УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ

Дуња Маринковић

ЈЕДНОСТАВНЕ МОДИФИКАЦИЈЕ ЊУТНОВОГ ПОСТУПКА ТИПА ПРЕДИКТОР-КОРЕКТОР

мастер рад

Нови Сад, 2014.

Садржај

Предговор

Решавање нелинеарних једначина веома је значајно не само у математици, већ и другим областима науке. Већину једначина овог типа не можемо тачно решити већ само приближно. Стога се стално унапређују поступци приближног решавања једначина. Развој рачунарске технологије погодује овој дисциплини математике. Пажња је усмерена највише ка оним поступцима решавања нелинеарних једначина који су веома прецизни, тј. грешка апроксимације је изузетно мала, брзо конвергирају и захтевају што мањи број израчунавања вредности функција.

У овом мастер раду посматрамо Њутнов поступак за решавање нелинеарних једначина са једном непознатом и једноставне модификације овог поступка типа предиктор-коректор. Ове поступке карактерише већи број израчунавања вредности функције и њеног првог извода него код Њутновог поступка, али се зато добија ред конвергенције већи од два. Приказујемо више поступака овог типа, за сваки дајемо доказ конвергенције, ред конвергенције и индекс ефикасности.

Мастер рад садржи четири дела. Први, уводни део обухвата приказ ознака, дефиниција и теорема које се користе у даљем раду. Други део приказује дефиницију класичног Њутновог поступка, теореме о локалној и глобалној конвергенцији, реду конвергенције и индексу ефикасности.

У трећем делу рада посматрамо неке од новијих резултата који се односе на посматрану проблематику. Нагласак је на модификацијама Њутновог поступка које су засноване на апроксимацијама аргумента првог извода помоћу Џини средина. Као специјални случајеви ових средина појављују се, поред осталих, аритметичка, геометријска и хармонијска средина, које су посебно разматране. На тај начин добијамо уопштење поступка из [18], што је оригинални део мастер рада. Доказана је конвергенција посматране модификације Њутновог поступка, одређен је ред конвергенције и индекс ефикасности. У раду је анализиран и утицај параметара који се појављују у срединама Џинија и Столарског.

У последњем делу рада приказани су нумерички експерименти урађени у програмском пакету *Mathematica*. Сви експерименти рађени су са 20000 цифара и приказани су одговарајући компјутерски редови конвергенције и индекси ефикасности. Примери су узети највише из радова [1], [5], [7], [8], [12], [13], [18], [21], [23], [24].

Овом приликом бих изразила посебну захвалност свом ментору проф. др Драгославу Херцегу на одабиру теме и на његовој свесрдној помоћи. Велика ми је част и задовољство што је овај рад настао под његовим менторством. Захваљујем и члановима комисије за одбрану рада – проф. др Хелени Зарин и проф. др Ђорђу Херцегу.

Такође, желим да изразим захвалност и својим родитељима, Ивану и Славици, и сестри Сањи, који су увек били моја највећа подршка.

Нови Сад, децембар 2014. *Дуња Маринковић*

1 Увод

1.1 Неке ознаке, дефиниције и теореме

1.1.1 Ознаке

$\{x_n\}$	низ бројева $x_0, x_1, \ldots$
$D = [a, b]$	интервал којем припада низ $\{x_n\}$
$C^k[a, b]$	скуп k-пута непрекидно диференцијабилних функција на интервалу $[a, b]$
$Lip_\gamma[a, b]$	скуп функција које на интервалу $[a, b]$ задовољавају Липшицов услов са константом γ
α	решење једначине $f(x) = 0$
$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}, j = 2,3, \ldots$	
C	асимптотска константа грешке
$e_n = x_n - \alpha$	грешка у n-тој итерацији
$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$	једначина грешке, $\alpha = \lim_{k\to\infty} x_k$
$\frac{e_{n+1}}{{e_n}^p}$	апроксимације асимптотске константе грешке
p	ред конвергенције итеративног поступка
O	ознака за „велико о”
o	ознака за „мало о”

1.1.2 Дефиниције

Дефиниција 1. *Нека је дата реална функција* f *реалне промењљиве* x*. Решење једначине* $f(x) = 0$ *је сваки број* ξ *за који важи* $f(\xi) = 0$.

Дефиниција 2. *За две једначине кажемо да су еквивалентне на интервалу* $[a, b]$ *ако су решења која припадају интервалу* $[a, b]$ *једне једначине решења друге једначине и обрнуто.*

Дефиниција 3. *Једначину облика* $x = \varphi(x)$ *називамо једначина непокретне тачке. Број* α *за који важи* $\alpha = \varphi(\alpha)$ *називамо непокретна тачка фунције* φ.

Дефиниција 4. *Функција* φ *задовољава Липшицов услов на интервалу* $[a, b]$ *ако постоји константа* γ *таква да за свако* $x, y \in [a, b]$ *важи*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Константа γ *назива се Липшицова константа.*

Када је $\gamma < 1$ функција φ се назива контракција или контрактивно пресликавање.

Дефиниција 5. *Функција* f *је ,,велико о'' функције* g*, кад* $x \to a$*, ако постоји околина* U *тачке а и број* $M > 0$ *такви да је за све* $x \in U \setminus \{a\}$

$$|f(x)| \leq M |g(x)|.$$

Тада пишемо $f(x) = O\big(g(x)\big)$*, када* $x \to a$*, и кажемо да је функција* f *ограничена у односу на функцију* g *у некој околини тачке а.*

Дефиниција 6. *Функција* f *је ,,мало о'' функције* g*, кад* $x \to a$*, ако постоји околина* U *тачке а и бесконачно мала функција* $\varepsilon(x)$*,* $x \to a$ *такви да је за све* $x \in U \setminus \{a\}$

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x).$$

Тада пишемо $f(x) = o\big(g(x)\big)$*, кад* $x \to a$.

Дефиниција 7. *Нека је* $lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$*. Ако постоји константа* $C = [0,1)$ *и цео број* $K \geq 0$ *такав да за* $k \geq K$ *важи*

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C |x_k - \alpha|$$

каже се да је низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ *линеарно конвергентан.*

Дефиниција 8. *Ако постоји низ* c_k *такав да је*

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0$$

и важи

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq c_k |x_k - \alpha|$$

онда је низ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *суперлинеарно конвергентан.*

Дефиниција 9. *Ако постоје константе* $p > 1, C \geq 0$ *и цео број* $K \geq 0$ *такав да за* $k \geq K$ *важи* $|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^p$ *поступак је реда бар* p.

Каже се да низ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *конвергира ка* α *са редом бар* p. *За* $p = 2$ *конвергенција је квадратна, а за* $p = 3$ *је кубна.*

Ред конвергенције користимо како би поредили брзину конвергенције различитих низова. Уколико посматрамо низове $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$, *који конвергирају ка истој граничној вредности* α, *са редовима конвергенције* k *и* l, *респективно, и важи* $k > l$, *тада кажемо да низ* $\{a_n\}$ *брже конвергира од* $\{b_n\}$.

Да би се одредио ред конвергенције често се посматра константа

$$\eta = \lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}.$$

Уколико оваква константа постоји ако је $\eta \neq 0$, поступак је реда p и η се назива асимптотска константа поступка. Ако је $\eta = 0$, посматра се гранична вредност са $p + 1$ у експоненту имениоца. Ако је опет $\eta = 0$, узима се $p + 2$ итд, док се не добије константа различита од нуле. Некада уместо ознаке η користимо C.

Дефиниција 10. *Нека је* α *корен једначине* $f(x) = 0$ *и претпоставимо да је дат итеративни низ* $\{x_k\}$ *који конвергира ка том корену. Тада нумерички ред конвергенције* ord *рачунамо према*

$$ord_k = \frac{\ln\left|(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_k - \alpha)/(x_{k-1} - \alpha)\right|}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Дефиниција 11. *Нека је ред конвергенције итеративног поступка* p, *а број израчунавања различитих вредности функције и њеног извода по једном итеративном кораку* w, *индекс ефикасности тада је дефинисан са* $p^{1/w}$.

Нека је x_0 произвољан број из интервала $[a, b]$ и нека функција φ пресликава интервал $[a, b]$ у самог себе. Тада важи $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $n = 0,1, \ldots$ Ако низ $x_0, x_1, \ldots$ има граничну вредност, тј. за неко $\alpha \in [a, b]$ важи $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$, и ако је функција φ непрекидна на интервалу $[a, b]$, онда је α решење једначине $x = \varphi(x)$. Дакле, ако низ $x_0, x_1, \ldots$ конвергира, његова гранична вредност α је решење једначине $x = \varphi(x)$, а чланови тог низа апроксимирају то решење.

Поступак, у коме рачунамо вредности $x_0, x_1, \ldots$ према $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1 \ldots$ се назива итеративни поступак, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ је итеративно правило, функција φ је функција корака, а низ $x_0, x_1, \ldots$ је итеративни низ. Први члан тог низа је почетна апроксимација. Када итеративни низ конвергира за произвољну почетну вредност, кажемо да итеративни поступак конвергира.

Дефиниција 12. *Ред конвергенције итеративног поступка једнак је реду конвергенције итеративног низа добијеног посматраним итеративним поступком.*

Дефиниција 13. *Ако два конвергентна поступка имају исту граничну вредност онда кажемо да је итеративни поступак са редом конвергенције p_1 бржи од итеративног поступка са редом конвергенције p_2 ако је $p_1 > p_2$.*

1.1.3 Теореме

Теорема 1. *Нека је $f \in C[a,b]$. Ако је $f(a)f(b) < 0$ тада у интервалу (a,b) постоји бар једно решење једначине $f(x) = 0$.*

Теорема 2. *Ако је $f' \in Lip_\gamma[a,b]$ онда за свако $x, y \in [a,b]$ важи*

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \le \frac{\gamma}{2}(y-x)^2.$$

Теорема 3. *Ако је $f \in C^n[a,b]$ тада за $x_0 \in (a,b)$ важи*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x)$$

при чему је

$$r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right).$$

Функција r_n се назива функција остатка (или краће остатак) n-тог реда.

2 Њутнов итеративни поступак

2.1 Дефиниција поступка

Њутнов поступак је један од најпопуларнијих поступака за решавање једначина. У основи Њутновог поступка је апроксимација функције f, чије се нуле траже линеарном функцијом. Ова апроксимација се посматра у близини нуле која се тражи. Као апроксимациона функција се користи линеарна функција чији график је тангента функције f у изабраној тачки $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$. Пресек x_1 тангенте са $x-$ осом се посматра као приближна вредност нуле фунције f, а затим се тачки $(x_1, f(x_1))$ поставља нова тангента итд.

Једначина тангенте у тачки $(x_0, f(x_0))$ је

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ако је $f'(x_0) \neq 0$, наредна апроксимација x_1 се добија као решење једначине $y(x) = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ако је x_k $k-$та апроксимација решења посматране једначине, следеће апроксимације се добијају према

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Њутнов поступак се може посматрати као поступак облика $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где је

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

под претпоставком да је $f'(x) \neq 0$ на интервалу у ком се тражи решење једначине $f(x)=0$. Дакле, све теореме које се односе на поступак $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ можемо применити и на Њутнов поступак. При томе се Липшицова константа γ може одредити као број за који важи

$$\gamma \geq max\{|\varphi'(x)| \mid x \in [a,b]\},$$

односно,

$$\gamma \geq max\left\{\frac{|f(x)f''(x)|}{f'(x)^2} \mid x \in [a,b]\right\}$$

јер је

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Да би се Њутнов поступак могао спровести, потребно је да први извод f' постоји у свим тачкама посматраног интервала и да је $f'(x) \neq 0$ за свако x из тог интервала. У свим разматрањима која се односе на Њутнов поступак и његове модификације, претпостављамо да је $f'(x) \neq 0$.

Ако је први извод f' непрекидна функција и ако је $f'(x) \neq 0$ на посматраном интервалу, онда је f' или позитивна или негативна функција на посматраном интервалу. Као последица овога добијамо да функција f може имати највише једну нулу у посматраном интервалу.

Поред изложеног начина, постоје и бројна другачија извођења Њутновог поступка. Један приступ овом проблему полази од Њутнове теореме

$$f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^{x} f'(u)\,du, \tag{1}$$

где је x_k апроксимација решења α једначине $f(x)=0$.

На примеру апроксимације одређеног интеграла

$$\int_{x_k}^{x} f'(u)\,du$$

Њутн-Котесовим квадратурним формулама $n-$тог реда

$$N_n\left(f';x_k,x\right)=\frac{x-x_k}{n}\sum_{i=0}^{n}A_{n,i}f'\left(\tau_i\right),$$

приказаћемо добијање итеративних поступака.

За чворове посматране квадратурне формуле важи

$$\tau_i=x_k+\xi_i\left(x-x_k\right),$$

при чему су ξ_i су одговарајући чворови за интервал $\left[0,1\right]$,

$$\xi_i=\frac{i}{n},\quad i=0,1,\ldots,n.$$

Из

$$0=f\left(x\right)=f\left(x_k\right)+\int_{x_k}^{x}f'\left(u\right)du\approx f\left(x_k\right)+N_n\left(f';x_k,x\right)$$

добијамо нову једначину

$$f\left(x_k\right)+N_n\left(f';x_k,x\right)=0,$$

односно,

$$f\left(x_k\right)+\frac{x-x_k}{n}\sum_{i=0}^{n}A_{n,i}f'\left(\tau_i\right)=0.$$

Имајући у виду како су дефинисани чворови квадратурне формуле, добијамо једначину

$$f\left(x_k\right)+\frac{x-x_k}{n}\sum_{i=0}^{n}A_{n,i}f'\left(x_k+\frac{i}{n}\left(x-x_k\right)\right)=0.$$

Из ове једначине добијамо имплицитну једначину по x

$$x=x_k-\frac{nf\left(x_k\right)}{\sum_{i=0}^{n}A_{n,i}f'\left(x_k+\frac{i}{n}\left(x-x_k\right)\right)}.$$

Ако x на десној страни последње једначине заменимо са $\tilde{x}_{k+1}$, добићемо нову апроксимацију решења α једначине $f\left(x\right)=0$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{nf\left(x_k\right)}{\sum_{i=0}^{n}A_{n,i}f'\left(x_k+\frac{i}{n}\left(\tilde{x}_{k+1}-x_k\right)\right)}.$$

За $\tilde{x}_{k+1}$ се најчешће бира

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

што је резултат једног корака Њутновог поступка са x_k као почетном вредношћу. Са овако изабраним $\tilde{x}_{k+1}$, добијамо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nf(x_k)}{\sum_{i=0}^{n} A_{n,i} f'\left(x_k - \frac{i}{n}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)} \tag{3}$$

Поступајући на исти начин са примитивним и Гаусовим квадратурним формулама, можемо добити нове итеративне поступке.

2.2 Конвергенција и ред конвергенције

У овом одељку дајемо теореме о локалној и глобалној конвергенцији Њутновог поступка.

2.2.1 Локална конвергенција поступка

Теорема 4. *[4] Нека је $f' \in Lip_\gamma[a,b]$ и нека за неко $m > 0$ важи $|f'(x)| \geq m$ за свако $x \in [a,b]$. Ако једначина $f(x) = 0$ има решење $\alpha \in (a,b)$, онда постоји $\rho > 0$ такво да за x_0 са особином $|x_0 - \alpha| \leq \rho$, низ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ дефинисан Њутновим итеративним поступком*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0,1,2, \ldots$$

постоји и конвергира ка α. При томе важи

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m}|x_k - \alpha|^2, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Из израза $|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m}|x_k - \alpha|^2$ закључујемо да Њутнов поступак квадратно конвергира. Ако је $\gamma \leq 2m$ а за $k-$ту апроксимацију важи $|x_k - \theta| < 10^{-s}$, онда је $|x_{k+1} - \theta| < 10^{-2s}$, што значи да се у случају да Њутнов поступак конвергира број сигурних цифара удвостручује почевши од неког x_k.

Ако се услов $f' \in Lip_\gamma[a,b]$ у претходној теореми замени условом $f \in C^2[a,b]$, тврђење теореме важи. При томе је константа γ одређена као број за који важи $\gamma \geq |f''(x)|$ за $x \in [a,b]$.

2.2.2 Глобална конвергенција поступка

Као што смо у претходној теореми видели, потребно је одредити почетну апроксимацију довољно близу решења једначине коју посматрамо како би Њутнов итеративни поступак конвергирао. Међутим, можемо посматрати и друге услове који пружају више слободе у избору почетне апроксимације.

Теорема 5. *[4] Нека функција $f \in C^2[a,b]$. Ако је $f(a)f(b) < 0$, а f' и f'' не мењају знак на интервалу $[a,b]$, онда за свако $x_0 \in [a,b]$ за које важи*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

Њутнов итеративни поступак конвергира јединственом решењу $\theta \epsilon (a,b)$ једначине $f(x) = 0$ и важи

$\boldsymbol{x \in [a,b]}$	$\boldsymbol{f'(x)} > 0$	$\boldsymbol{f'(x)} < 0$
$\boldsymbol{f''(x)} > 0$	$x_k > x_{k+1}$	$x_k < x_{k+1}$
$\boldsymbol{f''(x)} > 0$	$x_k < x_{k+1}$	$x_k > x_{k+1}$

Табела 1.

3 Модификације Њутновог итеративног поступка

Постоје многобројне модификације Њутновог поступка. Циљ ових модификација је да се повећа ред конвергенције са 2 на 3 или више. То је могуће постићи само ако се повећа и број израчунавања вредности фунцкије или њених извода. Њутнов поступак је реда конвергенције 2 и у једном итеративном кораку се рачунају по једна вредност функције и њеног извода. Због тога је индекс ефикасности овог поступка $\sqrt{2} \approx 1.414$. Када је ред конвергенције поступка 3 а у једном итеративном кораку се рачунају укупно 3 вредности функције и њеног извода добија се индекс ефикасности $\sqrt[3]{3} \approx 1.73$. Различити су путеви којимна се модификује Њутнов поступак. Често се користи релација (1) са различитим апроксимацијама интеграла. На тај начин су добијени и поступци описани у следећа три параграфа. Други приступ је замена извода у Њутновом поступку неком средином одређеном помоћу $f'(x_k)$ и $f'(y_k)$, где је $y_k = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. Више о овом приступу дато је у радовима [5], [7], [8]. Такође, могуће је формирање и читавих фамилија са редом конвергенције 3 и индексом ефикасности $\sqrt[3]{3} \approx 1.732$, као што је дато у [6].

У раду [18] је дата једна нова модификација Њутновог поступка реда конвергенције $1+\sqrt{2} \approx 2.414$ и индекса ефикасности $\sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.554$. Поступак McDougall-Wotherspoon-а из [18] могуће је модификовати, или боље речено уопштити, тако што се за апроксимацију аргумента првог извода уместо аритметичке средине која се појављује, може узети средина типа Ћинија или Столарског. Описаћемо овако насталу модификацију поступка McDougall-Wotherspoon-а и на нумеричким примерима демонстрирати утицај два параметра која се уводе преко уопштених средина.

3.1 Поступак Homeier-а

У раду [9] посматрана је једна модификација Њутновог поступка за решавање једначине $f(x) = 0$. Посматра се итеративни поступак

$$x_{n+1} = \psi_f(x_n) \tag{4}$$

са

$$\psi_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'\left(x + a(x) f(x)\right)}. \tag{5}$$

Конвергенција и ред конвергенције поступка (4) се лако одређује на основу теореме 5.15 из [4]. Довољно је доказати да је $\psi_f(\alpha) = 0$ и $\psi'_f(\alpha) = \psi''_f(\alpha) = 0$. Како је

$$\psi'_f(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'\left(x + a(x) f(x)\right)} + \frac{f(x) f''\left(x + a(x) f(x)\right)\left(1 + a'(x) f(x) + a(x) f'(x)\right)}{\left(f'\left(x + a(x) f(x)\right)\right)^2}$$

и

$$\Psi_f''(x) = -\frac{f''(x)}{f'\big(x + a(x)f(x)\big)} + \frac{2f'(x)f''\big(x + a(x)f(x)\big)\big(1 + a'(x)f(x) + a(x)f'(x)\big)}{\Big(f'\big(x + a(x)f(x)\big)\Big)^2}$$
$$- \frac{2f(x)(f''\big(x + a(x)f(x)\big))^2\big(1 + a'(x)f(x) + a(x)f'(x)\big)^2}{\Big(f'\big(x + a(x)f(x)\big)\Big)^3}$$
$$+ \frac{f(x)f'''\big(x + a(x)f(x)\big)\big(1 + a'(x)f(x) + a(x)f'(x)\big)^2}{\Big(f'\big(x + a(x)f(x)\big)\Big)^2}$$
$$+ \frac{\big(f(x)\big)^2 f''\big(x + a(x)f(x)\big)a''(x)}{\Big(f'\big(x + a(x)f(x)\big)\Big)^2}$$
$$+ \frac{f(x)f''(x + a(x)f(x))(2a'(x)f'(x) + a(x)f''(x))}{(f'\big(x + a(x)f(x)\big))^2}$$

лако се види да је $\psi_f(\alpha) = 0$, $\psi_f'(\alpha) = 0$ и

$$\Psi_f''(\alpha) = -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{2f'(\alpha)f''(\alpha)\big(1 + a(\alpha)f'(\alpha)\big)}{\big(f'(\alpha)\big)^2} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(1 + 2a(\alpha)f'(\alpha))$$

тј. $\psi_f''(\alpha) = 0$ ако је

$$a(\alpha) = -\frac{1}{2f'(\alpha)}$$

Тиме је показана следећа теорема.

Теорема 6. *[9]Нека је $f \in C^3(U)$, где је U околина решења α једначине $f(x) = 0$, и нека је $f'(\alpha) \neq 0$. Тада итеративни поступак (4), (5) са $a(x) = -1/f'(x)$ конвергира кубно.*

Индекс ефикасности овог поступка је $\sqrt[3]{3}$. Очигледно је да је поступак (4), (5) са $a(x) = -1/f'(x)$ могуће записати и на следећи начин

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)},$$

и

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(y_k)}, \quad k = 0,1,\ldots .$$

3.2 Поступак Fernando and Weerakoon

У раду [24] полазећи од (1) аутори дају модификацију Њутновог итеративног поступка описану са (2) и (3), при чему је $n=1$, тј. они користе трапезну формулу за апроксимацију интеграла (1). На овај начин је добијен предиктор-коректор поступак

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{6}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + f'(\tilde{x}_{k+1})}, \quad k = 0,1, \tag{7}$$

Теорема 7. *[24] Нека је $f \in C^3(U)$, где је U околина решења α једначине $f(x)=0$, и нека је $f'(\alpha) \neq 0$. Тада итеративни поступак*(6), (7) *конвергира кубно и важи*

$$e_{k+1} = \left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)e_k^3 + O\left(e_k^4\right)$$

Индекс ефикасности овог поступка је $\sqrt[3]{3}$.

3.3 Поступак Wang-a

У раду [23] је посматрана фамилија итеративних поступака Њутновог типа, реда конвергенције три. Ову фамилију карактерише то што се рачуна једна вредност функције и две вредности првог извода.

Полази се од једначине (1), тј. од

$$f(x) = f(x_k) + \int_{x_k}^{x} f'(t)dt.$$

Различитим апроксимацијама интеграла у претходној једначини изводе се разни итеративни поступци који служе за решавање нелинеарне једначине $f(x) = 0$. Тако је на пример добијен, раније поменут, поступак (6), (7) Fernando-Weerakoon из рада [24] и поступак (4), (5) Frontini-Sormani из [1]. Поступајући као у претходна два параграфа и користећи апроксимацију

$$\int_{x_k}^{x} f'(t)dt \approx (x - x_k)((1-\beta)\, f'(x_k) + \beta f'(x_k - \frac{f(x_k)}{2\beta f'(x_k)})),$$

са $\beta \neq 0$, добијамо фамилију итеративних поступака

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{(1-\beta) f'(x_k) + \beta f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2\beta f'(x_k)}\right)} \tag{8}$$

Приметимо да за $\beta = 1$ добијамо поступак (4), (5) Frontini-Sormani из [1]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}\right)},$$

а за $\beta = \frac{1}{2}$ поступак (6), (7) Fernando-Weerakoon из рада [24]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + f'\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}.$$

Теорема 8. *[23] Нека је α јединствено решење једначине $f(x) = 0$ које припада отвореном интервалу D. Ако је функција f довољно глатка и D и ако је x_0 изабрано довољно близу α, тада је поступак* (8) *кубно конвергентан и важи*

$$e_{k+1} = -\frac{2}{C_1^3}\left(\left(3 + \frac{3}{4\beta}\right) C_1^2 C_3 + 6C_1 C_2^2 + 2C_2^2\right) e_k^3 + O(e_k^4).$$

Индекс ефикасности поступка (8) је $\sqrt[3]{3}$.

3.4 Поступак McDougall-Wotherspoon

У раду [18] аутори посматрају најпре случај када је $f(x)$ квадратна функција и један од њених корена је r. Тада, за произвољно x_0, важи

$$r = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'\left(\frac{x_0 + r}{2}\right)} \tag{9}$$

То је ауторима дало мотивацију да посматрају нови итеративни поступак типа предиктор-коректор где су прве две апроксимације дате са:

$$\tilde{x}_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'\left(\frac{x_0 + \tilde{x}_0}{2}\right)}$$

Као што можемо приметити, почетни предиктор корак је добијен Њутновим поступком, док је коректор корак добијен из десне стране релације (9) са $r = \tilde{x}_0$.

Са $\tilde{x}_0 = x_0$ поступак можемо описати са

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - \frac{f\left(\tilde{x}_k\right)}{f'\left(\frac{x_k + \tilde{x}_k}{2}\right)} \tag{10}$$

$$x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - \frac{f\left(\tilde{x}_{k+1}\right)}{f'\left(\frac{x_k + \tilde{x}_k}{2}\right)} \tag{11}$$

Поступак је веома ефикасан, јер захтева само по једно израчунавање функције и њеног извода током једног потпуног итеративног корака, као и Њутнов поступак. У раду [18] је показано да је ред конвергенције овако дефинисаног итеративног поступка $1+\sqrt{2}$. Значи, овај поступак јесте ефикаснији је од Њутновог итеративног поступка, који је реда конвергенције 2. Индекс ефикасности Њутновог поступка је $\sqrt{2} \approx 1.414$, а поступка (10), (11) је $\sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.554$.

Једно упштење поступка McDougall-Wotherspoon-а добија се тако што се за апроксимацију аргумента првог извода уместо аритметичке средине бројева x_k и $\tilde{x}_k$ користи средина типа Цинија или Столарског истих бројева. Овом уопштењу, његовој конвергенцији, реду конвергенције и индексу ефикасности је посвећен овај параграф.

3.4.1 Опис поступка апроксимације другог извода помоћу Цини средина

Ради лакшег сналажења у ознакама поступак (10), (11) ћемо описати тако што ћемо уместо $\tilde{x}_k$ користити z_k. На тај начин посматрани поступак записујемо на следећи начин.

Нека је за произвољно x_0 и $z_0 = x_0$

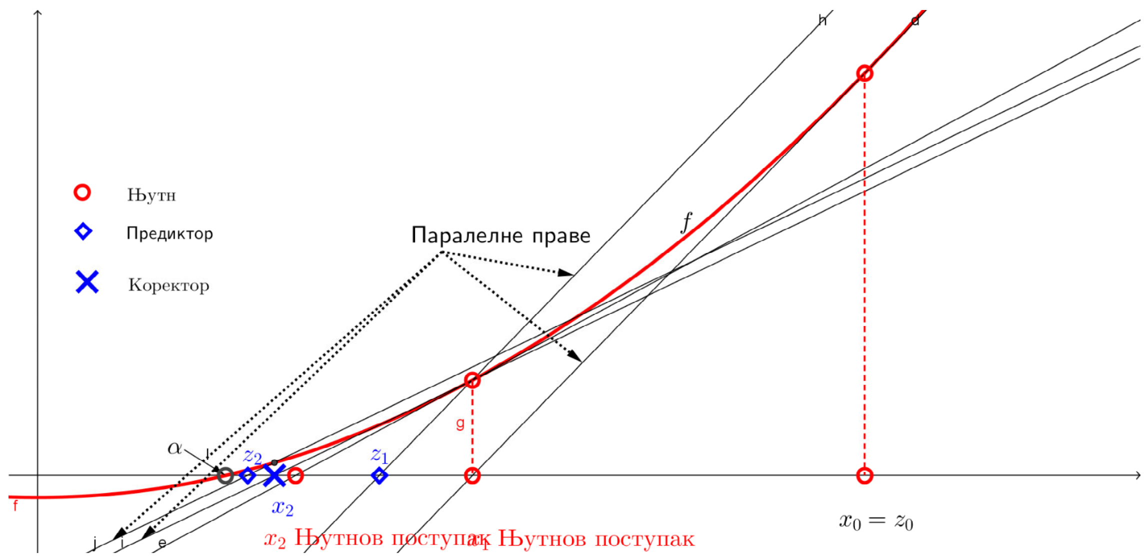
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(S\left(x_n, z_n\right)\right)}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{12}$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - \frac{f\left(x_{n+1}\right)}{f'\left(S\left(x_n, z_n\right)\right)}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{13}$$

где је $S(x, y)$ нека средина бројева x и y. У случају да је

$$S(x,y) = \frac{x+y}{2},$$

тј. да користимо аритметичк средину добијамо поступак (10), (11). На следећој слици приказана је геометријска интерпретација поступка (12), (13).



Слика 1.

3.4.2 Конвергенција

Доказ конвергенције поступка (12), (13) изводимо аналогно доказу конвергенције поступка McDougall-Wotherspoon-а из [18]. При том користимо линеаризацију, тј. одређене функције апроксимирамо одговарајућим Тејлоровим полиномима.

У даљем раду користимо

$$S(x,y) = \begin{cases} x, & x = y \\ G(x,y,p,r), & x \neq y \end{cases} \tag{14}$$

где је

$$G(x,y,p,r) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^p + y^p}{x^r + y^r}\right)^{\frac{1}{p-r}}, & r \neq p \\ \exp\left(\dfrac{x^r \log(x) + y^r \log(y)}{x^r + y^r}\right), & r = p \neq 0 \\ \sqrt{xy}, & r = p = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Чини средина.

Теорема 9. *Нека је* $\alpha \in (a,b)$ *јединствено решење једначине* $f(x)=0$. *Ако је функција* f *довољно глатка и* (a,b) *онда постоји* $\rho > 0$ *такво да за* x_0 *са особином* $|x_0-\alpha| \le \rho$, *поступак* (12), (13) *конвергентан са редом конвергенције* $1+\sqrt{2}$ *и индексом ефикасности* $\sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.554$.

Доказ. Посматрајући разлику апроксимација решења једначине $f(x)=0$ и чланова итеративних низова одређених са (12), (13), $x_n-\alpha$ и $z_n-\alpha$, издвајаћемо водеће чланове грешке и обележићемо их респективно са ε_n и δ_n. Дакле,

$$|x_n-\alpha| \le M\varepsilon_n \tag{16}$$

$$|z_n-\alpha| \le M\delta_n \tag{17}$$

По претпоставци је $z_0 = x_0$, те следи $\delta_0 = \varepsilon_0$.

Из (12) и (13) непосредно следи, за $n=0,1,\dots$,

$$x_{n+1}-\alpha = x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f'(S(x_n,z_n))} \tag{18}$$

$$z_{n+1}-\alpha = x_{n+1}-\alpha-\frac{f(x_{n+1})}{f'(S(x_n,z_n))} \tag{19}$$

па ћемо водећи члан грешке издвојити посматрајући израз

$$\varepsilon_n-\frac{f(\alpha+\varepsilon_n)}{f'(S(\alpha+\varepsilon_n,\alpha+\delta_n))} \tag{20}$$

и

$$\varepsilon_{n+1}-\frac{f(\alpha+\varepsilon_{n+1})}{f'(S(\alpha+\varepsilon_n,\alpha+\delta_n))} \tag{21}$$

Нека је

$$q(x,y) = x-\frac{f(\alpha+x)}{f'(S(\alpha+x,\alpha+y))} \tag{22}$$

и

$$w(x,y,z) = z - \frac{f(\alpha+z)}{f'(S(\alpha+x,\alpha+y))} \tag{23}$$

Користећи Тејлорове развоје

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= q(0,0) + yq^{(0,1)}(0,0) + \frac{1}{2}y^2 q^{(0,2)}(0,0) + xq^{(1,0)}(0,0) + xyq^{(1,1)}(0,0) \\ &+ \frac{1}{2}xy^2 q^{(1,2)}(0,0) + \frac{1}{2}x^2 q^{(2,0)}(0,0) + \frac{1}{2}x^2 yq^{(2,1)}(0,0) + \frac{1}{4}x^2 y^2 q^{(2,2)}(0,0) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} W(x,y,z) &= w(0,0,0) + zw^{(0,0,1)}(0,0,0) + yw^{(0,1,0)}(0,0,0) + yzw^{(0,1,1)}(0,0,0) \\ &+ xw^{(1,0,0)}(0,0,0) + xzw^{(1,0,1)}(0,0,0) + xyw^{(1,1,0)}(0,0,0) + xyzw^{(1,1,1)}(0,0,0) \\ &+ x^2 w^{(2,0,0)}(0,0,0) + y^2 w^{(0,2,0)}(0,0,0) + z^2 w^{(0,0,2)}(0,0,0) \end{aligned} \tag{25}$$

а за апроксимацију средине (14) Тејлоров развој

$$Sr(x,y) = x - \frac{1}{2}(x-y) + \frac{(x-y)^2(p+r-1)}{8x} \tag{26}$$

добијен развојем функције $S(x,y)$ по y у тачки x, добијамо изразе за ε_n и δ_n користећи програмски пакет *Mathematica*. Наиме, из (18) и (21) користећи (24) и (25) добијамо изразе који садрже различите степена основе ε_0. Издвајањем степена са најмањим експонентом добијамо водеће чланове грешке ε_n и δ_n. У следећој табели су приказани ε_n и δ_n за $n = 0,1,\ldots,6$, при чему је $K = c_2$.

n	0	1	2	3	4	5	6
ε_n	ε_0	$K\varepsilon_0^{\;2}$	$2K^4\varepsilon_0^{\;5}$	$2^2K^{11}\varepsilon_0^{\;12}$	$2^5K^{28}\varepsilon_0^{\;29}$	$2^{12}K^{69}\varepsilon_0^{\;70}$	$2^{29}K^{168}\varepsilon_0^{\;169}$
δ_n	ε_0	$2K^2\varepsilon_0^{\;3}$	$2K^6\varepsilon_0^{\;7}$	$2^3K^{16}\varepsilon_0^{\;17}$	$2^7K^{40}\varepsilon_0^{\;41}$	$2^{17}K^{98}\varepsilon_0^{\;99}$	$2^{41}K^{238}\varepsilon_0^{\;239}$

Табела 2.

Ако дефинишемо

$$\rho_0 = K\varepsilon_0, \quad \rho_n = K\varepsilon_n, \quad \sigma_n = K\delta_n,$$

добијамо следећу табелу

n	0	1	2	3	4	5	6
ρ_n	ρ_0	$\rho_0^{\ 2}$	$2\rho_0^{\ 5}$	$2^2\rho_0^{\ 12}$	$2^5\rho_0^{\ 29}$	$2^{12}\rho_0^{\ 70}$	$2^{29}\rho_0^{\ 169}$
σ_n	ρ_0	$2\rho_0^{\ 3}$	$2\rho_0^{\ 7}$	$2^3\rho_0^{\ 17}$	$2^7\rho_0^{\ 41}$	$2^{17}\rho_0^{\ 99}$	$2^{41}\rho_0^{\ 239}$

Табела 3.

Ако посматрамо само експоненте степена са основом ρ_0 у табели 3, добијамо за врсту ρ_n следећи низ

$$2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, \ldots$$

а за врсту σ_n

$$1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601, 47321, 114243, 275807, \ldots$$

Чланови првог низа формирају се по правилу

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \quad a_1 = 5, \\ a_{n+2} &= 2a_{n+1} + a_n, \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Користећи се наредбом

RSolve[{a[n+2]==2a[n+1]+a[n], a[0]==2, a[1]==5},a,n]

у Mathematica-и добијамо општи члан низа

$$a_n = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} \tag{27}$$

Слично, за други низ

$$1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601, 47321, 114243, 275807, \ldots$$

важи

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \quad b_1 = 3, \\ b_{n+2} &= 2b_{n+1} + b_n, \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Користећи се наредбом

RSolve[{b[n+2]==2b[n+1]+b[n], b[0]==1, b[1]==3},b,n]

у *Mathematica*-и добијамо општи члан низа

$$b_n = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} \tag{28}$$

Знајући општи члан a_n добијамо

$$\rho_{n+1} = 2^{a_{n-2}} \rho_0^{\,a_n} . \tag{29}$$

Како је

$$\rho_n = 2^{a_{n-3}} \rho_0^{\,a_{n-1}} \le \left(2\rho_0\right)^{a_n - 1} \tag{30}$$

добијамо да је за $2\rho_0 < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 . \tag{31}$$

Лако се проверава да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1+\sqrt{2} \tag{32}$$

што значи да је за произвољно мало $\varepsilon > 0$ и довољно велико n

$$a_n \le \left(1+\sqrt{2}+\varepsilon\right) a_{n-1}$$

што на основу (29) даје

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= 2^{\left(1+\sqrt{2}\right)a_{n-3}} \rho_0^{\left(1+\sqrt{2}\right)a_{n-1}} \cdot 2^{\varepsilon a_{n-3}} \cdot \rho_0^{\,\varepsilon a_{n-1}} \\ &\le 2^{\left(1+\sqrt{2}\right)a_{n-3}} \rho_0^{\left(1+\sqrt{2}\right)a_{n-1}} \cdot \left(2\rho_0\right)^{\varepsilon a_{n-1}} \\ &\le M\left(2^{a_{n-3}} \rho_0^{\,a_{n-1}}\right)^{1+\sqrt{2}} = M \rho_n^{\,1+\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{33}$$

Доказали смо да је $\rho_{n+1} \le M \rho_n^{\,1+\sqrt{2}}$, што значи да низ $\{x_n\}$ има ред конвергенције $1+\sqrt{2}$. Исти закључак добијамо и користећи *Mathematica*-у директним рачунањем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_{n+1}}{\left(\rho_n\right)^{1+\sqrt{2}}} = 1 . \tag{34}$$

На потпуно исти начин добијамо за низ $\{\sigma_n\}$

$$\sigma_{n+1} = 2^{b_{n-2}} \rho_0^{\,b_n} \tag{35}$$

и за $2\rho_0 < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n+1} = 0 \tag{36}$$

Лако се проверава да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \sqrt{2} \tag{37}$$

што значи да итеративни поступак конвергира и да низ $\{z_n\}$ има ред конвергенције $1+\sqrt{2}$.

4 Нумерички експерименти

У овом делу рада приказаћемо нумеричке резултате са поступцима описаним у претходном поглављу. Сва рачунања су урађена у програмском пакету *Mathematica* 8. Прецизност је повећана на 20000 цифара са *SetPrecision* функцијом. Користили смо следећи излазни критеријум: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ и $|f(x_k)| < \varepsilon$ где је α тачно решење посматране једначине. У случајевима када тачно решење није доступно, користили смо његову апроксимацију која је рачуната са 10000 цифара, али смо приказали само 20 цифара. Нумерички ред конвергенције *ord* рачунат је према

$$ord_k = \frac{\ln(|x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|)}{\ln(|x_k - \alpha|/|x_{k-1} - \alpha|)}, \qquad k = 1,2,\ldots$$

и представља апроксимацију реда конвргенције p, а апроксимације C_k асимптотске константе грешке C рачунате су према

$$C_k = \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}, \qquad k = 1,2,\ldots$$

Посматрали смо три примера из рада [18] са истим стартним вредностима. Наши резултати који се односе на примену аритметичке средине потпуно се подударају са резултатим из рада [18]. Променом параметара r и p добијамо друге средине типа Цини и као што се из следећих табела види добијамо и боље резултате. Утицај параметара на ред конвергенције не постоји. Не може се предвидети који избор параметара доприноси бољој апроксимацији тачног решења.

У табели 4 приказани су резултати решавања прве једначине из [18] $f(x) = 0$, где је $f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$, са почетном апроксимацијом $x_0 = 1$. Тачно решење је α=1.4044916482153412260350868177868680771777$\ldots$.

Табеле 5—10 садрже резултате примене нашег поступка са у табелама наведеним избором средина. У врсти Цини средина наведен је избор параметара који дефинише средину са резултатима бољим него што даје аритметичка средина из [18]. Није тражен најбољи избор параметара из неког скупа, него је наведен само један који је бољи од избора $r = 0, \quad p = 1$ (аритметичка средина).

n	x_n	z_n	$\lvert x_n-\alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	*ord*
1	3.000000000	3.000000000	1.60×10^{0}	7.98×10^{0}	-
2	1.729167524	1.567545353	3.25×10^{-1}	1.01×10^{0}	-
3	1.435098994	1.412553248	3.06×10^{-2}	7.78×10^{-2}	1.4832971
4	1.404679767	1.404497170	1.88×10^{-4}	4.67×10^{-4}	2.1561443
5	1.404491649	1.404491648	8.14×10^{-10}	2.02×10^{-9}	2.4255919
6	1.404491648	1.404491648	7.87×10^{-23}	1.95×10^{-22}	2.4262793
7	1.404491648	1.404491648	3.10×10^{-54}	7.69×10^{-54}	2.4131095
8	1.404491648	1.404491648	4.63×10^{-130}	1.15×10^{-129}	2.4144052
9	1.404491648	1.404491648	4.08×10^{-313}	1.01×10^{-312}	2.4141807
10	1.404491648	1.404491648	4.74×10^{-755}	1.18×10^{-754}	2.4142192

Табела 4.

$f(x)=\sin^2 x - x^2 + 1$, $x_0 = 1$, α=1.404491648215341226035086817786868077177…					
Поступак	r	p	n	$\lvert x_n-\alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$
аритметичка средина	0	1	7	3.54×10^{-113}	8.79×10^{-113}
хармонијска средина	0	–1	7	4.26×10^{-93}	1.06×10^{-92}
геометријска средина	0	0	7	5.25×10^{-101}	1.30×10^{-100}
Џини средина	2	3	7	3.44×10^{-157}	8.54×10^{-157}

Табела 5.

$f(x)=\sin^2 x - x^2 + 1$, $x_0 = 3$, α=1.404491648215341226035086817786868077177…					
Поступак	r	p	n	$\lvert x_n-\alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$
аритметичка средина	0	1	7	4.63×10^{-130}	1.15×10^{-129}
хармонијска средина	0	–1	7	7.47×10^{-132}	1.85×10^{-131}
геометријска средина	0	0	7	5.99×10^{-131}	1.49×10^{-130}
Џини средина	–4	2	7	9.23×10^{-133}	2.29×10^{-132}

Табела 6.

$f(x)=x^2 - e^x - 3x + 2$, $x_0 = 2$, α=0.2575302854398607604553673049372417813845…					
Поступак	r	p	n	$\lvert x_n-\alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$
аритметичка средина	0	1	6	9.26×10^{-108}	3.50×10^{-107}
хармонијска средина	0	–1	6	1.08×10^{-110}	4.08×10^{-110}
геометријска средина	0	0	6	4.95×10^{-109}	1.87×10^{-108}
Џини средина	0	–2	6	1.14×10^{-112}	4.31×10^{-112}

Табела 7.

$f(x)=x^2-e^x-3x+2$, $x_0=3$, α=0.257530285439860760455367304937241781 3845…					
Поступак	r	p	n	$\lvert x_n-\alpha\rvert$	$\lvert f(x_n)\rvert$
аритметичка средина	0	1	7	1.96×10^{-122}	7.40×10^{-122}
хармонијска средина	0	–1	7	4.61×10^{-134}	1.74×10^{-133}
геометријска средина	0	0	7	1.73×10^{-127}	6.55×10^{-127}
Ђини средина	–4	2	7	4.62×10^{-141}	1.75×10^{-140}

Табела 8.

$f(x)=e^{x^2+7x-30}-1$, $x_0=3.25$, α=3.000000000000000000000000000000000000…					
Поступак	r	p	n	$\lvert x_n-\alpha\rvert$	$\lvert f(x_n)\rvert$
аритметичка средина	0	1	9	8.85×10^{-126}	1.15×10^{-124}
хармонијска средина	0	–1	9	5.31×10^{-126}	6.91×10^{-125}
геометријска средина	0	0	9	6.86×10^{-126}	8.92×10^{-125}
Ђини средина	0	–3/2	9	4.68×10^{-126}	6.08×10^{-125}

Табела 9.

$f(x)=e^{x^2+7x-30}-1$, $x_0=3.5$, α=3.000000000000000000000000000000000000…					
Поступак	r	p	n	$\lvert x_n-\alpha\rvert$	$\lvert f(x_n)\rvert$
аритметичка средина	0	1	12	5.38×10^{-137}	7.00×10^{-136}
хармонијска средина	0	–1	12	1.79×10^{-137}	2.33×10^{-136}
геометријска средина	0	0	12	3.11×10^{-137}	4.04×10^{-136}
Ђини средина	–3	–2	12	1.97×10^{-138}	2.56×10^{-137}

Табела 10.

5 Закључак

У мастер раду посматрали смо Њутнов поступак за решавање нелинеарних једначина и његове модификације. Поред приказа неких познатих модификација Њутновог поступка које су реда конвергенције 3 и $1+\sqrt{2}$ дата је и једна нова двопараметарска модификације тог поступка реда конвергенције $1+\sqrt{2}$. Ова модификација је заснована и на апроксимацијама извода функције Џини срединама две познате апроксимације првог извода. Џини средине садрже и два параметра, који као специјалне изборе дају аритметичку, хармонијску и геометријску средину. Такође, избором тих параметара можемо утицати и на асимптотску константу грешке. Средине типа Столарског имају потпуно исту улогу као и средине типа Џини и сви елементи разматрања, које смо спровели за Џини средине, потпуно су исти.

Оригинални део мастер рада представља формирање нове фамилије поступака, доказ њене конвергенције и одређивање асимптотске константе грешке. Утицај параметара Џини средина на формирање асимптотске константе грешке приказана је првенствено кроз нумеричке примере.

У четвртом делу рада приказано је више резултата изведених експеримената који су урађени у програмском пакету *Mathematica.* Примери су узети из релевантних радова. Нумерички резултати су у складу са теоријским разматрањима.

6 Литература

[1] Frontini, M., Sormani, E., Some variant of Newton's method with third-order convergence, Appl. Math. Comput. 140 (2003) 419–426.

[2] Gander, W., On Halley's iteration method, Amer. Math. Monthly 92 (1985), pp. 131–134.

[3] Haible, B., CLN, a class library for numbers, 1996 Available from http://www.ginac.de/CLN/.

[4] Herceg D., Krejić N., Numerička analiza, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[5] Herceg, D., Herceg, Đ., Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 219,11,(2013), 6126-6133.

[6] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 2010, 1-9.

[7] Herceg, Đ., Herceg, D., Sixth-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics, 267(2014), 244–253.

[8] Herceg, Đ., Herceg, D., Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.

[9] Homeier, H., A modified Newton method for root finding with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 157 (1) (2003) 227–230.

[10] Homeier, H.H.H., On Newton-type methods with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), 425–432.

[11] Jackett, D.R., McDougall, T.J., Feistel, R., Wright, D.G., Griffies, S.M., Algorithms for density, potential temperature, conservative temperature and freezing temperature of seawater, J. Atmos. Ocean. Technol. 23 (2006) 1709–1728.

[12] Jarratt, J., Some efficient fourth order multipoint methods for solving equations, BIT 9 (1969) 119–124.

[13] Kou, J., Li, Y.,Wang, X., Third-order modification of Newton's method, Journal of Computational and Applied Mathematics 205 (2007), 1–5

[14] Kou, J., Li, Z., Wang, X., A modification of Newton method with third-order convergence, Applied Mathematics and Computation 181 (2006), 1106–1111.

[15] Kou, J., The improvements of modified Newton's method, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 602–609.

[16] McDougall, T.J., Barker, P.M., Getting started with TEOS-10 and the Gibbs Seawater (GSW) Oceanographic Toolbox, 2011, p. 28, SCOR/IAPSO WG127, ISBN 978-0-646-55621-5. Available from www.TEOS-10.org.

[17] McDougall, T.J., Jackett, D.R., Wright, D.G., Feistel, R., Accurate and computationally efficient algorithms for potential temperature and density of seawater, J. Atoms. Ocean. Technol. 20 (2003) 730–741.

[18] McDougall, T.J., Wotherspoon, S.J., A simple modification of Newton's method to achieve convergence of order $1 + \sqrt{2}$, Applied Mathematics Letters 29 (2014) 20–25.

[19] Ostrowski A.M., Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press Inc., 1966.

[20] Scavo, T.R., Thoo, J.B., On the geometry of Halley's method, Amer. Math. Monthly 102 (5) (1995) 417–426.

[21] Soleymani, F., Khattri, S.K. Vanani, S.K., Two new classes of optimal Jarratt-type fourth-order methods, Appl. Math. Lett. 25 (2012) 847–853.

[22] Traub J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.

[23] Wang, P., A third-order family of Newton-like iteration methods for solving nonlinear equations, J. Numer. Math. Stoch. 3 (2011) 13–19.

[24] Weerakoon, S., Fernando, T.G.I., A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, Appl. Math. Lett. 13 (2000) 87–93.

7 Биографија

Дуња Маринковић је рођена 13. новембра 1990. године у Оџацима, где је 2005. завршила основну школу „Бранко Радичевић“ као носилац Вукове дипломе и као најбоља у својој генерацији. Исте године уписала се на општи смер Гимназије и економске школе „Јован Јовановић Змај“. Завршила је средњу школу 2009. поново као носилац Вукове дипломе и ђак генерације. Те године уписала се на Природно-математички факултет у Новом Саду, на одсек за математику. Основне студије завршила је 2012. године са просечном оценом 10 и исте године се уписала на мастер студије, модул настава математике, на Природно-математичком факултету у Новом Саду. На мастер студијама положила је све испите предвиђене планом и програмом и стекла право одбране мастер рада.

Нови Сад, децембар 2014. Дуња Маринковић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР
Идентификациони број:
ИБР
Тип документације: Монографска документација
ТД
Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ
Врста рада: Мастер рад
ВР
Аутор: Дуња Маринковић
АУ
Ментор: др Драгослав Херцег
МН

Наслов рада: Једноставне модификације Њутновог поступка типа предиктор-коректор

МР
Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП
Језик извода: српски и енглески
ЈИ
Земља публиковања: Србија
ЗП
Уже географско подручје: Војводина
УГП
Година: 2014.
ГО
Издавач: Ауторски репринт
ИЗ
Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3
МА
Физички опис рада: 4 поглавља/ 34 стране/ 10 табела/ 24 литература/1 слика/ 1 фотографија
ФО
Научна област: Математика
НО
Научна дисциплина: Нумеричка математика
НД
Кључне речи: поступак, ред конвергенције, једначина грешке
ПО
УДК:
Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику
ЧУ
Важна напомена:
ВН

Извод:

У мастер раду посматрамо неке нумеричке поступке за решавање нелинеарне једначине $f\left(x\right)=0$ са једном непознатом, који се заснивају на модификацијама Њутновог поступк и дајемо неке нове варијанте Њутновог поступка. У посматраним модификацијама први извод се замењује Цини средином две познате вредности првог извода и садржи два параметра. Анализа конвергенције показује да је ред конвергенције $1+\sqrt{2}$. Нови поступак у сваком итеративном кораку захтева једно израчунавање

функције и једно израчунавање извода. Нумерички резултати показују да је нова модификација Њутновог поступка ефикасна.

ИЗ
Датум прихватања теме од стране НН већа: 10.4.2014.
ДП
Датум одбране:
ДО
Чланови комисије:
КО

Председник:	Др Хелена Зарин, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан:	Др Ђорђе Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Ментор:	Др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Dunja Marinković
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Title: Simple modifications of Newton's method of predictor-corrector type
XI
Language of text: Serbian (Cyrillic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 4 chapters/ 34 pages/ 10 tables/ 24 references/ 1 picture/ 1 photograph
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: method, order of convergence, equation error
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:

Abstract: In this paper, we consider some numerical methods for solving nonlinear equations $f\left(x\right)=0$ with one unknown, which are based on modifications of Newton's method, and present some new variants of Newton's method. In considered methods the first derivative is replaced by Gini's means between the first derivatives and depend on two parameters. Analysis of convergence shows that the new methods have $1+\sqrt{2}$ convergence. Per iteration the new methods require one evaluations of the function and one of its first derivative. Numerical results show that the new methods are efficient.

AB
Accepted by the Scientific Board on: 10.4.2014.

ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB

President:	dr Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member:	dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad