



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



О геометријским конструкцијама помоћу ограничених средстава

мастер рад

ментор:

проф. др Невена Пушић

студент:

Џана Рожајац

Нови Сад, 2012.

*„Геометрија је најмоћније
средство за изоштравање наших
умних способности и даје нам
могућност да правилно мислимо и
расуђујемо.“*

(Галилео Галилеј 1564 – 1642.)

Садржај

Предговор	3
Ознаке	5
1 Увод	6
2 О геометријским конструкцијама помоћу ограничених средстава	9
2.1 О геометријским конструкцијама	9
2.2 Средства за конструкцију	10
3 Историјски осврт	13
4 Извођење конструкција само шестаром	17
5 Неке занимљиве конструкције само шестаром	30
6 Извођење конструкција само лењиром	52
6.1 Конструкција лењиром неких праволинијских фигура	52
6.2 Конструкција лењиром, ако су дате две паралелне праве	55
6.3 Конструкција лењиром, ако је дат паралелограм или квадрат	62
6.4 Конструкције лењиром, ако је задата кружница и њен центар	63
7 Још неки проблеми за чије решавање користимо само лењир	74
Литература	78
Биографија	79

Предговор

Овај мастер рад посвећен је еуклидској геометрије која се односи на геометријске конструкције помоћу ограничених средстава. Под геометријским конструкцијама подразумевамо да се помоћу датих елемената и „датих средстава“ конструише (нацрта) геометријска фигура са одређеним особинама.

Уводна глава се односи на појам геометрије и значај ове математичке дисциплине на развој човекове мисли.

У другој глави је укратко објашњено шта значи „конструисати геометријску фигуру“, које су то елементарне конструкције и из којих делова се састоји сваки конструктивни задатак. Такође, овде говоримо и о средствима која се користе за извођење конструкција. То су пре свега шестар и лењир. На крају је формулисана основна теорема геометрије шестара позната као Мор – Маскеронијева теорема (Mohr – Masheroni theorem): „Свака еуклидска конструкције која може да се изведе помоћу лењира и шестара, може се извести и коришћењем само шестара“, као и Понсле – Штајнерова теорема (Poncelet – Steiner theorem): „Конструктивни задатак који може да се реши коришћењем лењира и шестара, може бити решен и коришћењем само лењира, уколико је у равни цртежа дата једна кружница и њен центар“.

Трећа глава је посвећена математичарима који су дали највећи допринос развоју геометријских конструкција ограниченим средствима. То су: Лоренцо Маскерони (Lorenzo Masheroni 1750 – 1800.), Георг Мор (Georg Mohr 1640 – 1697.) и Јаков Штајнер (Jakob Steiner 1796 – 1863.).

У четвртој глави је доказана Мор – Маскеронијева теорема. Да бисмо ово доказали, треба да покажемо како се пет основних конструкција изводе само помоћу шестара. Такође је дато неколико помоћних конструкција које су нам неопходне за доказ овог тврђења.

Пета глава је посвећена неким занимљивим задацима из геометрије шестара, као што су, између осталих, нормала из дате тачке на дату дуж; подела дате дужи на n једнаких делова; налажење средишта дате дужи; налажење центра дате кружнице и тако даље. Ту је дат и задатак познат под називом „Наполеонов проблем“ (Napoleon's problem). Такође су дате и неке конструкције правилних многоуглова.

Шеста глава је посвећена решавању конструктивних задатака који се изводе само помоћу лењира. Састоји се из неколико поглавља, у зависности од тога шта су почетни услови. На почетку је дата дефиниција основне фигура у пројективној равни. То је потпуни четворотеменик, као и дефиниција фигуре која је у равни дуална потпуном четворотеменику. То је потпуни четвоространик. На крају је доказано како само помоћу лењира наћи пресек праве и кружнице, којој је познат центар и полупречник, као и пресек две кружнице. Наравно, кружнице нису нацртане.

У седмој глави су дате неки проблеми који се решавају само лењиром, као на пример које друге тачке можемо конструисати користећи само лењир ако су нам предходно дате неке тачке. Размотрићемо посебан случај: дате тачке су темена трапеца.

Уз помоћ тих тачака ћемо поделити дату дуж на пола; удвостручити дату дуж; поделити дуж на m једнаких делова и на крају наћи тежиште плоче састављене од два произвољна правоугаоника у облику слова G .

Цртежи у овом раду су рађени у програму GeoGebra 3.2., док су слике математичара преузете из [11] и [26].

Овом приликом желим да изразим огромну захвалност свом ментору, др Невени Пушић, на корисним саветима, подршци, поверењу, а пре свега на стрпљењу самном. Част је и задовољство било радити са њом!

Такође се захваљујем и члановима комисије др Градимиру Војводићу и др Ђури Паунићу.

Нови Сад, јун 2012.

Име и презиме
Џана Рожајац

Ознаке

$\mathbb{N}$ - скуп природних бројева

$p(A, B)$ – права кроз тачке A и B

$k(A, r)$ – кружница са центром у тачки A и полупречником r

$k(A, |BC|)$ – кружница са центром у тачки A и полупречником $r = |BC|$

$p \parallel q$ – праве p и q су паралелне

$p \perp q$ – праве p и q су нормалне

$\triangle ABC$ - троугао са теменима A, B, C

$|AB|$ – растојање између тачака A и B

$[AB]$ – дуж одређена тачкама A и B

$X \in p(A, B)$ – тачка X припада правој

SSS - став о подударности троуглова

$l(AB)$ – лук чије су крајње тачке A и B

$pxq = A$ - праве p и q се секу у тачки A

1 Увод

Геометрија је једна од најстаријих математичких дисциплина и једна од најстаријих наука уопште. Као и остале науке, настала је због практичних потреба човека. У старом Египту поплаве Нила увек би избрисале границе појединих поседа које је затим требало поново повући.

Геометрија (грч. *γεωμετρία* , гео = земља, метрија = мерење) се бавила, у својој почетној фази, мерењем земљишта. У свом првобитном значењу геометрија се схватала као наука о фигурама, о узајамном положају и односима њених делова, и такође о трансформацијама фигуре. Појам геометрије се током времена мењао и све више уопштавао. Описивање просторних односа физичког света престајало је да буде њен једини задатак. Предмет испитивања разних модерних дисциплина геометрије чини ову науку све више нераздвојивим делом модерне математике, од које је више није могуће јасно одвојити као самосталну дисциплину. ([8])

Историја геометрије сеже до античког доба, али је њена колевка несумњиво исток. Развој геометрије се може поделити на четири периода, чије је границе немогуће обележити одређеним датумима:

1. **Период настанка**, до око V века пре нове ере;
2. **Период систематског излагања**, античка Грчка;
3. **Аналитичка геометрија**, од настанка капитализма у Европи;
4. **Изградња неевклидске геометрије**, до данас. ([8])

Период настанка

Геометрија се као наука први пут појавила у древном Египту, Вавилону и Грчкој у вези са развојем културе мерења површине тла. Отуда и потиче назив геометрије.

Египћани су развили индуктиван метод закључивања – од појединачног ка општем (нпр. приметили су да један троугао има 3 угла, па су нацртали други троугао и приметили исто, итд. док нису закључили да сви троуглови имају по три угла, тада су то узели за неку основну вредност – аксиому.)

Религиозни обреди су били повезани са конструкцијом жртве, а практичне потребе људи учиниле су нужним да се измере површине делова земље, запремине судова и остава за жетву.

У VII веку пре нове ере геометријско знање је, по мишљењу грчких историчара, пренесено из Египта и Вавилона у Грчку. Око IV – V века пре нове ере грчки филозофи су се почели упознавати са египатском и вавилонском мудрошћу. Од тада настаје други период развоја геометрије, период систематског излагања геометрије као науке, када се све тврдње (искази) доказују.

Период систематског излагања

У овом периоду су већ познате у грчкој Талесова теорема (VI век пре нове ере). Талес из Милета је путовао у Египат и од свештеника сазнао њихове геометријске закључке о збиру углова у троуглу, о уписаном троуглу у круг итд.

Грци су развили и нови метод закључивања – дедуктивни метод (од општег ка појединачном). Анаксагора (6. век пре нове ере) се бавио квадратуром круга и перспективом. Питагора је открио несамерљиве дужи (ирационални бројеви). Питагора је оснивач чувене школе „Полукруг“ која је дала велики допринос математици. Питагорејци су закључили да је збир углова у троуглу 180 степени, открили су први, трећи и четврти став о подударности троуглова, и наравно чувену Питагорину теорему.

Платон и његов ученик Аристотел (4. век пре нове ере), ако и нису оставили никаквих дела у геометрији, придавали су велики значај систему и основама геометрије. Платон је први почео да поставља аксиоме (основне законе који се узимају при извођењу сложенијих), међутим у његово време многе аксиоме су искључивале једна другу и било је веома тешко знати шта је тачно, а шта не. Тако је геометрија у Грчкој достигла свој степен кад је постало нужно да се она систематизује.

Систематизацију елементарне геометрије је учинио Еуклид (3. век пре нове ере) изложивши је на бази основних формулација – аксиома у својим познатим књигама „Елементи“, који обухватају 13 томова.

После Еуклида јавља се у Грчкој низ истакнутих математичара: Архимед, Аполоније, Ератостен и други, који су обогатили геометрију новим открићима.

Распад античког робовласничког уређења довео је до застоја у развоју геометрије у Грчкој, али се она и даље развијала у арапским земљама, у средњој Азији и Индији.

Аналитичка геометрија

Настанак капитализма у Европи је довео до новог, трећег периода развоја геометрије. У првој половини XVII века настала је аналитичка геометрија, чији су творци били Декарт (René Descartes 31.03.1596. – 11.02.1650. година) и Ферма (Pierre de Fermat; 17.8.1601. — 12.01.1665. година). Аналитичка геометрија изучава својства геометријских фигура на основу њихових алгебарских једначина.

Изградња неевклидске геометрије

Четврти период развоја геометрије обележен је изградњом неевклидових геометрија од којих је прва била геометрија Лобачевског (Nikolai Lobachevsky 01.12.1792. – 24.02.1856. година) коју је Лобачевски изградио истражујући основе геометрије, и посебно, аксиоме о паралелним правима. Садржај своје геометрије Лобачевски је први пут изнео на седници физичко – математичког факултета Казанског универзитета 1826. године. Рад је био публикован 1829. године. Од настанка геометрије, његова улога аксиоматског метода у математици уопште и у геометрији посебно постала је веома значајна. Еуклидова геометрија (обична елементарна геометрија која се изучава у школи) је после тога добила такође своју аксиоматску основу.

Давид Хилберт (David Hilbert 23.01.1862. – 14.02.1943. година) је на крају 18. века први поставио конкретан систем аксиома Еуклидове геометрије, тзв. Хилбертове аксиоме. Аксиоматске основе добиле су и друге геометрије: Лобачевског, пројективна, афина, вишедимензионална Еуклидова (n димензија) и др.

Од атике су као изазов за коришћење и продубљивање геометријских знања били коришћени разни конструктивни проблеми. И данас они имају своје истакнуто место у настави математике, како у основним, тако и у средњим школама. Наставници који предају друге предмете често су у прилици да пожале што немају на располагању начин рада какав математици пружају конструктивни проблеми: развијају строгост у резонувању, терају на испуњење формализма, развијају алгоритмичан начин размишљања, подстичу машту, класификују идеје. Надасве, ученицима који имају имало склоности за математику пружају неизмерно задовољство. Међутим, велика је одговорност наставника који користе овај начин рада, како у избору проблема, тако и у модерирању оваквог начина рада, у подстицању здравог такмичења, у спречавању апатије услед недостатка идеја путем дозираног навођења до спречавања нездраве трке подстицањем сарадње.

Овај проблем геометријских конструкција може да се решава и алгебарским путем, али сам ја, због властитих преференција и примене у школској пракси, одабрала чисто геометријски приступ.

2 О геометријским конструкцијама помоћу ограничених средстава

2.1 О геометријским конструкцијама

Геометријске конструкције имају важно место у геометријским истраживањима.

Задатак геометријске конструкције је да се помоћу датих елемената и „датих средстава“ конструише (нацрта) геометријска фигура са одређеним особинама. Традиционална и несумљиво највише коришћена средства су *шестар* и *лењир*. Шестаром се допушта конструкција кружнице, док се лењиром допушта конструкција праве. Процес састављања тражене фигуре је *конструкција*. Конструкцију је могуће извршити узастопним примењивањем коначног броја тзв. елементарних конструкција. Прецизније, елементарне конструкције шестаром и лењиром су:

1. конструкција праве кроз две дате тачке;
2. конструкција кружнице са датим центром и полупречником;
3. одређивање пресечних тачака двеју датих кружница;
4. одређивање пресечних тачака дате праве и дате кружнице;
5. одређивање пресечних тачака двеју датих правих. ([7])

Решавање конструктивних задатака састоји се, у суштини, из низа логичких расуђивања заснованих на датим условима задатка и на познатим ставовима из геометрије, па конструкција не захтева израду цртежа. Али, уколико се, ради лакшег разумевања, приступи и графичком представљању фигуре, то с обзиром на природу елементарних конструкција које се примењују, за израду цртежа довољно је употребити само лењир (и то искључиво за спајање по две дате или предходно добијене тачке) и шестар (искључиво за повлачење кругова датог центра и датог полупречника). ([27])

Решење сваког конструктивног задатка састоји се из четири дела: *анализе*, *конструкције*, *доказа* и *дискусије*. Код једноставнијих задатака неки од ових делова су тривијални или непосредно следе један из другог, па се често посебно не истичу. Међутим, код већине задатака сваки од ова четири дела битан је за коректно изведену конструкцију. ([27])

- У оквиру анализе описује се веза између датих елемената и оних елемената које треба конструисати. Претпоставља се да је задатак већ решен. Анализа није обавезан део решења, али је изузетно важан са методичког аспекта.
- У конструкцији се описује поступак, корак по корак, применом елементарних конструкција. Редослед одређивања појединих елемената произилази из низа зависности између њих, утврђених анализом. Док се у анализи не води рачуна о величини датих објеката, дотле се при конструкцији користе полазни елементи, подударни датим објектима. Ако се захтева и графичко представљање фигуре, то се за израду цртежа, као

помоћни инструменти користе искључиво лењир и шестар. Обично се не дају никаква образложења за поједине кораке. То се ради у следећем делу.

- У овом делу се доказује да је добијена фигура заиста она која се тражи, у којем су полазни објекти у датом положају и подударни датим објектима. За доказ је често потребно користити ставове обрнуте ставовима примењеним при вршењу анализе.
- Најзад, у дискусији се разматра егзистенција и број решења у зависности од почетних услова. Пожељна је, мада некад, због сложености није изводљива.

2.2 Средства за конструкцију

Постоји велики број различитих инструмената којима се могу изводити геометријске конструкције. Осим шестара и лењира за геометријске конструкције користе се и други инструменти као што су шестар ограниченог отвора, двострани лењир, лењир са зарезима, правоугаони лењир, угломер, кривуљари, конац и тако даље. Сваком од поменутих инструмената одговара извесна теорија која се односи пре свега на њихове могућности као средстава за конструкције. У тим случајевима, као допустиве, појављују се конструкције које излазе из оквира конструкција које смо навели у 1 – 5. Штавише, неке од њих су неизводљиве шестаром и лењиром те на тај начин омогућавају конструкције које је немогуће извести традиционалним инструментима. На пример, лењир са два зареза допушта конструкцију дужи чији је један крај на једној, а други на другој задатој кривој. Таквим шестаром и лењиром могућа је трисекција угла која је иначе нерешива обичним шестаром и лењиром. ([20])

Посебно је детаљно разрађена теорија геометријских конструкција шестаром и лењиром.

Иако други инструменти често могу да омогуће извођење конструкција које се само шестаром и лењиром не могу извести, у геометрији се поставља захтев да се конструкције изводе само шестаром и лењиром. Традиционално ограничавање справа при решавању геометријских конструкција на шестар и лењир, сеже далеко у прошлост. Позната геометрија Еуклида (3 век п.н.е.) заснива се на геометријским конструкцијама изведеним само лењиром и шестаром, равноправним у конструкцијама.

Еуклидске справе за извођење геометријских конструкција су лењир и шестар. Треба разликовати лењир и рулер. Рулер, је лењир са поделом и две ивице, што омогућава да се помоћу њега преносе дужине и да се цртају одређене паралелне линије. Лењир, с друге стране, омогућава само да се две дате тачке споје правом линијом. Такође треба разликовати еуклидске шестаре од обичних шестара, тзв. савремених. Обични шестари се могу користити за цртање кружнице са датим центром А која пролази кроз дату тачку В (полупречник АВ). Савремени поступак у таквим радњама као „Са центром А, полупречника CD конструиши круг...“ није у духу еуклидске употребе шестара. Он претпоставља да се то неће извести ако било једна или друга рука буду дигнуте са папира. Ипак, разлика између такозваног колабирајућег и обичног шестара је само привидна, јер колабирајућим шестаром се може извести било која конструкција која се може извести и обичним шестаром.

Није сасвим јасно зашто је избор елемената за конструкцију пао баш на ова два инструмента, али се претпоставља да је последица утицаја старогрчких математичара и филозофа. Права је одувек била основна геометријска фигура (коју не дефинишемо и

сматрамо је основним појмом у геометрији поред тачке и равни), док се кружница (као и сфера у простору) сматра идеалном фигуром. У таквим околностима, тешко да се неки други избор и могао направити.

Природно је да дозвољавајући употребу већег броја инструмената можемо извести већи број конструкција, па се може очекивати да сужавање избора инструмената сужава и класу могућих конструкција.

Немогуће је доказати ово дајући конструкцију помоћу шестара сваке конструкције која је могућа помоћу лењира и шестара, јер број таквих конструкција није коначан.

Давно је примећено да је шестар више тачан, више савршен инструмент него лењир, што значи да неке конструкције могу бити изведене без употребе лењира – поделити круг на шест једнаких делова, конструисати тачку симетричну датој тачки у односу на дату праву, и тако даље. ([13])

Италијански математичар, професор универзитета у Павији, Маскерони (Lorenzo Mascheroni 1750 – 1800.) је 1797. године издао рад „Геометрија шестара“ (Geometria del compasso) који је касније био преведен на француски и немачки језик. У овом раду је доказао следеће тврђење:

„Свака еуклидска конструкција која може да се изведе помоћу лењира и шестара, може се извести и коришћењем само шестара“. ([13])

Ово тврђење је 1890. године доказао и А. Адлер на оригиналан начин, коришћењем инверзије. Он такође предлаже општи метод решавања конструктивних задатака коришћењем само шестара. Интересантно је то да је 1928. године дански математичар Хјелмслев открио, у књижари, у Копенхагену књигу Георга Мора (Georg Mohr 1640 – 1697.) под називом „Euclides danices“ (Дански Еуклид) издату 1672. године у Амстердаму. На своје велико изненађење Хјелмслев је пронашао потпун приказ Маскеронијевог резултата у првом делу књиге. Тако је много пре Маскеронија доказано да све геометријске конструкције које могу бити изведене лењиром и шестаром могу да се изведу и само шестаром. ([13])

Део геометрије у коме се проучавају конструкције само коришћењем шестара, назива се *геометрија шестара*.

Инспирисан открићем Маскеронија швајцарски математичар Штајнер (Jakob Steiner 1796 – 1863.) је 1832. године, сматрајући да је лењир најпрецизнији инструмент, доказао следеће:

„Конструктивни задатак који може да се реши коришћењем лењира и шестара, може бити решен и коришћењем само лењира, уколико је у равни цртежа дата једна кружница и њен центар“. ([13])

При томе се подразумева да је кружница конструисана ако је одређен њен центар и полупречник. Тако је лењир, из само једно коришћење шестара, једнако моћан као и шестар.

Нешто раније (1822. године), на сасвим други начин ову теорему је формулисао и француски математичар Ж. Понсле (Jean Victor Poncelet 1788-1867.). Наведена теорема се

назива Понсле – Штајнерова теорема. Неопходност постојања кружнице и њеног центра у равни цртежа Штајнер је доказао у следећој теорему:

Ако је у равни нацртана кружница, али није одређен њен центар, тај центар само уз помоћ једног лењира није могуће одредити.

Још у античко доба знало се да лењир и шестар нису „свемоћни“. Били су и тада познати конструктивни проблеми који по свој прилици нису били решиви лењиром и шестаром. Данас их зовемо *класичним проблемима*. Нерешивост класичних проблема доказана је тек у деветнаестом веку помоћу теорије алгебарских једначина. Најпознатија су следећа три проблема: квадратура круга, удвостручавање коцке и трисекција угла.

Далеко од тога да класични проблеми исцрпљују листу конструкција нерешивих лењиром и шестаром. Таквих проблема има на претек и разлика је у томе што немају појединачне називе. На пример, у ту класу спада конструкција троугла помоћу одсечака трију симетрала углова; конструкција квадрата чија два суседна темена припадају једној, а друга два темена припадају другој датој кружници и тако даље.

3 Историјски осврт

Математичари који су дали највећи допринос развоју геометријских конструкција ограниченим средствима су: Лоренцо Маскерони, Георг Мор и Јаков Штајнер.

Лоренцо Маскерони



Лоренцо Маскерони, италијански математичар и песник, рођен је 13. маја 1750. године у месту Кастагнето близу Бергама, Ломбардија (сада Италија). Образован је са идејом да постане свештеник и заређен је у седамнаестој години. Једно време радио је као професор грчког и поезије у Бергаму. Математику је открио релативно касно. Од 1778. године учио је физику и математику на семинару у Бергаму. Године 1786. постао је професор алгебре и геометрије на Универзитету у Павији. Касније, 1789. године постаје ректор универзитета, где остаје на том положају четири године. Од 1788. године до 1791. године био је управник *Accademia degli Affidati*. ([11])

Постављен је за заменика управне законодавне скупштине у Милану 1797. године. Био је члан међународне комисије за увођење метричког система и Француској. Умро је 14. јула 1800. године у Паризу након болести настале услед компликација после добијене прехладе.

У делу *Adnotationes ad Calculum Integrale Euleri* (1790. године) Маскерони је израчунао Ојлерову константу на 32 децимале. Уствари, само првих 19 је било тачно, а преостале је исправио Џон ван Солдер (Johann von Soldner) 1809. године. Упркос грешци у прорачуну Маскеронијев рад показује дубоко разумевање Ојлеровог рачуна. Познато је и његово велико пријатељство с Наполеоном (упознали су се када је Наполеон освојио северну Италију) којег је толико ценио да му је посветио једну од његових књига у стиховима *Геометрија шестара* (*Geometria del Compasso*) издату 1797. године у Павији.

У уводном делу Маскерони објашњава како је приступио проблему. Био је мотивисан жељом да да допринос елементарној геометрији. Учинило му се да се шестар и лењир могу одвојити, али био је узнемирен сумњама и страховима који често прате истраживања. Онда је поново прочитао рад о томе како су Грахам и Бирд (Graham and

Bird) поделили њихов велики астрономски квадрант и схватио је да се подела може урадити само са шестаром. Ово га је охрабрило и наставио је свој рад са два циља у глави: да да теоретско решење проблема конструкције само шестаром и да понуди практичне конструкције које би биле корисне за изградњу прецизних инструмената. ([11])

У свом делу Маскерони нам показује како се може само шестаром преполовити дати кружни лук; пронаћи тачка пресека две праве; пронаћи тачка пресека праве и кружнице; додати и одузети дата дуж; пронаћи четврта пропорционала за три дате дужи. На основу решења ових проблема био је у стању да покаже теоретски да се било која конструкција изведена лењиром и шестаром може извести само шестаром. За овај изванредан допринос Маскерони је примио велики број почести као што је избор за члана академије у Падови (Academy of Padua), краљевској академији у Мантуи (The Royal Academy of Mantua) и у Италијанско научно друштво (Societa Italiana delle Scienze).

Остало је питање да ли Маскерони заслужује поштовање за резултат који је Мор доказао 125 година раније. Прво се морамо питати да ли је Маскеронију био познат Морев рад. Ако се проуче оба доказа види се да су они приступили проблему на различите начине. Ово води на помисао да Маскерони није могао познавати Морев доказ, али је могуће да је чуо да је такав резултат доказан раније. То се не чини вероватним и чак ако га је видео, његово достигнуће не можемо умањити. Јасно је да и Маскерони и Мор заслужују признање, па се из овог разлога конструкције само шестаром обично зову Мор – Маскеронијеве конструкције. ([11])

Георг Мор

Георг Мор је рођен 1. априла 1640. године у Копенхагену, а умро 26. јануара 1697. године у Кислингсвалду, Немачка. Мора су образовали његови родитељи, научили су га да чита и пише и научио је довољно математику од њих да би могао да студира даље. Отишао је у Холандију 1662. године са намером да студира математику код Хајгенса. Студирао је и у Француској и у Немачкој, пре повратка у родну Данску. У своје време је био мало познат као математичар. ([28])

Његова књига *Дански Еуклид*, издата 1672. године, била је заборављена док није откривена у књижари 1928. године. Можда чак ниједна копија није продана. Хјелмслев је написао предговор књизи *Дански Еуклид* и поново је објавио у немачком преводу 1928. године. Књига садржи доказ да се све Еуклидске конструкције могу извести само шестаром. ([28])

Сајденберг пише: Књига је из два дела; први чине конструкције из првих шест књига Еуклида; други се састоји од различитих конструкција. Проблем проналажења пресека две праве који је од одређене теоретске важности, решен је у другом делу у вези са конструкцијом кружнице кроз две тачке. У књизи Мор не износи тврђење све до последњег параграфа. У посвети краљу Кристијану V, каже да верује да је урадио нешто ново и на насловној страни то експлицитно тврди. Ипак, непажљивом читаоцу лако би промакла вредност књиге.

Маскерони, ког сматрају заслуженим за доказ да се све Еуклидске конструкције могу извести само шестаром, то је доказао тек 125 година након објављивања Мореве књиге. Мор је у књизи доказао да се дуж може поделити златним пресеком само шестаром.

Мор се дописивао са више математичара укључујући Лајбница, који је добио Моров рад о вађењу корена. Дописивао се са Чирнхаусом кога је срео у неколико наврата у Холандији, Француској и Енглеској. Мор је 1695. године прихватио Чирнхаусову понуду за посао и отишао у Кислингсвалд, са женом и сином, да учествује у Чирнхаусовим математичким пројектима.

Моров син је тврдио да је његов отац написао три књиге из математике и филозофије које су веома добро прихваћене. Ово је довело до одређеног интересовања историчара који су покушали да открију остале две књиге.

Јакоб Штајнер



Јакоб Штајнер, син швајцарског сељака, „мали пастир“ је рођен 18. марта 1796. године у Уценшторфу, Швајцарска. Умро је 1. априла 1863. године у Берну. Није знао да чита и пише до четрнаесте године и ишао је у школу као осамнаестогодишњак, упркос жељама родитеља. Затим је студирао на Универзитетима у Хајделбергу и Берлину, издржавајући себе веома скромним приходима од давања часова. Био је рани сарадник часописа *Crelle's Journal*, првог часописа посвећеног потпуно математици, основаног 1826. године. Од 1834. године до своје смрти 1863. године имао је универзитетску катедру у Берлину. ([26])

Био је искључиво геометар и није толико трпео примену алгебре и анализе да је чак одбацио и цртеже. По његовом мишљењу геометрија се најбоље учи интензивним размишљањем. Говорио је да рачунање замењује мишљење тада када га стимулише геометрија.

Открио је Штајнерову површ (Риманска површ) са двојном бесконачношћу конусних пресека на њој. Он често није давао доказе својих теорема, тако да његова сабрана дела представљају ризницу за геометре који траже решење проблема.

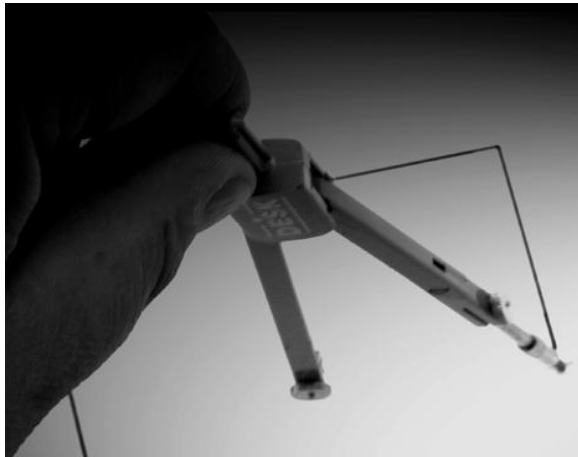
Његов допринос пројективној геометрији је један од највећих. Изграђивао је своју пројективну геометрију веома систематично, прелазећи са перспективности на пројективност, а затим на конусне пресеке. Решио је низ изопериметријских проблема, који су били типични за његове геометријске поступке. Његов доказ да је круг фигура највеће површине од свих затворених кривих датог периметра (1836.) заснива се на трансформацији сваке фигуре датог периметра која није круг, на другу фигуру истог периметра, али веће површине. Штајнеров закључак има један недостатак: он није доказао да тах стварно постоји. Дирихле је покушао да укаже на то Штајнеру, али строги доказ је дао тек касније Вајерштрас. ([26])

Други познати резултат сем Штајнерове теореме, је Понсле – Штајнерова теорема која показује да су за еуклидске конструкције довољни дати круг и права линија.

Обрнута Штајнерова теорема: Пресликавање које се помоћу криве II реда може успоставити између два прамена правих са центрима на тој кривој је пројективно.

Штајнерова теорема: Све тачке пресека одговарајућих елемената два пројективна прамена правих који нису перспективни припадају истој кривој II реда. Средишта прамена такође припадају тој кривој.

4 Извођење конструкција само шестаром



Ако би се на часу математике поставио задатак: „Објасните како се конструише пресек праве и кружнице“, већина ученика мислила би да се шалимо јер је за њих та конструкција очита. Шестаром се конструише кружница, а лењиром повуче права и пресеци су ту. А на питање: „Како решити исти задатак само употребом шестара?“ Хе... Ситуација би постала врло занимљива. Прво би била потпуна тишина, а онда би (надамо се) почели постављати питања: „Како се може конструисати права само шестаром? Шта то значи? Да ли је то могуће?...“

Да је то могуће потврђује следећа теорема:

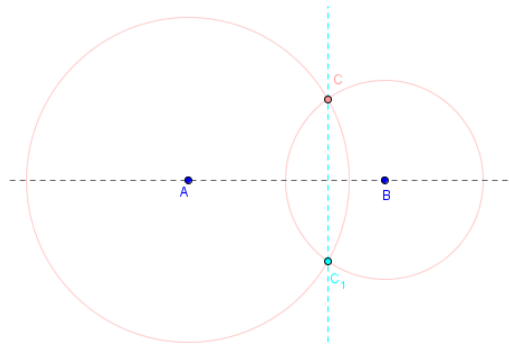
Све конструкције које се могу извести лењиром и шестаром, могу се извести и само шестаром.

Да бисмо ово доказали, треба да покажемо како се пет основних конструкција изводе само помоћу шестара. Друга и трећа основна конструкција су тривијалне, а остале три дате су у задацима 2, 7 и 8. У осталим задацима је дато неколико помоћних конструкција које су нам неопходне.

Једини проблем нам је конструкција праве. Наравно, помоћу шестара ми не можемо да нацртамо непрекидну праву линију, већ само можемо конструисати произвољан број тачака које припадају правој. Међутим, како је права одређена са две било које своје тачке, у геометрији шестара конструкција праве сматра се завршеном ако су конструисане две њене тачке.

Да би нам слике у задацима биле јасније, праву ћемо цртати испрекидано, иако те праве у конструкцији не користимо.

Задатак 1. Конструисати тачку C_1 симетричну тачки C у односу на дату праву $p(A, B)$.



Слика 4.1.

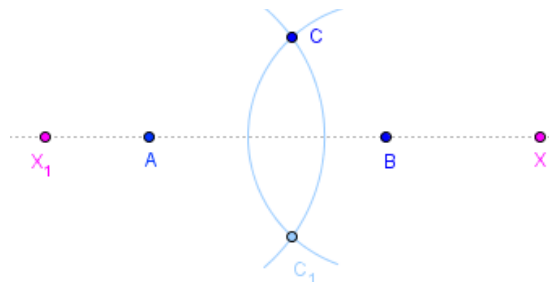
Конструкција: Нека је дата права са своје две тачке A и B . Око тачке A опишимо кружницу полупречника $|AC|$, а око тачке B кружницу полупречника $|BC|$. Друга пресечна тачка ових кружница биће тражена тачка C_1 (слика 4.1.).

Доказ: Да бисмо показали да су C и C_1 симетричне тачке у односу на праву $p(A, B)$, морамо показати да је $|AB|$ симетрала од $|CC_1|$. По конструкцији $|AC| = |AC_1|$ и $|BC| = |BC_1|$, зато A и B леже на симетрали од $|CC_1|$.

Дискусија: Ако тачка C не припада правој $p(A, B)$, постоји јединствена тачка C_1 . Ако тачка C припада правој $p(A, B)$, она је сама себи симетрична. Да би се утврдило припадају ли три дате тачке A , B и X датој правој, неопходно је ван дате праве $p(A, B)$ узети произвољну тачку C и конструисати њој симетричну тачку C_1 . Очигледно, тачка X припада правој $p(A, B)$ ако и само ако важи $|CX| = |C_1X|$. ([13])

Као што смо већ рекли, у геометрији шестара права се сматра конструисаном ако је одређена са две тачке. У даљем тексту биће неопходно помоћу шестара одредити једну, две или уопште произвољно тачака на правој. Ову конструкцију можемо извести на следећи начин.

Задатак 2. На правој задатој тачкама A и B конструисати једну или неколико тачака.



Слика 4.2.

Конструкција: Нека је C произвољна тачка која не припада правој $p(A, B)$. Конструирамо тачку C_1 , симетричну тачки C у односу на праву $p(A, B)$ (задатак 1). Опишимо кружнице $k(C, r)$ и $k(C_1, r)$ (r је полупречник већи од удаљености тачке C од праве $p(A, B)$). Тада њихове пресечне тачке X и X_1 припадају правој $p(A, B)$ (слика 4.2.). Мењајући величину полупречника r , можемо конструисати произвољан број тачака дате праве.

Доказ: Тачке C и C_1 су симетричне у односу на праву $p(A, B)$, па је права $p(A, B)$ симетрала дужи $[AB]$. Тада је она скуп свих тачака равни једнако удаљених од C и C_1 , па су тачке X и X_1 на тој правој. Из конструкције следи

$$|CX| = |C_1X| = r$$

и

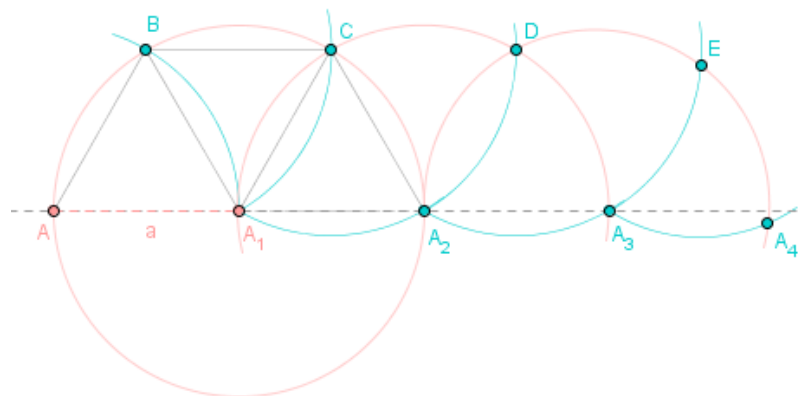
$$|CX_1| = |C_1X_1| = r,$$

следи

$$X \in p(A, B) \text{ и } X_1 \in p(A, B). ([5])$$

Задатак 3. Конструисати дуж која је 2, 3, 4 и уопште n пута дужа од дате дужи $[AA_1]$, где је n позитиван цео број.

И начин:



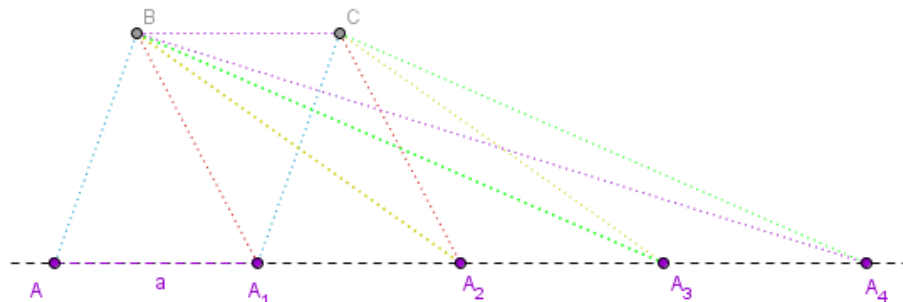
Слика 4.3. а)

Конструкција: Нека је дата дуж $[AA_1] = a$. Опишимо кружницу са центром у тачки A_1 полупречника $|A_1A|$ и тражимо њене пресеке редом са кружницама $k(A, a)$, добијамо тачку B , са $k(B, a)$, добијамо тачку C , са $k(C, a)$, добијамо тачку A_2 (слика 4.3. а)). Тада су тачке A, A_1, A_2 колинеарне и $|AA_2| = 2|AA_1|$. На исти начин се конструише дијаметрално

супротна тачка A_3 тачки A_1 кружнице $k(A_2, |AA_1|)$. Тада је $|AA_3| = 3a$. Поступак се може наставити n пута.

Доказ: $|AA_1| = |AB| = |BA_1| = |BC| = |A_1C| = |A_1A_2| = |CA_2|$, све једнако полупречнику $|AA_1|$. То значи да су троуглови $\triangle AA_1B$, $\triangle A_1BC$, $\triangle A_1CA_2$ једнакостранични тако да је сваки од углова $\angle AA_1B$, $\angle BA_1C$ и $\angle CA_1A_2$ једнак 60° . Због тога су тачке A , A_1 , A_2 колинеарне и важи $|AA_2| = 2|AA_1|$.

II начин:



Слика 4.3. б)

Конструкција: Ван праве $p(A, A_1)$ одаберемо произвољну тачку B и опишимо кружнице $k(A_1, |AB|)$ и $k(B, a)$. У њиховом пресеку је тачка C . Сада опишимо кружнице $k(A_1, a)$ и $k(C, |A_1B|)$, оне се секу у тачки A_2 (слика 4.3. б)). Дуж $[AA_2] = 2a$. Опишимо кружнице $k(A_2, a)$ и $k(C, |A_2B|)$. У пресеку добијамо тачку A_3 . Дуж $[AA_3] = 3a$. Поступак се може наставити.

Ова конструкција је могућа јер су $ABCA_1$, A_1BCA_2 , A_2BCA_3 , ... паралелограми.

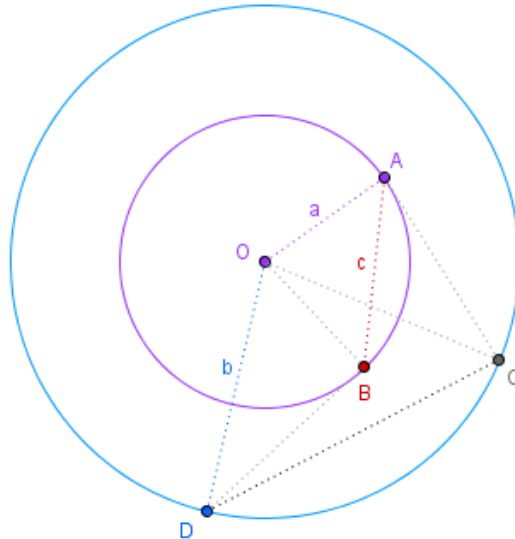
Напомена: Аналогно се конструишу дужи од 2, 4, 8, 16, ..., 2^k пута дуже од дате дужи $[AA_1]$. Да бисмо то урадили опишимо кружницу $k(A_1, a)$ и нађимо тачку A_2 дијаметрално супротну тачки A , $|AA_2| = 2a$. Затим опишимо кружницу $k(A_2, 2a)$ и добијамо тачку A_4 дијаметрално супротну тачки A , $|AA_4| = 4a$. Дијаметрално супротна тачка A_8 тачки A је на кружници $k(A_4, 4a)$. После k корака добијамо $|AA_{2^k}| = 2^k a$. ([13])

Задатак 4. Нека су a , b и c дефинисане као дужине датих трију дужи. Наћи x тако да је $a : b = c : x$, тј. конструисати четврту геометријску пропорционалу за дужи a , b и c .

И начин:

Анализа: Разликујемо три случаја:

1. случај: $c < 2a$



Слика 4.4. а)

Конструкција: Узмимо произвољну тачку O и опишимо две концентричне кружнице полупречника a и b . На кружници $k(O, a)$ одаберимо произвољну тачку A (слика 4.4. а)). Конструирајмо кружницу $k(A, c)$. Означимо тачку B као пресек са кружницом $k(O, a)$. Нека је d дуж таква да је $d > |a - b|$. Конструирајмо кружнице $k(A, d)$ и $k(B, d)$. У пресеку са кружницом $k(O, b)$ су тачке C и D (или обрнуто). Дуж $[CD]$ је тражена четврта пропорционала x .

Доказ: Троуглови $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$ су подударни на основу става SSS, па је $\angle AOC = \angle BOD$. Отуда је $\angle AOB = \angle COD$ па су једнакокраки троуглови $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ слични. Следи

$$a : b = c : CD.$$

2. случај: $c \geq 2a$, $b < 2a$

Користимо пропорцију $a : c = b : x$, уместо $a : b = c : x$ и применимо случај 1).

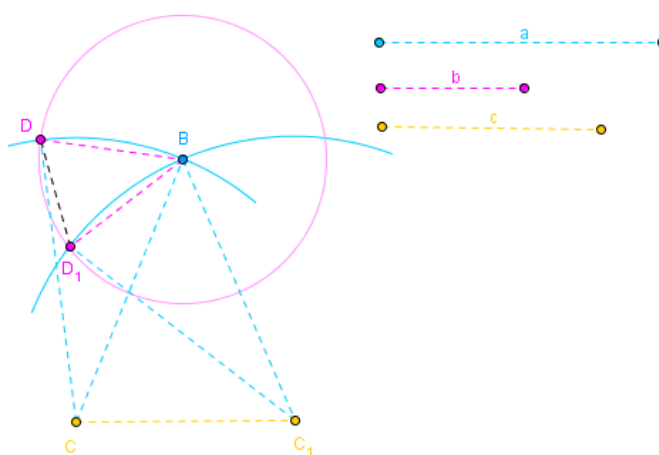
3. случај: $c \geq 2a$, $b \geq 2a$

Искористимо задатак 2. Конструирамо дуж pa , при том бирамо p тако да је $c < 2pa$ или $b < 2pa$. Применимо случај 1) на пропорцију $pa : b = c : y$. Искористимо задатак 2. у налажењу $x = py$.

Заиста,

$$pa : b = c : y \text{ или } a : b = c : py. ([13])$$

II начин:



Слика 4.4. б)

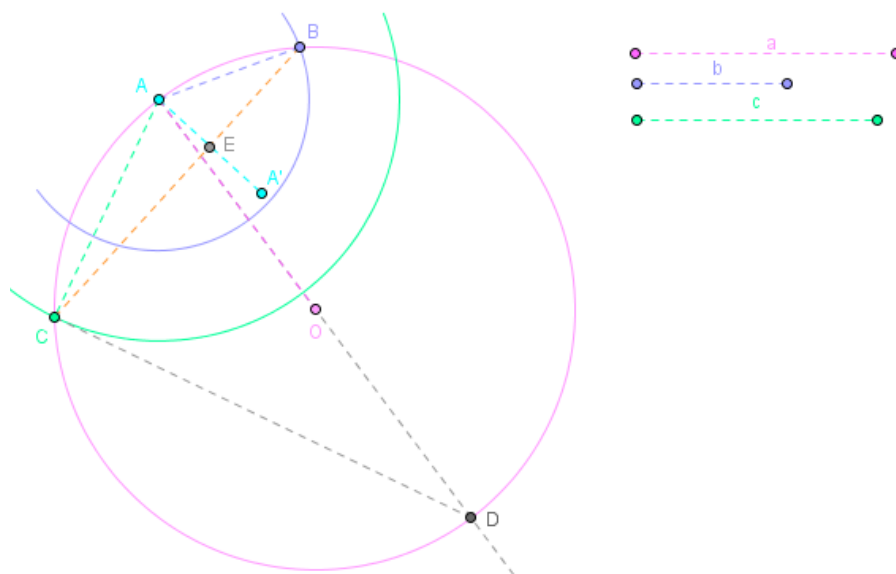
Конструкција: Опишимо кружнице $k(C, a)$ и $k(C_1, a)$, где су тачке C и C_1 крајње тачке дате дужи c (слика 4.4. б)). У пресеку добијамо тачку B . Кружница $k(B, b)$ сече кружнице $k(C, a)$ и $k(C_1, a)$ у тачкама D и D_1 редом. Дуж $[DD_1]$ је тражена дуж x .

Доказ: Једнакокраки троуглови $\triangle CBD$ и $\triangle C_1BD_1$ су подударни. То значи да је $\angle CBD = \angle C_1BD_1$. Из сличности једнакокраких троуглова $\triangle CBC_1$ и $\triangle DBD_1$ следи:

$$a : b = c : |DD_1|.$$

У сличају $c \geq 2a$ и $b \geq 2a$, као и у првом начину налазимо дуж pa , тако да је $c < 2pa$ и $b < 2pa$, затим конструирамо четврту пропорционалу за дужи pa , b и c .

III начин:



Слика 4.4. ц)

Конструкција: Из произвољне тачке O (слика 4.4. ц)) опишимо кружницу $k(O, a)$. Затим бирамо произвољну тачку A на кружници $k(O, a)$ и описујемо кружницу $k(A, b)$ чију једну пресечну тачку са кружницом $k(O, a)$ означимо са B . Описујемо кружницу $k(A, c)$ и једну од пресечних тачака те кружнице са кружницом $k(O, a)$ означимо са C . Одредимо тачку A' симетричну тачки A у односу на праву $p(B, C)$. Дуж $[AA']$ је тражена четврта пропорционала за дужи a , b и c .

Доказ: Означимо са D пресек праве $p(O, A)$ са кружницом $k(O, a)$, а са E пресек правих $p(AA')$ и $p(B, C)$. Правоугли троуглови $\triangle ACD$ и $\triangle AEB$ су слични, јер је $\angle AOB = \angle ADC$. Према томе

$$AD : AB = AC : AE$$

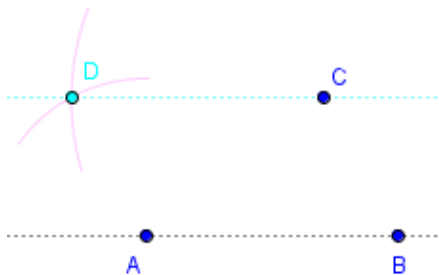
или

$$2a : b = c : \frac{AA'}{2}$$

па добијамо

$$a : b = c : AA'.$$

Задатак 5. Конструкција праве паралелне датој правој $p(A, B)$ која пролази кроз дату тачку C .

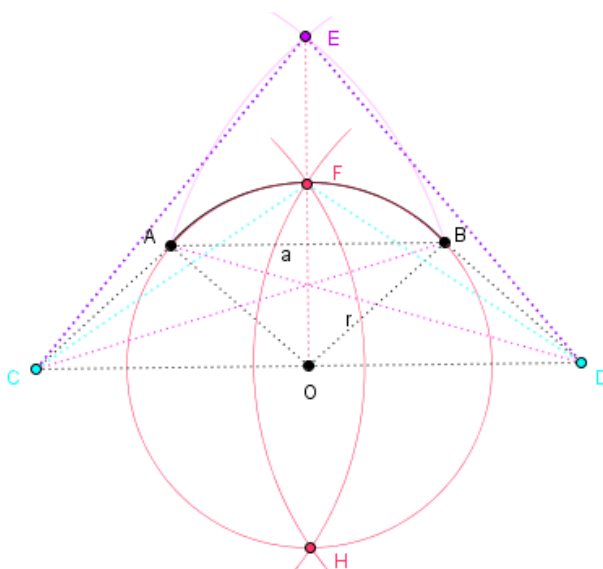


Слика 4.5.

Конструкција: Са центром у тачки C опишимо кружницу полупречника $|AB|$ (слика 4.5.), а са центром у тачки A кружницу полупречника $|BC|$. У пресеку тих кружница налази се тачка D , тј. тачка која са датом тачком C одређује дату праву.

Доказ: Тачка D је четврто теме паралелограма $ABCD$.

Задатак 6. Конструисати средиште лука AB дате кружнице.



Слика 4.6.

Конструкција: Претпоставимо да је центар O кружнице познат (у наставку ће бити показано (задатак 18.) како наћи, коришћењем само шестара, центар ако имамо само кружницу). Нека је дата кружница $k(O, r)$, где је $|OA| = |OB| = r$ (слика 4.6.). Одредимо тачке C и D тако да су $ABCO$ и $ABOD$ паралелограми (задатак 5). Тада су C, O, D колинеарне тачке. Опишимо кружнице $k(C, |BC|)$ и $k(D, |AD|)$. Нека је пресек тачка E . Затим опишимо кружнице $k(C, |OE|)$ и $k(D, |OE|)$. У њиховом пресеку добијамо тачке F и H . Тачка F је средиште лука AB , а тачка H средиште лука који допуњује први лук до пуне кружнице.

Доказ: Утврдићемо да је F средиште лука AB ако покажемо да је полупречник $|OF|$ нормалан на тетиву $|AB|$. (Нормала из центра круга на тетиву полови тетиву и лук одсечен тетивом). Већ смо приметили да су тачке C, O, D колинеарне. Троуглови $\triangle CED$ и $\triangle CFD$ су једнакокраки па је $\angle COE = \angle COF = 90^\circ$ (тачка O је средиште дужи $[CD]$) и важи да је $|OF| \perp |AB|$.

Ако покажемо да је $|OF| = r$, онда можемо закључити да је тачка F средиште лука AB .

Нека је $|AB| = a$. Посматрамо паралелограм $COBA$ и на њега применимо теорему елементарне геометрије која гласи: „Сума квадрата дијагонала у паралелограму једнака је суми квадрата његових страница.“

$$|OA|^2 + |BC|^2 = 2|OB|^2 + 2|AB|^2$$

или

$$r^2 + |BC|^2 = 2r^2 + 2a^2$$

тада је

$$|BC|^2 = r^2 + 2a^2.$$

Троугао $\triangle COE$ је правоугли, па важи:

$$|CE|^2 = |CB|^2 = |CO|^2 + |OE|^2$$

отуда је

$$r^2 + 2a^2 = a^2 + |OE|^2$$

и

$$|OE|^2 = a^2 + r^2.$$

Троугао $\triangle COF$ је правоугли, па је

$$|OF|^2 = |CF|^2 - |CO|^2$$

односно

$$|OF|^2 = |OE|^2 - a^2.$$

Тада је

$$|OF|^2 = a^2 + r^2 - a^2 = r^2,$$

тј.

$$|OF| = r.$$

Дискусија: За A и B увек добијамо две тачке. Ако су тачке A , B и O колинеарне $ABCO$ није паралелограм, његова темена су на једној правој, али конструкција остаје иста.

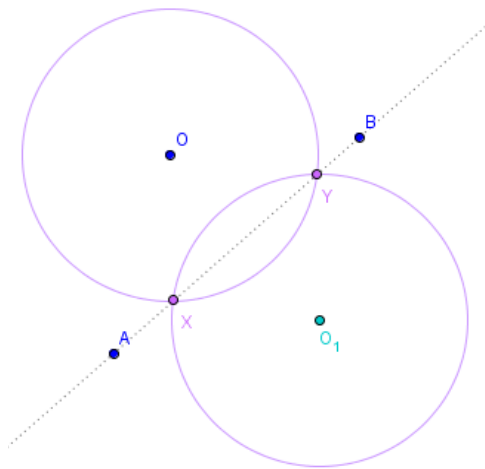
Сада можемо наставити са главним проблемима проналажења тачака пресека праве и круга и тачке пресека две праве.

Задатак 7. Конструисати тачку пресека кружнице $k(O, r)$ и праве задате двома тачкама A и B .

Анализа: Разликујемо два случаја, зависно од тога да ли тачка O припада или не припада правој $p(A, B)$.

1. случај:

Тачке A , B , O нису колинеарне¹.



Слика 4.7. а)

Конструкција: Конструирамо симетричну тачку O_1 тачки O у односу на праву $p(A, B)$ (задатак 1). Конструирамо кружницу $k(O_1, r)$ и њен пресек са кружницом $k(O, r)$ биће тачке X и Y (слика 4.7. а)).

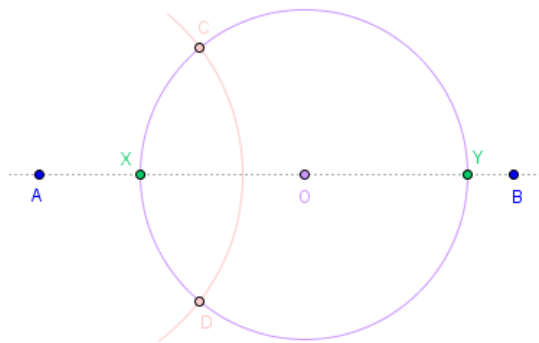
¹ Лако можемо проверити да ли су три тачке колинеарне (дискусија у задатку 1)

Доказ: Из конструкције следи да је права $p(A, B)$ симетрала дужи $[OO_1]$. Тачке X и Y су једнако, за r , удаљене од тачака O и O_1 , па следи да оне леже на симетрали дужи $[OO_1]$, тј. оне се налазе на правој $p(A, B)$.

Дискусија: Кружнице $k(O, r)$ и $k(O_1, r)$ могу да имају једну, две или да немају заједничких тачака, што значи да права додирује круг, права сече круг у два тачака, или да права и круг немају заједничких тачака.

2. случај:

То је случај када ова конструкција није могућа, тј. када су тачке A , B , O колинеарне.



Слика 4.7. б)

Конструкција: Произвољним полупречником из тачке A , опишимо кружницу која сече дату кружницу у тачкама C и D (слика 4.7. б)). Тражене пресечне тачке X и Y су средишта лукова CD и DC (зadataк 6).

Дискусија: Увек се добијају две тачке.

Напомена: Ако су нам дате две дужи a и r , где је $a = |AO|$, описивањем кружнице $k(O, r)$ и понављањем предходне конструкције, добијемо збир и разлику датих дужи:

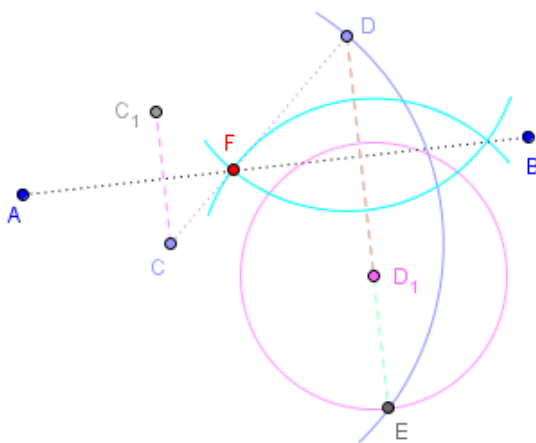
$$|AY| = |AO| + |OY| = a + r$$

и

$$|AX| = |AO| - |OX| = a - r.$$

Задатак 8. Конструисати тачку пресека две праве $p(A, B)$ и $p(C, D)$, од којих је свака задата двема тачкама.

Анализа: Дате су праве $p(A, B)$ и $p(C, D)$ и нека је F њихова пресечна тачка. Нека су C_1 и D_1 тачке симетричне тачкама C и D , у односу на дату праву $p(A, B)$ и тачка E таква да је CC_1D_1E паралелограм. Посматрајмо сада троуглове $\triangle DFD_1$ и $\triangle DCE$. Они су слични, па је $DF : DC = DD_1 : DE$. Када одредимо DF лако ћемо конструисати троугао $\triangle DD_1F$. То је једнакокраки троугао $FD = FD_1$, а тачке D и D_1 имамо.



Слика 4.8.

Конструкција: Дате су четири тачке A, B, C и D . Конструисамо тачке C_1 и D_1 , симетричне тачкама C и D , у односу на дату праву $p(A, B)$ (слика 4.8.). Опишимо кружнице $k(D_1, |CC_1|)$ и $k(C, |CD|)$ и са E обележимо тачку њиховог пресека. Нађимо дуж x , четврту пропорционалу за дужи $[DE]$, $[DD_1]$ и $[CD]$ (задатак 4). На крају у пресеку кружница $k(D, x)$ и $k(D_1, x)$ добијамо тачку F .

Доказ: Како је тачка C_1 симетрична тачки C , а тачка D_1 симетрична тачки D , наћићемо тачку пресека датих правих, ако конструисамо тачку пресека правих $p(C, D)$ и $p(C_1, D_1)$.

Фигура CC_1D_1E је паралелограм, следи да су тачке D, D_1, E колинеарне, тј. припадају правој $p(A, B)$. Троуглови $\triangle CDE$ и $\triangle FDD_1$ су слични, па је

$$|DE| : |DD_1| = |CD| : |D_1F|,$$

где је

$$|CE| = |CD| = |C_1D_1|.$$

Дуж $x = |D_1F|$ је четврта пропорционала за дужи $[DE]$, $[DD_1]$ и $[CD]$.

Дискусија: Дате праве $p(A,B)$ и $p(C,D)$ су паралелне ако и само ако важи: $|CC_1| = |DD_1|$, где су тачке C_1 и D_1 симетричне тачкама C и D у односу на дату праву $p(A,B)$.

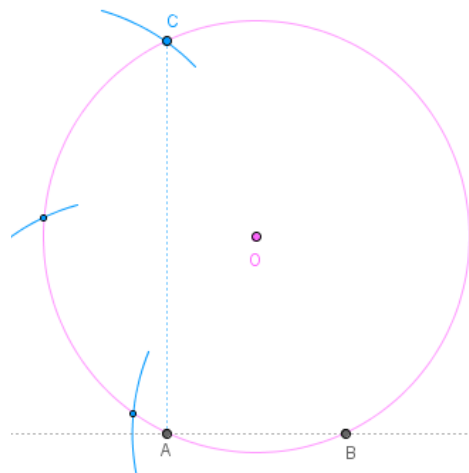
Наведени метод решавања задатака само помоћу шестара веома је сложен и гломазан, тако да је практично неефикасан. Међутим, са теоретске тачке гледишта то омогућава да се прикаже ваљаност основне теореме геометрије шестара.

5 Неке занимљиве конструкције само шестаром

У овом делу ћемо размотрити решење неколико интересантних задатака, обрађених првенствено ради Мора, Маскеронија и Адлера.

Задатак 9. Дуж $[AB]$ је одређена њеним крајњим тачкама A и B . Одредити тачку C тако да је $[AC]$ нормално на $[AB]$.

И начин:

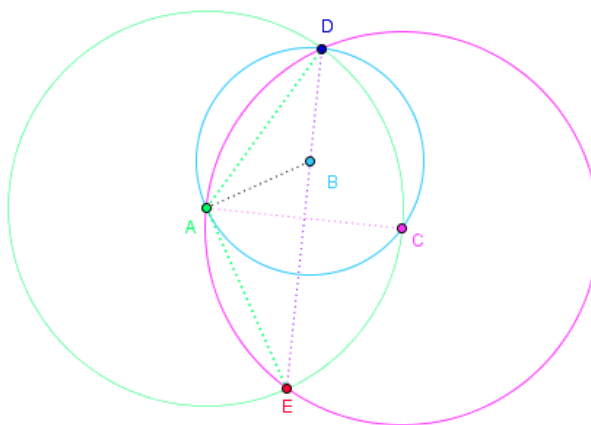


Слика 5.9. а)

Конструкција: Са произвољним полупречником $r > AB$ (слика 5.9. а)) конструишимо две кружнице са центрима у тачкама A и B . (Од две тачке пресека ових кружница, бирамо једну од њих). Нека је то тачка O . Затим опишимо кружницу $k(O, r)$ и на њој конструишимо тачку C дијаметрално супротну тачки B . Тада је $[AC]$ нормално на $[AB]$.

Доказ: Исправност конструкције следи из чињенице да је угао $\angle BAC$ уписан у кружницу над пречником.

II начин:



Слика 5.9. б)

Конструкција: Нека је $|AB| = a$. Опишимо кружницу $k(B, a)$. Нека је C произвољна тачка на тој кружници и опишимо кружницу $k(C, |AC|)$ (слика 5.9. б)). Оне се секу у тачки D . Затим опишимо кружницу $k(A, |AD|)$. Она кружницу $k(B, a)$ сече у тачки E . Тачка E је тражена тачка, тј. права $p(A, E)$ је нормална на праву $p(A, B)$.

Доказ: Дуж $[AC]$ повезује центре кружница $k(C, |CA|)$ и $k(A, |AD|)$, а $[DE]$ им је заједничка тетива, па је $[AC]$ нормално на $[DE]$ и

$$\angle CAD = \angle CAE \quad (\triangle ADE \text{ је једнакокраки}).$$

Са друге стране,

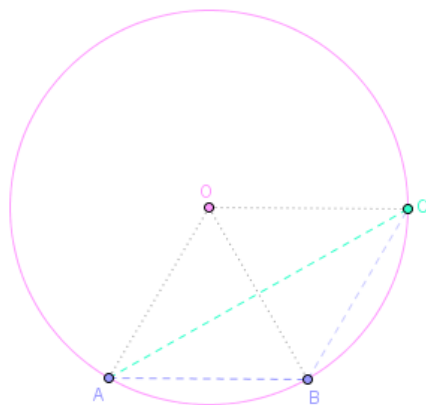
$$\angle CAD = \angle ADC = 60^\circ,$$

па из последње две једнакости следи да је

$$\angle CAE = 60^\circ. \quad ([9])$$

Права $p(A, E)$ је тангента на кружницу $k(B, a)$ у тачки A , па је $[AE]$ нормала на $[AB]$.

Задатак 10. Дата је дуж $[AB]$ Конструисати дуж једнаку $AB\sqrt{3}$.

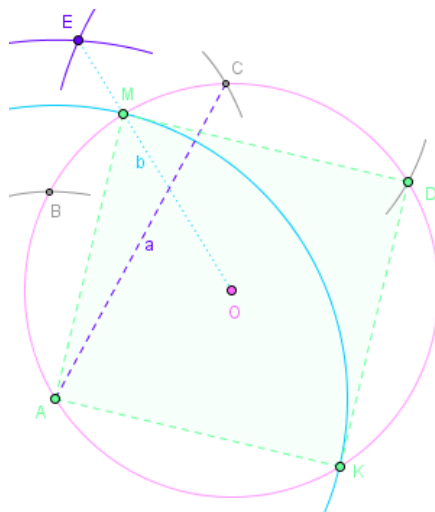


Слика 5.10.

Решење: Предходни задатак (I начин). Дуж $|AC| = |AB| \sqrt{3}$ (слика 5.10.).

Доказ: Троуглови $\triangle OAB$ и $\triangle OBC$ су једнакостранични, па су углови $\angle ABO$ и $\angle OBC$ по 60° . Тада је угао $\angle ABC$ једнак 120° , па тетива AC повлачи трећину круга и то је страна једнакостраничног троугла уписаног у круг полупречника $|AB|$, тј. $|AC| = |AB| \sqrt{3}$. ([5])

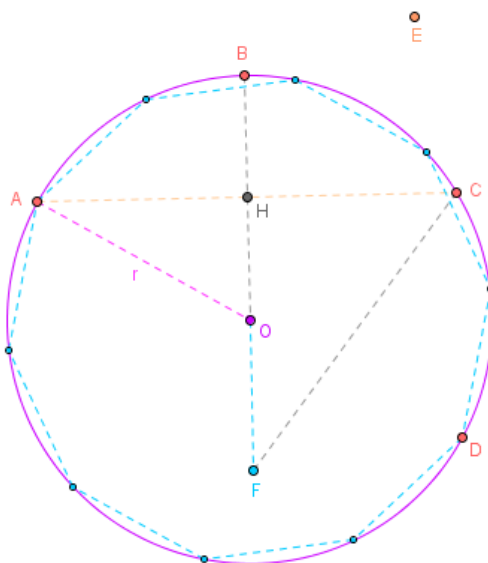
Задатак 11. Наполеонов проблем: Дата је кружница $k(O, r)$. Поделити кружницу на четири једнака дела, тј. уписати у њу квадрат. ([4])



Слика 5.11.

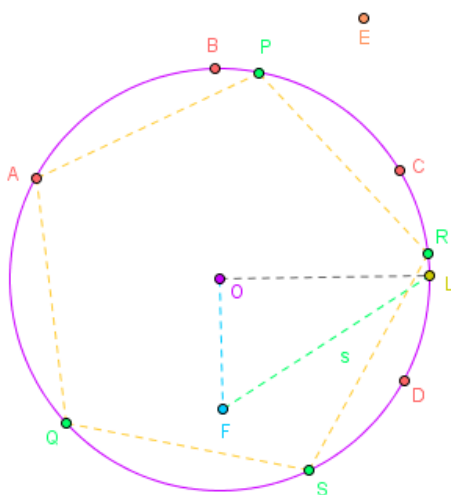
Конструкција: Одаберимо први врх квадрата A (слика 5.11.). Конструисамо дијаметрално супротну тачку D тачки A . Одредимо тачку E као тачку пресека кружница $k(A, |AC|)$ и $k(D, |AC|)$. Нека су K и M тачке пресека кружница $k(O, r)$ и $k(A, |OE|)$. Тачке A, K, D и M су врхови уписаног квадрата.

Задатак 12. У дату кружница $k(O, r)$ уписати правилан десетоугао и петугао. [22]



Слика 5.12. а)

Конструкција: На кружници бирамо произвољну тачку А. Конструирамо дијаметрално супротну тачку D тачки А (слика 5.12. а)). Описујемо сада кружнице $k(A, |AC|)$ и $k(D, |DB|)$. Једну од пресечних тачака означимо са Е. Даље, опишимо кружнице $k(A, |OE|)$ и $k(C, |OE|)$ и са F означимо тачку пресека. Дуж $[OF]$ је страница траженог правилног десетоугла.



Слика 5.12. б)

Ако сада опишемо кружницу $k(B, |OE|)$ (слика 5.12. б)) и са L означимо пресек са датом кружном $k(O, r)$, добићемо дуж $[FL]$ која је страница правилног петоугла.

Доказ: Странице правилног петоугла и десетоугла преко полупречника описаног круга изражавају се на следећи начин:

$$a_5 = r \times \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}, \quad a_{10} = r \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Означимо са Н средину дужи $[OB]$. Тада је $|HC| \perp |HF|$ па је троугао $\triangle FHC$ правоугли, а одатле следи да је:

$$(OF + OH)^2 + HC^2 = CF^2$$

Како је $|HC| = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (AC је станица једнакостраничног троугла уписаног у кружницу $k(O, r)$), а

$$|CF| = |OE| = r\sqrt{2}$$

па је

$$(OF + \frac{r}{2})^2 + (\frac{r\sqrt{3}}{2})^2 = (r\sqrt{2})^2.$$

Добијамо да је

$$|OF| = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Из правоуглог троугла $\triangle FOL$ следи:

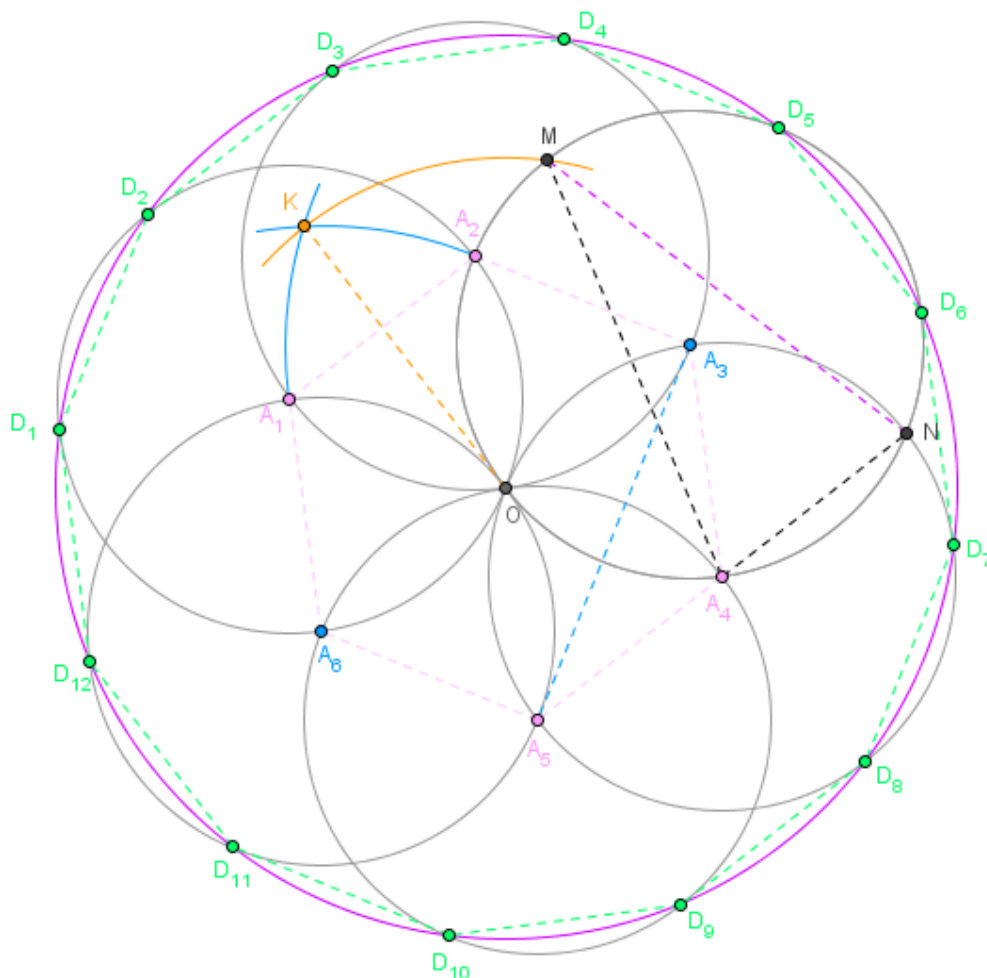
$$|FL|^2 = |OF|^2 + |OL|^2$$

$$|FL|^2 = \frac{r^2(10 - 2\sqrt{5})}{4}$$

тј.

$$|FL| = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Задатак 13. Конструисати правиан дванаестоугао ако је задата његова страница a .



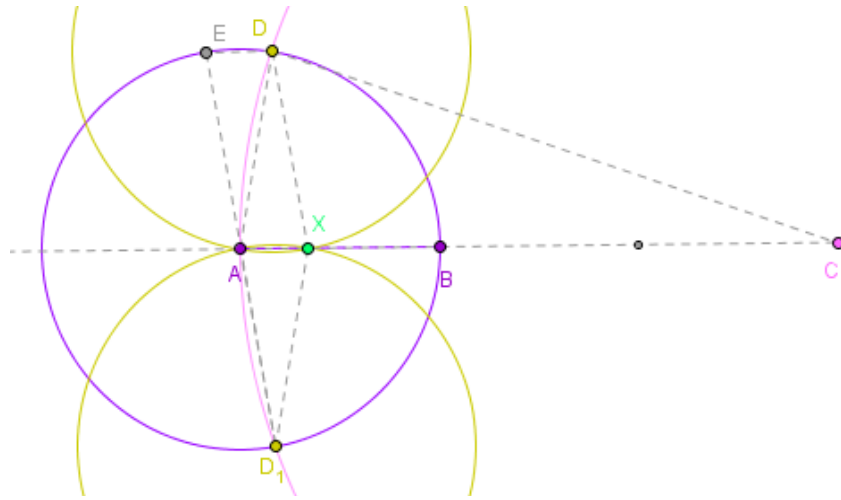
Слика 5.13.

Конструкција: Најпре опишимо кружницу $k(O, a)$ и конструишимо правиан шестоугао уписан у ту кружницу (слика 5.13.). Обележимо са K једну од пресечних тачака кружница са центрима у A_3 и A_6 полупречника $A_3A_5 = A_4A_6 = a\sqrt{3}$. Тада је $|OK| = a\sqrt{2}$. Нека је M једна од пресечних тачака кружнице $k(O, |OK|)$ и кружнице $k(A_3, a)$.

Доказ: У кружници $k(A_3, a)$ троугао VA_4MN је једнакокраки, при чему је угао $\angle A_4MN = 30^\circ$ као периферијски, па је $|A_4M| = |MN|$ полупречник круга у коме је $|A_4N| = a$ страница правилног дванаестоугла. Дакле, када се опише кружница $k(O, |MN|)$ у пресеку са кружницама чији су центри у тачкама $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, добијају се темена правилног дванаестоугла.

Задатак 14. Конструисати дуж n пута мању од дате дужи $[AB]$, тј. поделити дуж $[AB]$ на n једнаких делова, $n \in \mathbb{N}$.

І начин:



Слика 5.14. а)

Конструкција: Претпоставимо да је $n = 3$. Конструкција за сваки природан број n је аналогна. Конструирамо дуж $[AC] = n[AB]$ (задатак 3), у нашем случају $[AC] = 3[AB]$ (слика 5.14. а)). Опишимо кружницу $k(C, |AC|)$, она сече кружницу $k(A, |AB|)$ у тачкама D и D_1 . Ако сада опишемо кружнице $k(D, |AB|)$ и $k(D_1, |AB|)$ у њиховом пресеку добијамо тачку X . $[AX]$ је тражена дуж која је три пута мања од дужи $[AB]$.

Тачка X припада правој $p(A, B)$. Увећавањем дужи $[AX]$ два пута, три пута, итд. до $n - 1$ пут (задатак 3), конструирамо тачке које деле дуж $[AB]$ на n једнаких делова.

Доказ: Из сличности једнакокраних троуглова $\triangle ACD$ и $\triangle ADX$ (угао код темена A је заједнички), следи:

$$|AC| : |AD| = |AD| : |AX|,$$

односно

$$|AD|^2 = a^2 = |AC| \cdot |AX| = na \cdot |AX|.$$

Тада је

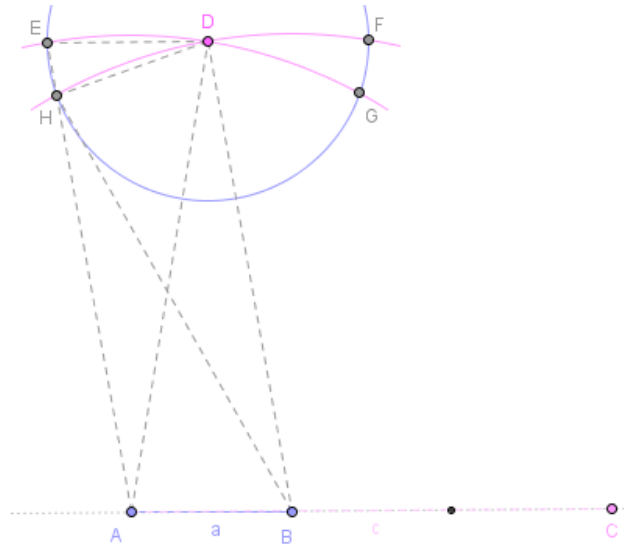
$$|AX| = \frac{1}{n} |AB|.$$

II начин:

Конструкција: Конструирамо дуж $[AC] = n[AB]$. Затим опишемо кружнице $k(A, |AC|)$, $k(C, |AC|)$, $k(A, |AB|)$ и $k(C, |AB|)$ које се секу у тачкама D и E (слика 5.14. б)). Ако затим опишемо кружнице $k(D, |AB|)$ и $k(C, |DE|)$ у пресеку добијамо тачку F такву да је $[AF] = \frac{1}{n}[AB]$.

$$|AF| = \frac{1}{n} |AB|.$$

37



Слика 5.14. ц)

Конструкција: Конструиримо дуж $[AC] = n[AB]$ као у предходна два начина (слика 5.14. ц)). Опишимо кружнице $k(A, |AC|)$ и $k(B, |AC|)$. Бирамо једну од тачака пресека, нека је то тачка D и опишимо кружницу $k(D, |AB|)$ која сече предходне кружнице у тачкама E и H . Дуж $[EH]$ је тражена дуж.

Доказ:

$$\triangle ADE \cong \triangle BDH$$

па је

$$\angle ADB = \angle EDH.$$

Из сличности једнакокраних троуглова $\triangle ADB$ и $\triangle EDH$ можемо закључити:

$$|EH| : |ED| = |AB| : |AD|$$

односно

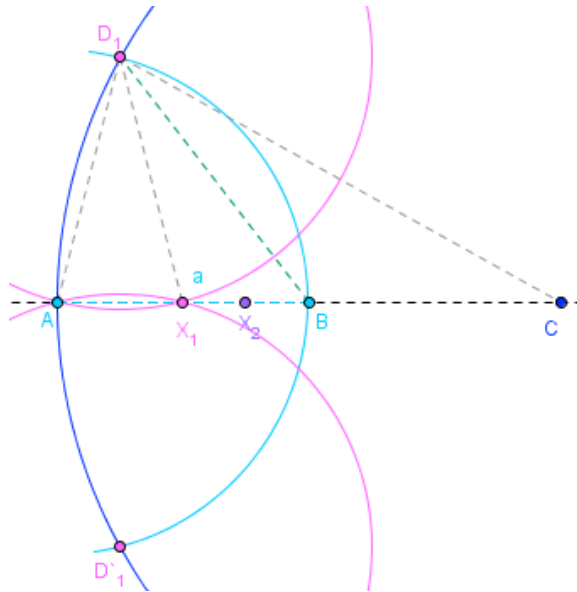
$$|EH| : a = a : na.$$

Очигледно је

$$|EH| = \frac{1}{n}a = \frac{1}{n}|AB|. \quad ([21])$$

Задатак 15. Конструисати дуж 2^n пута краћу од дате дужи $[AB]$, $n = 1, 2, 3, \dots$

I начин:



Слика 5.15. а)

Конструкција: Конструисамо дуж $[AC] = 2[AB]$ (задатак 3). Опишимо кружницу $k(C, |AC|)$ и означимо са D_1 и D_1' тачке пресека са кружницом $k(A, |AB|)$ (слика 5.15. а)). Ако затим опишемо кружнице $k(D_1, |AD_1|)$ и $k(D_1', |AD_1'|)$ у пресеку добијамо тачку X_1 . Дуж $[BX_1]$ је тражена ($[BX_1] = \frac{1}{2}[AB]$).

Затим опишимо кружнице $k(A, |BD_1|)$. У пресеку са кружницом $k(C, |AC|)$ добијамо тачке D_2 и D_2' . Ако опишемо кружнице $k(D_2, |AD_2|)$ и $k(D_2', |AD_2'|)$ и њихов пресек обележимо са X_2 . Дуж $[BX_2]$ је тражена ($[BX_2] = \frac{1}{2^2}[AB]$).

Ако сада опишемо кружнице $k(A, |BD_2|)$, $k(D_3, |AD_3|)$ и $k(D_3', |AD_3'|)$, добијамо тачку X_3 . Дуж $[BX_3]$ је тражена ($[BX_3] = \frac{1}{2^3}[AB]$) итд.

Доказ: Нека је $|AB| = a$. Из сличности једнакокраких троуглова $\triangle ACD_1$ и $\triangle AD_1X_1$ следи:

$$|AD_1| : |AC| = |AX_1| : |AD_1|$$

или

$$a : 2a = |AX_1| : a$$

односно

$$|AX_1| = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|AB| = |BX_1|.$$

Уведимо ознаке $|BD_k| = m_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Дуж $[BD_1]$ је средња линија троугла $\triangle ACD_1$, следи,

$$4|BD_1|^2 = 2|AD_1|^2 + 2|CD_1|^2 - |CA|^2,$$

или

$$4m_1^2 = 2a^2 + 2|AC|^2 - |AC|^2 = 2a^2 + |AC|^2 = 2a^2 + 4a^2.$$

Значи,

$$m_1^2 = |BD_1|^2 = \frac{1+2}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

Из сличности једнакостраничних троуглова $\triangle ACD_2$, и $\triangle AD_2X_2$, добијамо

$$|AD_2| : |AC| = |AX_2| : |AD_2|,$$

И узимајући у обзир да је $|AD_2| = |BD_1| = m_1$ и $|AC| = 2a$, добијамо

$$|AX_2| = \frac{3}{4}a \text{ или } |BX_2| = \frac{1}{4}a = \frac{1}{2^2}|AB|.$$

Аналогно добијамо

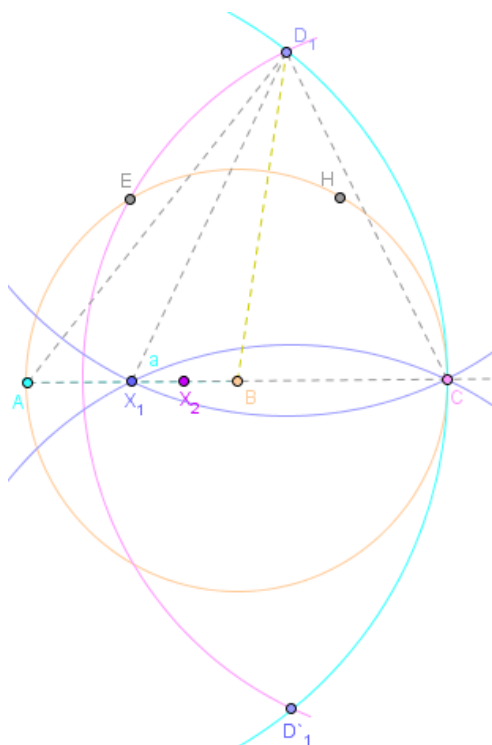
$$m_2^2 = \frac{1+2+2^2}{2^2}a^2 \text{ и } |BX_3| = \frac{1}{2^3}|AB|, \text{ итд.}$$

Уопштено:

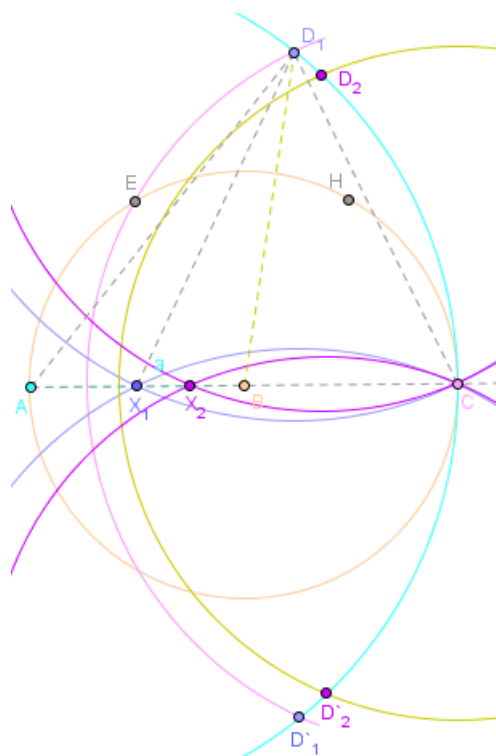
$$m_{k-1}^2 = \frac{1+2+2^2+\dots+2^{k-1}}{2^{k-1}}a^2 \text{ и } |BX_k| = \frac{1}{2^k}|AB|.$$

Тачка X_n лежи на дужи $[AB]$. Да бисмо дуж $[AB]$ поделили на 2^n једнаких делова, потребно је дуж $[BX_n]$ увећати $2, 3, \dots, 2^n - 1$ пута. Добијене тачке деле дуж $[AB]$ на 2^n једнаких делова. ([13])

II начин:



Слика 5.15. б)



Слика 5.15. ц)

Конструкција: На кружници $k(B, a)$ конструишимо тачку C дијаметрално супротну тачки A ($|AE| = |EH| = |HC| = a$), тада је $|AC| = 2|AB|$. Описујемо кружнице $k(A, |AC|)$ и $k(C, |CE|)$ и означимо са D_1 и D_1' тачке њиховог пресека. Тражена тачка X_1 је у пресеку кружница $k(D_1, |CD_1|)$ и $k(D_1', |CD_1'|)$. Очигледно, $[BX_1] = \frac{1}{2}[AB]$ (слика 5.15. б)).

Описујемо кружницу $k(C, |BD_1|)$ која сече кружницу $k(A, |AC|)$ у тачкама D_2 и D_2' . Ако затим опишемо кружнице $k(D_2, |CD_2|)$ и $k(D_2', |CD_2'|)$, то у пресеку добијамо тражену тачку X_2 . Дуж $[BX_2]$ је тражена ($[BX_2] = \frac{1}{2^2} [AB]$) (слика 5.15. ц)).

Аналогно, описивањем кружница $k(C, |BD_2|)$, $k(D_3, |CD_3|)$ и $k(D'_3, |CD'_3|)$ добијамо тачку X_3 . Дуж $[BX_3]$, је тражена $([BX_3] = \frac{1}{2^3}[AB])$ итд.

Доказ: Из сличности једнакокраких троуглова $\triangle ACD_1$ и $\triangle CD_1X_1$ добијамо

$$|CX_1| : |CD_1| = |CD_1| : |AC|.$$

Узимајући у обзир да је $|CD_1| = |CE| = a\sqrt{3}$, добијамо да је $|CX_1| = \frac{3}{2}a$, значи,
 $|BX_1| = \frac{1}{2}|AB|.$

Уведимо ознаке $|BD_k| = m_k$, где је $k = 1, 2, \dots, n$.

Дуж $[BD_1]$ је средња линија троугла $\triangle ACD_1$, следи

$$\begin{aligned} 4|BD_1|^2 &= 4m_1^2 = 2|AD_1|^2 + 2|CD_1|^2 - |AC|^2 = \\ &= 2|AC|^2 + 2|CE|^2 - |AC|^2 = \\ &= 4a^2 + 2 \times 3a^2 \end{aligned}$$

или

$$m_1^2 = (1 + \frac{3}{2})a^2.$$

На основу сличности једнакокраких троуглова $\triangle ACD_2$ и $\triangle AD_2X_2$, имамо

$$|CX_2| : |CD_2| = |CD_2| : |AC|.$$

Затим, како је $|CD_2| = |BD_1| = m_1$ и $|AC| = \frac{1}{2}|AB| = a$, добијамо

$$|CX_2| = \frac{|CD_2|^2}{|AC|} = \frac{m_1^2}{2a} = \frac{5}{2^2}a.$$

Следи,

$$|BX_2| = \frac{1}{2^2}|AB|.$$

На исти начин добијамо

$$m_2^2 = |BD_2|^2 = \frac{9}{4}a^2, |CX_3| = \frac{9}{8}a \text{ и } |BX_3| = \frac{1}{2^3}|AB| \text{ итд.}$$

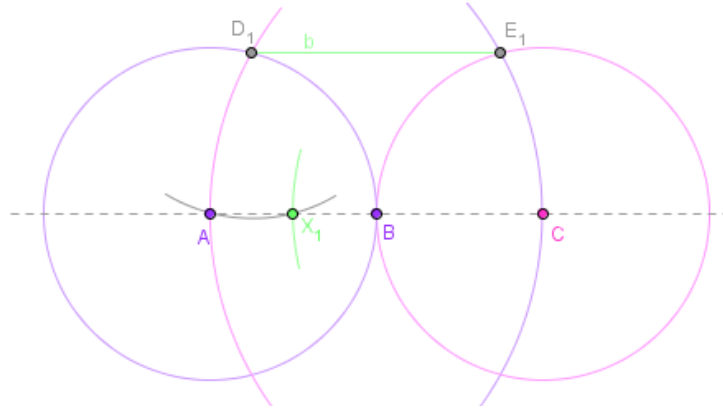
Генерално важи

$$m_{k-1}^2 = |BD_{k-1}|^2 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{k-1}})a^2$$

и

$$|BX_k| = \frac{1}{2^k} a = \frac{1}{2^k} |AB|. \quad ([13])$$

III начин:



Слика 5.15. д)

Конструкција: Конструирајмо дуж $[AC] = 2[AB]$. Описујемо кружнице $k(A, |AC|)$ и $k(C, a)$, једну тачку њиховог пресека означимо са E_1 , затим опишимо кружнице $k(C, |AC|)$, $k(A, a)$ и једну тачку пресека означимо са D_1 (слика 5.15. д)). У пресеку кружница $k(D_1, |AD_1|)$ и $k(C, |D_1E_1|)$ добијамо тачку X_1 . Дуж $[BX_1]$ је тражена ($[BX_1] = \frac{1}{2}[AB]$).

Настављајући даље, у пресеку кружница $k(D_2, |AD_2|)$ и $k(C, |D_2E_2|)$ добијамо тачку X_2 . Дуж $[BX_2]$ је тражена ($[BX_2] = \frac{1}{2^2}[AB]$) итд.

Доказ: Нека је $|BD_k| = m_k$, где је $k = 1, 2, \dots, n$. Тачка X_1 лежи на правој $p(A, C)$, како је $AC \parallel D_1E_1$ фигура ACD_1E_1 је трапез, а како је $CX_1 \parallel D_1E_1$ фигура $CD_1E_1X_1$ је паралелограм, па закључујемо да је $CX_1 \parallel AC$. Аналогно закључујемо да и тачке $X_2, X_3, \dots$ припадају правој $p(A, C)$.

Фигура ACD_1E_1 је једнакокраки трапез ($|AD_1| = |CE_1|$), тако да можемо писати $|AM| = |MX_1|$, где је $MD_1 \perp AC$ и $|X_1C| = |D_1E_1|$. Следи:

$$|AD_1| = |D_1X_1| = |AD_1'| = |D_1'X_1| = a.$$

Аналогно, закључујемо

$$|AD_2| = |D_2X_2| = |AD_2'| = |D_2'X_2| = m_1,$$

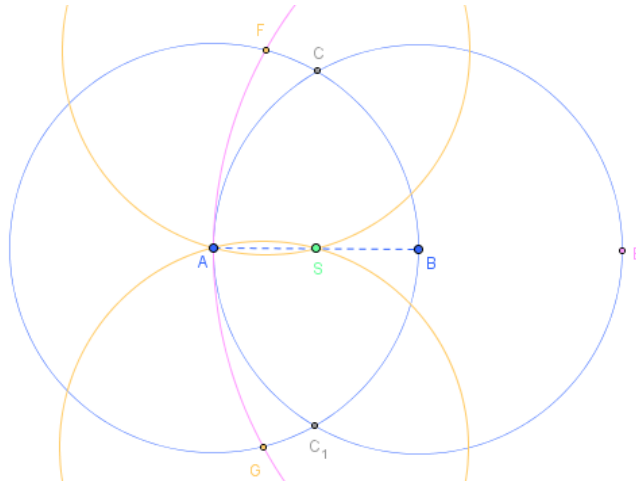
.....

$$|AD_k| = |D_k X_k| = |AD_k'| = |D_k' X_k| = m_{k-1}.$$

Понављајући дословно доказ из начина I, добијамо

$$|BX_1| = \frac{1}{2}|AB|, |BX_2| = \frac{1}{2^2}|AB|, \dots, |BX_k| = \frac{1}{2^k}|AB|. \quad ([13])$$

Задатак 16. Конструисати средиште дате дужи $[AB]$.



Слика 5.16.

Конструкција: Одредимо пресеке кружница $k(A, |AB|)$ и $k(B, |AB|)$, нека су то тачке C и C_1 (слика 5.16). Затим одредимо дијаметрално супротну тачку E тачки A . Тачке A, B, E су колинеарне и $|AE| = 2|AB|$. Затим одредимо тачке F и G као пресек кружница $k(E, |AE|)$ и $k(A, |AB|)$, на крају нађемо пресек кружница $k(F, |AB|)$ и $k(G, |AB|)$ и добијемо тражену тачку S која је средиште дужи $[AB]$.

Доказ: Троуглови $\triangle AFS$ и $\triangle AEF$ су слични (једнакокраки са заједничким углом $\angle FAS$). Тада је:

$$|AF| : |AE| = |AS| : |AF|,$$

тј.

$$|AB| : 2|AB| = |AS| : |AB|,$$

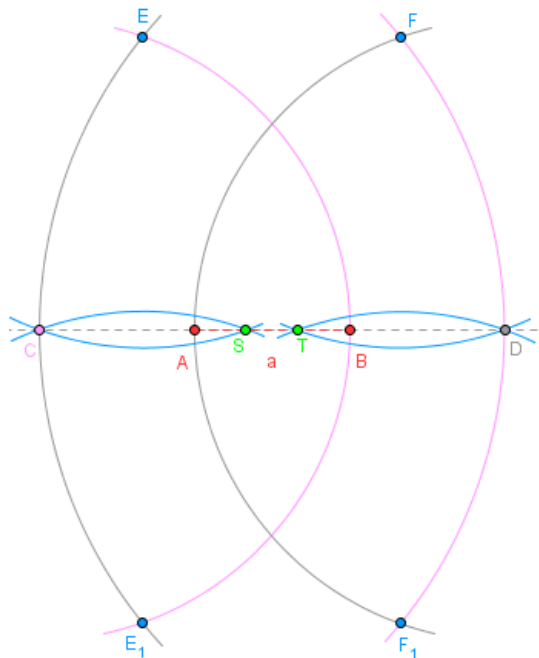
па је

$$|AS| = \frac{1}{2}|AB|.$$

И одавде следи да је S средиште дужи AB .

Задатак 17. Поделити дуж $[AB]$ на три једнака дела.

Размотрићемо конструкцију коју је дао Маскерони.



Слика 5.17.

Конструкција: Конструирамо на правој $p(A, B)$ тачке C и D такве да је $|CA| = |AB| = |BD|$ (задатак 3). Затим опишимо кружнице $k(C, |CB|)$, $k(C, |CD|)$, $k(D, |AD|)$ и $k(D, |CD|)$ (слика 5.17.). У пресеку добијамо тачке E , E_1 , F и F_1 . У пресеку кружница $k(E, |CE|)$ и $k(E_1, |CE_1|)$, $k(F, |DF|)$ и $k(F_1, |DF_1|)$ добијамо редом тачке S и T , које деле дуж $[AB]$ на три једнака дела.

Доказ: Из сличности једнакокраких троуглова $\triangle CES$ и $\triangle CDE$ следи:

$$|CS| : |CE| = |CE| : |CD|$$

Приметимо следеће:

$$|CE| = 2|AB| \text{ и } |CD| = 3|AB|,$$

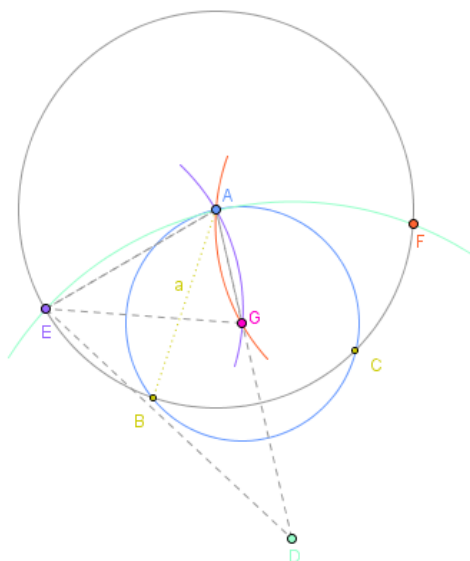
Отуда је

$$|CS| = \frac{4}{3}|AB|$$

На крају добијамо да је

$$|AS| = \frac{1}{3}|AB|.$$

Задатак 18. Конструисати центар дате кружнице.



Слика 5.18.

Конструкција: На кружници одаберемо произвољну тачку A (слика 5.18.) и око ње опишимо кружни лук полупречника d ($r < d < 2r$). Нека су тачке B и C пресеци са кружницом k . Кружнице $k(B, |AB|)$ и $k(C, |AB|)$ секу се још у тачки D . Кружница $k(D, |AD|)$ сече кружницу $k(A, |AB|)$ у тачкама E и F . Кружнице $k(E, |AE|)$ и $k(F, |AE|)$ секу се у тачки G која је тражена тачка, тј. центар кружнице k .

Доказ: Због симетрије, тачка G лежи на правој $p(A, D)$. Троуглови $\triangle AGE$ и $\triangle ADE$ су слични јер су једнакокраки и имају једнаке углове $\angle AEG$ и $\angle ADE$. Тада је

$$|AG| : |AE| = |AE| : |AD|,$$

Tj.

$$|AG| = \frac{|AE|^2}{|AD|}.$$

С друге стране, нека је G_1 средиште дате кружнице. Тада су троуглови $\triangle ABG_1$ и $\triangle DAB$ слични јер су једнакокраки са заједничким углом $\angle BAD$. Због сличности важи

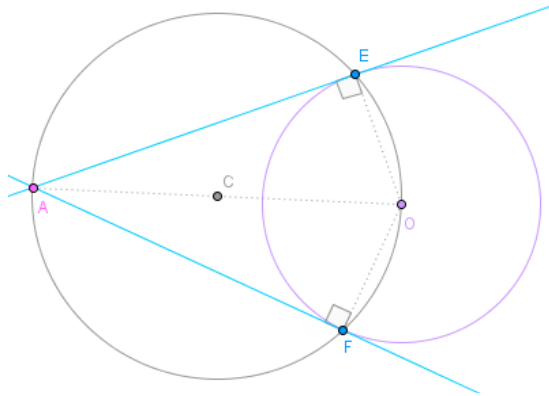
$$|\text{AG}_1| : |\text{AB}| = |\text{AB}| : |\text{AD}|,$$

Tj.

$$|AG_1| = \frac{|AB|^2}{|AD|} = \frac{|AE|^2}{|AD|} = |AG|.$$

Одавде следи да је $G \equiv G_1$.

Задатак 19. Из дате тачке A конструисати тангенте на дату кружницу k са центром у тачки O полупречника OB .

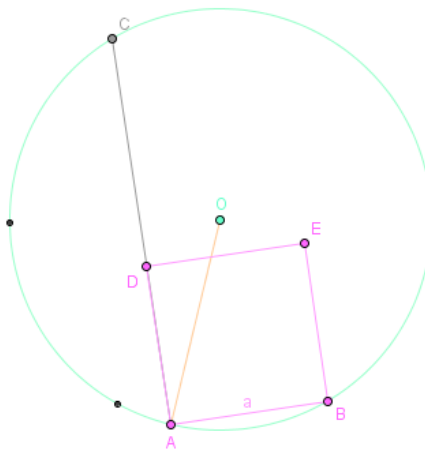


Слика 5.19.

Конструкција: Конструиримо средиште дужи AO , нека је то тачка C (слика 5.19.). Са центром у тачки C опишимо кружницу $k(C, |CO|)$ која сече дату кружницу k у тачкама E и F . Праве $p(A, E)$ и $p(A, F)$ су тражене тангенте.

Доказ: Углови $\angle AEO$ и $\angle AFO$, уписани у помоћну кружницу над пречником AO , су прави. Дакле, праве $p(A, E)$ и $p(A, F)$ су нормалне над полупречницима OE и OF дате кружнице k .

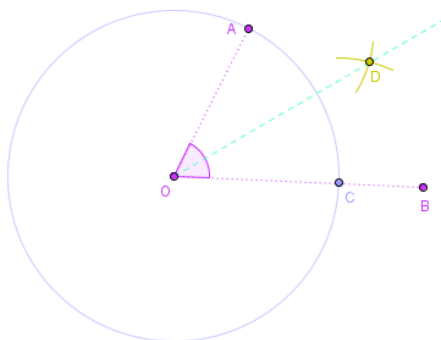
Задатак 20. Конструисати квадрат дате стране AB .



Слика 5.20.

Конструкција: Прво конструиримо CA као нормалу на AB (задатак 9). Онда примењујући конструкцију одређивања пресека кружнице и праве пронађимо на AC тачку D такву да је $AD = AB$ (слика 5.20.). Нацртајмо два лука полупречника AB , један са центром у тачки D , други са центром у тачки B . Лукови се секу у тачки E . Четвороугао $ABED$ је квадрат. ([14])

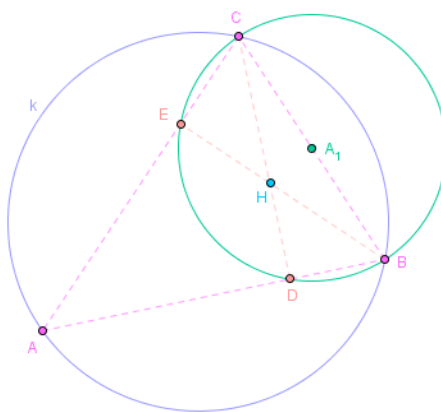
Задатак 21. Поделити дати угао $\angle AOB$ на пола.



Слика 5.21.

Конструкција: На правој $p(O, B)$ конструишимо тачку C такву да је $OC = OA$ (напомена у задатку 7). У тачкама A и C опишимо кружнице произвољног полупречника (слика 5.21.). Пресечну тачку обележимо са D . Права $p(O, D)$ дели дати угао на пола.

Задатак 22. Око датог троугла $\triangle ABC$ описана је кружница. Користећи само шестар конструисати ортоцентар датог троугла.

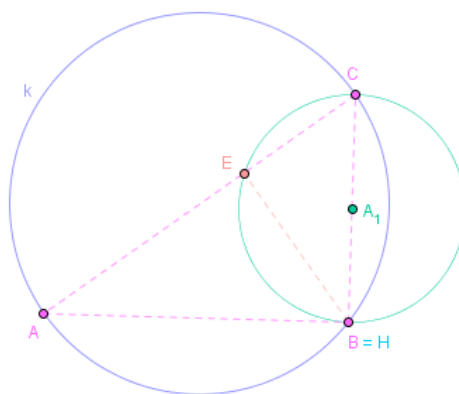


Слика 5.22. а)

Конструкција: Нека је k дата кружница и A , B и C дате тачке троугла на кружници (слика 5.22. а)). Конструишимо средиште A_1 дужи $[BC]$ (задатак 16) и опишимо кружницу $k(A_1, |A_1B|)$. Нека је тачка D пресек дужи $[AB]$ и кружнице $k(A_1, |A_1B|)$, а тачка E пресек дужи $[AC]$ и кружнице $k(A_1, |A_1B|)$ (задатак 7). Пресек дужи $[BE]$ и $[CD]$ обележимо са H (задатак 8). Тачка H је тражена тачка, тј. H је ортоцентар.

Доказ: Како је по конструкцији E тачка са праве $p(A, C)$ и $\angle BEC$ прав као угао над пречником, онда је $|BE|$ висина која одговара темену B .

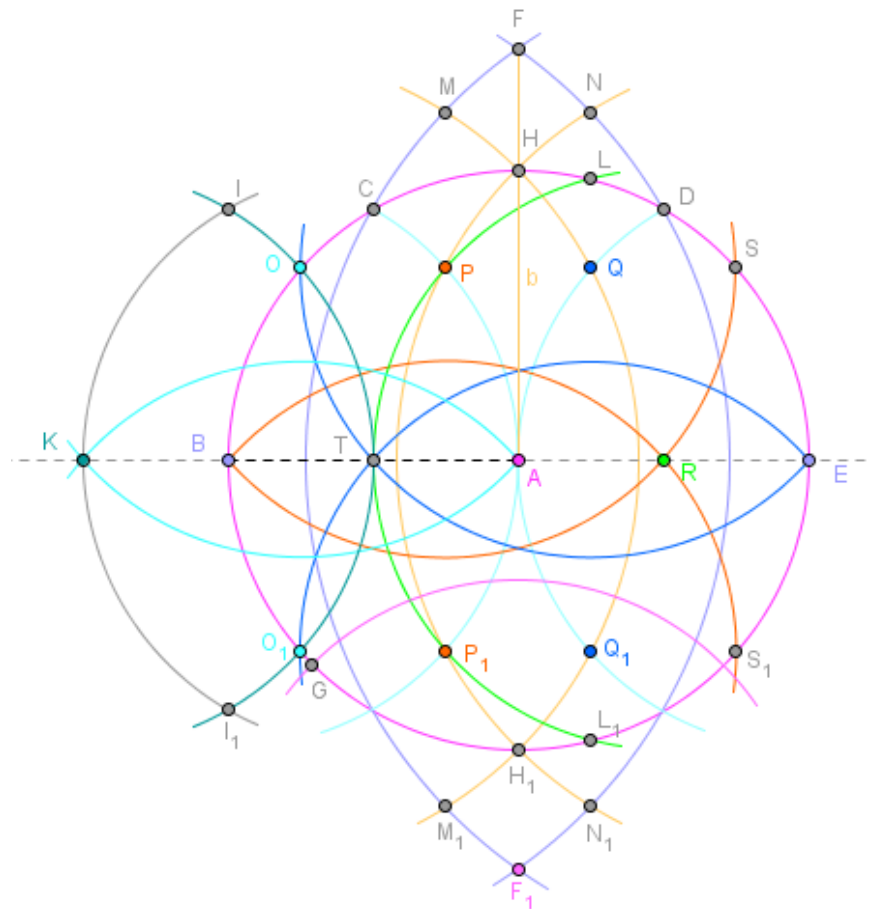
Слично, D је по конструкцији тачка са праве $p(A, B)$ и $\angle BDC$ је прав као угао над пречником дате кружнице, онда је $|CD|$ висина која одговара темену C . У преску висина $|CD|$ и $|BE|$ налази се ортоцентар.



Конструкција: На датој кружности $k(O, r)$ бирамо произвољну тачку B и одређујемо тачке A , C и D тако да је $AB = BC = CD = r$, једну од пресечних тачака кружница $k(A, |AC|)$ и $k(D, |DB|)$ означимо са E . Опишимо кружницу $k(B, |BE|)$ до пресека са кружницом $k(O, r)$. Обележимо са F тачку пресека. Дуж $[AF] \approx \frac{r\pi}{2}$. ([22])

Последњи задатак овог дела дајем без доказа.

Задатак 25. Конструисати дуж која је $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ пута дужа од дате дужи $[AB]$, где је $[AB] = 1$, $n = 1, 2, \dots, 25$.



Слика 5.25.

Конструкција: Опишимо кружницу $k(A, |AB|)$ и на њој одаберимо произвољну тачку B (слика 5.25.). Конструирамо тачку E дијаметрално супротну тачки B ($|BC| = |CD| = |DE| = 1$). Описујемо кружнице $k(B, |BD|)$ и $k(E, |EC|)$ и са F и F_1 означимо тачке пресека. Затим описујемо кружнице $k(B, |AF|)$ и $k(E, |AF|)$ које се секу са кружницом $k(A, |AB|)$ у тачкама H и H_1 , а кружнице $k(B, |BD|)$ и $k(E, |EC|)$ у тачкама N и N_1 , односно M и M_1 . Описујемо кружнице $k(E, |AE|)$ и $k(B, |AB|)$ и означимо са P , P_1 , Q и Q_1 тачке пресека са кружницама $k(B, |AF|)$ и $k(E, |AF|)$. Кружнице $k(P, |BP|)$ и

$k(P_1, |BP_1|)$ секу се у тачки R , а кружницу $k(A, |AB|)$ оне секу у тачкама S и S_1 . Такође, кружнице $k(Q, |EQ|)$ и $k(Q_1, |EQ_1|)$ секу се у тачки T , а кружницу $k(A, |AB|)$ секу у тачкама O и O_1 . Описујемо кружницу $k(R, |AB|)$ и означимо са L и L_1 пресек са кружницом $k(A, |AB|)$ и описујемо кружницу $k(F_1, |AB|)$ која сече у тачки G кружницу $k(A, |AB|)$. Затим описујемо кружнице $k(O, |AO|)$ и $k(O_1, |AO_1|)$ које се секу у тачки K . И, на крају, описујемо кружнице $k(K, |AB|)$ и $k(T, |AB|)$ и означимо са I и I_1 њихов пресек. Тада је:

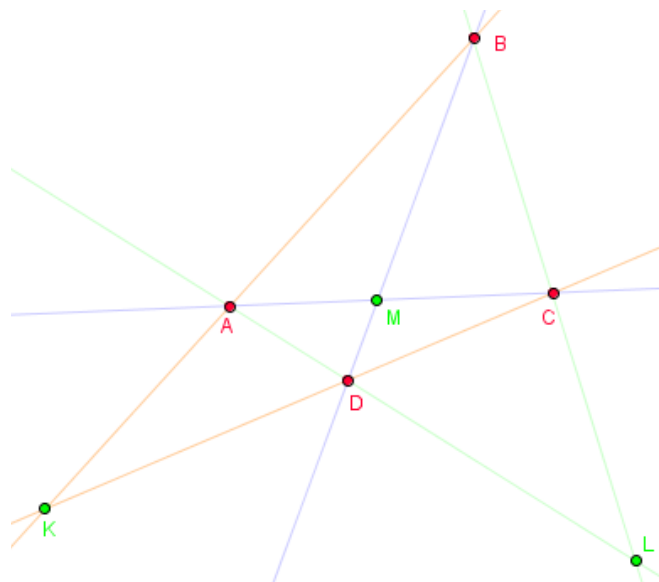
$$\begin{array}{lll}
|AT| = \frac{1}{2}\sqrt{1}, & |PT| = \frac{1}{2}\sqrt{2}, & |DR| = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\
|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{4}, & |HT| = \frac{1}{2}\sqrt{5}, & |AM| = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \\
|QQ_1| = \frac{1}{2}\sqrt{7}, & |AF| = \frac{1}{2}\sqrt{8}, & |BR| = \frac{1}{2}\sqrt{9}, \\
|BL| = \frac{1}{2}\sqrt{10}, & |PS_1| = \frac{1}{2}\sqrt{11}, & |BD| = \frac{1}{2}\sqrt{12}, \\
|HK| = \frac{1}{2}\sqrt{13}, & |BS| = \frac{1}{2}\sqrt{14}, & |LL_1| = \frac{1}{2}\sqrt{15}, \\
|BE| = \frac{1}{2}\sqrt{16}, & |FK| = \frac{1}{2}\sqrt{17}, & |KN| = \frac{1}{2}\sqrt{18}, \\
|KD| = \frac{1}{2}\sqrt{19}, & |FG| = \frac{1}{2}\sqrt{20}, & |I_1D| = \frac{1}{2}\sqrt{21}, \\
|KS| = \frac{1}{2}\sqrt{22}, & |MM_1| = \frac{1}{2}\sqrt{23}, & |MN_1| = \frac{1}{2}\sqrt{24}, \\
|KE| = \frac{1}{2}\sqrt{25}.
\end{array}$$

6 Извођење конструкција само лењиром

6.1 Конструкција лењиром неких праволинијских фигура

Најпре ћемо дати неке дефиниције у пројективној равни.

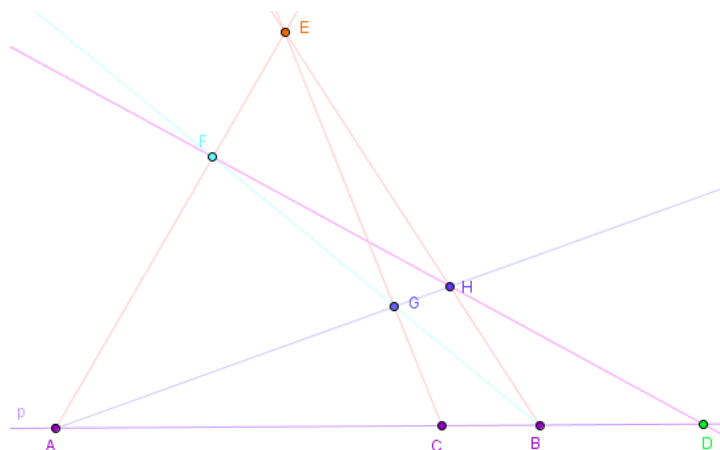
Дефиниција 6.1.1. Потпуни четворотеменик је фигура која се састоји од четири тачке, од којих никоје три нису колинеарне (A, B, C, D) и шест правих које су њима одређене. Поменуте тачке су темена четворотеменика, а поменуте праве су његове стране. Пар страна четворотеменика који се не сече у његовом темену је пар његових наспрамних страна. Три пара наспрамних страна потпуног четворотеменика секу се у његовим дијагоналним тачкама (K, L, M). Праве $p(K, L)$, $p(K, M)$, $p(L, M)$ су дијагонале потпуног четворотеменика. ([19])



Слика 6.1.1.

На горњој слици је приказан потпуни четворотеменик $ABCD$. Његова темена су обележена црвеном бојом, а дијагоналне тачке зеленом.

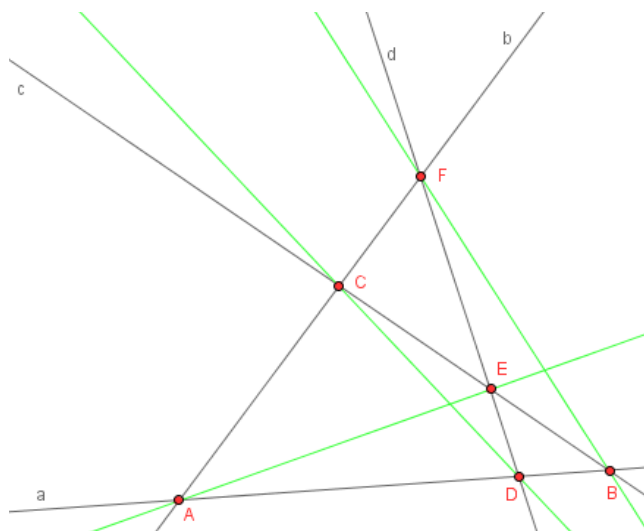
Дефиниција 6.1.2. Пар тачака A, B је хармонијски коњугован пару тачака C, D ако постоји потпуни четворотеменик $EFGH$ такав да су A и B његове дијагоналне тачке, док C и D припадају правој $p(A, B)$ и оним странама четворотеменика које пролазе кроз трећу дијагоналну тачку. ([19])



Слика 6.1.2.

Фигура која је у равни дуална потпуном четворотеменику је потпуни четвоространик.

Дефиниција 6.1.3. Потпуни четвоространик је фигура која се састоји од четири компланарне праве од којих никоје три нису конкурентне и шест тачака које су њима одређене. Наведене праве су стране потпуног четвоространика, а наведене тачке су његова темена. Темена која не припадају истој страни четвоространика су његова наспрамна темена. Три пара наспрамних темена потпуног четвоространика одређују његов дијагонални тространик. ([19])



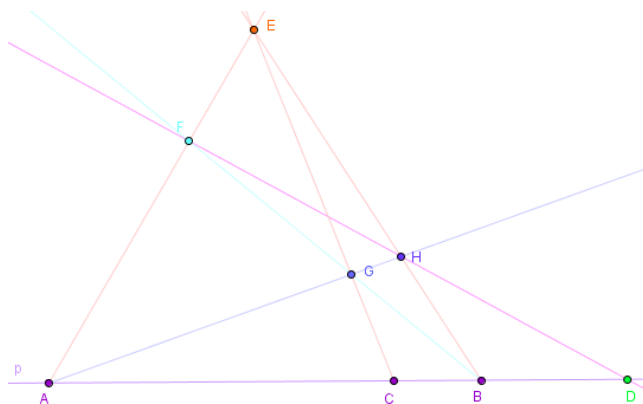
Слика 6.1.3.

На горњој слици је приказан потпуни четвоространик $abcd$. Његова темена су обележена црвено, а наспрамна темена су она која су спојена зеленим правима.

Задатак 1. На правој p дате су три тачке A , B и C . На правој p одредити тачку D , такву да тачка D дели дуж $[AB]$ у истој размери спољашњом (унутрашњом) поделом у којој је тачка C дели унутрашњом (спољашњом) поделом, користећи само лењир. ([21])

Анализа: Разликујемо два случаја.

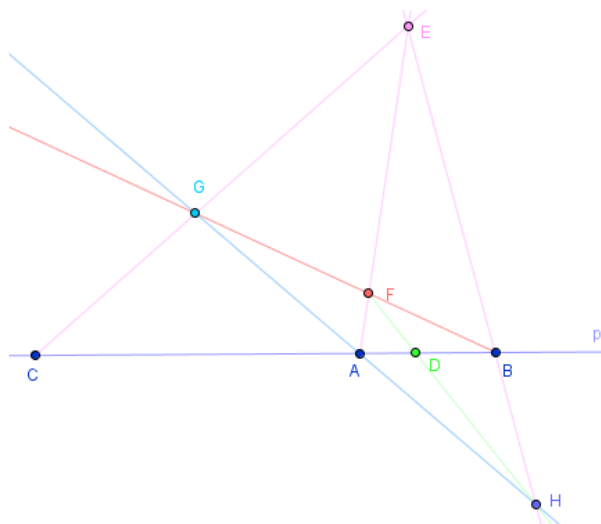
1. случај: Тачка C представља унутрашњу тачку дужи $[AB]$, тада је тачка D спољашња.



Слика 6.1. а)

Конструкција: Кроз тачку A повуцимо две произвољне праве (слика 6.1. а)). Кроз тачку C повуцимо трећу произвољну праву и нека она сече прве две у тачкама E и G . Права $p(B, E)$ сече праву $p(A, G)$ у тачки H , а права $p(B, G)$ сече праву $p(A, E)$ у тачки F . Тачка D се налази у пресеку правих $p(A, B)$ и $p(F, H)$. ([21])

2. случај: Тачка C се налази на правој $p(A, B)$, тј. не припада дужи $[AB]$ (слика 6.1.б)).



Слика 6.1. б)

Напомена: Ово је једина од свих конструкција која се изводи само једним лењиром, где не мора да буде задато ништа додатно. У свим осталим конструкцијама мора да буде дато још неко помоћно средство: круг са центром, паралелна права, паралелограм, средиште дужи... Овде не мора да буде задато баш ништа.

6.2 Конструкција лењиром, ако су дате две паралелне праве

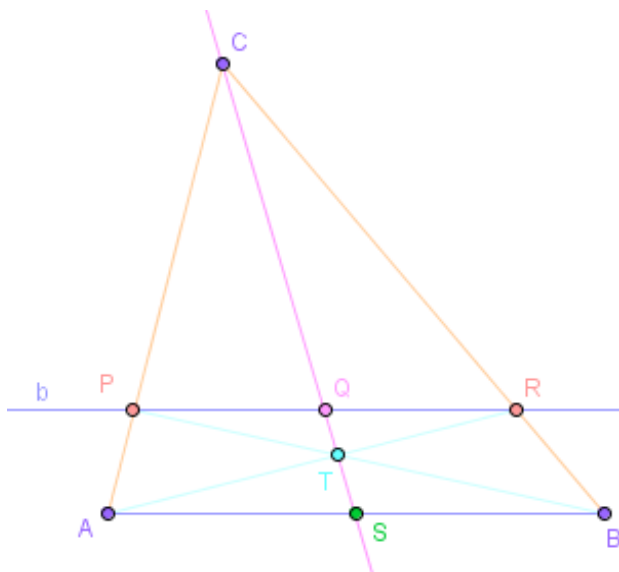
У дањем раду често ћемо користити следећу теорему:

Теорема 6.2.1. Права, која пролази кроз тачку пресека дијагонала трапеца и кроз тачку пресека непаралелних страна, дели напола паралелне стране трапеца.

Доказ ове теореме дат је у следећем задатку.

Задатак 2. Дата је дуж $[AB]$ и њој паралелна права b . Користећи само лењир, одредити средиште дужи $[AB]$.

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ произвољан троугао, тачка S средиште дужи $[AB]$ и b права паралелна са дужи $[AB]$ таква да сече дужи $[CA]$, $[CS]$ и $[CB]$ редом у тачкама P , Q и R . Тада је јасно да је $[AB] \cong [QR]$. Нека је тачка T пресек дужи $[AR]$ и $[SC]$. Докажимо да су тачке P , T , B на једној правој. Из сличности троуглова $\triangle TAS$ и $\triangle TQR$ следи $TS:TQ = AS:QR = BS:PQ$. Сада за $\triangle TSB$ и $\triangle TQP$ имамо $\angle TSB = \angle TQP$ и $ST:QT = SB:QP$ па су ови троуглови слични, и важи $\angle STB = \angle QTP$, одакле следи да су тачке P , T , B колинеарне.



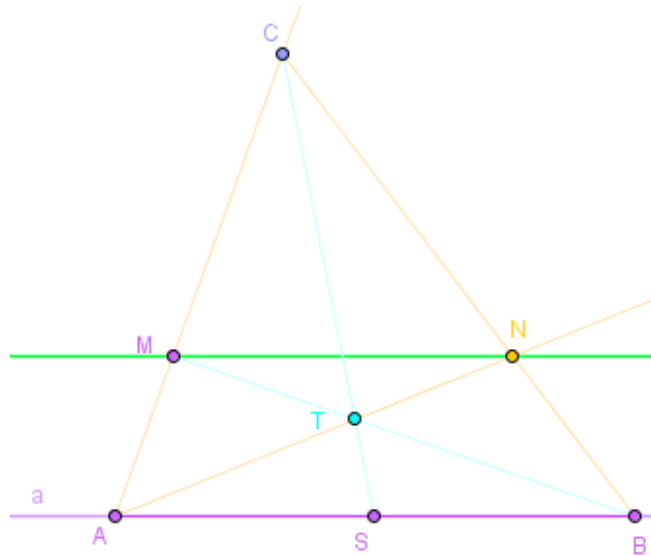
Слика 6.2.

Конструкција: Дата је дуж $[AB]$ и права b (слика 6.2.). Означимо са C неку тачку са оне стране праве b са које није $[AB]$. Нека су P и R тачке пресека редом дужи $[CA]$ и $[CB]$ са правом b . Нека је T тачка пресека дужи $[AR]$ и $[BP]$. Права $p(C, T)$ сече дуж $[AB]$ у траженој тачки S .

Доказ: У анализи смо показали да су тачке C , Q , T и S на једној правој. Да бисмо одредили праву потребне су нам две тачке. У конструкцији имамо тачке C и T . Дакле, права $p(C, T)$ сече дужи $[PR]$ и $[AB]$ у њиховим средиштима.

Дискусија: Ова конструкција је увек једнозначна и задатак има јединствено решење.

Задатак 3. Ако је дата дуж $[AB]$ и њено средиште S , кроз дату тачку M ван праве која је одређена том дужи повући праву паралелну са том дужи, користећи само лењир.



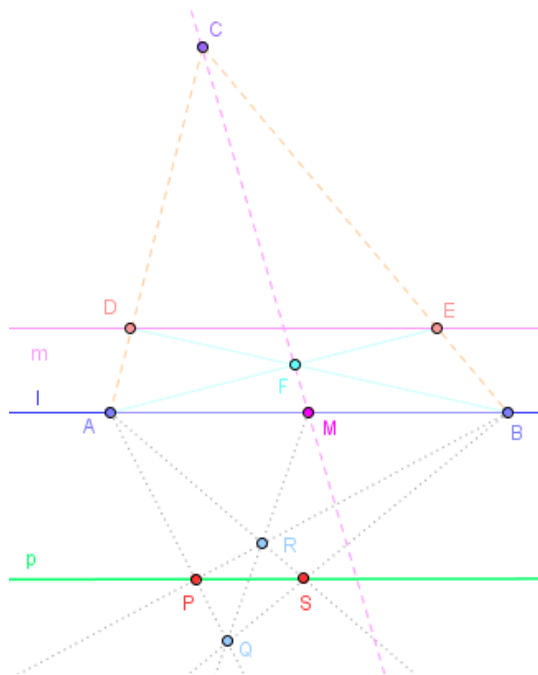
Слика 6.3.

Конструкција: Нека дуж $[AB]$ припада правој a и на правој $p(A, M)$ узмимо произвољну тачку C (слика 6.3.). Такође је дато и средиште S дужи $[AB]$. Нека је T пресечна тачка правих $p(S, C)$ и $p(B, M)$, а N пресек правих $p(C, B)$ и $p(A, T)$. Права $p(N, M)$ је паралелна правој $a = p(A, M)$.

Доказ: Претпоставимо да права која пролази кроз тачку M и паралелна је дужи $[AB]$, сече праву $p(B, C)$ у тачки N_1 . Нека је $T_1 = p(A, N_1) \cap p(B, M)$. Права $p(C, T_1)$ пролази кроз средиште дужи $[AB]$, тј. тачку S . Како је $T = p(B, M) \cap p(S, C)$ а $T_1 \in p(B, M)$ и $T_1 \in p(S, C)$, следи да је $T \equiv T_1$, тј. $N \equiv N_1$, па је $AB \parallel MN$.

Дискусија: Можемо да приметимо да је овај проблем у потпуности обрнут претходном. Решење је увек јединствено.

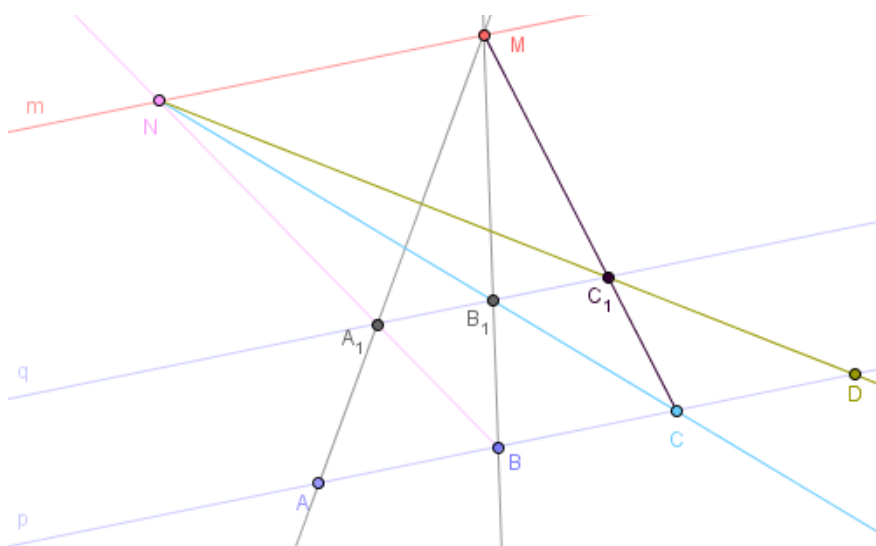
Задатак 4. Дате су две међусобно паралелне праве l и m и једна тачка P ван њих. Кроз тачку P , конструисати праву паралелну правима l и m користећи само лењир.



Слика 6.4.

Конструкција: На правој l одредимо произвољне тачке A и B (слика 6.4.). Пошто је дата права m која је са њом паралелна, можемо да конструисемо средиште M дужи $[AB]$ (задатак 2). Сада имамо дуж и њено средиште, па кроз тачку P можемо да конструисемо паралелну праву (задатак 3). ([21])

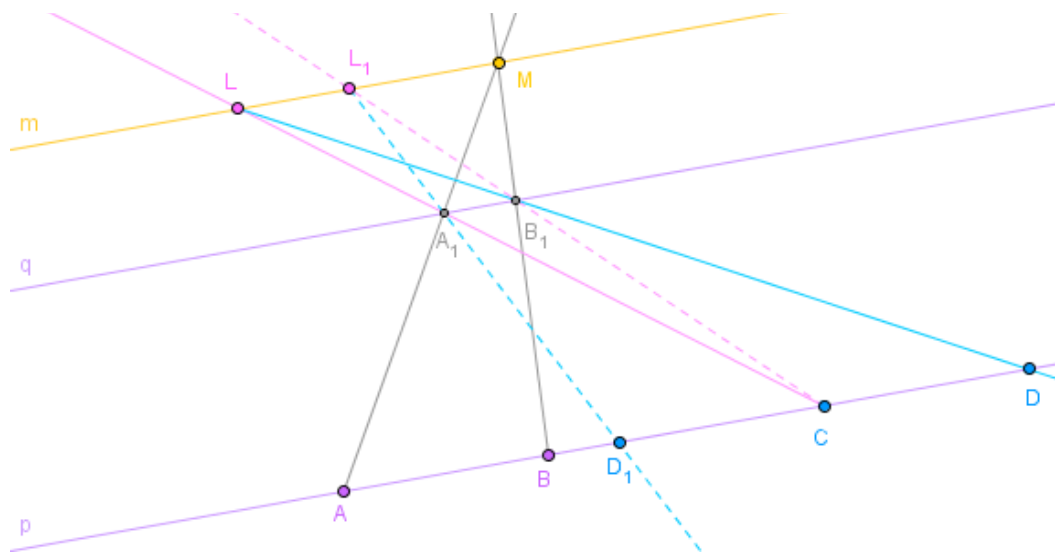
Задатак 5. Дате су две паралелне праве p и q и на правој p дуж $[AB]$. Увећати дуж $[AB]$ n пута.



Слика 6.5.

Конструкција: Кроз произвољну тачку M која не припада правама p и q конструишемо праву m паралелну правама p и q (задатак 4). Затим повучемо праве $p(M, A)$ и $p(M, B)$, оне секу праву q у тачкама A_1 и B_1 . Права $p(B, A_1)$ сече праву m у тачки N , а права $p(N, B_1)$ у тачки C . Тада је $[AB] = [BC]$ (слика 6.5.). Настављајући поступак добијамо дуж $[CD]$ итд.

Задатак 6. Дате су две паралелне праве p и q и на правој p дуж $[AB]$ и тачка C . Конструисати на p дуж $[CD]$ подударну са дужи $[AB]$.

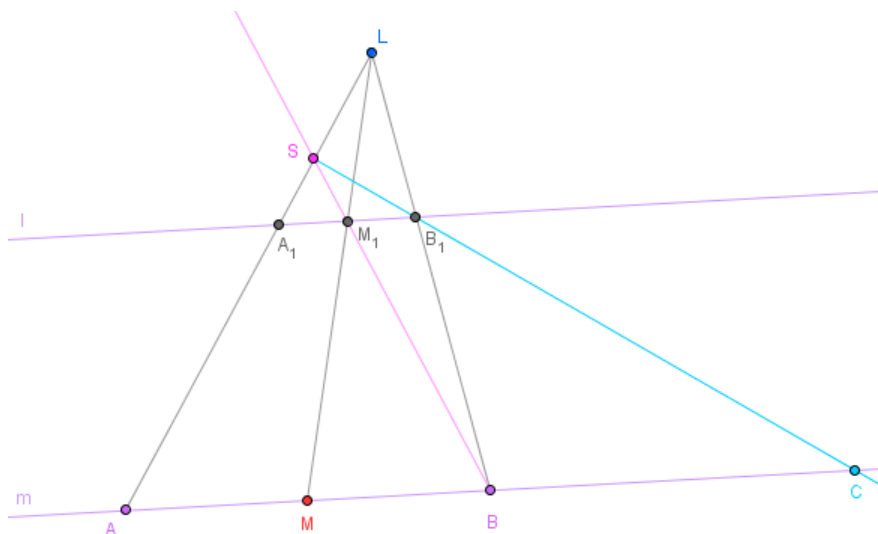


Слика 6.6.

Конструкција: Кроз произвољну тачку M која не припада правама p и q (слика 6.6.) конструишемо праву m паралелну са датим правама (задатак 4). Затим повучемо праве $p(M, A)$ и $p(M, B)$, оне секу праву q у тачкама A_1 и B_1 . Повучемо праву $p(C, A_1)$, која сече праву m у тачки L . Права $p(L, B_1)$ сече праву p у траженој тачки D .

Дискусија: Ова конструкција има два решења.

Задатак 7. Дате су две међусобно паралелне праве m и l и на правој m дуж $[AB]$. Користећи само лењир, конструисати на правој m тачку C , такву да је $[AB] \cong [BC]$.

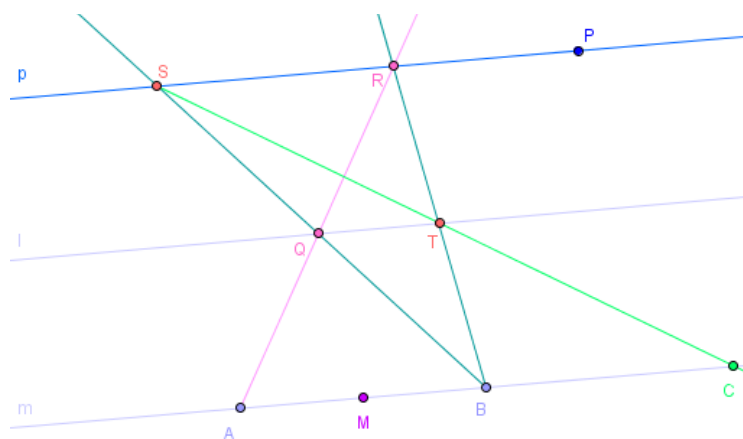


Слика 6.7. а)

Конструкција: Пошто је права l паралелна са правом m (слика 6.7. а)), можемо да конструишемо средиште дужи $[BA]$ (задатак 2). Нека је то тачка M . Уочимо произвољну тачку L ван правих m и l и повучимо праве $p(A, L)$, $p(B, L)$ и $p(M, L)$. Оне секу праву l у тачкама A_1 , B_1 и M_1 редом, а због сличности троуглова M_1 ће бити средиште дужи $[A_1B_1]$.

Сада означимо пресек правих $p(A, A_1)$ и $p(B, M_1)$ са S . Нека је пресек правих $p(S, B_1)$ и m тачка C . То је тражена тачка.

Овај проблем има и друго решење.



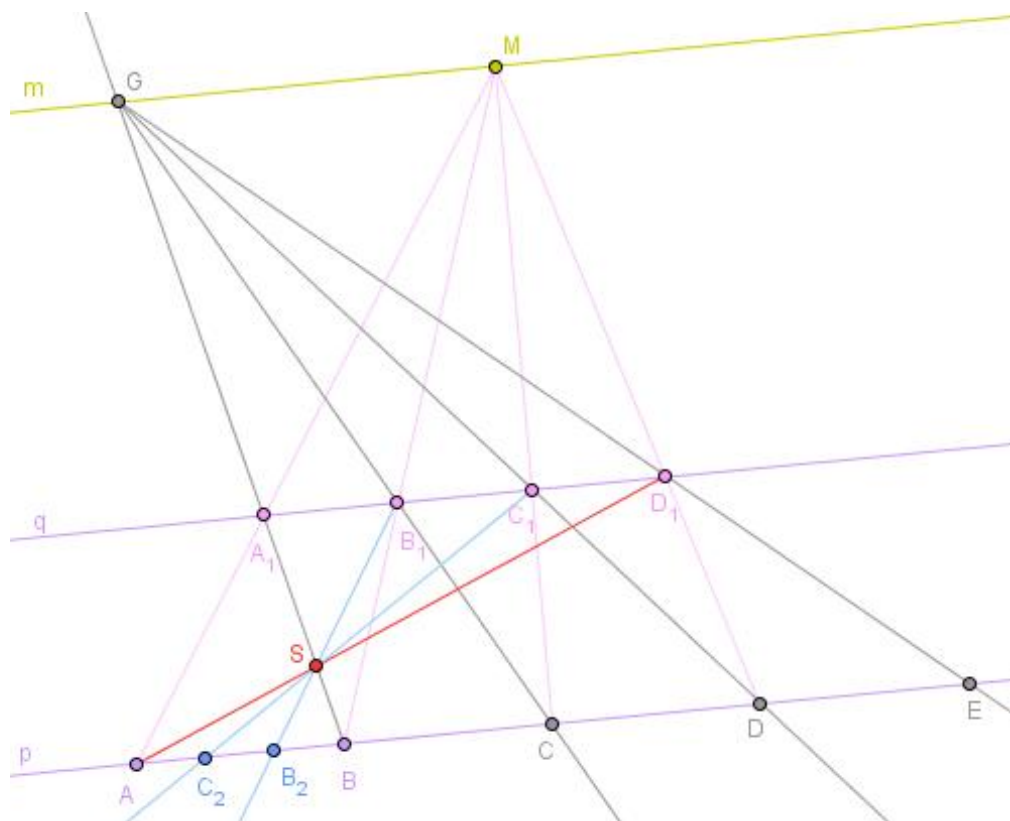
Слика 6.7. б)

Конструкција: Пошто су дате дуж $[AB]$ и паралелна права l , можемо конструисати средиште M те дужи и кроз произвољну тачку P можемо да конструишемо још једну праву p која је са њима паралелна (задатак 4). Кроз тачку A повучемо произвољну праву која сече

праве l и p у тачкама Q и R редом. Права $p(B, Q)$ сече p у тачки S , а права $p(B, R)$ сече l у тачки T . У пресеку m и праве $p(S, T)$ се налази тражена тачка C (слика 6.7. б)).

Напомена: Било којом од ових метода, могуће је конструисати дуж која има дужину n пута већу од дате, понављајући било који од ових поступака $n - 1$ пут.

Задатак 8. Дате су две паралелне праве p и q и на правој p дуж $[AB]$. Поделити дуж на n једнаких делова.



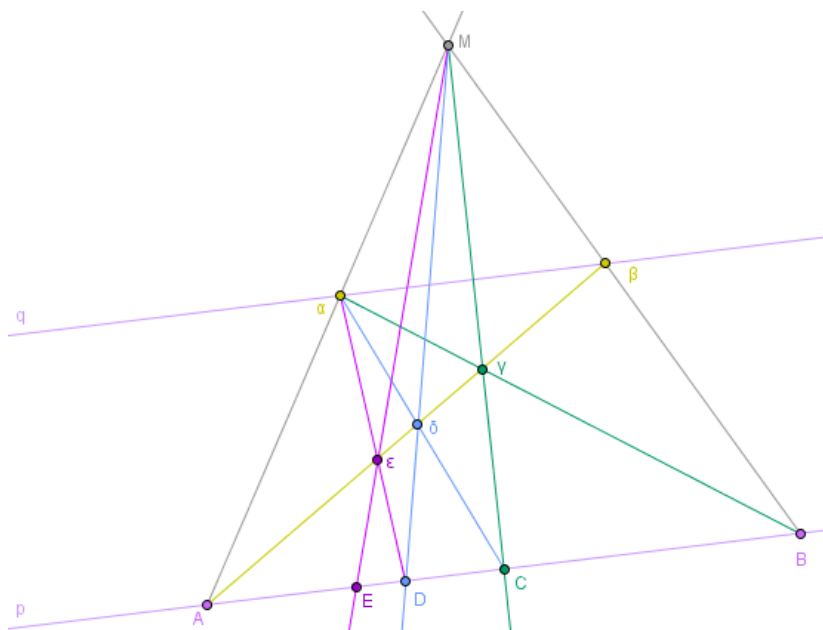
Слика 6.8.

Конструкција: Претпоставимо да желимо да поделимо дуж $[AB]$ на три једнака дела. Прво увећамо дуж $[AB]$ три пута, као у задатку 5. На правој q добијамо такође међусобно подударне дужи $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$, $[C_1D_1]$ (слика 6.8.). Затим, повучемо праву $p(A, D_1)$ и у пресеку са правом $p(A_1, B)$ добијамо тачку S . На крају, повучемо праве $p(B_1, S)$ и $p(C_1, S)$, које деле дуж $[AB]$ на три једнака дела.

Задатак 9. Дате су две паралелне праве p и q и на правој p дуж $[AB]$. Конструисати дуж дужине $\frac{1}{n}[AB]$. ([21])

Анализа: Према условима задатка довољно је конструисати само једну дуж једнаку $\frac{1}{n}|AB|$, док је у предходном задатку било потребно конструисати n таквих дужи.

Еlegantно решење за овај проблем предложио је Брианцхон.



Слика 6.9.

Конструкција: Кроз произвољну тачку M која не припада правама (слика 6.9.), повучемо праве $p(M, A)$ и $p(M, B)$. Тачке пресека са правом q обележимо са α и β . У пресеку дужи $[A\beta]$ и $[B\alpha]$ добијамо тачку γ . У пресеку праве $p(M, \gamma)$ и праве p добијамо тачку C . Пресек $[C\alpha]$ и $[AB]$, обележимо са δ . Права $p(M, \delta)$ и права p се секу у тачки D .

Тада је $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$. Настављајући поступак добијамо тачку E , тако да је

$|AE| = \frac{1}{4}|AB|$. Настављајући поступак добијамо $\frac{1}{5}|AB|$, $\frac{1}{6}|AB|$, итд.

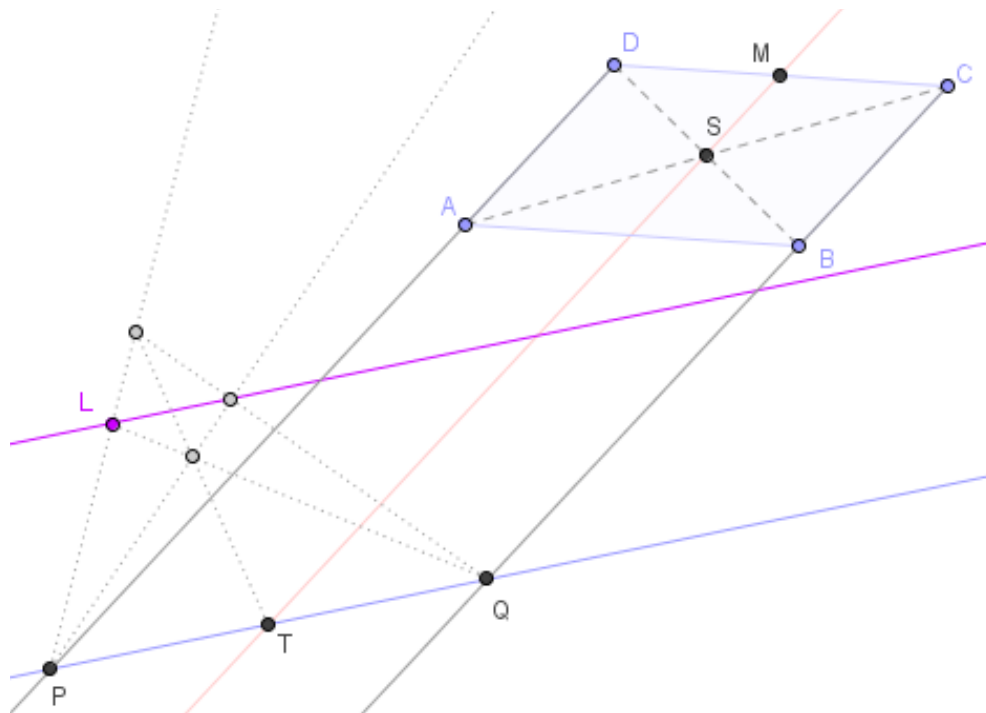
Доказ: Докажимо да је $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$. Посматрајмо четвороугао $\alpha\beta\gamma M$. Можемо закључити да тачке A, C ; B, D образују хармонијску поделу.

Следи: $AD : DC = AB : CB$. Али, $|AB| = 2|CB|$ (задатак 2.), тако да из предходне једначине имамо да је $|AD| = 2|DC|$. Следи $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$.

За доказ да је $|AE| = \frac{1}{4} |AB|$, односно $|AF| = \frac{1}{5} |AB|$, посматрамо тачке A, D, B, E , односно тачке A, E, F, B које образују хармонијску четворку.

6.3 Конструкција лењиром, ако је дат паралелограм или квадрат

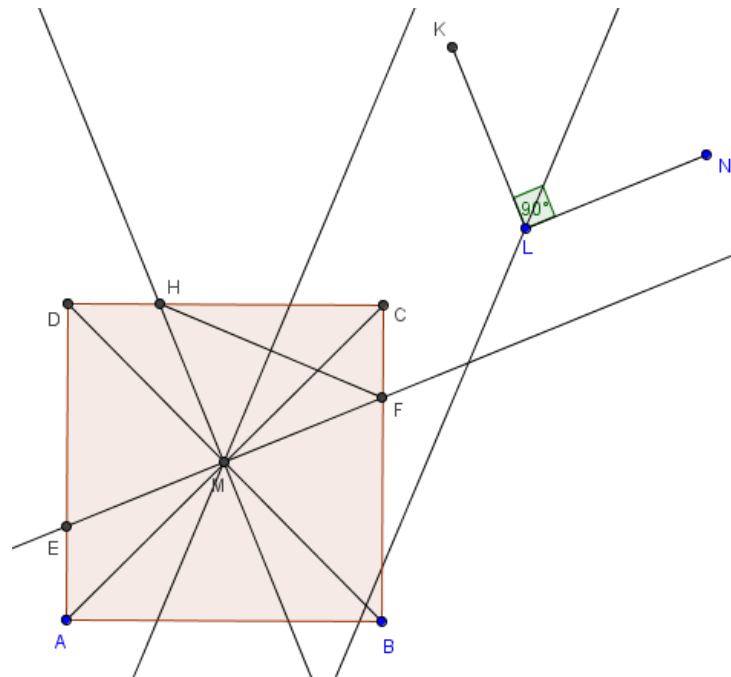
Задатак 10. Дата је права, тачка L ван ње и паралелограм који није ни у каквом претпостављеном односу инциденције са предходна два објекта. Користећи само лењир, конструисати праву паралелну датој правој, која пролази кроз дату тачку.



Слика 6.10.

Конструкција: Дата је права, тачка ван ње и потпуно произвољно у истој равни паралелограм $ABCD$ (слика 6.10.). Претпоставимо да пар паралелних правих $r(A, D)$ и $r(C, B)$ сече дату праву. (Ако то није случај, онда ће је сечи пар носача другог пара страница паралелограма). Нека су тачке пресека P и Q редом. Нека се дијагонале паралелограма секу у тачки S . Само лењиром можемо да одредимо средиште M дужи $[CD]$, јер је дата њој паралелна права. Права која пролази кроз средишта пара наспрамних страница паралелограма пролази и кроз пресек њихових дијагонала, а паралелна је другом пару наспрамних страница паралелограма. Имамо две тачке такве праве и можемо да је конструишемо само лењиром. Пошто је ово пресликавање перспективно афино, средиште дужи остаје очувано, па права $r(M, S)$ сече праву $r(P, Q)$ у средишту T дужи $[PQ]$. Сада имамо дуж са средиштем и тачку ван њеног носача. Можемо да конструишемо паралелну праву.

Задатак 11. Поделити дати прав угао на пола.



Слика 6.11.

Конструкција: Претпоставимо да желимо да поделимо дати прав угао KLN (слика 6.11.). Најпре конструишемо угао $RFMN$ подударан датом углу. Онда је решење овог проблема права која пролази кроз тачку L која је паралелна симетрали угла $\angle FMN$, каја је заправо нормала на дуж $[FH]$.

Доказ: Заиста, троугао $\triangle FMN$ је једнакокраки, $|MF| = |MN|$, због подударности троуглова $\triangle DMN$ и $\triangle CMF$. ([21])

6.4 Конструкције лењиром, ако је задата кружница и њен центар

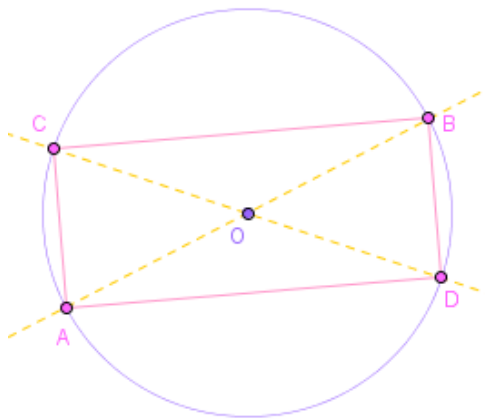
Решавање конструктивних задатака лењиром и шестаром, као што је познато, је решавање алгебарске једначине првог или другог степена. У вези са тим, овакве задатке називамо задацима другог степена.

Треба имати у виду следећу чињеницу: сваки конструктивни задатак другог степена можемо извести само помоћу лењира, ако је дата кружница и њен центар². За доказ довољно је показати да помоћу ових елемената можемо наћи тачке пресека кружнице, задате центром и полупречником с правом, а такође и тачке пресека две кружнице. Одговарајуће конструкције су разматране у задацима 25 и 26. Међутим, поједине задатке можемо решити без њиховог коришћења, прибегавајући решавању проблема на једноставнији начин. Због тога морамо прво размотрити неке основне проблеме и дати практичнији начин за њихово решавање.

² Први пут ову чињеницу је установио француски математичар Понсле, а независно од њега немачки математичар Штајнер.

Претпоставимо да је у раван цртежа дата помоћна кружница и њен центар.

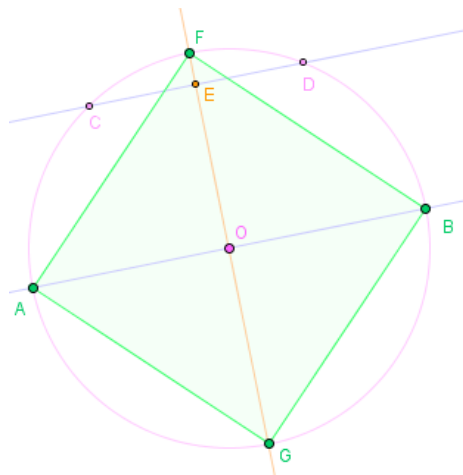
Задатак 12. Конструисати правоугаоник уписан у дату кружницу k .



Слика 6.12.

Конструкција: Да би се извела тражена конструкција, довољно је повући две разне праве кроз центар кружнице, њихове пресечне тачке са кружницом биће темена правоугаоника (слика 6.12.).

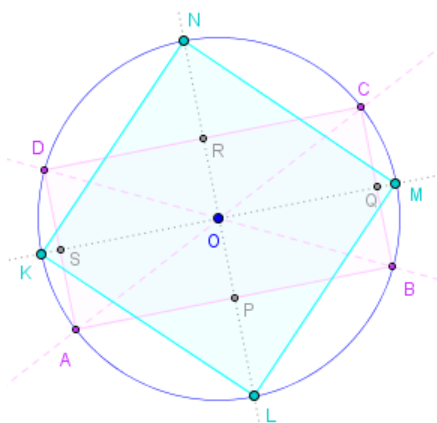
Задатак 13. Дата је кружница и њен центар. Користећи само лењир, уписати у њу квадрат.



Слика 6.13.

Конструкција: Кроз центар кружнице повуцимо праву и нека је она сече у тачкама A и B (слика 6.13.). Центар O кружнице је средиште дужи $[AB]$. Ако произвољно одаберемо тачку C на кружници, можемо користећи само лењир, одредити средиште E дужи $[CD]$, будући да имамо паралелну праву $p(A, B)$. Права која спаја центар кружнице са средиштем тетиве нормална је на ту тетиву. Према томе, права $p(O, E)$ је нормална на праву $p(C, D)$, дакле и на праву $p(A, B)$. Нека $p(O, E)$ сече кружницу у тачкама F и G . Тада су тачке A, B, F и G темена траженог квадрата. ([16])

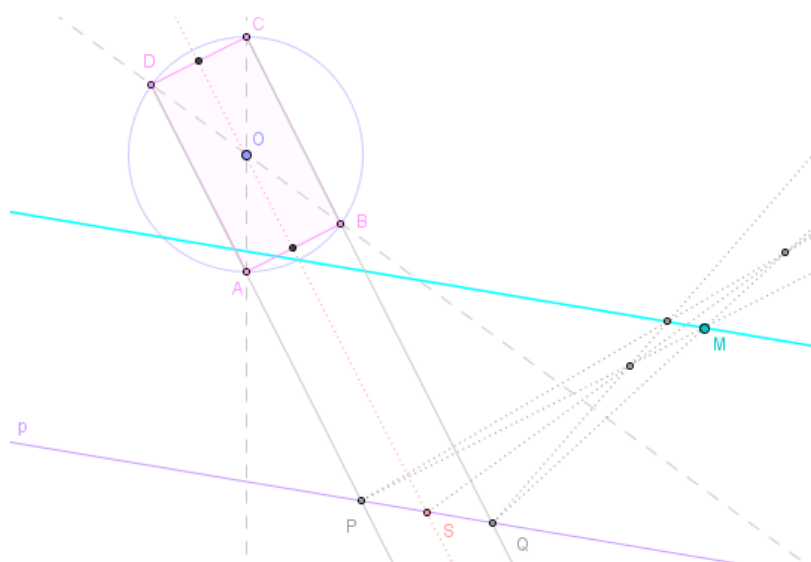
Задатак 14. Конструисати квадрат уписан у кружницу k .



Слика 6.14.

Конструкција: У кружницу најпре предходним поступком можемо да упишемо правоугаоник $ABCD$ (слика 6.14.). Како су наспрамне стране правоугаоника паралелне, можемо да одредимо средиште сваке од њих (задатак 2). Нека су то тачке P , R , S и Q . Права одређена средиштима пара наспрамних страна паралелограма паралелна је другом пару наспрамних страна паралелограма и пролази кроз пресек његових дијагонала. Према томе, праве $p(I, H)$ и $p(J, K)$ пролазе кроз центар дате кружнице и међусобно су нормалне. Дакле, то је један пар међусобно нормалних пречника. Тачке у којима они секу кружницу су темена траженог уписаног квадрата.

Задатак 15. Дата је права p , ван ње тачка M и у истој равни кружница k са познатим центром. Користећи само лењир конструисати праву која пролази кроз тачку M и паралелна је са правом p .



Слика 6.15.

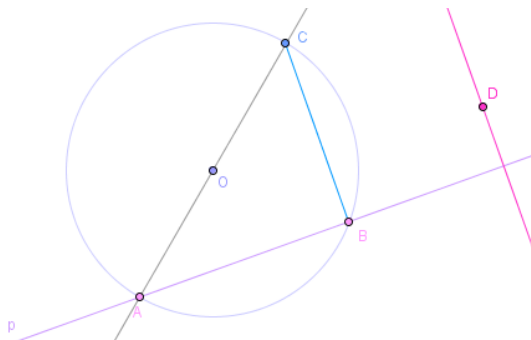
Конструкција: У кружницу увек можемо да упишемо правоугаоник (слика 6.15.). Дата права p не може бити паралелна са оба пара страна тог правоугаоника. Тада она сече један од та два пара у пару тачака P , Q . Други пар страна правоугаоника је на пару паралелних

правих, па је могуће одредити средишта сваке од ових страница. Права која спаја ова два средишта паралелна је првом пару паралелних страница и сече дуж $[PQ]$ у средишту S . Сада је лако конструисати паралелу кроз тачку M .

Задатак 16. Конструисати праву нормалну на дату праву p кроз дату тачку M која не припада датој правој p , ако је дата кружница k и њен центар.

1. случај: Права p пролази кроз центар кружнице (задатак 2).

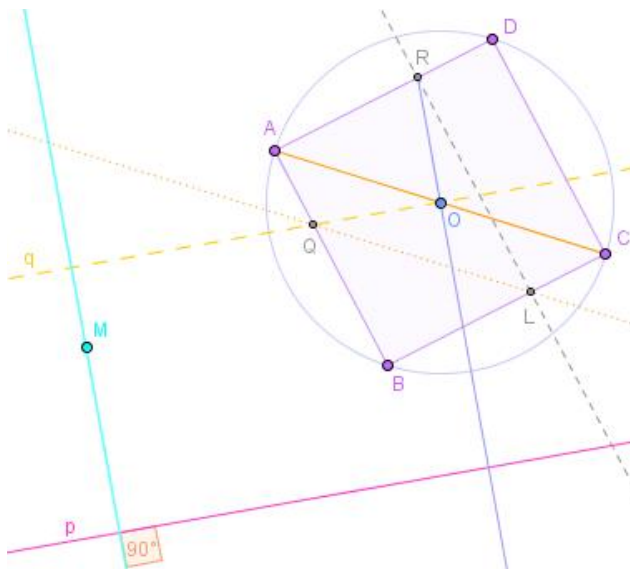
2. случај: Права p сече кружницу у тачкама A и B , али не пролази кроз њен центар.



Слика 6.16. а)

Конструкција: Повучемо пречник кружнице чија је једна тачка A (слика 6.16. а)). Нека он сече кружницу у тачки C . Права $r(C, B)$ је нормална на дату праву p . Затим кроз дату тачку конструишемо праву паралелну правој $r(C, B)$.

3. случај: Права и кружница су у општем положају.



Слика 6.16. б)

Конструкција: У дату кружницу, упишемо квадрат $ABCD$, једним од два већ описана поступка (слика 6.16. б)). Затим, кроз центар дате кружнице конструишемо праву која је паралелна са правом p . Нека је то права q и нека она сече једну од страница овог квадрата,

Доказ: Пошто је $p(Q, L) \parallel p(A, C)$, важи $[BL] \cong [BQ]$, а пошто је по конструкцији $p(L, R) \parallel p(A, B)$, важи $[LB] \cong [AR]$. Дакле, $[BQ] \cong [AR]$. Осим тога, важи $[OB] \cong [OA]$ и $\angle OBQ \cong \angle OAR = 45^\circ$, па су троуглови $\triangle OBQ$ и $\triangle OAR$ подударни. Одатле следи да је угао $\angle QOR$ добијен ротацијом угла $\angle BOA$, који је прав, па је и угао $\angle QOR$ такође прав, што је и требало доказати.

Задатак 17. У равни је дата дуж $[AB]$, права p и на њој тачка C . Поред тога, у равни је дата кружница k са својим центром. Користећи само лењир, на правој p одредити тачку M такву да важи $[CM] \cong [AB]$.

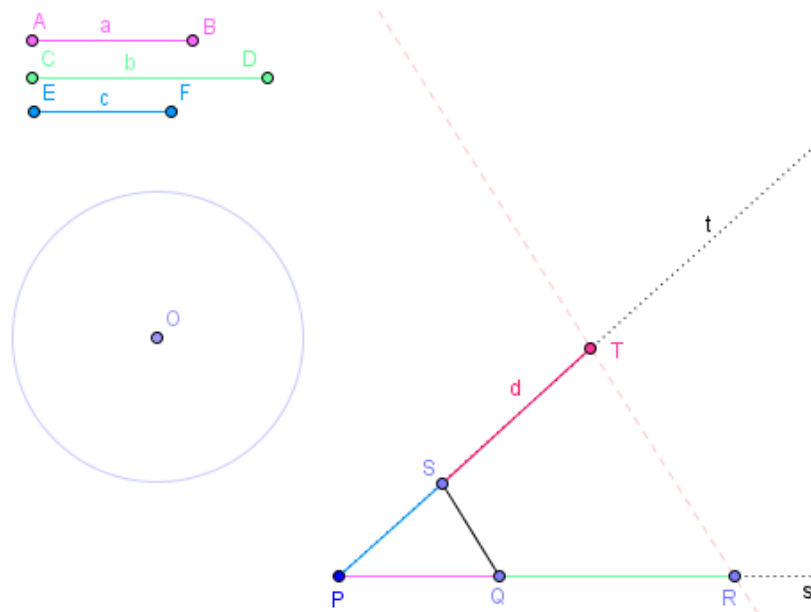
Конструкција: Кроз тачку С конструишимо праву q паралелну правој $p(A, B)$, а затим и кроз тачку В конструишимо праву l паралелну правој $p(A, C)$ и нека је тачка D пресек ове две новоконструисане праве (слика 6.17.). Сада је по конструкцији четвороугао ABCD паралелограм, а ове конструкције смо успели да спроведемо захваљујући датој кружници. Нека је P једна од тачака пресека кружнице и праве која пролази кроз центар кружнице и паралелна је са правом p . Нека су Q и R тачке пресека кружнице и праве која пролази кроз њен центар и паралелна је са правом q . Сада конструишемо праве m и n које

пролазе кроз тачку D и паралелне су редом са правама $p(P, Q)$ и $p(P, R)$. Оне секу праву p редом у тачкама M и N . То су тражене тачке, једна на једну страну од тачке C , а друга на другу.

Доказ: Из паралелограма $ABCD$ следи $[AB] \cong [CD]$. Осим тога, важи и $[OP] \cong [OQ] \cong [OR]$. Због паралелности страница, важи $\triangle CMD \sim \triangle OPQ$ и $\triangle CDN \sim \triangle ORP$, па су онда троуглови $\triangle CMD$ и $\triangle CDN$ једнакокраки и важи $[CM] \cong [CN] \cong [AB]$.

Дискусија: Задатак увек има два решења.

Задатак 18. За дате дужи a , b и c конструисати четврту пропорционалу, ако је дата кружница k и њен центар.



Слика 6.18.

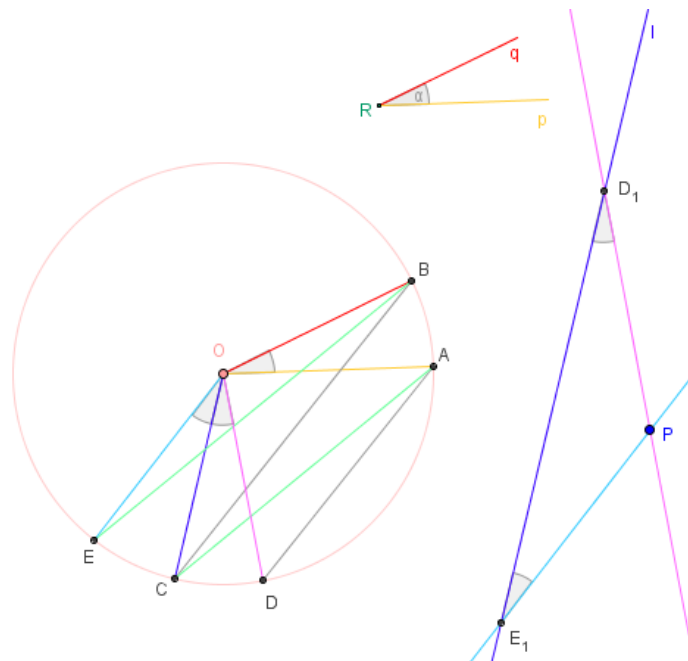
Конструкција: На било које две праве s и t које се секу (слика 6.18.), одредимо дужи a , b и c (задатак 17). Затим кроз тачку R конструисамо праву паралелну са $|QS|$. У пресеку са правом t добијамо тачку T . Дуж $[ST]$ је тражена четврта пропорционала.

Задатак 19. Конструисати геометријску средину за две дате дужи x и y , тј. конструкција дужи $z = \sqrt{xy}$, односно $\frac{x}{z} = \frac{z}{y}$.

Конструкција: Нека је d пречник датог круга. Најпре конструкцијом подударне дужи конструишемо дуж $t = x + y$. Затим конструишемо четврте пропорционале m и n за (t, x, d) и (t, y, d) редом. Како је $\frac{t}{x} = \frac{d}{m}$ и $\frac{t}{y} = \frac{d}{n}$. Одавде следи $m = \frac{dx}{t}$, $n = \frac{dy}{t}$, па имамо $m + n = \frac{dx + dy}{t} = \frac{d(x + y)}{t} = \frac{dt}{t} = d$.

Сада важи $q = \sqrt{mn} = \sqrt{(dx/t)(dy/t)} = \frac{d}{t} \sqrt{xy}$, па је тражена геометријска средина заправо четврта пропорционала за q , d и t . Само треба још конструисати геометријску средину дужи m и n , а то је изводљиво пошто унемо да конструишемо подударну дуж и нормалу.

Задатак 20. Кроз дату тачку P конструисати праву, која са датом правом l образује дати угао α , ако је у равни дата кружница са својим центром.

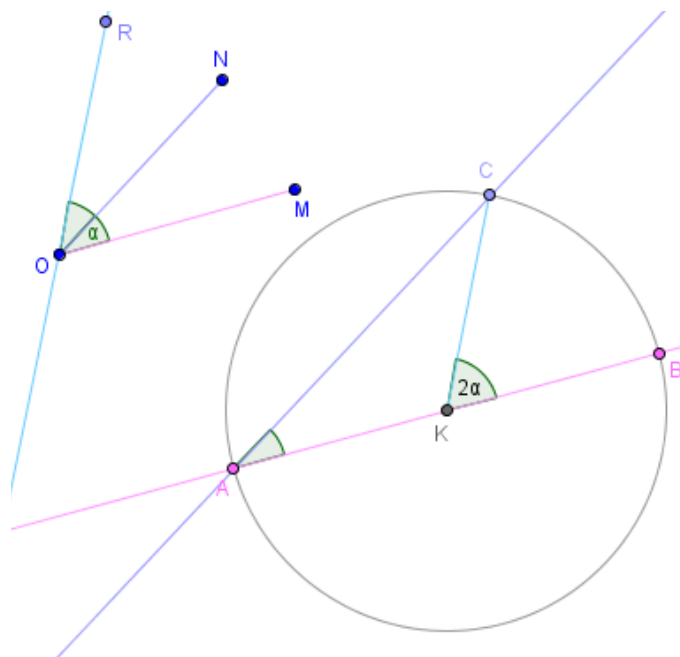


Слика 6.20.

Решење је приказано на слици 6.20., где је $OA \parallel pR$, $OB \parallel qR$, $OC \parallel l$, $AD \parallel BC$, $BE \parallel AC$. На крају $OD \parallel PD_1$ и $OE \parallel PE_1$.

Дискусија: Задатак има два решења. ([21])

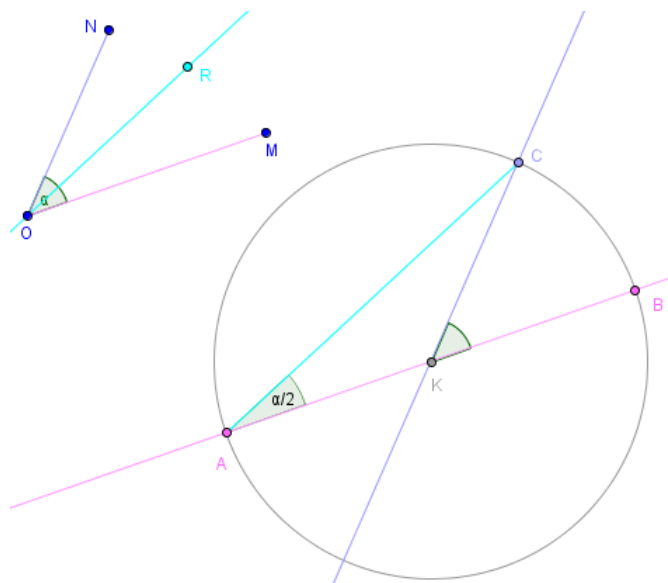
Задатак 21. Удвостручити дати угао $\alpha = \angle MON$, ако је у равни дата кружница са својим центром.



Слика 6.21.

Конструкција: Конструирамо праву паралелну са $|OM|$ која пролази кроз центар кружнице. Она сече кружницу у тачкама A и B (слика 6.21.). У тачки A конструирамо праву паралелну са $|ON|$. Нека је C тачка пресека праве и кружнице. Угао $\angle BKC = 2\alpha$. На крају, кроз тачку O конструирамо праву $p(O, R)$ паралелну са $|KC|$.

Задатак 22. Поделити дати угао $\alpha = \angle MON$ на пола, тј. конструисати симетралу датог угла, ако је у равни дата кружница са својим центром.



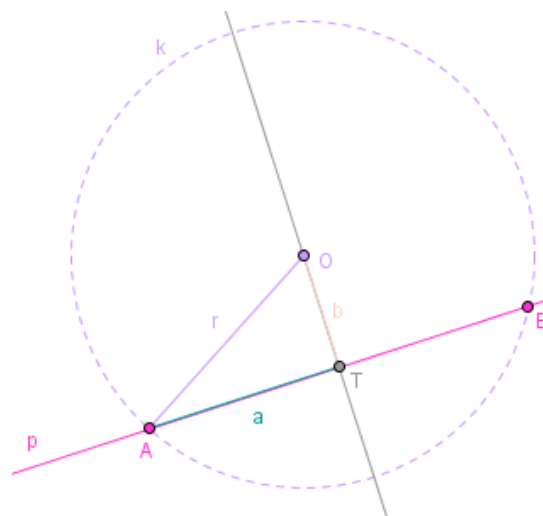
Слика 6.22.

Конструкција: Конструираемо праву паралелну са $|OM|$ која пролази кроз центар кружнице. Она сече кружницу у тачкама A и B (слика 6.22.). У тачки K конструираемо праву паралелну са $|ON|$. Она сече кружницу у тачки C . Угао $\angle BAC$ је једнак половини датог угла α . Затим конструираемо праву $p(O,R)$ паралелну са $|AC|$. То је тражена симетрала угла.

Дискусија: Можемо да приметимо да је овај проблем у потпуности обрнут претходном. Решење је увек јединствено.

Сада можемо приступити проналажењу тачака пресека праве и кружнице, као и тачака пресека две кружнице.

Задатак 23. Одређивање тачке пресека дате кружнице k и дате праве p у равни.



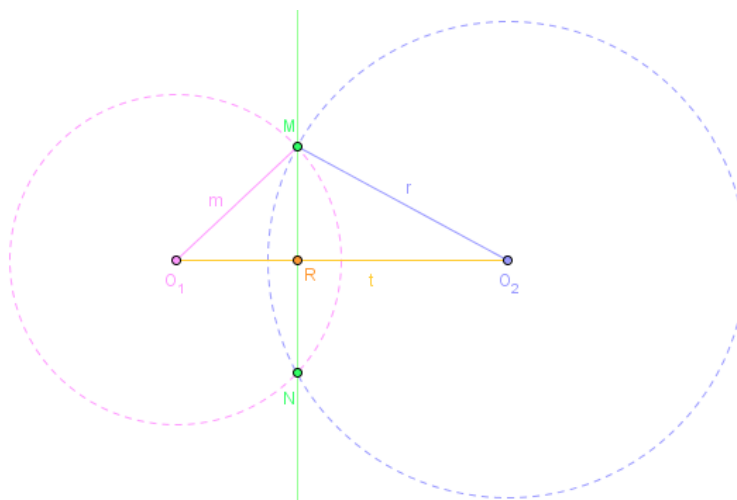
Слика 6.23.

Анализа: Кружница, наравно није нацртана, али су нам дати њен центар O и полупречник r . Једну тачку лако можемо да одредимо, а то је подножје T нормале из центра кружнице на дату праву p (слика 6.23.). Тачка T је средиште тражене тетиве $|AB|$. Тада познајемо и одстојање b тачке O од праве.

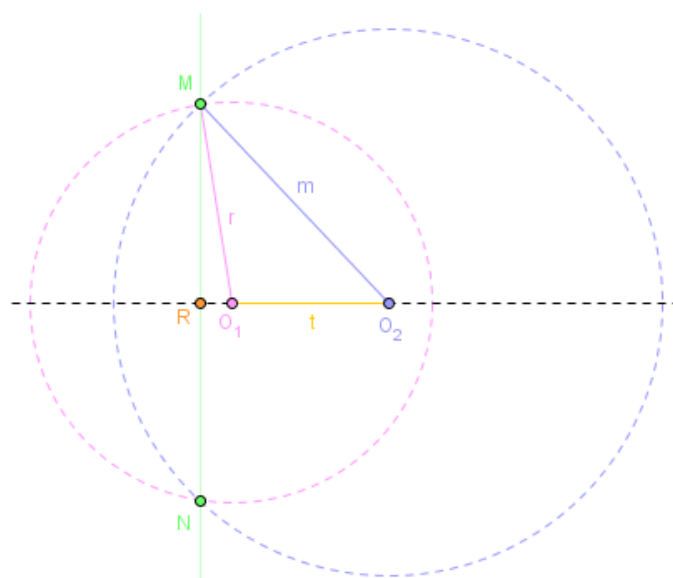
Очигледно важи $a^2 = r^2 - b^2 = (r + b)(r - b)$. И r и b су нам познати, тако да $(r + b)$ и $(r - b)$ можемо одредити (задатак 17). На основу задатка 19, можемо да одредимо дужину $a = \sqrt{(r + b)(r - b)}$, средњу пропорционалу за $(r + b)$ и $(r - b)$. Затим, добијену дужину a нанесемо познатом конструкцијом на обе стране од тачке T и добијамо тражене тачке пресека A и B .

Задатак 24. Одређивање тачака пресека двеју кружница.

Нека су центри кружница тачке O_1 и O_2 , а полупречници m и r . Решење овог проблема постоји ако је $t \geq m + r$ и $t < m + r$ или $t < m$ и $r > m - t$, где је са t означено одстојање између центара кружница. Под решењем подразумевамо пар тачака пресека, M и N . Наведена два случаја су представљена на сликама 6.24. а) и 6.24. б), а у сваком појединачном случају слике приказују и решење.



Слика 6.24. а)



Слика 6.24. б)

Права кроз тачке M и N је нормална на праву $p(O_1, O_2)$. Применимо сада косинусну теорему на троугао ΔMO_1O_2 . Добијамо $m^2 = r^2 + t^2 - 2tr \cos \angle MO_1O_2$. Дуж $[O_1R]$ означимо са s , она може бити било позитивна (ако је R на дужи O_1O_2) било негативна (ако је R на продужетку од O_1O_2).

Пошто је $\cos \angle MO_1O_2 = \frac{s}{r}$, важи

$$m^2 = r^2 + t^2 - 2ts, \text{ одакле је}$$

$$s = (r^2 + t^2 - m^2) / 2t.$$

На основу предходних конструција s може да се конструише.

Конструишемо $s = (r^2 / 2t) + (t^2 / 2t) - (m^2 / 2t)$ на основу података које имамо r , t и m . Ове три вредности су четврте пропорционале за $2t$, r , r ; $2t$, t , t и $2t$, m , m редом.

Свака може бити конструисана (задатак 20) након што се $2t$ одреди из t на основу задатка 19 и комбинација $(r^2 / 2t) + (t^2 / 2t) - (m^2 / 2t)$ се добија помоћу две примене задатка 19.

Тада може да се одреди и тачка R , а тражене тачке као тачке пресека нормале и кружнице.

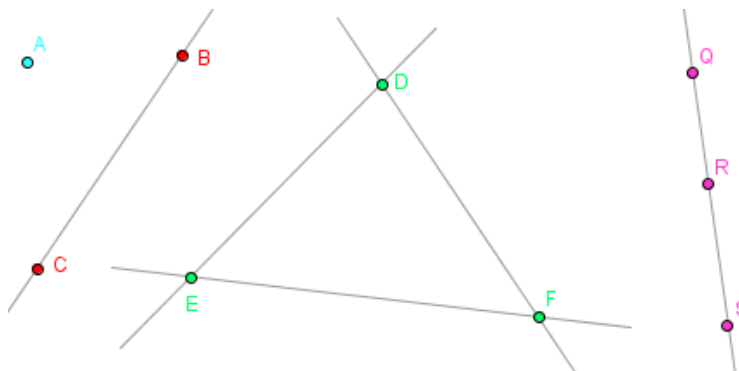
7 Још неки проблеми за чије решавање користимо само лењир

Шта можемо конструисати само лењиром полазећи од четири дате тачке? Сада ћемо дати одговор на то питање.

Дат је коначан скуп тачака. Које друге тачке можемо тада конструисати користећи само лењир?

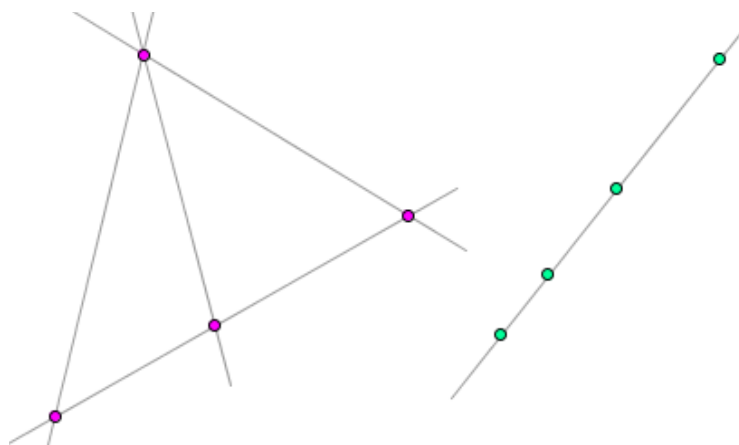
Прецизирајмо поставку задатка.

Тачку ћемо сматрати одређеном (конструисаном), ако је она једна од датих или се појављује као пресек две конструисане праве. Слично, праву ћемо сматрати одређеном, ако она садржи конструисане (у крајњем случају дате) тачке. Уопштени проблем се своди на то да опишемо скуп тачака које можемо конструисати од тачака датих на почетку.



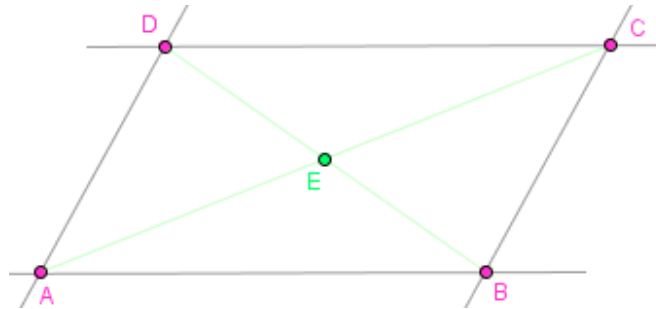
Слика 7.1.

Јасно је да ако је дата једна, две или три тачке (слика 7.1.), никакве нове тачке није могуће конструисати. Ако су дате четири тачке (слика 7.2.) од којих неке три или све четири леже на једној правој, онда је такође очигледно да није могуће конструисати нове тачке.



Слика 7.2.

И на крају, ако су дате четири тачке, као темена паралелограма (слика 7.3.), можемо конструисати само једну тачку, његов центар.



Слика 7.3.

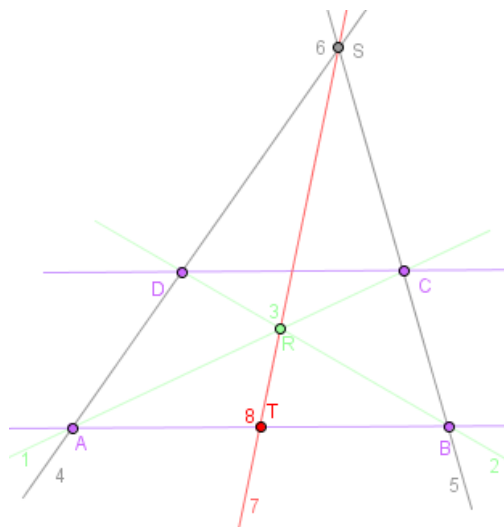
Нека су сада дате четири тачке, које нису темена паралелограма, и никоје три од њих не леже на једној правој.

У конструкцијама које следе често ћемо користити теорему 6.2.1.

Размотрићемо посебан случај:

Дате тачке A , B , C и D су темена трапеца.

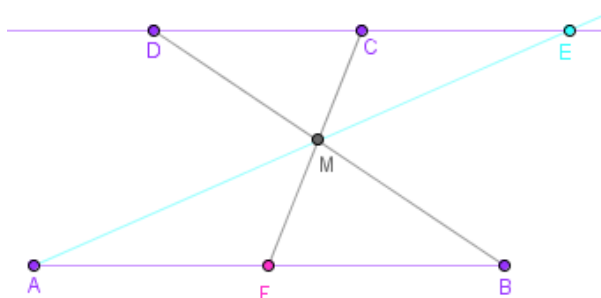
Задатак 25. Поделити дуж AB на пола.



Слика 7.25.

Решење је приказано на слици 7.25.

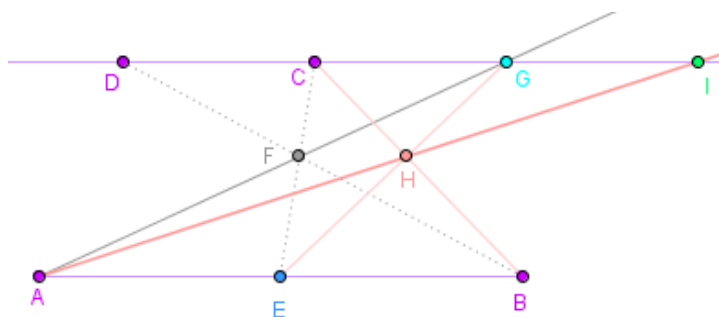
Задатак 26. Удвостручите дуж $[CD]$.



Слика 7.26.

Доказ: Једнакост $[CD] = [CE]$ следи из сличности троуглова $\triangle AMF \sim \triangle EMC$, $\triangle FMB \sim \triangle CMD$ и једнакости $[AF] = [FB]$ (слика 7.26.).

Задатак 27. Конструисати дуж дужине $n[CD]$.



Слика 7.27.

Конструкција: За то је потребно $(n-1)$ пут поновити поступак, који смо користили у предходном задатку. На слици 7.27. је показана конструкција за $n=3$.

Аналогно, на правој $p(A, B)$ можемо конструисати дуж дужине $m[AB]$.

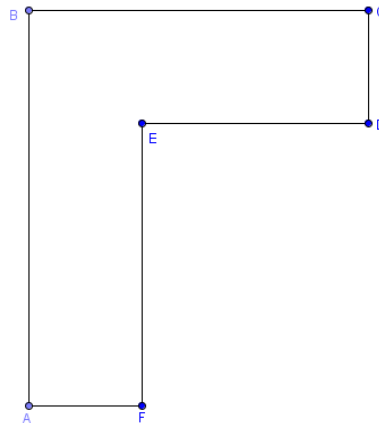
Задатак 28. Поделите дуж $[CD]$ на m једнаких делова.

Решење: Прво на правој $p(A, B)$ конструишемо $(m - 1)$ подударних дужи $[BB_2]$, $[B_2B_3]$, ..., $[B_{m-1}B_m]$. Потом конструишемо праве $p(A, D)$ и $p(B_mC)$. Оне се секу у тачки M . Спојимо ту тачку са тачкама $B, B_1, B_2, \dots, B_{m-1}$. Добио смо $(m - 1)$ правих делећи дуж $[CD]$ на m једнаких делова.

Дискусија: Конструкција није могућа ако је $AD \parallel B_mC$. Али, то можемо превазићи ако прво дуплирамо дуж $[AB]$, затим конструишемо m дужи, подударних удвострученој дужи и даље применимо предходну конструкцију.

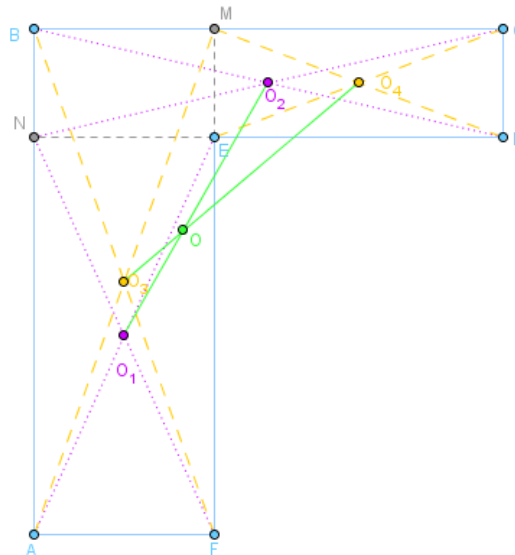
Тежиште правоугаоника или ромба налази се у пресеку њихових дијагонала, тежиште троугла се налази у пресеку тежишних линија, ако је у питању круг, тежиште је центар круга.

Задатак 29. Како путем конструкције наћи тежиште плоче састављене од два произвољна правоугаоника у облику слова G (слика 7.29. а))?



Слика 7.29. а)

Анализа: Страницу DE продужимо до пресека са AB у тачки N и страницу EF до пресека са BC у тачки M. Дату фигуру ћемо прво посматрати као састављену од правоугаоника ANEF и NBCD. Тежиште сваког од њих налази се у пресецима њихових дијагонала O_1 и O_2 . Тежиште целе фигуре налази се на правој $p(O_1, O_2)$. Сада ћемо исту фигуру посматрати као да је састављена од правоугаоника ABMF и EMCD, чија се тежишта налазе у пресецима његових дијагонала O_3 и O_4 . Тежиште целе фигуре лижи на правој $p(O_3, O_4)$. Према томе тежиште је у тачки O која се налази у пресеку правих $p(O_1, O_2)$ и $p(O_3, O_4)$.



Слика 7.29. б)

Конструкција је дата на слици 7.29. б) ([17])

Литература

- [1] АДЛЕР А. (1924): Теория – геометрических построений. Превод с немецкого, изд. 2-е Матезис, Одесса
- [2] АЛЕКСАНДРОВ А. И. (1924): Сборник геометрических задач на построение, ГИЗ
- [3] АЛЕКСАНДРОВ И. И. (1950): СБОРНИК ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ С РЕШЕНИЯМИ, Москва
- [4] Veljan Darko (1995): Napoleonov teorem i posljedice, str. 169-173
- [5] Воронец А. М. (1934): ГЕОМЕТРИЯ ЦИРКУЛЯ, наука – массам онти государственное технико – теоретическое издательство, Москва, Ленинград
- [6] Гарднер Мартин (1994): Геометрические построения с помощью циркуля и линейки и с помощью одного циркуля, математические новеллы, Москва
- [7] <http://Geometric Construction with the Compass Alone>
- [8] <http://www.wikipedia.org.Geometrija>
- [9] Kostovski A. (1986): Geometrical Constructions with Compasses Only, Mir Publishers, Moscow
- [10] Михеев Ю. (1980): Одной линейкой, Квант 10
- [11] <http://www.wikipedia.org.The Free Encyclopedia Lorenzo Mascheroni>
- [12] <http://www.wikipedia.org.The Free Encyclopedia Mohr Macheroni>
- [13] Косовский А. Н.: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ, издательство «наука» главная редакция физико – математической литературы 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
- [14] Палман Доминик (1996): Геометријске конструкције, Елемент, Загреб
- [15] Paunić Đura (2006): Pravilni poligoni, Novi Sad
- [16] Pavković Boris, Darko Veljan (2004): Elementarna matematika I, školska kljiga, Zagreb, Mohr – Mascheronijeve konstrukcije, str. 359-362; Steinerove konstrukcije 362-366
- [17] Перельман Я. И. (1978): Занимљива геометрија, Београд
- [18] Петровић Војислав, Тошић Ратко (1994): Проблеми из геометрије – методичка збирка задатака, Нови Сад
- [19] Пушић Невена: Пројективна геометрија – скрипта
- [20] Савин А. (1981): Циркулем и линейкой, Квант 5
- [21] Смогоржевский А. С. (1957): ЛИНЕЙКА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ, популярные лекции по математике выпуск 25, государственное издательство технико – теоретической литературы, Москва
- [22] Stojaković Z. (1966): Geometrijske konstrukcije samo šestarom, Univerzitet u Novom Sadu
- [23] Hlavaty Julius H. (1957): Macherony Constructions, Mathematisch Teacher
- [24] ШТЕЙНЕР ЯКОБ (1989): ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, государственное учение – педагогическое издательство наркомпроса РСФСР Москва
- [25] http://www.cut_the_knot.org/do_you_know/compass.shtwl
- [26] <http://www.wikipedia.org.The Free Encyclopedia Jakob Steiner>
- [27] <http://www.wikipedia.org.Konstruktivni zadaci>
- [28] <http://www.wikipedia.org.The Free Encyclopedia Georg Mohr>

Биографија



Рођена сам 1. августа 1987. године у Новом Пазару. Основну школу „Братство“ у Новом Пазару завршила сам као носилац Вукове дипломе. Потом сам уписала „Гимназију“ у Новом Пазару, природно математички смер и матурирала 2006. године са одличним успехом 4.98.

На Природно – математички факултет Универзитета у Новом Саду, одсек за математику, смер професор математике, уписала сам се 2006. године и дипломирала 17. септембра 2011. године са просечном оценом 7,89. Након завршених основних академских студија уписала сам мастер студије на Природно – математичком факултету у Новом Саду, одсек за математику. Положила сам све испите предвиђене наставним планом и програмом мастер студија.

Нови Сад, мај 2012. године

Џана Рожајац

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Џана Рожајац
АУ

Ментор: Професор др Невена Пушић
МН

Наслов рада: О геометријским конструкцијама помоћу ограничених средстава
МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: српски и енглески
ЈИ

Земља публикавања: Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2012.
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3
МА

Физички опис рада: (7, 77, 28, 0, 78, 0, 0)
(број поглавља, број страна, број литерарних цитата, број табела, број слика, број графика, број прилога)
ФО

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Геометрија
НД

Предметна одредница/Кључне речи: Мор – Маскеронијева теорема, конструкције шестаром, конструкције лењиром, Понсле – Штајнерова теорема
ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, Природно – математички факултет, Универзитет у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод:
ИЗ

Мастер рад се бави геометријским конструкцијама помоћу ограничених средстава. Доказују се Мор – Маскеронијева теорема о геометријским конструкцијама које се изводе само помоћу шестара и Понсле – Штајнерова теорема о геометријским конструкцијама које се изводе само помоћу лењира. Дати су и неки занимљиви задаци.

Датум прихватања теме од стране НН већа: .
ДП

Датум одбране: новембар 2012.
ДО

Чланови комисије:
КО

Председник: др Градимир Војводић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Члан: др Невена Пушић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Члан: др Ђура Паунић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesi

CC

Author: Džana Rožajac

AU

Mentor: Nevena Pušić, Full Professor

MN

Title: A geometric constructions using limited number of geometric tools

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: (7, 77, 28, 0, 78, 0, 0)

(chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements)

PD

Scientific field: Mathematic

SF

Scientific discipline: Geometry
SD

Subject/Key words: Mohr – Macheroni theorem, Geometric Construction with the Compass Alone, Geometric Construction by straightedge alone, Poncelet–Steiner theorem
SKW UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: Master paper deals with geometric constructions with limited resources. Prove the Mohr - Maskeronijeva theorem on geometric constructions to be performed only by using compasses and Pons - Steiner theorem on geometric constructions to be performed only by using a ruler. Presented are also some interesting problems.
AB

Accepted by the Scientific Board on: .
ASB

Defended: November 2012.
DE

Thesis defense board:
DB

President: Dr Gradimir Vojvodić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr Nevena Pušić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr Đura Paunić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad