UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Đorđe Vučković

Poljski prostori

-završni rad-

Mentor: prof. dr Miloš Kurilić

Novi Sad, 2011.

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu biće reči o poljskim prostorima. Radi se o važnoj klasi topoloških prostora, ne samo za topologiju i funkcionalnu analizu, nego i za deskriptivnu teoriju skupova, pa i za matematiku uopšte.

Tema ovog rada više je nego inspirativna. Ispitivanje topoloških osobina, svojstava i neobičnosti ovako široke klase topoloških prostora, snabdevenih metrikom i separabilnošću, omogućuju čitaocu koji je odslušao kurseve opšte topologije i funkcionalne analize da još jednom ”prođe” kroz ove oblasti i sagleda ih iz drukčije perspektive.

S obzirom da se je sam pojam poljskih prostora složen iz više osnovnih topoloških pojmova, za praćenje teksta biće neophodno poznavanje većeg broja pojmova i teorema iz topologije i funkcionalne analize. S obzirom na to, u Uvodu su izložene definicije, tvrđenja i primeri koje će biti korišćeni u radu sa poljskim prostorima. U drugom delu rada produbljuju se primeri dati u Uvodu. Pored topološkog uvoda, izloženi su osnovni pojmovi teorije skupova i teorije drveta, koji su korišćeni u daljem radu. Izuzetak je teorija ordinala, koja je ukratko izložena u okviru poglavlja ”Savršeni poljski prostori. Teorema Kantor - Bendiksona”, jer se koristi samo u jednom dokazu.

Činjenica da većina prostora koje je čitalac upoznao na kursevima realne, funkcionalne i kompleksne analize pripadaju klasi poljskih prostora opravdava autorovu želju da većim brojem primera ilustruje izloženu materiju.

U drugom delu rada, nakon definicije i primera poljskih prostora sa kojima se čitalac sretao u toku studija, ispitujemo osobinu ”biti poljski prostor”. Pokazujemo da je to topološka i prebrojivo multiplikativna osobina. Pitanju naslednosti osobine ”biti poljski prostor” posvećeno je drugo poglavlje drugog dela ovog rada. U trećem poglavlju bavimo se osobinama tzv. univerzalnih poljskih prostora u koje utapamo proizvoljni poljski prostor.

U četvrtom poglavlju izlažemo metod kojim se od datog poljskog prostora formira novi. Peto poglavlje rezervisano je za ispitivanje lokalne kompaktnosti. Šesto poglavlje sadrži najvažniju teoremu ovog rada, dok je sedmo pokušaj da karakterišemo poljske prostore na osnovu toka topoloških igara.

Deksriptivna teorija skupova, iako posvećena poljskim prostorima, nije obuhvaćena ovim radom jer je izlaganje elemenata tako razgranate matematičke oblasti nemoguće izložiti onako sistematično kako je (manje-više) autoru uspevalo sa većim delom ovog master rada. Zainteresovanog čitaoca svakako upućujemo na [12], a potom i na [7].

Kako navodi Kuratovski ([9], strana 405), termin ”Poljski prostor” uvela je Burbaki grupa matematičara, u čast poljskih matematičara koji su doprineli razvoju topologije i funkcionalne analize. I zaista, letimičnim prelistavanjem Banahove ”Scottish book”,(videti [1]) svojevrsnog preseka poljske matematike 20. veka, vidi se da od prvog, Banahovog problema (zapisanog 17. jula 1935.) do poslednjeg, 193. Štajnhausovog problema (zapisanog 31. maja, 1941. godine), većina pripada topologiji i funkcionalnoj analizi. Iako poljska matematička istorija do 20. veka gotovo da nije postojala, danas je, blagodareći velikom uspehu poljskih matematičara u oblastima *moderne* matematike, nemoguće na ovako ograničenom prostoru sistematično izložiti istorijat poljske matematike i posebno, njen značaj za topologiju. Više o istoriji poljske matematike može se naći u [14].

Autor ovom prilikom želi da se zahvali mentoru prof. dr Milošu Kuriliću na odabiru teme, korisnim savetima koji su mu pomogli u radu i predavanjima zbog kojih je zavoleo topologiju. Takođe, veliku zahvalnost autor duguje akademiku prof. dr Stevanu Pilipoviću i prof. dr Ljiljani Gajić, članovima komisije za odbranu ovog master rada.

Glava 1

Uvod

1.1 Oznake, uvodne napomene

Od oznaka koje ćemo koristiti, većinu ćemo uvesti odgovarajućim definicijama, pa čitalac neće imati većih problema. Od opštih oznaka, koristićemo $\subseteq$ za podskup. Oznaku $\subset$ koja ne dopušta jednakost,ređe ćemo koristiti. Partitivni skup skupa A, dakle skup svih njegovih podskupova, označavaćemo sa $\mathcal{P}(A)$. Direktnu sliku datog skupa $A \subseteq X$ pri preslikavanju $f : X \to Y$ označavamo sa $f[A]$, dok inverznu sliku skupa $B \subseteq Y$ pri istom preslikavanju označavamo $f^{-1}[B]$. Pretpostavljamo da čitalac zna da "računa" sa skupovima, direktnim i inverznim slikama (videti [10], strane 6-8). Takođe, prihvatamo aksiomu izbora.

Skup prirodnih brojeva $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ označavamo sa ω. Skup $\omega \setminus \{0\}$ označavamo sa $\mathbb{N}$. Smatramo da je svaki prirodan broj skup prirodnih brojeva koji mu prethode, dakle $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Koristićemo i nekoliko lepih osobina prirodnih brojeva. Pre svega, dobru uređenost uređenog skupa $(\omega, \leq)$, tj. činjenicu da svaki neprazan podskup skupa prirodnih brojeva ima najmanji element. Takođe, u nekoliko konstrukcija koristićemo princip rekurzije.

Radi se o sledećem. Ukoliko želimo da konstruišemo niz objekata $\langle F_n : n \in \omega\rangle$ koji ima svojstvo $\mathcal{P}$, postupamo na sledeći način.

1. Izaberemo F_0 tako da niz dužine 1, $\langle F_0 \rangle$, ima svojstvo $\mathcal{P}$;

2. Pokažemo da svaki n-niz $\langle F_0, F_1, \ldots F_{n-1}\rangle$ koji ima svojstvo $\mathcal{P}$ može da se produži do niza dužine $n+1$, $\langle F_0, F_1, \ldots, F_n\rangle$ sa svojstvom $\mathcal{P}$.

3. Zaključujemo da postoji beskonačni niz $\langle F_n : n \in \omega\rangle$ sa svojstvom $\mathcal{P}$.

Iako verujemo da je čitalac upoznat sa principom indukcije, ovom prilikom ga navodimo radi potpunosti. Dakle, ukoliko želimo da dokažemo da svojstvo $\mathcal{P}$ (formula $\mathcal{P}(x)$) važi za svaki broj $k \in \omega$ dovoljno je pokazati sledeće:

1. Važi $\mathcal{P}(0)$.

2. Ako je ispunjeno $\mathcal{P}(n)$, važi i $\mathcal{P}(n+1)$.

Navodimo i drugu, ekvivalentnu varijanta principa (matematičke, potpune) indukcije. Svojstvo $\mathcal{P}$ važi za sve brojeve $k \in \omega$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- Važi $\mathcal{P}(0)$.

- Ako za sve prirodne brojeve k manje od n važi $\mathcal{P}(k)$, važi i $\mathcal{P}(n)$.

Skupove celih, racionalnih i realnih brojeva označavamo respektivno sa $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, odnosno $\mathbb{R}$. Pretpostavljamo da je čitalac upoznat sa osobinama relacije $\leq$ na skupu realnih brojeva. Koristićemo aksiomu supremuma koja važi u skupu $\mathbb{R}$.

Definicija 1.1.1 Svaki neprazan, odozgo ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima supremum (najmanje gornje ograničenje).

Važi i dualni, princip infimuma[1]. Supremum i infimum skupa $A \subseteq X$ označavamo sa $\sup A$ odnosno $\inf A$. Koristićemo još neke pojmove koji su čitaocu odranije poznati.

Definicija 1.1.2 Skup A je **ekvipotentan** skupu B ako i samo ako postoji bijekcija. $f : A \to B$. Lako se pokazuje da relacija ekvipotentnosti ima osobine refleksivnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti.

Za dva ekvipotentna skupa kažemo da imaju **isti kardinalni broj**.

Definicija 1.1.3 Kardinalni broj skupa A je klasa svih skupova ekvipotentnih sa A. Označavamo ga sa $|A|$.

Dakle, $|A| = |B|$ ako i samo ako su A i B ekvipotentni. Uvodimo još jednu oznaku.

Definicija 1.1.4 Neka su data dva skupa. Tada definišemo: $|A| \leq |B|$ ako i samo ako postoji injekcija $f : A \to B$.

[1] Svaki neprazan, odozdo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima infimum (najveće donje ograničenje)

Koristićemo i sledeću, veoma značajnu teoremu.

Teorema 1.1.5 (Šreder-Bernštajn) Za dva skupa A i B važi:

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \rightarrow |A| = |B|.$$

Dokaz. Može se naći u ([10], strane 34-36) □

Definicija 1.1.6 Skup je **konačan** ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $|A| = |\{1, 2 \ldots n\}|$. Skup je **beskonačan** ako nije konačan. Skup je **prebrojiv** ako je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$. Skup je **najviše prebrojiv** ako je konačan ili prebrojiv. Skup je **neprebrojiv** ako nije prebrojiv. Kardinalnost skupa $\mathbb{N}$ obeležavamo sa $\aleph_0$.

Pokazuje se da su skupovi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\mathbb{R}$ ekvipotentni. Takođe, skupovi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ su ekvipotentni skupu $\mathbb{N}$, dakle prebrojivi.

Definicija 1.1.7 Kardinalnost skupa realnih brojeva zovemo **kontinuum** i označavamo ga sa c.

Navodimo još nekoliko korisnih svojstava.

Teorema 1.1.8 Važe sledeća svojstva:

- $|A| \leq |\mathcal{P}(A)| \wedge |A| \neq |\mathcal{P}(A)|$ za proizvoljan skup A.
- Prebrojiv skup ima prebrojivo mnogo konačnih skupova.
- Unija najviše prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je najviše prebrojiv skup.

U daljem tekstu navodimo osnovne pojmove vezane za teoriju drveta.

Definicija 1.1.9 Neka je A neprazan skup i $n \in \omega$. Skup A^n je skup svih n-torki skupa A,odnosno skup nizova u A dužine n, dakle $A^n = \{(s(0), s(1), \ldots, s(n-1))|s : n \rightarrow A\}$. Dopuštamo i slučaj $n = 0$, gde je $A^0 = \{\emptyset\}$ (prazan niz). Ako $s \in A^n$ i $m \leq n$, definišemo $s|m = (s(0), s(1), \ldots, s(m-1))$. Ako su s i t konačni nizovi skupa A, kažemo da je s **početni segment** niza t, u oznaci $s \subseteq t$ ako je $s = t|m$, za neko m ne veće od dužine niza t. Uvedimo i sledeću oznaku:

$$A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} A^n.$$

Dakle, skup svih konačnih nizova skupa A. Dužinu niza s obeležavamo sa $|s|$. **Konkatenacija** nizova $s = (s(0), s(1), \dots s(n-1))$ i $t = (t(0), t(1), \dots, t(m-1))$ je niz $s\hat{\ }t = (s(0), \dots, s(n-1), t(0), t(1), \dots t(m-1))$. Specijalno, za nizove s i (a) pišemo jednostavno $s\hat{\ }a$. Skup A^ω je skup beskonačnih nizova skupa A, dakle

$$A^\omega = \{x | x : \omega \to A\}.$$

Za $n \in \omega$ i $x \in A^\omega$ definišimo $x|n = (x(0), x(1), \dots x(n-1))$.

Niz $s \in A^n$ je **početni segment** beskonačnog niza x ako postoji $n \in \omega$ takav da je $x|n = s$. Pišemo $x \subset s$.

Definicija 1.1.10 **Drvo** na skupu A je podskup $T \subseteq A^{<\omega}$ za koji važi sledeća implikacija:

$$t \in T \land s \subseteq t \to s \in T.$$

Elemente drveta zovemo **čvorovi**. **Beskonačna grana** drveta T je niz $x \in A^\omega$ tako da $x|n \in T$ za svako $n \in \omega$. **Telo** drveta T, u oznaci $[T]$ je skup njegovih beskonačnih grana. Drvo je **potkresano** ako za svako $s \in T$ postoji $a \in A$ tako da je $s\hat{\ }a \in T$.

Definicija 1.1.11 Neka je T drvo na A. Za T kažemo da je **konačni spliting** ako i samo ako za svako $s \in T$ postoji najviše konačno mnogo $a \in A$ takvih da je $s\hat{\ }a \in T$.

Za konačne splitinge važi sledeća teorema, koju ćemo koristiti.

Lema 1.1.12 (Kenig) Neka je T drvo na A. Ako je T konačan spliting, tada je $[T] \neq \emptyset$ ako i samo ako je T beskonačno. $\square$

1.2 Uvodni pojmovi iz topologije - topološki prostori

U ovom poglavlju izložićemo pojmove iz topologije i funkcionalne analize koji će nam biti potrebni za definisanje poljskih prostora i rad sa njima. Mali broj teorema biće eksplicitno dokazan, za neke su date reference, a za ostale čitaoca upućujemo na [10].

Definicija 1.2.1 Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(O1) Prazan skup i skup X su otvoreni, tj. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

(O2) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, odnosno za $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, tj. za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je **topologija** na skupu X, a za uređeni par $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je **topološki prostor**. Elemente skupa X ponekad ćemo zvati tačkama. Skup $F \subseteq X$ je **zatvoren** ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup. Skup zatvorenih skupova obeležavamo sa $\mathcal{F}$.

Primer 1.2.2 Diskretna topologija
Za proizvoljan neprazan skup X, partitivni skup $\mathcal{P}(X)$ je topologija na X jer ispunjava uslove (O1-O3) definicije 1.2.1. Ovu topologiju nazivamo **diskretna topologija** na skupu X.

U narednoj teoremi izložena su osnovna svojstva zatvorenih skupova.

Teorema 1.2.3 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada familija $\mathcal{F}$ zatvorenih skupova zadovoljava sledeće uslove:

(F1) Prazan skup i skup X su zatvoreni;

(F2) Unija dva zatvorena skupa je zatvoren skup;

(F3) Presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Dokaz. Jednostavna primena De Morganovih zakona. Pokazaćemo samo osobinu (F2).

Neka su F_1 i F_2 zatvoreni skupovi. Tada, na osnovu definicije 1.2.1 postoje $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ tako da je $X \setminus O_1 = F_1$, $X \setminus O_2 = F_2$. Dalje imamo $F_1 \cup F_2 = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) = X \setminus (O_1 \cap O_2)$. Kako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, na osnovu osobine (O2) imamo da $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ pa $F_1 \cup F_2 = X \setminus (O_1 \cap O_2) \in \mathcal{O}$, čime je dokaz završen. $\square$

Pored otvorenih i zatvorenih skupova na proizvoljnom topološkom prostoru, sledećom definicijom uvodimo nove vrste skupova koje ćemo koristiti u daljem radu.

Definicija 1.2.4 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je:

- G_δ skup (ima osobinu G_δ) ako i samo ako se može predstaviti kao prebrojiv presek otvorenih skupova.
- F_σ skup (ima osobinu F_σ) ako i samo ako se može predstaviti kao prebrojiva unija zatvorenih skupova.

Definicija 1.2.5 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **baza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi, odnosno $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$;

(B2) Svaki otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ može se prikazati kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$ (postoji podfamilija $\{B_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ tako da je $O = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Kaže se još da baza $\mathcal{B}$ generiše topologiju $\mathcal{O}$.

Primer 1.2.6 Baza diskretne topologije
Baza diskretne topologije $(X, \mathcal{P}(X))$, iz primera 1.2.2 je familija $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Zaista, uslov (B1) očigledno je zadovoljen, a s obzirom da za svaki (otvoren) skup $O \subseteq X$ važi: $O = \bigcup_{x \in O} \{x\}$, zadovoljen je i uslov (B2).

Topologija može biti zadata navođenjem elemenata njene baze.

Definicija 1.2.7 Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq X$ je **baza neke topologije** na skupu X ako i samo ako je kolekcija $\{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X.

Teorema 1.2.8 Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je baza neke topologije na skupu X ako i samo ako je ispunjeno sledeće:

(BN1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(BN2) Za svaka dva $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ postoji podkolekcija $\{B_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ tako da je $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Dokaz. Dokaz je jednostavan i tehnički, može se naći u ([10], strana 58). □

Primer 1.2.9 Uobičajena topologija na $\mathbb{R}$
Familija $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \land a < b\}$ je baza neke topologije na skupu $\mathbb{R}$. Proverićemo da li važe uslovi (BN1 i BN2) teoreme 1.2.8. S obzirom da je $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, uslov (BN1) je zadovoljen.

Za $a = \max\{a_1, a_2\}$ i $b = \min\{b_1, b_2\}$ imamo jednakost

$$(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = \begin{cases} \emptyset, & a \geq b \\ (a, b), & a \leq b \end{cases}$$

Pa je zadovoljen i uslov (BN2). Ovu topologiju označavamo sa $\mathcal{O}_{uob}$.

Definicija 1.2.10 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kolekcija $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **podbaza topologije** $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe uslovi:

(PB1) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$ tj. elementi podbaze su otvoreni skupovi

(PB2) Familija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$ je baza topologije $\mathcal{O}$.

Važi i sledeća

Teorema 1.2.11 Neka je X neprazan skup a kolekcija $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ takva da je $\bigcup \mathcal{S} = X$. Tada važi

a) Familija $\mathcal{B}$ svih konačnih preseka elemenata kolekcija $\mathcal{S}$ je baza neke topologije $\mathcal{O}$ na X, a $\mathcal{S}$ je njena podbaza.

b) $\mathcal{O}$ je najmanja topologija koja sadrži kolekciju $\mathcal{S}$.

Dokaz. Dat je u ([10], strana 63). □

Važna osobina koju mogu imati topološki prostori je druga aksioma prebrojivosti. Uvodimo je sledećom definicijom.

Definicija 1.2.12 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava **drugu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako postoji njegova baza $\mathcal{B}$ takva da je $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$.

Primer 1.2.13 Uobičajena topologija na $\mathbb{R}$ ima prebrojivu bazu
Zaista, kolekcija $\mathcal{B} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \wedge p < q\}$ je prebrojiva baza uobičajene topologije, što nije teško proveriti.

Za skupove sa drugom aksiomom prebrojivosti važi sledeća

Teorema 1.2.14 (Lindelef) Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$. Tada važi:

a) Ako je $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$, tada postoji prebrojiv podskup $J \subseteq I$ tako da je

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in J} O_i.$$

b) Ako je $\mathcal{B}_1$ neka druga baza topologije $\mathcal{O}$, tada postoji prebrojiv podskup $\mathcal{B}_1' \subseteq \mathcal{B}$ koji je takođe baza topologije $\mathcal{O}$.

Dokaz. Može se naći u ([10], strana 66). □

Definišimo i okolinu tačke.

Definicija 1.2.15 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je **okolina tačke** x ako i samo ako postoji otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ tako da je ispunjeno $x \in O \subseteq A$. Familiju svih okolina tačke x označavamo sa $\mathcal{U}(x)$.

Sledeća teorema karakteriše otvorenost preko okolina.

Teorema 1.2.16 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada je skup $A \subseteq X$ otvoren ako i samo je okolina svake svoje tačke.

Dokaz. Direktno na osnovu definicije. □

Bazu okolina uvodimo sledećom definicijom.

Definicija 1.2.17 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je **baza okolina** tačke x ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(B01) $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$;

(B02) Za svaku U okolinu tačke x postoji $B \in \mathcal{B}(x)$ tako da važi $B \subseteq U$.

Topološki prostor zadovoljava **prvu aksiomu prebrojivosti** ako i samo ako u svakoj tački $x \in X$ postoji prebrojiva baza okolina.

Jednostavno se pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.2.18 Ako topološki prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti.

Narednom definicijom uvodimo još neke pojmove i osobine tačaka topološkog prostora.

Definicija 1.2.19 Neka je $(X, \mathcal{O}$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je **unutrašnja tačka** skupa A ako i samo postoji otvoren skup O tako da je ispunjeno $x \in O \subseteq A$. Dalje x je **spoljašnja tačka** skupa A ako i samo ako postoji otvoren skup O tako da važi $x \in O \subseteq X \setminus A$. Tačka $x \in X$ je **rubna tačka** skupa A ako i samo ako svaki otvoren skup koji je sadrži seče i A i $X \setminus A$. Skup unutrašnjih (spoljašnjih)tačaka skupa A zovemo **unutrašnjost (spoljašnjost)** skupa A i označavamo ga sa $\mathrm{Int}(A)$ $(\mathrm{Ext}(A))$.

Naredna teorema navodi neka svojstva operatora unutrašnjosti skupa koja se jednostavno dokazuju.

Teorema 1.2.20 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada važi:

a) Unutrašnjost skupa A je najveći otvoren skup sadržan u A;

b) Skup A je zatvoren ako i samo ako je jednak svojoj unutrašnjosti;

c) Operator unutrašnjosti je monoton, tj. iz $A \subseteq B$ sledi $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$. $\square$

Definicija 1.2.21 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tačka $x \in X$ je **adherentna tačka** skupa A ako i samo ako svaka okolina te tačke seče skup A. Tačka $x \in X$ je **tačka nagomilavanja** skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup $A \setminus \{x\}$. Skup adherentih tačaka (tačaka nagomilavanja) skupa A naziva se **adherencija (izvod)** skupa A i označava se sa $\overline{A}$ (A').

Jednostavno se pokazuju i sledeće osobine operatora adherencije i izvoda.

Teorema 1.2.22 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve $A, B \subseteq X$ važi:

a) $\overline{A}$ je najmanji zatvoren nadskup skupa A;

b) Skup A je zatvoren ako i samo ako je jednak svojoj adherenciji;

c) $A \subseteq B$ implicira $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

d) $\overline{A} = A \cup A'$;

e) Skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja tj. ako je $A' \subseteq A$. $\square$

Definišemo i pojam separabilnosti koji će nam biti neophodan za definisanje poljskih prostora.

Definicija 1.2.23 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $D \subseteq X$ je **gust u** X ako i samo ako je $\overline{D} = X$. Prostor $(X, \mathcal{O})$ je **separabilan** ako i samo ako postoji prebrojiv, gust skup $D \subseteq X$.

Naredna teorema se jednostavno dokazuje, a u mnogome olakšava ispitivanje separabilnosti.

Teorema 1.2.24 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}$. Tada je skup $D \subseteq X$ gust ako i samo je $B \cap D \neq \emptyset$, za svaki neprazan skup $B \in \mathcal{B}$. Specijalno, D je gust ako i samo seče svaki neprazni otvoren skup $O \in \mathcal{O}$.

$\square$

Primer 1.2.25 Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je separabilan
Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, gust u $\mathbb{R}$. Zaista, bazu uobičajene topologije čine otvoreni intervali, a kako između svaka dva realna broja postoji racionalan broj, $\mathbb{Q}$ seče svaki otvoreni interval.

U redovima koji slede uvodimo aksiome separacije koje, na određen način izražavaju stepen sličnosti topoloških prostora metričkim.

Definicija 1.2.26 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je:

- T_0**-prostor** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoren skup O koji sadrži tačno jednu od njih.
- T_1**-prostor** ako i samo ako za svaki par različitih tačaka $x, y \in X$ postoji otvoren skup O tako da je $x \in O \wedge y \notin O$.
- T_2**-prostor (Hausdorfov)** ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1, O_2 takvi da važi $x \in O_1$ i $y \in O_2$.

Definicija 1.2.27 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je:

- **regularan** ako i samo ako za svaki zatvoren skup F i svaku tačku x koja mu ne pripada postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1, O_2 takvi da je $x \in O_1,\ F \subseteq O_2$.
- **normalan** ako i samo ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da važi $F_1 \subseteq O_1$ i $F_2 \subseteq O_2$.

Definicija 1.2.28 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je:

- T_3**- prostor** ako i samo ako je regularan T_1-prostor.
- T_4**- prostor** ako i samo ako je normalan T_1- prostor.

Među ovim aksiomama postoji linearna hijerarhija - ide se od manjih ka većim zahtevima. Konkretno, važi sledeća

Teorema 1.2.29 Važe sledeće tvrdnje:

- Svaki T_4-prostor je T_3-prostor.
- Svaki T_3-prostor je Hausdorfov prostor.
- Svaki Hausdorfov prostor je T_1-prostor.
- Svaki T_1 je ujedno i T_0-prostor. $\square$

Napomenimo da, za svako $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ postoji topološki prostor koji zadovoljava aksiomu T_i a ne zadovoljava T_{i+1}.

U radu sa poljskim prostorima često ćemo koristiti pojam neprekidnosti, pa čitaoca podsećamo na osnovne teoreme vezane za neprekidnost preslikavanja proizvoljnih topoloških prostora.

Definicija 1.2.30 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je:

- **Neprekidna u tački** x_0 ako i samo ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 tako da važi $f[U] \subseteq V$.
- **Neprekidna** ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački skupa X.

Uslov neprekidnosti funkcije $f : X \to Y$ može da se iskaže korišćenjem različitih pojmova - otvorenog, zatvorenog skupa, baze i podbaze. Preciznije o tome u sledećoj teoremi čiji se dokaz može naći u ([10], strane 98–99).

Teorema 1.2.31 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) Funkcija f je neprekidna.

b) Za svaki otvoren skup $O \subseteq Y$ skup $f^{-1}[O] \subseteq X$ je otvoren.

c) Za svaki zatvoren skup $F \subseteq Y$ skup $f^{-1}[F]$ je zatvoren.

d) Za svaki skup $A \subseteq X$ važi $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

e) Ako je $\mathcal{B}_Y$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $B \in \mathcal{B}_Y$ skup $f^{-1}[B] \subseteq X$ otvoren.

f) Ako je $\mathcal{P}_Y$ proizvoljna podbaza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $P \in \mathcal{P}_Y$ skup $f^{-1}[P] \subseteq X$ otvoren. $\square$

Teorema 1.2.32 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topološki prostori a $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ neprekidne funkcije. Tada je kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna. $\square$

Prethodno definisan pojam neprekidnosti preslikavanja omogućava nam da, dokazivanjem sledeće teoreme, uvedemo novi pojam.

Teorema 1.2.33 Neka je $\{Y_i : i \in I\}$ kolekcija topoloških prostora i $f_i : X \to Y_i$ odgovarajuća kolekcija funkcija. Tada postoji najmanja topologija $\mathcal{O}$ na X za koju su sve funkcije $f_i : X \to Y_i$ neprekidne.

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.2.31, tačnije ekvivalencije (1-2), takva topologija mora sadržavati skupove oblika $f_i^{-1}[U]$, gde je U otvoren skup u Y_i, tj. mora biti ispunjeno $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}[U] : U \subseteq Y_i, U \text{ je otvoren}, i \in I\} \subseteq \mathcal{O}$. Prema teoremi 1.2.11, tražena topologija ima $\mathcal{S}$ kao podbazu. $\square$

Definicija 1.2.34 Topologija $\mathcal{O}$ iz teoreme 1.2.33 naziva se **topologija generisana funkcijama** f_i.

Čitalac verovatno zna (primer 1.3.8) da je metrikom $d(x, y) = |x - y|$ definisana uobičajena topologija na $\mathbb{R}$. Ova metrika definiše topologiju i na zatvorenom intervalu $[0, 1]$. Na primer, važi (u prostoru $([0, 1], d)$): $B(0, \frac{1}{2}) = [0, \frac{1}{2})$. Sada možemo da uvedemo novu aksiomu separacije:

Definicija 1.2.35 Za topološki prostor (X, O) kažemo da je:

- **kompletno regularan** ako i samo za svaku tačku $x \in X$i neprazan zatvoren skup F koji je ne sadrži postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ takva da je $f(x) = 0$ i $f[F] = 1$.

- $T_{3\frac{1}{2}}$**-prostor** ako i samo je kompletno regularan T_1 prostor.

Sledeća teorema, čiji se dokaz može naći u ([10], strane 102-104), opravdava naziv $T_{3\frac{1}{2}}$- prostor.

Teorema 1.2.36 Svaki $T_{3\frac{1}{2}}$- prostor je T_3-prostor. Svaki T_4 je ujedno i $T_{3\frac{1}{2}}$- prostor. $\square$

Napomenimo da su klase $T_3, T_4, T_{3\frac{1}{2}}$ tri različite klase topoloških prostora.

Pored neprekidnih, biće nam potrebna otvorena i zatvorena preslikavanja, pa ih uvodimo sledećom definicijom.

Definicija 1.2.37 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je

- **otvoreno** ako i samo je za svako $O \subseteq \mathcal{O}_X$ skup $f[O] \subseteq Y$ otvoren.
- **zatvoreno** ako i samo je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$ skup $f[F] \subseteq Y$ zatvoren.

Homeomorfizam uvodimo sledećom definicijom

Definicija 1.2.38 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je **homeomorfizam** ako i samo su ispunjeni sledeći uslovi:

- f je bijekcija;
- f je neprekidno;
- f^{-1} je neprekidno.

Koristićemo i sledeću jednostavnu teoremu.

Teorema 1.2.39 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. f je bijekcija;
2. f je otvoreno;
3. f je zatvoreno. $\square$

Invarijante neprekidnih preslikavanje su osobine koje se pri neprekidnoj sirjekciji prenose sa domena na kodomen. Preciznije rečeno:

Definicija 1.2.40 Osobina $\mathcal{P}$ topoloških prostora je **invarijanta neprekidnih preslikavanja** ako i samo ako za svaka dva topološka prostora $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i svaku neprekidnu sirjekciju $f : X \to Y$ važi: Ako prostor X ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i prostor Y ima osobinu $\mathcal{P}$. Invarijante homeomorfizma zovemo **topološke osobine**.

U sledećoj teoremi navedene su neke invarijante preslikavanja.

Teorema 1.2.41 Separabilnost je invarijanta neprekidnih preslikavanja. Sve aksiome separabilnosti i druga aksioma prebrojivosti su topološke osobine. □

U proizvoljnom topološkom prostoru može se definisati i granica niza elemenata.

Definicija 1.2.42 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je **granica niza** $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji prirodan broj n_0 takav da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Niz koji ima granicu zovemo **konvergentan** niz.

Niz u opštem slučaju ne mora da ima jedinstvenu granicu. Međutim, važi (i jednostavno se dokazuje):

Teorema 1.2.43 U Hausdorfovom prostoru niz može da ima najviše jednu granicu. □

Ako niz $\langle x_n \rangle$ ima jedinstvenu granicu a, pišemo $\lim x_n = a$.
Često će biti korišćena i sledeća

Teorema 1.2.44 Ako je x granica nekog niza tačaka skupa A, onda je $x \in \overline{A}$.

Definicija 1.2.45 Niz $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je **stacionaran** ako i samo ako postoji tačka a i prirodan broj n_0 tako da je $x_n = a$ za sve $n \geq n_0$.

U svakom topološkom prostoru stacionarni nizovi su konvergentni.

Primer 1.2.46 U prostoru sa diskretnom topologijom stacionarni nizovi jedini konvergiraju Neka je $(X, \mathcal{P}(X))$ prostor sa diskretnom topologijom. Neka je $\langle x_n \rangle$ konvergentan niz čija je granica a. Sledstveno definiciji 1.2.42, za svaku okolinu tačke a svi tačke skupa X osim njih najviše konačno mnogo pripadaju toj okolini. Uzimimo za okolinu singlton $\{a\}$. Dakle, postoji prirodan broj n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ važi $x_n \in \{a\}$ tj. $x_n = a$ dakle niz je stacionaran.

Definicija 1.2.47 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$ proizvoljna tačka. Funkcija $f : X \to Y$ je **nizovno (sekvencijalno) neprekidna u tački** x_0 ako i samo za svaki niz $\langle x_n \rangle$ u prostoru X iz $\lim x_n = x_0$ sledi $\lim f(x_n) = f(x_0)$

Lako se pokazuje da je sekvencijalna neprekidnost slabija od neprekidnosti, tj. da važi sledeća

Teorema 1.2.48 Ako je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački $x_0 \in X$, onda je i sekvencijalno neprekidna u toj tački. $\square$

Narednom teoremom (koja se jednostavno dokazuje) rešavamo problem prenošenja topološke strukture na neki podskup topološkog prostora.

Teorema 1.2.49 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ neprazan skup. Tada je kolekcija $\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A. $\square$

Definicija 1.2.50 Za topologiju $\mathcal{O}_A$ definisanu u prethodnoj teoremi kažemo da je **indukovana** topologijom $\mathcal{O}$. Topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ je **potprostor** prostora $(X, \mathcal{O})$. Ako je A otvoren (zatvoren), za odgovarajući potprostor kažemo da je **otvoren (zatvoren)**.

Teorema 1.2.51 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ neprazan skup. Ako sa $\mathcal{F}_A$ označimo familiju svih zatvorenih skupova prostora $(A, \mathcal{O}_A)$, onda važi:

a) $\mathcal{F}_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$;

b) $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{O}$ ako i samo ako je A otvoren;

c) $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}$ ako i samo je A zatvoren. $\square$

Nasledne osobine definišemo u daljem tekstu.

Definicija 1.2.52 Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **nasledna** ako i samo ako za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: Ako $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$, onda svaki njegov potprostor ima tu osobinu.

Topološku osobinu $\mathcal{P}$ je **nasleđuju otvoreni skupovi** ako i samo ako za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: Ako $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$, onda svaki njegov otvoren potprostor ima tu osobinu. Analogno definišemo osobinu koju **nasleđuju zatvoreni skupovi**.

U teoremi koja sledi navodimo neke nasledne osobine.

Teorema 1.2.53 Važi:

- Aksiome separacije $T_i,\ i \leq 3\frac{1}{2}$ su nasledne osobine.

- Osobina ”zadovoljavati drugu aksiomu prebrojivosti” je nasledna.
- Separabilnost nasleđuju otvoreni potprostori.
- Osobinu T_4 nasleđuju zatvoreni potprostori. $\square$

Definicija 1.2.54 Neka su X, Y neprazni skupovi i $f : X \to Y$ i $A \subseteq X$. Za preslikavanje $g : A \to f[A]$ definisano sa $g(x) = f(x)$ za sve $x \in A$ kažemo da je **sirjektivna restrikcija** preslikavanja f na A, u oznaci $f|A$.

Ako su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori, preslikavanje $f : X \to Y$ je **potapanje** ako i samo je sirjektivna restrikcija $f|X$ homeomorfizan.

U proveri da li je neko preslikavanje potapanje, najčešće se koristi sledeća

Teorema 1.2.55 Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Tada je ispunjeno:

- Ako je f neprekidna otvorena injekcija, onda je potapanje.
- Ako je f neprekidna zatvorena injekcija, onda je potapanje.

Važnu klasu topoloških prostora čine povezani prostori.

Definicija 1.2.56 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **povezan** ako i samo skup X ne može da se predstavi kao unija dva neprazna, disjunktna otvorena skupa. Inače je **nepovezan**

Koristićemo teoremu

Teorema 1.2.57 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi.

- $(X, \mathcal{O})$ je povezan
- U prostoru $(X, \mathcal{O})$ ne postoji neprazan otvoren i zatvoren skup različit od X.

Definicija 1.2.58 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **nuladimenzionalan** ako i samo ako je T_2 i postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ koja se sastoji od skupova koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni.

Važna osobina topoloških prostora je kompaktnost koju uvodimo definicijama koje slede.

Definicija 1.2.59 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Familija $\{O_i : i \in I\}$ podskupova skupa X je **pokrivač** skupa A ako i samo ako je $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Ako su pritom svi skupovi O_i otvoreni, govorimo o **otvorenom pokrivaču**.

Definicija 1.2.60 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **kompaktan** ako i samo svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži otvoren pokrivač.

Lako se pokazuje da važi sledeća

Teorema 1.2.61 Kompaktnost je invarijanta neprekidnih preslikavanja, pa i topološka osobina. $\square$

Uvešćemo i pojam kompaktnog skupa.

Definicija 1.2.62 Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Skup A je **kompaktan skup** ako i samo ako je potprostor $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan topološki prostor. Skup kompaktnih podskupova datog prostora X označićemo sa $K(X)$.

Pokazuje se da ovu deficiju možemo zameniti sledećom teoremom i time karakterisati kompaktnost skupova preko otvorenih pokrivača, kao što sledi.

Teorema 1.2.63 Skup A je kompaktan u prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako i samo ako svaki njegov otvoren pokrivač sadrži konačan potpokrivač.

O nasleđivanju kompaktnosti govori sledeća teorema.

Teorema 1.2.64 Kompaktnost je nasledna prema zatvorenim skupovima. $\square$

Primer 1.2.65 U prostoru sa diskretnom topologijom konačni i samo konačni skupovi su kompaktni

Lako se pokazuje da su u svakom prostoru konačni podskupovi kompaktni. U prostoru sa diskretnom topologijom važi i obratno - konačni skupovi su jedini kompaktni. Neka je $(X, \mathcal{P}(X))$ prostor sa diskretnom topologijom i u njemu kompaktan skup $A \subseteq X$. S obzirom da je $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, skup$\{\{a\} : a \in A\}$ je otvoren pokrivač skupa A koji ima konačan pokrivač, pa postoje $a_1, \ldots a_n \in A$ takvi da je $A \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$, dakle A je konačan.

S obzirom da ćemo se prilikom proučavanja poljskih prostora veoma često ograničavati na Hausdorfove, ovom prilikom dajemo nekoliko rezultata koji karakterišu kompaktnost u Hausdorfovim prostorima.

Teorema 1.2.66 Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hausdorfov prostor i $A \subseteq X$ kompaktan skup. Tada je skup A je zatvoren. $\square$

Teorema 1.2.67 Neka je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan Hausdorfov prostor. Tada je skup $A \subseteq X$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren. Svaki kompaktan Hausdorfov prostor je T_4-prostor. $\square$

Pomenimo i poznatu Hajne - Borelovu teoremu

Teorema 1.2.68 (Hajne-Borel) Podskup A prostora[2] $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je kompaktan ako i samo ako je ograničen. $\square$

Osobine preslikavanja kompaktnih prostora izlažemo u sledećoj teoremi.

Teorema 1.2.69 Važe sledeća tvrđenja:

a) Neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup na kompaktan skup.

b) Neprekidna realna funkcija nad kompaktnim prostorom dostiže svoj maksimum i minimum. $\square$

Teorema 1.2.70 Neka je f neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora $(X, \mathcal{O}_X)$ u Hausdorfov prostor $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Tada je ispunjeno:

a) f je zatvoreno preslikavanje.

b) Ako je f bijekcija, onda je homeomorfizam.

c) Ako je f injekcija, onda je potapanje. $\square$

S obzirom da će nam za konstrukciju poljskih prostora od posebnog značaja biti proizvod topoloških prostora, čitaoca ovom prilikom podsećamo na definiciju tihonovskog proizvoda, neka jednostavna svojstva i multiplikativne osobine.

Definicija 1.2.71 **Direktan proizvod** familije skupova $\{X_i : i \in I\}$ je skup svih funkcija $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ sa osobinom $f(i) \in X_i$. Drugim rečima:

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : f(i) \in X_i\}.$$

[2] ovo tvrđenje važi i za prostore $\mathbb{R}^n$

Ovaj skup je neprazan, na osnovu aksiome izbora. Ukoliko su svi skupovi jednaki, pišemo jednostavno X^I.

Definicija 1.2.72 Za $j \in J$ preslikavanje $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ dato sa $\pi_j(f) = f(j)$ zovemo **projekcija** proizvoda na prostor X_j.

Topologiju Tihonova uvodimo sledećom teoremom.

Teorema 1.2.73 Neka je I neprazan skup, a $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada je

a) Kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\prod X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $i \in I$ proizvoljan indeks, a $O_i \in \mathcal{O}_i$ otvoren skup u X_i, podbaza je neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu $\prod X_i$.

b) Kolekcija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i\in K} \pi_i^{-1}[O_i] : K \subseteq I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge (\forall i \in K)(O_i \in \mathcal{O}_i)\}$$

je baza topologije $\mathcal{O}$. □

Definicija 1.2.74 Topologiju $\mathcal{O}$ na proizvodu topoloških prostora, uvedenu u prethodnoj teoremi zovemo **topologija Tihonova**. Za prostor $\prod X_i$ kažemo da je (Tihonovski) **proizvod** prostora $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$.

Jednostavno se dokazuje sledeća teorema, koju ćemo nekoliko puta koristiti.

Teorema 1.2.75 Uz pretpostavke i oznake uvedene u teoremi 1.2.73 važi:

a) Projekcije $\pi_j : \prod X_i \to X_j$ su neprekidne, otvorene sirjekcije.

b) Ako je $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostor, tada je preslikavanje $f : Y \to \prod X_i$ neprekidno ako i samo je kompozicija $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ neprekidna za svako $i \in I$. □

Definicija 1.2.76 Topološka osobina $\mathcal{P}$ je **multiplikativna (konačno, prebrojivo multiplikativna)** ako i samo ako je proizvod svake familije (prebrojive, konačne familije) topoloških prostora, od kojih svaki ima osobinu $\mathcal{P}$, prostor sa osobinom $\mathcal{P}$.

Primetimo da se zahteva da $\mathcal{P}$ bude topološka osobina. U narednoj teoremi navešćemo neke multiplikativne osobine.

Teorema 1.2.77 Važe sledeća tvrđenja:

- Aksiome separacije $T_k, k = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ su multiplikativne.
- Druga aksioma prebrojivosti je prebrojivo multiplikativna.
- Separabilnost je prebrojivo multiplikativna.
- Povezanost je multiplikativna. $\square$

Teorema 1.2.78 (Tihonov) Proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih prostora je kompaktan prostor.

1.3 Uvodni pojmovi iz topologije- metrički prostori

Sledećom definicijom uvodimo metriku i osnovne pojmove u metričkim prostorima. Za tvrđenja koja nisu dokazana, čitaoca upućujemo na [10].

Definicija 1.3.1 Neka je X neprazan skup i neka je $d : X^2 \to [0, \infty)$ funkcija sa sledećim osobinama (za sve $x, y, z \in X$):

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

naziva se **metrika** na X. Osobinu (M3) zovemo **nejednakost trougla**. Uređeni par (X, d) zovemo metrički prostor a broj $d(x, y)$ **rastojanje** tačaka x i y. Skup $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$ zovemo **lopta** sa centrom u x i poluprečnikom r.

Lako se, koristeći osobine (M1-M3) iz definicije 1.3.1 pokazuje sledeća

Teorema 1.3.2 Neka je (X, d) **metrički prostor**. Tada je kolekcija $\mathcal{B}_d = \{B(x, r) : x \in X \wedge r > 0\}$ baza neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X. $\square$

Definicija 1.3.3 Za topologiju $\mathcal{O}_d$ definisanu u prethodnoj teoremi kažemo da je **određena** (indukovana) **metrikom** d.

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **metrizabilan** ako i samo ako postoji metrika d koja indukuje topologiju $\mathcal{O}$ tj. važi $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Primer 1.3.4 Trivijalna metrika indukuje diskretnu topologiju

Neka je X neprazan skup. Funkcija $d_{01} : X^2 \to [0, \infty)$ definisana sa:

$$d_{01}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Zadovoljava uslove (M1-M3) iz definicije 1.3.1, što se trivijalno proverava, pa je reč o metrici. Zovemo je **01-metrika**.

Za proizvoljno $x \in X$ lopta $B(x, \frac{1}{2}) = \{y \in X : d_{01}(x, y) < \frac{1}{2}\} = \{x\}$. Dakle, $\mathcal{B}_d \supseteq \{\{x\} : x \in X\}$, pa na osnovu primera 1.2.6 jasno je da važi $\mathcal{O}_d = X$. Dakle, prostor sa diskretnom topologijom je metrizabilan.

U metričkim prostorima možemo "meriti" skupove. Sledećom definicijom uvodimo dijametar skupa.

Definicija 1.3.5 Neka je dat metrički prostor (X, d) i skup $A \subseteq X$. Definišemo **dijametar skupa** A:

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

(Po definiciji je $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$). Skup je **ograničen** ako ima konačan dijametar.

Primetimo da je $\mathrm{diam}(B(x, r)) \leq 2r$. Može se jednostavno pokazati da je skup ograničen ako i samo ako postoji lopta koja ga sadrži.

Definicija 1.3.6 Neka je X neprazan skup. Za metrike d_1 i d_2 na X kažemo da su **uniformno ekvivalentne** ako i samo ako postoje brojevi $k, h > 0$ takvi da za sve $x, y \in X$ važi $d_1(x, y) \leq kd_2(x, y)$ i $d_2(x, y) \leq hd_1(x, y)$.

Lako se pokazuje da relacija "biti uniformno ekvivalentan sa" u skupu svih metrika na skupu X ima svojstvo refleksivnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti.

Za uniformno ekvivalentne metrike važi sledeća teorema čiji se dokaz može naći u ([10], strana 71).

Teorema 1.3.7 Uniformno ekvivalentne metrike indukuju istu topologiju. $\square$

Primer 1.3.8 Ekvivalentne topologije na $\mathbb{R}^n$. Za proizvoljne tačke $x, y \in \mathbb{R}^n$ gde je $x = (x_1, \ldots x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ i $p \geq 1$ definišemo preslikavanja:

$$d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ i } d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\}.$$

Može se pokazati da su ova preslikavanja zaista metrike. Za proizvoljno $p \geq 1$ imamo:

$$d_p(x,y) \leq (n(d_\infty(x,y))^p)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{p}} d_\infty(x,y)$$

a takođe

$$d_\infty(x,y) = ((d_\infty(x,y))^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = d_p(x,y).$$

Sve metrike oblika d_p su uniformno ekvivalentne d_∞, pa su uniformno ekvivalentne međusobno i, na osnovu teoreme 1.3.7, indukuju istu topologiju.

Specijalno, za $n = 1$ metrika $d(x,y) = |x-y|$ indukuje uobičajenu topologiju.

Za poljske prostore biće posebno značajne ograničene metrike. Uvodimo ih sledećom definicijom.

Definicija 1.3.9 Metrika d na skupu X je **ograničena** ako i samo ako postoji realan broj $M > 0$ tako da je ispunjeno $d(x,y) < M$ za sve $x, y \in X$. (kratko pišemo $d < M$).

Svakom metrizabilnom prostoru možemo pridružiti ograničenu metriku koja indukuje istu topologiju. Preciznije, važi:

Teorema 1.3.10 Svaki metrički prostor je metrizabilan ograničenom metrikom.

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O})$ metrički prostor. Tada postoji metrika d takva da indukuje topologiju $\mathcal{O}$. Pokazuje se da je preslikavanje $d' : X^2 \to [0, \infty)$ dato sa

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

(očigledno ograničena, $d < 1$) metrika i da indukuje istu topologiju kao i d, dakle $\mathcal{O}$. □

U metričkim, pa i metrizabilnim prostorima važi sledeća

Teorema 1.3.11 Metrički prostor (X, d) je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

Dokaz. Videti u ([10], strane 87-88) □

Definicija 1.3.12 Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ i $A \subseteq X$ neprazan skup. **Rastojanje tačke** x **od skupa** A definišemo na sledeći način:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Ova definicija je dobra jer je skup $\{d(x, a) : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ neprazan i ograničen odozdo (jedna donja granica je 0, na osnovu definicije metrike) pa ima infimum. Skup $\{x \in X : d(x, A) < r\}$ označavamo sa $B(A, r)$.

Za metričke prostore važi sledeća teorema, čiji se dokaz može naću ([10], strana 96):

Teorema 1.3.13 Svaki metrički (pa i metrizabilni) topološki prostor je T_4-prostor. $\square$

U metričkom prostoru uvodimo uniformnu neprekidnost, kao što sledi.

Definicija 1.3.14 Ako funkcija $f : (X, d) \to (Y, d')$ ima sledeću osobinu: za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $d(x, y) < \delta$ sledi $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, f je **uniformno neprekidna funkcija**.

Jednostavno se pokazuje

Teorema 1.3.15 Ako je f uniformno neprekidna funkcija, ona je i neprekidna u svakoj tački (X, d). $\square$

Bliže o konvergenciji nizova u metričkom prostoru govori sledeća teorema, koja se jednostavno dokazuje.

Teorema 1.3.16 Ako je (X, d) metrički prostor, važi:

a) Ako je $\langle x_n \rangle$ niz u X i $x \in X$, onda je $\lim x_n = x$ ako i samo ako je

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(d(x_n, x) < \varepsilon).$$

b) Ako postoji, granica niza je jedinstvena.

c) Svaki konvergentan niz je ograničen (postoji $M > 0$ takav da važi $d(x_i, x_j) < M$ za x_i, x_j članove niza $\langle x_n \rangle$).

Pokazuje se da u metričkom prostoru važi sledeće svojstvo koje ćemo često koristiti.

Lema 1.3.17 U metričkom prostoru (X, d), za svaki ograničeni podskup $A \subseteq X$ važi: $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$. $\square$

Navešćemo i nekoliko teorema o kompaktnosti u metričkim prostorima.

Definicija 1.3.18 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je

- **nizovno kompaktan** ako i samo svaki niz u skupu X ima konvergentan podniz.
- **Prebrojivo kompaktan** ako i samo ako svaki beskonačan podskup skupa X ima tačku nagomilavanja.

Pokazuje se da u metričkim prostorima važi sledeća

Teorema 1.3.19 Neka je (X, d) metrički prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:

- Prostor (X, d) je kompaktan.
- Prostor (X, d) je nizovno kompaktan.
- Prostor (X, d) je prebrojivo kompaktan. $\square$

Definicija 1.3.20 Neka je (X, d) metrički prostor i $\varepsilon > 0$. Svaki konačan skup $K \subseteq X$ takav da je $X = \bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$ zovemo ε**–mreža**. Prostor (X, d) je **totalno ograničen** ako i samo ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ ima ε–mrežu.

Teorema 1.3.21 Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako je kompletan i totalno ograničen. $\square$

Teorema 1.3.22 Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan. Kompaktan podskup metričkog prostora je zatvoren i ograničen. $\square$

Najzad, može se pokazati sledeća teorema, koju ćemo koristiti.

Teorema 1.3.23 Ako je $f : (X, d) \to (Y, d')$ nepredkidna funkcija, a (X, d) kompaktan prostor, f je uniformno neprekidna funkcija.

Dokaz. Videti u [3], zadatak 14, strane 96–97. $\square$

S obzirom da su poljski prostori metrizabilni, u daljem tekstu navodimo nekoliko teorema o metrizabilnosti.

Teorema 1.3.24 Metrizabilnost je topološka osobina.

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ metrički prostor i d_X metrika na skupu X koja indukuje topologiju $\mathcal{O}_X$. Neka je $(Y, \mathcal{O}_Y)$ prostor homeomorfan prostoru X i $f : Y \to X$ proizvoljan homeomorfizam. Definišimo preslikavanje $d_Y : Y^2 \to [0, \infty)$ na sledeći način:

$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2)).$$

Pokazaćemo da je ovo preslikavanje metrika na Y. Zaista, iz uslova $d_Y(y_1, y_2) = 0$ dobijamo $d_X(f(y_1), f(y_2)) = 0$, pa je $f(y_1) = f(y_2)$ iz čega je i $y_1 = y_2$ jer je f injekcija, pa je uslov (M1) ispunjen.Očigledno važi i uslov (M2), dok se nejednakost trougla trivijalno proverava. Lako se pokazuje i da d_Y generiše $\mathcal{O}_Y$. □

Teorema 1.3.25 Metrizabilnost je nasledna osobina.

Dokaz. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ i metriku d koja ga indukuje i proizvoljan neprazan skup $A \subseteq X$, funkcija $d_A = d|A^2$ metrika na A koja indukuje ovaj potprostor. □

Teorema 1.3.26 Metrizabilnost je prebrojivo multiplikativna osobina.

Dokaz. Neka je $\{(X_n, \mathcal{O}_n) : n \in \omega\}$ skup metrizabilnih topoloških prostora. Prema teoremi 1.3.10 postoje metrike $d_n : n \in \omega$ takve da je $d_n \leq 1$. Za proizvoljne elemente $f, g \in \prod X_n$ definišemo

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f(n), g(n))}{2^{n+1}}.$$

Može se pokazati (videti [10], strane 181-182) da je preslikavanje d zaista metrika i da indukuje topologiju Tihonova. □

Koristićemo i poznatu Urisonovu teoremu - dovoljan uslov za metrizabilnost topološkog prostora. Dokaz se može naći u [10], strana 183.

Teorema 1.3.27 (Metrizaciona teorema Urisona) Svaki $T_{3\frac{1}{2}}$– prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti je metrizabilan. □

U redovima koji slede definisaćemo važnu klasu metričkih prostora, kako za ovaj master rad, tako za funkcionalnu analizu u celini - kompletne prostore. Definišemo ih preko Košijevih nizova, kao što sledi.

Definicija 1.3.28 Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u prostoru X kažemo da je **Košijev niz** ako i samo ako važi sledeće:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geq n_0 \; d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

U narednoj teoremi navodimo neka svojstva Košijevih nizova.

Teorema 1.3.29 U metričkom prostoru (X, d) važi:

a) Svaki konvergentan niz je Košijev.

b) Ako Košijev niz ima konvergentan podniz, onda je i sam konvergentan.

c) Svaki Košijev niz je ograničen. □

Definicija 1.3.30 Metrički prostor (X, d) je **kompletan** ako i samo ako u njemu svaki košijev niz u X konvergira. Skup A je **kompletan** ako i samo ako je skup (A, d_A) kompletan.

Primer 1.3.31 Prostor sa $01-$ metrikom je kompletan
Neka je (X, d_{01}) diskretan topološki prostor i neka je $\langle x_n \rangle$ Košijev niz u ovom prostoru. Shodno definiciji 1.3.28, odredimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $m, n \geq n_0$ ispunjeno $d_{01}(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$. Tada, s obzirom na način na koji je 01– metrika definisana, za sve $m, n \geq n_0$ važi $x_m = x_n = x_{n_0}$, pa je niz stacionaran a kao takav i konvergentan.

Primer 1.3.32 Prostor $\mathbb{R}$ sa uobičajenom metrikom je kompletan
Neka je $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ Košijev realan niz. On je, na osnovu teoreme 1.3.29 (c), ograničen, pa postoji interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži sve članove ovog niza. Skup $[a, b]$ je zatvoren i ograničen u uobičajenoj topologiji pa je kompaktan, na osnovu Hajne- Borelove teoreme. On je, s obzirom na teoremu 1.3.19 i nizovno kompaktan pa dati Košijev niz ima konvergentan podniz a osnovu teoreme 1.3.29, on je i sam konvergentan.

Za kompletne metričke prostore važi sledeća

Teorema 1.3.33 (Kantor) Metrički prostor (X, d) je kompletan ako i samo ako svaki opadajući niz $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$ nepraznih, zatvorenih i ograničenih skupova, takav da je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam(F_n)} = 0$, ima neprazan presek.

Dokaz.

($\rightarrow$) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka je $\langle F_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ familija zatvorenih skupova sa navedenim osobinama. Odaberimo tačke $x_n \in F_n$ (primenom aksiome izbora). Dokažimo da je niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev. Neka je dato $\varepsilon > 0$. S obzirom da je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam(F_n)} = 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$. Za proizvoljne $m, n \geq n_0$ imamo da je $x_m, x_m \in F_{n_0} \rightarrow d(x_m, x_n) \leq \mathrm{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$ iz čega zaključujemo da je posmatrani niz Košijev pa i konvergentan. Neka je $\lim x_n = x$. Za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ podniz $\langle x_n : n \geq m\rangle$ niza $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ je niz u skup F_m i ima granicu x. Na osnovu teoreme 1.2.44, a imajući u vidu teoremu 1.2.22(b), jasno je da $x \in F_m$. Dakle, $x \in F_m$ za sve $m \in \mathbb{N}$ iz čega sledi da $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m \neq \emptyset$.

($\leftarrow$) Neka metrički prostor (X, d) zadovoljava dati uslov. Neka je, dalje $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev niz u prostoru X. Za skupove $A_n = \{x_k : k \geq n\}, n \in \mathbb{N}$ važi $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ i pokazaćemo da njihovi dijametri teže nuli. S obzirom da je dati niz Košijev, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ važi $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, iz čega sledi da je $\mathrm{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon$. Kako za svako $n \geq n_0$ važi $A_n \subseteq A_{n_0}$, imamo da je $\mathrm{diam}(A_n) < \varepsilon$, za $n \geq n_0$,pa je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(A_n) = 0$.

Za skupove $\overline{A_n}$ imamo $\overline{A}_1 \supseteq \overline{A}_2 \supseteq \dots$,a kako je, na osnovu leme 1.3.17, $\mathrm{diam}(A_n) = \mathrm{diam}(\overline{A}_n)$, njihovi dijametri teže nuli pa postoji tačka $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$. Pokazaćemo da $\lim x_n = x$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ bude ispunjeno $\mathrm{diam}(\overline{A}_n) < \varepsilon$, pa s obzirom da $x_n, x \in \overline{A}$ dobijamo $d(x_n, x) < \varepsilon$. □

Jednostavnom diskusijom, koristeći osobine Košijevog niza, dokazuje se sledeća

Teorema 1.3.34 Važi sledeće:

- Kompletan podskup metričkog prostora je zatvoren.
- Podskup kompletnog metričkog prostora je kompletan ako i samo ako je zatvoren. □

Važnu klasu kompletnih prostora čine prostori neprekidnih funkcija.

Teorema 1.3.35 Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Ako je skup $C(X)$ definisan na sledeći način:

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ je neprekidna i ograničena}\}$$

preslikavanje d dato sa $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ $(f, g \in C(X))$ je metrika na $C(X)$ i $(C(X), d)$ je kompletan.

Dokaz. Može se naći u [5], strane 99-100. □

Ako je X kompaktan skup, $C(X)$ je skup svih neprekidnih funkcija koje preslikavaju X u $\mathbb{R}$, s obzirom na teoremu 1.2.69 (b). U teoremi 1.3.35 dovoljno je skup $\mathbb{R}$ zameniti metrizabilnim prostorom Y i tako dobijamo prostor

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ je neprekidna i ograničena}\}.$$

sa metrikom $d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$ gde je d_Y metrika koja indukuje topologiju na Y.

Definisaćemo izometriju, koja nam treba za jednu od najvažnijih konstrukcija u funkcionalnoj analizi - kompletiranje.

Definicija 1.3.36 Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je **izometrija** ako i samo ako za svako $x_1, x_2 \in X$ važi:

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(y_1, y_2)$$

Prostori X i Y su **izometrični** ako i samo ako postoji sirjektivna izometrija $f : X \to Y$.

Definicija 1.3.37 Metrički prostor (Y, d_Y) je **kompletiranje** metričkog prostora (X, d_X) ako i samo ako važe sledeći uslovi:

- Y je kompletan;
- Postoji izometrija $f : X \to Y$;
- $f[X]$ je gust u prostoru Y.

Važi sledeća teorema, čiji se dokaz može naći u ([5], strane 105-109)

Teorema 1.3.38 Neka je prostor (X, d) nekompletan metrički prostor. Tada postoji kompletan metrički prostor $(\tilde{X}, \tilde{d})$ i funkcija $f : X \to f[X] \subseteq \tilde{X}$ koja je izometrija i $f[X]$ je gust u $\tilde{X}$. Kompletiranje je jedinstveno do na izometriju. □

O odnosu kompaktnosti i kompletnosti u metričkim prostorima govori sledeća

Teorema 1.3.39 Kompaktan metrički prostor je kompletan. Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je kompletan i totalno ograničen. □

Primer 1.3.40 Kantorov skup

Geometrijski, Kantorov skup, koji ćemo obeležavati sa $E_{1/3}$, formiramo tako što u prvom koraku iz intervala $[0,1]$ podeljenog na tri jednaka intervala, izostavljamo srednji, dakle $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, u drugom koraku se preostala dva intervala dele na tri jednaka dela, i u svakoj trisekciji izostavljamo srednji interval, u ovom slučaju $(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2})$ i $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2})$ itd. Ako sa A označimo uniju intervala koji se izostavljaju, jasno je da je A otvoren skup, pa je $E_{1/3} = [0,1] \setminus A$, zatvoren skup. Kantorov skup je kompaktan i kompletan kao zatvoren podskup kompaktnog i kompletnog skupa $[0,1]$ (jasno, sa uobičajenom metrikom).

Kantorov skup možemo okarakterisati preko ternarnog zapisa brojeva iz intervala $[0,1]$. Svako $x \in [0,1]$ ima ternarnu reprezentaciju:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Reprezentacija je jedinstvena, osim u slučaju $x = \frac{p}{3^{k_0}}$ $(p, k_0 \in \omega)$. Tada postoje dve mogućnosti njegovog zapisa:

a) $a_{k_0} \neq 0$ i $a_k = 0$ za sve $k > k_0$

b) na k_0 mestu je 0 ili 1 i zapis se nastavlja sa dvojakama.

Tada je Kantorov skup $E_{1/3}$ skup realnih brojeva iz intervala $[0,1]$ koji se u ternarnoj reprezentaciji mogu zapisati (ili u obliku a) ili b)) isključivo preko cifara 0 i 2. □

Najzad, uvešćemo i normirane prostore koji pored topološke imaju i vektorsku strukturu.

Definicija 1.3.41 Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Ako postoji preslikavanje $\|.\| : X \to [0, \infty)$ sa osobinama

(N1) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ za $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x \in X$;

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

Kažemo da je preslikavanje $\|.\|$ **norma** na X a uređen par $(X, \|.\|)$ **normiran prostor**.

Ako je $(X, \|\|)$ normiran prostor, tada je preslikavanje $d : X^2 \to [0, \infty)$ definisano sa $d(x,y) = \|x-y\|$ za sve $x, y \in X$, metrika na X. Kompletan, normiran prostor zovemo **Banahov prostor**.

Glava 2

Poljski prostori

2.1 Definicija, osnovne osobine

S obzirom da smo u uvodu definisali sve neophodne topološke pojmove, odmah dajemo definiciju poljskih prostora.

Definicija 2.1.1 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je **poljski** (engl. Polish space) ako je separabilan i kompletno metrizabilan (tj. ako postoji metrika d tako da je (X, d) kompletan metrički prostor i $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$).

Iz same definicije poljskih prostora uočava su u pitanju topološke strukture. Zahteva se egzistencija kompletne metrike a lako se može konstruisati beskonačno mnogo kompletnih metrika koje generišu istu topologiju. Ukoliko želimo da metričku strukturu stavimo u prvi plan, te posmatramo kompletne i separabilne metričke prostore, govorimo o **poljskim metričkim prostorima**.

Primer 2.1.2 Prebrojiv skup sa diskretnom topologijom je poljski

Neka je $(X, \mathcal{P}(X))$ prostor sa diskretnom topologijom i neka je X prebrojiv. Već smo videli (primer 1.3.8) da diskretnu topologiju indukujemo 01, odnosno trivijalnom metrikom: Ovo je i kompletna metrika, na osnovu primera 1.3.31. Najzad, ovaj prostor je i separabilan jer je metrizabilan i zadovoljava II aksiomu prebrojivosti (teorema 1.3.11), pa je i poljski.

Primer 2.1.3 Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je poljski

Zaista, ovaj prostor je kompletno metrizabilan (primer 1.3.32) i separabilan (primer 1.2.25), pa je stoga poljski. Takodje, zatvoreni intervali u $\mathbb{R}$ su poljski (separabilni, jer u preseku sa skupom $\mathbb{Q}$ daju prebrojiv, gust skup, dok je zatvoreni podskup kompletnog prostora je kompletan, teorema 1.3.34).

Primer 2.1.4 Prostori nizova l^p su poljski, za $p \geq 1$

U kategoriju kompletno metrizabilnih prostora trivijalno spadaju i kompletni metrički prostori. Da bi ovakvi topološki (odnosno metrički) prostori bili poljski, dovoljno je da budu separabilni. Pomenimo poljske prostore sa kojima se čitalac svakako sretao u topologiji, funkcionalnoj analizi, ali i teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina. Skup

$$l^p = \{\langle x_n : n \in \omega\rangle : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

sa metrikom $d(x,y) = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ za sve $x, y \in l^p$ je poljski prostor (videti [3], strane 189-192) nazivamo l^p-prostor, za $1 \leq p < \infty$[1]. Među ovim prostorima posebno je značajan prostor l^2. Pomenimo i c_0, prostor nizova koji konvergiraju ka nuli, snabdeven supremum normom, najzad prostor $L^p(\Omega)$, ugaoni kamen teorije mere.

Naredna teorema tvrdi da je osobina "biti poljski prostor" topološka. Dakle,

Teorema 2.1.5 Ako je $(X, \mathcal{O}_X)$ poljski prostor, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostor i $f : X \to Y$ homeomorfizam, tada je i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ poljski prostor.

Dokaz. Koristimo ideju dokaza teoreme 1.3.24. Kako je $(X, \mathcal{O}_X)$ poljski prostor, postoji (kompletna) metrika d_X takva da je $\mathcal{O}_{d_X} = \mathcal{O}_X$. Takođe, s obzirom da je f homeomorfizam, postoji i homeomorfizam $f : Y \to X$ tako da je $g = f^{-1}$. Zatim se na prostoru $(Y, \mathcal{O}_Y)$ definiše sledeća funkcija $d_Y : Y^2 \to [0, \infty)$, $d_Y(y_1, y_2) = d_X(g(y_1), g(y_2))$. Pokazuje se da je ovo metrika na Y koja indukuje topologiju $\mathcal{O}_Y$. Još ćemo pokazati da je kompletna.

Neka je, dakle, $\langle y_n : n \in \omega\rangle$ Košijev niz u Y. S obzirom na način na koji je metrika d_Y definisana, jasno je da je Košijev i niz $\langle g(y_n) : n \in \omega\rangle$. Međutim, ovaj niz je Košijev u (kompletnom prostoru) X pa je stoga konvergentan. Neka $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = x_0$. Lako se dokazuje da $\lim_{n\to\infty} y_n = f(x_0)$(jer je

[1]Prostor l_∞ nije poljski, jer nije separabilan.

$d_Y(y_n, f(x_0)) = d_X(x_n, g(f(x_0)) = d_X(x_n, x_0) < \varepsilon)$, pa niz konvergira. Separabilnost je topološka osobina, pa je i $(Y, \mathcal{O}_Y)$separabilan. Time je dokaz okončan.
$\square$

Primer 2.1.6 Kompletna metrizabilnost nije invarijanta neprekidnih preslikavanja
Neka je f preslikavanje prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ u prostor $Y = \{0, 1\}$ sa topologijom $\mathcal{O}_Y = \{\emptyset, Y\}$ dato sa $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, gde je $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ karakteristična funkcija skupa $\mathbb{Q}$ dakle uzima vrednost 1 ako $x \in \mathbb{Q}$, inače je 0. Pokazuje se (videti [10], primer 8, strana 107) da je f neprekidna, otvorena sirjekcija koja preslikava $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ u prostor $(Y, \mathcal{O}_Y)$ koji nije kompletno metrizabilan, jer nije ni T_0 prostor. Kompletna metrizabilnost nije invarijanta neprekidnih, zatvorenih preslikavanja, jer se ni metrizabilnost ne očuvava ovim preslikavanjima, videti [2], primer 1.4.17, strana 33.

Na osnovu prethodne teoreme i primera, formiramo tabelu.

	sep.	komp. met.	biti poljski prostor
neprekidno	+	−	−
neprekidno i otvoreno	+	−	−
neprekidno i zatvoreno	+	−	−
homeomorfizam	+	+	+

Primer 2.1.7 Potprostor $(0, 1)$ prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je poljski (!)
Na osnovu teoreme 2.1.5 dobijamo na prvi pogled neočekivan rezultat- prostor $(0, 1)$ (sa indukovanom topologijom) je, s obzirom da je homeomorfan $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$, poljski! Sa druge strane, prostor $(0, 1)$ sa uobičajenom metrikom nije kompletan - niz $\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\rangle$ je Košijev ali ne konvergira u $(0, 1)$. Međutim, treba imati na umu ono što smo već istakli- metrizabilnost kompletnom metrikom je topološka osobina i ne zavisi od konkretne metrike koja generiše topologiju.

S obzirom da smo pokazali da je osobina "biti poljski prostor" topološka, pitamo se da li je multiplikativna. Naredna teorema daje nam delimičan odgovor.

Teorema 2.1.8 Proizvod prebrojivo mnogo poljskih prostora je poljski prostor.

Dokaz. Neka su $X_n, n \in \omega$ separabilni prostori sa kompletnim metrikama $d_n, n \in \omega$, tako da važi $d_n \leq 1$. Ovim se, s obzirom na teoremu 1.3.10, ne umanjuje opštost razmatranja. Na osnovu teoreme 1.3.27, metrizabilnost je prebrojivo multiplikativna osobina. Preciznije, ako su $(X_n, d_n), n \in \omega$ metrički prostori ograničenih metrika, onda je sa

$$\tilde{d}(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f(n), g(n))}{2^{n+1}}.$$

data metrika na $\prod X_n$. Treba pokazati da je kompletna.

Neka je, stoga, niz $\langle f_k : k \in \omega \rangle$ Košijev niz elemenata iz $\prod X_n$. S obzirom na očiglednu nejednakost:

$$\frac{d_n(f_k(n), f_l(n))}{2^{n+1}} \leq \tilde{d}(f_k, f_l)$$

Sledi da je i niz $\langle f_k(n) : k \in \omega \rangle$ Košijev za svako $n \in \omega$. Međutim, prostor (X_n, d_n) je kompletan pa niz $\langle f_k(n) : k \in \omega \rangle$ konvergira. Neka je $\lim_{k \to \infty} f_k(n) = g(n)$. Pokazaćemo da je $\lim_{k \to \infty} f_k = g$.

Neka je $\varepsilon > 0$ dato i neka je $M > 0$ prirodan broj tako da važi $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$. Za $i = 0, 1, \ldots, M-1$ niz $\langle f_k(i) : k \in \omega \rangle$ konvergira ka $g(i)$ pa postoje prirodni brojevi k_i tako da važi

$$k \geq k_i \Rightarrow d_i(f_k(i), g(i)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tada je $\tilde{d}(f_k, g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(f_k(i),g(i))}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{d_i(f_k(i),g(i))}{2^{i+1}} + \sum_{i=M}^{\infty} \frac{d_i(f_k(i),g(i))}{2^{i+1}}$
Drugi sabirak sa desne strane naše formule možemo majorirati na sledeći način: $\sum_{i=M}^{\infty} \frac{d_i(f_k(i),g(i))}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=M}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sa druge strane, za $k \geq \max\{k_i : i = 0, 1, \ldots, M-1\}$ imamo

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{d_i(f_k(i), g(i))}{2^{i+1}} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{M+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dalje imamo

$$\tilde{d}(f_k, g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(f_k(i), g(i))}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{d_i(f_k(i), g(i))}{2^{i+1}} + \sum_{i=M}^{\infty} \frac{d_i(f_k(i), g(i))}{2^{i+1}} < \varepsilon.$$

Ovim je konvergencija pokazana. Dokažimo još da je $\prod X_n$ separabilan.

Neka je $\{x_i^0, x_i^1, \ldots, \}$ prebrojiv, gust skup u X_i. Treba konstruisati prebrojiv, gust skup u $\prod X_n$.

Za $\sigma \in \omega^{<\omega}$ definišemo sledeći element:

$$f_\sigma(n) = \begin{cases} x^n_{\sigma(n)}, & n < |\sigma| \\ x^n_0, & i \geq |\sigma| \end{cases}$$

Pokazaćemo da za svako $f \in \prod X_n$ i dato ε, lopta $B(f, \varepsilon)$ sadrži elemente iz $\{f_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$. Odredimo prirodan broj M tako da je ispunjeno $\frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $i = 0, 1, \ldots, M-1$, s obzirom da je X_i separabilan, postoji $x^i_{k_i} \in B(f(i), \frac{\varepsilon}{2})$. Tada za σ dato sa $\sigma(i) = k_i, i = 0, 1, \ldots, M-1$ važi

$$\tilde{d}(f_\sigma, f) = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(f_\sigma(n), f(n))}{2^{n+1}} + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{d_n(f_\sigma(n), f(n))}{2^{n+1}}$$

Drugi sabirak sa desne strane majoriramo na već poznat način:

$$\sum_{n=M}^{\infty} \frac{d_n(f_\sigma(n), f(n))}{2^{n+1}} < \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sa druge strane, imamo:

$$\sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(f_\sigma(n), f(n))}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{d_n(x^n_{k_n}, f(n))}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots ...) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Dakle,

$$\tilde{d}(f_\sigma, f) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ odnosno } f_\sigma \in B(f, \varepsilon).$$

Ovim smo pokazali da je skup $\{f_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ gust u $\prod X_n$, a s obzirom da je kardinalnosti $\aleph_0$ (skup $\omega^{<\omega}$ je prebrojiv), dokazana je separabilnost našeg prostora. □

Neznatnom modifikacijom ovog dokaza može se dokazati i sledeća

Teorema 2.1.9 Osobina "biti poljski prostor" je konačno multiplikativna. □

Primer 2.1.10 Proizvod proizvoljno mnogo poljskih prostora ne mora biti poljski Ovaj zaključak sledi iz činjenice da metrizabilnost nije multiplikativna osobina. Na primer, kub Tihonova $[0, 1]^c$, proizvod neprebrojivo mnogo poljskih prostora (jediničnog intervala) nije metrizabilan (videti [10], primer 6, strana 213), pa nije ni poljski prostor.

U sledećoj tabeli pregledno su prikazane multiplikativne osobine separabilnosti i kompletne metrizabilnosti.

top. osob.	sep.	komp. met.	biti poljski prostor
konačna multiplikativnost	+	+	+
prebrojiva multiplikativnost	+	+	+
multiplikativnost	−	−	−

Kao neposredna posledica prethodno dokazanih svojstava, slede i brojni primeri.

Primer 2.1.11 Kantorov, Berov i Hilbertov kub

Prostor $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\})$ je poljski, na osnovu teoreme 2.1.2, pa je i prostor 2^ω poljski. Zovemo ga **Kantorov prostor** i označavamo sa $\mathcal{C}$. Takođe, $\mathcal{N} = \omega^\omega$, tihonovski proizvod ω kopija diskretnih topoloških prostora $(\omega, \mathcal{P}(\omega))$ je poljski prostor koga zovemo **Berov prostor**. Najzad, kako je $\mathbb{I} = [0,1]$ poljski, kao zatvoreni podskup (kompletnog i separabilnog) prostora $\mathbb{R}$, i prostor $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$ je poljski. Zovemo ga **Hilbertov kub**.

Primer 2.1.12 Jaka topologija

Neka su X i Y separabilni Banahovi prostori. Sa $L(X,Y)$ označićemo vektorski prostor neprekidnih linearnih funkcionela koje preslikavaju X u Y. U funkcionalnoj analizi (videti [5], strana 132) se pokazuje da se neprekidnost u ovom slučaju može zameniti ograničenošću linearne funkcionele (linearnog operatora) T. Takođe, pokazuje se da je to normiran prostor i daje se nekoliko ekvivalentnih načina definisanja norme, među kojima je najjednostavniji sledeći: $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X \wedge \|x\| = 1\}$.

Označimo dalje $L_1(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : \|T\| = 1\}$. Jaka topologija na $L(X,Y)$ je topologija generisana familijama sledećih linearnih funkcija: $f_x(T) = Tx, f_x : L(X,Y) \to Y$, za $x \in X$. Bazni skupovi ove topologije su oblika: $V_{x_1,x_2,\ldots,x_n,T} = \{S \in L(X,Y) : \|Sx_1 - Tx_1\| < \varepsilon, \|Sx_2 - Tx_2\| < \varepsilon, \ldots, \|Sx_n - Tx_n\| < \varepsilon\}$ za $x_1, x_2, \ldots x_n \in X, \varepsilon > 0, T \in L(X,Y)$.

Jedinična lopta $L_1(X,Y)$ snabdevena jakom topologijom je poljski prostor. Razmotrimo, bez umanjenja opštosti, realne Banahove prostore i neka je $D \subseteq X$ prebrojiv, gust skup u X i neka je svaka racionalna linearna kombinacija elemenata iz D opet element skupa D. Prostor Y^D, snabdeven topologijom proizvoda, je poljski na osnovu teoreme 2.1.8 (jer je "eksponent" D prebrojiv). Preslikavanje $T \mapsto T|D$ iz $L_1(X,Y)$ u Y^D je injektivno a njegov kodomen je skup F dat sa: $F = \{f \in Y^D : (\forall x, y \in D)(\forall p, q \in \mathbb{Q})(f(px+qy) = pf(x) + qf(y) \wedge (\forall x)(\|f(x)\| \leq \|x\|))\}$

Može se proveriti da je ovo preslikavanje restrikovano na F ne samo bijekcija, nego i homeomorfizam između $L_1(X,Y)$ i F, pa je $L_1(X,Y)$, sa jakom topologijom, poljski prostor.

Primetimo da je, s obzirom na kompaktnost prostora **2** i teoreme Tihonova (teorema 1.2.78), Kantorov skup kompaktan.

Veliku i važnu klasu poljskih prostora čine prostori neprekidnih funkcija. Neka je X kompaktan a Y metrizabilan skup. Podsetimo čitaoca da skup svih neprekidnih, (pa i ograničenih) funkcija $f : X \to Y$ označavamo sa $C(X,Y)$. Ako je $Y = \mathbb{R}$ pišemo samo $C(X)$. Primetimo odmah da je svaka funkcija f koja pripada $C(X,Y)$ i uniformno neprekidna jer joj je domen kompaktan skup.

Na $C(X,Y)$ uveli smo metriku (napomena iz teoreme 1.3.35)

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)) \text{ (tzv. supremum metrika)}$$

Ovaj supremum postoji jer je funkcija $x \mapsto d_Y(f(x), g(x))$ neprekidna, kao kompozicija neprekidnih funkcija(teorema 1.2.32). Pomenuta neprekidna funkcija preslikava kompaktan skup X u skup realnih brojeva, pa je ograničena (teorema 1.2.69)i stoga ima supremum.

U funkcionalnoj analizi (videti već pomenuti dokaz u [5], strane 99-101) se pokazuje da je metrički prostor $C(X,Y)$ sa supremum metrikom kompletan. Naredna teorema nam govori nešto više.

Teorema 2.1.13 Ako je X kompaktan i metrizabilan a Y poljski prostor, onda je i $C(X,Y)$ poljski prostor.

Dokaz. $C(X,Y)$ je kompletno metrizabilan, na osnovu prethodnog. Treba još pokazati separabilnost. Neka je d_X metrika koja indukuje topologiju na prostoru X i sa $C_{m,n}$ označimo sledeći skup: $C_{m,n} = \{f \in C(X,Y) : \forall x, y(d_X(x,y) < \frac{1}{m} \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \frac{1}{n})\}$.

Neka je $X_m \subseteq X$ konačan skup sa osobinom da je svaka tačka skupa X na rastojanju manjem od $\frac{1}{m}$ od neke tačke skupa X_m. Naime, s obzirom da je X kompaktan, otvoren pokrivač $\{B(x, \frac{1}{m}) : x \in X\}$ ima konačan potpokrivač i to je naš X_m (dakle $\frac{1}{m}$ mreža skupa X).
Neka je, dalje, $D_{m,n}$ prebrojiv podskup skupa $C_{m,n}$ takav da za svaku $f \in C_{m,n}$ i svako pozitivno ε postoji funkcija $g \in D_{m,n}$ za koju važi $d_Y(f(y), g(y)) < \varepsilon$ za sve $y \in X_m$. Pokazaćemo kako se dolazi do ovog skupa.

S obzirom da je Y poljski, dakle separabilan, postoji prebrojiv, gust skup $D \subseteq Y$. Neka je $X_m = \{x_1, \dots, x_q\}$. Posmatrajmo sledeće k-torke:

$$\{(B(d_1, q_1), B(d_2, q_2), \dots, B(d_k, q_k)) : (d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{Q}^n, (d_1, \dots, d_k) \in D^k\}$$

Drugim rečima, posmatramo k-torke otvorenih lopti sa središtima u gustom skupu i racionalnim poluprečnicima. Ovo je očigledno prebrojiv skup.

Uzmimo u razmatranje samo one k-torke lopti $B(d_i, q_i) : i = 1, 2, \dots, k$ za koje postoji funkcija $f \in C_{m,n}$ sa osobinom da je $f(x_i) \in B(d_i, q_i)$ za $i = 1, 2, \dots, k$. Za takve k-torke odaberimo po jednu funkciju sa ovom osobinom (na osnovu aksiome izbora).

Za proizvoljno $f \in C_{m,n}$ i dato $\varepsilon > 0$ uzmimo $q \in \mathbb{Q}, q < \frac{\varepsilon}{2}$. S obzirom da je D gust u Y, $B(f(x_i), q)$ sadrži tačke iz D. Uzmimo $d_i \in B(f(x_i), q) \cap D, i = 1, 2, \dots, k$. Jasno je da k-torka $(B(d_1, q), B(d_2, q), \dots, B(d_k, q))$ ima svog predstavnika u $D_{m,n}$ (jer funkcija f ima osobinu $f(x_i) \in B(d_i, q)$, $i = 1, 2, \dots, k$), funkciju koju ćemo označiti sa g. Ali tada za svako $i = 1, 2, \dots, k$ važi sledeće

$$d_Y(f(x_i), g(x_i) \leq d_Y(f(x_i), d_i) + d_Y(g(x_i), d_i) < 2q < \varepsilon,$$

pa je g funkcija sa traženom osobinom.

Tvrdimo da je $E = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} D_{m,n}$ gust skup u $C(X, Y)$. Uzmimo stoga $f \in C(X, Y)$ i proizvoljno ε. Neka je $n > \frac{3}{\varepsilon}$ i m takav da $f \in C_{m,n}$ (ovo je moguće jer je f uniformno neprekidna funkcija). Uzmimo takođe $g \in D_{m,n}$ za koje je $d_Y(f(y), g(y)) < \frac{1}{n}$ za sve $y \in X_m$. Pokazaćemo da je $d(f, g) < \varepsilon$

Za proizvoljno $x \in X$, neka je $x' \in X_m$ takav da $d_X(x, x') < \frac{1}{m}$. Ispunjeno je sledeće $d_Y(f(x), f(x')) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$. Važe i nejednakosti $d_Y(f(x'), g(x')) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ i $d_Y(g(x'), g(x)) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ (jer je i g u $C_{m,n}$). Nejednakost trougla završava dokaz[2] jer

$$d_Y(f(x), g(x) \leq d_Y(f(x), f(x')) + d_Y(f(x'), g(x')) + d_Y(g(x'), g(x)) < \varepsilon$$

Dakle, prostor $C(X, Y)$ je poljski, jer je separabilan i kompletno metrizabilan. □

Na osnovu prethodnih teorema, videli smo kako se poljski prostori dobijaju homeomorfizmima, tihonovskim proizvodima prebrojive familije poljskih prostora, te formiranjem skupa (uniformno) neprekidnih funkcija. Problemom nasleđivanja osobine "biti poljski prostor" bavimo se u sledećem paragrafu.

[2]Čitaocu skrećemo pažnju da se, s obzirom na dužinu i složenost dokaza, pojavljuju dva "epsilona" u dva dela dokaza. Od korišćenja nove oznake odustalo se zbog poštovanja $\varepsilon - \delta$ tradicije i, shodno tome, činjenice da uloga epsilona prestaje onog trenutka kada se dokaže odgovarajuća nejednakost sa metrikom ili normom

2.2 Potprostori poljskih prostora

Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je poljski (primer 2.1.3), njegov podskup $[0,1]$ (sa indukovanom topologijom) je zatvoren i poljski, dok je $(0,1)$ takođe poljski prostor, ali otvoren. Ovo jednostavno razmatranje nameće pitanje nasleđivanja osobine "biti poljski prostor". Preciznije, treba odrediti potreban i dovoljan uslov pod kojim će podskup poljskog prostora i sam biti poljski.

Definicija 2.2.1 Neka je X topološki prostor, (Y, d) metrički prostor, skup $A \subseteq X$ i neka je data funkcija $f : A \to Y$. Za $x \in X$ definišemo oscilaciju funkcije f u tački x:

$$\mathrm{osc}_f(x) = \inf\{\mathrm{diam}(f[A \cap U] : U \text{ je otvorena okolina } x\}$$

Nije teško videti da je $\mathrm{osc}_f(x) = 0$ ekvivalentan sa definicijom neprekidnosti funkcije f u tački x.

Za pozitivno ε definišimo sledeći skup:

$$A_\varepsilon = \{x \in X : \mathrm{osc}_f(x) < \varepsilon\}.$$

Važi:

Lema 2.2.2 Skup A_ε je otvoren.

Dokaz. Pokažimo da je skup A_ε okolina svake svoje tačke. Neka je $x \in A_\varepsilon$ i neka je U takva okolina tačke X da važi $\mathrm{diam}(f[A \cap U]) < \varepsilon$. Tada za svaku tačku $y \in A \cap U$ važi $\mathrm{osc}_f(y) < \varepsilon$ (jer postoji otvorena okolina y, upravo U, za koju je $\mathrm{diam}(f[A \cap U]) < \varepsilon$ pa je i infimum ovih dijametara manji od ε). Dakle, $U \subseteq A_\varepsilon$ pa je dokaz završen. □

Lema 2.2.3 Skup $\{x \in X : \mathrm{osc}_f(x) = 0\}$, odnosno skup tačaka u kojima je f neprekidna, ima osobinu G_δ.

Dokaz. Očigledna je jednakost sledećih skupova:

$$\{x \in X : \mathrm{osc}_f(x) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}.$$

Ovim smo pokazali (imamo u vidu lemu 2.2.2) da je skup $\{x \in X : \mathrm{osc}_f(x) = 0\}$, odnosno skup tačaka u kojima je f neprekidna, presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova, dakle G_δ skup. □

Dokazaćemo i sledeću teoremu iz metričkih prostora.

Teorema 2.2.4 Neka je X metrizabilan prostor. Tada svaki zatvoren podskup prostora X ima osobinu G_δ.

Dokaz. Podsetimo se (definicija 1.3.12), za $x \in X$ i $A \subseteq X$ definiše se nenegativan broj:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Koristeći osnovne osobine metrike, lako se dokazuje da važi ova nejednakost:

$$|d(x.A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Takođe se pokazuje da je i ε-lopta oko A, $B(A, \varepsilon) = \{d(x, A) \leq \varepsilon\}$ otvoren skup. Sada je, slično prethodnom razmatranju, za $F \subseteq X$ zatvoreno,

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(F, \frac{1}{n})$$

Odnosno presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova, dakle G_δ, što je i trebalo dokazati. □

Sledeća teorema je važna za naše ispitivanje nasleđivanja poljskih prostora, ali je takođe i jedna od fundamentalnih teorema o ekstenziji neprekidnog preslikavanja.

Teorema 2.2.5 (Kuratovski) Neka je X metrizabilan, Y kompletno metrizabilan, $A \subseteq X$ i $f : A \to Y$ neprekidna funkcija. Tada postoji G_δ skup G tako da važi $A \subseteq G \subseteq \bar{A}$ i neprekidno proširenje $g : G \to Y$ od f.

Dokaz. Neka je $G = \overline{A} \cap \{x : \mathrm{osc}_f(x) = 0\}$. Adherencija skupa A je zatvoren, pa stoga i G_δ skup, kao i $\{x : \mathrm{osc}_f(x) = 0\}$. Na osnovu ovoga je i G sa osobinom G_δ. S obzirom da je f neprekidna na A, važi da je $A \subseteq \{x : \mathrm{osc}_f(x) = 0\} \cap \overline{A} = G \subseteq \overline{A}$. Uzmimo sada $x \in G$ proizvoljno. Kako $x \in \overline{A}$, postoji niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tada, s obzirom da je oscilacija funkcije f u tački x jednaka nuli, važi $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(f[\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}]) = 0$ (Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ odaberemo otvorenu okolinu tačke x za koju je $\mathrm{diam}(f[A \cap U]) < \varepsilon$. Tada za $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za $n \geq n_0$ bude ispunjeno $x_n \in A \cap U$ važi i $\mathrm{diam}(f[\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}]) \leq \mathrm{diam}(f[A \cap U]) < \varepsilon$). Zato je niz $\langle f(x_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev pa i konvergentan, s obzirom da je Y kompletan.

Funkciju g sada definišemo prirodno:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Treba proveriti da li je ova definicija dobra. Drugim rečima, za niz elemenata $\langle y_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ iz A koji takođe konvergira ka x, pokazaćemo da je $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Pretpostavimo da to nije slučaj. Neka je, sledstveno tome $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a,\ \lim_{n\to\infty} f(y_n) = b,\ a \neq b$. S obzirom da je Y i Hausdorfov prostor, tačke a i b se mogu razdvojiti disjunktnim okolinama pa za dovoljno velike $m \geq m_0$ i $n \geq n_0$ $f(x_m)$ i $f(y_n)$ pripadaju ovim okolinama i stoga postoji $r > 0$ tako da je $d(f(x_m), f(y_n) \geq r$. Sa druge strane, s obzirom da je $\mathrm{osc}_f(x) = 0$, odredimo otvorenu okolinu U tačke x tako da je $\mathrm{diam}(f[A \cap U]) < \frac{r}{2}$. Tada za dovoljno velike m i n važi $f(x_m), f(y_n) \in A \cap U$, pa je i $d(f(x_m), f(y_n)) < \frac{r}{2}$, i time dolazimo do kontradikcije.

Najzad, dokažimo da je funkcija g neprekidna (g zaista proširuje f jer za $x \in X$ imamo $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$). Ekvivalentno, proverićemo da je $\mathrm{osc}_g(x) = 0$ za proizvoljno $x \in G$. Za otvorenu okolinu U tačke x imamo $g(U) \subseteq \overline{f[U]}$ pa je i $\mathrm{diam}(g[U]) \leq \mathrm{diam}(\overline{f[U]}) = \mathrm{diam}(f[U])$. Zato je i $\mathrm{osc}_g(x) \leq \mathrm{osc}_f(x) = 0$. Time je dokaz okončan. □

Konačno smo u mogućnosti da u potpunosti ispitamo nasleđivanje osobine "biti poljski prostor". Sledeća teorema daje nam potreban i dovoljan uslov za to.

Teorema 2.2.6 Potprostor poljskog prostora je poljski ako i samo ako je G_δ.

Dokaz. Neka je, dakle, X poljski prostor i $Y \subseteq X$ njegov kompletno metrizabilan potprostor. Pokazaćemo da je to G_δ skup. Posmatrajmo, stoga, identičko preslikavanje $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$. To je neprekidna funkcija pa na osnovu teoreme Kuratovskog postoji G_δ skup G tako da je $Y \subseteq G \subseteq \overline{Y}$ i neprekidna ekstenzija $g : G \to Y$ ovog identičkog preslikavanja. Primetimo da je, s obzirom na izraz za funkciju g u teoremi Kuratovskog, $g = \mathrm{id}_G$. Zaista, za $x \in G$, x je granična vrednost niza $\langle y_i : i \in \omega\rangle$ (jer je Y gust u G), $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = x$. Dakle, $g = \mathrm{id}_G$, pa je $G = Y$.

Obrnuto, pretpostavimo da je skup Y ima osobinu G_δ, dakle da je presek prebrojivo mnogo otvorenih skupova $\bigcap_n U_n$. Pokazaćemo da je Y kompletno metrizabilan. Neka su $F_n = X_n \setminus U_n$ i neka je d kompletna metrika na X. Pokažimo da je sledećim izrazom definisana (kompletna) metrika na Y:

$$d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\{2^{-n-1}, |\frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)}|\}.$$

Primetimo odmah da drugi sabirak konvergira, s obzirom da geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}$ konvergira. S obzirom da za svaku tačku y otvorene lopte $B'(x, r)$

važi da je $d'(x,y) = d(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\{2^{-n-1}, |\frac{1}{d(x,F_n)} - -\frac{1}{d(y,F_n)}|\}$, jasno je da za sve n, $d(y,F_n) \neq 0$, odnosno $y \notin F_n$ tj. $y \in U_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ dakle $y \in \bigcap U_n$.

Pokažimo kompatibilnost nove metrike sa indukovanom topologijom na Y. Dovoljno je pokazati da se $B(x,r) \cap Y$ može prikazati kao unija lopti $B'(x_i, r_i)$, gde B' označava loptu u novodefinisanoj metrici. Neka je $y \in B(x,r) \cap \bigcap U_n$. Tada je $B'(y, \frac{r-d(x,y)}{2}) \subseteq B(x,r)$. Zaista, za $z \in B'(y, \frac{r-d(x,y)}{2})$ imamo $d(y,z) \leq d'(x,z) < \frac{r-d(x,y)}{2}$, pa je dalje $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r$ a, s obzirom na gornje razmatranje, $d'(a,b)$ postoji samo kada $a, b \in Y$, pokazali smo da $B'(y, \frac{r-d(x,y)}{2}) \subseteq B(x,r) \cap U$.

Pokazaćemo da je (Y, d') kompletan.

Neka je, stoga, $\langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ Košijev niz u (Y, d'). S obzirom na način na koji je definisana metrika d' ovaj niz je Košijev i u kompletnom prostoru (X, d) pa iz tog razloga konvergira. Neka je $\lim_{i\to\infty} y_i = y$. S obzirom na pretpostavku, za svaki prirodan broj n imamo $\lim_{i,j\to\infty} |\frac{1}{d(y_i,F_n)} - -\frac{1}{d(y_j,F_n)}| = 0$, pa je i niz $\langle \frac{1}{d(y_i,F_n)} : i \in \mathbb{N} \rangle$ Košijev (naravno, u uobičajenoj metrici - reč je o nizu realnih pozitivnih brojeva!) dakle konvergentan i ograničen u $\mathbb{R}$. Iz činjenice da $d(y_i, F_n) \to d(y, F_n)$ neposredno sledi da je $d(y, F_n) \neq 0$ za sve prirodne n, pa $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = Y$ i $y_i \to y$ i u (Y, d). Time smo G_δ skup Y snabdeli kompletnom metrikom d' i time završili dokaz. $\square$

Prethodni rezultat (nasleđivanje osobine "biti poljski prostor" potprostora poljskog prostora) pregledno prikazujemo u sledećoj tabeli.

topol. osobina	sep.	komp. metrizabilnost	biti poljski prostor
potprostor	–	–	–
otvoren potprostor	+	+	+
zatvoren potprostor	+	+	+
otvoreno-zatvoren	+	+	+
G_δ potprostor	+	+	+

2.3 Univerzalni poljski prostori

U narednom poglavlju pitamo se kako da proizvoljni poljski prostor potopimo u neki od fundamentalnih (Hilbertov ili Berov kub) koje ćemo zatim podrobnije ispitati. Sledeća teorema identifikuje poljske prostore u Hilberovom kubu.

Teorema 2.3.1 Svaki separabilni metrizabilni prostor je homeomorfan potprostoru Hilbertovog kuba $\mathbb{I}^\omega$. Poljski prostori su, do na homeomorfizam, G_δ potprostori Hilbertovog kuba.

Dokaz. Neka je (X, d) separabilan metrički prostor i neka je $d \leq 1$. Neka je, dalje, $\{x_n : n \in \omega\}$ prebrojiv, gust skup u X. Definišimo preslikavanje $f : X \to \mathbb{I}^\omega$ kao $f(x) = \langle d(x, x_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$. Pokažimo prvo da je f injektivno preslikavanje. Za $x, y \in X$ i $x \neq y$, s obzirom da je X metrizabilan pa i Hausdorfov prostor, ova dva elementa možemo razdvojiti disjunktnim okolinama $B(x, r)$ i $B(y, r)$. Neka $x_m \in B(x, r)$, $x_m \notin B(y, r)$. Tada je, međutim $d(x, x_m) \neq d(y, x_m)$ pa samim tim $f(x) \neq f(y)$ što je i trebalo pokazati. Lako se pokazuje i neprekidnost funkcije f. Naime, za ε takvo da je $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ važi da je $|d(x, x_i) - d(y, x_i)| < \varepsilon$, pa je i $d(f(x), f(y)) < \sum_{n\in\omega} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon$. Pokazaćemo još da je sirjektivna restrikcija preslikavanja f^{-1} neprekidna. Pretpostavimo da za dato $\varepsilon > 0$, $d(x, y) > \varepsilon$. Odredimo $x_m \in B(x, \frac{\varepsilon}{3})$ (postoji, s obzirom da je X separabilan). Tada je, očigledno, $d(x_m, y) > \frac{2\varepsilon}{3}$ pa je $d(f(x), f(y)) \geq \frac{d(x_m,y)-d(x_m,x)}{2^{m+1}} = \frac{\varepsilon}{3(2^{m+1})}$. Dakle, za $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3(2^{m+1})}$ dobijamo $d(x, y) < \varepsilon$ tako da smo pokazali i neprekidnost funkcije f^{-1}. U cilju dokazivanja drugog dela teoreme, pretpostavimo da je X poljski prostor i f preslikavanje koje ga utapa u Hilbertov kub (dakle, prethodno definisano). $f(X)$ je poljski, na osnovu teoreme 2.1.5 S obzirom na teoremu 2.2.6, ovaj prostor je i G_δ, čime smo završili dokaz. $\square$

Prethodna teorema pruža mogućnost ispitivanja poljskih prostora u Hilbertovom kubu.

Teorema 2.3.2 Svaki poljski prostor je homeomorfan zatvorenom potprostoru skupa $\mathbb{R}^\omega$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 2.2.6. Na osnovu teoreme 2.3.1, dovoljno je posmatrati G_δ podskupove skupa $\mathbb{I}^\omega$. Neka je G jedan takav podskup, dakle presek otvorenih skupova $U_n, n \in \omega$. Neka je, takođe, $F_n = \mathbb{I}^\omega \setminus U_n$. Definišemo funkciju f koja slika G u $\mathbb{R}^\omega$ kao dijagonalni proizvod $f(x) = \langle f_n(x) : n \in \omega\rangle$,

$f_n : G \to \mathbb{R}$, gde je $f_{2n+1}(x) = x_n$ za $x = \langle x_i : i \in \omega \rangle$ a $f_{2n}(x) = \frac{1}{d(x,F_n)}$ (jasno, d je poznata metrika Hilbertovog kuba). Funkcija je očigledno injektivna, a može se jednostavno pokazati i da je neprekidna. Mi pokazujemo samo neprekidnost sirjektivne restrikcije funkcije f^{-1} i zatvorenost $f(G)$. Neka $f(x^n) = y^n \to y$ i $x^n \to x \in \mathbb{I}^\omega$ [3]. Niz $\langle \frac{1}{d(x^n,F_i)} : n \in \omega \rangle$ konvergira za svaki prirodan broj i pa je $d(x^n, F_i)$ ograničen i ne teži nuli pa stoga $0 \neq d(x_n, F_i) \to d(x, F_i)$ pa $x \notin F_i$ ni za jedno i, što znači da $x \in G$. Takođe, $f(x) = y$. □

Napomenimo da se Berov i Kantorov prostor mogu naći u skupu $\mathbb{R}$! Važi

Lema 2.3.3 Skup $\mathcal{C}$ je homeomorfan prostoru $E_{1/3}$ sa topologijom nasleđenom od $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$.

Dokaz. Neka je $\psi : \mathcal{C} \to E_{1/3}$ dato na sledeći način.

$$\psi(\langle x(n) : n \in \mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x(n)}{3^n}.$$

Izraz sa desne strane jednakosti pripada skupu $E_{1/3}$, jer se zapisuje samo pomoću cifara 0 i 2. S obzirom na jednoznačnost prezentacije u ternarnom sistemu, preslikavanje ψ je bijekcija. Uzmimo proizvoljno $x \in \mathcal{C}$ i pokažimo da je funkcija ψ neprekidna u x. Neka je dato $\varepsilon > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ za koje je $n_0 > -\log_3(\varepsilon)$. Koristimo fusnotu 5 vezanu za lemu2.3.4. Ekvivalentna metrika na $\mathcal{C}$ data je, za $f = \langle f(i) : i \in \mathbb{N} \rangle$ sa $d(f, g) = 0$ za $f = g$ i $d(f, g) = \frac{1}{2^n}$ gde je n najmanji broj za koji je $f(n) = g(n)$. Tada iz $d(f, g) < \frac{1}{2^{n_0}}$ sledi da je $f(x(i)) = g(x(i))$ za $i = 1, 2, \ldots, n_0$. Tada je

$$|\psi(f) - \psi(g) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|f(n) - g(n)|}{3^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$$

Ovim je pokazana neprekidnost preslikavanja ψ. Slično se pokazuje i neprekidnost preslikavanja ψ^{-1}. □

Berov prostor je homeomorfan skupu iracionalnih brojeva(pri čemu se homeomorfizam uspostavlja preko tzv. verižnih razlomaka, videti [6]. Neki autori, na primer [12], elemente Berovog prostora nazivaju *iracionalnim brojevima*). Ovaj,

[3]jasno, ne govorimo o stepenima x-a, već o brojnom nizu, s obzirom da je indeksna notacija "zauzeta".

na prvi pogled neočekivan rezultat odlično ilustruje bogatstvo strukture realnih brojeva.[4]

Pre nego što formulišemo naredne teoreme koje će povezivati proizvoljan poljski i Berov prostor, pokušaćemo da bolje upoznamo Berov prostor, $\mathcal{N}$.

Na osnovu teoreme 2.1.8 jednostavno se zaključuje da je metrika definisana na Berovom prostoru data sledećim izrazom $d(f,g) = \sum_{i\in\omega} \frac{d_{01}(f(i),g(i))}{2^{i+1}}$ (gde je d_{01} već poznata oznaka za diskretnu metriku). Pokazaćemo da je njoj ekvivalentna metrika data na jednostavniji način, bez korišćenja beskonačnih redova:

$$d'(f,g) = \begin{cases} 0, & f = g \\ \frac{1}{2^{n+1}}, & f \neq g \text{ i } n \text{ je najmanji broj za koji je } f(n) \neq g(n) \end{cases}.$$

Lema 2.3.4 Metrike d i d' su uniformno ekvivalentne na Berovom prostoru.[5]

Dokaz. Očigledno je da $d'(f,g) \leq d(f,g)$. Sa druge strane,

$$d(f,g) = \sum_{i\geq n} \frac{d_{01}(f(i),g(i))}{2^{i+1}} \leq \sum_{i\geq n} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^n} = 2d'(f,g).$$

Ovim je ekvivalencija metrika pokazana. □

Sada ćemo, koristeći ovu jednostavniju metriku, pokazati lepa kombinatorna svojstva Berovog prostora.

Neka je, u tu svrhu, $\sigma \in \omega^{<\omega}$ (podsetimo, $\omega^{<\omega}$ je drvo svih konačnih nizova prirodnih brojeva). Za dato σ definišimo $N_\sigma = \{f \in \mathcal{N} : \sigma \subset f\}$. Važi:

Lema 2.3.5 Skup N_σ je otvorena okolina elementa f za koji je $\sigma \subset f$.

Dokaz. Odredimo broj $\varepsilon > 0$ tako da bude ispunjeno: $\frac{1}{2^{|\sigma|+1}} > \varepsilon$. Tada je $B(f,\varepsilon) \subseteq N_\sigma$. Zaista, za $g \in B(f,\varepsilon)$ važi $d'(f,g) < \varepsilon$, što znači da za najmanji broj n za koji je $f(n) \neq f(n)$ važi $n > |\sigma|$ i dalje $f(i) = g(i)$ za $i = 1, 2, \ldots |\sigma|$, dakle $\sigma \subset g$. □

Takođe se jednostavno utvrđuje sledeće:

Lema 2.3.6 Skup $\{N_\sigma : \sigma \subset \omega^{<\omega}\}$ je baza topologije Berovog prostora.

---

[4]U vezi sa ovom problematikom, pročitati Borhesovu pripovetku "Peščana knjiga".

[5]Ovo tvrđenje važi za svaki topološki prostor oblika A^ω, gde je A neprazan skup sa diskretnom topologijom, pa i za Kantorov prostor

Dokaz. Dovoljno je pokazati da se, za proizvoljno $f \in \mathcal{N}$ i za proizvoljno pozitivno r, $B(f,r)$ može zapisati kao unija elemenata oblika N_σ. Za najmanje pozitivno n_0 sa osobinom $\frac{1}{2^{n_0+1}} < r$ očigledno je da važi sledeća skupovna jednakost $B(f,r) = \bigcup_{n>n_0} N_{f|n}$. □

Važi i sledeća:

Lema 2.3.7 Za $\sigma \in \omega^{<\omega}$ skup N_σ je zatvoren.

Dokaz. Primetimo da je $\mathcal{N} \setminus N_\sigma = \bigcup\{N_\tau : \tau(i) \neq \sigma(i)$ za neko i iz domena $\sigma\}$ otvoren, kao unija baznih, dakle otvorenih skupova, što znači da je njegov komplement, odnosno N_σ zatvoren. □

Dakle, u Berovom prostoru postoji skup (N_σ) koji je istovremeno otvoren i zatvoren[6].

Teorema 2.3.8 Topološki prostor $\mathcal{N}$ je nuladimenzionalan.

Dokaz. Prethodna konstatacija i činjenica da je Berov prostor metrizabilan, dakle i T_2 završavaju dokaz. Primetimo da iz ovoga sledi nepovezanost Berovog prostora. □

Neka je, dalje, skup $U \subseteq \mathcal{N}$ otvoren. Tada postoji $S \subseteq \omega^{<\omega}$ tako da je $U = \bigcup_{\sigma \in S} N_\sigma$. Označimo sa T sledeći skup:
$T = \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall \tau \subseteq \sigma, \tau \notin S\}$. Lepu osobinu skupa T ističemo u lemi koja sledi.

Lema 2.3.9 Skup T je drvo.

Dokaz. Direktno na osnovu definicije drveta. Pretpostavimo da $\sigma \in T$ i $\tau \subseteq \sigma$. Tada je očigledno $\tau \in T$. □

Pokazujemo da važi sledeća teorema koja karakteriše otvorene i zatvorene podskupove Berovog prostora.

Teorema 2.3.10 Skup $U \subseteq \mathcal{N}$ je otvoren akko postoj $S \subseteq \omega^{<\omega}$ tako da je $U = \bigcup_{\sigma \in S} N_\sigma$. Skup $F \subseteq \omega$ je zatvoren akko postoji drvo $T \subseteq \omega^{<\omega}$, $F = [T]$.

Dokaz. Prvi deo dokaza je posledica leme 2.3.6. Što se drugog dela tiče, imamo: $f \in [T]$ akko za svako $\sigma \in S$, $\sigma \not\subset f$ akko $f \notin U$ (podsetimo se, U je razbijen

[6] u engleskoj literaturi koristi se kovanica clopen set.

na bazne skupove oblika N_σ, gde su indeksi baznih skupova elementi skupa S). Ovom kratkom diskusijom dokazali smo teoremu. $\square$

Poboljšaćemo rezultate prethodne teoreme. Podsetimo se definicije potkresanog drveta (definicija 1.1.9) Ekvivalentno, T je potkresano ako za svako $\sigma \in T$ postoji $f \in [T]$ (beskonačna grana drveta) tako da je $\sigma \subseteq f$. Za drvo T definišimo $T' = \{\sigma \in T : (\exists f \in [T])(\sigma \subseteq f)\}$. Očigledno je T' potkresano drvo, poddrvo drveta T, $T' \subseteq T$,ali i $[T'] = [T]$. Zato važi

Lema 2.3.11 Svaki otvoreni skup Berovog prostora je telo nekog pokresanog drveta. $\square$

Primer 2.3.12 Kompaktni skupovi u Berovom prostoru

Neka je skup $K \subseteq \mathcal{N}$ kompaktan. Pokažimo da tada postoji $x \in \mathcal{N}$ sa osobinom $y(n) \leq x(n)$ za svako $n \in \omega$ i za svako $y \in K$. S obzirom da je K po pretpostavci kompaktan, kompaktni su i skupovi $K_i = \{y(i) : y \in K\}$, za svako $i \in \omega$ kao projekcije skupa K. S obzirom da $K_i \subseteq \omega$ sa diskretnom topologijom, u kojoj se kompaktnost svodi na konačnost, za sve $i \in \omega$, skup K_i je konačan, pa postoji $x(i)$ za koje je ispunjeno $k \leq x(i)$ za sve $k \in K_i$. Uzmimo $x = \langle x(i) : i \in \omega \rangle$. Za sve $n \in \omega$, $y(n) \in K_n$ pa je $y(n) \leq x(n)$, čime smo pokazali egzistenciju traženog elementa x Berovog prostora.

Pokazaćemo još jednu, neobičnu osobinu Berovog prostora - da je homeomorfan svojim stepenima.

Teorema 2.3.13 Skup $\mathcal{N}$ je homeomorfan skupu $\omega^d \times \mathcal{N}^k$, za $k, d > 0$. Takođe, $\mathcal{N}$ je homeomorfan $\mathcal{N}^\omega$.

Dokaz. Dokazaćemo samo drugi deo teoreme. Za element skupa $\mathcal{N}^\omega$ (što je, de facto, niz $\langle f_0, f_1, \ldots \rangle$) definišimo preslikavanje ψ dato na sledeći način:

$$\psi(\langle f_0, f_1, \ldots \rangle) = \langle \underbrace{f_0(0)}_{\text{zbir } 0}, \underbrace{f_0(1), f_1(0)}_{\text{zbir } 1}, f_1(1), \ldots \rangle$$

Elemente ređamo u niz prema rastućem zbiru argumenta i indeksa funkcije. Prvo element $f_i(j)$ čiji je zbir indeksa i argumenta funkcije f jednak 0, zatim elemente $f_0(1), f_1(0)$ čiji je zbir indeksa i argumenta 1.

Očigledno je reč o bijektivnom preslikavanju (razlike u originalima odražavaju se na razlike u slikama, s obzirom da su svi $f_i(j)$ za $(i, j) \in \omega^2$ prebrojani, što je dokaz za injektivnost, dok je za sirjektivnost dovoljno uočiti da se na osnovu slike može rekonstruisati original, opet na osnovu činjenice da su svi $f_i(j)$ pobrojani).

Pokazaćemo da je navedeno preslikavanje homeomorfizam. Neka je $\varepsilon > 0$ dato, kao i proizvoljno $\langle f_0, f_1, \ldots \rangle = f \in \mathcal{N}$. Neka je $n_0 > 0$ prirodan broj za koji je $\frac{1}{2^{n_0+1}} < \varepsilon$. Neka u nizu $\psi(f) = \langle f_0(0), f_0(1), f_1(0), \ldots \rangle$ član sa rednim brojem n_0 ima indeks i_0 i vrednost argumenta j_0, dakle $f_{i_0}(j_0)$. Tada za $d(f,g) < \frac{1}{2^{i_0+j_0+2}}$ važi $d(\psi(f), \psi(g)) < \varepsilon$. Zaista, za $i \leq i_0$ imamo:

$$\frac{d(f_i, g_i)}{2^{i+1}} \leq d(f,g) = \sum_{i \in \omega} \frac{d(f_i, g_i)}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^{i_0+j_0+2}}$$

Odavde sledi $d(f_i, g_i) < \frac{1}{2^{i_0-i+j_0+1}}$ tako da je svakako $f_i(j) = g_i(j)$ za $j \leq i_0 - i + j_0$. S obzirom da je zbir indeksa $i+j \leq i_0 + j_0$, u nizu $\langle\, f_0(0), f_0(1), \ldots \rangle$ za sve elemente $f_i(j)$ "ispred" $f_{i_0}(j_0)$, uključujući i njega, važi $f_i(j) = g_i(j)$. Imajući u vidu da element $f_i(j)$ ima redni broj n_0, imamo $d(\psi(f), \psi(g)) < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$, čime smo pokazali neprekidnost funkcije ψ.

Treba još pokazati neprekidnost funkcije f^{-1}. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Neka je $\langle f_0(0), f_0(1), \ldots \rangle = \psi(f)$. Neka je, dalje, $n_0 \in \mathbb{N}$ broj za koji važi $\frac{1}{2^{n_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Takođe, neka je M redni broj (počev od nule) elementa $f_{n_0}(n_0)$ u nizu $\langle f_0(0), f_1(0), \ldots \rangle$. Pokazaćemo da je tada iz $d(\psi(f), \psi(g)) < \frac{1}{2^{M+1}}$ sledi $d(f,g) < \varepsilon$. Iz $d(\psi(f), \psi(g)) < \frac{1}{2^{M+1}}$ sledi da za sve članovi nizova $\psi(f)$ i $\psi(g)$ "ispred" indeksa n_0 i argumenta n_0 (uključujući i njih) jednaki, pa stoga i $f_i(j) = g_i(j)$ za fiksno $i \leq n_0$ i $j = 0, 1, \ldots n_0$. Zato je $d(f_i, g_i) < \frac{1}{2^{n_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, 2, \ldots n_0$. Najzad, imamo;

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{d(f_i, g_i)}{2^{i+1}} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{d(f_i, g_i)}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{d(f_i, g_i)}{2^{i+1}}$$

Drugi element sume majoriramo:

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{d(f_i, g_i)}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^{n_0+2}} + \frac{1}{2^{n_0+3} + \ldots} = \frac{1}{2^{n_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle, $d(f,g) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

U prethodnim lemama čitalac je upoznao neobična svojstva Berovog prostora. U daljem tekstu pokazaćemo da je svaki poljski prostor, do na homeomorfizam, zatvoreni podskup Berovog prostora. Za ovo nam je potrebno nekoliko lema.

Lema 2.3.14 Neka je X poljski prostor i neka je $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ niz zatvorenih podskupova skupa X za koje je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(X_n) = 0$. Tada postoji $x \in X$ tako da je $\{x\} = \bigcap_{n\in\omega} X_n$.

Dokaz. Tvrđenje je neposredna posledica teoreme 1.3.33. Naime, postoji $x \in X_n$, za svako $n \in \omega$. Pretpostavka da postoji $y \neq x$, $x \in X_n$ vodi u protivrečnost jer je dijametri skupova X_n teže nuli. □

Lema 2.3.15 Neka je X poljski prostor, $U \subseteq X$ otvoren skup i $\varepsilon > 0$, tada postoje otvoreni skupovi $U_0, U_1, U_2, \ldots$ tako da je $U = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n}$ i $\mathrm{diam}(U_n) < \varepsilon$ za sve prirodne brojeve n.

Dokaz. Neka je D prebrojiv, gust podskup skupa X. Neka su $U_0, U_1, U_2, \ldots$ skupovi oblika $B(d, \frac{1}{n})$, pri čemu su ispunjeni sledeći uslovi: $d \in D$, kao i $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\overline{B(d, \frac{1}{n})} \subset U$. Jasno, ovih skupova ima (samo) prebrojivo mnogo. Neka je $x \in U$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Kako je skup D gust, važi da je $D \cap B(x, \frac{1}{3n}) \neq \emptyset$. Odaberimo $d \in D$ element preseka. S obzirom da je rastojanje[7] $d(x, d) < \frac{1}{3n}$ pa $x \in B(d, \frac{1}{3n})$, ali i $\overline{B(d, \frac{1}{3n})} \subset U$. Naime, za svaki element $y \in \overline{B(d, \frac{1}{3n})}$ važi da je $d(d, y) \leq \frac{1}{3n}$, pa je $d(x, y) \leq d(x, d) + d(d, y) < \frac{1}{n}$, i dalje $y \in B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Ovim smo pokazali da $x \in B(x, \frac{1}{3n})$, odnosno da pripada jednom od U_i, $i \in \omega$, pa je $U = \bigcup U_n$[8]. □

Sada smo u mogućnosti da dokažemo narednu teoremu.

Teorema 2.3.16 Ako je X poljski prostor, tada postoji neprekidna sirjekcija $\phi : X \to \mathcal{N}$.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti princip rekurzije. Svakom konačnom nizu prirodnih brojeva $\sigma \in \mathcal{N}$ pridružićemo otvoren skup $U_\sigma \subseteq X$ tako da važe sledeći uslovi:

1. $U_0 = X$
2. U_σ je otvoren podskup X
3. $\mathrm{diam}(U_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|}$

[7] naravno, podrazumevamo da je reč o kompletnoj metrici koju poseduje poljski prostor X.

[8] preciznije, pokazali smo $U \subseteq U_n$. S obzirom da je za sve n prirodne, $U_n \subset U$, drugi smer inkluzije je trivijalan.

4. $\overline{U_\tau} \subseteq U_\sigma$ za $\sigma \subset \tau$

5. $U_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{\sigma\hat{\ } i}$

Rekurziju izvodimo po dužini niza σ. Za dužinu nula imamo $U_0 = U_\emptyset = X$ i neka U_σ zadovoljava prethodne uslove. Sada na osnovu leme 2.3.15 možemo odabrati $U_{\sigma\hat{\ } i} = U_i$ za niz otvorenih skupova U_i za koje je $\mathrm{diam}(U_i) < \frac{1}{|\sigma|+1}$ i $\bigcup U_i = \bigcup \overline{U_i} = U_\sigma$. Primetimo takođe da je i $\overline{U}_{\sigma\hat{\ } i} \subseteq U_\sigma$. Ovim izborom "naslednika" skupa U_σ zadovoljeni su svi uslovi (1-5).

Iako ovom konstrukcijom nismo završili dokaz, ona je veoma značajna jer ćemo je u radu još nekoliko puta iskoristiti sa minimalnim izmenama.

Nastavljamo sa dokazom. S obzirom na lemu 2.3.14, za $f \in \mathcal{N}$ postoji jednoznačno $\phi(f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{f|n} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U}_{f|n}$[9].

Proverićemo da li je naša funkcija ϕ neprekidna i sirjektivna. Za $x \in X$ konstruisaćemo niz $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ tako da im x pripada. Neka je $\sigma_0 = \emptyset$. Za σ_n sa osobinom $x \in U_{\sigma_n}$postoji prirodan broj j tako da je $x \in U_{\sigma_n\hat{\ } j}$. Uzmimo njega za naslednika, tj. $U_{\sigma_{n+1}}$ i time smo pokazali (indukcijom) da zaista postoji traženi niz $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$. Tada za $f = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_{\sigma_n}$ važi i $\phi(x) = f$, pa smo pokazali da je naša funkcija sirjektivna.

Još nam ostaje da pokažemo neprekidnost. Neka je, dakle, $\phi(f) = x$. Za $f|n = g|n$, imamo $d'(f,g) < \frac{1}{2^{n+1}}$ (d' je metrika na Berovom kubu), ali je i $\phi(g) \in U_{g|n} = U_{f|n}$, pa je $d(\phi(f), \phi(g)) < \mathrm{diam}(U_{f|n}) < \frac{1}{n}$, čime je neprekidnost funkcije ϕ dokazana. □

Poboljšaćemo ovu teoremu, ali pre toga trebaće nam još malo pripreme. Na osnovu leme 2.3.15, za svaki otvoreni $O \subseteq X$ postoji prebrojivo mnogo otvorenih skupa $U_n,\ n \in \omega$ tako da je $O = \bigcup \overline{U_n}$. Ovim smo upravo pokazali da je svaki otvoren skup prebrojiva unija zatvorenih skupova, dakle ima svojstvo F_σ.

Lema 2.3.17 Neka je X poljski prostor, $Y \subseteq X$ skup sa svojstvom F_σ i neka je dato $\varepsilon > 0$. Tada postoje disjunktni F_σ skupovi $Y_0, Y_1, \ldots$ za koje je $\mathrm{diam}(Y_n) < \varepsilon$, $\overline{Y_n} \subseteq Y$, $\bigcup_{n\in\omega} Y_n = Y$.

Dokaz. Neka je $Y = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, gde su F_n zatvoreni skupovi. Možemo, bez umanjenja opštosti, pretpostaviti da je $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$ (Ukoliko to nije slučaj, jednostavno uzmimo $F'_0 = F_0, F'_1 = F_0 \cup F_1, \ldots$ pa je $\bigcup F_n = \bigcup F'_n$). Tada je Y disjunktna unija $F_0, F_1 \setminus F_0, F_2 \setminus F_1, \ldots$

[9] presek ovog opadajućeg niza skupova je singlton; umesto njega, uzimamo (jedini) element koji mu pripada.

Važi $\overline{F_{n+1} \setminus F_n} \subseteq \overline{F_{n+1}} = F_{n+1}$ pa je dovoljno da pokažemo da je $F_{n+1} \setminus F_n$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ disjunktna suma F_σ skupova dijametra manjeg od ε (prebrojiva unija F_σ skupova je još uvek F_σ). Posmatraćemo skupove oblike $F_{n+1} \setminus F_n = F_{n+1} \cap (X \setminus F_n)$ i pokazaćemo više od toga - da za svaki skup oblika $O \cap F$, gde su O otvoren i F zatvoren skup važi gore navedeno rastavljanje na uniju otvorenih skupova.

Neka je $Z = O \cap F$ gde je O otvoren a F zatvoren skup. Na osnovu leme 2.3.15 nalazimo niz otvorenih skupova $O_0, O_1, \ldots$ tako da je $\operatorname{diam}(O_n) < \varepsilon$ i da važi $O = \bigcup_{n\in\omega} O_n = \bigcup_{n\in\omega} \overline{O_n}$.

Neka je $Z_n = F \cap (O_n \setminus (O_0 \cap O_1 \cap \ldots \cap O_{n-1}))$. Jasno je da su Z_n disjunktni, $\operatorname{diam}(Z_n) \le \operatorname{diam}(O_n) < \varepsilon$, $\overline{Z_n} \subseteq \overline{O_n} \subseteq O \subseteq Z$, pa je i $\bigcup_{n\in\omega} \overline{Z_n} = Z$. □

Teorema 2.3.18 Neka je X poljski prostor, tada postoji zatvoren podskup $F \subseteq \mathcal{N}$ i neprekidna bijekcija $\phi : F \to X$.

Dokaz. Kao i u dokazu prethodne teoreme, konstruisaćemo drvo F_σ skupova $\{U_\sigma : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$ tako da važe sledeći uslovi:

1. $X_\emptyset = X$;
2. $X_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_{\sigma\hat{\ }i}$;
3. $\overline{X_\tau} \subseteq X_\sigma$ za $\sigma \subset \tau$;
4. $\operatorname{diam}(X_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|}$;
5. za $i \neq j$ važi $U_{\sigma\hat{\ }i} \cap U_{\sigma\hat{\ }j} = \emptyset$.

Konstrukcija se izvodi pomoću rekurzije i korišćenjem leme 2.3.17. Razlika u odnosu na konstrukciju u prethodnoj teoremi utoliko se razlikuje što se u lemi 2.3.17 tvrdi disjunktnost skupova koji čine uniju, upravo ono što nam treba za dokaz osobine (5).

Za $f \in \mathcal{N}$ presek $\bigcap_{i=0}^{\infty} X_{f|n}$ je presek skupova koji sadrži najviše jednu tačku. Neka je $F = \{f \in \mathcal{F} : \exists x \;\; x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} X_{f|n}\}$. Uzmimo za ϕ funkciju koja elementu $f \in F \subseteq \mathcal{N}$ pridružuje element iz singltona $\bigcap_{i=0}^{\infty} X_{f|n}$. Dokaz da je ovo preslikavanje neprekidno potpuno je analogan dokazu da je funkcija ϕ iz prethodne teoreme neprekidna. Primetimo odmah da je, na osnovu osobine (5), naša funkcija injektivna. Za $x \in X$ nalazimo niz $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \ldots$ (kao i u prethodnoj teoremi) tako da je $x \in \bigcap X_{\sigma_n}$, pa je funkcija ϕ i sirjektivna. Ostalo je da pokažemo da je skup F zatvoren. Neka je $\langle f_n : n \in \omega\rangle$ Košijev niz elemenata iz F i neka $f_n \to f$.

Pokažimo da $f \in F$. Za svaki prirodan broj n postoji m tako da za sve $i \geq m$ ispunjeno $f_i|n = f_m|n$ (ovo sledi iz definicije Košijevog niza i pojednostavljene metrike na N). Sa druge strane, tada je $d(\phi(f_i), \phi(f_m)) < \frac{1}{n}$ (jer se slike obe funkcije nalaze u $X_{f_i|n}$ čiji je dijametar manji od $\frac{1}{n}$). Zato je i niz $\langle \phi(f_n) : n \in \omega \rangle$ Košijev niz. Kako je X poljski prostor, (X, d) je kompletan metrički prostor pa naveden Košijev niz konvergira. Neka $\phi(f_n) \to x$. Tada $x \in \overline{X_{f|n}} = X_{f_n}$ pa $\phi(f) = x$. □

2.4 Lokalno kompaktni prostori

U daljem tekstu ispitujemo lokalno kompaktne prostore. Nakon definicije i nekoliko primera lokalno kompaktnih prostora, upoznaćemo Hausdorfove lokalno kompaktne prostore i odgovoriti na pitanje kada će takvi prostori biti poljski.

Definicija 2.4.1 Topološki prostor X je **lokalno kompaktan** ako svaka tačka $x \in X$ ima otvorenu okolinu čija je adherencija kompaktna.

Pokazaćemo da su svi kompaktni prostori i lokalno kompaktni, što u neku ruku opravdava naziv ovog pojma.

Lema 2.4.2 Kompaktni prostori su lokalno kompaktni.

Dokaz. Neka je dat kompaktan skup X. Za proizvoljnu tačku $x \in X$ uzimamo ceo skup X koji je otvoren (u svakoj topologiji) i čija je adherencija kompaktna. □

Lema 2.4.3 Zatvoreni podskupovi lokalno kompaktnih prostora su takođe lokalno kompaktni.

Dokaz. Zaista, za zatvoren podskup lokalno kompaktnog prostora X, $Y \subseteq X$ uzmimo proizvoljnu tačku $y \in Y$. Kako je X lokalno kompaktan, postoji otvoren skup O tako da je $y \in O$ i $\overline{O}$ je kompaktan. Sada je $y \in O \cap Y$. Adherencija skupa $O \cap Y$ u prostoru Y, dakle$\overline{O \cap Y} = \overline{O} \cap Y$ je kompaktan jer je kompaktnost nasledna prema zatvorenim skupovima (teorema 30). □

Lema 2.4.4 Proizvod konačno mnogo lokalno kompaktnih prostora je takođe lokalno kompaktan.

Dokaz. Može se naći u [2], teorema 3.3.13, strana 150. □

Nešto kasnije (videti primer 2.7.9) pokazaćemo da proizvod prebrojivo mnogo lokalno kompaktnih prostora ne mora biti lokalno kompaktan.

Primer 2.4.5 Prostor $\mathbb{R}$ sa uobičajenom topologijom je lokalno kompaktan
Skup $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je lokalno kompaktan, jer za svaku tačku $x \in \mathbb{R}$ postoji otvoren skup $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ koji sadrži x, za pozitivno ε i $\overline{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ je kompaktan. Lokalno kompaktni su i $\mathbb{R}^n$,za $n = 1, 2, \ldots$.

Primer 2.4.6 Prostori sa diskretnom topologijom su lokalno kompaktni
Za diskretan prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ i za svaku tačku $x \in X$ za otvoren skup čija je adherencija kompaktna uzmimo jednostavno singlton $\{x\}$.

Od "lepih" lokalno kompaktnih prostora koji nalaze primenu u diferencijalnoj geometriji i teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina, pomenućemo višedimenzionalne mnogostrukosti, među njima k-dimenzionalne podmnogostrukosti skupa $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$, kao i apstraktne podmnogostrukosti. Više o njima u [8].

Definicija 2.4.7 Neka je dat lokalno kompaktan Hausdorfov prostor X. **Kompaktifikacija Aleksandrova** prostora(kompaktifikacija tačkom prostora) X je prostor $\tilde{X}$ koji dobijamo na sledeći način. Za X kompaktan, $\tilde{X} = X$. U suprotnom, uzmimo $\infty \notin X$. Tada je $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ a otvoreni skupovi u $\tilde{X}$ su otvoreni skupovi u X zajedno sa skupovima oblika $\tilde{X} \setminus K$, gde je K kompaktan podskup skupa X.

Direktno na osnovu definicije sledi da je skup X otvoren u "novoj" topologiji.

Lema 2.4.8 Prostor $\tilde{X}$ je kompaktan.

Dokaz. Za otvoreni pokrivač $\{U_i : i \in I\}$ skupa $\tilde{X}$ treba naći konačan potpokrivač. U tom cilju razbićemo pokrivač na dve familije: $\{O_j : j \in J\}$ i $\{\tilde{X} \setminus K_l : l \in L\}$, gde su O_j otvoreni skupovi u "staroj" topologiji. Sada je $\tilde{X} = \bigcup_{j \in J} O_j \cup \bigcup_{l \in L} \tilde{X} \setminus K_l$. S obzirom da pokrivač mora sadržati sve elemente iz $\tilde{X}$, postoji element pokrivača koji pokriva tačku ∞ pa je stoga skup L neprazan. Odaberimo $l_0 \in L$ proizvoljno pa imamo:

$$\tilde{X} = \bigcup_{l \in L \setminus \{l_0\}} (\tilde{X} \setminus K_l) \cup (\tilde{X} \setminus K_{l_0}) \cup (\bigcup_{j \in J} O_j).$$

Izabraćemo $\tilde{X} \setminus K_{l_0}$ za element potpokrivača i time pokrivamo tačku ∞ a imamo sledeću inkluziju:

$$K_{l_0} \subseteq \bigcup_{l \in L \setminus \{l_0\}} (X \setminus K_l) \cup (\bigcup_{j \in J} O_j).$$

Iz ovoga sledi da je izraz sa desne strane inkluzije otvoreni pokrivač[10] kompaktnog skupa K_{l_0} pa ga možemo prepokriti sa konačno mnogo otvorenih skupova. Zato je $K_{l_0} \subseteq \bigcup_{l \in F_1} (X \setminus K_l) \cup (\bigcup_{j \in F_2} O_j)$ za neke otvorene skupove F_1 i F_2. Najzad,

$$\tilde{X} = (\tilde{X} \setminus K_{l_0}) \cup (\bigcup_{j \in F_2} O_j) \cup (\bigcup_{l \in F_1} (\tilde{X} \setminus K_l)).$$

Ovim smo dobili konačan potpokrivač skupa $\tilde{X}$. $\square$

Pokazaćemo i sledeću osobinu prostora $\tilde{X}$.

Lema 2.4.9 Prostor $\tilde{X}$ je Hausdorfov.

Dokaz. Zaista, svake dve tačke iz X možemo razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima iz X, ali to su otvoreni skupovi i u $\tilde{X}$. Treba još razdvojiti "problematičnu" tačku ∞ i proizvoljnu $x \in X$. Koristimo se lokalnom kompaktnošću skupa X - postoji otvorena Uokolina tačke x tako da je $\overline{U}$ kompaktan. Tada su U i $\tilde{X} \setminus \overline{U}$ otvoreni skupovi koji razdvajaju ∞ i x. $\square$

Primer 2.4.10 Lokalna kompaktifikacija prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$

Skup realnih brojeva sa uobičajenom topologijom je, kao što smo već ustanovili, lokalno kompaktan. Njegova kompaktifikacija je $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, gde se bazi uobičajene topologije pridodaju skupovi oblika $X \setminus [a, b]$, gde je $[a, b]$ zatvoreni interval. Ovaj skup je homeorfan krugu, kao što je, recimo, $\mathbb{R}^n$ homeomorfan sferi S^n. Homeomorfizam se uspostavlja preko stereografske projekcije.

Definicija 2.4.11 Skup A u topološkom prostoru X je K_σ ili σ-kompaktan ako je $A = \bigcup_{n \in \omega} K_n$, gde $K_n \in K(X)$.

Napomenimo da je definisanje novog pojma koji bi obuhvatao prebrojive preseke kompaktih skupova nepotreban, bar u Hausdorfovom prostoru X, jer je presek prebrojivo mnogo kompaktnih skupova opet kompaktan.

[10]Elementi pokrivača oblika $X \setminus K$, gde je K kompaktan skup su takođe otvoreni, kao komplementi zatvorenih skupova K (jer smo u Hausdorfovom prostoru u kome su kompaktni skupovi zatvoreni

Narednom teoremom pokušavamo da odgovorimo na pitanje kada je Hausdorfov i lokalno kompaktan prostor poljski. Ispostavlja se da nam je potrebna i dovoljna samo druga aksioma prebrojivosti! Međutim, pre nego što pređemo na ovu teoremu, navešćemo jednu lemu koja nam treba - lepa karakterizacija metrizabilnosti kompaktnih prostora.

Lema 2.4.12 Neka je X kompaktan topološki prostor. Tada je X metrizabilan ako i samo ako je Hausdorfov i poseduje drugu aksiomu prebrojivosti.

Dokaz. Kompaktan i Hausdorfov prostor je i T_4-prostor (teorema 1.2.67). Svaki T_4 je i $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor pa je metrizabilan na osnovu leme Urisona. Obratno Metrizabilan prostor je T_4-prostor, pa je i Hausdorfov. Kompaktan prostor je i separabilan (teorema 1.2.70) u metričkim (pa i metrizabilnim) prostorima separabilnost je ekvivalentna drugoj aksiomi prebrojivosti (teorema 1.3.11), pa smo time dokazali i obratan smer. $\square$

Teorema 2.4.13 Neka je X Hausdorfov i lokalno kompaktan prostor. Tada su sledeće tvrdnje ekvivalentne:

1. X zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti ;
2. X je metrizabilan i K_σ;
3. $\tilde{X}$ je kompaktan i metrizabilan ;
4. X je poljski prostor;
5. X je homeomorfan otvorenom podskupu kompaktnog, metrizabilnog prostora.

Dokaz. (1-3) Za $\tilde{X}$ smo već pokazali da je kompaktan, pa još treba proveriti metrizabilnost. No, s obzirom na prethodnu lemu, ovo pitanje se svodi na jednostavnije pitanje da li $\tilde{X}$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Neka je $\{U_n : n \in \omega\}$ prebrojiva baza skupa X. S obzirom da je, kako smo pretpostavili, X lokalno kompaktan, $\{U_n : n \in \omega,\ \overline{U_n}$ je kompaktan$\}$ je i dalje (prebrojiva) baza prostora X, pa ćemo, bez umanjenja opštosti, pretpostaviti da je $\overline{U_n}$ kompaktan za svaki prirodni broj n. Za $K \in K(X)$ skup $\tilde{X} \setminus K$ je otvorena okolina tačke ∞. Sa druge strane,K je kompaktan pa ga možemo prekriti sa konačno mnogo baznih skupova, tako da postoji konačan skup F tako da je $K \subseteq \bigcup_{n\in F} \overline{U}_n$. Na osnovu ovoga je $V_n = \{\bigcap_{n\in F} \tilde{X} \setminus \overline{U_n}\ :\ F$ je konačan$\}$ prebrojiva baza okolina za ∞.

Sada još samo treba spojiti ova dva skupa, tako da je $\{U_n\} \cap \{V_n\}$ prebrojiva baza za $\tilde{X}$ koja se tražila.

(3-5) Ovo je manje-više očigledno, jer je X homeomorfan samom sebi kao podskupu kompaktnog, metrizabilnog prostora $\tilde{X}$.

(5-4) Pretpostavimo da je X homeomorfan otvorenom podskupu kompaktnog i metrizabilnog prostora koji ćemo označiti sa Y. Prostor Y je, kako se tvrdi, metrizabilan i kompaktan, pa je i kompletno metrizabilan (jer je kompaktan metrički prostor kompletan). Sa druge strane, poznato je da je svaki kompaktan metrički prostor separabilan,pa je Y separabilan, kompletno metrizabilan prostor, dakle poljski. X je homeomorfan otvorenom podskupu poljskog prostora Y koji je i sam poljski (teorema 2.2.6) pa je X poljski prostor.

(4-2) Neka je sada X poljski prostor (ne zaboravimo, Hausdorfov i lokalno kompaktan). On je svakako metrizabilan, pa je prvi deo tvrdnje (2) dokazan. Poljski prostori su separabilni, pa zadovoljavaju drugu aksiomu prebrojivosti. Neka je $\{U_n : n \in \omega\}$ prebrojiva baza skupa X. S obzirom na lokalnu kompaktnost prostora X, možemo, bez umanjenja opštosti, pretpostaviti da je za svako $n \in \omega$, $\overline{U_n}$ kompaktan skup. Očigledno je ispunjeno $X = \bigcup_n \overline{U_n}$, a ovim smo X predstavili kao prebrojivu uniju kompaktnih skupova, pa X ima osobinu K_σ.

(2-1) Neka je X metrizabilan i K_σ. Zato ga možemo predstaviti kao $X = \bigcup_n K_n$ gde su K_n kompaktni skupovi. Treba naći prebrojivu bazu skupa X. Induktivno ćemo definisati niz otvorenih skupova $\langle U_m : m \in \omega \rangle$ tako da je $\overline{U_m}$ kompaktan i $\overline{U_m} \subseteq U_{m+1}$, $\bigcup_m U_m = X$. Za $m = 0$ uzmimo otvoren skup U_0 tako da je $\overline{U_0}$ kompaktan i $K_0 \subseteq U_0$. On postoji, jer za svako $x \in K_0$ postoji otvoren skup O_x čija je adherencija kompaktan skup. Zato je K_0 prekriven otvorenim skupovima oblika $\{O_x : x \in K_0\}$ ali, kako je kompaktan, možemo izvući konačan potpokrivač iz njega, znači $K_0 = \bigcup_{i=1}^{l} O_{k_i}$ za U_0 uzimamo $U_0 = \bigcup_{i=1}^{l} O_{k_i}$ - skup koji je otvoren, a čija je adherencija kompaktna, kao unija konačno mnogo kompaktnih skupova. Neka je U_m otvoren skup takav da je $U_m \cup K_m \subseteq U_m$ i da je $\overline{U_m}$ kompaktan. Kako je $\overline{U_m}$ prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti (kompaktan i metrizabilan, pa stoga separabilan i poseduje drugu aksiomu prebrojivosti), i U_m ima istu osobinu pa za $\{U_{m,n}\}_{n \in \omega}$ bazu za U_m, dobijamo da je $\{U_{m,n}\}_{m,n \in \omega}$ prebrojiva baza prostora X, čime je dokaz završen. $\square$

2.5 Hiperprostor kompaktnih skupova. Vietorisova topologija

Neka je X proizvoljan topološki prostor.

Definicija 2.5.1 Sa $K(X)$ označavamo prostor svih kompaktnih podskupova skupa X. Topologija na $K(X)$, generisana skupovima oblika $\{K \in K(X) : K \subseteq U\}$ i $\{K \in K(X) : K \cap U \neq \emptyset\}$, gde je U otvoren skup u X naziva se **Vietorisova topologija**,a prostor $K(X)$, snabdeven Vietorisovom topologijom, nazivamo **Hiperprostor kompaktnih skupova**.

Na osnovu teoreme1.2.11 skupovi iz prethodne definicije čine podbazu Vietorisove topologije, pa njenu bazu čine skupovi sledećeg oblika:

$$\{K \in K(X) : K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, \dots, K \cap U_n \neq \emptyset\}.$$

U prethodnom izrazu $U_0, U_1, \dots U_n$ su otvoreni skupovi. Primetimo da je u prostoru $K(X)$ (sa Vietorisovom topologijom) skup $\{\emptyset\}$ otvoren. Zaista, ako u izraz kojim smo okarakterisali bazne skupove Vietorisove topologije uvrstimo $U_0 = \emptyset$, dobijamo skup $\{\emptyset\}$ koji je bazni pa stoga i otvoreni skup u novodefinisanoj topologiji.

U daljem tekstu ispitujemo osobine Vietorisove topologije $K(X)$, za X metrizabilan. Metrizabilnost implicira metrizabilnost ograničenom metrikom (teorema 1.3.10), pa možemo, bez umanjenja opštosti, posmatrati metrički prostor (X, d), gde je $d \leq 1$. Na skupu $(K(X))^2$ definišemo preslikavanje d_H na sledeći način:

$$d_H(K, L) = \begin{cases} 0, & K = L = \emptyset \\ 1, & \text{ako je tačno jedan od } K \text{ i } L \text{ prazan} \\ \max\{\delta(K, L), \delta(L, K)\}, & K, L \neq \emptyset \end{cases}$$

Gde je $\delta(K, L) = \max_{x \in K} d(x, L)$. Ovaj maksimum se dostiže jer je funkcija $x \mapsto d(x, L)$ neprekidna i preslikava kompaktan skup u skup realnih brojeva,pa dostiže ekstremne vrednosti. Pokazuje se da važi sledeće:

Lema 2.5.2 Preslikavanje d_H je metrika na $K(X)$. Zovemo je **Hausdorfova metrika**. $\square$

Lako se, neposredno na osnovu definicije Hausdorfove metrike, pokazuje da važi:

Lema 2.5.3 Za neprazne skupove $K, L \in K(X)$ važi sledeća relacija:

$$d_H(K, L) < \varepsilon \Leftrightarrow K \subseteq B(L, \varepsilon) \wedge L \subseteq B(K, \varepsilon)$$

gde je, jasno $B(L, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, L) < \varepsilon\}$. □

Veza između Hausdorfove metrike i Vietorisove topologije data je sledećom teoremom.

Teorema 2.5.4 Hausdorfova metrika generiše Vietorisovu topologiju.

Dokaz. Ekvivalentno, pokazaćemo da se oko svake tačke nekog baznog skupa topološkog prostora $K(X)$ može "opisati" lopta koja je cela u tom baznom skupu. Uzmimo u razmatranje skup $\{K \in K(X) : K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, \dots, K \cap U_n \neq \emptyset\}$ i proizvoljnu "tačku" (tj. kompaktan skup) $K \in K(X)$. Pokazaćemo da postoji pozitivan broj $\varepsilon_0 > 0$ tako da je ispunjeno $B_L(K, \varepsilon_0) \subseteq U_0$.[11].

Za svaku tačku $x \in K$ postoji pozitivan broj ε_x tako da je ispunjeno $B(x, \varepsilon_x) \subseteq B(x, 2\varepsilon_x) \subseteq U_0$ (jer je $K \subseteq U_0$ i K je zatvoren). Zato je skup $\{B(x, \varepsilon_x) : x \in K\}$ otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K pa stoga ima konačan potpokrivač, označimo ga sa $\{B(x_i, \varepsilon_{x_i}) : i = 1, \dots, n\}$. Neka je $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{x_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$. Pokazaćemo da je $B_H(K, \varepsilon_0) \subseteq U_0$.

Uzmimo, stoga, $L \in B_H(K, \varepsilon_0)$. Tada je $d_H(K, L) < \varepsilon_0$ što dalje implicira: $L \subseteq B(K, \varepsilon_0)$. Pokazaćemo da je ovaj poslednji skup, tj. $B(K, \varepsilon_0)$, podskup od U_0, što će značiti da je $L \in U_0$, odnosno $B_H(L, K) < \varepsilon_0$.

Uzmimo proizvoljno $y \in B(K, \varepsilon_0)$. Tada je $d(y, K) < \varepsilon_0$ pa postoji neki element $z \in K$ za koji je ispunjeno $d(y, z) < \varepsilon_0$. S obzirom da je K prepokriven loptama $\{B(x_i, \varepsilon_{x_i}) : i = 1, \dots, n\}$, postoji neko $k \in \mathbb{N}$ za koje važi $z \in B(x_k, \varepsilon_{x_k})$. Tada je, jasno, $d(x_k, z) < \varepsilon_{x_k}$. Dalje imamo, na osnovu nejednakosti trougla:

$$d(x_k, y) \leq d(x_k, z) + d(z, y) < \varepsilon_{x_k} + \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{x_k} + \varepsilon_{x_k} = 2\varepsilon_{x_k}.$$

Iz ove nejednakosti sledi da $y \in B(x_k, 2\varepsilon_{x_k}) \subseteq U_0$, čime smo dokazali da je $B_H(K, \varepsilon_0) \subseteq U_0$.

Slično rasuđujući, pokazaćemo da postoje $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ tako da je $B_H(K, \varepsilon_i) \cap U_i \neq \emptyset$. Naime, skup $K \cap U_i$ nije prazan, jer je K element nekog baznog skupa, po pretpostavci. Tada je $K \cap U_i \subseteq U_i$ pa na osnovu prethodnog razmatranja, postoje $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ tako da je $B_H(K \cap U_i, \varepsilon_i) \subseteq U_i$ pa je $B_H(K \cap U_i, \varepsilon_i) \cap U_i = B_H(K \cap U_i, \varepsilon_i) \neq \emptyset$. Kako je $B_H(K \cap U_i, \varepsilon_i) \subseteq B_H(K, \varepsilon_i)$,

[11] Jasno, sa B_H označavamo loptu u Hausdorfovoj metrici

pa je i $B_H(K, \varepsilon_i) \cap U_i \neq \emptyset$. Uzmimo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$ i imamo da je $B_H(K, \varepsilon) \in U_0, B_H(K, \varepsilon) \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \ldots, n$ pa lopta $B_H(K, \varepsilon)$ pripada našem baznom skupu.

Ovim kompaktibilnost Hausdorfove metrike i Vietorisove topologije još nije dokazana - treba još pokazati da su sve lopte (u Hausdorfovoj metrici), otvoreni skupovi u Vietorisovoj topologiji. Uzmimo zato u razmatranje proizvoljnu loptu $B_H(K, \varepsilon)$. S obzirom na definiciju Hausdorfove metrike, ova lopta je jednaka sledećem skupu: $\{L : L \subseteq B(K, \varepsilon),\ K \subseteq B(L, \varepsilon)\}$. Pokazaćemo da je ovaj skup bazni u Vietorisovoj topologiji.

Može se pokazati da su skupovi oblika $B(K, \varepsilon)$ otvoreni, pa možemo uzeti za U_0 upravo skup $B(K, \varepsilon)$.

Sa druge strane, imamo $K \subseteq B(L, \varepsilon)$. Dakle, za proizvoljno $x \in K$, $x \in B(L, \varepsilon)$. Ovo dalje implicira da je $d(x, L) < \varepsilon$ a takođe i $L(x, \varepsilon) \cap L \neq \emptyset$. Dakle, za svako $x \in K,\ L(x, \varepsilon) \cap L \neq \emptyset$. Skup $\{L(x, \varepsilon) : x \in K\}$ je otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K pa ima svoj potpokrivač $\{B(x_i, \varepsilon_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Tada L seče sve elemente potpokrivača ali i obratno; ako L seče sve elemente potpokrivača, važi da za svako $x \in K,\ d(x, L) < \varepsilon$, pa je $K \subseteq B(L, \varepsilon)$. Najzad, ako označimo sa $U_i = B(x_i, \varepsilon),\ i = 1, 2, \ldots, n$ imamo da su svi $U_0,\ U_1,\ \ldots, U_n$ otvoreni i da je

$$B_H(K, \varepsilon) = \{L \in K(X) : L \subseteq U_0,\ L \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, L \cap U_n \neq \emptyset\}.$$

Ovim smo pokazali da je svaka lopta bazni, dakle otvoreni skup u Vietorisovoj topologiji, čime je dokaz okončan. $\Box$

Teorema 2.5.5 Ako je X metrizabilan prostor, takav je i $K(X)$. Ako je X separabilan, takav je i $K(X)$.

Dokaz. Prvi deo teoreme je već dokazan (Prostor $K(X)$ je metrizabilan Hausdorfovom metrikom). Pokazaćemo još separabilnost prostora $K(X)$. Neka je $D \subseteq X$ prebrojiv, gust skup u X. Pokazaćemo da je $K_f(D) = \{K \subseteq D : K,\ K$ je konačan$\}$ gust skup u $K(X)$ (evidentno je prebrojiv). Primetimo prvo da je $K_f(D) \subseteq K(X)$. Posmatrajmo bazni skup $\{K \in K(X) : K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, K \cap U_n \neq \emptyset\}$. Skupovi $U_0 \cap D,\ U_i \cap U_0 \cap D,\ i = 1, 2, \ldots, n$ nisu prazni, s obzirom da je D gust u X (primetimo da skupovi $U_1 \cap U_0, U_2 \cap U_0, \ldots, U_n \cap U_0$ moraju biti neprazni da bi bazni skup bio različit od trivijalnog $\{\emptyset\}$), pa postoje $d_i \in U_i \cap U_0 \cap D,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Skup $\{d_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ je konačan, pripada $K_f(D)$, podskup je skupa U_0 i ima neprazan presek sa skupovima $U_1, U_2, \ldots, U_n$

pa je element baznog skupa. Dakle, $K_f(D)$ seče svaki bazni skup u $K(X)$, pa je gust u njemu. $\square$

U razmatranje unosimo još jedan element - metrizabilnost kompletnom metrikom. S obzirom da je naš prostor $K(X)$ metrizabilan (Hausdorfovom) metrikom, razmotrićemo konvergenciju niza kompaktnih skupova u ovoj metrici.

Definicija 2.5.6 Neka je dat topološki prostor X i neka je $\langle K_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ niz kompaktnih skupova u X. Definišemo **topološku gornju granicu**, $\overline{T\lim_n} K_n$ kao skup

$$\{x \in X : \text{ Svaka otvorena okolina tačke } x \text{ seče } K_n \text{ za beskonačno mnogo } n\}$$

Takođe, definišemo i **topološku donju granicu**, $\underline{T\lim_n} K_n$ kao skup

$$\{x \in X : \text{ Svaka otv. okolina tačke } x \text{ seče } K_n \text{ za sve osim za kon. mnogo } n\}.$$

Jasno, $\underline{T\lim_n} K_n \subseteq \overline{T\lim_n} K_n$ i oba skupa su zatvorena. Ako su jednaki, zajedničku vrednost nazivamo **topološka granica** niza $\langle K_n : n \in \mathbb{N}\rangle$. Primetimo da, ako je X metrizabilan topološki prostor i $K_n \neq \emptyset$, donju topološku granicu možemo posmatrati kao skup elemenata x koji zadovoljavaju:

$$\exists \langle x_n\rangle (x_n \in K_n \text{ za sve } n, \text{ i za neki podniz } x_{n_i}, x_{n_i} \to x).$$

Analogno, gornja toploška granica se sastoji od elemenata x koji zadovoljavaju:

$$\exists \langle x_n\rangle (x_n \in K_n \text{ za sve } n \text{ i } x_n \to x).$$

Teorema 2.5.7 Ako je X kompletno metrizabilan prostor, takav je i $K(X)$. Dakle, ako je X poljski prostor, i $K(X)$ je poljski prostor.

Dokaz. Odaberimo kompletnu, ograničenu metriku d koja generiše topologiju na X (dakle, $d \leq 1$). Neka je $\langle K_n\rangle$ Košijev niz u $K(X), d_H$, gde ćemo pretpostaviti, bez umanjenja opštosti, $K_n \neq \emptyset$. Neka je $K = \overline{T\lim_n} K_n$. Pokazaćemo da $K \in K(X)$ i da je $d_H(K, K_n)\rangle 0$. Primetimo prvo da je $K = \bigcap_n \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i}$ pa je K očigledno zatvoren i neprazan.

Pokažimo da je K kompaktan. Za to je dovoljno pokazati da je totalno ograničen. Još preciznije, dovoljno je naći za svaki prirodan broj n otvoren skup $F_n \subseteq X$ tako da je $K \subseteq \bigcup_{x\in F_n} B(x, 2^{-n})$. Pokazaćemo i više od ovoga - da je za $L_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} K_i, L_n \subseteq \bigcup_{x\in F_n} B(x, 2^{-n})$. Neka je F_n^i konačan skup tako da važi $K_i \subseteq \bigcup_{x\in F_n^i} B(x, 2^{-n-1})$ (K_i je kompaktan skup!). Neka je, dalje, $p > n$ takav prirodan broj da $d_H(K_i, K_j) < 2^{-n-1}$ za $i, j \geq p$ (niz K-ova je Košijev pa p možemo odrediti). Najzad, skup $F_n = \bigcup_{n\leq i\leq p} F_n^i$ je očiglednno konačan i unija lopti oblika $B(x, 2^{-n})$ prekriva L_n. Zaista, unija lopti poluprečnika 2^{-n-1} prekrivaju $\bigcup_{i=n}^{p} K_i$, pa tim pre i unija lopti većih poluprečnika prekriva navedeni skup. Ono što još treba pokazati je da je "ostatak" L_n, dakle $\bigcup_{i=p+1}^{\infty} K_i$ prekriven loptama $B(x, 2^{-n})$, gde je $x \in F_n$.

Za proizvoljno $j > p$ ispunjeno je: $d_H(K_j, K_p) = \max\{\delta(K_j, K_p), \delta(K_p, K_j)\} < 2^{-n-1}$. Dakle, za proizvoljno $z \in K_j$ imamo nejednakost $d(z, K_p) < 2^{-n-1}$. Odavde sledi da postoji $y \in K_p$ tako da je $d(y, z) < 2^{-n-1}$. Postoji $x \in F_n$ tako da je $d(x, y) < 2^{-n-1}$. Najzad je, po nejednakosti trougla: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 2^{-n}$ pa je K_j prekriven loptama $B(x, 2^{-n})$ gde $x \in K_n$, iz čega sledi da je ceo F_n prekriven ovim loptama.

Dalje treba pokazati da $d_H(K_n, K) \to 0$. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$. Postoji N takav da za $i, j \geq N \to d_H(K_i, K_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pokažimo da za $n \geq N$ vredi $d_H(K_n, K) < \varepsilon$.

Neka $x \in K$. Tada na osnovu definicije gornje topološke granice postoji podniz $\langle x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\rangle$ za koji važi $x_{n_i} \in K_{n_i},\ x_{n_i} \to x$. Tada za dovoljno veliko i indeks n_i postaje veći od N i $d(x_{n_i}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Za takvo i odaberimo $y_n \in K_n$ takvo da bude $d(x_{n_i}, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.Tada je, na osnovu nejednakosti trougla, $d(x, y_n) < \varepsilon$ pa i $\delta(K, K_n) < \varepsilon$.

Dokaz još nije završen; potrebno je pokazati da $\delta(K_n, K) < \varepsilon$. Uzmimo zato proizvoljno $y \in K_n$. Formirajmo niz indeksa $n = k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ takvih da je $d_H(K_{k_j}, K_m) < 2^{-j-1}\varepsilon$, za $m \geq k_j$. Definišimo dalje i $x_{k_j} \in K_k$ kao što sledi. Uzmimo $x_{k_1} = y$ i $x_{k_{j+1}}$ je takav da $d(x_{k_{j+1}}, x_{k_j}) < 2^{-j-1}\varepsilon$. Tada je x_{k_j} Košijev, pa $x_{k_j} \to x \in K$, $d(y, x) < \varepsilon$ i konačno $\delta(K_n, K) < \varepsilon$. Ova konstatacija završava dokaz. □

Iako smo, dokazujući prethodnu teoremu, izgradili novi poljski prostor od kompaktnih skupova datog poljskog prostora i time završili zadatak ove glave, dokazaćemo i jaču teoremu.

Teorema 2.5.8 Ako je X kompaktan i metrizabilan, takav je i $K(X)$.

Dokaz. Neka je d ograničena metrika koja generiše topologiju na X. Dovoljno je pokazati da je $(K(X), d_H)$ totalno ograničen. Uzmimo $\varepsilon > 0$. Neka je, dalje $F \subseteq X$ konačan tako da važi $X = \bigcup_{x\in F} B(x, \varepsilon)$. Tada se jednostavno pokazuje da je $K(X) = \bigcup_{S\subseteq F} B(S, \varepsilon)$ a ovim je pokazano da $K(X)$ ima ε- mrežu, pa je totalno ograničen, odnosno kompaktan. □

2.6 Savršeni poljski prostori. Teorema Kantor - Bendiksona

Podsetimo se, tačka nagomilavanja topološkog prostora je tačka x za koju važi da u svakoj njenoj okolini U postoji tačka $y \in U,\ y \neq x$, odnosno tačka za koju singlton $\{x\}$ nije otvoren skup. U daljem tekstu razmatramo prostore u kojima sve tačke imaju ovu osobinu.

Definicija 2.6.1 Topološki prostor je **savršen** ako su mu sve tačke ujedno i tačke nagomilavanja. Potprostor P topološkog prostora X je **savršen u** X ako je zatvoren i savršen u odnosu na svoju relativnu topologiju.

Primer 2.6.2 Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je savršen, kao i prostor $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$

Zaista, svaka tačka skupa $\mathbb{R}$ je njegova tačka nagomilavanja. Za otvoren skup O za koji važi $x \in O$ postoji $\varepsilon > 0$ tako da je ispunjeno $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq O$, pa je $x - \frac{\varepsilon}{2} \in O \setminus \{x\}$. Prostor $\mathbb{R}^n$, za $n \geq 2$ je takođe savršen. Za proizvoljnu tačku x i otvoren skup O, $x \in O$ važi: $\pi_i(x) \in \pi_i[O]$ (π_i je i-ta projekcija, $i = 1, 2, \ldots, n-1$). Tada je $\pi_i[O] \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, pa postoji $y_i \in \pi_i[O],\ y_i \neq \pi_i(x)$. Za n-torku $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ važi $y \neq x,\ y \in O$.

Primer 2.6.3 Berov prostor $\mathcal{N}$ je savršen

Uzmimo proizvoljnu tačku $f \in \mathcal{N}$ i otvoren skup O u Berovom prostoru koji je sadrži. Tada, s obzirom na lemu 2.3.6, postoji $\sigma \in \omega^{<\omega}$ za koji je $f \in N_\sigma$. Ako odaberemo elemente $f_0, f_1, f_2, \ldots$ Berovog prostora tako da je ispunjeno: $f_0 \supset \sigma\hat{}0, f_1 \supset \sigma\hat{}1, \ldots$ (recimo $f_j = \sigma\hat{}\langle j, j, j, \ldots\rangle$, $j \in \omega$), jasno je da je $\langle f_0, f_1, \ldots\rangle$ niz različitih elemenata iz N_σ, pa je N_σ beskonačan, a Berov prostor savršen, jer svaka njegova tačka poseduje okolinu u kojoj se nalazi beskonačno mnogo tačaka.

Primer 2.6.4 Ako je X savršen prostor, i $K(X) \setminus \{\emptyset\}$ je savršen

Prazan skup nije tačka nagomilavanja. Naime, pokazali smo da je skup $\{\emptyset\}$ otvoren u $K(X)$. Dakle, tačka $\emptyset$ izolovana u $K(X)$ jer postoji njena okolina, upravo $\{\emptyset\}$ koja ne sadrži druge tačke.

Uzmimo dakle neprazan, kompaktan skup $K \subseteq X$. Neka je $R = \{K : K \subseteq U_0,\ K \cap U_1 \neq 0, \ldots, K \cap U_n \neq 0\}$ bazni skup koji sadrži K i $R \neq \{\emptyset\}$. Primetimo da tada mora biti $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset, U_0 \cap U_2 \neq \emptyset, \ldots, U_0 \cap U_n \neq \emptyset$. Ako je $K \subset U_0$, postoji $d \in U_0 \setminus K$ pa uzmimo $K' = K \cup \{d\}$. Ovo je očigledno kompaktan skup koji se nalazi u R i važi $K' \neq K$.

Ukoliko je $K = U_0$ i $|K| \geq \aleph_0$, tada za svako $n = 1, 2, \ldots, n$ postoji $x_n \in U_0 \cap U_n$. Skup $K' = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \neq K$ je kompaktan skup koji se nalazi u R.

Najzad, ako je $K = U_0$ konačan skup, tada postoji $d \in K \cap U_1$. Skup $K \setminus \{d\} \neq K$ je kompaktan skup koji se nalazi u R.

Naredna teorema daje nam vezu između novodefinisanih, savršenih prostora i Kantorovog kuba $\mathcal{C}$.

Teorema 2.6.5 Neka je X poljski prostor, $P \subseteq X$ neprazan savršen skup, tada postoji potapanje $f : \mathcal{C} \to P$. Drugim rečima, postoji savršen skup $F,\ F \subseteq P$ koji je homeomorfan Kantorovom kubu.

Dokaz. Formiraćemo drvo $\langle U_\sigma : \sigma \subseteq \omega^{<\omega} \rangle$ nepraznih otvorenih skupova u X koji ispunjavaju sledeće uslove:

1. $U_\emptyset = X$
2. $\overline{U_\tau} \subset U_\sigma$ za $\sigma \subseteq \tau$
3. $U_{\sigma\hat{\ }0} \cap U_{\sigma\hat{\ }1} = \emptyset$
4. $\mathrm{diam}(U_\sigma) < \frac{1}{|\sigma|}$
5. $U_\sigma \cap P \neq \emptyset$

Neka je $U_\sigma \cap P \neq \emptyset$. Kako je P savršen, svaka njegova tačka je i tačka nagomilavanja, pa postoje tačke $x_0, x_1 \in U_\sigma \cap P,\ x_0 \neq x_1$. Kako je X poljski prostor, on je metrizabilan pa i Hausdorfov pa postoje disjunktne okoline $U_{\sigma_0}, U_{\sigma_1}$ tačaka x_0, x_1 respektivno. Odaberimo ove okoline tako da je $\overline{U_{\sigma\hat{\ }i}} \subset U_\sigma$ i $\mathrm{diam}(U_{\sigma\hat{\ }i}) < \frac{1}{|\sigma|+1}$ $(i = 0, 1)$. Ovim smo pokazali da se drvo sa navedenim osobinama može konstruisati.

Uzmimo proizvoljno $x \in \mathcal{C}$. Formirajmo presek

$$\bigcap_n U_{x|n} = \bigcap_n \overline{U_{x|n}} = \bigcap_n \overline{U_{x|n}} \cap P$$

Ovaj presek je singlton, na osnovu Leme 2.3.14. Zato svakom $x \in \mathcal{C}$ možemo pridružiti siglton $f(x)$ tako da je $\{f(x)\} = \bigcap_n \overline{U_{x|n}}$. Može se pokazati da je ova funkcija neprekidna i injektivna, dakle potapanje.

Kako je f neprekidna i $\mathcal{C}$ kompaktan, skup $f(\mathcal{C}) = F$ je zatvoren. F je savršen, na osnovu konstrukcije. Stoga je funkcija $f : \mathcal{C} \to F$ otvoreno preslikavanje, dakle homeomorfizam. □

Navešćemo i jednostavnu posledicu ove teoreme.

Lema 2.6.6 Neprazni savršeni poljski prostori imaju kardinalnost $2^{\aleph_0}$

Dokaz. Neka je X neprazan, savršen poljski prostor. Na osnovu teoreme 2.3.1 sledi da je $|X| \leq |\mathbb{I}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$, a na osnovu teoreme 2.6.5 imamo $2^{\aleph_0} = |\mathcal{C}| \leq |X|$. Teorema Kantor-Šreder-Bernštajna implicira $|X| = 2^{\aleph_0}$, što je i trebalo pokazati. □

Primer 2.6.7 Prostor $\mathbb{Q}$ sa topologijom nasleđenom od $\mathcal{O}_{uob}$ nije poljski

Podsetimo se, teorema 2.2.6 odgovara na pitanje kada će potprostor poljskog prostora i sam biti poljski ali ako želimo da se na nju pozovemo i pokažemo da je $\mathbb{Q}$ poljski, treba da "pronađemo" prebrojivo mnogo otvorenih skupova čiji je presek skup racionalnih brojeva! Problem ćemo rešiti na drugi način- primenom prethodne leme. Konkretnije, pokazaćemo da prostor $\mathbb{Q}$ nije poljski tako što ćemo pokazati da suprotna pretpostavka vodi u protivrečnost. Neka je, dakle, $\mathbb{Q}$ poljski. Tada je, s obzirom da se u proizvoljnoj okolini (u smislu uobičajene topologije) svakog racionalnog broja (i više - svakog realnog broja) može naći beskonačno mnogo racionalnih brojeva, jasno da su sve tačke skupa $\mathbb{Q}$ tačke nagomilavanja, pa je on savršen poljski prostor. Ispunjene su sve pretpostavke za primenu prethodne leme. Dakle, na osnovu leme imamo $|\mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, što je u suprotnosti sa dobro poznatom činjenicom da je $\mathbb{Q} = \aleph_0$.

Definicija 2.6.8 Tačka x u topološkom prostoru X je **tačka kondenzacije** ako je svaka otvorena okolina tačke x neprebrojiva.[12]

Naredna teorema jedna je od najvažnijih u ovom radu.

Teorema 2.6.9 (Kantor-Bendikson) Neka je X poljski prostor. Tada se X može na jedinstven način zapisati kao disjunktna unija $X = P \cup C$, gde je P savršen podskup skupa X a C prebrojiv i otvoren.

[12] Primetimo da se u metričkim prostorima u okolini tačke nagomilavanja nalazi beskonačno mnogo tačaka.

Dokaz. Definišimo

$$X^* = \{x : x \text{ je tačka kondenzacije skupa } X\}$$

Neka je $P = X^*, C = X \setminus P$. Skup P sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, pa je zatvoren. Ako je $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ baza skupa X (prostor X, kao poljski, odnosno separabilan i metrizabilan topološki prostor, poseduje drugu aksiomu prebrojivosti) a C, kao otvoren skup, mora biti jednak uniji nekih baznih U_n. S obzirom da se u komplementu skupa C nalaze sve tačke kondenzacije skupa X, jasno je da C mora biti jednak uniji svih prebrojivih baznih skupova U_n, pa je i sam prebrojiv. Skup P je savršen. Zaista, uzmimo $x \in P$ i neka je U otvorena okolina tačke x. Tada je U neprebrojiv skup. Pokazaćemo da sadrži neprebrojivo mnogo tačaka kondenzacije.

Naime, pokazaćemo da pretpostavka da U sadrži najviše prebrojivo mnogo tačaka kondenzacije vodi u protivrečnost. Neka je, dakle, $U \cap X^*$ najviše prebrojiv, konkretno $U \cap X^* = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tada je $U \setminus X^*$ otvoren jer za proizvoljno $y \in U \setminus X^*$ postoji njena prebrojiva okolina V koja ne može sadržati ni jedno x_n, jer su to tačke kondenzacije. Dakle, cela okolina tačke y, $V \cap U$, sadržana je u $U \setminus X^*$; $V \cap U \subseteq U \setminus X^*$ tj. $U \setminus X^*$ je okolina svake svoje tačke pa je otvoren. $U \setminus X^* = \bigcup_{y \in U \setminus X^*} (U_x \cap U)$, gde je U_x prebrojiva okolina tačke $y \in U \setminus X^*$. Kako je X poljski prostor, poseduje drugu aksiomu prebrojivosti, pa na osnovu teoreme Lindelefa, možemo "izvući" prebrojivo mnogo članova unije, dakle postoje $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ tako da je $U \setminus X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_{y_n} \cap U)$. Na osnovu ovoga je skup $U \setminus X^*$ prebrojiva unija prebrojivih skupova, dakle i sam prebrojiv. Sa druge strane je $|U| = |\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}| + |U \setminus X^*| = \aleph_0$, što je kontradikcija sa činjenicom da je U, kao okolina tačke kondenzacije x, neprebrojiv skup.

Nakon ove digresije, nastavljamo sa dokazom. Pokazali smo da U ima beskonačno mnogo tačaka kondenzacije tj. tačaka skupa P, pa je očito svaka tačka skupa P ujedno i njegova tačka nagomilavanja, pa je on savršen.

Ovim je pokazano postojanje P i C čija je unija ceo prostor X, tj. $P \cup C = X$. Treba još dokazati jedinstvenost takvog zapisa. Pretpostavićemo suprotno, dakle da se X može zapisati (bar) na još jedan način, $X = P_1 \cup C_1$. Primetimo da ako je Y savršen poljski prostor, onda je $Y^* = Y$. Ovo je tačno jer je svaka tačka $y \in Y$ i tačka kondenzacije ovog skupa. Zaista, ona je njegova tačka nagomilavanja s obzirom da je Y savršen, pa za svaku okolinu U tačke y, $U \cap Y$ je neprazan savršen poljski prostor, prema tome kardinalnosti $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Dakle, $P_1^* = P_1$, pa je $P_1 \subseteq P$. Sa druge strane, za $x \in C_1$, a s obzirom da je C_1 otvoren i prebrojiv, dok je C unija svih baznih, prebrojivih skupova, imamo $x \in C$, pa $C_1 \subseteq C$. Sada je jasno da mora biti $P = P_1, C = C_1$ $\square$

Neka je X neprebrojiv poljski prostor. Tada po teoremi Kantor-Bendiksona, X može da se predstavi kao unija $P \cup C$, gde je P savršen poljski prostor, dakle homeomorfna kopija $\mathcal{C}$ a C- prebrojiv skup. Tada važi i $|X| = |C| + |P| = 2^{\aleph_0}$, s obzirom da savršeni poljski prostori imaju kardinalnost $2^{\aleph_0}$. Dakle, kao neposrednu posledicu teoreme Kantor-Bendiksona dobijamo neočekivan rezultat - za poljske prostore važi hipoteza kontinuuma!

Skup P iz teoreme Kantor-Bendiksona je i najveći (u smislu inkluzije) savršen podskup od X. Zaista, ako je Y savršen podskup od X, videli smo da je $Y^* = Y$, pa je $Y = Y^* \subseteq X^* = P$.

Definicija 2.6.10 Za svaki poljski prostor X, ako je $X = P \cup C$, gde je P savršen a C prebrojiv sa osobinom $P \cap C = \emptyset$, skup P zovemo **savršeno jezgro** prostora X. Skup P je skup svih tačaka kondenzacije skupa X.

U narednim redovima ponudićemo alternativni dokaz teoreme Kantor-Bendiksona i istovremeno algoritam za pronalaženje savršenog jezgra datog poljskog prostora. Koristićemo osnovna svojstva ordinala, konkretno njihove ”lepe” osobine koje su zadržali kao uopštenja prirodnih brojeva - uopštenje matematičke indukcije, tzv. transfinitnu indukciju a sa njom i transfinitnu rekurziju, kao i činjenicu da svaki neprazan skup ordinala ima najmanji element. S obzirom da mnoge konstrukcije u najrazličitijim oblastima matematike, pa i matematičkoj analizi počivaju na ordinalima, čitaocu preporučujemo da usvoji (bar) osnovne pojmovi koje mu omogućuju rad sa njima.

Definicija 2.6.11 Sa ORD označavamo klasu[13] ordinala:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots$$

Ordinal α je sledbenik ordinala β ako važi: $\alpha = \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$. Ordinal β tada zovemo prethodnikom ordinala β. Ordinal α je granični ako ne postoji ordinal β tako da je $\alpha = \beta + 1$. Ordinal α je naredni ako nije granični niti 0. Svaki ordinal identifikujemo sa skupom ordinala manjih od njega ; $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$, pa je $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Za dalji rad, trebaće nam

[13]Jer ”skup” svih ordinala nije skup, u smislu ZFC teorije, kao što ni skup svih skupova nije skup

Teorema 2.6.12 Neka je X prostor koji zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti i neka je $\langle F_\alpha : \alpha < \rho \rangle$ strogo opadajući transfinitni niz zatvorenih skupova[14].Tada je ρ prebrojiv ordinal. Analogno tvrđenje važi i za strogo rastući transfinitni niz zatvorenih skupova.

Dokaz. Neka je $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza topološkog prostora X. Pridružimo svakom otvorenom skupu $F \subseteq X$ skup brojeva $N(F) = \{n : U_n \cap F \neq \emptyset\}$. S obzirom na način definisanja skupa $N(F)$, jasno je da $X \setminus F = \bigcup\{U_n : n \notin N(F)\}$ pa je pridruživanje $F \mapsto N(F)$ injektivno. Takođe, vredi i monotonost ovog preslikavanja F u smislu $F \subseteq G \to N(F) \subseteq N(G)$. Dakle, niz skupova $\langle F_\alpha : \alpha < \rho \rangle$ funkcijom F preslikavamo u niz $\langle N(F_\alpha) : \alpha < \rho \rangle$ odnosno strogo monotoni dobro uređeni niz podskupova $\mathbb{N}$ pa je $|\rho| = \aleph_0$ odnosno ρ je prebrojiv.
$\square$

Definicija 2.6.13 Neka je dat topološki prostor X. Neka je

$$X' = \{x \in X : x \text{ je tačka nagomilavanja skupa } X\}.$$

X' zovemo **Kantor-Bendiksonov izvod** prostora X.

Koristeći transfinitnu rekurziju definišemo **iterirane Kantor – Bendiksonove izvode** kao što sledi

$$X_0 = X,$$

$$X_{\alpha+1} = (X_\alpha)',$$

$$X_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha, \text{ ako je } \lambda \text{ granični ordinal.}^{15}.$$

Tada je $\langle X_\alpha : \alpha \in ORD \rangle$ opadajući niz zatvorenih (pod)skupova prostora X.

Na osnovu prethodne leme, postoji prebrojiv ordinal α_0 tako da je $X^\alpha = X^{\alpha_0}$ za svako $\alpha \in ORD, \alpha \geq \alpha_0$ (primetimo da, kada prvi put u nizu $X^1, X^2, \ldots$)pronađemo jednakost $X^{\alpha_0} = X^{\alpha_0+1}$, za sve ostale $\alpha \geq \alpha_0$ je $X^{\alpha_0} = X^\alpha$).

Teorema 2.6.14 Neka je X poljski prostor. Tada za neki prebrojiv ordinal α_0 važi $X_\alpha = X_{\alpha_0}$ za sve $\alpha \geq \alpha_0$ i X_{α_0} je savršeno jezgro prostora X.

---

[14]Naravno, misli se opadajući u smislu inkluzije,tj. $\alpha < \beta \to F_\beta \subset F_\alpha$.

[15]Dakle, parafrazirano, Kantor - Bendiksonov (prvi)izvod od X je skup tačaka nagomilavanja prostora X, drugi izvod je - skup tačaka nagomilavanja prvog itd. Kada u skupu ordinala "skočimo" do onog koji nema neposrednog prethodnika, kao što je ω, Kantor - Bendiksonov izvod koji mu je pridružen dobijamo u preseku izvoda koji odgovaraju ordinalima koji mu prethode.

Dokaz. Koristićemo transfinitnu indukciju po α kako bi dokazali da je $P \subseteq X^\alpha$ za svaki ordinal α. Neka je P savršeno jezgro prostora X i neka važi $P \subseteq X^\beta$ za sve $\beta < \alpha$. Razlikujemo dva slučaja.

Ako je α naredni ordinal, postoji $\gamma \in ORD, \alpha = \gamma + 1$. Tada, s obzirom da je $P \subseteq X^\gamma$,očigledno i $P \subseteq (X^\gamma)' = X^{\gamma+1} = X^\alpha$ (ako je x tačka kondenzacije prostora x koja pripada skupu X^γ, tada je ona i tačka nagomilavanja skupa X^γ).

Sa druge strane, ako je α granični ordinal, s obzirom da je $P \subseteq X^\beta$ za sve $\beta < \alpha$, imamo i $P \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha} X^\beta = X^\alpha$.

Neka je α_0 prebrojiv ordinal tako da važi $X^\alpha = X^{\alpha_0}$ za $\alpha \geq \alpha_0$, onda $X^{\alpha_0} = X^{\alpha_0+1} = (X^{\alpha_0})'$ pa je X^{α_0} savršen i zato $X^{\alpha_0} \subseteq P$. $\square$

Sada smo u mogućnosti da formulišemo sledeću definiciju.

Definicija 2.6.15 Za svaki poljski prostor X najmanji ordinal α_0 iz teoreme 2.6.14 zovemo Kantor-Bendiksonov rang prostora X.[16] i obeležavamo ga sa $|X|_{CB}$. Uvodimo i sledeću oznaku:

$$X^\infty = X^{|X|_{CB}} = \text{savršeno jezgro prostora } X$$

Ako je X poljski prostor, evidentno važi sledeća ekvivalencija:

$$X \text{ je prebrojiv} \leftrightarrow X^\infty = \emptyset.$$

Može se, transfinitnom indukcijom, pokazati da je za svaki ordinal α, $|X^{\alpha+1} \setminus X^\alpha| \leq \aleph_0$. Za $\alpha = 0$ tvrđenje se svodi na $|X \setminus X'| \leq \aleph_0$. Ova nejednakost se može lako proveriti; zaista: $X \setminus X'$ je skup svih tačaka

$$\{x \in X : \text{postoji okolina } U \text{ od } x \text{ u kojoj se nalazi samo tačka } x.\}$$

Tada je $X \setminus X'$ jednak uniji navedenih okolina a, s obzirom da X kao poljski prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, po teoremi Lindelefa postoji prebrojiv skup okolna $U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$ čija je unija $X \setminus X'$. Sada je očigledno skup $X \setminus X'$ najviše prebrojiv. Ako pretpostavimo da tvrđenje važi za sve $\beta < \alpha + 1$, važi i za α, pa primenjujući "bazu indukcije"(jer je X^α poljski prostor, za svaki ordinal α), imamo

$$|X^{\alpha+1} \setminus X^\alpha| = |(X^\alpha)' \setminus (X^\alpha)| \leq \aleph_0.$$

Sada se Kantor-Bendiksonova teorema može lako dokazati. Za dati prostor X savršeno jezgro je skup $X^\infty = X^{|X|_{CB}}$, dok je $C = \bigcup_{\beta<|X|_{CB}} (X^{\beta+1} \setminus X^\beta)$. Jasno je da $|P| \leq \aleph_0$, te da je $P \cap C = \emptyset$.

[16] Ovaj najmanji postoji jer neprazan skup ordinala $\{\alpha_0 : X^{\alpha_0} = X^\alpha \text{ za sve } \alpha \leq \alpha_0\}$ ima, kao skup ordinala, najmanji element.

2.7 Berovi prostori. Šokeova i jaka Šokeova igra

U narednoj glavi bavimo se karakterizacijom poljskih prostora putem Šokeovih i jakih Šokeovih igara. Na datom topološkom prostoru dva igrača biraju otvorene skupove po određenom pravilu i formulišu se kriterijumi pobede prvog odnosno drugog igrača. Pokušaćemo da problem karakterizacije poljskog prostora svedemo na problem strategije jednog od igrača ove igre.

Već na osnovu kratkog prikaza ovih topoloških igara, čitaocu je jasno da put do poljskih prostora neće biti kratak. Zato ćemo uvesti neke pojmove koji će nam olakšati dalji rad i omogučiti lakše manipulisanje kasnijim pojmovima.

Definicija 2.7.1 Neka je dat topološki prostor X. Skup $A \subseteq X$ je **nigde gust** (tanak) ako je $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Iz same definicije jasno je da važi:

Lema 2.7.2 Važe sledeće tvrdnje:

- A je nigde gust ako i samo ako skup $\overline{A}$ nigde gust.
- A je nigde gust akko je skup $X \setminus A$ gust u X □

Definicija 2.7.3 Skup $A \subset X$ je **prve kategorije** ako je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, gde su A_n nigde gusti skupovi. Skup koji nije prve kategorije zovemo skupom **druge kategorije**. Komplement skupa prve kategorije zovemo **rezidualni skup.**

Neposredno na osnovu definicije (i De Morganovih zakona) dobijamo da je skup rezidualan ako i samo ako se može predstaviti kao presek prebrojive familije gustih, otvorenih skupova.

Primer 2.7.4 U prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ singlton je nigde gust.

Zaista, $\mathrm{Int}(\overline{\{x\}}) = \mathrm{Int}(\{x\}) = \emptyset$.

Primer 2.7.5 U prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ skup $\mathbb{Q}$ je prve kategorije.

Jasno, jer je $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$ unija prebrojivo mnogo nigde gustih skupova.

Primer 2.7.6 Kantorov skup $E_{1/3}$ je nigde gust u Kantorovom skupu $\mathcal{C}$

Pomenuli smo da se Kantorov prostor, $\mathcal{C}$ može potopiti u interval $[0,1]$ i pri tome je homeomorfan Kantorovom skupu $E_{1/3}$ (skupu realnih brojeva između 0 i 1 koji imaju samo nule i dvojke u ternarnom zapisu). Ovaj skup je zatvoren u $[0,1]$ (primer 1.3.40). Prema tome, $\mathrm{Int}(\overline{E_{1/3}}) = \mathrm{Int}(E_{1/3})$. Pokazaćemo da je skup $\mathrm{Int}(E_{1/3}) = \emptyset$ ili, ekvivalentno, pokazaćemo da za proizvoljno $x \in E_{1/3}$ i dato $\varepsilon > 0$ postoji $y \notin E_{1/3}$ za koji važi $|x - y| < \varepsilon$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ broj za koji je $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$. Tada x možemo zapisati kao

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = (0.a_1a_2\ldots)_3.$$

Pretpostavimo da ovaj zapis nije konačan, tj. da ne sadrži stacionaran niz nula ili dvojki. Za $n_1 \geq n_0$ sa osobinom $a_{n_1} = 2$ formiramo $y = (0.b_1b_2b_3\ldots)_3$ gde je $b_n = a_n$ za sve $n \neq n_1$ i $b_{n_1} = 1$. Jasno, $y \notin E_{1/3}$. Tada je $|x - y| < \varepsilon$. Slično se za x sa konačnim zapisom može naći y tako da je $|x - y| < \varepsilon$. Dakle, $\mathrm{Int}(E_{1/3}) = \emptyset$.

Primer 2.7.7 U Berovom prostoru $\mathcal{N}$ svaki kompaktan skup je nigde gust

Zaista, kompaktan skup F je zatvoren (jer je $\mathcal{N}$ metrizabilan pa i Hausdorfov) i postoji $x \in \mathcal{N}$ za koji je ispunjeno $y(n) \leq x(n)$ za sve $y \in F$ i za sve $n \in \omega$. Za proizvoljan element $y \in F$ i dato $\varepsilon > 0$ odredimo $n_0 \in \mathbb{N}$ za koji važi: $\frac{1}{2^{n_0+1}} < \varepsilon$. Element $y' \in \mathcal{N}$ definisan kao $y'(i) = y(i)$ za $i < n_0$ i $y'(i) = x(i) + 1$ za $i \geq n_0$ ne pripada skupu F, s obzirom na način na koji je x definisan, dok je $d'(y, y') = \frac{1}{2^{n_0+1}} < \varepsilon$, pa je $\mathrm{Int}(\overline{F}) = \mathrm{Int}(F) = \emptyset$. Kao neposrednu posledicu ovog primera dobijamo da je u Berovom prostoru σ-kompaktan skup ujedno i skup prve kategorije.

Na osnovu prethodnog primera izvodimo sledeći zaključak.

Primer 2.7.8 Prostor $\mathcal{N}$ nije lokalno kompaktan

Pokazaćemo i više od toga - ni za jednu tačku Berovog prostora ne postoji otvorena okolina čije je zatvorenje kompaktno. Neka je, dakle $f \in \mathcal{N}$ proizvoljno. Pretpostavimo da postoji otvoreni skup O tako da je $f \in O$ i $K = \overline{O}$ je kompaktan skup. Tada je, $O \subseteq K$ pa je, s obzirom na monotonost operatora unutrašnjosti: $O = \mathrm{Int}(O) \subseteq \mathrm{Int}(K)$. S obzirom na prethodni primer dobijamo $O = \emptyset$, što je kontradikcija jer smo pretpostavili da je $f \in O$.

Primetimo da imamo i sledeći kontraprimer

Primer 2.7.9 Proizvod prebrojivo mnogo lokalno kompaktnih skupova ne mora biti lokalno kompaktan

Berov prostor je tihonovski proizvod prebrojivo mnogo diskretnih, dakle lokalno kompaktnih prostora, a nije lokalno kompaktan.

Za dalji rad biće nam potrebni tzv. Berovi prostori. Pre nego što ih uvedemo, dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 2.7.10 Neka je X topološki prostor. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1. Svaki neprazan otvoren skup u X je skup druge kategorije.
2. Svaki rezidualni skup u X je gust.
3. Presek prebrojivo mnogo gustih, otvorenih skupova u X je gust skup.

Dokaz. (1-2) Pretpostavimo da ne važi (2) tj. da postoji A čiji je komplement skup prve kategorije koji nije gust. Tada je $X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. S obzirom da je $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$, pri čemu je $X \setminus A$ skup prve kategorije, i skup $X \setminus \overline{A}$ je prve kategorije. Ovaj skup je, međutim, otvoren, kao komplement zatvorenog skupa, čime smo došli u kontradikciju sa (1). Dakle, mora važiti (2).

(2-3) Pretpostavimo da važi (2). Neka su $D_n, n \in \mathbb{N}$ gusti skupovi u X, dakle $\overline{D_n} = X$. Dovoljno je pokazati da je skup $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ rezidualni skup. Imamo $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus D_n)$, a skupovi $X \setminus D_n$ su nigde gusti, pa je $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus D_n)$ zaista skup prve kategorije, dakle $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ je rezidualni skup.

(3-1) Pretpostavljamo da važi (3) a ne važi (1) tj. da postoji otvoreni skup O koji je prebrojiva unija nigde gustih skupova A_n, $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Skupovi $X \setminus \overline{A_n}$, pa i $X \setminus A_n$ su gusti, pa je i njihov presek gust. Ali $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus O$ koji ne može biti gust jer je zatvoren, dakle $\overline{X \setminus O} = X \setminus O \neq X$. Očigledna kontradikcija, iz koje sledi da (3) implicira (1). □

Definicija 2.7.11 Topološki prostor je **Berov prostor** ako zadovoljava ekvivalentne uslove (1)-(3) iz prethodne teoreme.

Teorema 2.7.12 Ako je X Berov prostor i $U \subseteq X$ otvoren, onda je i U Berov prostor.

Dokaz. Pokazaćemo da je ispunjen uslov (3). Neka je $\langle U_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ prebrojiv niz otvorenih, gustih skupova u U pa stoga otvorenih i u X. Tada je $U_n \cup (X \setminus \overline{U})$

otvoren i gust u X, pa je $\bigcap_n (U_n \cup (X \setminus \overline{U})) = (\bigcap_n U_n) \cup (X \setminus \overline{U})$ gust u X, iz čega zaključujemo da je $\bigcap_n U_n$ gust u U. $\Box$

Teorema 2.7.13 Svaki kompletno metrizabilan prostor je Berov. Svaki lokalno kompaktan Hausdorfov prostor je Berov.

Dokaz. Neka je (X, d) prostor sa kompletnom metrikom. Neka je, dalje $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ niz otvorenih, gustih skupova u X i neka je U neprazan, otvoren skup. Pokazaćemo da je $U \cap (\bigcap_n U_n) \neq \emptyset$ iz čega neposredno sledi da je presek skupova U_n gust. Kako je $U \cap U_0 \neq \emptyset$, postoji B_0, otvorena lopta poluprečnika $< \frac{1}{2}$ za koju važi $\overline{B_0} \subseteq U \cap U_0$. Kako je $B_0 \cap U_1 \neq \emptyset$, postoji otvorena lopta B_1 poluprečnika $< \frac{1}{3}$ za koju je $\overline{B_1} \subseteq B_0 \cap U_1$. Sukcesivno dobijamo prebrojiv niz lopti B_i. Na osnovu leme 2.3.14 imamo $\bigcap_n B_n = \bigcap_n \overline{B_n} \subseteq U \cap (\bigcap_n U_n)$.

Razmotrimo i drugi deo dokaza, dakle Hausdorfov i lokalno kompaktni prostor X. Za svaku tačku x i otvorenu okolinu U od x postoji otvorena okolina V od x tako da je $\overline{V}$ kompaktno i $\overline{V} \subseteq U$. Sličnim rezonovanjem kao i u prvom delu dokaza, konstrukcijom otvorenih skupova B_i tako da su B_i kompaktni dobijamo $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$. $\Box$

Konačno definišemo i Šokeovu igru.

Definicija 2.7.14 Neka je X neprazan topološki prostor. **Šokeova igra** G_X na prostoru X definisana je kako sledi. Igrači I i II naizmenično otvorene podskupove skupa X:
I: $U_0 \;\; U_1 \;\; \ldots$
II: $\;\; V_0 \;\; V_1 \;\; \ldots$
pri čemu važi $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \ldots$. Kažemo da igrač II pobeđuje ako je $\bigcap_n V_n = \bigcap_n U_n \neq \emptyset$. Igrač I pobeđuje kada je $\bigcap_n V_n = \bigcap_n U_n = \emptyset$. Pobednička strategija igrača I je pravilo koje igraču I u n-tom koraku sugeriše potez, u zavisnosti od toga igre u prethodnim koracima. Formalizovaćemo ovo "pravilo".

Neka je T drvo dozvoljenih pozicija u Šokeovoj igri, dakle T je skup konačnih nizova oblika $\{(W_0, W_1, \ldots, W_n)\}$, gde su W_i neprazni, otvoreni podskupovi skupa X i $W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \ldots \supseteq W_n$. **Strategija za igrača I** je poddrvo $\sigma \subseteq T$ tako da je ispunjeno

1. σ je neprazno;

2. ako je $(U_0, V_0, \ldots U_n) \in \sigma$, onda za sve otvorene, neprazne $V_n \subseteq U_n$ važi da i $(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n) \in \sigma$;

3. ako je $(U_0, V_0, \ldots U_{n-1}, V_{n-1}) \in \sigma$, tada postoji samo jedno U_n tako da je $(U_0, V_0, \ldots U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma$.

Intuitivno, strategiju shvatamo na sledeći način. I igra U_0, gde je $(U_0) \in \sigma$; II bira neprazan, otvoreni skup $V_0 \subseteq U_0$, a na osnovu (2) je $(U_0, V_0) \in \sigma$. Tada igrač I bira, na osnovu (3) skup U_1 tako da je $(U_0, V_0, U_1) \in \sigma$ itd.

Pozicija $(W_0, W_1, \ldots W_n) \in T$ je kompatibilna sa σ ako $(W_0, W_1, \ldots W_n) \in \sigma$. Tok igre $(U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots)$ je kompatibilan sa strategijom σ ako je $(U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots) \in [\sigma]$. Strategija σ je **pobednička strategija za I** ako on pobeđuje kad god je tok igre kompatibilan sa σ tj. ako važi implikacija

$$(U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots) \in [\sigma] \to \bigcap_n U_n = \bigcap_n V_n = \emptyset$$

Analogno definišemo strategiju i pobedničku strategiju za drugog igrača.

Teorema 2.7.15 (Oxtoby) Neprazan topološki prostor X je Berov prostor ako i samo ako igrač I nema pobedničku strategiju za Šokeovu igru G_X.

Dokaz. ($\leftarrow$) Ovo je znatno lakši smer. Pretpostavićemo da X nije Berov prostor i pokazaćemo da tada igrač I ima pobedničku strategiju. S obzirom na pretpostavku, postoje gusti skupovi $\langle G_n : n \in \omega \rangle$, njih prebrojivo mnogo, čiji presek nije gust, pa postoji otvoren skup U_0 i $U_0 \cap \bigcap_n G_n = \emptyset$. Igrač I bira skup U_0. Igrač II uzvraća skupom $V_0 \subseteq U_0$, pa kako je $V_0 \cap G_0 \neq \emptyset$, igrač I bira za U_1 skup $V_0 \cap G_0$. Za skup V_1 koji igra II, I odgovara skupom $U_2 = V_1 \cap G_1 \subseteq V_1$ itd. jasno je da $\bigcap_n U_n \subseteq U_0 \cap \bigcap_n G_n = \emptyset$, čime smo opisali pobedničku strategiju za I.

($\rightarrow$) Pretpostavićemo da I igrač ima pobedničku strategiju. Neka je U_0 prvi "potez" igrača I kompatibilan sa strategijom σ. Pokazaćemo da U_0 nije Berov, što će značiti da ni ceo prostor X nije Berov.

Konstruišimo potkresano drvo $S \subseteq \sigma$ tako da za sve $p = (U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S$ skup $\mathcal{U}_p = \{U_{n+1} : (U_0, V_0, \ldots, V_n, U_{n+1}) \in S\}$ sadrži po parovima disjunktne otvorene skupove i $\bigcup \mathcal{U}_p$ je gust u U_n. Neka je, dalje $W_n = \bigcup \{U_n : (U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S\}$. Za svako n, skup W_n je otvoren i gust u U_0. Imamo, dakle, prebrojiv niz gustih skupova. Pokazaćemo da im je presek prazan. Pretpostavimo suprotno, da postoji $x \in \bigcap_n W_n$. Tada postoji jedinstveni tok igre $(U_0, V_0, \ldots U_n, V_n, \ldots) \in [S]$ tako da je $x \in U_n$ za sve n, pa $\bigcap_n U_n \neq \emptyset$,što je kontradikcija sa činjenicom da $(U_0, V_0, \ldots) \in [\sigma]$ a σ je pobednička strategija za I.

Pažljivom čitaocu neće promaći propust u ovom dokazu-nismo pokazali egzistenciju (pod)drveta S. S obzirom na složenost dokaza, odlučili smo se da rekurzivnu konstrukciju poddrveta S izložimo tek na kraju, kako bi čitaocu olakšali praćenje. Dakle, rekurzivnim putem konstruišemo S - "biramo" koje elemente strategije σ smeštamo u S. Prvo $\emptyset \in S$. Ako je $(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}) \in S$, onda, na osnovu definicije strategije σ, postoji samo jedan skup U_n tako da je $(U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in \sigma$. Ako je $p = (U_0, V_0, \ldots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \in S$, za svaki otvoren skup $V_n \subseteq U_n$ i uz oznaku $V_n^* = U_{n+1}$ (U_{n+1} je skup koji, po strategiji σ bira prvi igrač nakon što drugi odigra V_n) jasno je da je U_{n+1} otvoreni podskup skupa V_n. Neka je $\mathcal{V}_p$ maksimalna (u smislu inkluzije) kolekcija nepraznih, otvorenih skupova $V_n \subseteq U_n$ za koje je $\{V_n^* : V_n \in \mathcal{V}_p\}$ skup po parovima disjunktan. Tada u poddrvo S smeštamo sve elemente $(U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, V_n^*)$ za koje je $V_n \in \mathcal{V}_p$. Skup $\mathcal{U}_p = \{U_{n+1} : (U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U_{n+1}) \in S\} = \{V_n^* : V_n \in \mathcal{V}_p\}$ tada sadrži po parovima disjunktne skupove. Skup $\bigcup \mathcal{U}_p$ je i gust u U_n. Zaista, ako bi pretpostavili da postoji neki $\tilde{V_n} \subseteq U_n$ disjunktan sa skupom $\bigcup \mathcal{U}_p$, tada skup $\mathcal{V}_p \cup \{\tilde{V_n}\}$ ima istu osobinu kao i maksimalna kolekcija $\mathcal{V}_p$, što je kontradikcija. □

Definicija 2.7.16 Neprazan topološki prostor je **Šokeov prosor** ako igrač II ima pobedničku strategiju u G_X.

Shodno prethodnoj definiciji i s obzirom da je nemoguće da oba igrača imaju pobedničku strategiju u G_X neposredno sledi da je svaki Šokeov prostor Berov prostor. Obrat u opštem slučaju ne važi.

Na osnovu teoreme 2.7.13 imamo da je svaki poljski prostor ujedno i Berov prostor. Upravo smo zaključili da je i svaki Šokeov prostor Berov. Međutim, ove dve relacije ništa ne govore o povezanosti poljskih prostora i Šokeovih igara. Ispostavlja se da za karakterizaciju poljskih prostora Šokeove igre nisu dovoljne. Potrebne su nam jake Šokeove igre, što izlažemo u daljem tekstu.

Definicija 2.7.17 Neka je X neprazan topološki prostor. **Jaka Šokeova igra** G_X^s na prostoru X definisana je kako sledi. Igrači I i II naizmenično biraju otvorene podskupove X:

I: $x_0, U_0 \;\; x_1, U_1 \;\; \ldots$

II: $\;\; V_0 \;\; V_1 \;\; \ldots$

kao prilikom igranja Šokeove igre, ali ovde igrač I dodatno bira i $x_n \in U_n$ a igrač II bira $V_n \subseteq U_n$ za koji važi $x_n \in V_n$. Mora biti zadovoljeno $U_0 \supseteq V_0 \supseteq$

$U_1 \supseteq V_1 \ldots$ a takođe i $x_n \in U_n,\ x_n \in V_n$. Kažemo da igrač II pobeđuje ako je $\bigcap_n V_n = \bigcap_n U_n \neq \emptyset$. Igrač I pobeđuje kada je $\bigcap_n V_n = \bigcap_n U_n = \emptyset$.

Neprazan prostor X zovemo **jak Šokeov prostor** ako igrač II ima pobedničku strategiju za jaku Šokeovu igru G^s_X.

Malom modifikacijom prvog smera teoreme 2.7.15 jednostavno se pokazuje da ako X nije Berov prostor, igrač I ima pobedničku strategiju i u jakoj Šokeov igri na X pa X nije jak Šokeov prostor. Kontrapozicijom dobijamo da je svaki jak Šokeov prostor Berov. Sa druge strane, lako se pokazuje da je svaki kompletno metrizabilan ili lokalno kompaktan Hausdorfov prostor i jak Šokeov. Zaista, za kompletno metrizabilan prostor X jednostavno se izvodi pobednička strategija drugog igrača. Ako igrač I odigra x_n, U_n, drugi odigra $V_n = B(x_n, r_n)$ tako da je ispunjeno $\overline{B(x_n, r_n)} \subseteq U_n$ i $r_n < \frac{1}{n+1}$ za $n \in \omega$. Tada je $\bigcap_n V_n = \bigcap_n \overline{V_n} \neq \emptyset$.

Klasa jakih Šokeovih prostora je uža od klase Šokeovih prostora, tj. svaki jak Šokeov je ujedno i Šokeov prostor. Zaista, pod pretpostavkom da je X jak Šokeov, II igrač ima pobedničku strategiju i za Šokeovu igru. Kad god igrač I odabere (neprazan) skup U_n, igrač II mu pridruži element $x_n \in U_n$ i dalje igra po pravilima jake Šokeove igre, što mu donosi pobedu.

Teorema 2.7.18 Važe sledeća tvrđenja.

1. Ako je X jak Šokeov i $Y \subseteq X$ skup sa osobinom G_δ, tada je i Y jak Šokeov prostor.

2. Ako je $f : X \to Y$ neprekidna, otvorena sirjekcija i X jak Šokeov prostor, i Y je jak Šokeov.

3. $X = \prod_{i \in I} X_i$ je jak Šokeov prostor ako i samo ako su za svako $i \in I$ prostori X_i jaki Šokeovi.

Dokaz. 1) Neka je X jak Šokeov i $Y = \bigcap_n W_n \subseteq X$ gde su W_n otvoreni skupovi. Treba opisati pobedničku strategiju igrača II za igru na prostoru Y. Čitalac je verovatno uočio da smo slične probleme na koje smo do sada nailazili, dakle one koji iziskuju konstrukciju drveta, pravila ili uopšte, nekakve prebrojive sheme, rešavali principom rekurzije pa ćemo tako i ovom prilikom postupiti. Rekurzivno ćemo definisati odgovore igrača II na poteze prvog igrača. Neka su, stoga $x_0, U_0, x_1, U_1, \ldots$ potezi igrača I u igri G^s_Y. Rekurziju počinjemo bazom, pa i u ovom slučaju razmatramo koji skup treba da odabere II kao odgovor na U_0 igrača I. Kako je U_0 otvoren u indukovanoj topologiji, postoji skup U_0', otvoren u X tako da je $U_0' \cap Y = U_0$. Neka u igri G_X^s prvi igrač odabere x_0 i $U_0^* = U_0' \cap W_0$[17]. Neka je V_0^* odgovor II igrača u igri na X. Tada za igru na Y odaberimo $V_0 = V_0^* \cap Y$ kao potez drugog igrača. Primetimo odmah da su pravila igre ispunjena jer $V_0 \subseteq U_0$ i $x_0 \in V_0$. Uopšte, pretpostavićemo da su $x_0, U_0, V_0, \dots, x_n, U_n, V_n$ i U_n', U_n^*, V_n^* definisani tako da je $U_n' \cap Y = U_n,\ U_n^* = U_n' \cap W_n,\ V_n = V_n^* \cap Y$. Dalje ćemo pretpostaviti da je igrač I odigrao $x_{n+1},\ U_{n+1}$ u igri G_Y^s. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $U_{n+1} \subseteq V_n$. Neka je U_{n+1}' otvoren skup u X za koji važi $U_{n+1}' \cap Y = U_{n+1}$. Neka je, opet bez umanjenja opštosti, $U_{n+1}' \subseteq V_n^*$. Opet se vraćamo na igru u prostoru X. Neka igrač I bira x_n i skup $U_{n+1}^* = U_{n+1}' \cap W_{n+1}$ u $(n+1)$-om koraku. Pretpostavimo da je V_{n+1}^* odgovor igrača II na potez U_{n+1}^*, prema pobedničkoj strategiju. Tada u igri G_X^s neka je odgovor drugog igrača $V_{n+1} = V_{n+1}^* \cap Y$. Lako se pokazuje da su pravila jake Šokeove igre zadovoljena, dakle $x_{n+1} \in V_{n+1} \subseteq U_{n+1}$. S obzirom da je igrač II igrao po pobedničkoj strategiji na X,vredi $\bigcap_n U_n^* \neq \emptyset$. Zato je

$$\bigcap_n U_n = \bigcap_n (U_n' \cap Y) = \bigcap_n U_n' \cap \bigcap_n W_n = \bigcap_n (U_n' \cap W_n) = \bigcap_n U_n^* \neq \emptyset.$$

Ovim smo opisali pobedničku strategiju drugog igrača na Y, pa je reč o jakom Šokeovom prostoru.

2) Opet igru na "nepoznatom" prostoru Y dovodimo, putem preslikavanja f, u vezu sa jakom Šokeovom igrom na prostoru X gde znamo da II ima pobedničku strategiju. Neka su $y_0, U_0, y_1, U_1, \dots$ potezi igrača I u igri na Y. S obzirom da je f sirjekcija, postoje $x_n \in X$ za koje važi $y_n = f(x_n)$. Skupovi $f^{-1}[U_n]$ su neprazni i otvoreni u X jer je f i neprekidna. Neka su u igri na X potezi prvog igrača dati sa $x_0, f^{-1}[U_0], \dots, x_n, f^{-1}[U_n]$ i neka su odgovori drugog igrača, prema pobedničkoj strategiji, otvoreni skupovi $W_0, W_1, \dots, W_n$. Tada se jednostavno proverava da se odabirom drugog igrača skupova
$f(W_0), f(W_1), \dots, f(W_n)$[18] igra na Y završava u njegovu korist.

3) Neka je za, svako $i \in I$ sa π_i označena i-ta projekcija skupa X. S obzirom da je $\pi_i : X \to X_i$ neprekidno, otvoreno i sirjektivno preslikavanje, a na osnovu već dokazanog svojstva 2), jasno je da su svi X_i jaki Šokeovi prostori ako je proizvod X jak Šokeov. Obratno, pretpostavimo da je za svako $i \in I$ skup X_i jak Šokeov. Pokazaćemo da u igri na X drugi igrač ima pobedničku strategiju tako što ćemo, pored ove glavne, igrati sporedne igre na komponentnim prostorima X_i, dakle $G_{X_i}^s$. Neka je x_0, U_0 prvi potez igrača I u glavnoj igri. Za otvoren skup U_0 postoji bazni

[17]Primetimo da $x_0 \in U_0' \cap W_0 = U_0^*$,tj. ispunjena su pravila igre na X.

[18]Ovi skupovi su otvoreni, jer je f otvoreno preslikavanje.

skup W_0 za koji važi $W_0 \subseteq U_0$ a s obzirom na način na koji se gradi baza proizvoda topoloških prostora, postoji konačno mnogo indeksa $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ za koji je $W_0 = \pi_{i_1}^{-1}[U_{i_1}] \cap \pi_{i_2}^{-1}[U_{i_2}] \cap \ldots \cap \pi_{i_n}^{-1}[U_{i_n}]$ gde su U_{i_k} otvoreni u skupovima X_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tada na svakom od prostora X_{i_k} započinjemo igru potezima prvog igrača $\pi_{i_k}(x_0)$, $\pi_{i_k}[W_0] = U_{i_k}, k = 1, 2, \ldots, n$. U ovim prostorima igrač II ima pobednićku strategiju, pa neka prema njoj bira skupovi V_{i_k}. Povratkom u X dobijamo za potez drugog igrača otvoren (štaviše bazni) skup $V_0 = \pi_{i_1}^{-1}[V_{i_1}] \cap \pi_{i_2}^{-1}[V_{i_2}] \cap \ldots \cap \pi_{i_n}^{-1}[V_{i_n}]$. Analognim rezonom (i primenom rekurzije) dobijamo i $(n+1)$-i potez igrača II na osnovu prethodnih poteza igrača I. Primetimo da, i pored toga što indeksni skup I može biti proizvoljan (dakle,ne mora biti prebrojiv), igramo najviše prebrojivo mnogo igara na prostorima X_i u kojima pobeđuje igrač II. To nam daje neprazan presek skupova koje II izabere u igri G_X^s pa on pobeđuje. □

Teorema 2.7.19 Neka je X poljski prostor i $Y \subseteq X$. Tada je Y jak vSokeov ako i samo ako je poljski.

Dokaz. Jedan smer je trivijalan; naime, ako je Y poljski prostor, dakle svakako kompletno metrizabilan, pa je jak Šokeov.

Za dokaz obratnog smera, primetimo da je dovoljno pokazati da Y ima osobinu G_δ.

Pre dokaza, trebaće nam jedno svojstvo prostora X - svaka kolekcija njegovih otvorenih skupova ima tačkasto konaňo profinjenje. Preciznije, za svaku kolekciju $\mathcal{U}$ otvorenih skupova postoji kolekcija $\mathcal{U}'$ tako da je zadovoljeno:

1. $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}'$;
2. Za svako $W \in \mathcal{U}'$ postoji neko $U \in \mathcal{U}$ tako da je ispunjeno $W \subseteq U$
3. Za svako $x \in X$ postoji najviše konačno mnogo elemenata $W \in \mathcal{U}'$ tako da $x \in W$.

Ako je d kompletna metrika koja generiše topologiju na X. Uslovima koje mora da zadovoljava kolekcija $\mathcal{U}$ dodajemo i sledeći - za proizvoljno, unapred dato $\varepsilon > 0$ važi $\mathrm{diam(W)} < \varepsilon$ za sve $W \in \mathcal{U}'$.

Neka je, dakle $\mathcal{U}$ data kolekcija otvorenih skupova i $\varepsilon > 0$. Bez umanjenja opštosti pretpostavićemo da je $\mathrm{diam(U)} < \varepsilon$ za svako $U \in \mathcal{U}$. S obzirom da je X prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti, iz prostora $\mathcal{U}$ možemo izdvojiti prebrojiv potpokrivač za $\mathcal{U}$ pa možemo odmah pretpostaviti da je on prebrojiv.

Numerišimo njegove elemente $U_0, U_1, \ldots$. Neka je, za svako $n \in \omega$, $\langle U_{n,m} : m \in \omega\rangle$ niz otvorenih skupova tako da važi $U_{n,m} \subseteq U_{n,m+1}$ i takođe $\overline{U_{n,m}} \subseteq U_n$ i $\bigcup_{m\in\omega} U_{n,m} = U_n$. Definišimo i $U'_n = U_n \setminus (\bigcup_{m<n} \overline{U_{m,n}})$. Tada je profinjenje kolekcije $\mathcal{U}$ dato sa $\mathcal{U}' = \{U'_n : n \in \omega\}$. Važi $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}'$. Zaista, za $x \in X$ neka je $n \in \omega$ najmanji broj za koji je $x \in U_n$. Tada $x \in U'_n$. Treba proveriti i tačkasto konačno profinjenje. Uzmimo proizvoljno $x \in X$ i neka je $n \in \omega$ najmanji broj za koji je $x \in U_n$. Neka je, dalje $m \geq n$ najmanji broj za koji je $x \in U_{n,m}$. Tada je za sve $k \geq m,\ x \notin U'_k$. Ova konstatacija završava dokaz.

Nakon ove digresije, nastavljamo sa glavnim dokazom. Definisaćemo drvo T koje sadrži nizove oblika

$$(U'_0, x_0, V_0, U'_1, x_1, V_1, \ldots, U'_{n-1}, x_{n-1}, V_{n-1}, U'_n).$$

Za prirodni broj $n \geq 1$. Neka je pobednička strategija igrača II u igri G^s_Y drvo σ. Razmotrimo prvo skup S_1 svih nizova oblika (U'_0, x_0, V_0, U'_1), gde je $U'_0 = X$, V_0 je odgovor drugog igrača prema strategiji II ako je prvi igrač odigrao x_0, $U'_0 \cap Y = Y$ i važ $U'_1 \cap Y \subseteq V_0$, kako bi u sledećem koraku prvi igrač mogao odabrati upravo ovaj skup. Neka je, dalje $\mathcal{U}_\infty = \{U'_1 : (X, x_0, V_0, U'_1) \in S_1$ za neko $x_0 \in Y\}$ i $W_1 = \bigcup \mathcal{U}_1$. Tada je jasno da je skup W_1 otvoren i da je $Y \subseteq W_1$. Na osnovu prethodne digresije možemo izdvojiti konačno profinjenje od $\mathcal{U}_1$, nazovimo ga $\mathcal{U}'_1$ tako da je za svako $U \in \mathcal{U}'_1$ ispunjeno $\mathrm{diam(U)} < 2^{-1}$.

Neka je $T_1 \subseteq S_1$ poddrvo drveta S_1 takvo da za svako $U'_1 \in \mathcal{U}_1$ postoji jedinstveno $(X, x_0, V_0, U'_1) \in T_1$.

Neka je za neko $n-1$ drvo već konstruisano i neka je S_n skup svih nizova oblika $(U'_0, x_0, V_0, \ldots, U'_{n-1}, x_{n-1}, V_{n-1}, U'_n)$ gde $(U'_0, x_0, \ldots, U_{n-1}) \in T_{n-1}$, i V_n je dobijen korišćenjem pobedničke strategije σ pri čemu se igraju sledeći potezi:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I}\ x_0, Y & x_1, U_1 = U'_1 \cap Y & \ldots & x_{n-1}, U_{n-1} = U'_{n-1} \cap Y \\ \mathrm{II}\ V_0 & V_1 & \ldots & V_{n-1} \end{array}$$

I takođe važi $U'_n \cap Y \subseteq V_{n-1}$. Neka je $\mathcal{U}_n = \{U'_n : (X, x_0, V_0, \ldots, U'_n) \in S_n\}$ i $W_n = \bigcup \mathcal{U}_n$. Skupovi W_n su otvoreni i takođe, kao i za $n = 1$, ispunjeno je $Y \subseteq W_n$. Za svako $p = (X, x_0, V_0, U'_{n-1}) \in T_{n-1}$ kolekcija $\mathcal{U}_p = \{U'_n \in \mathcal{U}_n : (X, x_0, V_0, \ldots, U'_n)$ proširuje $p\}$ ima konačno tačkasto profinjenje sa elementima dijametra manjeg od 2^{-n}. Stavimo $\mathcal{U}'_n = \bigcup_{p\in T_{n-1}} \mathcal{U}'_p$. Tada je $\mathcal{U}'_n$ konačno tačkasto profinjenje od $\mathcal{U}_n$. Definišimo, kao za $n = 1$ poddrvo T_n drveta S_n tako da za svako $U'_n \in \mathcal{U}'_n$ postoji jedinstven $(X, x_0, V_0, \ldots, U'_n) \in T_n$. Neka je, najzad $T = \bigcup_n T_n$.

Pokazaćemo da je $Y = \bigcap_n W_n$, što će pokazati da skup Y ima osobinu G_δ i samim tim završiti dokaz. Trivijalno sledi $Y \subseteq \bigcap_n W_n$ pa je zato dovoljno pokazati obratnu inkluziju. Pretpostavimo da je $x \in \bigcap_n W_n$. Dakle, za sve $n \in \omega$ postoji $(X, x_0, V_0, \ldots, U'_n) \in T$ tako da je $x \in U'_n$. Sa T_x označimo sledeći skup (konkretnije, drvo): $T_x = \{(X, x_0, V_0, \ldots, U_n) \in T : x \in U_n\}$. Na osnovu konstrukcije nije teško pokazati da je poddrvo T_x konačni spliting pa primenom Kenigove leme dobijamo beskonačnu granu $(X, x_0, V_0, \ldots, U'_n, x_n, V_n, \ldots)$ tako da je $x \in \bigcap_n U'_n$ i $(x_0, Y, V_0, \ldots, x_n, U_n = U'_n \cap Y, V_n, \ldots)$ je tok igre na osnovu strategije σ. S obzirom da je na osnovu strategije σ drugi igrač pobeđuje, imamo $\bigcap_n U_n \neq \emptyset$. Sada je i $\bigcap_n U'_n \neq \emptyset$ a s obzirom da dijametri skupova U'_n formiraju nula niz, presek U'_n je singlton i zato $\bigcap_n U_n = \bigcap_n U'_n = \{x\}$ i zato $x \in Y$. □

Tek sada smo u mogućnosti da dokažemo poslednju teoremu u ovom radu.

Teorema 2.7.20 Topološki prostor je poljski ako i samo je T_3, jak Šokeov i poseduje drugu aksiomu prebrojivosti.

Dokaz. Već smo pokazali da je svaki kompletno metrizabilan prostor i jak Šokeov, pa je i svaki poljski prostor jak Šokeov. On je svakako T_3 (i više od toga, T_4, jer je metrizabilan) i zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti jer je metrizabilan i separabilan pa je prvi smer teoreme dokazan.

Obratno, posmatrajmo prostor X koji je jak Šokeov T_3 prostor sa drugom aksiomom prebrojivosti. Na osnovu Urisonove metrizacione teoreme dobijamo da je X metrizabilan. Neka je d metrika prostora X i neka je $(\tilde{X}, \tilde{d})$ prostor nastao kompletiranjem metričkog prostora (X, d). Sada je X jak Šokeov potprostor poljskog prostora $\tilde{X}$, pa je i sam poljski, što je i trebalo dokazati. □

Zaključak

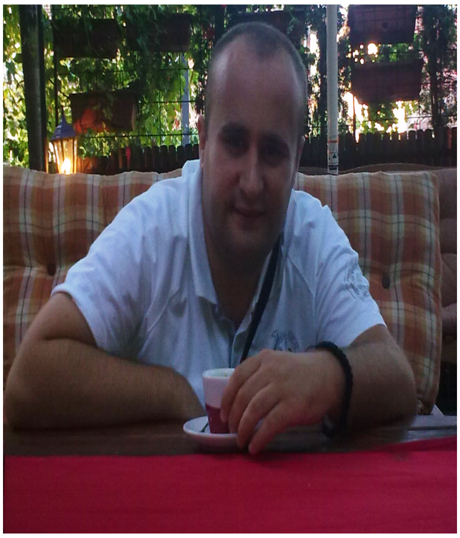
Prezentovani materijal, dakle definicija, osnovne osobine i karakterizacija poljskih prostora sažet je na svega 3-4 stane u udžbenicima deskriptivne teorije skupova.

Sa druge strane, udžbenici opšte topologije nastoje da detaljno ispitaju topološke i metričke prostore, pa one koji su ”između” (a poljski prostori, sa ”skrivenom”, kompletnom metrikom, to svakako jesu) zanemaruju ili jedva pomenu.

Ovaj rad nastoji da popuni navedenu prazninu. Čitalac sa solidnim predznanjem iz opšte topologije upoznaće osobine poljskih prostora i, s obzirom na isprepletenost topoloških i metričkih pojmova koji figurišu u definiciji ovih topoloških prostora, učvrstiće i utvrdiće svoje znanje.

Za kraj možemo reći da sa poslednjom teoremom ovog master rada deskriptivna teorija skupova tek počinje. Čitalac koji želi da upozna ovu teoriju rad može shvatiti kao priručnik, *handbook* poljskih prostora, gde može naći činjenice i detalje koji se u ozbiljnim udžbenicima podrazumevaju. Čitaocu koji želi da se bolje upozna sa topologijom ovaj rad može biti od koristi jer se pojmovi najbolje upoznaju u interakciji koje ovom radu donosi svaka teorema, lema i primer.

Biografija



Đorđe Vučković je rođen 7.11.1987. godine u Beogradu. Odrastao je u Staroj Pazovi, gde je 2001. završio Osnovnu školu "B. P. Pinki" sa prosekom ocena 5,00 u svim razredima i kao učenik generacije. Iste godine upisao je novosadsku Gimnaziju "J.J. Zmaj", koju završava 2006. godine kao nosilac Vukove diplome i učenik generacije. Godine 2006. upisuje Prirodno–matematički fakultet u Novom Sadu, smer "Diplomirani matematičar–profesor matematike" koji završava 2010. godine sa prosekom ocena 10,00. Iste godine upisuje master studije matematike na Prirodno–matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Tokom školske 2010/2011 bio je saradnik u nastavi za predmet analiza II i profesor matematike u Gimnaziji "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu. Sve ispite predviđene planom i programom položio je u junskom roku 2011. godine, sa prosekom 10,00 i time stekao uslov za odbranu ovog master rada.

U Novom Sadu, septembra 2011. godine

Đorđe Vučković

Literatura

[1] S. Banach, *Scottish Book* (Ulam's translation), 1950.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[3] Lj. Gajić, M. Kurilić, S. Pilipović, B. Stanković, *Zbirka zadataka iz funkcionalne analize*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2000.

[4] Su Gao, *Invariant Descriptive Set Theory*, Taylor & Francis Group, 2009.

[5] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Prirodno-matematički fakultet, 1996.

[6] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, forth edition, Oxford, 1960.

[7] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] M. Kunzinger, *Differental Geometry 1*(lecture notes), 2009.

[9] K. Kuratowski, *Topology*, Acadademic Press, New York and London, 1966.

[10] Miloš Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1998.

[11] David Marker, *Descriptive Set Theory*, lecture notes

[12] Y. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1980.

[13] S. Pilipović, D. Seleši, *Teorija mere* (skripte), Novi Sad, 2007.

[14] W. Żelazko, *A Short History of Polish Mathematics*, Warszawa

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Đorđe Vučković
AU

Mentor: prof. dr Miloš Kurilić
MN

Naslov rada: Poljski prostori
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2011
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (10, 87, 15, 3, 0, 0, 0)

FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Topologija
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: poljski prostori, lokalno kompaktni prostori, kompaktifikacija, hiperprostori, savršeni prostori, Berovi prostori, Šokeove igre
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Tema ovog master rada su poljski prostori, odnosno njihove topološke osobine. Nakon definisanja i navođenja primera jednostavnijih poljskih prostora, ispituje se da li je osobina "biti poljski prostor" topološka, nasledna i multiplikativna. Dalje se ispituju osobine univerzalnih poljskih prostora - Hilberotovog kuba i Berovog prostora, uvodi se kompaktifikacija i hiperprostor kompaktnih skupova kao načini konstrukcije novih poljskih prostora. Daje se dokaz Kantor-Bendiksonove teoreme i ukratko se govori o načinima karakterizacije poljskih prostora.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Đorđe Vučković
AU

Mentor: Miloš Kurilić, Ph.D.
MN

Title: Polish spaces
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (10, 87, 15, 3, 0, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Topology
SD

Subject/Key words: Polish spaces, local compact spaces, compactification, hyperspaces, Baire spaces, perfect spaces, Choquet games
SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

This master thesis deals with Polish spaces and their topological properties. After defining Polish spaces and giving representative examples, we explore whether property "to be a Polish space" is topological, hereditary or multiplicative. Moreover, we are studying properties of universal Polish spaces - Hilbert cube and Baire space, define compactification and hyperspace of compact sets as ways of making new Polish spaces. Proof of Cantor-Bendixon theorem and brief discussion about characterisation of Polish spaces are also given.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Stevan Pilipović, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	Dr Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,
Member:	Dr Ljiljana Gajić, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad