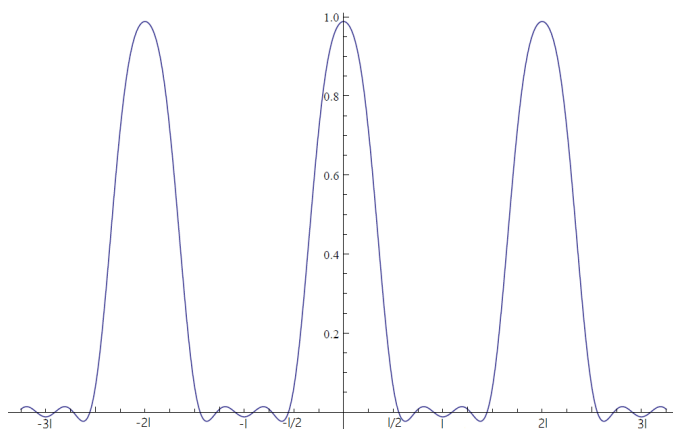
Prema tome, traženi kosinusni red, na osnovu (2.8), je sledeći:

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi t}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \cos \frac{2k\pi t}{l} \right]. \quad (4.2)$$

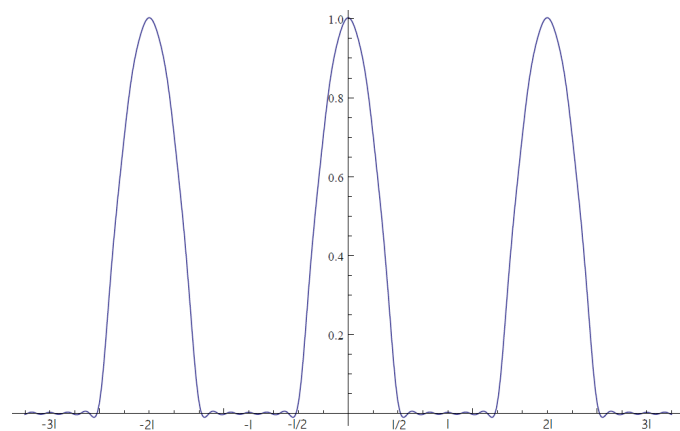
Za različite vrednosti n , n -ta parcijalna suma Furijeovog reda:

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi t}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \cos \frac{2k\pi t}{l} \right]$$

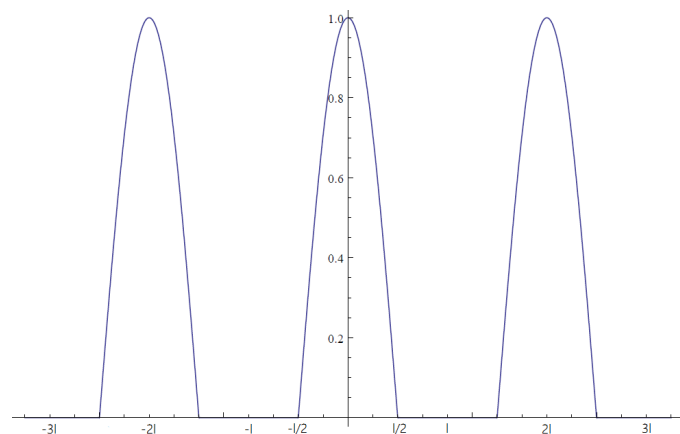
daje sledeće grafike:



Slika 18: Funkcija $S_2(t)$

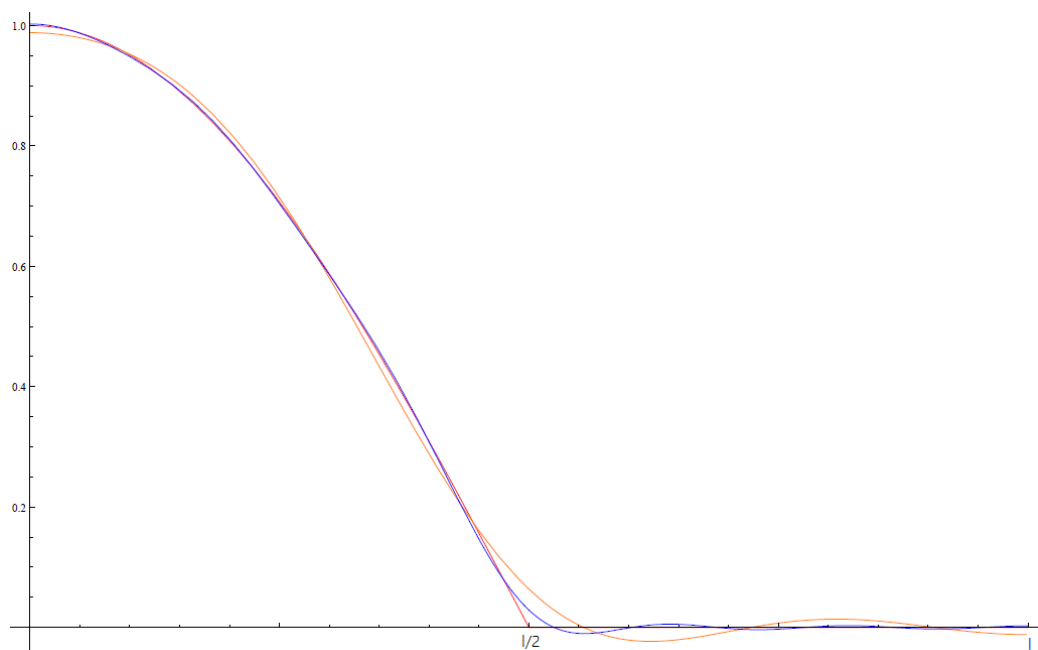


Slika 19: *Funkcija $S_5(t)$*



Slika 20: *Funkcija $S_{100}(t)$*

Sledeća slika (slika 21) daje nam uvećan deo grafika funkcije $f(t)$ i njenih parcijalnih suma za $n = 2, 5$ na intervalu $[0, l]$. U odnosu na brzinu konvergencije Furijeovih redova iz prethodnih primera, na slici se vidi da ovaj Furijeov red polazne funkcije brže aproksimira funkciju f na intervalu $[0, l]$.



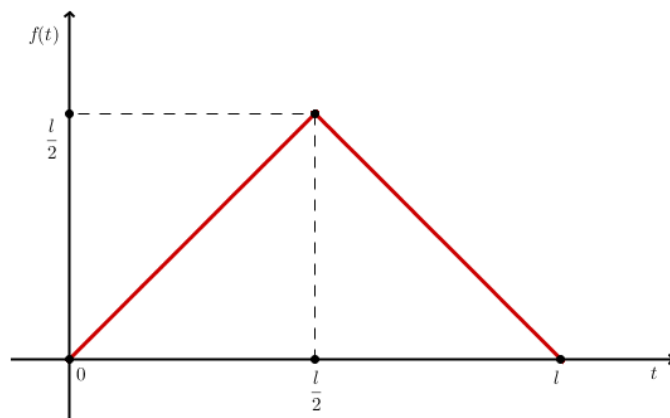
Slika 21: Funkcije $f(t)$, $S_2(t)$ i $S_5(t)$ na intervalu $[0, l]$

Parno produženje funkcije $f(t)$ je neprekidno za svako $t \in \mathbb{R}$ i ima po delovima neprekidan prvi izvod za svako $t \in \mathbb{R}$. Dakle, prema Dirihleovoj teoremi, Furijeov red (4.2) konvergira ka funkciji prikazanoj na slici 17 za svako $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Primer 4.4. Razvijmo u sinusni red funkciju, definisanu sa:

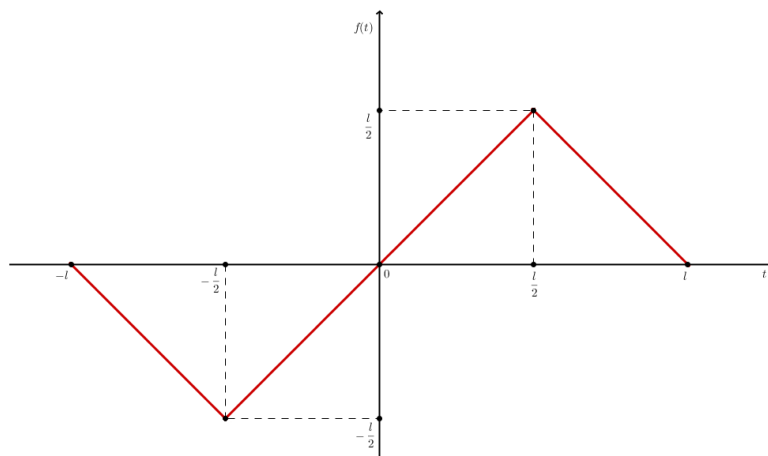
$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{l}{2}], \\ l - t, & t \in (\frac{l}{2}, l]. \end{cases}$$

Rešenje. Grafik funkcije f dat je sa:



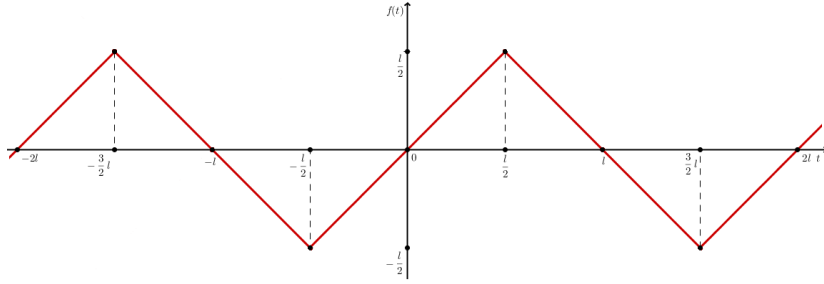
Slika 22: Funkcija $f(t)$

Primetimo da data funkcija ima neparno produženje na intervalu $[-l, 0]$ što je prikazano na sledećoj slici:



Slika 23: *Neparno produženje funkcije $f(t)$ na $[-l, l]$*

a zatim funkciju možemo produžiti na celu brojevnu osu sa osnovnim periodom $2l$:



Slika 24: *Neparno produženje funkcije $f(t)$ na celu brojevnu osu*

Koristeći Furijeove koeficijente (2.11), nalazimo da je:

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} t \sin \frac{k\pi t}{l} dt + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l-t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Koristeći smenu $\frac{\pi t}{l} = x$ i parcijalnu integraciju:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin kx dx \Rightarrow v = -\frac{\cos kx}{k},$$

prethodna jednakost postaje:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} x \sin kx dx + \frac{2l}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin kx dx \\ &= \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} x \sin kx dx + \frac{2l}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin kx dx - \frac{2l}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin kx dx \\ &= \frac{2l}{\pi^2} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos kx}{k} dx \right] \\ &\quad + \frac{2l}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &\quad - \frac{2l}{\pi^2} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx \right] \\ &= \frac{2l}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} + \frac{2l}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \\ &= \frac{4l}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

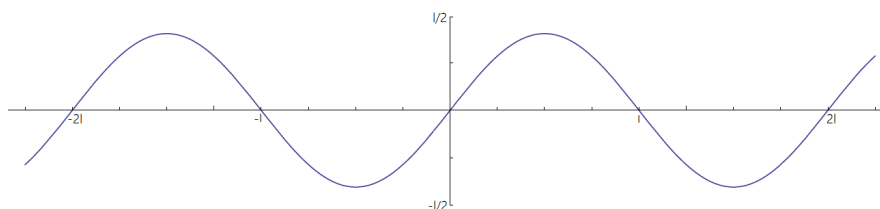
Dakle, traženi sinusni red, na osnovu (2.10), dat je sa:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cdot \sin \frac{k\pi t}{l}}{k^2} \\ &= \frac{4l}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi t}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi t}{l} - \dots \right), \end{aligned}$$

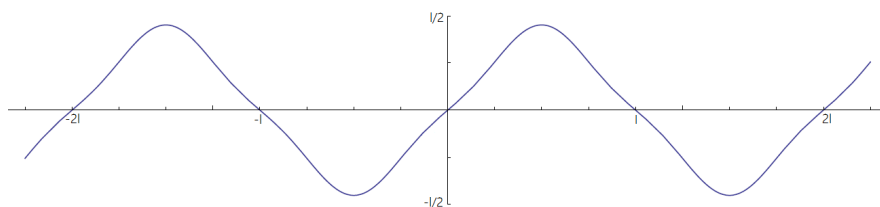
dok je:

$$S_n(t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cdot \sin \frac{k\pi t}{l}}{k^2}$$

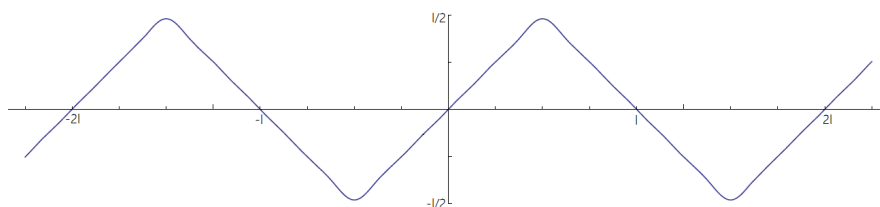
njegova parcijalna suma. Za različite vrednosti n dobijamo sledeće grafike:



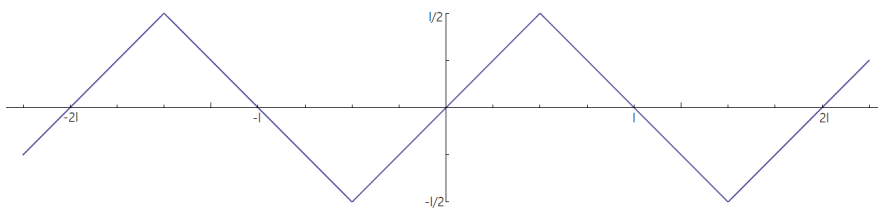
Slika 25: *Funkcija* $S_2(t)$



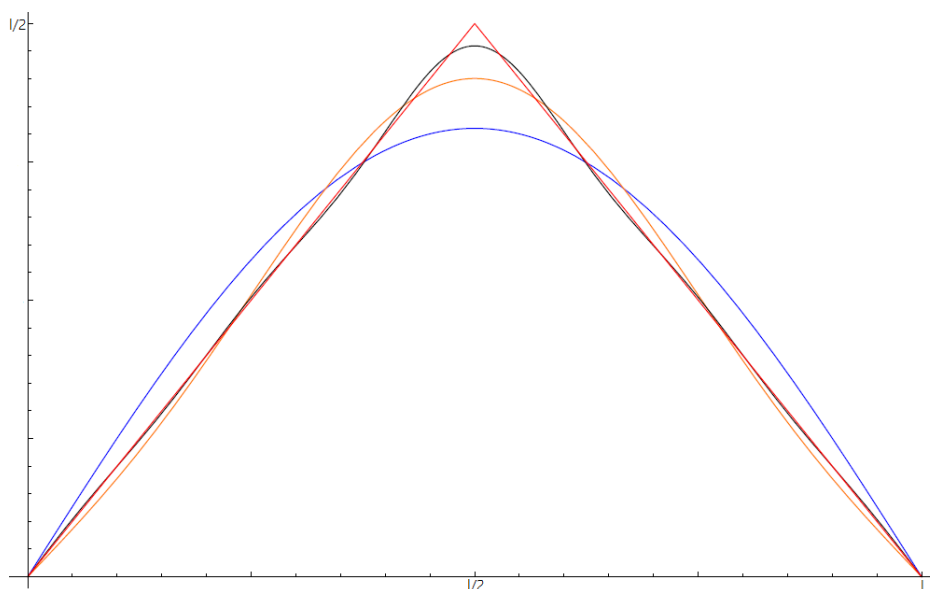
Slika 26: *Funkcija* $S_3(t)$



Slika 27: *Funkcija* $S_{10}(t)$



Slika 28: Funkcija $S_{100}(t)$



Slika 29: Funkcije $f(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$ i $S_{10}(t)$

Slika 29, na kome je nacrtana sama funkcija f i parcijalne sume njenog Furijeovog reda za $n = 2, 3, 10$, preglednije prikazuje kako konvergira Furijeov red ka datoj funkciji sa povećanjem vrednosti n na intervalu $[0, l]$.

Slično kao u primeru 4.3., Furijeov red:

$$\frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cdot \sin \frac{k\pi t}{l}}{k^2}$$

konvergira ka funkciji prikazanoj na slici 24 za svako $t \in \mathbb{R}$.

□

Napomena 4.1.1. Na osnovu teoreme o uniformnoj konvergenciji možemo zaključiti da izuzev primera 4.1. Furijeovi redovi u prethodno prikazanim primerima konvergiraju uniformno na $\mathbb{R}$ ka produženju polazne funkcije, jer u svim slučajevima izvodi te funkcije imaju prekid prve vrste u konačno mnogo tačaka na ograničenim intervalima.

5

Primena Furijeovih redova

Jedna od najvažnijih polja u primeni Furijeovih redova sadržana je u teoriji običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina, gde neke probleme rešavamo tako da njihova rešenja razvijamo u Furijeove redove. Ovo ćemo prikazati na primerima jednačine žice koja treperi i jednačine provođenja toplote.

5.1 Opšte rešenje jednačine žice koja treperi

Jednačina žice koja treperi je parcijalna diferencijalna jednačina oblika:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

gde je konstanta $a \neq 0$ i $t > 0$.

Odredimo sada rešenje jednačine (5.1) koja zadovoljava uslove:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x),^{24} \quad (5.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,^{25} \quad (5.3)$$

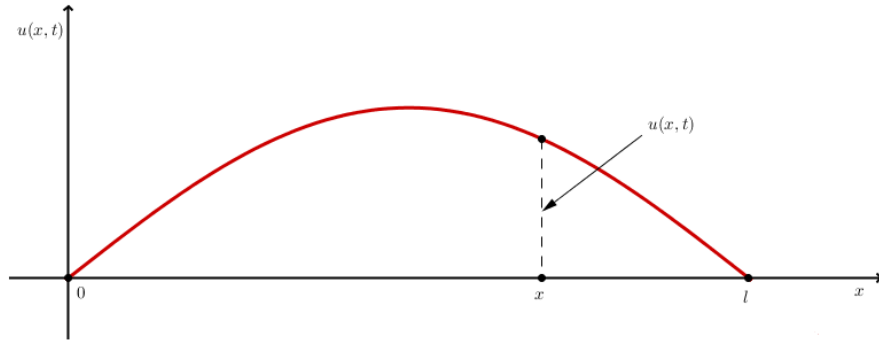
pri čemu su $f(x)$ i $g(x)$ date funkcije, $0 \leq x \leq l$. Funkcija $u(x, t)$ prikazuje elongaciju tačke žice dužine l sa x -koordinatom, normalnu na x -osu u trenutku t (pretpostavlja se da svaka tačka žice ima samo vertikalno kretanje).

Potražimo rešenje početnog problema (5.1), (5.2), (5.3) u obliku:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (5.4)$$

²⁴Početni uslovi - uslovi koji se odnose na početni trenutak (trenutak $t = 0$).

²⁵Granični uslovi - uslovi koji se odnose na fiksirane vrednosti prostornih koordinata.



Slika 30: *Žica dužine l*

gde sa $T(t)$ označavamo funkciju vremena $t \geq 0$, a sa $X(x)$ funkciju položaja, $x \in [0, l]$.

Tada zbog (5.3) važi:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (5.5)$$

Kada uvrstimo (5.4) u jednačinu (5.1), dobijamo:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (5.6)$$

Leva strana jednačine (5.6) zavisi samo od t , a desna strana samo od x . Kako su x i t nezavisne promenljive, sledi da obe strane jednakosti moraju biti jednake nekoj konstanti λ . Prema tome, nepoznate funkcije $X(x)$ i $T(t)$ su određene jednačinama:

$$X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0, \quad (5.7)$$

$$T''(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0. \quad (5.8)$$

U zavisnosti od vrednosti λ razlikujemo sledeće slučajeve:

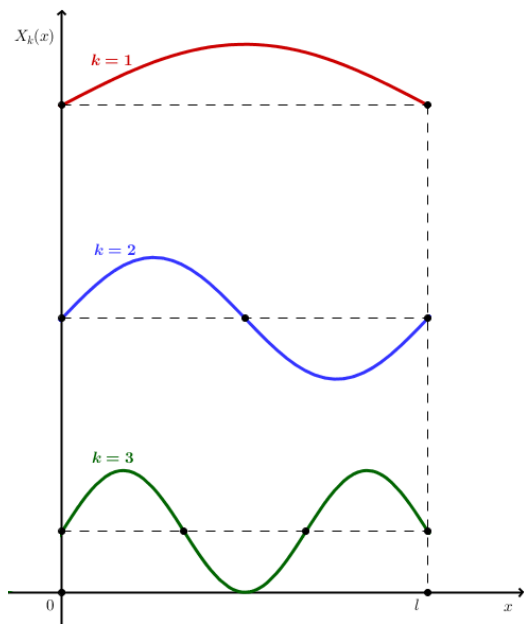
- ako je $\lambda \leq 0$, dobijamo trivijalno rešenje $u(x, t) = 0$ jednačine (5.1).
- ako je $\lambda > 0$, jednačina (5.7) postaje linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, pa za njeno rešenje dobijamo:

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Jednačina (5.5) daje $c_1 = 0$ i $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}$. Prema tome,

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k \in \mathbb{N}.$$



Slika 31: Funkcija $X_k(x)$, za $k = 1, 2, 3$.

Sada uvrštavanjem vrednosti λ_k u jednačinu (5.8), dobijamo:

$$T''(t) + a^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0. \quad (5.9)$$

Jednačina (5.9) je linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, pa je njeno opšte rešenje:

$$T(t) = a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l},$$

gde su a_k i b_k , $k \in \mathbb{N}$, proizvoljne konstante.

Dakle, svaka funkcija oblika:

$$u_k(x, t) = \sin \frac{k\pi x}{l} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \quad (5.10)$$

zadovoljava jednačinu (5.1) sa uslovima (5.3).

Dalje, zbog linearnosti jednačine (5.10), opšte rešenje jednačine (5.1) dato je sa:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right), \end{aligned}$$

pod pretpostavkom da se može dva puta izvršiti diferenciranje reda "član po član".

Koristeći uslove (5.2), odredimo koeficijente a_k i b_k :

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ u_t(x, 0) = g(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \left(-a_k \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \frac{k\pi a}{l} \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\pi a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Konstante a_k i $\frac{k\pi a}{l} b_k$ su zapravo Furijeovi koeficijenti funkcija $f(x)$ i $g(x)$, redom, pa sledi:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \\ \frac{\pi k a}{l} b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

to jest

$$b_k = \frac{2}{a\pi k} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

5.2 Mešoviti problem za jednačinu provođenja toplote

Jednodimenzionalna jednačina provođenja toplote je diferencijalna jednačina oblika:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.11)$$

gde je konstanta $a \neq 0$ i $t > 0$.

Odredimo rešenje $u(x, t)$ jednačine (5.11) koja zadovoljava uslove:

$$u(x, 0) = f(x), \quad (5.12)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (5.13)$$

gde $u(x, t)$ prikazuje temperature štapa dužine l u tački x u trenutku t , $u(x, 0)$ je početna temperatura štapa, dok su $u(0, t)(= u(l, t))$ temperature na krajevima štapa.

Tražimo rešenje početnog problema (5.11), (5.12), (5.13) u obliku:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (5.14)$$

gde je $T(t)$ funkcija vremena, $t \geq 0$, a $X(x)$ funkcija položaja, $x \in [0, l]$. Tada na osnovu (5.13) važi:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (5.15)$$

Uvrstimo (5.14) u jednačinu (5.11), dobijamo:

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t),$$

odnosno

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (5.16)$$

Kako leva strana jednačine (5.16) zavisi samo do t , a desna samo od x , i ove promenljive su nezavisne, možemo zaključiti da obe strane jednakosti moraju biti jednake nekoj konstanti λ . Prema tome, dobijamo dve obične diferencijalne jednačine:

$$T'(t) - \lambda \cdot a^2 \cdot T(t) = 0, \quad (5.17)$$

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0. \quad (5.18)$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (5.17) je:

$$T(t) = c \cdot e^{\lambda a^2 t},$$

gde je c proizvoljna konstanta.

Sada rešavamo početni problem (5.18), (5.15). Ako bi bila $\lambda \geq 0$, onda bi $X(x) = 0$ bilo jedino rešenje sistema (5.18), (5.15), a tada bi jednačina definisana u (5.14) bila u kontradikciji sa početnim uslovom (5.12). Dakle, λ mora biti negativna konstanta. Ako uzmemo da je $\lambda = -n^2$, tada diferencijalna jednačina (5.18) postaje:

$$X''(x) + n^2 \cdot X(x) = 0,$$

što predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Opšte rešenje ove jednačine je:

$$X(x) = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx,$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Iz početnog uslova (5.15) nalazimo:

$$c_1 = 0 \text{ i } c_2 \sin nl = 0.$$

Pod uslovom da je $c_2 = 0$, funkcija $X(x)$, pa prema tome i temperatura $u(x, t)$ bi bila jednaka nuli, što bi imalo smisla samo u slučaju da je početna temperatura štapa jednaka nuli. Prema tome, $nl = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to jest $n = \frac{k\pi}{l}$. Dakle, svaka funkcija:

$$u_k(x, t) = e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

zadovoljava jednačinu (5.11) sa uslovima (5.13). Zbog linearnosti prethodne jednačine, dobijamo:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (5.19)$$

gde su $c_k, k \in \mathbb{N}$, proizvoljne konstante. Sada uvrstimo (5.12) u (5.19), dobijamo:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (5.20)$$

Iz poglavlja 2.4 nam je poznato da je relacijom (5.20) opisan razvoj funkcije $f(x)$ u Furijeov sinusni red.

Zaključak

Jedan od značajnih, ali ne i idealnih rezultata vezanih za konvergenciju trigonometrijskih redova je da Furijeov red kvadrat-integrabilne funkcije konvergira ka toj funkciji u normi prostora L^2 . Ovo tvrđenje je još izrazitije, jer jedino prema njemu prosečna razlika između funkcije i njenog Furijeovog reda mora težiti nuli na intervalu dužine 2π . Međutim, za fiksirano $t \in [-\pi, \pi]$, nema garancija u vezi sa razlikom između funkcije $f(t)$ i aproksimacije redom u tački t .

Na osnovu 2π -periodičnosti funkcije $\cos kt$ i $\sin kt$, $k \in \mathbb{N}$, ukoliko je Furijeov red posmatrane funkcije koji ima oblik:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (6.1)$$

konvergentan, on definiše takođe 2π -periodičnu funkciju. Dakle, ako funkciju, koja nije 2π -periodična, razvijemo u Furijeov red oblika (6.1), ima smisla razvijati je samo na intervalima dužine 2π .

Prema tome, ako funkciju definisanu na intervalu $[-\pi, \pi]$, koja zadovoljava uslove Dirihleove teoreme, razvijemo u Furijeov red, tako dobijen red određuje funkciju definisanu na $\mathbb{R}$, koja je 2π -periodična, a u tačkama neprekidnosti intervala $[-\pi, \pi]$ poklapa se sa polaznom funkcijom.

Uniformna konvergencija je još strožija od konvergencije u normi prostora L^2 i od tačkaste konvergencije. Na osnovu Fejerovog studija se može zaključiti, ako je funkcija neprekidna i periodična - bez ikakvih dodatnih uslova -, njen Furijeov red može iznad svega dostići uniformnu konvergenciju bez sumnje tako što posmatramo aritmetičku sredinu parcijalnih Furijeovih suma.

Literatura

- [1] Nenad Teofanov, *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.
- [2] Hugh L. Montgomery, *Early Fourier Analysis*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.
- [3] William Wu, *Fourier Series and Fejér's Theorem*, 2004.
- [4] Dragoslav S. Mitrinović, Jovan D. Kečkić, *Matematika II*, Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, 1981.
- [5] Gradimir V. Milovanović, Radoslav Ž. Đorđević, *Matematička analiza I*, Niš, 2005.
- [6] Szabó Eszter, *A Fourier-analízis alkalmazásai a jel- és képfeldolgozásban*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2010.
- [7] Georgi P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover Publications, inc., New York, 1976.
- [8] https://www.fer.hr/_download/repository/skripta_fourierova_analiza.pdf
- [9] <http://math.uni-pannon.hu/~hartung/okt/ma6116a/jegyzet6.pdf>
- [10] Sain Márton, *Nincs királyi út!*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
- [11] Bojana Pantić, *Fejerova teorema*, Novi Sad, 2015.
- [12] Radoslav Dimitrijević, *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Sirius, Niš, 2010.
- [13] Aleksandra Kostić, *Viša matematika za inženjere*, Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, Sarajevo, 2015.

- [14] Nermin Okičić, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Tuzla, 2014.
- [15] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, MP "STYLOS", Novi Sad, Novi Sad, 1996.
- [16] <https://www.wikipedia.org/>
- [17] Nenad Teofanov, *Harmonijska analiza - nastanak i nasledje*, Novi Sad, 2016.
- [18] Miodrag Ž. Ivočić, *O L-normama trigonometrijskih polinoma i njihovoj primeni na finitne postupke zbirljivosti Furijeovih redova*, Beograd, 1976.
- [19] Kelemen András, *Digitális jelfeldolgozás*, SZTE JGYPK, 2011.

Biografija



Edina Jodal je rođena 20.05.1991. godine u Novom Sadu. Nakon završene osnovne škole u Temerinu, upisala je Ekonomsko-trgovinsku školu u Bečeju, na mađarskom nastavnom jeziku. 2010. godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer diplomirani profesor matematike. Studiranje na master studijama na istom fakultetu je nastavila u oktobru 2015. godine. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa januarsko-februarskim ispitnim rokom 2017. godine sa prosečnom ocenom 8,33. Time je stekla uslov za odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Edina Jodal

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

ME

Naslov rada: O konvergenciji trigonometrijskih redova

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2017

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5/71/19/0/0/31/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

FO:

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza

ND

Ključne reči: Furijeov red, trigonometrijski red, trigonometrijski sistem, Furijeovi koeficijenti, konvergencija reda, parcijalna suma, periodična funkcija, kvadrat-integrabilna funkcija

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Ovaj rad se bavi sa proučavanjem Furijeovih redova. Predstavljamo kratak istorijski pregled od motivacije i nastanka trigonometrijskih redova do modernog izlaganja teorije u okviru ortonormiranih sistema u Hilbertovim prostorima. Zatim definišemo trigonometrijske redove Furijeja u realnom i u kompleksnom obliku na intervalu 2π , kao i na proizvoljnom intervalu. Takođe, predstavljamo i konstrukciju odgovarajućih sinusnih i kosinusnih redova. Dalje, formulišemo i dokazujemo osnovne teoreme o konvergenciji trigonometrijskih redova: Dirihleova teorema, teorema o uniformnoj konver-

genciji i Fejerova teorema. Zatim navodimo neke primere Furijeovih redova sa grafikonima, komentarima i zaključcima. Na kraju rada prikazujemo opšte rešenje problema vibracije žice koja treperi i jednačine provođenja toplote.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 18.01.2017.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Ljiljana Gajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Ljiljana Teofanov, vanredni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Edina Jodal

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

MN

Title: On convergence of trigonometric series

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (5/71/19/0/0/31/0)(chapters/ pages/ quotations/
tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis

SD

Subject/Key words: Fourier series, trigonometric series, Fourier coefficients, convergence series, partial sum, periodic function, square-integrable function

SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This Master thesis is about studying of Fourier series. We present a brief historical overview from the motivation and the development of trigonometric series to the exposure of modern theories within the orthonormal systems in Hilbert spaces. Then we define the trigonometric series of Fourier's in the real and complex forms in the interval 2π , as well as to an arbitrary interval. Also, we present the construction of appropriate sine and cosine series. Further, we formulate and prove basic theorems concerning the convergence of trigonometric series: Dirichlet's theorem, theorem

on uniform convergence and Fejér's theorem. Then we list some examples of Fourier series with graphs, comments and conclusions. On the end of the thesis we present an overall solution to the problem of flashing vibrating wire and equations of thermal conductivity.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 18.01.2017.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: dr Ljiljana Gajić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Member: dr Ljiljana Teofanov, associate professor at Faculty of Technical Sciences in Novi Sad

Mentor: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad