Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Dinamička analiza jednačine energetskog bilansa

Master rad

Mentor:
Prof. dr Jelena Aleksić

Student:
Dragana Drašković
Broj indeksa: 401m/13

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Uvod

Još od najranijih dana, priroda, pored toga što je uopšte neophodna za opstanak, ljudima predstavlja predmet večitog ispitivanja i čuđenja. Ljudi su prvo pokušali pomoću religijskih i mitoloških slika da objasne prirodne fenomene i promene koje se događaju u njoj. Kako je čovek sticao sve više saznanja o prirodi, tako je više rasla potreba da se saznaje još i da se priroda ne samo upozna, već da se njome ovlada, tako što će se razumeti prirodni zakoni, pa shodno tome i način na koji se čovek može uskladiti sa njima.

Prvi naučnici, još u staroj Grčkoj, najviše su bili okupirani prirodnim promenama i ove su objašnjavali na različite načine. Vremenom su nastajala sve sofisticiranija i egzaktnija objašnjenja prirodnih zakona. Sa sticanjem boljih uvida u prirodne procese, čovek je shvatio da zakoni po kojima se prirodni procesu odvijaju mogu biti izolovani od svoje okoline, u vidu jednog izolovanog sistema, a čime ćemo se, zapravo, baviti u radu, i da se kao izolovani mogu posmatrati i objasniti matematičkim putem. Ovo je među prvima u novovekovnoj nauci uvideo Galilej, i to je izrazio idejom da je matematika jezik kojim se čita knjiga prirode.[1] No, fenomen promene stanja je uvek predstavljao problem, jer se čovek, kao na primer u matematici, služi fiksnim tačkama i definicijama, da bi objasnio ono što je stalno u pokretu i što se menja. Ovo je podstaklo Njutna da kaže kako je naše celokupno znanje o prirodi neuporedivo malo u odnosu na celinu prirode, dok Hajzenberg deli isti stav, smatrajući da mi i ne poznajemo prirodu, već se svo naše znanje svodi na različite matematičke modele kojima se služimo u pokušaju da prirodne fenomene nama učinimo smislenim.[1] No, ova konstatacija ne bi trebalo da nas obeshrabri u pokušajima da razumemo prirodu, već govori koliki je značaj matematike za takav poduhvat, i u ovom radu ćemo se baviti tom temom.

Tema ovog rada, tačnije, tiče se vremenskih promena fizičkih sistema, te na koji način možemo ove promene razumeti. Matematički pristupi prirodnim fenomenima su raznovrsni, i njihove varijacije su bezbrojne, u zavisnosti od samog fenomena i od oblasti koja se tim delom prirode bavi; matematičko modeliranje je prisutno u svim prirodnim naukama, u hemiji, fizici, biologiji, meteorologiji, i ovima je matematika potrebna kako bi bilo moguće pronaći i naznačiti nekakvu regularnost u ponašanju fizičkih sistema. U radu ćemo se baviti jednim od načina uočavanja regularnosti u ponašanju fizičkih sistema, no, bavićemo se i problemom odstupanja u takvom ponašanju, zbog čega se takva odstupanja nazivaju *haotičnim*, a posmatrani sistemi kao *haotični sistemi*.

U prvom delu rada, razmatraćemo dinamičke sisteme. Bavićemo se pitanjima, poput: šta su dinamički sistemi? kako ih možemo razumeti i definisati? Kakva je njihova uloga u našem razumevanju fizičkih sistema? U ovom delu rada, data je definicija dinamičkog sistema. Takođe su date i osnovne definicije i teoreme neophodne za dinamičku analizu jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih dinamičkih sistema. No, kako, kao što ćemo to istaći, u ponašanju sistema postoje izvesna odstupanja u nekom momentu, razmatraćemo i one osobine sistema koje su vezane za ovakva odstupanja, te kakve osobine sistem treba da ima da bi se mogao razumeti kao haotičan. U prvom delu rada, dakle, bavićemo se *dinamičkim sistemima* i *teorijom haosa*. U radu ćemo se, takođe, baviti razlikom između *diferencijalnih* i *diferencnih* jednačina. Iako se može reći da su diferencijalne jednačine generalno češće primenjivano sredstvo za razumevanje fizičkih sistema, diferencne jednačine su neophodne onda kada se bolje upoznamo sa teorijom haosa i kada se, uopšte, susretnemo sa problemom haotičnog ponašanja sistema.

Dinamički sistemi su veoma prisutni u različitim oblastima naučnog istraživanja. Mi ćemo se u radu baviti klimatskim promenama, a s tim u vezi, bavićemo se *jednačinom energetskog bilansa* za računanje temperature na dodironoj površini zemljišta i atmosfere, koju ćemo svesti na *jednodimenzionalnu diskretnu jednačinu*. Ovo je tema drugog dela rada. U ovom delu, načinićemo kratak istorijski osvrt na razvoj dugoročnog predviđanja klimatskih uslova, odnosno, prirodnih fenomena kao što su promena temperature, padavine, zemljotresi. Bavićemo se načinom na koji prirodne pojave mogu biti objašnjene pomoću jednačine energetskog bilansa. Takođe ćemo se baviti analizom jednačine posredstvom *bifurkacionih dijagrama* i računanja *Ljapunovljevih eksponenata*. S tim u vezi, pokazaćemo prisustvo haosa u posmatranoj jednačini. Takođe, pokazaćemo da se posmatrana jednačina energetskog bilansa može svesti na jedno od najpoznatijih diskretnih preslikavanja, naime, na *logističku diferencnu jednačinu*, čiju smo analizu takođe sproveli u ovom delu rada.

Glava 1

Dinamički sistemi i teorija haosa

1.1 Autonomni dinamički sistemi

Na koji način misliti i razumeti dinamičke sisteme? Šta su dinamički sistemi? Dinamičke sistem možemo razumeti kao promenu nekih fizičkih sistema, koja se događa u vremenu. Primera dinamičkih sistema može biti nebrojeno mnogo, na primer, u okvirima mehanike, astronomije, u hemiji, fizici, biologiji, pa čak i meteorologiji, čemu ćemo posvetiti dodatno pažnju u predstojećim delovima rada, kada se budemo bavili klimatskim modelovanjem i energetskim bilansom.

Kada proučavamo neki dinamički sistem, odnosno, promenu koja se događa sa nekim fizičkim sistemom, mi želimo da ispratimo te promene što je dalje moguće.
Da bismo ispratili promene fizičkog sistema koji smo uzeli kao predmet razmatranja, neophodno je, prethodno, konstruisati prikladan *model* pomoću kojeg možemo da izučavamo željenu fizičku pojavu. No, da bismo to učinili, potrebno je najpre izdvojiti posmatrani sistem iz njegove sredine. Tada, naš predmet razmatranja, kao izdvojeni dinamički sistem, može biti predstavljen raznim fizičkim zakonima iz kojih sledi jednačina vremenske promene sistema. Pomenutu jednačinu možemo zvati *jednačina kretanja sistema*.

Postoje dva glavna tipa jednačina kojima se predstavljaju dinamički sistemi. Prvi tip jednačina jesu *diferencijalne jednačine*. Drugi tip jesu *diferencne jednačine*, ili *iterativna preslikavanja*. Prvi tip jednačina kojima se predstvaljaju dinamički sistemi, diferencijalne jednačine, opisuju ponašanje sistema u uslovima kada se vreme t posmatra kao neprekidno nezavisna promenljiva ($t \in R$). Kod drugog tipa jednačina, naime, kod diferencnih jednačina, vreme se posmatra kao diskretna nezavisna promenljiva ($t \in Z$).

Dinamički sistemi, takođe, mogu biti i *autonomni*. Autonomnim dinamičkim sistemima nazivamo one sisteme kod kojih, prilikom opisivanja sistema jednačinama, *vreme ne figuriše ekspilicitno*. To su, dakle, sistemi takvi da u jednačinama koje ga opisuju vremenska promenljiva ne figuriše eksplicitno, iako zavisne veličine zavise od vremena. Dinamički sistem je autonoman ukoliko u jednačinama koje opisuju taj sistem vreme ne figuriše ekspilicitno, iako promenljive doista zavise od vremena.

Sada ćemo, da bismo bolje shvatili definiciju dinamičkog sistema, poći ód posmatranja matematičkog klatna i jednačine koja opisuje njegovo kretanje. *Jednačina kretanja* matematičkog klatna data je sa

$$\varphi'' = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{1.1}$$

gde je g gravitaciona sila, l dužina klatna, dok je pozicija klatna data uglom $\varphi = \varphi(t)$, između klatna i vertikalnog pravca, normalnog na podlogu,gde se suprotan smer od smera kazaljke na satu uzima za pozitivan.

Gore prikazana *jednačina kretanja* posmatranog, izolovanog sistema, u ovom slučaju predstavljena je običnom diferencijalnom jednačinom. Ovo, drugim rečima, znači da je razvoj, odnosno evolucija sistema data funkcijom $t \to \varphi(t)$ koja zadovoljava jednačinu kretanja.

S obzirom da je jednačina matematičkog klatna obična diferencijalna jednačina drugog reda, možemo je na ekvivalentan način zapisati i u obliku nelinearnog sistema dve jednačine:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1' & = & \varphi_2 \\ \varphi_2' & = & -\frac{g}{l}\sin\varphi_1, \end{array} \tag{1.2}$$

u kom su nepoznate funkcije $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ i $\varphi_2 = \varphi_2(t)$.

Daćemo definiciju lineranog, odnosno, nelineranog sistema diferencijalnih jednačina.

Linearni sistem diferencijalnih jednačina dat je izrazom

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

gde je $A = A(t)$ $n \times n$ matrica funkcija, odnosno $A = [a_{i,j}]$, $i, j = 1, 2, ...$, gde je $a_{i,j} = a_{i,j}(t)$, a $\mathbf{x}$ je $n \times 1$ vektor, dok je $\mathbf{b}$ $n \times 1$ vektor funkcija. Pretpostavlja se da važi $A(t), \mathbf{b}(t) \in C(I)$, na nekom intervalu I.

Nelinearni sistem diferncijalnih jednačina predstavljen je na sledeći način

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

gde je $f \in C(I)$.

Neka je dato početno stanje, za $t = 0$, dakle neka je dato $\varphi_1(0)$ i $\varphi_2(0)$. Kao što je već poznato, na osnovu teoreme Pikard-Lindelef, diferencijalna jednačina sa datim početnim uslovima ima tačno jedno rešenje $t \to \varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2)$, funkcija koja se još naziva *kretanje*.

Teorema 1 (Pikard-Lindelef) *Neka je dat početni problem*

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f(t,x)} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0.$$

Neka je

1. $\boldsymbol{f} \in C(D)$, *gde je* $D = \{(t, \boldsymbol{x}) : |t - t_0| \leq a, ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0|| \leq b\}$
2. $\boldsymbol{f} \in Lip_{\boldsymbol{x}}$, *što znači da je* $||\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}^2)|| \leq L||\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2||$, $L \neq 0$

Tada postoji jedinstveno rešenje na $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| \leq h$, *gde je* $h = min\{a, \frac{m}{M}\}$, *gde je* $M = max_D||\boldsymbol{f}(t)||$ *i do njega se dolazi nizom sukcesivnih aproksimacija*

$$\boldsymbol{x}_{n+1}(t) = \boldsymbol{x}^{t_0} + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}(s))ds$$

Teorema Pikard-Lindelefa važi i kad imamo autonomni sistem nelinernih jednačina. Dakle, pozicija i brzina u trenutku $t = 0$ određuju kretanje u svim budućim vremenima. Mogli bismo reći da je činjenica da početno stanje određuje sva buduća stanja, znači da je sistem koji je predstavljen matematičkim klatnom *determinisan*, odnosno, *određen*.

Pojam *determinizma*, predstavlja ovde ključan pojam za definisanje dinamičkog sistema. Determinizam je takva osobina, prema kojoj je sadašnje stanje određeno za sva buduća stanja. Sledeći ključni pojam za definisanje dinamičkog sistema jeste pojam *stanja*. Sva moguća stanja formiraju tzv. *prostor stanja*. U primeru matematičkog klatna prostor stanja je (φ_1, φ_2)-ravan, odnosno fazna ravan. Za funkciju $\varphi = \varphi(t)$ koja zadovoljava jednačinu kretanja, tačke $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$prostora stanja, zovemo razvoj; kriva $t \to (\varphi(t), \varphi'(t))$ takođe se naziva razvoj. Ako je (φ_1, φ_2) trenutno stanje (za $t = 0$), onda ćemo stanje u vremenu $t > 0$ označiti sa $\Phi((\varphi_1, \varphi_2), t)$. Ovo izražava činjenicu da trenutno, sadašnje, stanje određuje sva buduća stanja. Dakle, imamo da je

$$\Phi((\varphi_1(0), \varphi_2(0)), t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Ovako konstuisano preslikavanje naziva se *razvojni operator* (*evolution operator*) sistema.

Na osnovu predstavljenog, mogli bismo da kažemo da je dinamički sistem, zapravo, struktura koja se sastoji od prostora stanja, ili tzv. faznog prostora, predstavljenog skupom M, i razvojnog operatora

$$\Phi : M \times R \to M,$$

gde je R skup realnih brojeva.

Osobine koje razvojni operator dinamičkog sistema treba da zadovoljava su sledeće:

1. Za svako $x \in M$ treba da važi

$$\Phi(x, 0) = x$$

Ova osobina znači da će stanje koje se menja u toku vremenskog intervala dužine 0, ostati nepromenjeno.

2. Za svako $x \in M$ i svako $t_1, t_2 \in R$ važi

$$\Phi(\Phi(x, t_1), t_2) = \Phi(x, t_1 + t_2)$$

Takođe, ova osobina je u vezi sa tim što je rešenje autonomne diferencijalne jednačine translaciona invarijanta u vremenu. Ovo znači da, na primer, ako $\varphi(t)$ zadovoljava jednačinu kretanja matematičkog klatna, onda isto važi i za $\varphi(t + t_1)$, za svaku konstantu t_1.

Dve gore navedene osobine nazivamo i *osobine polugrupe sa jedinicom.*

Moguće objašnjenje *osobina polugrupe sa jedinicom* moglo bi se predstaviti i na sledeći način: neka je $\Phi^t(x) = \Phi(x, t)$. Time je osobina polugrupe sa jedinicom izraz ekvivalentan izrazu: preslikavanje $t \to \Phi^t$ je homomorfizam grupe $(R, +)$ na grupu bijekcija skupa M sa operacijom komozicija funkcija.

Sada, dve gore navedene osobine možemo izraziti na sledeći način:

1. $\Phi^0 = Id_M$ (Id_M je identičko preslikavanje skupa M)
2. $\Phi^{t_1} \circ \Phi^{t_2} = \Phi^{t_1 + t_{t_2}}$

Shodno tome, koristeći se gore pomenutom notacijom, mogli bismo da definišemo razvoj dinamičkog sistema kao preslikavanje (ili krivu) oblika $t \to \Phi(x, t) = \Phi^t(x)$, za svako $x \in M$. Naime, razvojni operator je preslikavanje koje odredjuje tok u prostoru stanja M, gde se tačka $x \in M$ kreće po putanji $t \to \Phi^t(x)$.

Glavna ideja je da za dati dinamički sistem pokušamo da nađemo rešenje jednačina koje ga opusuju, ali bez rešavanja datih jednačina. Knjige u kojima je sistematiňo opisana teorija dinamičkih sistema i koje su korišćene za ovaj rad su [2], [3], [4], [6].

1.2 Uvod u teoriju haosa

U prethodnom potpoglavlju smo se bavili opštim određenjem *dinamičkog sistema*; šta je dinamički sistem i na koji način ga možemo definisati. Osvrnuli smo se na razliku između *diferencijalnih* i *diferencnih jednačina*, za koje smo rekli da su jednačine posredstvom kojih predstavljamo različite autonomne dinamičke sisteme. Da bismo potpunije razumeli analizu jednačine energetskog bilansa koja će biti sprovedena u sledećem poglavlju , neophodno je da posvetimo pažnju teoriji haosa, koja se u okviru teme dinamičkog sistema, poslednjih godina javlja kao odgovor na određene probleme vezane za posmatranje ponašanja vremenske promene izolovanog dinamičkog sistema.

Određeni sistemi mogu biti okarakterisani kao haotični. Sa namerom da opišemo jedan haotični sistem, neophodno je da imamo na umu ono što sledi iz teorije dinamičkih sistema: iz teorije dinamičkih sistema sledi to da moramo poznavati *stanje sistema* i njegovu dinamiku, kojom se potom oderđuje promena stanja u vremenu. Vremenski ravoj sistema možemo predviti u tzv. *prosoru stanja*, ili *faznom prostoru*, a čije su koordinate *komponente stanja*. U opštem slučaju, koordinate prostora stanja menjaju se sa modelima.

Za sada, u modernoj nauci, ne postoji jednoglasno slaganje oko značenja termina "haos". Kako nijedna definicija ovog pojma nije još uvek jednoglasno prihvaćena, mi ćemo, u daljem tekstu, govoriti pre o određenim svojstvima koja se mogu misliti kao haotična, a ne o haosu kao takvom. Umestno, dakle, definisanja pojma haosa, radije ćemo se usmeriti na skup osobina sistema koji opisujemo kao haotičan sistem. U ovom radu, poći ćemo od sledeće odredbe haosa:

Haos predstavlja aperiodično dugoročno ponašanje u determinističkom sistemu koje pokazuje veliku osetljivost na promenu početnih uslova.[6]

Da bi bilo jasnije šta se misli gore prikazanim odredbama haosa, dajemo sledeće pojašnjenje:

1. *Aperiodično dugoročno ponašanje* znači da postoje trajektorije (orbite) koje se ne ustaljuju prema fiksnim tačkama, periodičnim ili kvazi periodičnim orbitama, kada $t \to \infty$. Ovde se zahteva da te trajektorije *nisu retke*. Šta bi ovo moglo da znači? Na primer, može se insistirati da postoji otvoren skup početnih uslova koje vode ka aperiodičnim trajektorijama, ili da se takve trajektorije jave sa određenom verovatnoćom, uzimajući slučajno izabran početni uslov.

2. *Determinističko* znači da sistem nema slučajne ulazne parametre i da ne uključuje šum (noise).

3. *Osetljivost na malu promenu početnih uslova* podrazumeva da se susedne trajektorije razvijaju eksponencijalno brzo, odnosno, da sistem ima pozitivni Ljapunovljev eksponent.

Takođe, ove odredbe biće dodatno pojašnjene u sledećem potpoglavlju.

Treba napomenuti da haos nije samo prikladna metafora za nestabilnost. Isto tako, neophodno je naglasiti da haos ni u kom slučaju ne objašnjava svako slučajno ponašanje. Ako se ustanovi da je neki sistem haotičan, sama ta činjenica ne može nam biti od velike koristi. Drugim rečima, saznanje da je sistem haotičan neće pojednostaviti predviđanje ponašanja sistema.

Podaci koji su se pojavljivali kao slučajni, a koji su ranije mereni i ostavljani po strani bez daljeg istraživanja, zato što se mislilo da su previše komplikovani, ili zato što se mislilo da je došlo do greške, danas se mogu objasniti relativno jednostavnim zakonima. Haos omogućava da pronađemo red u tako različitim sistemima kao što je atmosfera, meteorološke pojave ili rad srca. Više o ovome se može naći u [6]

Atmosferske prilike se smatraju najboljim primerom dugoročno nepredvidljivog ponašanja. Uprkos dugoročnoj nepredvidljivosti, meteorolog može u svakom trenutku ispisati jednačine za promenu sila koje kontrolišu promenu vremena. Dakle, promena atmosferskih prilika je u potpunosti definisana. Iako se zakoni koji upravljaju prirodom mogu predstaviti u simboličkoj formi, ovi mogu i određivati proizvoljno komplikovano ponašanje posmatranog fizičkog sistema. Moguće je, stoga u potpunosti opisati ponašanje sistema, na primer diferencijalnim jednačinama, tako da iako sve deluje prilično jasno, haos se može pojaviti tek kada datu jednačinu počnemo da rešavamo.

Postavlja se pitanje da li možemo i pre početka rešavanja datog sistem jednačina, koji opisuje fizički sistem, znati da je dati sistem haotičan. Nelinearnost sistema, iako dosta značajna osobina, nije dovoljna da bi se zaključilo da je sistem haotičan. Autonomnost, odnosno neautonomnost dinamičkog sistema, takođe nam ne garantuje haos. Možemo zaključiti da, u opštem slučaju, univerzalno primenjivog kriterijuma za naše pitanje nema. Međutim, postoji matematički kriterijum koji nam otkriva sisteme u kojima sigurno ne dolazi do haosa. To je Poenkare-Bendiksonova teorema, tačnije posledica te teoreme.

Teorema Poenkare-Bendiksona predstavlja jedan od ključnih teorijskih rezultata u nelinearnoj dinamici i iz nje sledi da se haos ne može dogoditi u faznoj ravni.

Teorema 2 (Poenkare-Bendikson) *Neka su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *R je zatvoren, ograničen skup u ravni;*

2. *$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f(x)}$ je neprekidno, diferencijabilno vektorsko polje u otvorenom skupu koji sadrži R;*

3. *R ne sadrži nijednu fiksnu tačku preslikavanja datog u prethodnoj tački i*

4. *Postoji trajektorija C koja leži u R, u smislu da počinje u R i ostaje u R tokom budućeg vremena.*

Onda je C ili zatvorena orbita, ili se spiralno uvija ka zatvorenoj orbiti kada $t \to \infty$. U svakom od ovih slučajeva, R sadrži zatvorenu orbitu.

Iz ove teoreme sledi da ako je trajektorija ograničena na zatvorenoj, ograničenoj oblasti koja ne sadrži fiksne tačke, onda se trajektorija mora približavati zatvorenoj orbiti. Složenije ponašanje nije moguće.

U višedimenzionalnim slučajevima $n \geq 3$, Poenkare-Bendiksonova teorema se ne primenjuje. U ovim sistemima trajektorije mogu zauvek lutati u ograničenoj oblasti, bez kretanja ka fiksnoj tački ili zatvorenoj orbiti. U pojedinim slučajevima, trajektorije mogu biti privučene ka složenim geometrijskim objektima, koje nazivamo *strani atraktori*. Strani atraktori predstavljaju fraktalne skupove na kojima je kretanje neperiodično i osetljivo na male promene početnih uslova. Ova osetljivost na male promene početnih uslova, čini da je kretanje nepredvidivo na duže staze. U tom slučaju dolazi do pojave *determinističkog haosa*. Prema tome, iz Poenkare-Bendiksonove teoreme proizilazi da se haos nikada ne može pojaviti u sistemina dimenzija $n < 3$.[6]

Bitno je napomenuti da se ova teorema bavi samo sistemima koji mogu da se napišu diferencijalnim jednčinama. Međutim, u dinamičkim sistemima koji se zapisuju rekurentnim jednačinama, takoreći u diskretnim dinamičkmi sistemima, ovaj kriterijum nema smisla.

Jedna od najpoznatijih diferencnih jednačina u teoriji haosa je takozvana logistička jednačina $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Ova jednačina koristi za opisivanje mnogih fizičkih sistema. U narednom poglavlju videćemo da će se jednačina energetskog bilansa, koja je tema ovog rada, svodi upravo na logističko preslkavanje. Logistička jednačina je, kao što ćemo videti primer haotične jednačine, odnosno, sistem koji ona opisuje vrlo je haotičan. Takođe, na ovom primeru treba uočiti da kod diferencnih jednačina nastanak haosa je moguć i u jednodimenzionalnim sistemima.

1.3 Diskretni dinamički sistemi

Diferencijalne jednačine predstavljaju predmet koji se u većini literature obrađuje znatno češće od diferencnih jednačina. Razlog ovakvoj raširenosti obrađivanja diferencijalnih jednačina se nalazi u njihovoj velikoj primenljivosti u tehnici i nauci. Dakle, mnogi dinamički sistemi opisani su upravo diferencijalnim jednačinama. [3]

Međutim, mi ćemo se u ovom radu baviti diferencnim jednačinima, iz razloga što smatramo da i diferencne jednačine imaju široku primenu u nauci i tehnici, a i od velikog su značaja za ispitivanje samih diferencijalnih jednačina. Dajemo samo neke primere, navedene u [6], za šta su i u kojim situacijama bitne diferencne jednačine:

1. Kao alati za analizu diferencijalnih jednačina. Na primer, pomoću Poenkare-ovih preslikavanja može se dokazati postojanje periodičnog rešenja za klatno. Takođe, može se vršiti analiza stabilnosti periodičnih rešenja, u opštem slučaju.

2. Kao model za prirodne fenomene. U nekim oblastima nauke i tehnike pogodno je posmatrati vreme kao diskretnu veličinu, na primer u digitalnoj elektronici, u delovima ekonomije i finansijske teorije, i u studijama izvesnih životinjskih populacija.

3. Kao jednostavni primeri haosa. Diferencne jednačine su zanimljive za istaživanje same po sebi, kao matematičke "laboratorije" za haos. Zaista, kod diferencnih jednačina moguće je raznovrsnije ponašanje nego kod diferencijalnih jednačina, jer tačke x_n više "skaču" duž njihovih orbita nego što neprekidno "teku", kao što je slučaj kod diferencijalnih jednačina.

U radovima [7] i [6] može se naći više o diskretnim dinamičkim sistemima.

Mi ćemo se fokusirati na autonomne dinamičke sisteme diferencnih jednačina. Autonomnost dinamičkog sistema ogleda se u tome da u jednačinama koje opisuju taj sistem vreme ne figuriše eksplicitno, iako su promenljive zavisne od vremena.

1.3.1 Jednodimenzionalna preslikavanja

U ovom delu bavićemo se jednodimenzionalnim nelinearnim autonomnim diferencnim jednačinama, dakle jednačinama oblika

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, ... \tag{1.3}$$

gde je $f : R \to R$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Jednačinu datu sa (2.3) zvaćemo i dinamički sistem. Funkciju f možemo zvati i mapiranje. *Rešenje* jednačine (2.3) je niz tačaka $\{x_n\}_{n\in N}$ koji zadovoljava jednačinu (2.3) za svako $n = 0, 1, ...$. Ako je dat *početni uslov* $x_0 = d$, onda se problem koji se sastoji od rešavanja jednačine (2.3), tako da je zadovoljen početni uslov, zove *početni problem*. Dakle, početni problem zapisujemo na sledeći način

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad x_0 = d, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

$f : R \to R$ je neprekidno diferencijabilno preslikavanje.

Opšti oblik linearne diferencne homogene jednačine sa promenljivim koefinicijentima, sa početnim uslovom, dat je sa

$$x_{n+1} = a_n x_n, \qquad x_0 = d, \tag{1.5}$$

gde je $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je niz realnih brojeva.

Opšti oblik linearne diferencne nehomogene jednačine sa promenljivim koeficijentina, sa početnim uslovom, dat je sa

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \qquad x_0 = d, \tag{1.6}$$

gde su $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ su nizovi realnih brojeva.

Teorema 3 *Neka su $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ su nizovi realnih brojeva. Postoji jedinstveno rešenje početnog problema (2.6), dato sa*

$$x_n = (\prod_{i=0}^{n-1} a_i)d + \sum_{r=0}^{n-1}(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i)b_r, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{1.7}$$

gde je po definiciji,

$$\prod_{i=0}^{-1} a_i = 1, \qquad \prod_{i=n}^{n-1} g_i = 1.$$

Dokaz Dokaz dajemo indukcijom.

$$x_1 = a_0x_0 + b_0 = a_0d + b_0,$$
$$x_2 = a_1x_1 + b_1 = a_1(a_0d + b_0) + b_1 = a_1a_0d + a_1b_0 + b_1,$$
$$x_3 = a_2x_2 + b_2 = a_2(a_1a_0d + a_1b_0 + b_1) + b_2 = a_2a_1a_0d + a_2a_1b_0 + a_2b_1 + b_2$$

Dakle, hoćemo da pokažemo da je

$$x_n = (\prod_{i=0}^{n-1} a_i)d + \sum_{r=0}^{n-1}(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i)b_r, \qquad n = 1, 2, ...$$

Pretpostavimo da pretkohna jednakost važi za $n = k$, odnosno da vazi

$$x_k = (\prod_{i=0}^{k-1} a_i)d + \sum_{r=0}^{k-1}(\prod_{i=r+1}^{k-1} a_i)b_r,$$

i posmatrajmo šta se događa za $n = k + 1$.

$$x_{k+1} = a_kx_k+b_k = a_k((\prod_{i=0}^{k-1} a_i)d+\sum_{r=0}^{k-1}(\prod_{i=r+1}^{k-1} a_i)b_r)+b_k = a_k(\prod_{i=0}^{k-1} a_i)d+\sum_{r=0}^{k-1}(a_k\prod_{i=r+1}^{k-1} a_i)b_r+b_k =$$

$$= (\prod_{i=0}^{k} a_i)d + \sum_{r=0}^{k-1}(\prod_{i=r+1}^{k} a_i)b_r + (\prod_{i=k+1}^{k} a_i)b_k = (\prod_{i=0}^{k} a_i)d + \sum_{r=0}^{k}(\prod_{i=r+1}^{k} a_i)b_r.$$

Čime je dokaz završen. ■

Jasno, za početni problem (2.5) dobija se jedinstveno rešenje oblika

$$x_n = (\prod_{i=0}^{n-1} a_i)d.$$

Za specijalan slučaj nehomogene diferencne jednačine sa promenljivim koeficijentima imamo sledeći oblik

$$x_{n+1} = ax_n + b_n, \qquad x_0 = d.$$

Jednistveno rešenje ove jednačine, koristeći (2.7), dato je sa

$$x_n = a^nd + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b_r.$$

Takođe, početni problem, koji se sastoji iz nehomogene diferencne jednačine sa konstamtnim koeficijentima, dat je oblikom

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Rešenje je u ovom slučaju dato na sledeći način

$$x_n = a^nd + b[\frac{a^n - 1}{a - 1}] \qquad a \neq 1, \qquad x_n = y_0 + bn \qquad a = 1.$$

Može se pokazati da postoji jedinstveno rešenje početnog problema datog sa (2.4). U [8] detaljno su razmatrane diferencne jednačine. Napomenimo još jednom da u slučaju diferencnih dinamičkih sistema, orbite(trajektorije, rešenja) nisu krive kao kod kontinulanih dinamičkih sistema.

Daćemo sada preciznu definiciju orbite.

Definicija 1 ***Orbita sa početkom u tački*** *$x_0 = d$ dinamičkog sistema (2.3) je niz*

$$\gamma(d) = \{x_0, x_1, x_2, ...\} = \{d, f(d), f(f(d)), ...\}$$

Definicija 2 *Ako tačka $x^\star$ zadovoljava $x^\star = f(x^\star)$, onda tu tačku zovemo* ***fiksna tačka*** *preslikavanja (2.3).*

Dakle, ako je $x^\star$ fiksna tačka posmatranog preslikavanja, orbita, sa početkom u fiksnoj tački, ostaje u $x^\star$ za sve buduće iteracije.

Od interesa u daljem radu biće nam i periodične tačke preslikavanja (2.3), zato dajemo sledeću definiciju.

Definicija 3 *Tačka $p \in R$ naziva se* ***periodična tačka*** *preslikavanja (2.3), ako važi $f^k(p) = p$. Kažemo da je tačka p* ***periodična tačka minimalnog perioda*** *k, ako je $f^k(p) = p$ i k je najmanji pozitivan broj za koji to važi. Ako je p periodična tačka, onda ćemo orbitu $\gamma(p)$ zvati* ***periodična orbita*** *i u tom slučaju orbitu $\gamma(p)$ predstavićemo kao konačan skup $\{p = x_0, x_1, x_2, ..., x_k\}$. Orbite koje nisu periodične zvaćemo aperiodične orbite.*

Dalje, interesuje nas stabilnost fiksne tačke $x^\star$.

Definicija 4 *Za fiksna tačka $x^\star$ preslikavanja datog sa (2.3) kažemo da je* ***stabilna*** *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da kad god je $|x_0 - x^\star| < \delta$, tačke x_n orbite $\gamma(x_0)$ zadovoljavaju nejednakost $|x_n - x^\star| < \varepsilon$.*
Ako fiksna tačka nije stabilna, kažemo da je ***nestabilna****.*

Definicija 5 *Za fiksnu tačku $x^\star$ preslikavanja datog sa (2.3) kažemo da je* ***asimptotski stabilna*** *(kaže se još* ***ponor*** *ili* ***atraktivna fiksna tačka****) ako je stabilna i ako postoji $r > 0$ takvo da za svako x_0 za koje važi $|x_0 - x^\star| < r$, tačke x_n orbite $\gamma(x_0)$ zadovoljavaju $\lim_{n\to\infty} x_n = x^\star$.*
Za fiksnu tačku koja ***nije asimptotski stabilna*** *reći ćemo da je* ***repulsivna*** *fiksna tačka, kaže se još i* ***izvor****.*

Da bismo odredili stabilnost $x^\star$, posmatraćemo susednu orbitu $x_n = x^\star + \mu_n$, gde je μ mali poremećaj. Sada ćemo odrediti da li se orbita kreće ka fiksnoj tački $x^\star$ ili od fiksne tačke $x^\star$, tj. da li mali poremećaj raste ili opada kada se n povećava. Razvijamo funkciju f u red u okolini tačke $x^\star$ i dobijamo

$$x^\star + \mu_{n+1} = x_{n+1} = f(x^\star + \mu_n) = f(x^\star) + f'(x^\star)\mu_n + \mathcal{O}(\mu_n^2).$$

Ali, kako je $f(x^\star) = x^\star$, ova jednačina se svodi na

$$\mu_{n+1} = f'(x^\star)\mu_n + \mathcal{O}(\mu_n^2).$$

Ukoliko zanemarimo članove višeg reda $\mathcal{O}(\mu_n^2)$, dobijamo linearizovano preslikavanje $\mu_{n+1} = f'(x^\star)\mu_n$, čija je sopstvena vrednost $\lambda = f'(x^\star)$. Rešenje ovog linearnog preslikavanja može se naći eksplicitno, tako da dobijamo da je u opštem slučaju $\mu_n = \lambda^n \mu_0$.
Dakle, možemo zaključiti sledeće:
Ukoliko je $|\lambda| = |f'(x^\star)| < 1$, onda $\mu_n \to 0$ kada $n \to \infty$ i fiksna tačka je linearno stabilna, možemo još reći i lokalno atraktivna. U suprotnom, ako je $|f'(x^\star)| > 1$ fiksna tačka je nestabilna, odnosno, repulsivna.
Iako je ova analiza lokalne stabilnosti zasnovana na linearizaciji, može se pokazati da važi i za početno nelinearno preslikavanje.
O stabilnosti fiksne tačke $x^\star$ kada je $|f'(x^\star)| = 1$ ne možemo, za sad, ništa zaključiti.
Ovim smo pokazali sledeću teoremu:

Teorema 4 *Neka je $f : R \to R$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje u okolini fiksne tačke $x^\star$ preslikavanja f. Fiksna tačka $x^\star$ je asimptotski stabilna ako je $|f'(x^\star)| < 1$, a nestabilna je ako je $|f'(x^\star)| > 1$.*

Kao što je već rečeno, za $|f'(x^\star)| = 1$ ovaj kriterijum ne daje odgovor. Za dalje ispitivanje stabilnosti fiksne tačke treba da pretpostavimo da preslikavanje f ima neprekidan drugi izvod u tački $x^\star$ i da posmatramo šta se događa sa znakom drugog izvoda u fiksnoj tački $x^\star$. Detaljna analiza ovog slučaja sprovedena je u [7].

Sada ćemo preći na ispitivanje kada je neki jednodimenzionalni diskretni dinamički sistem haotičan.

Da bismo pokazali da imamo haotično ponašanje sistema, potrebno je da pokažemo da je sistem osetljiv na male promene početnih uslova, odnosno, trebalo bi pokazati da male razlike u početnim uslovima dovode do drastično različitog ponašanja orbita koje počinju u tim tačkama. Dakle, potrebno je da pokažemo da je sistem osetljiv na male promene početnih uslova, u smislu da se susedne orbite razdvajaju eksponencijalno brzo. Drugim rečima, moramo pokazati da je vrednost maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta pozitivna.

Polazeći od x_0(početni uslov), posmatrajmo susednu tačku $x_0 \pm \delta_0$ (malo promenjeni početni uslov). Ako je x_0 tačka perioda k, i ako započnemo orbitu od susedne tačke $x_0 \pm \delta_0$, nakon prve iteracije dobićemo da je razmak između x_1 i $x_1 \pm \delta_1$ aproksimiran sa

$$\delta_1 \approx |f'(x_0)|\delta_0 = M_0\delta_0,$$

gde je M_0 faktor uvećanja (*magnification factor*) prvog koraka. Nakon drugog koraka, imamo da je

$$\delta_2 \approx |f'(x_1)|\delta_1 = M_1\delta_1 = M_1M_0\delta_0,$$

gde je M_1 odgovarajući faktor uvećanja.
Nastavljajući postupak, dolazimo do totalnog faktora uvećanja jednog ciklusa orbite perioda k, a to je

$$M_0M_1...M_{k-1}.$$

Posmatraćemo geometrijsku sredinu svih faktora uvećanja

$$(M_0M_1...M_{k-1})^{\frac{1}{k}},$$

logaritmujući ovaj izraz dobijamo:

$$\lambda = \ln(M_0 M_1 ... M_{k-1})^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}(\ln M_0 + ... + \ln M_k) = \frac{1}{k}(\ln|f'(x_0)| + ... + \ln|f'(x_{k-1})|).$$

Intuitivno, stabilnu periodičnu orbitu imamo kada je prosečni faktor uvećanja manji od 1, što je ekvivalentno sledećem: za $\lambda < 0$ orbita je stabilna, a za $\lambda > 0$ nestabilna.

Ovaj pristup poširujemo na proizvoljne orbite.

Definicija 6 *Neka je f neprekidno diferencijabilno preslikavanje na R i neka je x_0 data fiksna tačka. Ljapunovljev eksponent $\lambda(x_0)$ preslikavanja f dat je sa*

$$\lambda(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(\ln|f'(x_0)| + ... + \ln|f'(x_{k-1})|),$$

ako ovaj limes postoji. U slučaju da je neki izvod jednak nuli, onda je $\lambda(x_0) = -\infty$.

Definicija 7 *Neka je $f : R \to R$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje. Orbita $\{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$ je asimptotski stabilna ako konvergira ka periodičnoj orbiti kada $n \to \infty$. Drugim rečima, ako postoji periodična orbita $\{y_0, y_1, ...\}$ takva da je*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Definicija 8 *Neka je dato $f : R \to R$ i neka je data ograničena orbita $\{x_0, x_1, ...\}$ datog preslikavanja f. Kažemo da je orbita* ***haotična*** *ako*

1. *orbita $\{x_0, x_1, ...\}$ nije periodična,*

2. *Ljapunovljev eksponent $\lambda(x_0)$ je strogo veći od nule.*

Ukoliko je Ljapunovljev eksponent pozitivan, to ukazuje da će se susedne orbite udaljavati od orbite sa početkom u x_0, što implicira osetljivost na malu promenu početnih uslova. Ukoliko Ljapunovljev eksponent uglavnom uzima pozitivne vrednosti, to ukazuje na pojavu haosa u dinamičkom sistemu. [18]

1.3.2 Dvodimenzionalna preslikavanja

Iako ćemo se u ovom radu fokusirati na jednodimenzionalne diskretne sisteme, ukratko ćemo napraviti osvrt i na dvodimenzionalni slučaj, zbog značajnih rezultata koji mogu biti korisni u ispitivanju sličnih meteoroloških modela, koji su naime u uskoj vezi sa meteorološkim modelom koji se ispituje u ovom radu.

Detaljna analiza dvodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema prikazana je [7],[14],[15],[16]

Dakle, sada ukratko posmatramo dvodimenzionalne diskretne dinamičke sisteme, odnosno sisteme oblika

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ y_{n+1} &= g(y_n) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Slično kao u jednodimenzionalnom slučaju definišemo fiksnu tačku sistema (2.8).

Definicija 9 *Tačka* $(x^\star, y^\star)$ *je **fiksna tačka** sistema (2.8) ako je zadovoljeno*

$$\begin{aligned} x^\star &= f(x^\star) \\ y^\star &= g(y^\star) \end{aligned}$$

Pretpostavićemo još da se funkcije f i g neprekidno diferencijabilne. Takođe, sistem (2.8) možemo zapisati i u sledećem obliku $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n)$, gde je $\mathbf{F} = (f, g)$.

Kroz sledeću definiciju daćemo neke od osnovnih pojmova koji su u vezi sa dvodimenzionalnim diskretnim preslikavanjima.

Definicija 10

1. *Fiksna tačka* $(x^\star, y^\star)$ *preslikavanja (2.2) je **stabilna** ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za svaku početnu tačku* (x_0, y_0) *za koju* $||(x_0, y_0) - (x^\star, z^\star)|| < \delta$, *iteracije* (x_n, y_n) *kojima je početna tačka* (x_0, y_0) *zadovoljavaju* $||(x_n, y_n) - (x^{\star, y^\star})|| < \varepsilon$, *za svako* $n > 0$.
   *Fiksna tačka preslikavanja datog sa (2.2) kažemo da je **nestabilma** ako nije stabilna.*

2. *Fiksna tačka preslikavanja (2.2) je **asimptotski stabilna** ako postoji* $r > 0$ *tako da* $(x_n, y_n) \to (x^\star, y^\star)$, *kada* $n \to \infty$, *za svako* (x_0, y_0) *za koje važi* $||(x_0, y_0) - (x^\star, y^\star)|| < r$.

3. *Neka je* $(x^\star, y^\star)$ *fiksna tačka preslikavanja* $\mathbf{F} = (f, g)$, *gde su* f *i* g *nepredidno diferencijabilne funkcije u* $(x^\star, y^\star)$. ***Jakobijan preslikavanja*** $\mathbf{F}$ ***u tački*** $(x^\star, y^\star)$ *je matrica*

$$\mathbf{J_F}(x^\star, y^\star) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^\star, y^\star) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^\star, y^\star) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^\star, y^\star) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^\star, y^\star) \end{bmatrix}$$

   Linearno presilikavanje $\mathbf{J_F}(x^\star, y^\star) : R^2 \to R^2$ *dato sa*

$$\mathbf{J_F}(x^\star, y^\star)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^\star, y^\star)x & \frac{\partial f}{\partial y}(x^\star, y^\star)y \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^\star, y^\star)x & \frac{\partial g}{\partial y}(x^\star, y^\star)y \end{bmatrix}$$

   *naziva se **linearizacija preslikavanja F u fiksnoj rački*** $(x^\star, y^\star)$.

4. *Fiksna tačka* $(x^\star, y^\star)$ *preslikavanja* $\mathbf{F}$ *je **hiperbolična** ako je linearizacija preslikavanja* $\mathbf{F}$ *hiperbolična, to znači, ako karakteristični koreni Jakobijana* $\mathbf{J_F}(x^\star, y^\star)$ *ne leže na jediničnoj kružnici. Ako Jakobijan* $\mathbf{J_F}(x^\star, y^\star)$ *ima bar jedan karakteristični koren na jediničnoj kružnici, onda kažemo da je fiksna tačka **nehiperbolična**.*

Sledeća teorema je glavni rezultat koji je u vezi sa ispitivanjem linearne stabilnosti dvodimenzionalnog diskretnog dinamičkog sistema.

Teorema 5 *Neka je* $\boldsymbol{F} = (f, g)$ *neprekidno diferencijabilna funkcija definisana na otvorenom skupu* W *u* R^2, *i neka je* $(x^\star, y^\star) \in W$ *fiksna tačka preslikavanja* $\boldsymbol{F}$.

1. *Ako svi karatkeristični koreni Jakobijana $\boldsymbol{J_F}(x^\star, y^\star)$ imaju moduo manji od 1, onda je fiksna tača $(x^\star, y^\star)$ asimptotski stabilna.*

2. *Ako bar jedan karakteristični koren Jakobijana $\boldsymbol{J_F}(x^\star, y^\star)$ ima moduo veći od jedan, onda je fiksna tačka $(x^\star, y^\star)$ nestabilna.*

Sada ćemo ispitivati haos u dvodimenzionalnim preslikavanjima.

Neka je A matrica 2×2, za dati vektor $x \in R^2$, možemo dobiti vektor y izrazom $y = Ax$. Ako posmatramo jediničnu kružnicu $\{x \in R^2 : ||x|| = 1\}$, onda se množenjem tih jediničnih vektora matricom A dobija elipsa. Naime, skup

$$\{y : y = Ax \ za \ ||x|| = 1\}$$

je elipsa. Iz $||y|| = \sqrt{x^t A^t A x}$, možemo zaključiti da su poluose elipse dve singularne vrednosti[1] matrice A. Matrica $A^t A$ ima dva nenegativna karakteristična korena, označimo ih sa $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, onda su singularne vrednosti matrice A date sa

$$\sigma_1 = \sqrt{\mu_q}, \ \sigma_2 = \sqrt{\mu_2}.$$

Možemo reći da σ_1 i σ_2 predstavljaju stopu ekspanzije ili kontakciju, pod multiplikacijom matrice A. Neka je dato glatko preslikavanje $\mathbf{F} : R^2 \to R^2$ i orbita $\{z_0, z_1, z_2, ...\}$ gde je $z_{n+1} = \mathbf{F}(z_n)$, $z_n = (x_n, y_n)$, za $n > 0$.
Za tačku $\overline{z}_0$, koja je blizu tačke z_0, imamo

$$\mathbf{F}(\overline{z}_0) - \mathbf{F}(z_0) = \mathbf{F}(\overline{z}_0) - z_1 \approx D\mathbf{F}(z_0)(\overline{z}_0 - z_1),$$

gde je $D\mathbf{F}(z_0)$ Jakobijan preslikavanja $\mathbf{F}$ u tački z_0. Tako je lokalna ekspanzija ili kontrakcija preslikavanja $\mathbf{F}$ u blizini tačke z_0 dobro aproksimirano ponašanjem Jakobijana $D\mathbf{F}(z_0)$.

Ako prolazimo kroz k iteracija, onda treba da ispitamo Jakobijan preslikavanja $\mathbf{F}^k$ u tački z_0, odnosno $D\mathbf{F}^k(z_0)$. Neka su $\sigma_{1,k}$ i $\sigma_{2,k}$ dve singularne vrednosti Jakobijana $D\mathbf{F}^k(z_0)$, onda $\sigma_{1,k}$ i $\sigma_{2,k}$ predstavljaju brzinu širenja, odnosno kontrakcije, posle k iteracije. Brzine širenja, odnosno kontrakcije, po interaciji date su sa $(\sigma_{1,k})^{1\backslash k}$ i $(\sigma_{2,k})^{1\backslash k}$. *Ljapunovljevi brojevi* predstavljaju granične vrednosti ovih brzina (ako te granične vrednosti postoje).

Dakle, **Ljapunovljeve brojeve** definišemo na sledeći način:

$$L_1(z_0) = \lim_{k\to\infty} (\sigma_{1,k})^{1\backslash k}, \ L_2(z_0) = \lim_{k\to\infty} (\sigma_{2,k})^{a\backslash k}.$$

Ovde smo pretpostavili da važi $\sigma_{1,k} \geq \sigma_{2,k} \geq 0$. Dakle, važi $L_1 \geq L_2$.

[1]Za kvadratnu matricu A, kvadratni koren karakterističnih korena matrice $A^H A$, gde je A^H konjugovano transponovana matrice, odnosno $A^H = \overline{A}^T$, nazivaju se singularne vrednosti matrice A.

Dalje, definišemo i **Ljapunovljeve eksponente** kao

$$h_1 = \ln L_1, \; h_2 = \ln L_2.$$

Koristeći Ljapunovljeve eksponente, možemo definisati koncept haotične orbite, ali pre toga treba da definišemo pojam asimptotski perodične orbite.

Definicija 11 *Neka je* $\boldsymbol{F} : R^2 \to R^2$ *glatko preslikavanje. Kažemo da je orbita* $\{z_0, z_1, z_2, ...\}$ ***asimptotski periodična*** *ako konvergira ka periodičnoj orbiti kada* $n \to \infty$, *odnosno, postoji periodična orbita* $\{p_0, p_1, p_2, ...\}$ *takva da je*

$$\lim_{n\to\infty} ||z_n - p_n|| = 0$$

Sada dajemo definiciju haotične orbite.

Definicija 12 *Neka je dato* $\boldsymbol{F} : R^2 \to R^2$, *i neka je* $\{z_0, z_1, z_2, ...\}$ *ograničena orbita preslikavanja* $\boldsymbol{F}$. *Za tu orbitu kažemo da je je* ***haotična***, *ako*

1. $\{z_0, z_1, z_2, ...\}$ *nije asimptotski periodična,*

2. *nijedan Ljapunovljev broj nije tačno 1,*

3. *Ljapunovljev eksponent zadovoljava* $h_1(z_0) > 0$, *odnosno za Ljapunovljev broj važi* $L_1 > 1$.

Naravno, i ovde kao i u jednodimenzionalnom slučaju možemo zaključiti da ukoliko Ljapunovljev eksponent uglavnom uzima pozitivne vrednosti, to ukazuje na pojavu haosa u posmatranom dinamičkom sistemu.

Glava 2

Dinamička analiza jednačine energetskog bilansa

2.1 Klimatsko modelovanje

Poznato je da klima i klimatske promene imaju veliki uticaj na život na Zemlji. U zavisnosti od temperatura i padavine određeni tipovi vegetacije mogu rasti na određenom području. Takođe, dizajn i lokacija kuća zavise od letnjih i zimskih temperatura, ali i od verovatnoće da će to zemljište biti poplavljeno. Od najranijih dana ljudi su bili svesni da im od vremenskih prilika, odnosno neprilika dosta toga zavisi, na primer, vremenske nepogode mogu vrlo lako da unište čitave useve od kojih je zavislo prehranjivanje čitavih sela. Od početka civilizacije, ljudi su morali da se prilagođavaju klimatskim promenama, ali su pokušavali i da ih *objasne* i *predvide*. U početku objašnjenja su bila više mitološkog i religijskog karaktera. Vremenom, počele su da se razvijaju egzaktnije metode za posmatranje i analiziranje posmatranog fenomena.

Jedna od prvih klimatskih ili meteoroloških teorija, koja je važila kao neprikosnovena naučna teorija vekovima, sve do nastanka novovekovne nauke, čiji predsvavnici su Galilej, Kepler, Kopernik, Njutn i Dekart, jeste Aristotelova *meterologika*.
Arstotelova Meteorologika pripada oblasti njegove *fizike*, a ne metafizike, iako je teško u ranijim naučnim teorijama razdvojiti filozofiju od nauke, pa čak i od religije i mitologije. U Meteorologici, Aristotel se bavi proučavanjem kretanja prirodnih tela koja su drugačija od prirodnih bića na Zemlji, ali koja svojim kretanjem vrše određeni uticaj na dešavanja na Zemlji. U prvoj knjizi Meteorologike Aristotel govori da je predmet ove nauke kretanje tela koja su drugačije prirode od nebeskih tela, poput zvezda (kojima se bavi astronomija), ali čije je kretanja približno isto kao kretanje zvezda.[9]

Aristotel govori da se meteorologika bavi kretanjem tela čije je kretanje *najpribližnije kretanju zvezda*, poput mlečnog puta, kometa i meteora. Proučavanje ovih predmeta ima za cilj utvrđivanje načina na koji ova tela sa svojim kretanjem vrše uticaj na zbivanja na Zemlji; na koji način vrše utisak na vazduh, na vodu, na vremenske uslove. Meteorologika, time, ispituje promene vremenskih uslova, nastanak poplava, promene temperature, nastanak zemljotresa i sve one posledice koje proizilaze iz kretanja pomenutih tela.[9]

Aristotelovu fiziku, meteorologiju i kosmologiju je upotpunio Ptolomej, i ova slika Sunčevog sistema je ostala kao naučni uzor za sva dalja naučna razmatranja na ovim poljima, sve do pojave Kopernikovog obrta i do razvoja znatno egzaktnijih naučnih metoda u novovekovnoj nauci. Danas je meteorologija posebna nauka, čija metoda se isto oslanja na fizičke i matematičke uvide, s tim što je znanje o prirodi danas daleko egzaktnije i potpunije, od znanja kojim se raspolagalo u Aristotelovo vreme.

Danas, *klimatske modele* možemo definisati kao matematičku reprezentaciju klimatskog sistema, koji je zasnovan na fizičkim, biološkim i hemijskim principima. Jednačine koje se dobijaju na ovaj način uglavnom su izeztno kompleksne i moraju biti rešavane numeričkim metodama.

Dalje u ovom radu biće opisana jednačina energetskog bilansa na dodirnoj površini Zemlje i atmosfere. Ova jednačina biće predstavljena diferencnom jednačinom, koja služi za računanje temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama.

2.2 Od jednačine energetskog bilansa do logističke jednačine

U ovom potpoglavlju ćemo pokazati kako jednačinu energetskog bilansa možemo svesti na logističku jednačinu, koja je jedna od najpoznatijih diferencnih jednačina.

Pre nego što to uradimo, daćemo kratako pojašnjenje o tome šta je to jednačnu energetskog bilansa i kada se koristi.

Jedan od ključnih uslova za funkcionisanje fizičkog sistema jeste odgovarajući priliv energije. Dinamika razmene energije zasnova je na jednačini energetskog bilansa. Princip koji se nalazi u osnovi svih računanja koji su u vezi sa jednačinom energetskog bilansa je *princip očuvanja enrgije*.[10] Ovaj princip odnosi se na svojstvo energije prema kojem se ona ne može stvoriti ni iz čega, niti se može uništiti. Jednačinu energetskog bilansa koristimo kada hoćemo da odredimo tok energije u fizičkim sistemima.

Nas interesuje razmena energije na dodirnim površinama u životnim sredinama, konkretno, razmena energije na dodirnoj površini zemljišta i atmosfere.
Najveći deo energije koju površina zemljišta primi, kao dodirna površina, potiče od Sunca. Sunčevo zračenje dospeva na površinu, pri čemu se deo reflektuje, dok ostatak biva apsorbovan. Sa ove površine se istovremeno vrši izračivanje kao i apsorpcija zračenja koje potiče od oblaka i gasova u atmosferi. Količina energije zračenja koja preostaje raspoloživa ovoj dodirnoj površini naziva se neto zračenje i ono pokreće neke veoma važnje procese. [11]

Osnovna jednačina za temperaturu zemljišta potiče od jednačine energetskog bilansa na dodirnoj površini gologa zemljišta i atmosfere i ima sledeći oblik

$$c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = R_g^{net} - H_g - \lambda E_g - G, \tag{2.1}$$

gde su R_g^{net}, H_g, λE_g i G fluksevi neto zračenja, osetne toplote, latentne toplote i toplote transponovane u zemljište, redom. Sa T_g je označena temperatura zemljišta $[K]$. c_g predstavlja toplotni kapacitet zemljišta $[J \setminus (Km^2)]$.
Do promene temperature zemljišta će doći kada dati fluksevi nisu u ravnoteži.

Sada ćemo dati pojašnjenja, odnosno, nazive za fizičke veličine koje ćemo dalje koristiti, kao i jedinice u kojima su te veličine date.

$T_a[K]-$temperatura vazduha
$E(T_g)[mb]-$maksimalan pritisak vodene pare pri temperaturi zemljišta T_g
$e_a[mb]-$pritisak vodene pare pri temperaturi vazduha T_a
$c_p[J/kg\,^oC]-$specifična toplota pri konstantnom pritisku
c_d-funkcija zapreminskog toplotnog kapaciteta zemljišta i njegove toplotne provodnosti, koji zavisi od karakteristika zemljista
T_d-temperatura na referentnoj dubini u zemljištu

Pomenuta jednačina energetskog bilansa može da se transformiše na sledeći način

$$c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = a(T_g - T_a) - c_l(E(T_g) - e_a) - c_h(T_g - T_a) - c_d(T_g - T_d). \tag{2.2}$$

Članovi sa desne strane imaju isto značenje kao i u jednačini (3.1).
Jednačnina (3.2) može da se zapiše u sledećem obliku

$$c_g \frac{\partial (T_g - T_a)}{\partial t} = a(T_g-T_a)-c_l(E(T_g)-e_a)-c_h(T_g-T_a)-c_d(T_g-T_a)-c_d(T_a-T_d)-c_g\frac{\partial T_a}{\partial t}$$

Posle manjih tansformacija i uvođenjem nove promenljive $\xi = T_g - T_a$, jednačina (3.2) ima sledeći oblik

$$c_g \frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi(a - c_h - c_d) - c_l(E(T_g) - e_a) - c_d(T_a - T_d) - c_g \frac{\partial T_a}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Kako je

$$E(T_g) = E(T_a)e^{b(T_g - T_a)} = E(T_a)e^{b\xi},$$

i koristeći Maklorenov razvoj funkcije $e^{b\xi}$, dobijamo

$$E(T_g) = E(T_a)[1 + b\xi + \frac{b^2}{2}\xi^2 + \mathcal{O}(b^3\xi^3)].$$

Nakon uvrštavanja u (3.3) imamo

$$c_g \frac{\partial \xi}{\partial t} = (a - c_h - c_d)\xi - c_l[E(T_a)(1 + b\xi + \frac{b^2}{2}\xi^2) - e_a] - c_d(T_a - T_d) - c_g \frac{\partial T_a}{\partial t}. \tag{2.4}$$

Pregrupisavanjem poslednjeg izraza dobijamo

$$c_g\frac{\partial\xi}{\partial t}=[a-c_h-c_d-c_lbE(T_a)]\xi-c_lE(T_a)\frac{b^2}{2}\xi^2-c_l[E(T_a)-e_a+E(T_a)\mathcal{O}(b^3\xi^3)]-c_d(T_a-T_d)-c_g\frac{\partial T_a}{\partial t} \tag{2.5}$$

Neka je fizički uslov za T_d(donji granični uslov) dat sa

$$T_d=T_a+\frac{1}{c_d}[c_lE(T_a)+c_g\frac{\partial T_a}{\partial t}-c_le_a+c_lE(T_a)\mathcal{O}(b^3\xi^3)], \tag{2.6}$$

što je ekvivalentno sa

$$-c_l[E(T_a)-e_a+E(T_a)\mathcal{O}(b^3\xi^3)]-c_d(T_a-T_d)-c_g\frac{\partial T_a}{\partial t}=0. \tag{2.7}$$

Tada se izraz (3.5) svodi na

$$c_g\frac{\partial\xi}{\partial t}=[a-c_h-c_d-c_lbE(T_a)]\xi-c_lE(T_a)\frac{b^2}{2}\xi^2. \tag{2.8}$$

Primetimo da kada važi da je $e_a\approx E(T_a)$ i kada se zanemare viši članovi Maklorenovog razvoja, uslov (3.6) je dat sa

$$T_d=T_a$$

Za potrebe numeričkog rešavanja prelazimo da konačne razlike, odnosno na diferencne jednačine. Napisaćemo sada jedančinu (3.8) u formi diferencne jednačine, koristeći šemu unapred

- ⋆ šema unapred: $T_g^{n+1}=T_g^n+\frac{\Delta t}{c_g}F^n$

Sa F^n označen je zbir članova sa desne strane jednačine (3.1) u vremenskom trenutku n.
Sada dobijamo sledeću diferencnu jednačinu

$$\xi_{n+1}=A_1(c_g)\xi_n-A_2(c_g)\xi_n^2, \tag{2.9}$$

gde je $A_1=1+\Delta t\frac{a-c_h-c_d-c_lbE(T_a)}{c_g}$ i $A_2=\frac{c_1E(t_a)b^2}{2c_g}\Delta t$.

Kada jednačinu (3.9) pomnožimo sa $\frac{A_2}{A_1}$ dobijamo

$$\frac{A_2}{A_1}\xi_{n+1}=A_2\xi_n-\frac{A_2^2}{A_1}\xi_n^2 \tag{2.10}$$

koja se smenom

$$\frac{A_2}{A_1}\xi_{n+1}=\mu_{n+1}$$

svodi na jednačinu

$$\mu_{n+1}=A_1(\mu_n-\mu_n^2) \tag{2.11}$$

odnosno, na jednačinu

$$\mu_{n+1}=A_1\mu_n(1-\mu_n) \tag{2.12}$$

što predstavlja logističku diferencnu jednačinu.

Mi ćemo posmatrati i jednačinu (3.9), zapišimo je na sledeći način

$$\xi_{n+1} = A\xi_n - B\xi_n^2 \tag{2.13}$$

Uzimajući u obzir opseg fizičkih veličina sadržanih u koeficijentima A i B, dobijaju se intervali u kojima oni imaju fizički smisao u posmatranoj životnoj sredini i u kojima se pojavljuje haos.[12]. Kao što ćemo videti u narednom potpoglavlju, za detekciju haosa kod logističkog preslikavanja potrebno je da su sledeća dva uslova zadovoljena:

1. da se logističko preslikavanje nalazi u intervalu $(0,1)$

Dakle, za diskretni oblik jednačine energetskog bilansa koji je dat sa 3.13 treba da važi:

$$0 \leq \frac{A_2}{A_1}\xi \leq 1$$

2. da se parametar A_1 nalazi u intervalu u kom se javlja pozitivan Ljapunovljev eksponent.

Dakle, za parametar A_1 videćemo da treba da važi $A_1 \in (3.57, 4)$. Više o ova dva uslova i o samom izvođenju diferencne jednačine od polazne parcijalne diferncijalne možemo naći u [11] i [12]

2.3 Dinamička analiza jednačine energetskog bilansa i logističke jednačine

Sada ćemo analizirati logističku diferencnu jednačinu, datu sledećom jednačinom

$$x_{n+1} = px_n(1-x_n),\ n = 0, 1, ... \tag{2.14}$$

gde je parametar $p > 0$, a $0 \leq x_n \leq 1$ predstvalja populaciju u vremenu n. Označićemo desnu stranu jednakosti (3.14) sa $f(x) = px(1-x)$.
Za vrednosti parametra $p = 2$ i $p = 4$, postoji eksplicitno rešenje logističke jednačine. Za sve ostale vrednosti parametra nije poznato eksplicitno rešenje, niti je dokazano da takvo rešenje postoji. U [7] je nešto detaljnije objašnjena ova tematika.

Da bismo našli fiksne tačke posmatranog preslikavanja, treba da rešimo jednačinu

$$px^\star(1-x^\star) = x^\star.$$

Dobijamo dva rešenja: $x_1^\star = 0$ i $x_2^\star = 1 - \frac{1}{p}$.

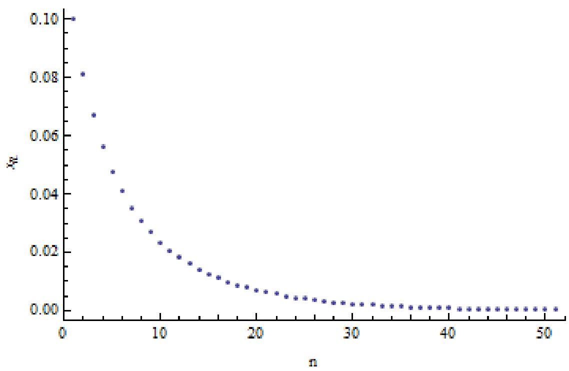
Dalje, koristeći teoremu (4), ispitujemo stabilnost obe fiksne tačke.

Pođimo prvo od fiksne tačke $x_1^\star = 0$.
Kako je $f'(0) = p$, imamo da je fiksna tačka $x_1^\star = 0$ lokalno asimptotski stabilna za $0 < p < 1$ i nestabilna za $p > 1$.

Sada, posmatramo fiksnu tačku $x_2^\star = 1 - \frac{1}{p}$.
Kako je $f'(1 - \frac{1}{p}) = 2 - p$, zaključujemo da je posmatrana fiksna tačka lokalno asimptotski stabilna za $1 < p < 3$ i nestabilna za $p > 3$.

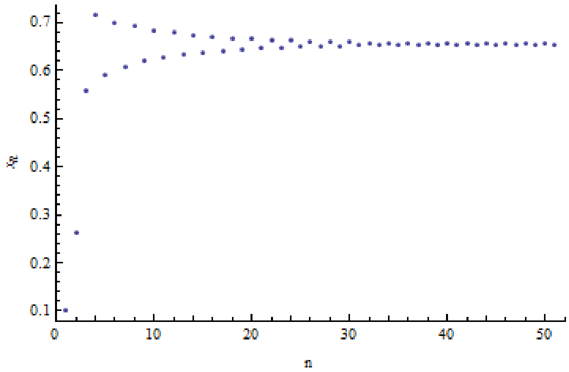
Razmatraćemo šta se događa sa populacijom za različite vrednosti parametra p. Nešto kasnije ćemo videti da nismo slučajno uzimali baš te vrednosti.
Polazimo od neke početne vrednosti populacije x_0. Interesuje nas šta se događa sa populacijom u budućnosti, za datu početnu vrednost i dati parametar.

1. Za malu vrednost parametra p, odnosno za $p < 1$, populacija će uvek biti istrebljena



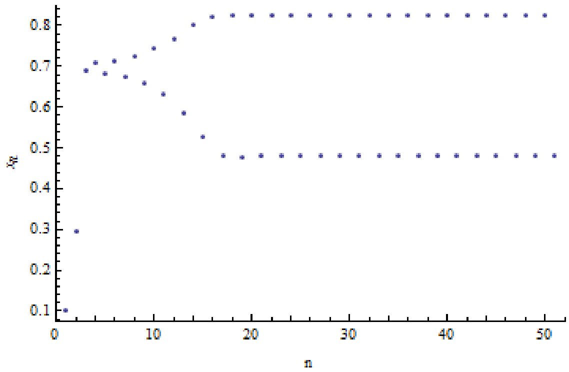
Slika 2.1: Grafički prikaz opadanja populacije za početnu vrednost $x_0 = 0.1$ i malu vrednost parametra $p = 0.9$

2. Za vrednost parametra p u intervalu $p \in (1, 3)$, populacija će rasti i na kraju dostizati neku konstantnu vrednost, različtu od nule.



Slika 2.2: Grafički prikaz rasta populacije za početnu vrednost $x_0 = 0.1$ i vrednost parametra $p = 2.9$

3. Za vrednost parametra $p > 3$, populacija će opet rasti, ali ovaj put će oscilovati oko prethodne konstantne vrednosti. U ovom slučaju će se određena vrednost za x_n ponavljati na svake dve iteracije, što je uočljivo i iz numeričkih proračuna. Ovaj tip oscilacija, gde se određena vrednost x_n ponavlja na svake dve iteracije, naziva se *ciklus perioda 2*.



Slika 2.3: Grafički prikaz rasta populacije za početnu vrednost $x_0 = 0.1$ i vrednost parametra $p = 3.3$

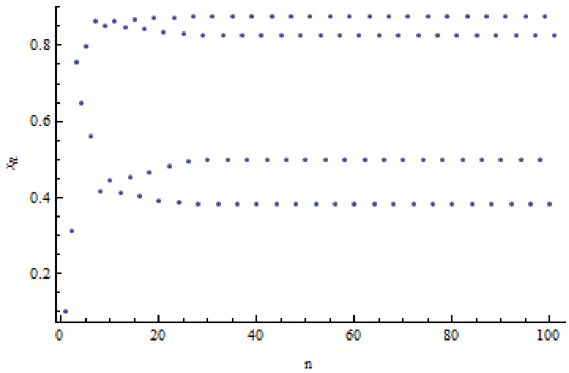
4. Za $p = 3.5$ populacija se približava ciklusu, koji se sada ponavlja na svake četiri generacije. Ovaj ciklus zovemo *ciklus perioda 4*.

Da bismo našli *orbitu perioda 2*, odnosno vrednosti parametra za koje imamo *periodičnu tačku perioda 2*, treba da rešimo sledeću jednačinu:

$$f(f(x)) = p^2x(1-x)(1-px(1-x)) = x$$

Jasno je da su dva rešenja ove jednačine uvek poznata, to su fiksne tačke posmatranog logističkog preslikavanja, zato što je svaka fiksna tačka takođe i periodična tačka ma kog perioda. Dakle, znajući već dva rešenja, dobijamo još dva

$$x_{2,1} = \frac{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(p-3)(p+1)}}{p}, \; x_{2,2} = \frac{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(p-3)(p+1)}}{p}$$



Slika 2.4: Grafički prikaz rasta populacije za početnu vrednost $x_0 = 0.1$ i vrednost parametra $p = 3.5$

Imamo, dakle, dve tačke minimalnog perioda dva kada je $p > 3$.

Sada ćemo pokazati da je orbita perioda 2, stabilana za vrednost parametra p u intervalu $3 < p < 1 + \sqrt{6} = 3.449...$

Ispitivanje stabilnosti orbite svodi se na ispitivanje stabilnosti fiksne tačke, i to na sledeći način. Videli smo da su $x_{2,1}$ i $x_{2,2}$ fiksne tačke preslikavanja $f(f(x)) = x$. Da bismo odredili da li je $x_{2,1}$ stabilna fiksna tačka preslikavanja f^2, treba da posmatramo $|(f(f(x)))'_{x=x_{2,1}}|$.
$(f(f(x)))' = -p^2 + 2p + 4$. Dakle, ciklus perioda 2 je linearno stabilan za $|-p^2 + 2p + 4| < 1$, odnosno za $3 < p < 1 + \sqrt{6}$

Videli smo, dakle, da kako parametar varira, tako se menja kvalitativno ponašanje rešenja. Vrednosti parametra u kojima dolazi do kvalitativne promene rešenja nazivaju se *bifurkacione vrednosti parametra* i označićemo ih sa b_k.
Mogli smo videti da su kritične vrednosti parametra, odnosno bifurkacione vrednosti parametra, $b_0 = 1$,$b_1 = 3$,$b_2 = 1 + \sqrt{6}$. Ako nastavimo dalje, na sledeću bifurkacionu vrednost parametra b_3, možemo pokazati da toj vrednosti odgovara ciklus perioda 4. Sledećoj vrednosti bifurkacionog parametra b_4 odgovara ciklus perioda 8, i tako dalje. Na sličan način na koji smo pokazali da je za $p \in (3, 1 + \sqrt{6})$ ciklus peroda 2 stabilan, možemo pokazati i dalje, naime, da je za $p \in (b_2, b_3)$ ciklus perioda 4 stabilan, dok ciklus perioda dva postaje nestabilan.
Kako nastavljamo ovaj proces, dobijamo niz bifurkacionih vrednosti parametra $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, sa sledećom osobinom: za $p \in (b_k, b_{k+1})$ minimalni ciklus perioda 2^k je stabilan, dok su sva periodična rešenja perioda $2, ..., 2^{k-1}$ nestabilna.
Ova osobina poznata je pod nazivom *period-doubling bifurcation route to the chaos*. Više o ovome može se naći u [7], [6] i [13].
Niz ovih bifurkacionih vrednosti završava se za vrednost bifurkacionog parametra koja je približno jednaka $b = 3.56994....$[7]. Tada logistička jednačina ima periodično rešenje svih perioda, kao i neka nepreiodična rešenja. Ova situacija opisuje se kao *haotično ponašanje* ili *haos*. Poslednji period koji se može javiti u ovom bifurkacionom procesu je period tri.

Teorema 6 (Period tri implicira haos) *Neka je I interval i neka je $f : I \to I$ neprekidno preslikavanje. Pretpostavimo da postoji tačka $a \in I$ za koju tačke $b = f(a)$, $c = f(f(a))$ i $d = f(f(f(a)))$ zadovoljavaju sledeću nejednakost*

$$d = a < b < c$$

ili

$$d = a > b > c$$

.
Tada, za svako $k = 1, 2, ...$ postoji periodična tačka koja pripada intervalu I koja ima period k.

Daćemo nekoliko lema koje su nam potrebne za dokaz ove teoreme.

Lema 1 *Neka je $G : I \to R$ neprekidno preslikavanje, gde je I interval. Za svaki kompaktan interval $I_1 \subset G(I)$ postoji kompaktan interval $Q \subset I$ takav da je $G(Q) = I_1$.*

Dokaz Neka je $I_1 = [G(p), G(q)]$, gde su $p, q \in I$. Ako je $p < q$, neka je r poslednja tačka intervala $[p, q]$ za koju je $G(r) = G(p)$ i neka je s prva tačka nakon r takva da je $G(s) = G(q)$. Tada je $G([r, s]) = I_1$. Slično važi i kada je $p > q$. ■

Lema 2 *Neka je $f : J \to J$ neprekidno preslikavanje i neka je $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih intervala takvih da je $I_n \subset J$ i $I_{n+1} \subset f(I_n)$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji niz kompaktnih intervala Q_n takvih da je $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ i $f^n(Q_n) = I_n$, za svako $n \geq 0$. Za svako $x \in Q = \cap Q_n$ imamo $f^n(x) \in I_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz Ovaj dokaz dajemo indukcijom. Definišimo $Q_0 = I_0$. Tada je $f^0(Q_0) = I_0$. Ako definišemo Q_{n-1} tako da je $f^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$, tada I_{n-1}, onda $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1})$. Ako primenimo prethodnu lemu na za $G = f^n$ na Q_{n-1} tada imamo kompaktan interval $Q_n \subset Q_{n-1}$ takav da je $f^n(Q_n) = I_n$. Ovim je dokaz gotov. ■

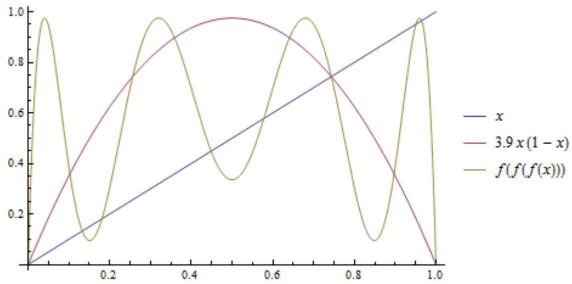
Lema 3 *Neka je $G : J \to R$ neprekidno. Neka je $I \subset J$ kompaktan interval. Pretpostavimo još da je $I \subset G(I)$. Tada postoji tačka $p \in I$ takva da je $G(p) = p$.*

Dokaz Neka je $I = [\beta_0, \beta_1]$. Neka su $\alpha_i \in I$, $i = 0, 1$, takvi da je $G(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 0, 1$. Sledi da je $\alpha_0 - G(\alpha_0) \geq 0$ i $\alpha_1 - G(\alpha_1) \leq 0$, a na osnovu neprekidnosti sledi da $G(p) - p$ mora biti jednako nula, za neko $p \in I$. ■

Sada dajemo dokaz Teoreme 4.

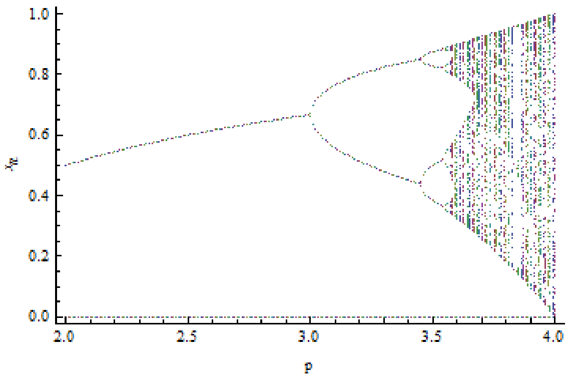
Dokaz Neka je $d = a < b < c$. Neka je $K = [a, b]$ i $L = [b, c]$. Neka je $k \geq 1$. Za $k > 1$ neka je $\{I_n\}$ niz intervala $I_n = L$ za $n = 0, 1, ..., k-2$ i neka je $I_{k-1} = K$, i definišimo I_n da je $I_{n+k} = I_n$, za svako $n = 0, 1, 2...$ Ako je $k = 1$, neka je $I_n = L$, za svako n.
Neka su Q_n skupovi iz dokaza Leme 2. Primetimo da je onda $Q_k \subset Q_0$ i $f^k Q_k = Q_0$, pa na osnovu leme 3, $G = f^k$ ima fiksnu tačku p_k u Q_k. Pretpostavimo da p_k ima period manji od k, u odnosu na f. Tada bismo imali $f^{k-1}(p_k) = b$, što je u suprotnosti sa $f^{k+1} \in L$. Dakle, tačka p_k je periodiňa tačka perioda k preslikavanja f. ■

Detaljniju analizu ove teoreme, kao i njeno uopštenje možemo naći u [18] i [7]. Teorema koju smo upravo dokazali daje nam vrlo jednostavan i intuitivno jasan geometrijski metod za proveru da li postoji tačka određenog perioda. Na primer, interesuje nas da li postoji tačka perioda 3 posmatranog logističkog preslikavanja. Predstavićemo na istom grafiku tri funkcije: funkciju $y = x$, $y = px(1 - x)$ (za određeno p) i funkciju $y = f(f(f(x)))$. Ako se grafici funkcija $y = x$ i $y = f^3(x)$ preseku u bar jednoj tački koja nije fiksna tačka datog (logističkog) preslikavanja, onda postoji bar jedna periodična tačka perioda 3. U tom slučaju, prethodna teorema nam tvrdi da postoje periodične tačke svih perioda.



Slika 2.5: Grafički prikaz preseka funkcija $y = x$, $y = f(x) = 3.9x(1 - x)$ i $y = f(f(f(x)))$, koji ukazuje na postojanje periodične tačke perioda 3

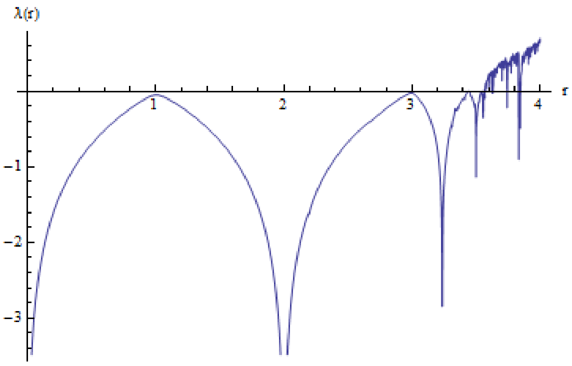
Videli smo da za različite vrednosti parametra p dobijamo različita rešenja logističke jednačine. Od posebnog značaja su kritične vrednosti parametra p, odnosno bifurkacione vrednosti parametra p. Te vrednosti mogu se jednostavno očitavati sa bifurkacionih dijagrama. Predstavićemo sada bifurkacioni dijagram logističkog preslikavanja.



Slika 2.6: Bifurkacioni dijagram logističkog preslikavanja. Uzet je početni uslov $x_0 = 0.5$

Broj preseka vertikalne linije, u vrednosti nekog parametra, sa grafikom, predstavlja ciklus tog perioda koji odgovara datom parametru. Na slici (3.6) možemo uočiti ciklus perioda 2 i ciklus perioda 4, neko možda može uočiti i ciklus perioda 8. Uočavamo "beli prozor" za vrednosti parametra koje su nešto veće od = 3.8. Prisustvo "belog prozora" na bifurkacionom dijagramu ukazuje na postojanje ciklusa perioda 3, pa time govori kako je logistička jednačina haotična.

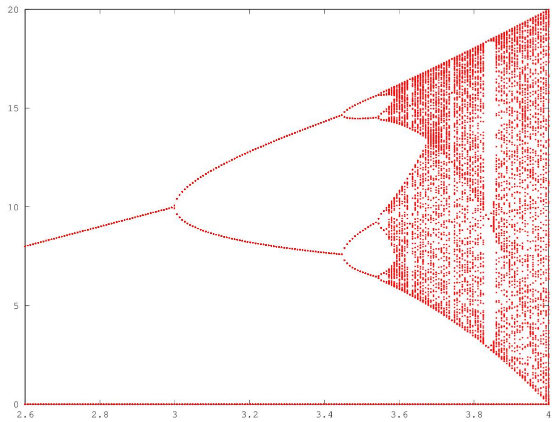
Da bismo potvrdili haotičnost ovog dinamičkog sistema, potrebno je da pokažemo da je sistem osetljiv na male promene početnih uslova. Za ove potrebe računaćemo Ljapunovljeve eksponente, odnosno, prikazaćemo na grafiku vrednosti Ljapunovljevih eksponenata.



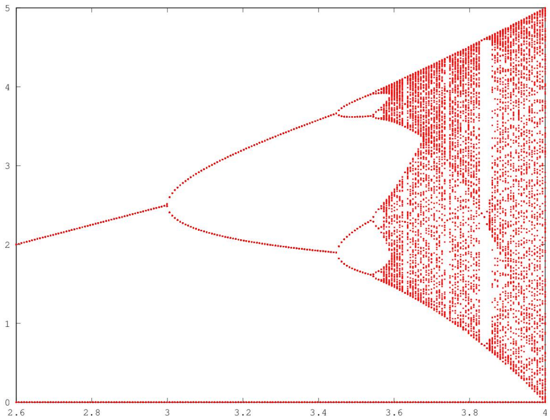
Slika 2.7: Ljapunovljev eksponent za logističku jednačinu, za razne vrednosti parametra $0 < p < 4$

Sa ovog grafičkog prikaza vidimo da Ljapunovljev eksponent uglavnom uzima pozitivnu vrednost, što potvrđuje pojavu haosa u ovom sistemu.

Sada ćemo predstaviti bifurkacioni dijagram za jednačinu (3.13). Posmatraćemo šta se događa sa orbitom koja ima početak u $\xi_0 = 0.5$ za vrednosti parametra $A \in (2.6, 4)$ i dve fiksirane vrednosti parametra B.



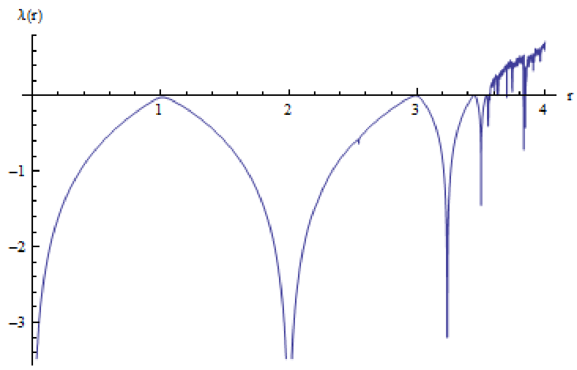
Slika 2.8: Bifurkacioni dijagram preslikavanja 3.13. Uzet je početni uslov $\xi_0 = 0.5$, a vrednost parametra $B = 0.2$



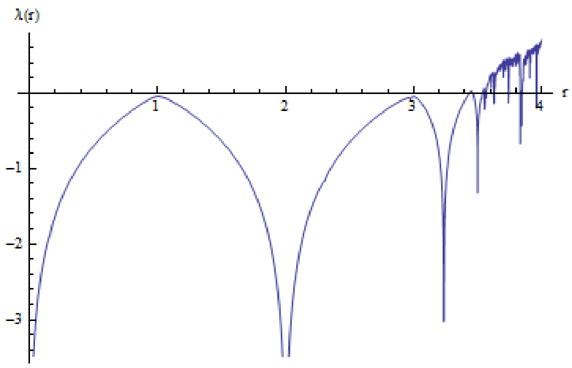
Slika 2.9: Bifurkacioni dijagram preslikavanja 3.13. Uzet je početni uslov $\xi_0 = 0.5$, a vrednost parametra $B = 0.8$

Dobijeni bifurkacioni dijagrami vrlo su slični bifurkacionom dijagramu odgovarajuće logističke jednačine. Uočava se haotično ponašanje na oba dijagrama.

Sledeće što radimo je predstavljanje Ljapunovljevih eksponenata preslikavanja (3.13). Naravno, grafikom na kom su predstavljeni Ljapunovljevi eksponenti, potvrđuje se haotično ponašanje posmatrane jednačine.



Slika 2.10: Ljapunovljev eksponent preslikavanja 3.13. Početni uslov je $\xi_0 = 0.1$, a vrednost parametra $B = 0.2$.



Slika 2.11: Ljapunovljev eksponent preslikavanja 3.13. Početni uslov je $\xi_0 = 0.1$, a vrednost parametra $B = 0.8$.

Predstavljenim graficima potvrđuje se haotično ponašanje jednačine 3.13. Takođe, i u ovom slučaju uočavamo ponašanje koje je vrlo slično ponašanju logističke jednačine.

Zaključak

U ovom, zaključnom delu rada ćemo napraviti kratak osvrt na prethodno prikazano.

Kao glavni problem od kojeg smo pošli, jeste način analiziranja jednog fizičkog sistema i njegovih promena u vremenu. Iz tog razloga smo u prvom delu rada ispitali šta je to dinamički sistem i kako možemo definisati dinamički sistem. Dakle, pre svega, definisali smo dinamički sistem, i dali kratak uvod u to kada može, odnosno, ne može doći do pojave haosa u dinamičkom sistemu.

Teorija haosa je tema narednog dela prvog poglavlja. U radu se nismo usmerili na to da pronađemo jedinstvenu definiciju haosa, budući da je to samo po sebi problem u nauci. Radije, osvrnuli smo se na ona svojstva izolovanih fizičkih, odnosno, dinamičkih sistema, koja ovaj treba da ima da bi se mogao razumeti kao haotični sistem. Haotični sistem je sistem gde u jednom trenutku, u toku vremenske promene u sistemu, dolazi do odstupanja u regularnosti ponašanja samog sistema. Ovakve oblike odstupanja nazivamo haosom ili haotičnim ponašanjem sistema.

S tim u vezi, bavili smo se i razlikom između diferencijalnih i diferencnih jednačina. U radu smo, tako, posmatrali diferencni oblik jednačine energetskog bilansa. Takođe smo dali osnovne definicije i teoreme za analizu jednodimenzionalnih diskretnih dinamičkih sistema i napravili smo mali osvrt na dvodimenzionalne diskretne dinamičke sisteme.

Do diskretnog oblika jednačine energetskog bilansa, kojom predstavljamo promenu temperature na dodirnoj površini zemljišta i atmosfere, došli smo transformisanjem polazne parcijalne diferencijalne jednačine. Opisivali smo ponašanje ove diskretne jednačine posmatranjem odgovarajućih bifurkacionih dijagrama. Takođe, ovu jednačinu smo analizirali, u zavisnosti od parametara, koristeći Ljapunovljev eksponent. Pozitivne vrednosti Ljapunovljevog eksponenta ukazuju na pojavu haotičnog ponašanja datog sistema. Videli smo da se pomenuta parcijalna diferencijalna jednačina može transformisati na logističku diferencnu jednačinu, pod određenim uslovima, koja je takođe bila predmet analize. Analizirali smo, u ovom radu, dakle, diferencnu jednačinu energetskog bilansa i njoj pridruženu logističku diferencnnu jednačinu.

Za izradu grafičkih prikaza rezultata, koristili smo programski paket *Mathematica*, korišćenjem programskog paketa *DynPac*, s tim da su bifurkacioni dijagrami i dijagram Ljapunovljevih eksponenata dobijeni kodiranjem u programskom paketu *MATLAB*.

Bibliografija

[1] Heisenberg, W., *A Physicist Conception of Nature*, Hutchinson and CO. LTD, London, Melbourne, Sydney, Auckland, Bombay, Toronto, Johannesburg, New York, translated by Arnold J. Pomernas from *Das Naturbild der Heutigen Physik*, Rowohlt, Hamburg, 1955, english translation first published 1958

[2] Broer, H., Takens, F., ”Dynamical Systems and Chaos,"u: *Applied Mathematical Sciences*, vol.172, S. S. Antman, J. E. Marsden, L. Sirovich (ed.), Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011

[3] Strogatz, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994

[4] Teschl, G., "Ordinary Differential Equation and Dynamical Systems,"u: *Graduate Studies in Mathematics*, vol.140, David Cox, Daniel S. Freed, Rafe Mazzeo, Gigliola Staffilani (ed.), Amreican Mathematical Society, 2012

[5] Kuznetsov, Y. A., "Elements of Applied Bifurcation Theory, second edition", u: *Applied Mathematical Sciences*, vol.112, J.E. Marsden, L. Sirovich (ed.), Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singapore, Tokyo, 1998

[6] Kuzmanović, D., Vasović, N., Kostić, S., Simić, S., Franović, I., Grozdanović, I., Todorović-Vasović, K., Ranković Plaznić, B., *Uvod u teoriju haosa*, Univerzitet u Beogradu - Saobraćajni fakultet, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, 2013.

[7] Kulenović, R. S. M., Merino, O., *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2002

[8] Elaydi, S., *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York, 3rd ed. 2005

[9] Aristotle, Meteorology, translated by E. W. Webster, URL: http://classics.mit.edu/Aristotle/meteorology.1.i.html

[10] Dermot, P. M., *Bioprocess Engineering Principles*, second edition, Academic Press, 2012

[11] Mimić, G., *Kolmogorovljeva kompleksnost i pojava haosa pri izračunavanju temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, departman za fiziku, Novi Sad, 2012.

[12] Cvijanović, I., *Pojava haosa u jednačini energetskog bilansa na dodirnoj površini Zemlje i atmosfere*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Departman za fiziku, Novi Sad, 2006.

[13] Ausloos, M., Dirickx, M., (eds.) *The Logistic Map and the Route to Chaos. From the Beginnings to Modern Applications*, Springer, Berling, Heidelberg, New York, 2006

[14] Balibrea, F., Caballero, M. V., "Examples of Lyapunov Exponents in Two-Dimensional Systems", u: *Nonlinear Maps and their Applications*, Clara Gracio, Daniele Fournier-Prunaret, Tetsushi Ueta, Yoshifumi Nishio (eds.), Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London, 2014

[15] Alligood, K. T., Sauer, T. D., York, J. A., *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Santa Clara, Singapore, Tokyo, 1996

[16] Bovy, J., *Lyapunov Exponents and Strange Attractors in Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Theoretical Physics Project, September 11, 2004, URL:

[17] Teschl, G., "Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems,"u: *Graduate Studies in Mathematics*, vol.144, David Cox, Steven Krants, Rafe Mazzeo, Martin Scharlemann (eds.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012

[18] Li, T-Y., Yorke, J.A., ”Period Three Implies Chaos,“ u: The American Mathematical Monthly, vol. 82, No. 10 (Dec, 1975), str. 985 – 992

Biografija

Dragana Drašković rođena je 22. avgusta 1990. u Sarajevu. Osnovnu školu "Branko Radičević" u Ravnom Selu završila je 2005. godine. Gimnaziju "Isidora Sekulić", prirodno-matematički smer, u Novom Sadu, završila je 2009. godine. Iste godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, a završila ih 2013. godine. Nakon završenih osnovnih studija, upisala je master akademske studije matematike, modul nastava matematike, na istom fakultetu. Od 1. decembra 2014. godine radi kao saradnik u nastavi na Tehničkom fakultetu "Mihajlo Pupin", u Zrenjaninu. Tokom jula meseca 2015. godine boravila je u Halifaksu, u Novoj Škotskoj, u Kanadi, gde je na Dalhousie Univerzitetu slušala dva kursa na temu numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina, u okviru letnje škole koja je bila u organizaciji AARMS-a (Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences). Na vorkšopu *2015 Bluenose Applied and Computational Math Days Workshop* koji je održan u julu mesecu na Saint Marry's Univerzitetu, u Halifaksu, predstavila je poster prezentaciju sa temom *Dynamical Analysis of Energy Balance Equation*, gde je prikazala mogući tok svoje master teze. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekla uslov za odbranu ovog rada.

Novi Sad, oktobar 2015. godine Dragana Drašković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Dragana Drašković
Mentor: **MN**	dr Aleksić Jelena
Naslov rada: **NR**	Dinamička analiza jednačine energetskog bilansa
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski/engleski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2015.
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	2 poglavlja/ 34 stranice/ 18 referenci/ 11 grafika/ 1 fotografija
Naučna oblast: **NO**	Matematika
Naučna disciplina: **ND**	Matematička analiza
Predmetna odrednica/ ključne reči: **PO** **UDK**	Jednačina energetskog bilansa, dinamički sistem, diferencne jednačine, logistička jednačina, haos
Čuva se: **ČU**	Biblioteka departmana za matematiku, PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	Nema
Izvod: **IZ**	U master radu analiziramo stabilnost i pojavu haosa u jednačini energetskog bilansa, koja se koristi za računanje temperature na dodirnoj površini zemljišta i atmosphere, koju smo prethodno sveli na jednodimenzionalnu diferencnu autonomnu nelinearnu jednačinu, konkretno na diferencnu logističku jednačinu. U radu dajemo osnovne teoreme i definicije neophodne za analizu. Daje se definicija dinamičkog sistema, kao i uslovi koji su potrebni da bi se neki sistem opisao kao haotičan.
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	10.01.2014.
Datum odbrane: **DO**	
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	Dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,

	Univerzitet u Novom Sadu
član:	Dr Vladimir Kostić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
član:	Dr Jelena Aleksić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Master's thesis
Author: **AU**	Dragana Drašković
Mentor/comentor: **MN**	Aleksić Jelena
Title: **TI**	Dynamic Analysis of Energy Balance Equation
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	English
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2015.
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: ***PD***	2 chapters/ 34 pages/ 18 references/ 11 graphs/ 1 photo
Scientific field: **SF**	Mathematics
Scientific discipline: **SD**	Mathematical Analysis
Subject/ Key words: **SKW** **UC**	Energy balance equation, dynamic system, difference equation, logistic equation, chaos
Holding data: **HD**	Library of Department of Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4
Note: **N**	None
Abstract: **AB**	In this master's thesis, we analyse the stability and emergence od chaos in the energy balance equation that is used for calculating ground surface temperature, that we previously reduced to difference logistic equation. In the thesis is presented the elementary theorems and definitions necessary for the analysis. Also the definition of a dynamic system is presented, as well as the conditions required in order to describe system ad chaotic.
Accepted by the Scientific Board: **ASB**	10.01.2014.
Defended on: **DE**	
Thesis defend board: **DB**	
President:	Dr Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Vladimir Kostić, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Jelena Aleksić, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics,

University of Novi Sad