



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



КВАДРАТ

мастер рад

ментор:

проф. др Невена Пушић

студент:

Драгиња Прокић

Нови Сад, 2012.

Садржај

Предговор	3
Ознаке	5
1 Увод	6
2 Геометријски докази неких разлагања квадрата	12
2.1 Разлагање квадрата кроз историју	12
2.2 Разлагање квадрата на једнакостранични троугао (5 полигона).....	19
2.3 Разлагање једнакостраничног троугла на квадрат (4 полигона).....	22
2.4 Разлагање паралелограма на квадрат	23
2.5 Разлагање правилног петоугла и шестоугла на квадрат	31
2.6 Методе разлагања	34
2.7 Разложива једнакост полигона	38
3 Примена трансформације квадрата	48
3.1 По чему је квадрат „бољи“ од других четвороуглова?	48
3.2 Помоћне конструкције при пресавијању листа хартије	50
3.3 Квадрат квадрата.....	55
3.4 Процена вредности драгог камена на основу величине	58
3.5 Квадрат описан око квадрата.....	59
3.6 Савршенсто квадратуре.....	63
3.7 Квадрат и електрично коло	65
Литература	73
Биографија	74

Предговор

Овај мастер рад посвећен је једној теми комбинаторне геометрије која се односи на разлагање фигура, у нашем случају квадрата. Под разлагањем неке фигуре подразумевамо приказивање те фигуре као уније њених делова, који представљају поново фигуре, при чему два дела могу да имају у пресеку само делове руба (нема површинских преклапања).

У уводној глави је описан проблем разлагања неке фигуре (квадрата) и састављања нове фигуре од добијених делова инспирисан танграмом. За решавање таквих проблема потребно је доста сналажљивости и инвентивности да би се нашло бар једно решење. Овде су дате и основне дефиниције појма разлагања и разложиве једнакости две фигуре.

Друга глава је посвећена углавном доказивањима разложиве једнакости квадрата и неке фигуре (полигона или уније полигона). Ови атрактивни проблеми имају могућност различитих решења. Нека решења која су дата потичу још из античког доба, али су временом добили и једноставнија решења, док за друге још увек влада „спортско“ интересовање и неретко су задаци на математичким олимпијадама и другим математичким такмичењима, као што је задатак на почетку трећег поглавља у којем ученици треба да прошире спортско игралиште. Такође овде излажемо и технике којима се добијају нека решења посматраног проблема разлагања. На самом крају ове главе дајемо два доказа да су два полигона истих површина разложиво једнака.

Трећа глава је посвећена применама разлагања квадрата. У њој је дато неколико изузетних особина квадрата и неочекиване аналогije – нпр. аналогија између проблема разлагања правоугаоника на коначан број квадрата и Кирхофових правила у електричном колу. Посебно, дат је пример поделе квадрата на 26 неподударних квадрата. Разлагање квадрата у неке друге раванске фигуре, не користе се само за геометријску забаву него имају и практичну примену. Те идеје могу помоћи у осмишљавању неких иновација, као нпр. рационално коришћење материјала у искоришћавању тзв. „отпада“ – комадића коже, тканине, дрвета итд. који се трансформишу у корисне ствари. Применом ових идеја у сечењу индустријских материјала, постигнуто је много, што се тиче економског развоја у Русији, током шездесетих година прошлог века. [11]

Ауторови коментари и оригинална ауторова решења појединих проблема су у тексту означени са (А). Цртежи у овом раду су рађени у програму GeoGebra 3.2., док су цртежи везани за Методе разлагање преузете из [14].

На овом месту користим прилику да се захвалим свима који су ми, на било који начин помогли да овај мастер рад успешно приведем крају.

Аутор се захваљује др Олги Бодрожи – Пантић, редовном професору ПМФ-а у Новом Саду, и др Градимиру Војводићу, редовном професору ПМФ-а у Новом Саду, који су прочитали рукопис и дали низ веома корисних примедби.

Посебну захвалност дугујем својој ментору др Невени Пушић, редовном професору ПМФ-а у Новом Саду, која је увек имала времена и разумевања и пуно ми помогла не само током овог рада, већ и током студирања.

Овом приликом се захваљујем и својој породици, родитељима Синиши и Јованци, браћи Младену, Ивану и Александру који су ми представљали највећу подршку не само током писања овог рада, него и током живота.

Нови Сад, јануар 2012.

Име и презиме
Драгиња Прокић

Ознаке

N - скуп свих природних бројева

$A - B - C$ - тачка B се налази између тачака A и C на истој правој

$In(\varphi)$ - унутрашњост скупа φ

$Ex(\varphi)$ - спољашњост скупа φ

$Bd(\varphi)$ - руб скупа φ

$p(A, B)$ - права кроз тачке A и B

$pp[A, B)$ - затворена полуправа са почетком у тачки A којој припада тачка B

$tr[a, b]$ - затворена трака заједно са рубним (паралелним) правама a и b

$l \parallel v$ - праве l и v су паралелне

$l \perp v$ - праве l и v су нормалне

$S(F)$ - вредност површине фигуре F

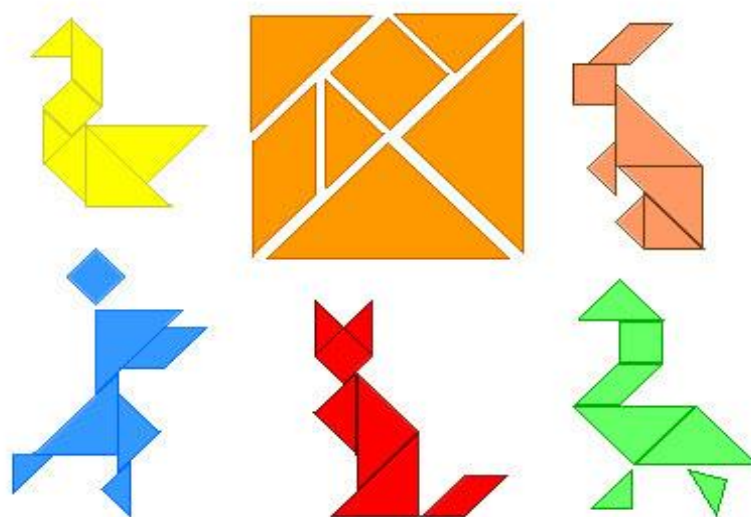
$p(F)$ - вредност обима (периметра) фигуре F

$\Phi \approx \varphi$ - фигуре Φ и φ су сличне

$\Phi \cong \varphi$ - фигуре Φ и φ су подударне

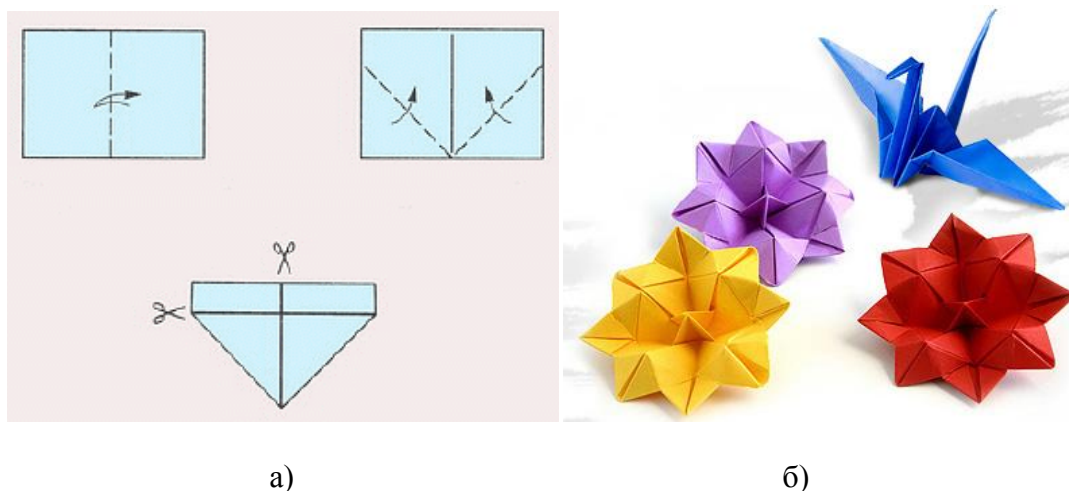
1 Увод

Прва асоцијација када се спомене разлагање квадрата је танграм (слика 1.1.). Танграм је древна кинеска игра која се састоји од седам делова (танова). Реч „танграм“ на кинеском значи „седам плочица мудрости“. Једна од легенди о настанку танграма каже да се слуга неког кинеског цара, носећи веома вредну керамичку плочицу квадратног облика, спотакао и пао. И плоча се сломила на седам делова. Покушавајући да их сложи у квадратни облик, слуга је створио разне фигуре животиња, људи и ствари. [18]



Слика 1.1.

Још једна асоцијација на разлагање квадрата која долази из Јапана је оригами. Преведено са јапанског „оригами“ значи „пресавијен цвет“ у земљи излазећег сунца уметност оригами се назива уметност Цео лист. Најважније правило оригамија је недодати или одузети нешто екстра. Овај закон прати вековима све оригами уметнике. Већина програма оригамија захтева коришћење квадрата одређене величине. Довољно је само савијати правоугаони лист А4, као на слици 1.2. а) да би се добиле различите фигуре, неке од њих су представљене на слици 1.2. б). [20]



Слика 1.2.

У књизи [12], квадрат се пореди са механизмом, како би се дочарале све занимљиве особине у разлагању квадрата. Дословце стоји: „Квадрат је веома сличан механизму са тачно одређеним деловима, на које се може разложити и из њих се поново може саставити нови механизам“.

Три табеле дате испод приказују девет начина на које се квадрат може разложити, сваки посвећен решавању једног или више проблема следеће формулације:

Дату фигуру (или унију фигура), која има површину једнаку површини разложеног квадрата, разложити на делове тако да се може успоставити бијекција између скупа делова на које је разложен квадрат и скупа делова на које је разложена та фигура (унија фигура) при чему су придружени делови међусобно подударни.

Дакле, наведени проблем тражи да од делова квадрата (датог разлагања) саставимо тражену фигуру (геометријску фигуру). Примећујемо да је овај проблем инспирисан танграмом. При решавању танграма дозвољава се да се делови квадрата окрећу, тј. мењају обе стране делова (стога се сугерише да се обе стране квадрата обоје истом бојом). Ако бисмо захтевали у горњем проблему да су придружени делови квадрата и фигуре не само подударни, већ и једнако оријентисани, то би одговарало забрани окретања делова танграма. Приметимо, такође, да би овај проблем био тежи уколико не би било дато разлагање квадрата. Проблем би се тада састојао у проналажењу разлагања и квадрата и дате фигуре исте површине која омогућавају успостављање бијекције између њихових скупова делова и доказивању подударности и једнаке оријентисаности одговарајућих делова.

Најпре прецизно дефинишимо појам разлагања фигуре и разложиве једнакости два полигона.

Дефиниција 1.1. [3]: *За ограничену дводимензионалну фигуру F кажемо да је разложива на дводимензионе фигуре $F_1, F_2, \dots, F_k$ ($k \in \mathbb{N}$) ако важи*

$$1. \quad F = \bigcup_{i=1}^k F_i ;$$

$$2. \quad \text{In}(F_i) \cap \text{In}(F_j) = \emptyset \text{ за } i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j.$$

За сваку од фигура F_i ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) кажемо да се са преосталих $k-1$ фигура допуњује до фигуре F .

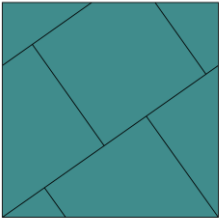
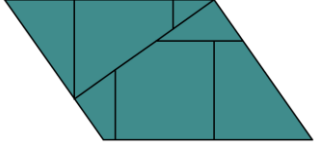
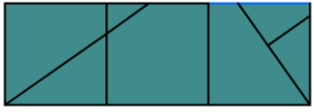
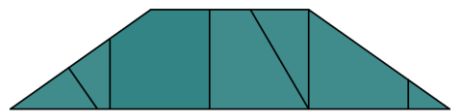
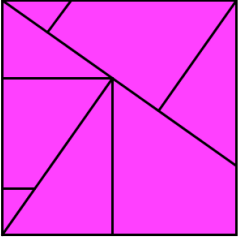
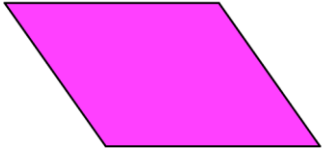
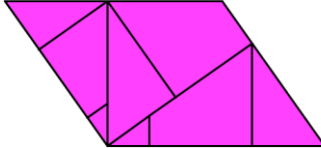
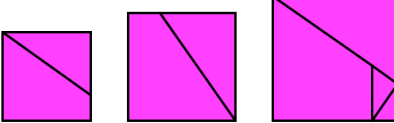
У основи разлагања фигуре на две фигуре лежи такозвана Тета-теорема [3] чији доказ за полигонални и општи случај се може наћи у [16].

У [3] се даје дефиниција тзв. *разложиве једнакости фигуре* коју за потребе овог мастер рада мало модификујемо у смислу да под фигуром подразумевамо полигон или унију неких полигона.

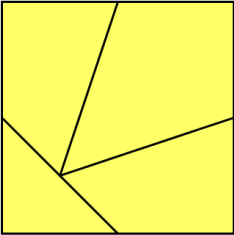
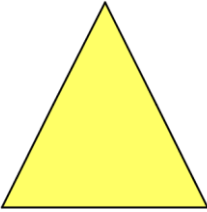
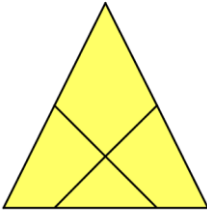
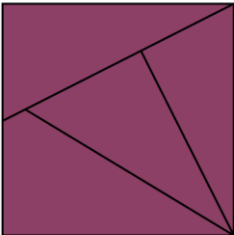
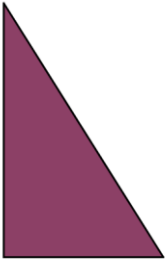
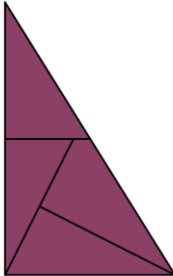
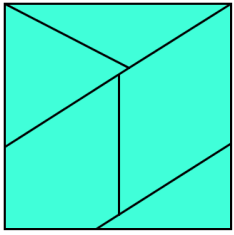
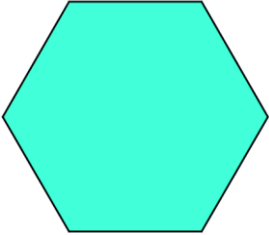
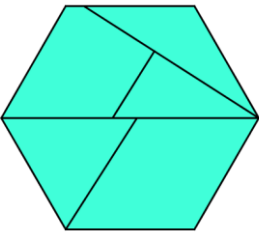
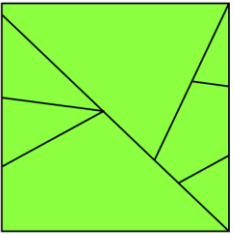
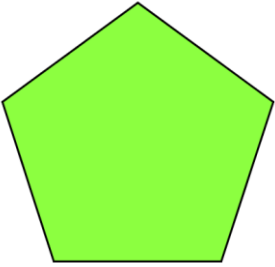
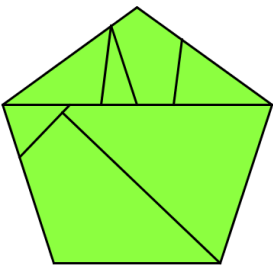
Дефиниција 1.2. [3]: За две ограничене дводимензионалне фигуре F и G кажемо да су **разложиво једнаке** ако постоји природан број k такав да се фигура F може разложити на k дводимензионих фигура $F_1, F_2, \dots, F_k$, а фигура G на исти број неких дводимензионалних фигура $G_1, G_2, \dots, G_k$, при чему је за свако $i=1, 2, \dots, k$, фигура F_i подударна и једнако орјентисана¹ са фигуром G_i . Кажемо такође да се фигура F **разлаже** (или **трансформише**) на фигуру G .

Дакле, описани проблем са почетка ове главе се састоји у доказивању разложиве једнакости квадрата и дате фигуре при чему се решење сугерише (дато је разлагање квадрата које обезбеђује доказ разложиве једнакости).

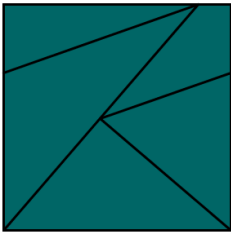
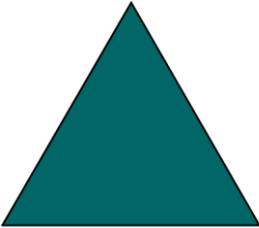
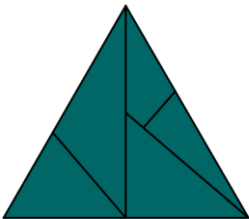
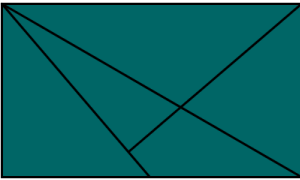
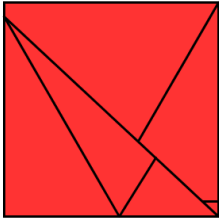
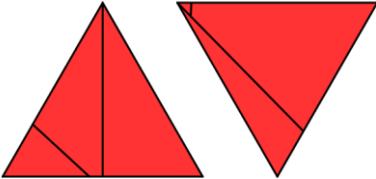
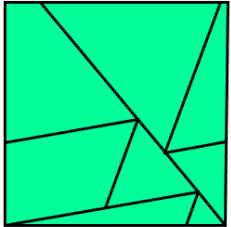
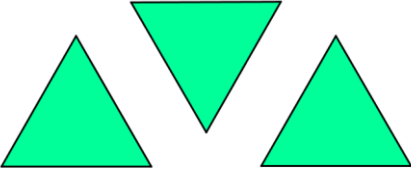
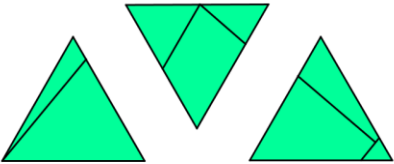
¹ Фигура G_i се може добити од фигуре F_i само применом транслације и ротације без осних симетрија.

Ред. бр.	Квадрат	Фигура		Решење
1.		Три квадрата		
2.		Паралелограм		
3.		Правоугаоник		
4.		Паралелограм		
5.		Трапез		
6.		Паралелограм		
7.		Три троугла чије се површине односе 2 : 3 : 4		

Табела 1.

Ред. бр.	Квадрат	Фигура		Решење
8.		Једнакокраки троугао		
9.		Правоугли троугао		
10.		Правилан шестоугао		
11.		Правилан петоугао		

Табела 2.
10

Ред. бр.	Квадрат	Фигура		Решење
12.		Једнакостранични троугао		
13.		Правоугаоник		
14.		Два једнакостарична троугла		
15.		Три једнакостранична троугла		

Табела 3.

2 Геометријски докази неких разлагања квадрата

2.1 Разлагање квадрата кроз историју

Задатак у коме је потребно доказати разложиву једнакост две фигуре био је познат још арапским математичарима. Тада се овакви задаци јављају као практични проблеми геодета, грађевинара и архитеката древног света. Постојале су практичне технике и правила која нису валидна и наравно, многа од њих су погрешна.

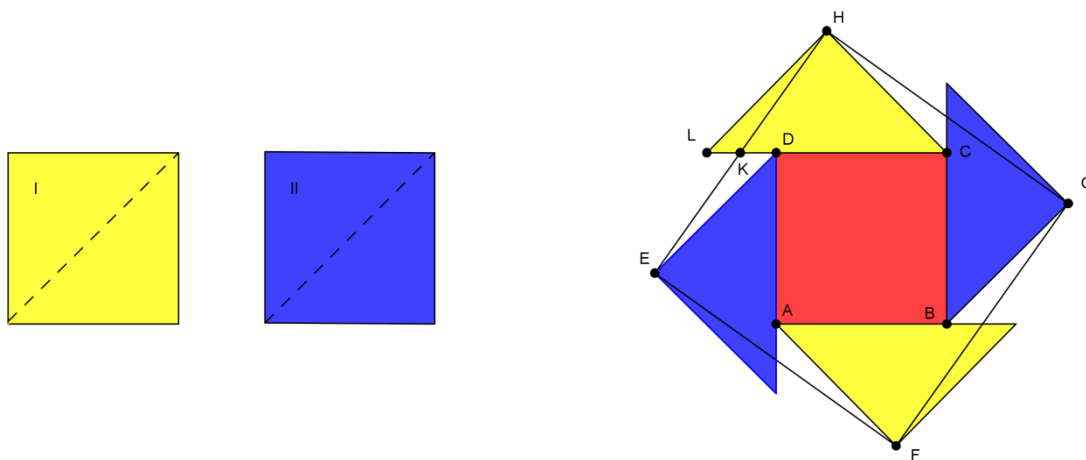
Један од најзначајнијих арапских математичара, Абдул Вефа, живео је у X веку, решио је неколико питања која се тичу разлагања раванских фигура.

Из књиге „Књига о геометријским конструкцијама“, сачувано је неколико листова на којима пише:

„У овој књизи проширићемо знање о раванским фигурама, поставићемо задатке за чије решење је потребно много практичног рада. До једног таквог задатка долазимо приликом разлагања квадрата како би од њега саставили три мање подударна квадрата. Или имамо обрнут случај, када мање квадрате разлажемо у један квадрат. Имајући у виду овакве задатке, даћемо основне принципе разлагања фигура једне у другу, јер све методе које су до сада коришћене крајње су непоуздане и врло лоше, иако су на основу њих произведени разни производи.“

Да бисмо решили овај проблем у оба смера, потребно је три дата подударна квадрата и један квадрат, који има површину једнаку суми површина три квадрата са мањим странама, разложити одговарајућим дужима на неки број полигона тако да се између њихових делова може успоставити бијекција, при чему су придружене фигуре подударне.

Абдул Вефа је овај проблем решио разбијајући три подударна квадрата и квадрат чија је површина једнака збиру површина три квадрата, на по девет полигона. (Слика 2.1.) [8]



слика 2.1.

Доказ следи из подударности троуглова $\triangle HLK \cong \triangle EKD$ ($HL = ED$, $\angle HLK = \angle EDK = 45^\circ$ и $\angle HKL = \angle EKD$) и других троуглова подударних по паровима.

Ово решење је сагласно са Абдул Вефиним: „прецизно и истовремено задовољава праксу“.

Разматрајући задатак 1. из Табеле 1., видимо да се тај проблем може решити, тако што квадрат и три подударна квадрата разбијамо одговарајућим дужима на седам делова.

Али и то није крај. Број потребних делова квадрата се може свести чак на шест.

Имамо два начина да успоставимо обострано једнозначно пресликавање између одговарајућих полигона квадрата и три подударна квадрата. У оба случаја прво се поставља питање конструкције три подударна квадрата чија ће сума површина бити једнака површини квадрата који је дат, па ћемо за почетак та три квадрата посматрати као правоугаоник чија је једна страница три пута дужа од друге.

Први начин (разлагање на 7 полигона)

Нека је страница квадрата $ABCD$ (слика 2.2.) јединичне дужине, тада је $S(ABCD)=1$. Правоугаоник који је потребно конструисати, мора имати исту површину као и квадрат. Како је једна страница правоугаоника три пута већа (једну означимо са x , а другу са $3x$) од друге, мању страницу правоугаоника добијамо из једначине:

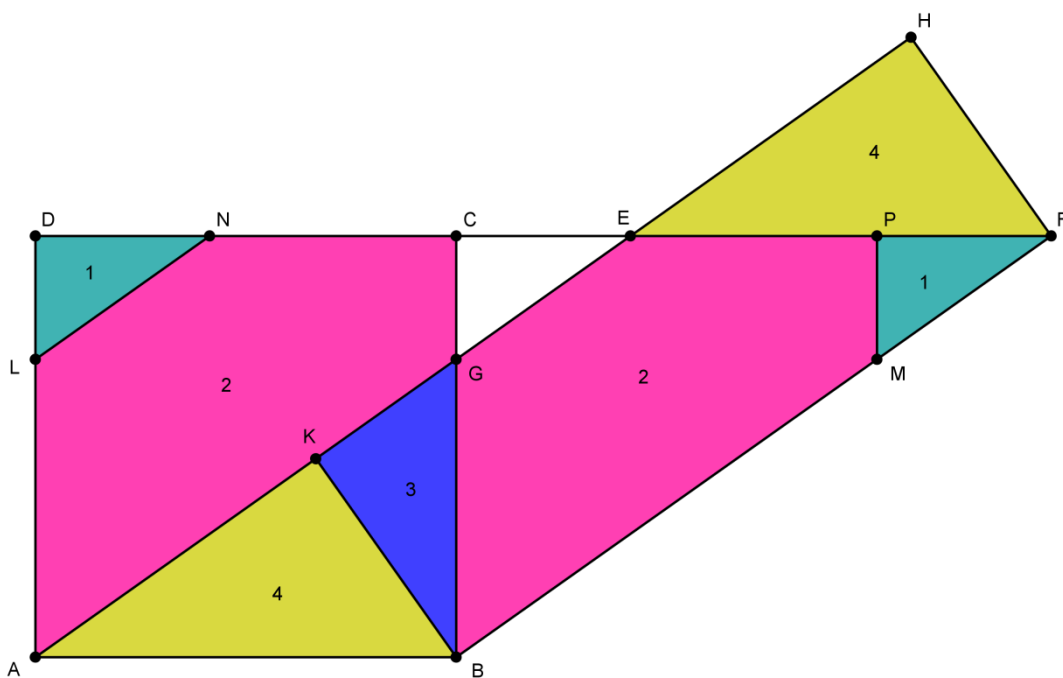
$$3x \cdot x = 1 \text{ или } 3x^2 = 1.$$

Решавањем једначине, добијамо да је дужина мање странице x правоугаоника $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а дужина друге странице $\frac{3}{\sqrt{3}}$ или $\sqrt{3}$.

Конструишемо дуж дужине $\sqrt{3}$, на продужетку странице DC формирамо дуж DE , чија је дужина једнака дужини дијагонали квадрата, тј. дужине је $\sqrt{2}$ (из Питагорине теореме: Ако су обе катете дужине 1, онда је хипотенуза $\sqrt{2}$). Повучемо из темена квадрата A полуправу $pp[A, E)$, и пресек те полуправе са страницом квадрата BC означимо са G .

Примењујемо Питагорину теорему на правоугли троугао $\triangle ADE$:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2$$



Слика 2. 2.

или

$$AE^2 = 1 + 2 = 3 \text{ и } AE = \sqrt{3}.$$

Из темена B повучемо праву паралелну са дужи AE и у пресеку те праве и праве $p(D, C)$ означимо тачку F . Фигура $ABFE$ је паралелограм ($BF \parallel AE, EF \parallel AB$), тако добијени паралелограм и квадрат имају исте површине. Заправо, површина ове две фигуре се израчунава по формули:

$$S = AB \cdot AD.$$

Из тачака B и F повлачимо дужи BK и FH које су нормалне на праву $p(A, E)$. Добиће се правоугаоник $HFBK$, исте површине као паралелограм $ABFE$ ($S = AB \cdot AD$). Паралелограм $ABFE$, као што је већ показано, има исту површину као квадрат $ABCD$. Следи, да је површина правоугаоника $HFBK$ једнака површини датог квадрата.

Сада треба показати да квадрат $ABCD$ и правоугаоник $HFBK$ не само имају исте површине, него су и разложиво једнаки.

Означимо на страни AD тачку L , тако да $AL = BG$, а на дужи BF тачку M да $BM = AG$, $LN \parallel AE$ и $MP \perp EF$. Ако разложимо квадрат $ABCD$ по дужима AG, BK и LN , добијамо четири полигона, означена на слици 2.2. са 1, 2, 3 и 4.

Разложимо и правоугаоник $HFBK$ тако што га конструишемо дужи EF, MP и BG . Тада, $\triangle BKG$ (3) је заједнички за квадрат и правоугаоник.

$$\triangle ABK \cong \triangle EFH \quad (4)$$

($AB = EF$ - као наспрамне стране у паралелограму, углови код темена K и H су прави, док су углови код темена A и E су подударни).

Тачке L, G и M су подједанако удаљене од дужи DF (по конструкцији), следи $LD = GC = MP$, осим тога $\angle DLN = \angle PMF$ (јер су им краци паралелни). Тада је:

$$\triangle LDN \cong \triangle MPF \quad (1),$$

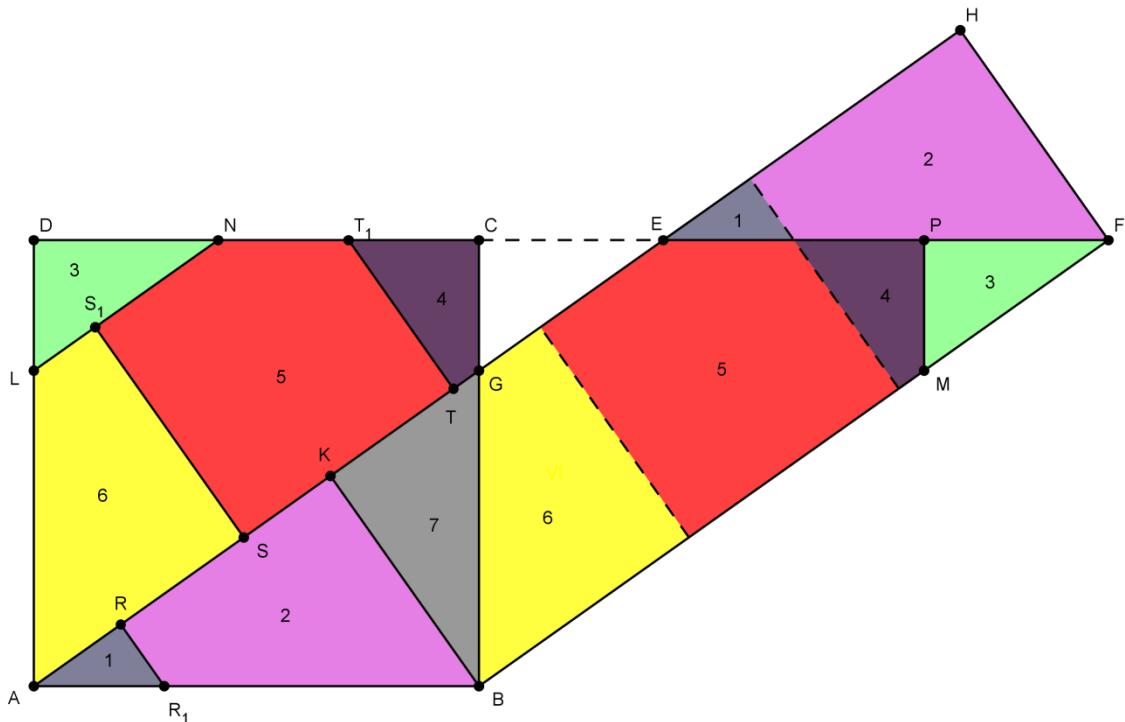
следи да $LN = MF = GE$.

Петоугао $ALNCG$ је подударан са петоуглом $BGEPM$, јер све странице и углови су им подударни.

Следи да су квадрат $ABCD$ и правоугаоник $HFBK$ разложиво једнаки. При чему је у овом правоугаонику, страница BF три пута дужа од странице BK . Заиста, дуж BF је једнаке дужине дужи AE и паралелна са њом, тј. $BF = \sqrt{3}$, а из једнакости површина квадрата $ABCD$ и правоугаоника $HFBK$ имамо: $BK \cdot BF = 1$, дакле:

$$BK = \frac{1}{BF} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BF}{3}.$$

Такав правоугаоник се помоћу две паралелне дужи разлажу на три подударна квадрата (на слици 2.3. дужи разлагања су приказане испрекиданим линијама).



Слика 2. 3.

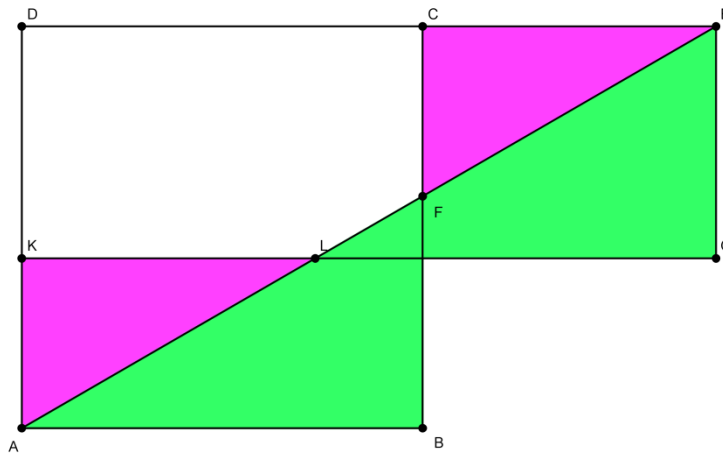
Пренумерацијом свих саставних делове ова три квадрата и методом допуне наћи ћемо њихове бијективе слике у квадрату $ABCD$, тако што дуж AG поделимо на три једнака дела и добијамо дужи KR , AS и ST , где је свака од њих подударна са BK . Из тачака R , S и T повучемо, редом, нормале на дуж AG и означимо те тачке, редом, са R_1 , S_1 и T_1 . Од формираних полигона из квадрата $ABCD$ може се формирати бијективна функција која ће ове добијене полигоне пресликати у полигоне на које је разложен правоугаоник $HFBK$. Одговарајући полигони квадрата и правоугаоника на слици 2.3. су приказани истим бојама и цифрама.

То је сва геометријска „тајна“ прве слагалице. [12]

Друга начин (разлагање на 6 полигона)

Треба нешто изменити у разлагању квадрата и правоугаоника, чије су дужине страница у односу 3:1, тако да се квадрат разлаже уместо 7, на 6 делова.

Нека је страница квадрата $ABCD$ јединичне дужине, и на исти начина као у првој методи, конструишемо дуж $DE = \sqrt{3}$, тако да је распоред тачака $C - D - E$. (слика 2.4.)



Слика 2.4.

Повуцимо дуж која ће спајати темена A и E и добијамо AE која сече страницу квадрата BC у тачки F .²

² Напомена, при овој конструкцији формира се угао $\angle DAE = 60^\circ$. Зато што

$$\operatorname{tg}(\angle DAE) = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \text{ односно } \angle DAE = 60^\circ.$$

Значи $\angle AED = 30^\circ$, тако што угао $\angle DAE$ поделимо на два дела.

Узмемо DE за страницу правоугаоника $DEGK$, а друга страница ће бити $DK = \frac{DE}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. И нека је $p(K, G) \cap p(A, E) = \{L\}$.

Покажимо да су разложиво једнаке. Довољно је доказати да је :

$$\triangle AKL \cong \triangle FCE \text{ и } \triangle ABF \cong \triangle LGE.$$

Имамо:

$$\begin{aligned} CE &= DE - DC = \sqrt{3} - 1 \\ AK &= AD - DK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Поред тога $\triangle AKL \approx \triangle ADE$. Из сличности тих троуглова, следи:

$$\begin{aligned} \frac{KL}{DE} &= \frac{AK}{AD} \\ KL &= \frac{AK \cdot DE}{AD} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) и (2) следи $CE = KL$, што значи:

$$\triangle AKL \cong \triangle FCE.$$

Из подударности тих троуглова следи:

$$\begin{aligned} FC &= AK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ BF &= BC - FC = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

и значи

$$BF = GE. \quad (3)$$

Даље:

$$LG = KG - KL = \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = 1$$

и значи

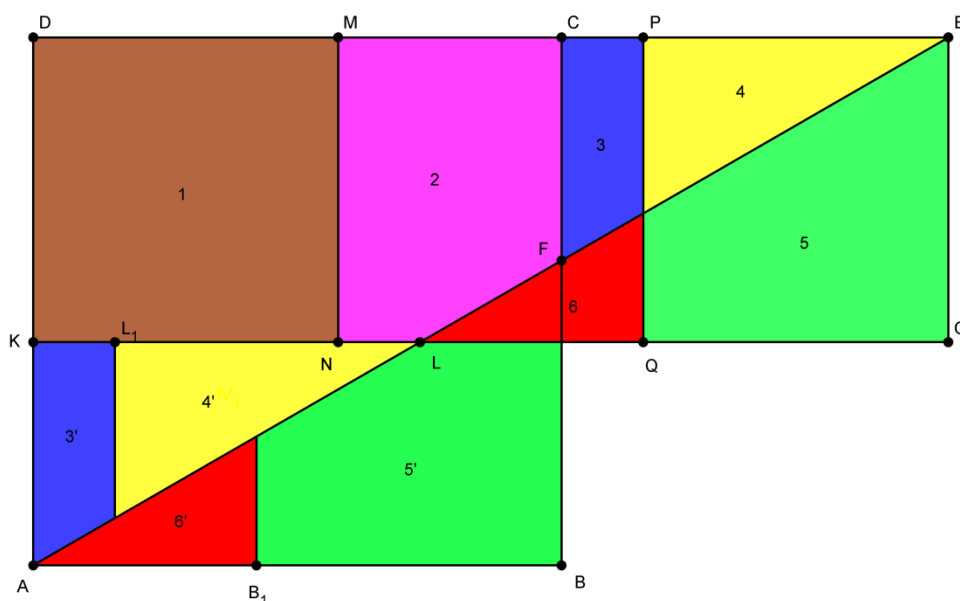
$$LG = AB. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следи $\triangle ABF \cong \triangle LGE$. [12]

Напомена: Правоугаоник од кога се разлагањем добијају три једнака квадрата има у другом случају и једну мање дуж расподеле, па и један мање полигон.

Правоугаоник $DEGK$ је разбијен на три квадрата разлагањем по линијама MN и PQ (слика 2.5.) и делови су нумерисани као на слици.

Како $LL_1 = EP$ и нормала на LK из тачке L_1 дели $\triangle AKL$ на делове 3' и 4', који су подударни 3 и 4. Како $BB_1 = GQ$ и нормала из B_1 дели $\triangle ABF$ на делове 5' и 6', који су подударни 5 и 6. Делови 1 и 2 су заједнички за квадрат $ABCD$ и квадрате $DMNK$ и $MNQN$. Укупно шест делова.



Слика 2.5.

Ово решење је „усавршавано“ током хиљаду година, са девет делова свело се на шест, решење је дао Хенри Дуденеи почетком XX века [5]. До данас нема података да је неко успео да разлагањем квадрата и три подударна квадрата успостави бијекцију између њихових полигона разлагања.

2.2 Разлагање квадрата на једнакостранични троугао (5 полигона)

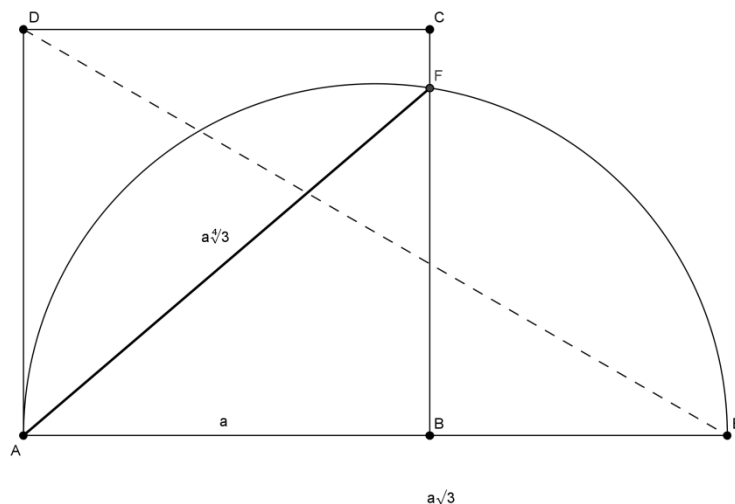
Откријмо другу „геометријских тајну“, задатак 12 у Табели 3.

Дати квадрат $ABCD$ треба разложити по правим линијама на такве делове из којих се може успостављањем одговарајућег пресликавања доказати разложива једнакост са једнакостраничним троуглом.

Може се унапред израчунати потребна висина троугла. x Нека је дужина странице квадрата a . Тада је површина квадрата a^2 . Ако је страница троугла дужине x , а висина h , тада $\frac{x \cdot h}{2} = a^2$. Такође, познато је да за једнакостранични троугао важи $\frac{x}{2} = \frac{h\sqrt{3}}{2}$, следи $\frac{h^2\sqrt{3}}{3} = a^2$. Из тога следи $h^2 = \frac{3a^2}{\sqrt{3}} = a^2\sqrt{3}$ и

$$h = a^4\sqrt{3}.$$

Како $h^2 = a^2\sqrt{3} = a \cdot a\sqrt{3}$ то је висина h геометријска средина a и $a\sqrt{3}$. Нека је $AB = a$ (Слика 2.6.) и опише се кружница из темена D полупречника $DE = 2a$. Из правоуглог троугла $\triangle DAE$ имамо: $AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.



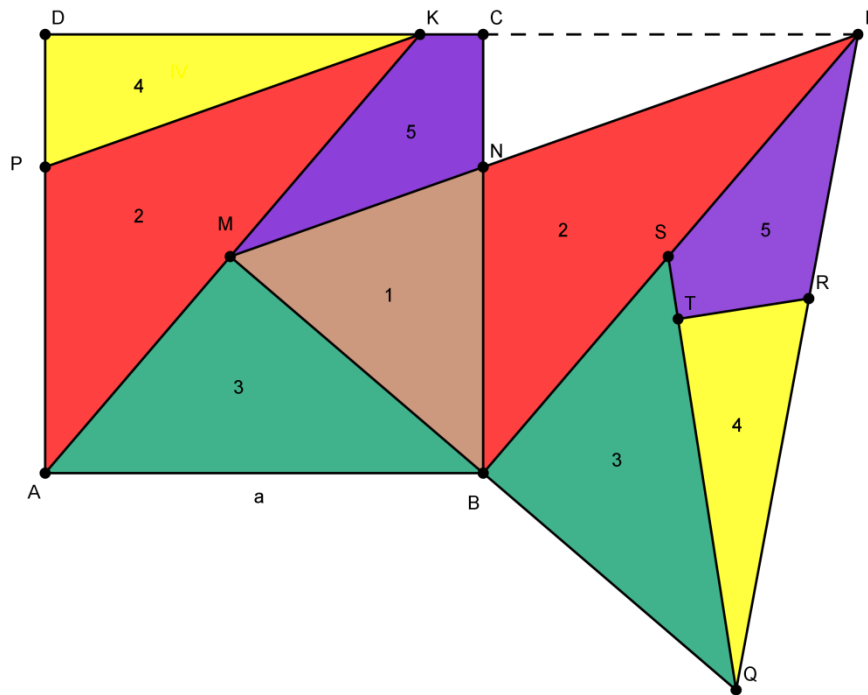
Слика 2.6.

Треба конструисати дуж чија ће дужина претстављати геометријску средину $AB = a$ и $AE = a\sqrt{3}$. Конструише се кружница над AE као пречником. Пресек добијеног полукруга и дужи BC означимо са словом F . Следи да је AF геометријска средина дужи AB и AE , па и дужине $a^4\sqrt{3}$.

Вратимо се квадрату $ABCD$ (слика 2.7.). На страници DC налази се тачка K тако што је дуж AK подударна висини $a^4\sqrt{3}$ (која је одређена на слици 2.6.). Кроз теме B повлачи се $BL \parallel AK$ до пресека са продужетком странице DC , и означи тај пресек са L и $BM \perp BL$ до пресека са AK , у тачки M . Повлачи се $KP \parallel ML$. Разлажемо квадрат $ABCD$ по AK , MN , BM и KP и добија се пет полигона из којих се може доказати разложива једнакост квадрата и једнакостраничног троугла.

У наставку доказа, дуж MB се добија као $BQ = MB$ и тачку Q се споји дужи са тачком L . Како $MB = BQ$ и $BL \perp MQ$, тада $\triangle MLQ$ једнакокрак: $ML = QL$. Треба доказати да је он и више од тога, једанакостраничан и разложиво једнак са квадратом $ABCD$. Конструирше се $BL \parallel AK$ и $BL = AK = a^4\sqrt{3}$. Из правоуглог троугла $\triangle MBL$ је

$$ML^2 = BL^2 + MB^2 = a^2\sqrt{3} + MB^2. \quad (1)$$



Слика 2.7.

Правоугли троуглови $\triangle AMB$ и $\triangle ADK$ слични ($\angle DKA = \angle MAB$ као сагласни углови). Из сличности ових троуглова имамо:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{AD}{AK}; \quad \frac{MB}{a} = \frac{a}{a^4\sqrt{3}}; \quad MB = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}.$$

Сада имамо за (1):

$$ML^2 = a^2\sqrt{3} + \frac{a^2}{\sqrt{3}} = \frac{4a^2}{\sqrt{3}}, \text{ тј. } ML = \frac{2a}{\sqrt[4]{3}}$$

или $ML = 2MB$, следи $ML = MQ$.

Тако је $ML = QL = MQ$, тј. $\triangle MLQ$ једнакостраничан троугао.

$\triangle BMN$ је заједнички за квадрат и једнакостранични троугао, означени са 1.

$\triangle BNL = \triangle APK$ ($BL = AK$, $\angle PAK = \angle NBL$ и $\angle PKA = \angle NLB$), означени са 2.

На BL означено $BS = MA$ и добијамо дуж SQ . Троугао $\triangle SBQ \cong \triangle AMB$ ($BS = MA$, $MB = BQ$ и $\angle AMB = \angle SBQ$) означен са 3.

Из подударности ових троуглова имамо:

$$QS = AB \quad (2) \quad \text{и} \quad \angle BSQ = \angle BAM. \quad (3)$$

Али $\angle BSQ$ спољашњи угао троугла $\triangle QSL$, то значи:

$$\angle SQL = \angle BSQ - \angle SLQ. \quad (4)$$

С друге стране:

$$\angle BAM = \angle AKD = \angle AKP + \angle PKD.$$

Тада

$$\angle PKD = \angle BAM - \angle AKP$$

али

$$\angle AKP = \angle MLB = \angle SLQ.$$

Следи,

$$\angle PKD = \angle BAM - \angle SLQ. \quad (5)$$

Из (3) и (5):

$$\angle PKD = \angle BSQ - \angle SLQ. \quad (6)$$

Из (4) и (6):

$$\angle SLQ = \angle PKD. \quad (7)$$

На QS означимо $QT = DK$, тако да $DK < DC$, а $DC = AB = QS$, значи $QT < QS$.

Конструиремо $TR \perp QT$. Из (2) и (7) имамо подударност $\triangle QTR \cong \triangle KDP$, означимо те троуглове са 4.

Преостали делови $MKCN$ и $TRLS$ су подударни (све странице и углови подударни). Тиме смо доказали да је квадрат $ABCD$ разложиво једнак са једнакостраничним троуглом $\triangle QLM$. [12]

2.3 Разлагање једнакостраничног троугла на квадрат (4 полигона)

Сада, имамо обрнутан проблем, како конструисати једнакостранични троугао и доказати његову разложиву једнакост са квадратом квадрата.

Нека је $\triangle MQL$ (дат на слици 4.7.) једнакостранични троугао, чија је површина

$$S = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4},$$

где је x - страница датог троугла. Ако је a страница непознатог квадрата, чија је површина једнака површини троугла. То значи:

$$a^2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Тада $a = \frac{x}{2} \sqrt[4]{3}$ или

$$a = \frac{x}{2} \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{x^2}{4} \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{x}{4} \sqrt{3x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4} \sqrt{3x \cdot x}}.$$

Страница a се може наћи следећом конструкцијом: прво конструишемо геометријску средину дужи $3x$ и x , а потом геометријску средину дужи новодобијене дужи и $\frac{x}{4}$.

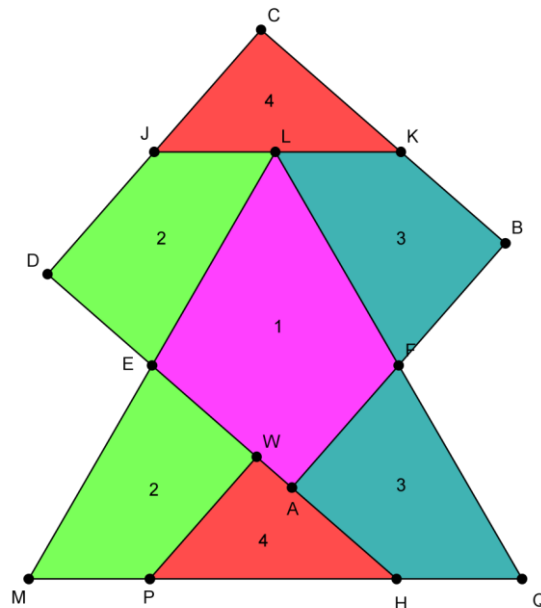
Вратимо се једнакостраничном троуглу $\triangle MQL$. Означимо са E и F средишта страница ML и QL . Потом из тачке E опишемо кружни лук полупречника a и у пресеку лука и странице MQ добијамо тачку H . У пресеку нормале из тачке F на $pp[H, E)$ и $pp[H, E)$ означимо тачку A . Конструкцијом кружног лука из тачке A полупречника a , у пресеку са $pp[A, E)$ и $pp[A, F)$, редом, добијају се тачке D и B . И у пресеку нормала из тачака D и B на $pp[A, E)$ и $pp[A, F)$, добија се тачка C .

Имамо да $S(MQL) = S(ABCD)$, треба доказати још разложиву једнакост ове две фигуре, тј. подударност одговарајућих полигона. Али пре доказа подударности конструишемо још неке помоћне дужи. Прво конструишемо праву кроз тачку L која ће бити паралелна са страницом једнакостраничног троугла MQ , и пресек те праве и страница квадрата DC и BC означимо словима J и K . Означимо тачку P на дужи MQ , тако да $JK = PH$ и тачку W на $pp[H, E)$, као нормалу из тачке P на $pp[H, E)$.

Полигон означена са (1) на слици 2.8. припада истовремено квадрату и једнакокрајном троуглу.

Полигони означени са (4) су такви да $\triangle PHW \cong \triangle JKC$ (странице $JK = PH$ и $\angle PWH = \angle JCK = 90^\circ$, углови $\angle PWH = \angle JCK$ јер су им краци паралелни).

Полигони са ознаком (2) су подударни јер $ME = EL, DE = EW$, углови су сви подударни јер или су унакрсни $\angle DEL$ и $\angle MEW$, или леже на паралелним крацима као што је случај код преостала три угла.



Слика 2.8.

Четвороуглови означени са (3) су подударни (све странице и углови подударни). Тиме смо доказали да су једнакокрајни троугао и квадрат разложиво једнаки. (А)

2.4 Разлагање паралелограма на квадрат

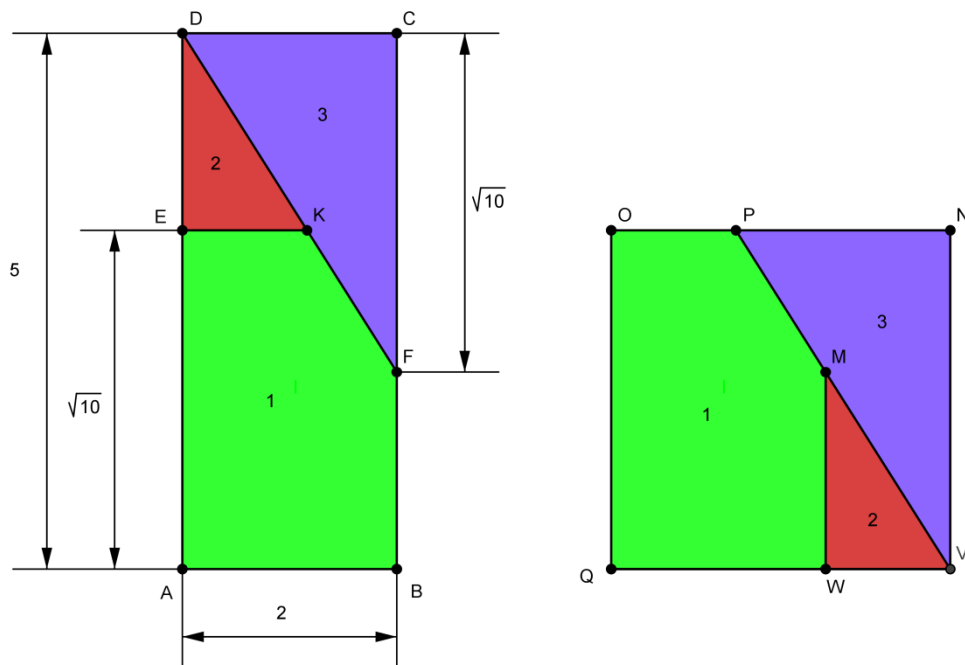
Да ли постоји општи начин разлагања четвороугла на полигоне како би се показала разложива једнакост са квадратом?

Одговор на ово питање биће дат касније, али прво ћемо доказати да ово важи за неке специјалне четвороуглове.

Кренимо од паралелограма. Узме ли се било какав паралелограм са једном дужи по којој се разлаже може се доказати његова разложива једнакост са правоугаоником, а затим тражимо начин да докажемо разложиву једнакост квадрата. Или можемо директно доказати разложиву једнакост паралелограма и квадрата.

Индиректан начин

Да би смо ово показали, потребно је претходно решити проблем разлагање даске димензија 5×2 на три дела како би се од њих саставо квадрат, при чему постоји неколико начина.

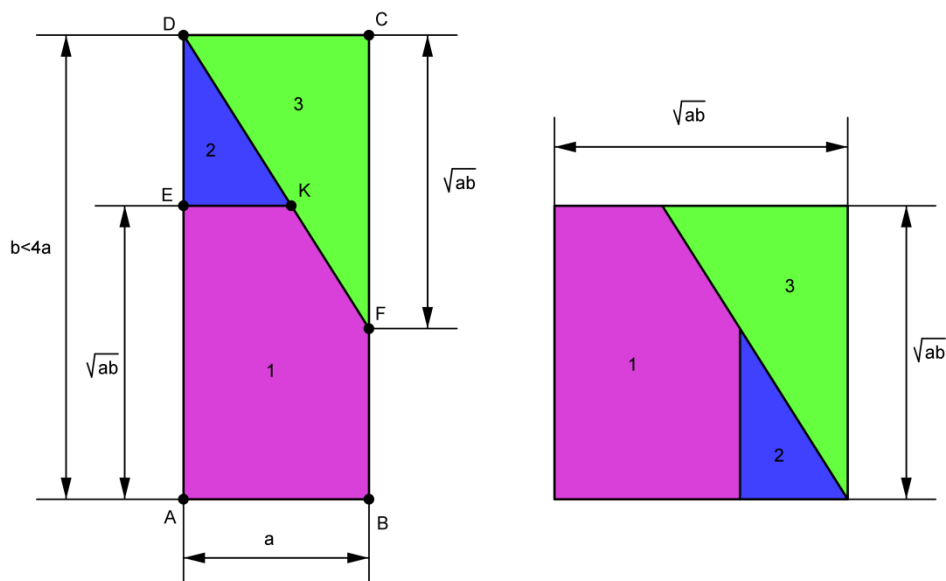


Слика 2.9.

Једно од могућих решења приказано је на слици 2.9. На страницама AD и BC датог правоугаоника конструишемо дужи $AE = CF = \sqrt{10}$, колика је и дужина странице квадрата $QVNO$ и разлажемо правоугаоник по дужи DF и $EK \parallel AB$, где је K тачка пресека дужи EK и DF . На страницама NO и QV квадрата конструишемо дужи $NP = QW = 2$ и разлажемо квадрат по дужима VP и $WM \parallel QO$, где је M тачка пресека дужи WM и VP . Доказом подударности полигона успоставља се бијекција између одговарајућих полигона, па са тим и доказ разложиве једнакости.

Како генерелизовати ово и одредити општи начин за доказ разложиве једнакости правоугаоника и квадрата?

На исти начин који је коришћен у случају даске димензија 5×2 . Нека је дат правоугаоник страница a и b , где је b већа страница (слика 2.10.), решавамо проблем тако што на већу страницу правоугаоника, нађемо дуж једнаке дужине као и страница квадрата, а чија је површина једнака површини правоугаоника, тј. дуж $AE = CF = \sqrt{ab}$ (геометријска средина a и b).



Слика 2.10.

Конструиремо DF и $EK \parallel AB$ и разлажемо квадрат на три полигона која су подударна са полигонима на које је разложен правоугаоник. То је могуће само у случају када EK сече дуж DF , за то је неопходно да дуж $AE = \sqrt{ab}$ не буде мања од половине странице $AD = b$. Решавамо неједнакост:

$$\frac{b}{2} \leq \sqrt{ab}$$

квадрирањем добијамо:

$$\frac{b^2}{4} \leq ab,$$

тада

$$b \leq 4a.$$

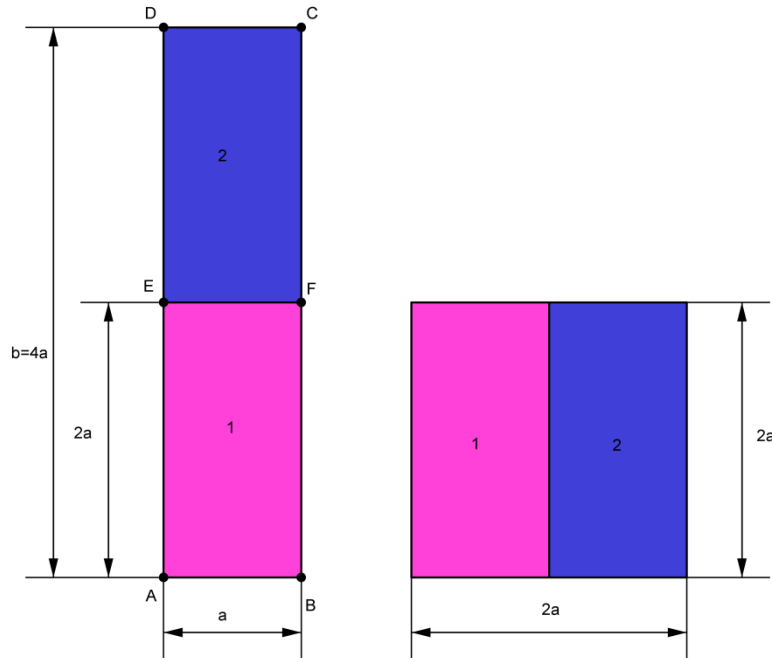
Али ако $b = 4a$ (слика 2.11.) то:

$$AE = CF = \sqrt{ab} = 2a = 2AB$$

и EF паралелно и једнако AB . Разложимо ли правоугаоник по дужи DF , то неће ваљати. Довољно је формирати правоугаоник $DEFC$ и правоугаоник $AEFB$.

Нека $b > 4a$ (слика 2.12.a)). У том случају, $AE < \frac{b}{2}$ и $CF < \frac{b}{2}$. Сада $EK \parallel AB$ не пресеца дуж DF . Тада разлажемо правоугаоник $ABKE$ и на страни ED преосталог правоугаоника $EKCD$ поново формирамо дуж $EL = AE = \sqrt{ab}$, а на страни CK дуж $CF = \sqrt{ab}$ и

конструишемо $LM \parallel AB$. Нека LM сече DF у тачки M . Из делова 2, 3 и 4 састављамо правоугаоник LEF_1C_1 (слика 2.12.б)), једна од његових страна је $LE = \sqrt{ab}$, а друга $LC_1 = LM + DC = LM + a$.



Слика 2.11.

Разлагањем правоугаоника $ABCD$ по дужи EK преостаје фигура EAF_1C_1 (слика 2.12.в)). До доказа да је фигура EAF_1C_1 квадрат, доћићемо израчунавањем страна EA и EC_1 .

$EA = \sqrt{ab}$ по конструкцији, а $EC_1 = EK + KC_1$ или

$$EC_1 = EK + LC_1 = a + LM + a = LM + 2a \quad (1)$$

Израчунавамо LM . Зато продужимо LM (слика 2.12.а)) до пресека са BC у тачки N и налазимо LM из сличности троуглова $\triangle MNF$ и $\triangle MLD$:

$$\frac{MN}{LM} = \frac{FN}{DL}$$

где

$$DL = b - 2AE = b - 2\sqrt{ab}$$

и

$$FN = FC - NC = FC - DL = \sqrt{ab} - DL,$$

значи

$$\frac{MN}{LM} = \frac{\sqrt{ab} - DL}{DL}$$

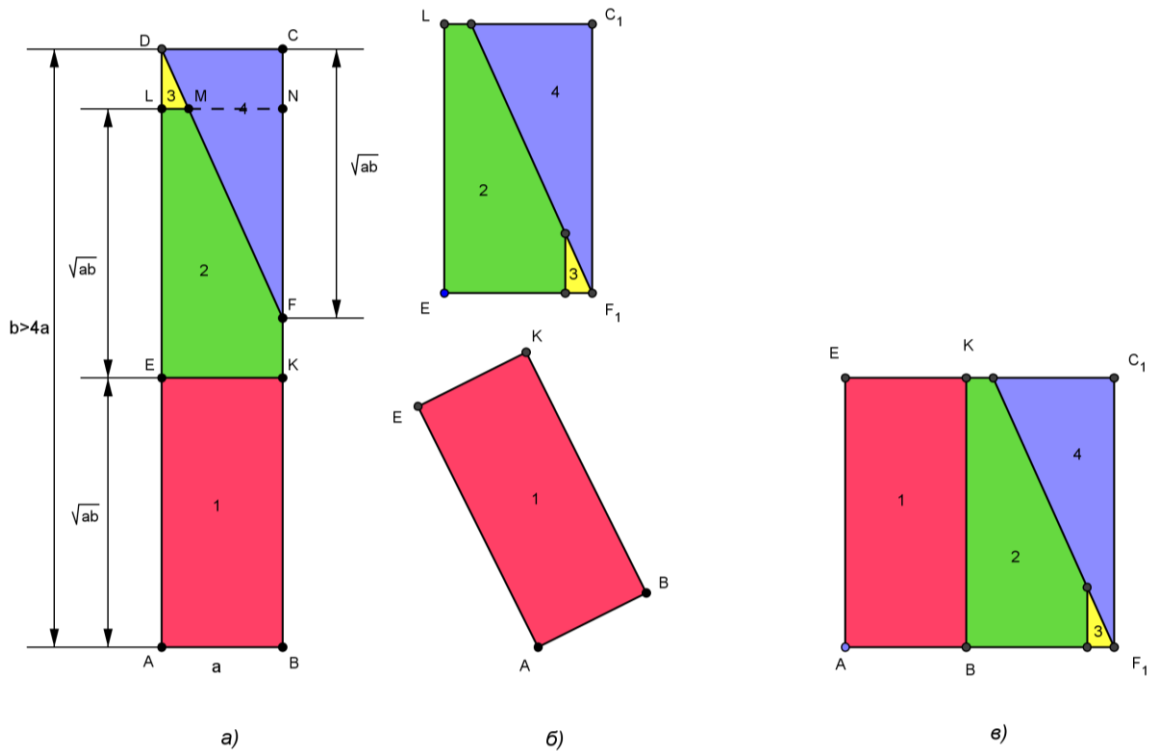
или из својстава пропорције:

$$\frac{MN + LM}{LM} = \frac{\sqrt{ab} - DL + DL}{DL};$$

$$\frac{a}{LM} = \frac{\sqrt{ab}}{b - 2\sqrt{ab}},$$

те је коначно:

$$LM = \frac{a(b - 2\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}}.$$



Слика 2.12.

Сада ово убацујемо у (1) и добијамо:

$$EC_1 = \frac{a(b - 2\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}} + 2a = \frac{a(b - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}} = \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

Следи, $EC_1 = EA$ и правоугаоник EAF_1C_1 јесте квадрат.

Ако је већа страна правоугаоника $ABCD$ већа од мање стране правоугаоника и након преношења дужи $EL = AE$ и $LM \parallel AB$ не сече DF , тада се мора поновити разлагати преостали правоугаоник колико је то пута потребно да би преостала дуж на страни AD буде мања од $\sqrt{ab}$, тј. мања од дужине стране жељеног квадрата.

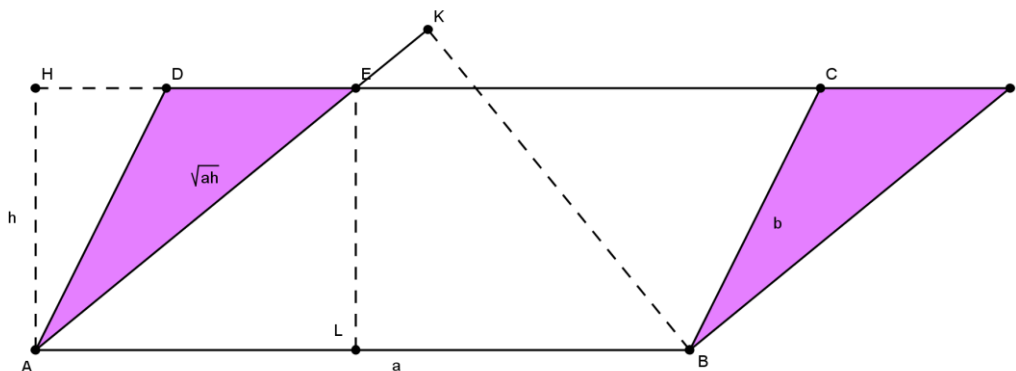
Након сваког одмеравања дужи дужине $\sqrt{ab}$ треба конструисати дуж разлагања.

Разлажемо квадрат одговарајућим дужима и разлажемо на фигуре 1,2,3 и 4. Доказом подударности успоставиће се бијекција између одговарајућих полигона. [12]

Директан начин

Нека су a и b - стране паралелограма $ABCD$ (слика 2.13. и 2.14.³), h - висина основице a и при томе $a \geq b$ (из овога следи да је $b > h$ и $a > h$).

Нађемо дуж дужине $r = \sqrt{ah}$ као геометријску средину a и h . Конструирамо кружницу из тачке A радијуса r , која ће пресећи страну DC , јер $r > h$. Из услова $a > h$ имамо: $\sqrt{ah} > h$ или $r > h$, и још $\sqrt{ah} < a$ и $r < a$. Из тога следи $h < r = \sqrt{ah} < a$.



Слика 2.13.

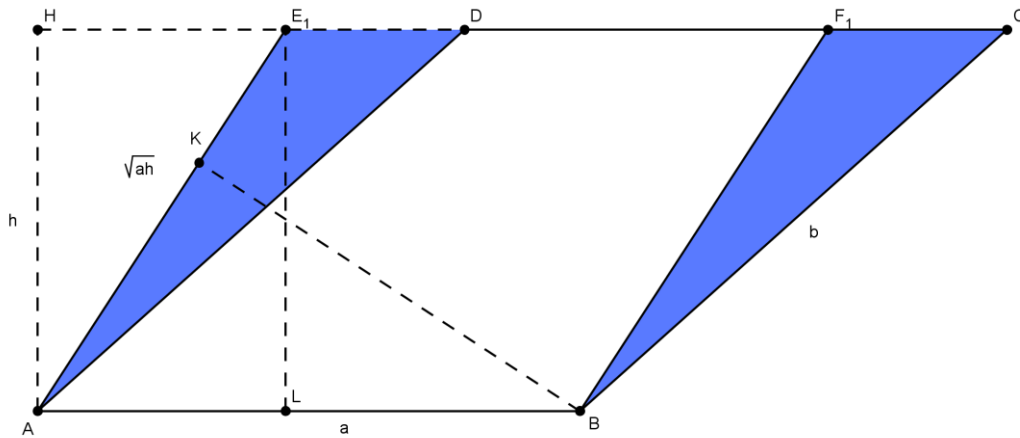
Пресечна тачка кружнице и стране CD може бити:

1. на CD , нпр. као на слици 2.13. (тачка E);
2. или на HD , нпр. као на слици 2.14. (тачка E_1);
3. или се може поклопити са теменом паралелограма D .

У прва два случаја, показаћемо да је дати паралелограм разложиво једнак са паралелограм висине h , једне стране AB и друге AE (или AE_1). У првом случају је

³ Разматрамо два случаја: један је дат на слици 2.13., а други на слици 2.14. Разлике између њих ћемо показати касније.

довољно доказати подударност троуглова $\triangle ADE$ и $\triangle BCF$, а у другом подударност $\triangle BF_1C$ и $\triangle AE_1D$. У трећем случаја није потребно никакво разбијање паралелограма.



Слика 2.14.

Из тога следи да било који паралелограм је разложиво једнак са другим паралелограмом при чему му је очувана висина h и веће странице a док је страница новог паралелограма $r = \sqrt{ah}$.

За тако добијени паралелограм имамо да је друга висина подударна бочној страни, тј. $BK = \sqrt{ah}$. Да би ово доказали, конструишемо $EL \perp AB$ (слика 2.13.) или $E_1L \perp AB$ (слика 2.14.). Правоугли троуглови $\triangle AEL$ и $\triangle ABK$ (или $\triangle AE_1L$ и $\triangle ABK$) су слични, јер имају заједнички угао $\angle KAB$.

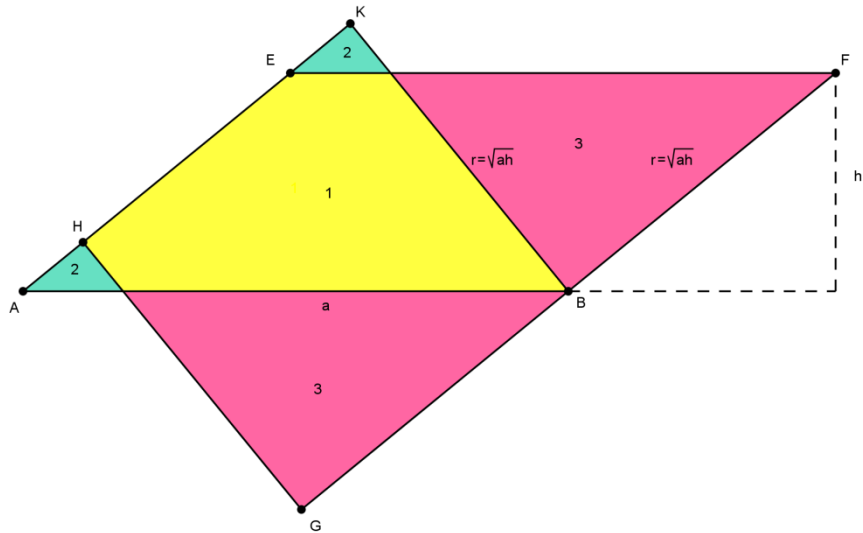
Из чега следи:

$$\frac{AE}{EL} = \frac{AB}{BK}, \text{ где } AE = \sqrt{AB \cdot EL}.$$

Тада

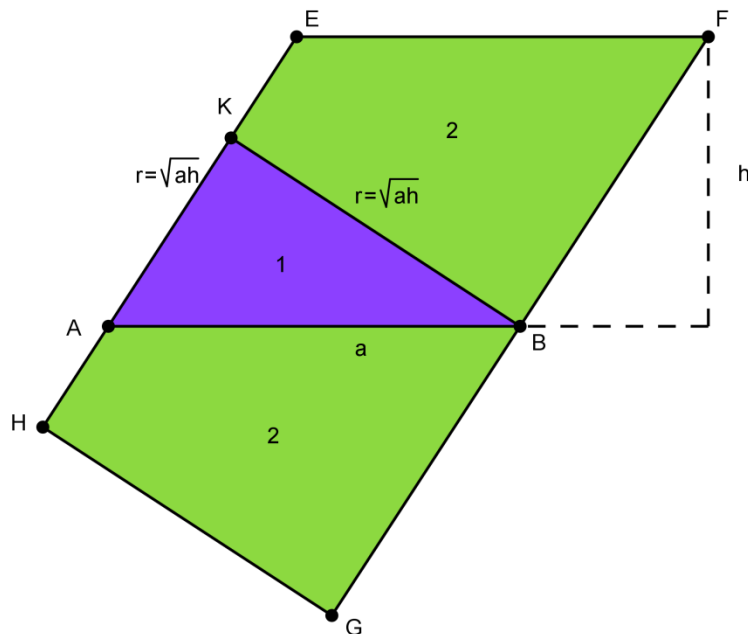
$$BK = \frac{AB \cdot EL}{AE} = \frac{AB \cdot EL}{\sqrt{AB \cdot EL}} = \sqrt{AB \cdot EL}$$

и следи $BK = AE$ (или, истим резонавањем у случају слике 2.13.: $BK = AE_1$).



Слика 2.15.

Сада ћемо доказати разложиву једнакост новодобијеног паралелограма $ABFE$ ($ABFE_1$) (слике 2.15. и 2.16.) са основицом a , висином h и бочном страном AE (AE_1) $= r = \sqrt{ah}$. Да бисмо разложили паралелограм разложили на полигоне који се бијективно могу пресликати на полигоне на које је разложен квадрат, спуштамо нормалу дужине BK из темена B на страну AE (слика 2.16.) или на њен продужетак (слика 2.14.). Како је већ показано у оба случаја дужине су подударне бочној страници паралелограма ($\sqrt{ah}$): $KH = BK = \sqrt{ah}$ и $BG = BK = \sqrt{ah}$.



Слика 2.16.

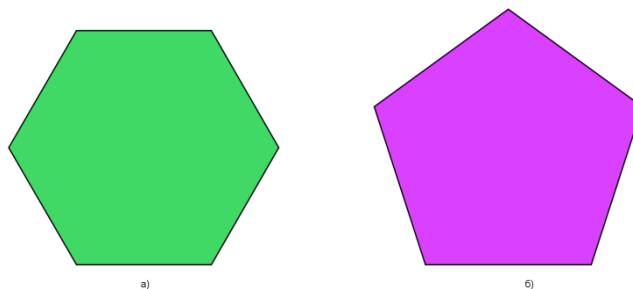
Конструирамо дуж са теменима H и G и добијамо квадрат $BKHG$, који је разложиво једнак са паралелограмом $ABFE$. За комплетан доказ потребно је доказати подударност делова обележених истим цифрама. [12]

2.5 Разлагање правилног петоугла и шестоугла на квадрат

Да би смо решили задатке 10. и 11. у Табели 3. треба доказати разложиву једнакост успостављањем бијекције између одговарајућих полигона разлагања квадрата и правилног шестоугла, односно петоугла. Али шта ће бити ако је потребно наћи те неопходне делове како би се доказала разложива једнакост квадрата и шестоугла, односно петоугла.

За решење таквих проблема погодно је претпоставити да је дат шестоугао (или петоуга) и да га је потребно разложити на што мање делова како би се доказала разложива једнакост. Посматрамо ова два случаја као два различита задатка.

1. Дат је правилан шестоугао (слика 2.17. а)) треба га разложити на пет делова како би се усподставила бијекција између одговарајућих делова овог полигона и квадрата.



Слика 2.17.

2. Доказати разложиву једнакост правилног петоугла и квадрата (слика 2.17. б)) ограничавајући се на седам делова.

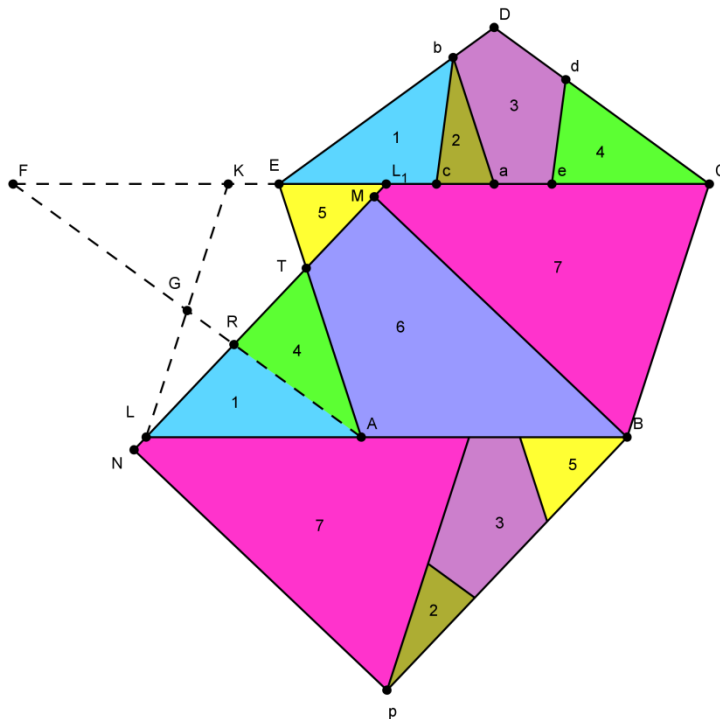
1. Нека је правилни шестоугао разложне по дијагонали FC (слика 2.18.а)) и следи да је он разложиво једнак са паралелограмом FEC_1B . (слика 2.18.б))

Конструирамо дуж која ће имати дужину странице жељеног квадрата, као геометријску средину странице и висине паралелограма. Тада, на страници BF нађемо тачку H , тако што је FH једнаке дужине као висини паралелограма. Повлачимо нормалу из тачке H на дуж BF , до пресека са кружницом чији је пречник BF , и тај пресек означимо са тачком P . FP ће бити тражена страница квадрата. Из F , као центра описујемо кружни лук полупречника FP и у пресеку са страницом паралелограма EC_1 , добија се тачка K . Тако добијамо дуж FK .

По конструкцији FK је једнаке дужине као и страница жељеног квадрата, тј. $FK = \sqrt{BF \cdot KS}$, где је KS висина паралелограма.

Троугао $\triangle EDC$ је подударан и једнако орјентисан са троуглом $\triangle AEF$. Тада $ABCF$ има једнаку површину као дати петоугао. Кроз средиште G , странице AF , повлачимо праву паралелну са BC до пресека са CF у K , и са продужетком странице AB у L .

Следи, $\triangle ALG \cong \triangle FKG$, тада је паралелограм $LBCK$ разложиво једнак са трапезом $ABCF$, па и са датим петоуглом.

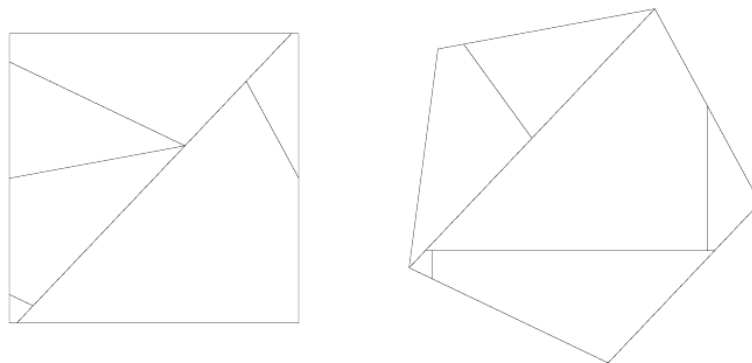


Слика 2.19.

У $\triangle EDC$ нађемо одговарајућу дуж дужине исте као GK , означимо је са ab , по којој разлажемо. На исти начин као када је био у питању шестоугао, паралелограм разлажемо паралелограм $LBCK$ како би показали разложиву једнакост $BMNP$.

Прво, као и у претходном случају, нађемо дужину странице квадрата као геометријску средину једне странице паралелограма $LBCK$ и њене одговарајуће висине LL_1 . Означимо тачку пресека дужи LL_1 и AF са R . У троуглу $\triangle Eab$ нађемо дуж bc , једнаке дужине као LR . У четвороугаонику $CDba$ дуж de , једнаке дужине као RT . И разлажемо по овим новодобијеним дужима. Овим разлагањем, заједно са разбијањима по дужима TL_1 , BM и EC деле дати петоугао на седам делова. Ти полигони су подударни са квадратом $BMNP$.

Друго решење, које има и мање један полигон разлагања дат је на слици 2.20. и преузето је из референце [14].



Слика 2.20.

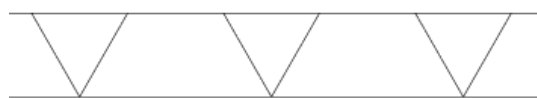
2.6 Методе разлагања

У овом потпоглављу биће дате неке од техника разлагања фигура које се користе у неким разлагањима квадрата на правилне полигоне. [14]

П трака

Прва фаза у разлагању неке фигуре је разбити је на полигоне како би се од насталих полигона могла формирати трака која би имала облик паралелограма па од тога потиче и назив П трака. У стварности, крајеви траке често нису праве линије.

Траке захтевају да се разлажу на што мањи број делова. На слици 2.21. дате су П траке и испод сваке је написано за који правилан многоугао се користи.



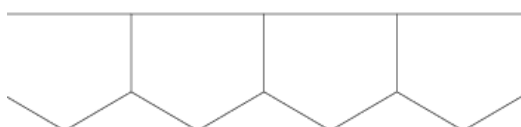
а) једнакостранични троугао



б) квадрат



в) петоуго



г) шестоугао

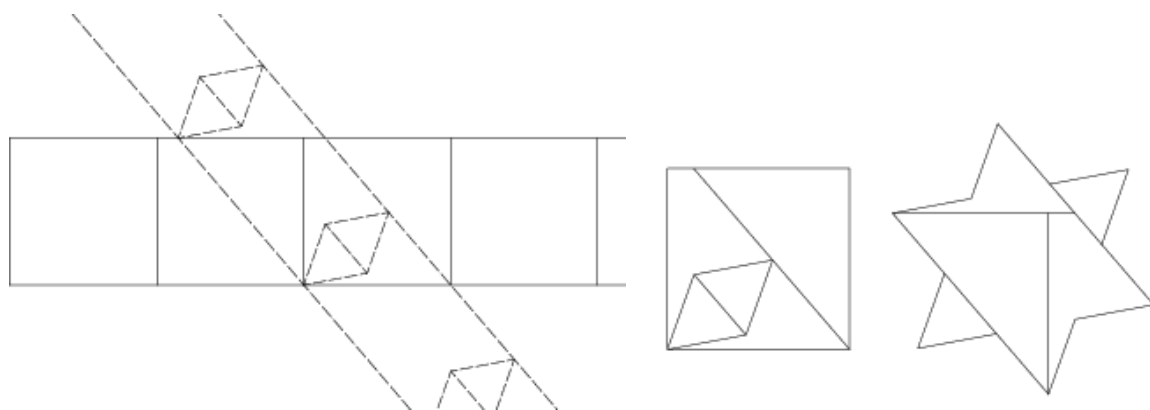


Слика 2.21.

III пресек трака

Пошто је формирана II трака, сада је неопходно да се преклопе две траке како би се формира њихов пресек. Траке морају бити постављене под одговарајућим углом. Полигони који се налазе у пресеку ове две траке су они на које је потребно разложити две дате фигуре како би се доказала њихова разложива једнакост. Друга трака се креће под константним углом док се број плигона у пресеку не сведе на минимум. При чему се води рачуна да ширина сваке траке од дужине елемента друге траке, у супротном ће се пресек бити превелик без обзира на угао између трака.

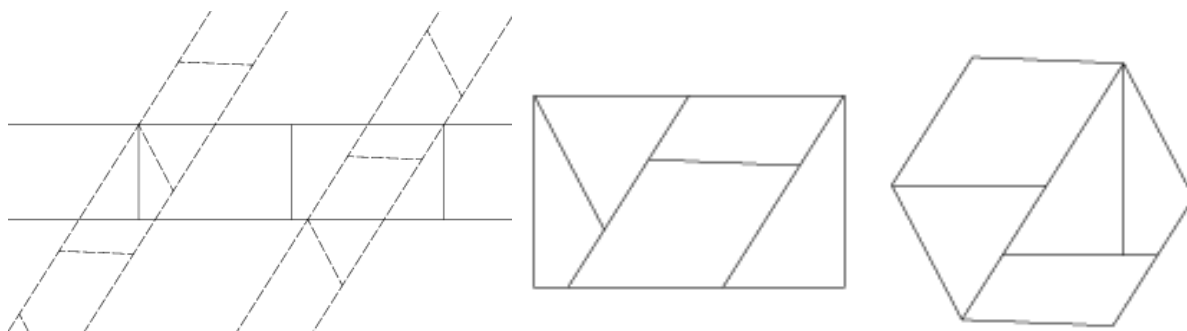
На пример: Траке за квадрат и десетоугао. (Слика 2.22.)



Слика 2.22.

III2 пресек трака

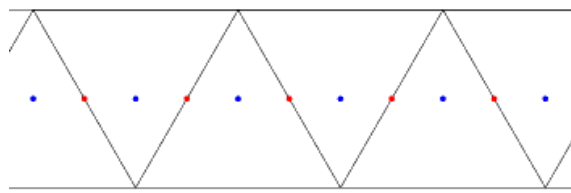
За III2 траке имамо пресек две траке које покривају само пола површине фигуре, да би се покрила и друга половина полигона потребна је још једна трака (на слици 2.23. прва трака за шестоугао је ротирана за 180° и добијена је друга трака).



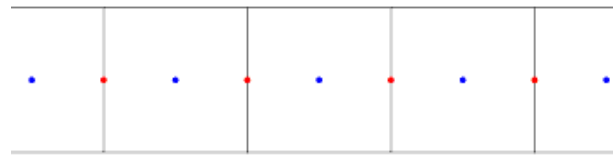
Слика 2.23.

T траке

T траке је скраћеница за трапезне траке. При чему траку чини полигон, па за њим следи њему подударан полигон ротиран за 180° . Црвене тачке на тракама означавају по паровима дужи расподеле и њима ротиране за 180° . На слици 2.24. дате су T траке и испод сваке је написано за који правилан многоугао се користи.



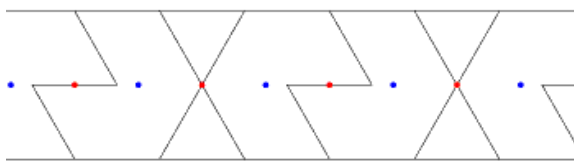
а) једнакостранични троугао



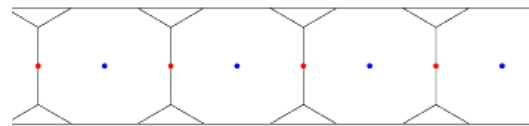
б) квадрат



в) петоуго



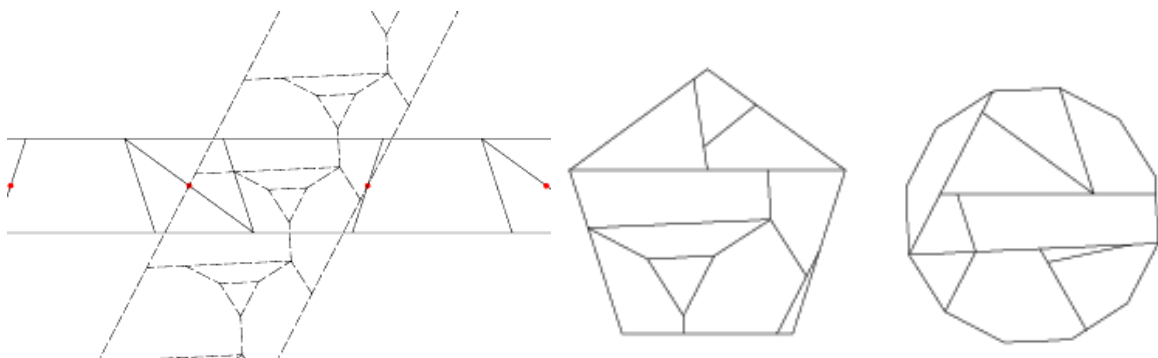
г) шестоугао



Слика 2.24.

ПТ пресек трака

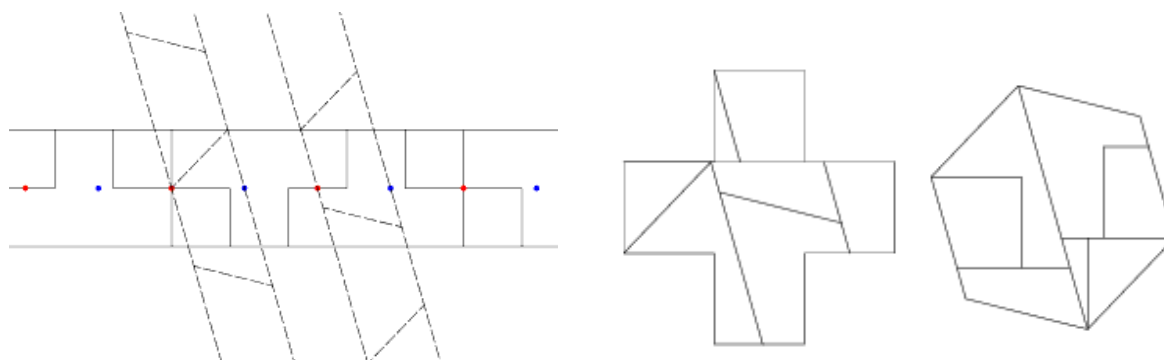
ПТ пресек трака се конструише помоћу једне П и једне Т траке. Али је ово компликованије него кад асу биле дате две П траке, само довођење траке под дати угао није довољно. Потребно је тако преклапање трака да ивице П траке пролазе кроз црвене тачке на Т траци. (Слика 2.25.)



Слика 2.25.

ПТ2 пресек трака

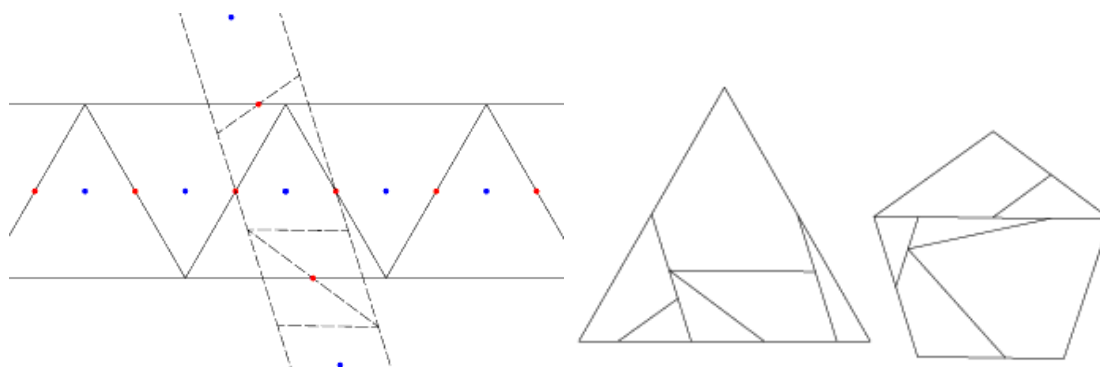
Имамо Т траку и П траку која разлаже само пола површине фигуре која се разлаже, при чему једна ивица П траке пролази кроз једну црвену, а друга кроз плаву тачку на Т траци. Да би разложили и други део фигуре потребна је још једна П трака која испуњава услове као и прва П трака. (Слика 2.26.)



Слика 2.26.

ТТ1 пресек трака

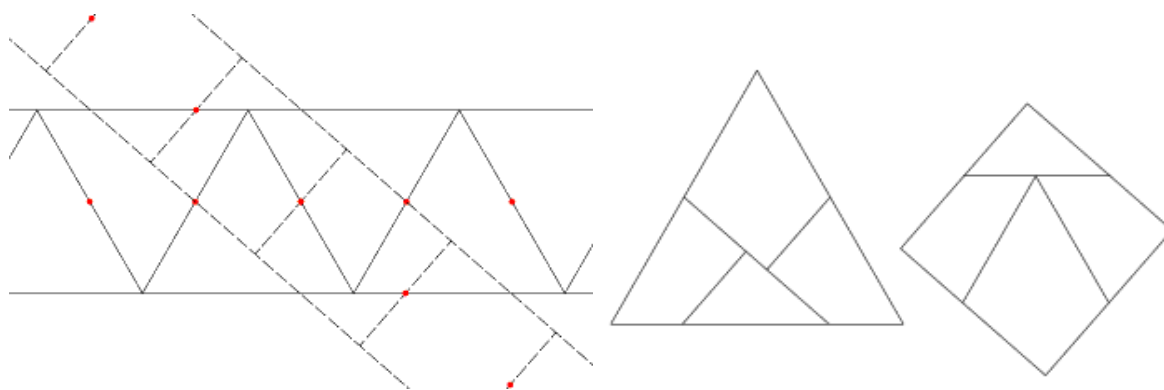
ТТ1 пресек се формира од две Т траке. Код ПТ пресека трака постајало је ограничење које ће овде бити још строжије. Свака трака мора бити постављена тако да њене ивице пролазе кроз две суседне црвене тачке друге траке. То значи да постоји само осам могућих комбиновања трака. Ако елементи траке имају линије симетрије тада је број могућих комбинација и мањи. Пример разложиве једнакости троугла и петоугла дат је на слици 2.27.



Слика 2.27.

ТТ2 пресек трака

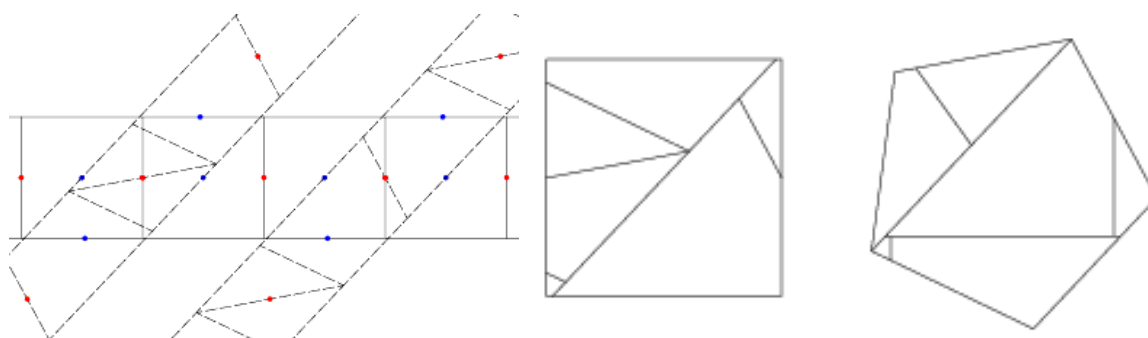
ТТ2 пресек трака формира се као и ТТ1 пресек трака од две Т траке. До сада смо имали приликом тестирања пресека трака да је био на две фигуре у траци, сада је тај пресек на дупло више фигура у тракама. Свака трака мора бити постављена тако да њене ивице пролазе кроз црвене тачке друге траке. На слици 2.28. дат је пример разлагања троугла на квадрат, како у потпоглављу 2.3.



Слика 2.28.

TT22 пресек трака

За TT22 пресек трака користе се две Т траке које су сачињене од различитих фигура. При чему ивице друге траке пролазе кроз плаве тачке прве траке, и обрнуто ивице прве траке пролазе кроз плаве тачке друге траке, док се црвене тачке поклапају. Постоји највише осам могућности комбиновања трака. Али оно што је другачије код TT22 трака је да ти сви услови нису довољни. Таквим пресеком две Т траке разложии смо само половину површине траке, мора се покрити и други део фигуре тракама. На слици 2.29. дат је пример разлагања квадрата и правилног петоугла.



Слика 2.29.

2.7 Разложива једнакост полигона

Решавамо задатке у којима је потребно разложити квадрат у фигуру која ће имати исту површину као и квадрат, или обрнуто, било какав многоугао разложити на квадрат исте површине.

Може ли се квадрат разложити у било који жељени многоугао, који има исту површину као квадрат, или обрнуто?

До одговора на ово питање доћићемо дедукцијом. Кренућемо од неких помоћних тврђења [3]:

Лема 2.7.1.: Сваки n - тоугао $P_1P_2...P_n$ ($n > 3$) има унутрашњу дијагоналу (дуж која спаја два несуседна темена и која, са искључењем крајњих тачака, цела припада унутрашњости полигона).[3]

Доказ: Изабере се теме P_i полигона $P_1P_2...P_n$ које је уједно и теме полигона који представља конвексни покривач траженог полигона. Тада је могућ један од следећих случаја:

1) дуж $P_{i-1}P_{i+1}$ унутрашња дијагонала паралелограма;

2) у унутрашњости троугла $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$ постоји бар једно теме полигона $P_1P_2...P_n$, различито од темена троугла које је у $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$ најудаљеније од праве $p(P_{i-1}, P_{i+1})$, а које заједно са P_i чине унутрашњу дијагоналу n -тоугла $P_1P_2...P_n$;

3) теме n -тоугла $P_1P_2...P_n$ налази се на страници $P_{i-1}P_{i+1}$ троугла $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$, тада имамо да то теме и теме P_i чине унутрашњу дијагоналу. [16] ■

Лема 2.7.2.: Сваки полигон $P_1P_2...P_n$ може се разложити унутрашњим дијагоналама на троуглове, тј. приказати као унију троуглова, са теменима међу теменима полигона $P_1P_2...P_n$, за које важи да се свака два од њих имају дисјунктне унутрашњости, и при томе број тих троуглова је увек једнак $n-2$, без обзира на разбијање полигона $P_1P_2...P_n$. [3]

Доказ: У Лему 2.7.1. показали смо постојање унутрашње дијагонале у полигону $P_1P_2...P_n$. Разлагањем n -тоугла $P_1P_2...P_n$ по унутрашњој дијагонали добијамо два дисјунктна полигона. Сваки од полигона има унутрашњу дијагоналу по којој их разложимо. Понављамо тај поступак док не добијемо да су се сви полигони настали од n -тоугла $P_1P_2...P_n$ разложили на троуглове.

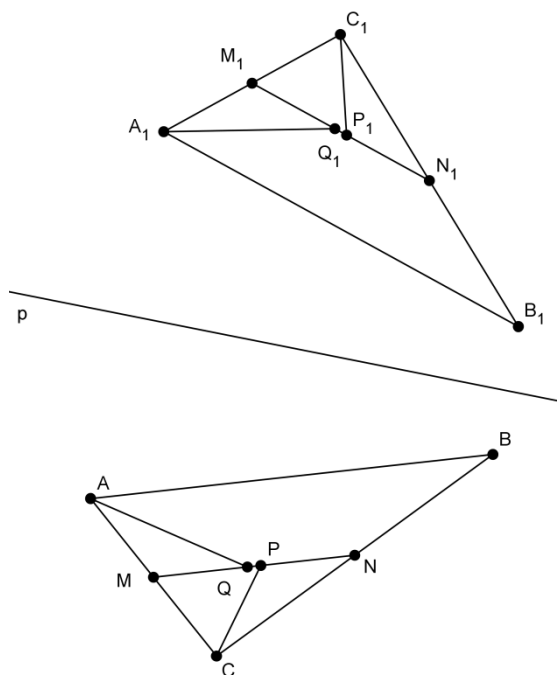
Доказ да таквих троуглова има тачно $n-2$ даћемо индукцијом по n :

- за $n=4$ може се разложити унутрашњом дијагоналом на два дисјунктна троугла.;
- претпоставимо да је за $k < n$ број троуглова на које се разлаже k -тоугла $P_1P_2...P_k$ једнак $k-2$;
- треба показати да је за n број троуглова на које се разлаже n -тоугао $P_1P_2...P_n$ једнак $n-2$. Лема 2.7.1. нам гарантује постојање унутрашње дијагонале. Полигон се разбија на два дела, што нам гарантује θ -теорема [16] у полигоналном случају. Нека су добијен k -то угао и $n-k+2$ -то угао. Примењујемо индуктивну претпоставку из хипотезе да за k -то угао имамо $k-2$ дијагонала и за $n-k+2$ -то угао $n-k$ дијагонала, што је укупно дијагонала $n-2$. ■

Лема 2.7.3.: Сваки произвољан разнострани троугао и његова осно симетрична слика су разложиво једнаки. [3]

Доказ (А): Нека је дат троугао ΔABC и његова осно симетрична слика $\Delta A_1B_1C_1$ са осом симетрије p (Слика 2.30.). Нађемо средње линије троуглова ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ и означимо их са MN и M_1N_1 . Како су полигон и његова осно симетрична слика подударни, то следи да су $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$, па и $\Delta MNC = \Delta M_1N_1C_1$. На дужи MN (односно M_1N_1) нађемо тачку P (односно P_1) тако да $MC = CP$ (односно $M_1C_1 = C_1P_1$). Следи, да су троуглови ΔMPC и $\Delta P_1C_1M_1$ подударни и једнако оријентисани јер су једнакокраки.

На дужи MN (тј. M_1C_1) нађе се тачка Q (тј. Q_1) тако да $PN = MQ$ (тј. $P_1N_1 = M_1Q_1$), па на основу става о подударности следи да су подударни троуглови $\triangle AMQ \cong \triangle CPN$ (тј. $\triangle A_1M_1Q_1 \cong \triangle C_1P_1N_1$), како су то и осно симетричне слике следи да $\triangle AMQ \cong \triangle CPN \cong \triangle A_1M_1Q_1 \cong \triangle C_1P_1N_1$. И још су троугао $\triangle AMQ$ и $\triangle C_1P_1N_1$, односно $\triangle CPN$ и $\triangle A_1M_1Q_1$, једнако оријентисани.

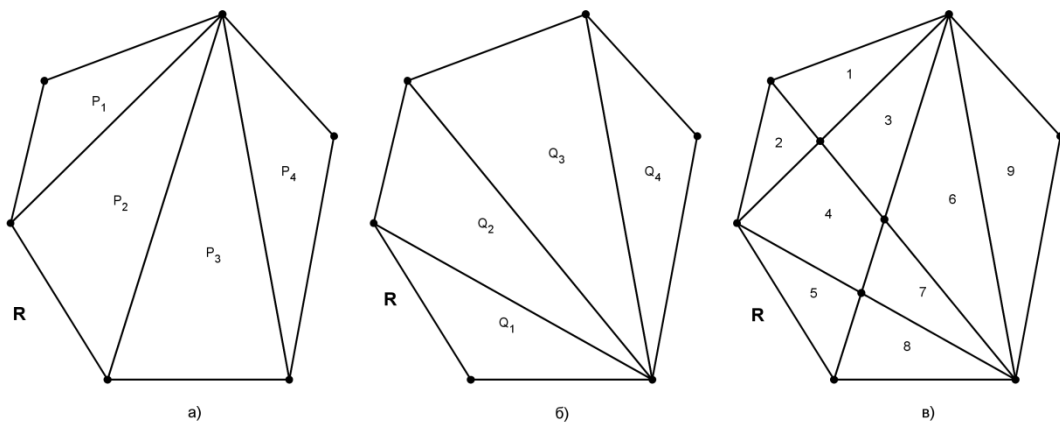


Слика 2.30.

Како је $AQ = CN = NB$ (тј. $A_1Q_1 = C_1N_1 = N_1B_1$) следи да је траpez $AQNB$ (тј. $B_1N_1Q_1A_1$) једнакокраки, па тим и једнако оријентисани и трапеzi $AQNB$ и $B_1N_1Q_1A_1$ подударни. Тиме смо доказали тврђење задатка. ■

Лема 2.7.4.: *Ако су многоуглови P и R разложиво једнаки и многоуглови Q и R разложиво једнаки, онда следи да су и P и Q разложиво једнаки.* [3]

Доказ [12]: Многоугао R је разложиво једнак са многоугловима P и Q , тј. сваки од њих је разложив на полигон R (на слици 2.30. приказан је само многоугао R). Полигони рзлагања првог многоугла P не морају бити полигони разлагања многоугла Q , и бројеви делова у првом пару многоуглова не мора бити исти као број делова у другом многоуглу.



Слика 2.31.

На слици 2.31. а) приказан је многоугао R разложен на полигоне који су подударни са полигонима на које је разложен многоугао P (није приказан на слици), а одговарајући полигони су обележени са P_1, P_2, P_3 и P_4 .

На слици 2.31. б) приказан је многоугао R разложен на полигоне који су подударни са полигонима на које је разложен многоугао Q (није приказан на слици), а одговарајући полигони су обележени са Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 .

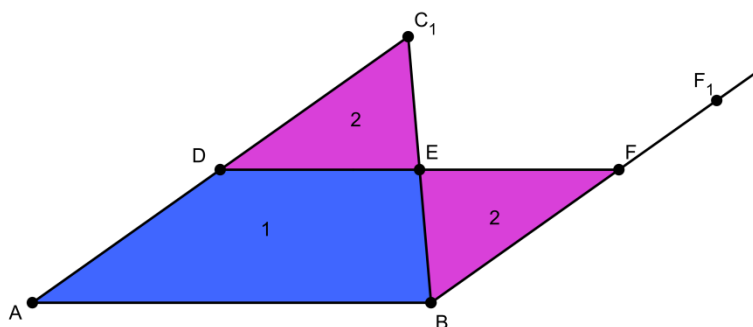
Извршимо разлагање многоугла R разбијајући га по дужима поделе оба многоугла (слика 2.31. в)). Добијамо више мањих полигона, од којих се методом допуњавања добијају полигони разложиво једнаки са полигонима P_1, P_2, P_3 и P_4 многоугла P (нпр. из 1 и 2 добијамо P_1 , из делова 3,4 и 5 добијамо P_2 , итд.), па значи и сам многоугао P .

Мање делове можемо груписати и на други начин, па добијамо полигоне подударне са полигонима Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 многоугла Q (нпр. из делова 5 и 8 састављамо троугао Q_1 , из 2, 4 и 7 састављамо Q_2 , итд.), па и сам многоугао Q .

Тако из подударних полигона многоугла R (само различитим груписањем) могу доказати подударности одговарајућих полигона многоуглова P и Q , што је дефиниција разложиве једнакости.■

Лема 2.7.5.: *За сваки троугао постоји са њим разложиво једнак паралелограм, чија ће једна страница бити једнака једној страници троугла, а висине једне половине одговарајуће странице троугла.*[12]

Доказ: Повучемо средњу линију DE произвољног $\triangle ABC$ (слика 2.32.) и продужимо до пресека са BF_1 (дужи која пролази кроз тачку B и паралелна са AC) у тачки F .



Слика 2.32.

$\triangle CDE$ има исту површину као троугао $\triangle BFE$. Следи, паралелограм $ABFD$ је једнако разложив са $\triangle ABC$ и висина му је једнака половини висине троугла. ■

Лема 2.7.6.: *Сваки троугао је разложиво једнак са неким правоугаоником. [12]*

Доказ (А): Ово следи из Леме 2.7.5. и чињенице да је сваки паралелограм разложиво једнак са правоугаоником чија је једна страница подударна са страницом паралелограма, а друга подударна са одговарајућом висином паралелограма. Те из транзитивности разложиве једнакости, тј. Леме 2.7.4. следи тврђење.

Лема 2.7.7.: *За сваки правоугаоник постоји са њим разложиво једнак квадрат.*

Ово смо већ показали, у директној методи разлагања паралелограма на квадрат.

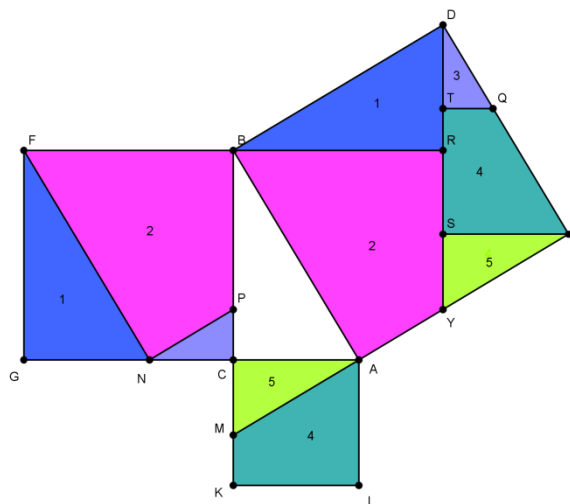
Лема 2.7.8.: *Свака два квадрата су разложиво једнака са једним квадратом, чија је површина једнака збиру површина два дата квадрата. [12]*

Доказ [12]: Питагорина теорема: Површин квадрата над хипотенузом једнак је збиру површина квадрата над катетама.

Доказаћемо да су квадрати над катетама разложиво једнаки са квадратом над хипотенузом. Постоји доста доказа за ово, овде ће бити разматран само један од њих. (слика 2.33.)

За разложиву једнакост квадрата $BFGC$ и $ACKL$, постављених над катетама троугла $\triangle ABC$, са квадратом $AEDB$, који је квадрат над хипотенузом, конструишемо следеће дужи, по којима разлажемо квадрате:

1. дуж AM , као продужетак AE ;
2. дуж $FN \parallel AB$;
3. дуж $NP \parallel AE$;
4. дуж $DY \parallel BC$;
5. дуж $ES \perp DY$;
6. дуж BR као продужетак странице FB ;
7. конструишемо $DQ = NP$ и правимо разлагање по дужи $QT \perp DY$.



Слика 2.33.

Имамо $FN = AB$, као делови паралелних правих који су пресечени са две паралелне праве. Али $AB = BD$ следи $FN = BD$. Поред тога, $\angle NFG = \angle DBR$.

Тада:

$$\triangle FGN \cong \triangle BRD$$

и

$$FG = BR = FB.$$

Како фигуре 2 имају по два пара подударних страна и пар подударних углова, следи да су то подударни троуглови.

Из подударности $\triangle ABC \cong \triangle EDS$ ($AB = DE$ и пар подударних углови) имамо $ES = AC$ и $\angle SEY = \angle CAM$, следи $\triangle ESY \cong \triangle CAM$. Тада $EY = AM$.

Тако $AY = NP = DQ$ и $AE = DE$, то $EQ = EY = AM$. Сада, имамо подударност фигура 4, из подударности углова и два пара страница ($ES = AC = AL$ и $EQ = AM$).

Сви подударни делови на слици 2.33. су приказани истим бројевима.

Из овога следи да за сваки многоугао постоји квадрат, који је разложиво једнак са многоуглом. ■

Напомена: Приликом разлагања многоугла на квадрат, ако се држимо овог алгоритма који је показан кроз леме, добијамо непотребне дужи разлагања, а треба водити рачуна, да делова буде што је могуће мање.

Лема 2.7.9.: Два паралелограма исте површине са по једним паром подударних страница су разложиво једнаки.[3]

Доказ [3]: Довољно је показати тврђење за два паралелограма са заједничком страницом а истих површина. Нека су то паралелограми $ABCD$ и $ABEF$, при чему оба леже у истој затвореној полуравни у односу на праву $p(A, B)$.

Ако имамо случај да су тачке F, E, D и C колинеарне и ако су дужи CD и EF дисјунктне, пресек ова два паралелограма је $\triangle ABM$, где је тачка M пресек бочних страна паралелограма. У том случају, формира се низ паралелних правих $m_0, m_1, m_2, \dots$ таквих да је $m_0 = p(A, B)$, $M \in m_1$ и да свака права m_i за $i \geq 1$ представља симетралу траке $tr[m_{i-1}, m_{i+1}]$. Нека се праве $m_1, m_2, \dots, m_k$ налазе унутар траке $tr[p(A, B), p(F, E)]$, па се праве m_i , за $i > k$, налазе ван ове траке. Тада означавамо тачке пресека: $m_i \cap p(A, F) = \{A_i\}$, $m_i \cap p(B, E) = \{E_i\}$, $m_i \cap p(A, D) = \{D_i\}$, $m_i \cap p(B, C) = \{B_i\}$, за све $i = 0, 1, \dots, k+1$, ($E_1 \equiv M \equiv D_1$, $A \equiv A_0 \equiv D_0$, $B \equiv B_0 \equiv E_0$).

Ако је $B_k \neq C$, означимо са C_1 пресек дужи $B_k D_{k+1}$ и CD , а са F_1 пресек дужи $A_k E_{k+1}$ и EF . Посматрајмо разбијање паралелограма $ABCD$ на троуглове $ABM, B_k C C_1$, паралелограм $B_i B_{i+1} D_{i+2} D_{i+1}$, за $i = 0, 1, \dots, k-2$, и један петоугао $B_{k-1} B_k C_1 D D_k$, као и разбијање паралелограма $ABEF$ на троуглове $ABM, A_k F_1 F$, паралелограме $A_i E_{i+1} E_{i+2} A_{i+1}$, за $i = 0, 1, \dots, k-2$ и један петоугао $A_k A_{k-1} E_k E F_1$. Доказом подударности ових полигона добијемо дато тврђење. ■

Лема 2.7.10.: *За сваки правоугаоник постоји правоугаоник који је са њим разложиво једнак, а чија је једна страница има унапред задату дужину.* [12]

Доказ [12]: У првом случају размотримо ситуацију када је дата страница новог правоугаоника већа од мање странице правоугаоника $ABCD$, али и мања од његове дијагонале (Слика 2.29.)

У продужетку странице CD , налази се тачка E тако да је дуж AE једнаке дужине као дата страница непознатог правоугаоника. Из темена B повучемо праву, паралелну са AE и на њу се спусте нормале AF и EK из тачака A и E . Тачке пресека CD са BK и AF означимо словима L и N .

Наносимо дужину дужи EN на страну AB , од тачке A ка B , и нека је број наношења n . Тада је $n \cdot EN \leq AB$, али ако нанесемо још једном дуж дужине EN , биће: $(n+1) \cdot EN > AB$.⁴

Из тачака дељења $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ повлачимо праве паралелне са AF до пресека са LD у тачкама $N_1, N_2, \dots$. Последњу праву повлачимо из A_n паралелно са AF , она сече BL у тачки M .⁵

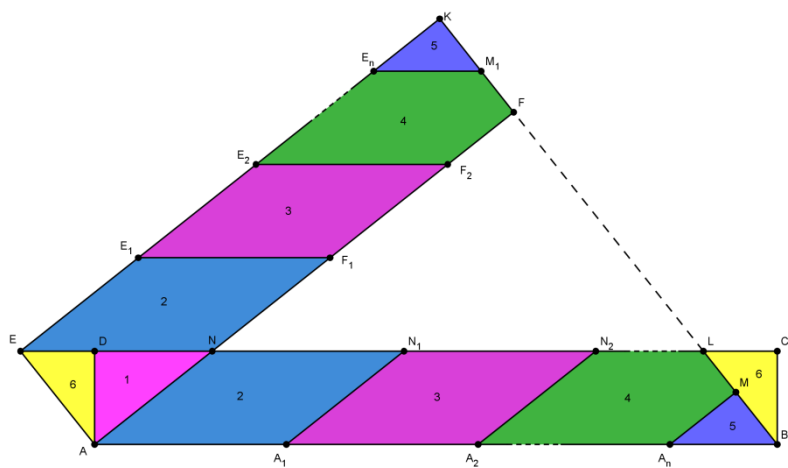
⁴ Што следи из Архимедове аксиоме.

⁵ Ако је $n \cdot CD = AB$, то ће се тачка A_n (а са њом и тачка M) поклапа са B .

На исти начин наносимо дужину дужи AN на страну EK и из тачака дељења $E_1, E_2, \dots$ повучемо праве паралелне са EN , до пресека са AF у тачкама $F_1, F_2, \dots$. Последња од тих тачака сече KF у тачки M_1 . Видимо да ће тачака $E_1, E_2, \dots$ бити колико и тачака $A_1, A_2, \dots$, на име n .

Из конструкције овог правоугаоника следи подударност делова, означених на слици 2.29. истим цифрама, а део 1 је заједнички за дати и тражени правоугаоник. Тако се добија да су правоугаоници $ABCD$ и $AFKE$ разложиво једнаки.

Размотримо случај када је дата страница траженог правоугаоника већа од дијагонале датог правоугаоника.



Слика 2.34.

Претпоставимо да је $AFKE$ дати правоугаоник (иста слика 2.34.). Продужимо страницу KF до тачке B , тако да је дуж AB једнаке дужине као дата страница траженог правоугаоника. Повлачимо $EC \parallel AB$, $AD \perp EC$ и $BC \perp EC$. На страницама EK и AF из тачака E и A , поново наносимо дужи дужине AN , и конструишемо $E_1F_1, E_2F_2, \dots$. Налазимо подударне делове у правоугаоникима $AFKE$ и $ABCD$.

И последњи случај, нека је дата страна AD траженог правоугаоника мања од сваке странице датог правоугаоника $AFKE$ (исто слика 2.34.). Тада је довољно да конструишемо дуж EC из E на растојању AD од темена A . Даља конструкција је аналогна претходном случају. ■

Лема 2.7.11.: Сваки n -тоугао ($n \geq 3$) је разложиво једнак са неким правоугаоником. [3]

Доказ [3]: Дати n -тоугао се унутрашњим дијагоналама разбија на $(n-2)$ троугла (Лема 2.7.1. и Лема 2.7.2.) које ћемо означити са $T_1, \dots, T_{n-2}$. Формира се правоугаоник $A_0B_0B_{n-2}A_{n-2}$ основице A_0B_0 произвољне дужине и површине једнаке површини датог многоугла. На страници A_0A_{n-2} означити тачке $A_1, \dots, A_{n-3}$, а на страни B_0B_{n-2} тачке $B_1, \dots, B_{n-3}$, тако да важи распоред $A_{i-1} - A_i - A_{i+1}$ и $B_{i-1} - B_i - B_{i+1}$, за $i = 1, \dots, n-3$, и да је површина троугла T_i ,

за све $i = 1, \dots, n-2$. Применом Леме 2.7.10. и Леме 2.7.6. доказује се да је дати n -тоугао разложиво једнак са правоугаоником $A_0 B_0 B_{n-2} A_{n-2}$. ■

Последица 2.7.12.: *За сваки правоугаоник постоји квадрат који је са њим разложиво једнак.* [12]

Сада можемо поставити алгоритам да многоугао трансформишемо у квадрат: разложимо многоугао на троуглове, сваки троугао једном дужи разлагања и докажемо разложиву једнакост са паралелограм и потом сваки паралелограм разложимо на правоугаоник. Докажемо разложиву једнакост правоугаоника са новим правоугаоницима који ће имати сви по једну подударну страну и методом допуне добијамо једна правоугаоник. Тако добијен правоугаоник (слика 2.35.) је разложиво једнак са квадратом.



Слика 2.35.

Како Теорема 2.7.1. важи за сваки многоугао, то важи и за сваки једнакостранични многоугао. За сваки једнакостранични многоугао може се доказати његова разложива једнакост са квадратом, странице a који има исту површину као многоугао. Значи, сваки квадрат је „представљен“ класом многоуглова који имају исту површину као квадрат.

У случају криволинијских фигура то није увек случај, јер није могуће сваку криволинијску фигуру, исте површине као квадрат, разложити на квадрат, јер постоје разлике у мерењу површина праволинијских и криволинијских фигура.

Теорема 2.7.13.. : (F. Bolyai – Gerwin, 1832/33)

Два многоугла су разложиво једнака ако имају једнаке површине.

Први доказ [3]: Из адитивности функције површине следи да две разложиво једнаке фигуре, а тиме и два разложиво једнака полигона имају једнаке површине. Због тога, ћемо доказати да су два полигона једнаких површина разложиво једнака.

Означимо их са M_1 и M_2 , а њихове површине су $S(M_1) = S(M_2)$. На основу леме 2.7.11., постоје правоугаоници Π_1 и Π_2 који су разложиво једнаки полигонима M_1 и M_2 , редом. Примењујући лему 2.7.10., добијамо да су правоугаоници Π_1 и Π_2 разложиво једнаки. Примењујући лему 2.7.4. прво на полигоне M_1, Π_1 и Π_2 , а затим на полигоне M_1, Π_2 и M_2 , на крају добијамо да су полигони M_1 и M_2 разложиво једнаки, што је и требало доказати.

Други доказ(А): Нека су дати многоуглови M_1 и M_2 који су исте површине. Из Леме 2.7.2. видимо да се сваки од ових многоуглова може разложити на троуглове. Из Леме 2.7.6. и Леме 2.7.7. имамо да за сваки троугао постоји са њим разложиво једнак квадрат, а примењујући Лему 2.7.8. имамо да је свака од ове две уније разложиво једнака са по једним квадратом, означимо их са Q_1 и Q_2 , који су истих површина, па и разложиво једнаки. Како је Q_1 и M_1 разложиво једнаки и Q_2 и M_2 то на основу транзитивности релације разложиве једнакости (Леме 2.7.4) следи да су M_1 и M_2 разложиво једнаки. ■

Теорему 2.7.13. примењује се приликом доказа да је квадрат разложиво једнак са неким другим полигонима.

3 Примена трансформације квадрата

3.1 По чему је квадрат „бољи“ од других четвороуглова?

Када производимо неки производ дајући му облик, поред облика, удобности, чврстине и лепоте, важно нам је да је и економичан, тј. да је вечичина објекта (површина, обим, запремина итд.) има максималну или минималну вредност.

У том смислу, један од могућих облика предмета може бити „бољи“ од другог, тј. има мањи обим и већу површину, ако се ради о раванским фигурама. [1]

Постоји унапред задати облик објекта, а од нас зависи избор његове величине.

Али то може бити практични проблем геометријске природе: изградња оgrade око одређеног земљишта, с тим да ограда мора бити правоугаоног облика, али тако да са што мањом дужином оgrade оградимо што веће подручје. Прецизније, то на математичком језику значи: Како од свих правоугаоника исте површине наћи онај са најмањим обимом?

Одговор на то питање даје следећа теорема:

Теорем 3.1.1.: *Обим квадрата је мањи од обима било ког правоугаоника исте површине.*

Доказ[12]: Нека је дат квадрат $ABCD$ исте површине као и правоугаоник $BEFG$. Страна квадрата једнака је a , а b и c су странице правоугаоника, при чему $b > c$. Одузмемо од правоугаоника и квадрата заједнички део $ABEK$. Остају нам два правоугаоника $AKFG$ и $KECD$ исте површине, тј. $AG \cdot FG = DC \cdot KD$. Али како $FG < DC$, то $AG > KD$; или $b - a > a - c$. Тада $b + c > 2a$ и $2b + 2c > 4a$, тј. обим било ког правоугаоника, једнаке површине као и код квадрата, је већи од обима квадрата. Значи, од свих правоугаоника исте површине, квадрат има најмањи обим. ■

Претпоставимо сада, обрнуто, да није дата површина, већ обим области. Који од њих ће имати највећу површину?

Одговор следи из следеће теореме:

Теорема 3.1.2.: *Квадрат има већу површину од било ког правоугаоника, са којим има једнак обим.*

Први доказ (А): Нека је дат квадрат чија је страница дужине a , обима $p = 4a$, и површине $q = a^2$. Претпоставимо, да постоји правоугаоник чији је обим, такође, једнака $p = 2b + 2c$, страниц b и c , а површина $Q = bc$. Из $p = 4a = 2b + 2c$ следи $a = \frac{b+c}{2}$, те је $q = \frac{b^2 + c^2}{2} + bc = \frac{b^2 + c^2}{2} + Q$. Како је $\frac{b^2 + c^2}{2} > 0$, то је увек $q > Q$.

Други доказ [12]: Дат је квадрат обима једнаког p и површине q . Претпоставимо, да постоји правоугаоник, чији је обим такође једнак p , а површине $Q > q$. Конструисемо нови квадрат који има једнаку површину као и правоугаоник, па самим тим и површину већу од површине почетног квадрата и обим новог квадрата је p_1 . Али из Теореме 3.1.1., обим новог

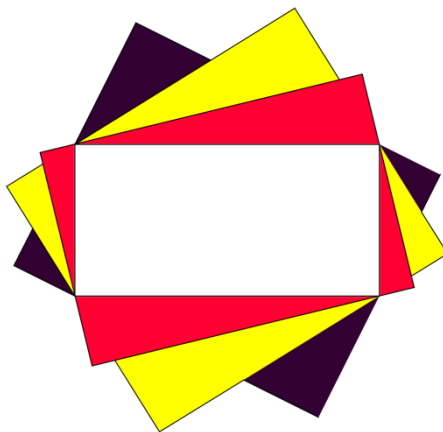
квадрата $p_1 < p$. Значи, површина новог квадрата већа од површине датог, а обим мањи. Следи, нема правоугаоника са обимом мањим од квадрата и већом површином. Ту је и правоугаоник који има површину једнаку површини квадрата, а обим квадрата је мањи од обима правоугаоника. То је контрадикција.

Дакле, од свих правоугаоника са истим обимом квадрат има најмању површину. ■

Али то није све, квадрат је „бољи“ од сваког четвороугла, у смислу да је обим квадрата мањи од било ког четвороугла истих површина и површина квадрата је већа од површине сваког четвороугла истог обима као квадрат.

Задатак 1: Спортско игралиште машинске школе има облик правоугаоника (слика 3.1.), и на теменима тог правоугаоника су посађена четири дрвета. Директор школе је дозволио ученицима да прошир игралиште, уз следеће услове:

1. сачувају правоугаону форму, али обавезно измене правац страна правоугаоника;
2. дрвеће мора остати на периферији игралишта (ако не на теменима правоугаоника, онда негде са стране).



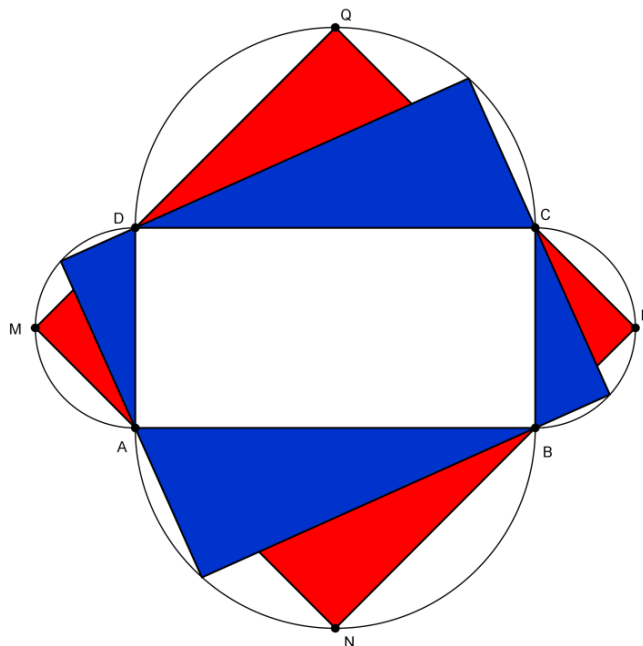
Слика 3.1.

Будући мајстори су рачунали и цртали.

На цртежу се појављују разни правоугаоници, описани око датог правоугаоника (слика 3.2.). Прорачуни су показали да површина описаних правоугаоника нису исте. Који од тих правоугаоника има највећу површину?

Испоставило се да је то квадрат. Али се мора доказати. Директор школе неће прихватити неоправдано ширење игралишта.

Овај пример може преформулисати у геометријски задатак: Доказати да од свих правоугаоника, који су описани око датог правоугаоника, највећу површину има квадрат.



Слика 3.2.

Решење: Сваки правоугаоник описан око датог (слика 3.3.) излази из површине правоугаоника и то са четири правоугла троугла. При промени положаја темена описаних правоугаоника описује се полукруг, као геометријско место правоуглих троуглова, са заједничком хипотенузом. Вредност површине свака од четири полукруга се мења, и достиже максимум ако висина хипотенузе узима вредност полупречника полукруга. У овом положају правоугли троуглови су једнакокраки и у паровима једнаки.

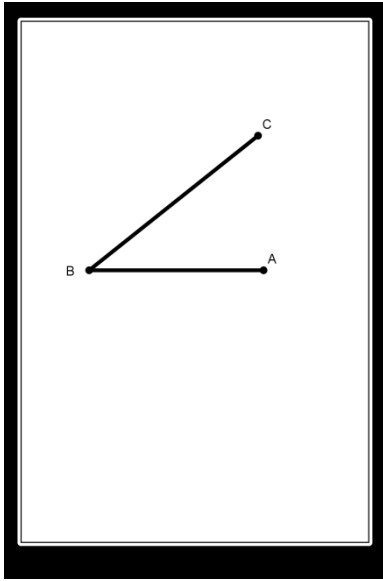
Да ли је могуће описати правоугаоник са таквим троугловима? Да. То следи из тога што је сума углова при A, B, C и D образују испружен угао ($45^\circ + 90^\circ + 45^\circ$) и следи MAN, NBP, PCQ и QDM - нису изломљене линије, него праве. Поред тога, $MN = NP = PQ = QM$, па како су они састављени из једнаких делова, следи $MNPQ$ квадрат.

Дакле, од свих правоугаоника, описаних око неког правоугаоника највећу површину има квадрат.

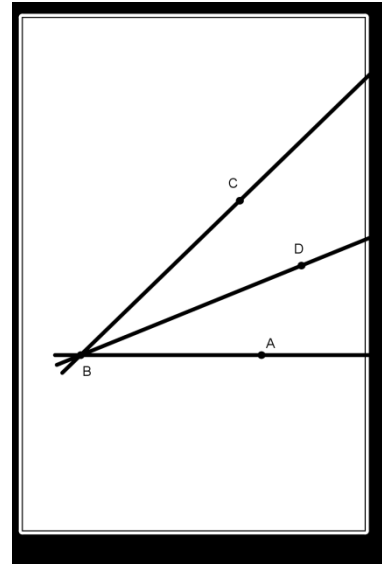
3.2 Помоћне конструкције при пресавијању листа хартије

Традиционални алати у геометрији за конструкције су шестар и лењир. Али неки геометријски задаци могу бити решени и само пресавијањем квадратног листа папира, као што је у уводу било речи о оригамију, овде ће се обрадити неки конкретни геометријски проблеми.

Нека, нпр. желимо да поделимо $\angle ABC$ на пола (слика 3.3.). Преклопимо папир по BC и AB , а затим склопимо BC и AB , и добијамо бисектрису BD (слика 3.4.) угла $\angle ABC$.

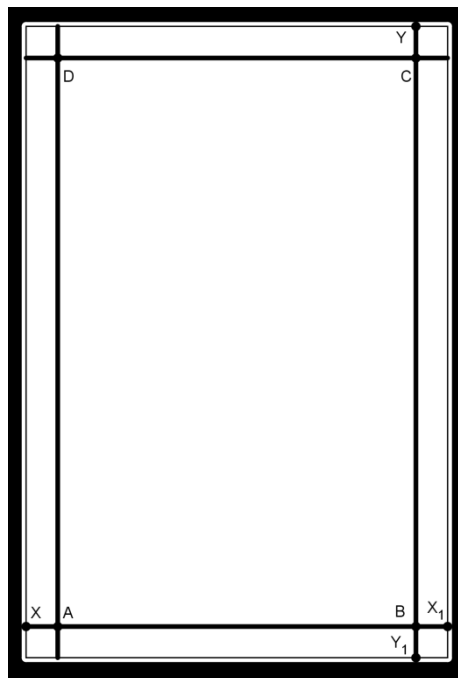


Слика 3.3.



Слика 3.4.

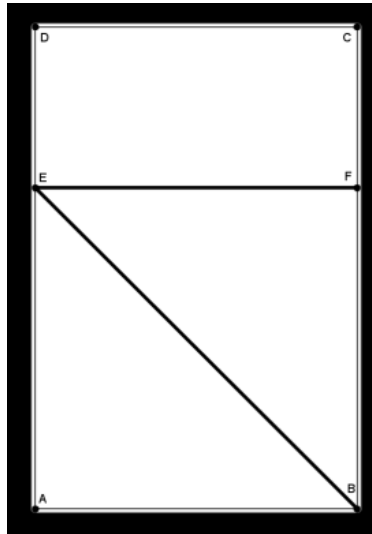
Комад папира произвољног облика можемо пресавијањем претворити у правоугаоник или квадрат.



Слика 3.5.

Нека имамо било какав лист папира, изаберемо произвољан прегиб XX_1 (слика 3.5.), то је права линија, обележена на самој ивици папира. Затим опет преклопимо папир, тако да добијемо нормалу YY_1 на XX_1 , и у њиховом пресеку добијамо тачку B . По истом принципу се добијају остале тачке правоугаоника $ABCD$.

Нека је AB краћа страница правоугаоника $ABCD$. Пресавијемо правоугаоник, тако да се права AB поклопи са правом BC (слика 3.6.). Део $EDCF$ се одсече. Преостала фигура $AEFB$ је квадрат.

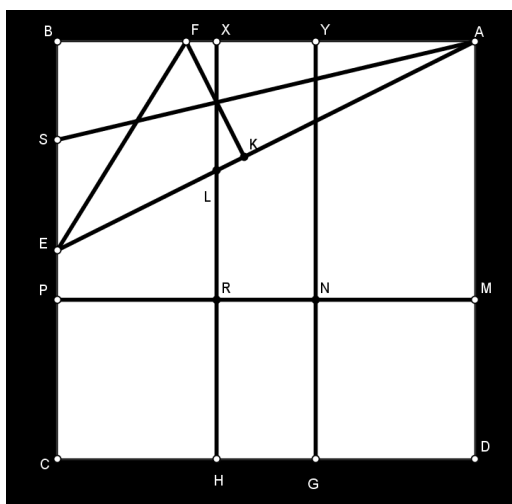


Слика 5.7.

Сви сложенији задаци везани за пресавијање папира ће кретати од тога да је лист папира правоугаоног или квадратног облика.

Задатак 2: Направити „златни пресек“ страна датог квадратног листа папира са неколико прегипа.

Подсећања ради, „златни пресек“ је пропорција, за коју је потребно наћи тачку X на дужи AB , тако да $\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{BX}$ или $AX^2 = AB \cdot BX$.



Слика 3.7.

Решење [12]: Поделитемо дати квадрат $ABCD$ на пола, нађемо средину дужи BC и означимо ту тачку са E (слика 3.7.). Направимо на папиру прегип AE . Нађемо тачку K , тако

што је $EK = EB$, док тачку F налазимо у пресеку стране квадрата AB и бисектрисе угла $\angle BEK$. Пренесемо дуж AK на AB , тако да $AX = AK$ (то се може урадити прегибом AS) и тада је тачка X тражена.

За доказ, налазимо XB на XA (линија прегипа XH) и тачку пресека линије прегипа XH и праве EA означимо са L . Јасно је, да при томе LX образује прав угао са AB . Конструирамо FK . Угао код темена K је прав, па како је по конструкцији један од њих једнак једнак углу код темена B , правоугли троуглови су $\triangle AXL \cong \triangle AKF$ (имаје по један заједнички угао и катете $AX = AK$).

Тада $XL = FK$, а како $FK = BF$, то:

$$BF = XL \quad (1)$$

$\triangle ABE \sim \triangle AXL$ и $BE = \frac{AB}{2}$; следи:

$$XL = \frac{AX}{2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) имамо:

$$BF = \frac{AX}{2}. \quad (3)$$

Нађемо на AB тачку Y , тако што:

$$BF = FY \quad (4)$$

(налазимо BF на FA). Тада $AB = AF + FB = AF + FY$. Следи, $AY = AF - FY$.

Множењем ових једнакости имамо:

$$AB \cdot AY = (AF + FY) \cdot (AF - FY) = AF^2 - FY^2.$$

Из (4) и (1) следи: $FY = FK$, тада $AB \cdot AY = AF^2 - FK^2$. Али $AF^2 - FK^2 = AK^2$ (из правоуглог троугла $\triangle AKF$); како $AK = AX$ (по конструкцији) имамо:

$$AB \cdot AY = AF^2 - FK^2 = AK^2 = AX^2,$$

или

$$AX^2 = AB \cdot AY. \quad (5)$$

Али $AX \stackrel{(2)}{=} 2XL \stackrel{(1)}{=} 2BF \stackrel{(4)}{=} BF + BF = BF + FY = BY$.

Следи, $AX = BY$, а тада је и:

$$AY = BX . \quad (6)$$

Из (5) и (6) имамо:

$$AX^2 = AB \cdot BX . \quad (7)$$

Тако се долази до:

$$BY^2 = AB \cdot AY . \quad (8)$$

тј. тачка Y дели дуж AB у таквом односу да:

$$\frac{AB}{BY} = \frac{BY}{AY} .$$

Занимљиво је да је при томе дуж AX је подељена тачком Y и дуж BY подељена тачком X у „златни пресек“.

Да би то доказали, конструишемо AX и BY као страницама квадрата $AXRM$ и $BYNP$ (нису приказани на слици 3.7.). Конструишемо линију прегипа PM . Једнакост (8) показује да квадрат $BYNP$ има једнаку површину са правоугаоником чије су стране AY и AD или у (6) – правоугаоник $BXHC$.

Одузимањем ових површина из ове две фигуре једнаких површина, остаје правоугаона област $BXRP$ и правоугаоник $XYNP$ и квадрат $CPRH$, који имају исте површине.

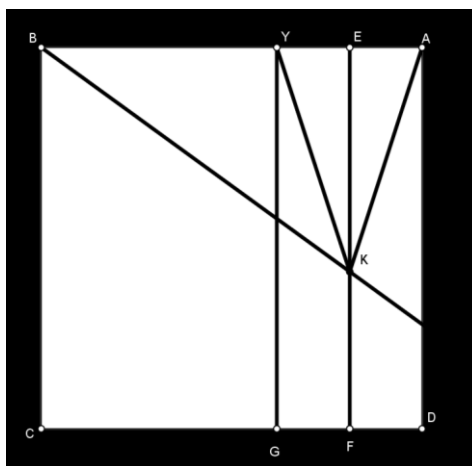
Тада $XY \cdot XR = PR^2$ или како $XR = AX$ и $PR = BX = AY$, то $XY \cdot AX = AY^2$, што је био један од потребних доказа. Други део иде аналогно.

Задатак 3: Савијањем квадратног листа папира, једноставно је конструисати углове од $45^\circ, 22^\circ 30', 11^\circ 15'$ итд. Али можели се савијањем папира конструисати угао од 36° , потом $72^\circ, 18^\circ, 9^\circ$ итд.?

Испоставило се да може, али користећи Задатак 1.

Решење: Нађемо тачку Y , делећи страну AB датог квадратног листа папира „златним пресеком“ помоћу претходног задатка (слика 3.8.). Конструишемо правоугаоник $AYGD$ и поделимо га на пола, линијом прегипа EF . Ротирамо YB око Y и теме B „пада“ на EF , ту тачку означимо словом K и спојимо са теменом A . Конструишемо прегипе YK, KB и KA .

Докажимо да је троугао $\triangle BAK$ једнакокрак и сваки од углова $\angle BKA$ и $\angle KAB$ дупло већи од $\angle ABK$.



Слика 3.8.

По конструкцији, $BY = YK$ и $EY = AE$. Тада $YK = AK$ и $BY = YK = AK$. Даље, $\angle BAK = \angle KYA$, $\angle KBY = \angle YKB$; следи $\angle KYA = 2\angle KBY$ (као спољашњи угао троугла $\triangle BYK$) и

$$\angle BAK = 2\angle KBA. \quad (1)$$

Даље,

$$\begin{aligned} BK^2 &= EK^2 + BE^2 = AK^2 - AE^2 + BE^2 = YK^2 + (BE^2 - AE^2) = \\ &= BY^2 + (BE + AE) \cdot (BE - AE) = BY^2 + AB \cdot (BE - YE) = \\ &= BY^2 + AB \cdot AY, \end{aligned}$$

али $BY^2 = AB \cdot YB$; значи $BK^2 = AB \cdot YA + AB \cdot BY = AB(YA + BY) = AB \cdot AB = AB^2$ или $BK = AB$. Тада:

$$\angle BAK = \angle BKA. \quad (2)$$

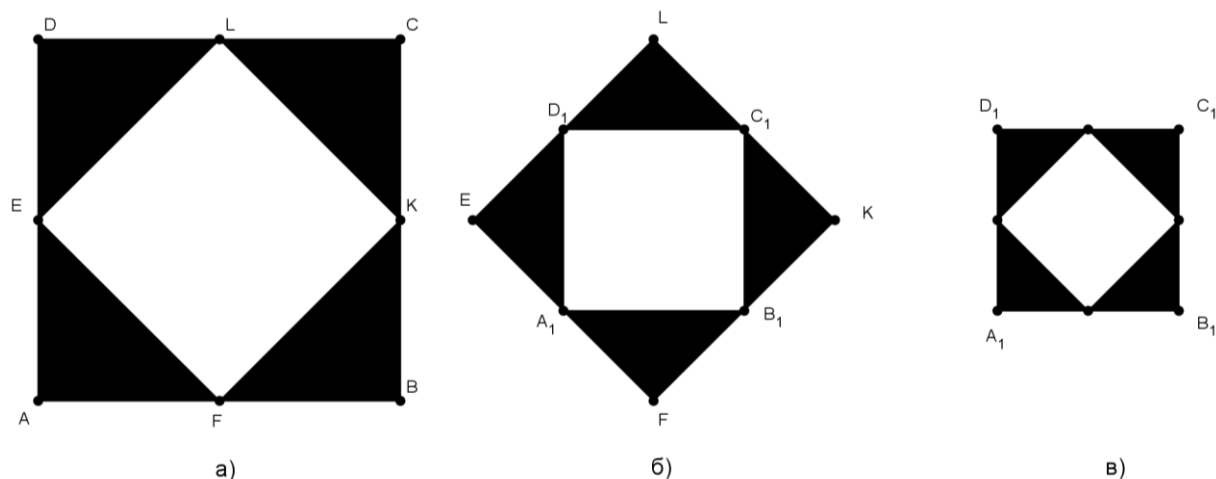
Из (1) и (2) следи: $\angle BAK = \angle AKB = 2\angle KBA$.

Нека је $\angle KBA = \alpha$, тада $\angle BAK = \angle AKB = 2\alpha$, и $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$. Тј. $\alpha = 36^\circ$. Тако је $\angle KBA = 36^\circ$, а то је тражени угао.

3.3 Квадрат квадрата

Овде говоримо о неким карактеристикама квадрата уписаног у квадрат.

Нека је дат квадрат $ABCD$ (слици 3.9.). Повезана су средишта страница овог квадрата и добија се нови квадрат $EFKL$, чија је површина једнака половини површине квадрата $ABCD$.



Слика 3.9.

Изрежемо четири правоугла троугла, који представљају делове преостале исецањем квадрата $EFKL$. Сума површина тих троуглова је, такође, половина површине квадрата $ABCD$. Ако узмемо површину квадрата $ABCD$ за мерну јединицу, то је сума површина одрезаних троуглова $\frac{1}{2}$.

У преостали квадрат $EFKL$, опет на исти начин, уписујемо квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (слика 3.9.б)) и опет одрежемо четири правоугла троугла, који садрже праве углове квадрата. Сума површина одрезаних делова чини $\frac{1}{2}$ површине квадрата $EFKL$ и значи $\frac{1}{4}$ површине квадрата $ABCD$. Понављајући тај поступак (Слика 3.9.в)) добијамо четири троугла, чија је сума површина $\frac{1}{8}$ површине квадрата $ABCD$.

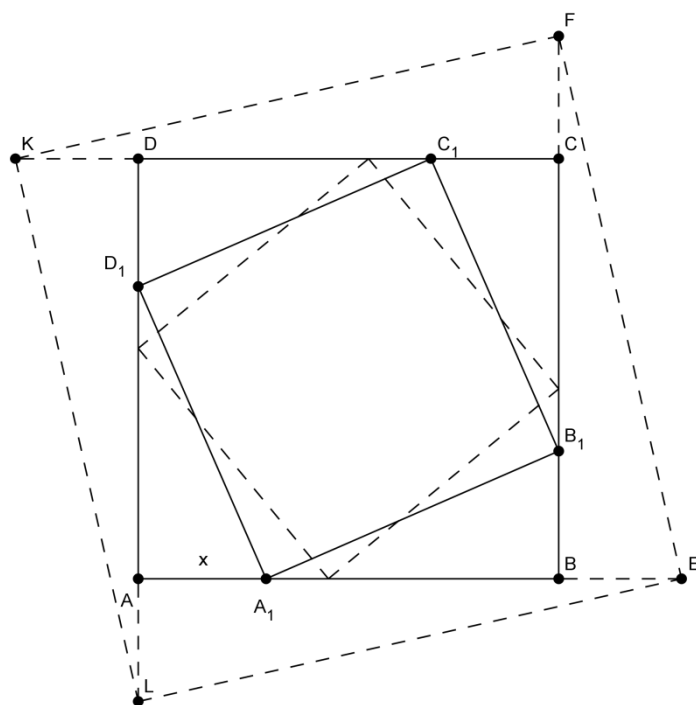
Користећи овај метод бесконачан број пута, добијамо увек четири правоугла троугла који се поновомогу саставити у квадрат. Сума површина четири троугла представља бесконачан низ бројева: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ⁶

Следи, сума површина ових делова тежи ка јединици, тј.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 1.$$

Враћамо се слици 3.9.а), да видимо шта се дешава са површином уписаног квадрата када померамо његова темена по странама квадрата.

⁶ Геометријски низ са количником $\frac{1}{2}$.



Слика 3.10.

Нека се темена квадрата $ABCD$ крећу по страницама, почевши од темена A , дужина померања је изабрана произвољно: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и повезују се тачке A_1, B_1, C_1, D_1 дужима $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$.

Прво, докажимо да је $A_1B_1C_1D_1$ квадрат. Имамо да $\triangle A_1AD \cong \triangle B_1BA_1$ ($AA_1 = BB_1$, $AD_1 = BA_1$ и $\angle D_1AA_1 = \angle A_1BB_1 = 90^\circ$). Тада:

$$A_1D_1 = A_1B_1;$$

$$\angle AA_1D_1 = \angle BB_1A_1;$$

$$\angle AA_1D + \angle BA_1B_1 = 90^\circ;$$

следи да је $\angle B_1A_1D_1$ прав.

Понављамо поступак за друге парове троуглова и закључујемо да је $A_1B_1C_1D_1$ квадрат.

Како површина S квадрата $A_1B_1C_1D_1$ зависи од измене дужине $AA_1 = x$?

Нека је страна датог квадрата $ABCD$ једнака a , тада је $A_1B = a - x$ и $BB_1 = x$. Па из Питагорине теореме:

$$A_1B_1^2 = x^2 + (a - x)^2.$$

Али $S = A_1B_1^2$, следи

$$S = x^2 + (a - x)^2.$$

Трансформацијом десне стране једначине добија се:

$$x^2 + (a - x)^2 = a^2 - 2ax + 2x^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - 2ax + 2x^2 = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a^2}{4} - ax + x^2\right) = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

Тако да

$$S = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Ако је:

1. $x = 0$ уписани квадрат је подударан са датим квадратом $ABCD$;
2. $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ вредност је на интервалу од $\frac{a}{2}$ до 0 , следи да се смањује и површина S уписаног квадрата од a^2 до $\frac{a^2}{2}$.
3. $x \in \left[\frac{a}{2}, a\right]$ вредност $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ се увећава, и површина квадрата је од $\frac{a^2}{2}$ до a^2 .

Најмању површину од свих уписаних квадрата има квадрат чија су темена средишта страница датог квадрата.

Ако наставимо са поступком повећања $AA_1 = x$, дајући му већу вредност, када a (нпр. на слици 3.10. узето је као x дуж $AE > AB$), то темена уписаног квадрата $EFLK$ ће лежати на продужетку стране квадрата $ABCD$ и површина таквог квадрата ће расти неограничено.

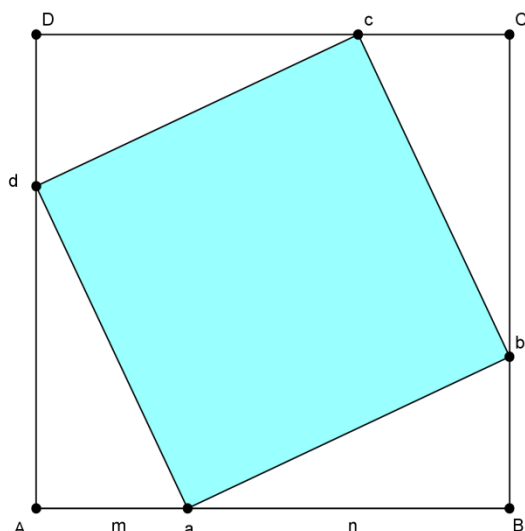
3.4 Процена вредности драгог камена на основу величине

Цена је обично сразмерна тежини робе. Али неко ретко и драгоцено камење има посебну вредност у односу на своју величину. Вредност драгог камења је пропорционална квадрату његове величине.

Ако је дијамант пресечен на два дела, његова укупна тежина је наравно иста. Поставља се питање: Да ли је укупна вредност делова дијаманта иста као и код целог дијаманта? Ако је рецимо снижена, питање је: У ком случају је губитак највећи?

Проблем није геометријски. Али ослањајући се на позната својства квадрата, можемо решити овај проблем.

Означимо тежину дијаманта који није сломљен, $p = AB$ (слика 3.11.). Нека је цена по јединици тежине дијаманта једнака новчаној јединици. Тада је вредност дијаманта p^2 , и то је површина квадрата $ABCD$.



Слика 3.11.

Нека су делови на које је пресечен дијамант тежине m и n јединица. На дужи AB нађе се тачка a која ће поделити ову дуж на делове m и n .

Наћемо на страници квадрата $ABCD$ дуж $Ad = DC = cb = Ba$ и добијамо фигуру $abcd$, која ће бити квадрат (претходно поглавље).

Укупна вредност два дела овог дијамнта је $(m^2 + n^2)$ изражава се као сума површина квадрата са странама Aa и Ba или Aa и Ad , тј. по Питагориној теореме: површина квадрата $abcd$. Цена није подељена на делове дијаманта, цена целог дијаманта је површина квадрата $ABCD$.

Али површина уписаног квадрата $abcd$ је мања од површине квадрата $ABCD$ и најмања вредност се постиже у случају када тачка a дели дуж AB на пола.

Дакле, одговор на питање је добијен: цена два дела пресеченог дијамнта је мања од цене непресеченог, а губитак ће бити највећи ако је дијамант пресечен на два једнака дела. То следи из: $p^2 - m^2 - n^2$ или $(m + n)^2 - m^2 - n^2 = 2mn$. Ако је дијамант подељен на два једнака дела $\left(m = n = \frac{p}{2}\right)$, то ће губитак бити једнак половини почетне цене.

3.5 Квадрат описан око квадрата

Постоје математички проблеми за које се не тако давно пронашао пут ка решењу и нису коришћени само познати начини и средства, него су биле потребне нове методе које су оригиналне и јединствене.

Овакви проблеми су посебно интересантни. Они су често заступљени на математичким олимпијадама. Дешавало се да се током решавања неког проблема појаве нове неконвенционалне математичке теорије.

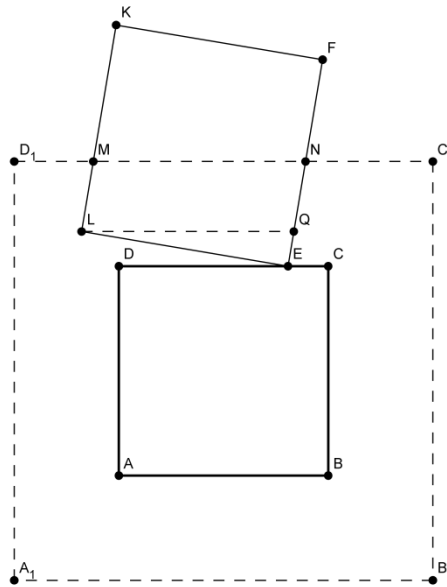
У положају изабраном на слици 3.12. тачке M и N на C_1D_1 , странице квадрата $A_1B_1C_1D_1$ се налази на странама EF и EL квадрата $EFKL$. Означимо $\angle LED$ са α и конструишемо $EP \perp MN$. У том случају:

$$MN = MP + PN = EP \cdot \operatorname{ctg} \alpha + EP \cdot \operatorname{tg} \alpha = EP \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha).$$

Како је $EP = \frac{1}{2}$, следи:

$$MN = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Како $\sin 2\alpha \leq 1$, то $\frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 1$, значи $MN \geq 1$.



Слика 3.13.

Сада претпоставимо да темена дужи MN леже на страницама EF и KL квадрата $EFKL$ (слика 3.13.). Повучемо $LQ \parallel MN$. Фигура $MNQL$ је паралелограм. Значи, $MN = LQ$, али $LQ > LE$; следи, $MN > LE$ или $MN > 1$.

Ако $DE < \frac{DC}{2}$ и $\alpha < 45^\circ$, те може обарзовати положај представљен на слици 3.14.

Овде је дуж MN састављена из три дела: $MN = MD_1 + D_1P + PN$.

Настваљамо ED до пресека са A_1D_1 у тачки Q . Тада:

$$MD_1 = QD_1 - QM = QD_1 - (QD + DE) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + DE \right) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$D_1P = QE = \frac{1}{2} + DE \text{ и } PN = PE \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

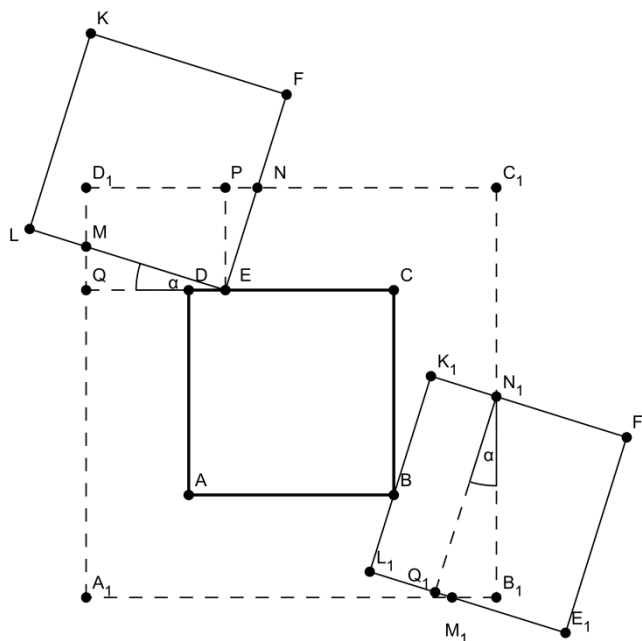
Сређивањем ове три једначине, добија се:

$$MD_1 + D_1N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha - DE \cdot \operatorname{tg} \alpha + DE + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = 1 + DE(1 - \operatorname{tg} \alpha).$$

Овај случај је могућ ако $\alpha < 45^\circ$, то:

$$1 - \operatorname{tg} \alpha > 0 \text{ и } MD_1 + D_1N > 1.$$

Ако $DE = 0$, $MD_1 + D_1N = 1$, а за $\alpha = 0$ је $MD_1 + D_1N = 1 + DE \geq 1$.



Слика 3.14.

Нека је теме квадрата $ABCD$ на страници квадрата $EFKL$. И у овом случају део обима квадрата $A_1B_1C_1D_1$ који сече квадрат $EFKL$ је мањи од јединице, при било ком положају квадрата $EFKL$.

Нека, нпр. квадрат $EFKL$ доведемо у положај $E_1F_1K_1L_1$ (слика 3.14.). Треба доказати да $M_1B_1 + B_1N_1 > 1$.

Конструисати $N_1Q_1 \parallel K_1L_1$, продужити дуж N_1B_1 до пресека са E_1L_1 у тачки P_1 . Уведу се ознаке:

$$\angle Q_1N_1B_1 = \alpha \text{ и } B_1N_1 = a.$$

Ако $a > 1$, тим жељена неједнакост одмах постаје важећа.

Нека $a > 1$.

Из $\triangle N_1Q_1P_1$:

$$N_1P_1 = \frac{N_1Q_1}{\cos \alpha}$$

и како $N_1Q_1 = 1$, то $N_1P_1 = \frac{1}{\cos \alpha}$;

$$B_1P_1 = N_1P_1 - B_1N_1 = \frac{1}{\cos \alpha} - a.$$

Како

$$\angle P_1M_1B_1 = \angle Q_1N_1B_1 = \alpha$$

то из $\triangle M_1B_1P_1$ имамо:

$$M_1B_1 = B_1P_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \left(\frac{1}{\cos \alpha} - a \right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - a \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Треба доказати да

$$M_1B_1 + B_1N_1 = \frac{1 - a \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} + a > 1,$$

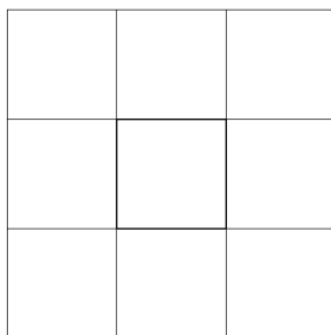
или еквивалент неједнакости (како $\sin \alpha > 0$):

$$1 - a \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha - \sin \alpha > 0.$$

Груписањем, добијамо:

$$1 \cdot (1 - \sin \alpha) - a \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) > 0.$$

Из услова $a < 1$ и $\cos \alpha - \sin \alpha < 1 - \sin \alpha$, тј. умањилац је мањи од умањеника, па је разлика позитивна, што је и било потребно.



Слика 3.15.

Дакле, на који год начин поставимо квадрат $EFLK$ у доносу на квадрат $ABCD$, пресек страница квадрата са квадратом $A_1B_1C_1D_1$, није већи од странице квадрата $ABCD$. А таквих страница у обиму квадрата $A_1B_1C_1D_1$ има осам. Од осам квадрата који су једнаки са датим, распоређени око тог, као на слици 3.15. и на основу претходне анализе, можемо рећи да је то највећи број квадрата са таквом особином.

3.6 Савршенсто квадратуре

Следећи проблем није дуго био решен, мислило се да и нема решење.

Треба саставити квадрат (или правоугаоник) из неколико квадрата, при чему су странице квадрата цели бројеви. Проблем се додатно компликује ако се постави услов да се квадрати не понављају.

Дељење кавдрата (или правоугаоника) на коначан број не природно распоређених кавдрата, при чему никоја два нису подударна, зове се **савршенство квадратуре квадрата** (или **правоугаоника**), а квадрат (или правоугаоник), састављен из неједнаких квадрата **савршени квадрат (правоугаоник)**.

Неки математичари су сугерисали да савршенство квадратуре квадрата није могуће.

Али иако се ово претпостављало, тражено је решење и даље, и пре око једног века састављен је први такав квадрат.

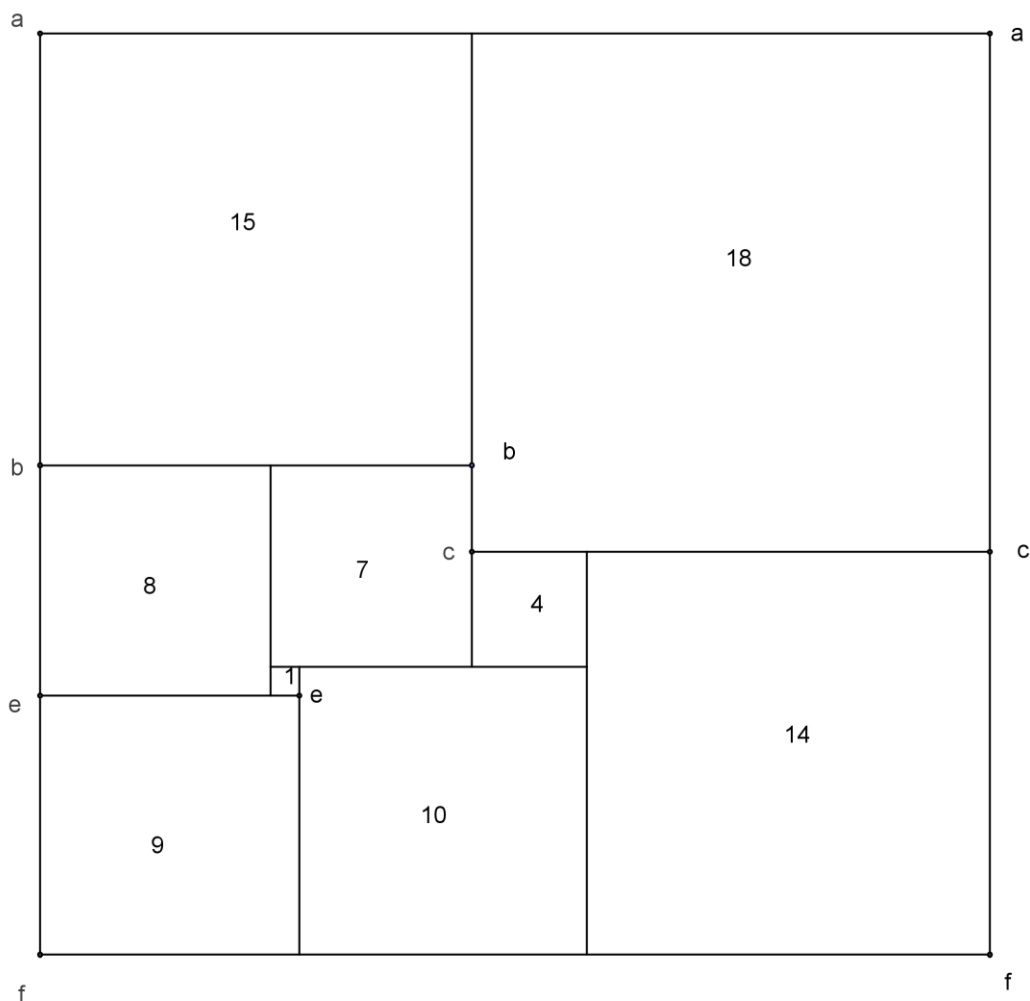
На слици 3.16. представљен је квадрат, састављен из 26 неједнаких квадрата. (Цифре на деловима квадрата представљају дужину стране квадрата.) Може се саставити квадрат и од 28 непоновљених квадрата итд.



Слика 3.16.

Није у потпуности разрешено, да ли је 26 најмањи број квадрата од којих је могуће саставити квадрат.

Савршенство квадратуре правоугаоника такође је могуће: за то је потребно 9 квадрата са странама 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 и 18. (Слика 3.17.)



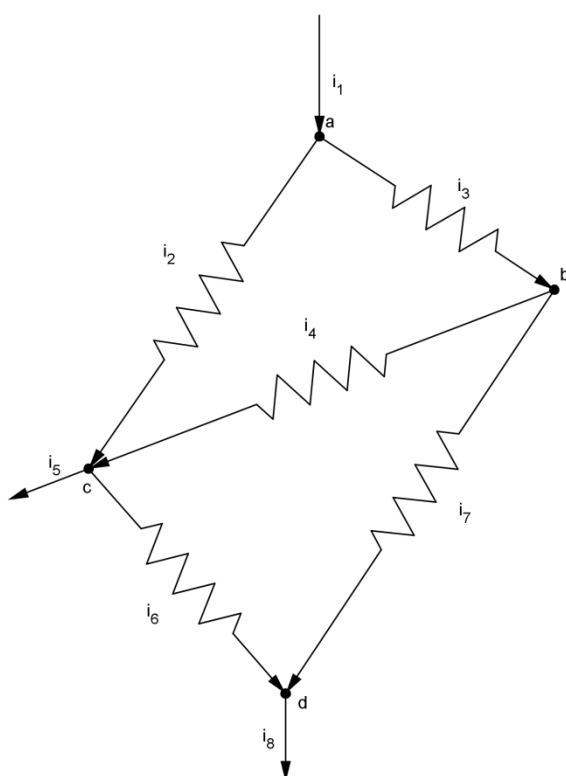
Слика 3.17.

Утврђено је да није могуће узети мање од 9 квадрата и добити савршени правоугаоник, и да не можемо узети друге правоугаонике ван ових већ датих.

У принципу, цео проблем квадратуре правоугаоника и квадрата још увек нема једноставно решење, које ће бити кратко и популарно. Али откривена је неочекивана веза између проблема склапања правоугаоника (или квадрата) од одређеног броја квадрата и неких закона сталне електричне струје у затвореном колу.

3.7 Квадрат и електрично коло

За почетак, нека је дато струјно коло (слика 3.18.) у коме можемо истовремено да изаберемо више контура (нпр. $abca$, $bcd b$, $abcd a$ итд.). Нека се у сваком проводнику струја креће у смеру стрелице. Нека су струје у сваком од проводника има константну вредност и означавамо је са i , а цифре поред означавају број проводника (i_1, i_2, i_3 итд.).



Слика 3.18.

Први систем Кирхофових једначина односи се на чворове a, b, c, d . У сваком чвору, збир улазних струја једнак је збиру излазних струја. Нека је позитивна на улазу у чвор, а негативна за струје које излазе из тог чвора. Тј. алгебарски збир струја које конвергирају у чвор је једнак 0.

Нпр. слика 3.18.: за чвор a : $i_1 - i_2 - i_3 = 0$,
за чвор b : $i_3 - i_4 - i_7 = 0$,
за чвор c : $i_2 + i_4 - i_5 - i_6 = 0$, итд.

Други систем Кирхофових једначина односи се на затворене контуре, у којима се струја креће у истом смеру, нпр. ако се струја креће у смеру казаљке на сату сматра се позитивном, а у супротном негативно.

Кирхофово друго правило само формулише такво коло у коме ће отпор свих проводника бити исти и спорадичан, а електромоторна сила у затвореном колу одсутна. У том случају: алгебарски збир свих затворених контура, кроз које пролази струја једнака је 0.

Тако нпр. за Сliku 3.18.: за контуру $abca$: $i_3 + i_4 - i_2 = 0$,
за контуру $bdc b$: $i_7 - i_6 - i_4 = 0$,
за контуру $abdca$: $i_3 + i_7 - i_6 - i_2 = 0$, итд.

Уз помоћ Кирхофових једначина, преко чворова и контура, израчунава се јачина струје у сваком проводнику. Значајан је однос између квадрата и распореда струја у колу.

Сваки скуп од n квадрата, неопходних за састављање једног правоугаоника (или квадрата) одговара распореду струја у складу са Кирхофовим једначинама над електричним колом од n проводника.

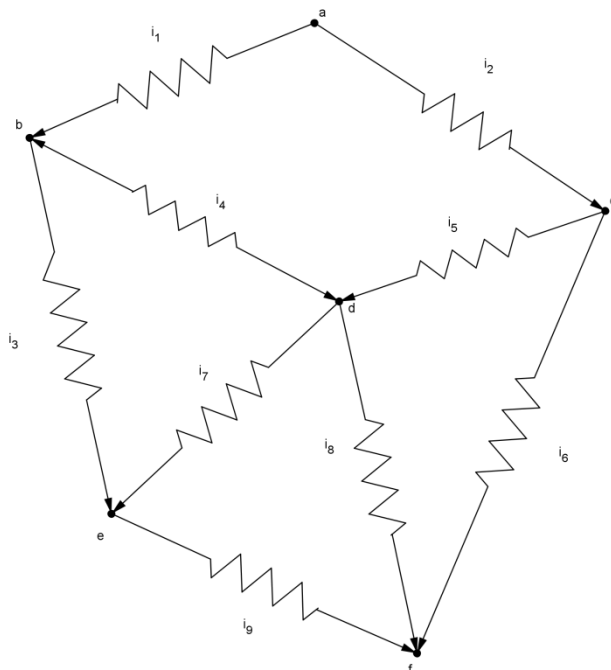
И обратно, дистрибуција струје у колу, које се састоји од n проводника, одговара n квадрата, од којих се може формирати правоугаоник (или квадрат).

Због сложености доказа ових тврђења не доказује се у општем случају, али примери доказују његову валидност.

Претпоставимо да је потребно формирати правоугаоник од девет произвољних квадрата, тј. дужина страна квадрата треба одредити.

Ако изузмемо тривијалне случајеве, када су свих девет квадрата једнаки, јасно је, да су за то погодни само специјални квадрати. Али како доћи до њих? Тешко би било доћи до решења путем покушаја.

Конструишемо било какво затворено коло од девет проводника у складу са условима: два чвора – на врху и доле – нека буду главни, при чему струја излази из горњег, а у доњи сва струја улази. Преостали чворови се налазе између главних, на различитим нивоима; ток струје је од горе ка доле. Сматрамо да нема отпорности у проводницима. Такво коло, без обзира колико је унапред задатих грана, није тешко конструисати. Нпр. нека је дато као на слици 3.19., при чему су a и f главни чворови.



Слика 3.19.

Поставимо систем Кирхофових једначина за све чворове (осим главних) и за најједноставије затворене контуре.

За чвор b : $i_1 - i_3 - i_4 = 0$,

за чвор c : $i_2 - i_5 - i_6 = 0$,

за чвор d : $i_4 + i_5 - i_7 - i_8 = 0$,

за чвор e : $i_3 + i_7 - i_9 = 0$.

За контуру $acdba$: $i_2 + i_5 - i_4 - i_1 = 0$,

за контуру $bdeb$: $i_4 + i_7 - i_3 = 0$,

за контуру $cfdc$: $i_6 - i_8 - i_5 = 0$,

за контуру $dfed$: $i_8 - i_9 - i_7 = 0$.

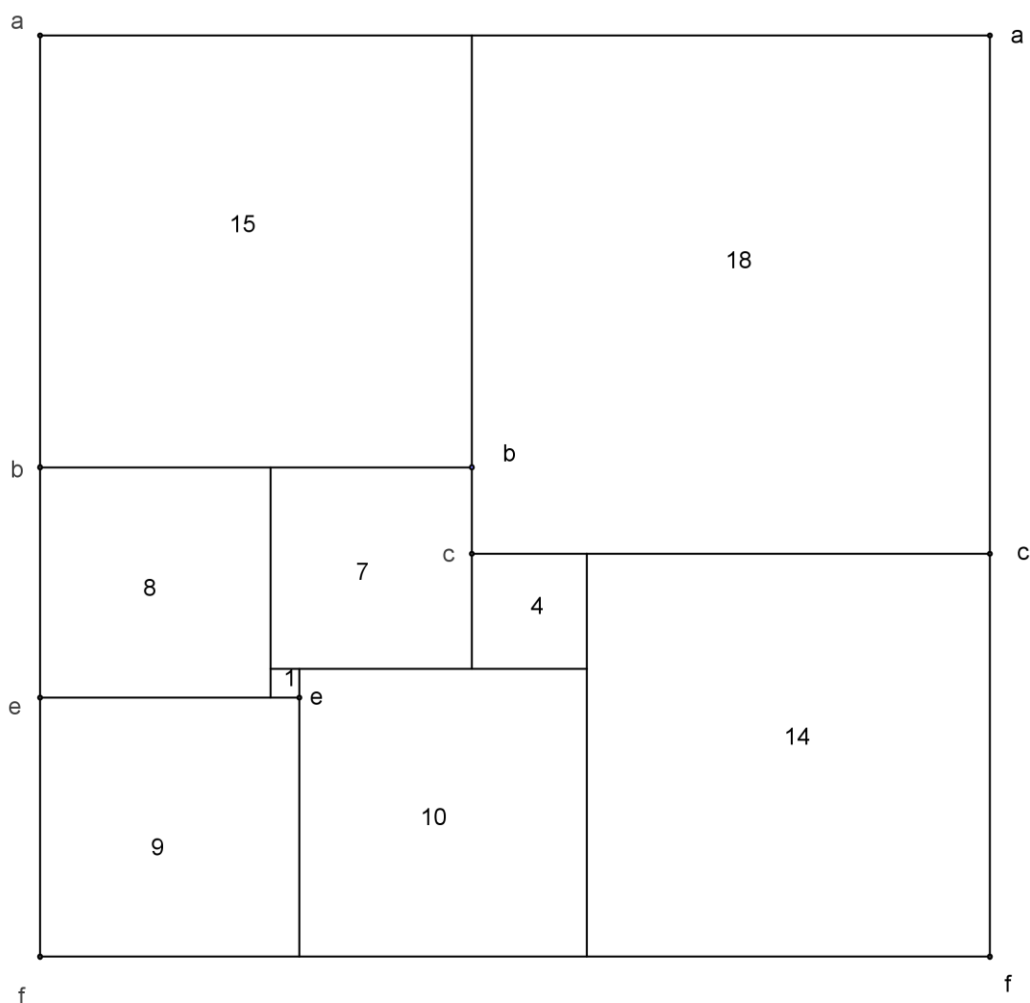
Имамо осам једначина са девет непознатих. Девету једначину неће зависити од тих осам, не може се формирати. Можемо заобићи неке врсте затвореног круга, нпр. $acdeba$, али једначина која у овом неће довести до значајног новог односа између непознатих струја, јер је она последица постојећих једначина.

Такав систем има бесконачно много решења. Али можемо изразити све преко једне променљиве, нпр. преко i_1 , све остале $i_2, i_3, \dots, i_8$. То може следити, нпр. узастопном елиминацијом непознатих. Тако из четврте и осме једначине можемо искључити i_9 ; из те једначине и треће и седме можемо искључити i_8 итд.

Решавањем система по i_1 имамо:

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{18}{15} i_1, & i_3 &= \frac{8}{15} i_1, & i_4 &= \frac{7}{15} i_1, & i_5 &= \frac{4}{15} i_1, \\ i_6 &= \frac{14}{15} i_1, & i_7 &= \frac{1}{15} i_1, & i_8 &= \frac{10}{15} i_1, & i_9 &= \frac{9}{15} i_1. \end{aligned}$$

Нека $i_1 = 15$, тада је једно од решења система са целим бројевима : $i_2 = 18$, $i_3 = 8$, $i_4 = 7$, $i_5 = 4$, $i_6 = 14$, $i_7 = 1$, $i_8 = 10$ и $i_9 = 9$. Сваки чвор у колу одговара страници квадрата чија је дужина једнака јачини струје која излази из тог чвора.



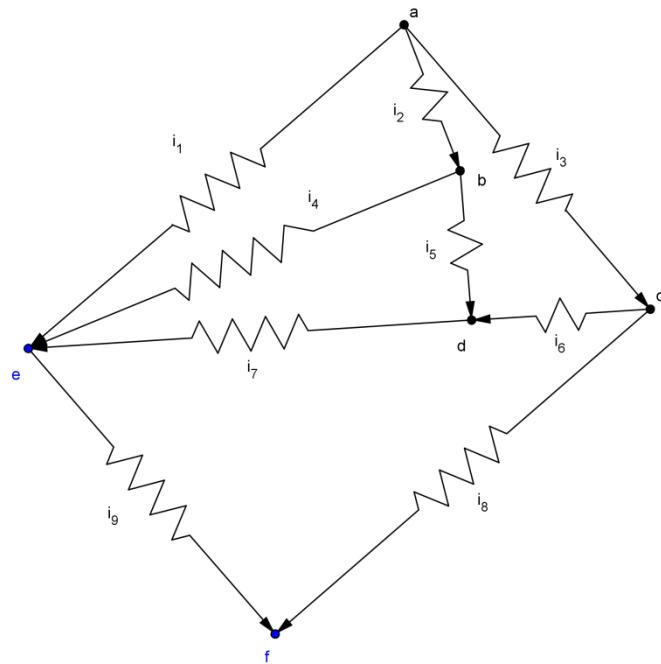
Слика 5.20.

Тада, $i_1 = 15$ значи: прво на равну плочу ставимо квадрата чија је страна 15 (слика 5.20.), на његову доњу ивицу прикључимо му квадрате са странама $i_3 = 8$ и $i_4 = 7$. Збир дужина страница ових квадрата једнака је дужини странице квадрата чија страница одговара $i_1 = 15$. Са бочне странице $i_1 = 15$ додајемо квадрат чија страница одговара $i_2 = 18$, а на доњу страницу овог квадрата додајемо квадрате чије странице одговарају $i_5 = 4$ и $i_6 = 14$. Из чвора d излазе струје $i_7 = 1$ и $i_8 = 10$, то значи: додајемо квадрате са страницама 1 и 10, испод квадрата са страницама 7 и 4. Поставимо правоугаоник са страницом 9 на своје место и правоугаоник је завршен.

Размотримо још нека решења истог проблема. Нека је дато коло као на слици 3.21.

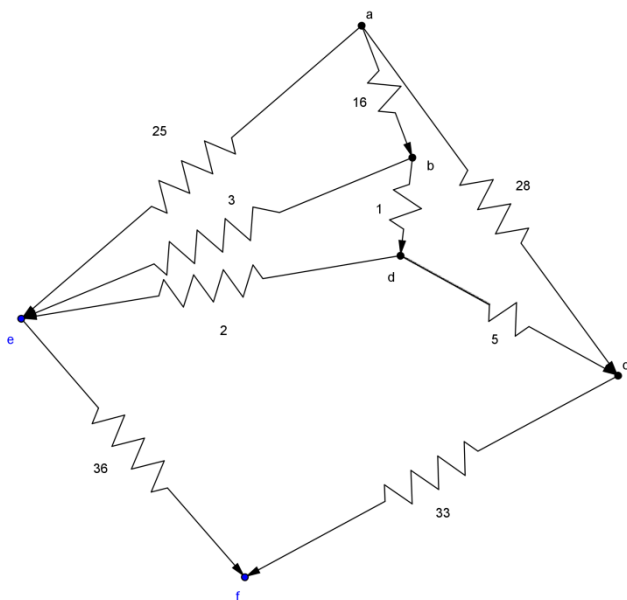
Направимо систем из осам једначина и решавамо по променљивој i_1 . Добија се:

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{16}{25} i_1, & i_3 &= \frac{28}{25} i_1, & i_4 &= \frac{9}{25} i_1, & i_5 &= \frac{7}{25} i_1, \\ i_6 &= -\frac{5}{25} i_1, & i_7 &= \frac{2}{25} i_1, & i_8 &= \frac{33}{25} i_1, & i_9 &= \frac{36}{25} i_1. \end{aligned}$$

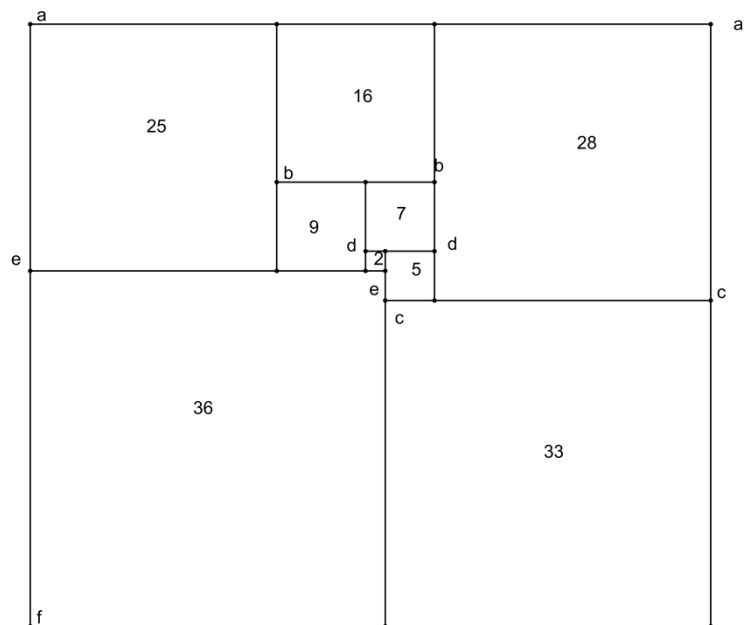


Слика 3.21.

Негативан знак i_6 показује да коло треба подесити: струја не треба да иде од d до c , и чвор c треба да буде испод чвора d . Исправљено коло, указује на вредности јачине струје, приказана је на Слици 3.22. и одговара мрежи правоугаоника на Слици 3.23.



Слика 3.22.



Слика 3.23.

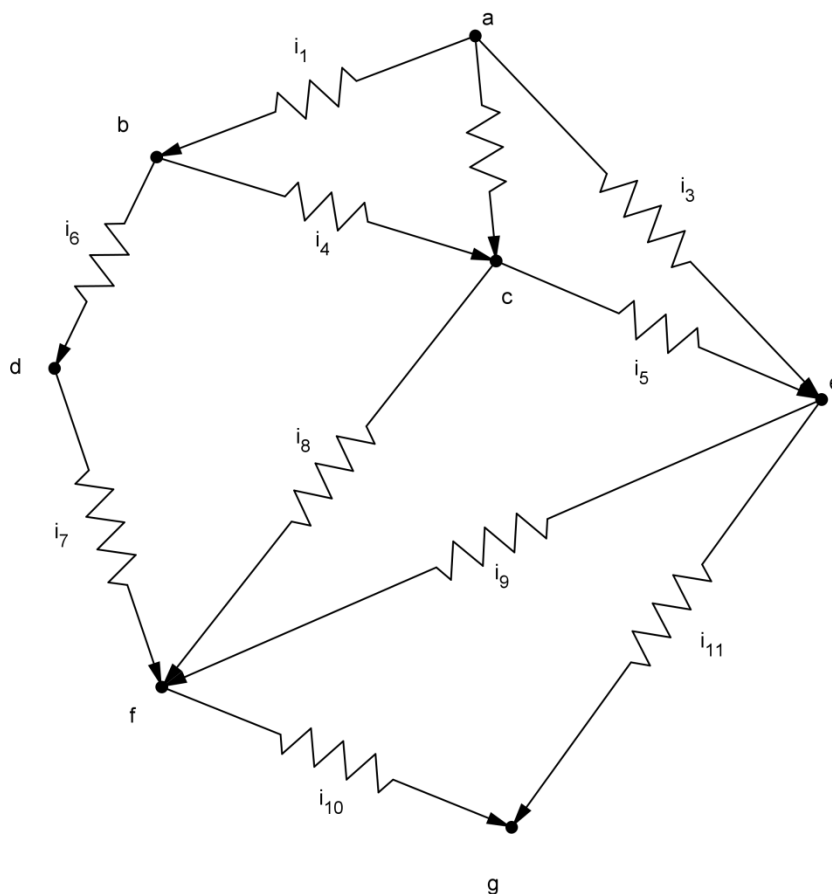
На такав начин, имамо још један скуп од девет непоновљених квадрата. Са овим смо исцрпели све могућности састављања савршеног правоугаоника од девет непоновљених квадрата.

Конструкцијом свих могућих кола од девет проводника и два главна чвора, и рачунајући сваки пут јачину струје у сваком од проводника, добијамо само већ показана два случају, у којима јачина струје у сваком од проводника је различита. Како сваком комплету од девет квадрата од којих се формира правоугаоник, одговара једна могућа конфигурација од девет проводника, то може бити само два комплета од по девет непоновљених квадрата који чине правоугаоник.

Да бисмо добили ново коло ротирамо, нпр. слику 3.22. за 90° . Нека су сада c и d главни проводници и изменимо смерове стуја. Очигледно да ће у овом колу опет бити исте струје.

Ако би узели коло са два главна чвора и 4, 5, 6, 7 или 8 проводника, добили би усвим случајевима поновљене квадрате.

Што је више проводника то је већа могућност формирања кола од њих. За конструкцију кола и прорачуна од девет проводника добили смо два комплета непоновљених квадрата. Од десет проводника можемо саставити шест комплета непоновљених квадрата за састављање правоугаоника.



Слика 3.24.

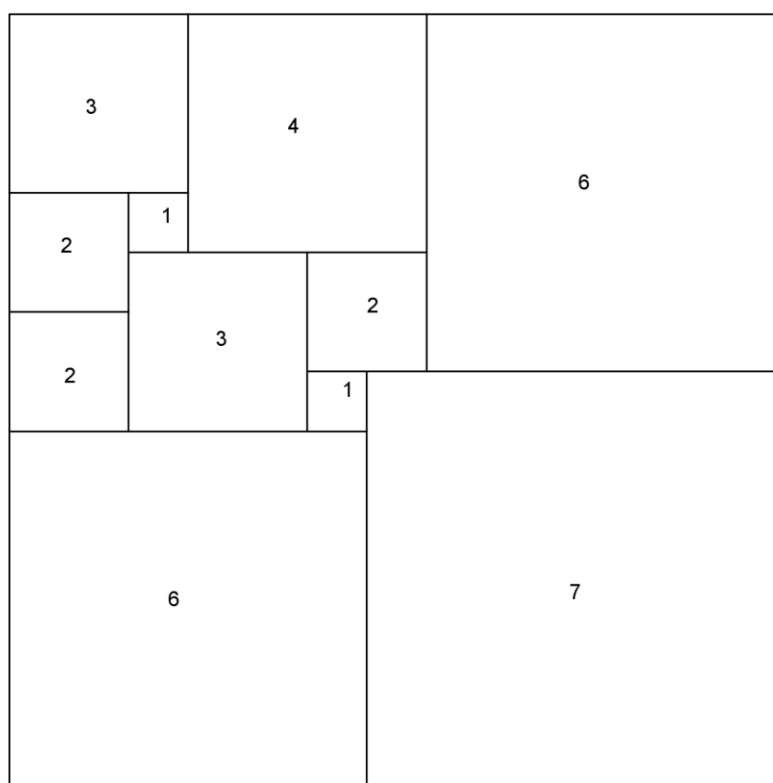
На крају, треба наћи комплет од једанаест проводника, при чему бар два треба да буду једнака. Нека d повезује само два проводника и, следи, $i_6 = i_7$ (Слика 3.24).

Одговарајући систем Кирхофових једначина је:

$$\begin{array}{lll}
(b) & i_1 - i_4 - i_6 = 0, & (acba) \quad i_2 - i_4 - i_1 = 0, \\
(c) & i_2 + i_4 - i_5 - i_6 = 0, & (aeca) \quad i_3 - i_5 - i_2 = 0, \\
(d) & i_6 - i_7 = 0, & (bcfdb) \quad i_4 + i_8 - i_7 - i_6 = 0, \\
(e) & i_3 + i_5 - i_9 - i_{11} = 0, & (cefc) \quad i_5 + i_9 - i_8 = 0, \\
(f) & i_7 + i_8 + i_9 - i_{10} = 0, & (egfe) \quad i_{11} - i_{10} - i_9 = 0.
\end{array}$$

Извођењем неопходних прорачуна добијамо:

$$\begin{array}{lllll}
i_2 = \frac{4}{3}i_1, & i_3 = 2i_1, & i_4 = \frac{1}{3}i_1, & i_5 = \frac{2}{3}i_1, & i_6 = \frac{2}{3}i_1, \\
i_7 = \frac{2}{3}i_1, & i_8 = i_1, & i_9 = \frac{1}{3}i_1, & i_{10} = 2i_1, & i_{11} = \frac{7}{3}i_1.
\end{array}$$



Слика 3.25.

Нека је $i_1 = 3$ имамо комплет од једанаест квадрата са страницама: $i_2 = 4$, $i_3 = 6$, $i_4 = 1$, $i_5 = 2$, $i_6 = 2$, $i_7 = 2$, $i_8 = 3$, $i_9 = 1$, $i_{10} = 6$ и $i_{11} = 7$. Ако их саставимо у складу са претходним правилом добијамо (слика 3.25.) квадрат (13×13) , који није савршен јер је састављен од поновљених квадрата.

Литература

- [1] Andreescu T., Mushkarov O., Stoyanov L. (2006): Geometric problem on maxima and minima, Birkhauser, Boston
- [2] Бескин Н. М. (1947): Методика геометрии, Учпедгиз, Москва
- [3] Бодрожа – Пантић О.(2000), Комбинаторна геометрија, Универзитет у Новом Саду, Природно – математички факултет, Нови Сад
- [4] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. (1965), Равновеликие и равносторонние фигуры, Тех. Теор. Лит., Москва
- [5] <http://axel.nm.ru/tangram/about/history.html>
- [6] Болтянский В. Г., Яглом И. М. (1951): Выпуклые фигуры, Гостехиздат, Москва
- [7] Boltyanskii V. G., Yaglom I. M.(1961): Convex Figures, Holt, Rinehart and Winston, New York
- [8] Ващенко – Захарченко (1883): История математики, Успешни математичари, т. 1., Москва
- [9] Гохберг И. Ц., Маркус А. С., (1960): Одна задача о покрытии выпуклых фигур подобными, Известия Молдавского филиала АН СССР
- [10] Каган В. Ф. (1933): О преобразовании многогранников. Изд. второе, Москва
- [11] Канторович Л. В., Залтaller (1951): Расчёт рационального раскроя промышленных материалов, Ленинградские новине и книге, Ленинград
- [12] Кордемский Б. А., Русалев Н. В. (1952): Удивительный квадрат,. Државна издавачка кућа, Москва – Ленинград
- [13] Люстерник Л. А. (1956): Выпуклые фигуры и многогранники, Гостехиздат, Москва
- [14] <http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html>
- [15] Pach J., Agarwai P. K. (1995): Combinatorial Geometry, John Wiley & Sons Inc., New York
- [16] Б. Яковлев (2006): Методички приступ изучавању проблема везаних за разлагање равни у настави геометрије – магистарска теза, Универзитет у Новом Саду, Природно – математички факултет, Департаман за математику и информатику, Нови Сад
- [17] <http://school14-v.ucoz.ru/publ/1-1-0-3>
- [18] www.kotrazadragacevo.com/Dokument/TANGRAM.ppt
- [19] The Dissection of Rectangle into squares (1940): Duke Mathematical Journal
- [20] http://origami-paper.ru/origami/serbian/istoriya_origami/origami_istoriya_poyavleniya.html
- [21] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. (1974): Геометрические оценки и задача из комбинаторной геометрии, Наука, Москва
- [22] http://srb.imomath.com/index.php?option=mat_c%7Cdodatne_c

Биографија



Рођена сам 2. септембра 1987. у Шапцу. Основну школу „Вера Благојевић“ у Дубљу завршила са 5,00 у свим разредима. Потом сам уписала „Мачванску средњу школу“ у Богатићу, смер машински техничар за компјутерско конструисање, и матурирала 2006. године као носилац Вукове дипломе.

На Природно – математички факултет Универзитета у Новом Саду, одсек за математику, смер професор математике, уписала сам се 2006. године и дипломирала 11. септембра 2010. године са просечном оценом 8,97. Након завршених основних академских студија уписала сам мастер студије на Природно – математичком факултету у Новом Саду, одсек за математику. Положила сам све испите предвиђене наставним планом и програмом мастер студија.

Нови Сад, јануар 2012. године

Драгиња Прокић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Драгиња Прокић
АУ

Ментор: Професор др Невена Пушић
МН

Наслов рада: Квадрат
МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: српски и енглески
ЈИ

Земља публикација: Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2012.
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовича 3
МА

Физички опис рада: (3, 74, 22, 3, 63, 0, 0)
(број поглавља, број страна, број литерарних цитата, број табела, број слика, број графика, број прилога)
ФО

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Комбинаторна геометрија
НД

Предметна одредница/Кључне речи: разлагање квадрат, разложива једнакост фигура, методе разлагања, подударност
ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, Природно – математички факултет, Универзитет у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод:
ИЗ

Мастер рад се бави разлагањем квадрата на друге геометријске фигуре. Поред основних дефиниција дају се докази могућих разлагања квадрата на правилне полигоне или уније полигона. Доказује се Теорема Bolau – Gervin о разложивој једнакости два полигона. Дате су и неке примене разлагања квадрата.

Датум прихватања теме од стране НН већа: 27. 02. 2012.
ДП

Датум одбране: Мај 2012.
ДО

Чланови комисије:
КО

Председник: др Олга Бодрожа - Пантић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

Члан: др Невена Пушић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

Члан: др Градимир Војводић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesi

CC

Author: Draginja Prokić

AU

Mentor: Nevena Pušić, Full Professor

MN

Title: Square

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: (3, 74, 22, 3, 63, 0, 0)

(chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements)

PD

Scientific field: Mathematic

SF

Scientific discipline: Combinatorial geometry

SD

Subjec/Key words: the square division, the divisible equality of two plane figures, the methods of geometric dissections, analogous of two figures
SKW UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

This Master thesis deals with the divisible equality of a square and some other plane figure. Apart from basic definitions, the thesis will provide an evidence of the divisible equality of a square and a polygon or union of a polygons. The Bolay – Gervin theorem refers to the divisible equality of two polygons. Some of the applications of the square division have been presented.

Accepted by the Scientific Board on: 27.02.2012.
ASB

Defended: May 2012.
DE

Thesis defense board:
DB

President: Dr. Olga Bodroža - Pantić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr. Nevena Pušić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Dr. Gradimir Vojvodić, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad