UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Granjak Đenđi

Jedna familija postupaka četvrtog reda za numeričko rešavanje nelinearnih jednačina

master rad

Novi Sad, 2015.

Sadržaj

Predgovor

U master radu posmatramo familiju optimalnih numeričkih postupaka četvrtog reda konvergencije za numeričko rešavanje nelinearne jednačine sa jednom nepoznatom $f(x)=0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a,b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha)\neq 0$. Ova familija kao specijalne slučajeve sadrže neke dobro poznate postupke, kao što je postupak Ostrovskog. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, u mnogim radovima date su modifikacije čiji je red konvergencije 4, [2], [3], [6] [7], [8], [9]. Osnovni princip za konstrukciju familije postupaka prisutan je i u radu [4], gde je konstruisana familija postupaka trećeg reda konvergencije. Postupajući na sličan način i koristeći rezultate rada [4], dajemo familiju postupaka četvrtog reda konvergencije.

Master rad je podeljen u četiri dela. U prvom delu rada dajemo oznake definicije i teoreme koje ćemo koristiti u daljem radu. Drugi deo rada sadrži prikaze i teoreme koje se odnose na iterativne postupake četvrtog reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina datih u radovima [1], [6], [7], [8], [9]. U trećem delu, kao originalni rezultat posmatramo familiju optimalnih iterativnih postupaka četvrtog reda konvergencije. Za izabrane postupke, pod određenim pretpostavkama, dokazujemo konvergenciju i određujemo asimptotsku konstantu greške. U poslednjem delu rada prikazaćemo numeričke eksperimente urađene u programskom paketu *Mathematica*. Primeri su uzeti iz navedenih radova, a najviše [3].

Zahvaljujem se svom mentoru dr Dragoslavu Hercegu na korisnim sugestijama i savetima.

Novi Sad, 25. avgust 2015. Đenđi Granjak

1 Neke oznake, definicije i teoreme

1.1 Oznake

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\{x_k\}$	niz brojeva $x_0, x_1, \ldots$
$D = [a, b]$	interval kojem pripada niz $\{x_k\}$
$C^k[a, b]$	skup k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$
$Lip_\gamma[a, b]$	skup funkcija koje na intervalu $[a, b]$ zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom γ
α	rešenje jednačine $f(x) = 0$
$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$	konstanta
$c_r = \frac{f^{(r)}(\theta)}{r!}$	konstanta
$c_0 = f^{(0)}(\alpha)$	konstanta
$e_n = x_n - \alpha$	greška u n-toj iteraciji
$e_{n+1} = Ce_n{}^p + O(e_n{}^{p+1})$	jednačina greške
$C = \frac{e_{n+1}}{e_n{}^p}$	asimptotska konstanta greške

p	red konvergencije iterativnog postupka
m	broj funkcionalnih evaluacija datog postupka
$p^{1\backslash m}$	indeks efikasnosti postupka
f_n	$f(x_n)$
f_n'	$f'(x_n)$
F_i	$\dfrac{F^{(i)}(\alpha)}{F'(\alpha)}$
$u(x)$	$\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

1.2 Definicije

Definicija 1. *Za dve jednačine kažemo da su ekvivalentne na intervalu $[a,b]$ ako su rešenja koja pripadaju intervalu $[a,b]$ jedne jednačine rešenja druge jednačine i obrnuto.*

Definicija 2. *Svaki realan broj α, za koji važi da je $f(\alpha)=0$, nazivamo rešenje jednačine $f(x)=0$.*

Definicija 3. *Broj α je rešenje višestrukosti k jednačine $f(x)=0$ ako je*

$$f(x)=(x-\alpha)^k g(x)$$

pri čemu je funkcija g ograničena u α i važi $g(\alpha)\neq 0$. Za k se uvek uzima pozitivan ceo broj. Ako je $k=1$, onda kažemo da je koren prost ili jednostruk, a ako je $k>1$ onda je višestruk.

Definicija 4. *Neka je $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Broj $\alpha\in D$ za koji važi $\alpha=\varphi(\alpha)$ je rešenje jednačine $x=\varphi(x)$ i naziva se nepokretna tačka funkcije φ.*

Neka je x_0 proizvoljan broj iz intervala $[a,b]$. Formirajmo niz brojeva $x_0,x_1,\ldots$ prema

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\qquad k=0,1,\ldots$$

Ovaj niz je moguće formirati samo ako $\varphi(x_k)\in[a,b],\ k=0,1,\ldots$ zbog definisanosti funkcije φ na intervalu $[a,b]$. Očigledno, ako funkcija φ preslikava interval $[a,b]$ u samog sebe, važi $\varphi(x_k)\in[a,b],\ k=0,1,\ldots$. Ako je niz $x_0,x_1,\ldots$ dobro definisan i ima graničnu vrednost, tj. za neko $\alpha\in[a,b]$ važi $\lim_{k\to\infty}x_k=\alpha$, onda je α rešenje jednačine $x=\varphi(x)$ ako je funkcija φ neprekidna na intervalu $[a,b]$. Naime, iz $\varphi(x)\in[a,b]$, za svako $x\in[a,b]$ sledi $\alpha\in[a,b]$, a zbog neprekidnosti funkcije φ važi

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Dakle, ako niz $x_0, x_1, \ldots$ konvergira, njegova granična vrednost α je rešenje jednačine $x = \varphi(x)$, a članovi tog niza aproksimiraju to rešenje.

Ovaj postupak, u kome računamo vrednosti $x_0, x_1, \ldots$ prema

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\, k = 0,1 \ldots$$

se naziva iterativni postupak (postupak sukcesivnih aproksimacija), gde je $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iterativno pravilo, funkcija φ je funkcija koraka, a niz $x_0, x_1, \ldots$ je iterativni niz. Prvi član tog niza je početna aproksimacija. Kada iterativni niz konvergira kažemo da iterativni postupak konvergira.

Definicija 5. *Funkcija φ zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D ako postoji konstanta γ takva da za svako $x, y \in D$ važi*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \gamma |x - y|.$$

Konstanta γ se naziva Lipšicova konstanta. Ako je $\gamma < 1$ onda se ova konstanta naziva konstanta kontrakcije, a funkcija φ se naziva kontrakcija ili kontraktivno preslikavanje.

Definicija 6. *Neka je $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$. Ako postoji konstanta $C \in [0,1)$ i ceo broj $K \ge 0$ takav da za $k \ge K$ važi*

$$|x_{k+1} - \alpha| \le C|x_k - \alpha|$$

kaže se da je niz $x_0, x_1, \ldots$ linearno konvergentan.

Ako postoje konstante $p > 1, C \ge 0$ i ceo broj $K \ge 0$ takav da za $k \ge K$ važi

$$|x_{k+1} - \alpha| \le C|x_k - \alpha|^p$$

kaže se da niz $x_0, x_1, \ldots$ konvergira ka α sa redom bar p. Za $p = 2$ konvergencija je kvadratna, a za $p = 3$ kubna.

Definicija 7. *Red konvergencije iterativnog postupka jednak je redu konvergencije iterativnog niza dobijenog posmatranim iterativnim postupkom.*

Da bi se odredio red konvergencije često se posmatra konstanta

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p}.$$

Ukoliko ovakva konstanta postoji postupak je bar reda p. Ako je $\eta \ne 0$, postupak je reda p i η se naziva asimptotska konstanta postupka.

Definicija 8. *Jednačina greške postupka je*

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

gde je $e_n = x_n - \alpha$ *greška u n-toj iteraciji, C asimptotska konstanta greške i p red konvergencije.*

Definicija 9. *Indeks efikasnosti iterativnog postupka je* $p^{1\backslash m}$, *gde je p red konvergencije iterativnog postupka, a m broj izračunavanja vrednosti funkcija po iteraciji.*

Definicija 10. *Optimalni red konvergencije postupaka bez memorije koji koriste* n *izračunavanja funkcije po iteraciji je* 2^{n-1}.

1.3 Teoreme

Za rešavanje jednačina oblika $f(x) = 0$ posmatraćemo ekvivalentne jednačine oblika $x = \varphi(x)$ i odgovarajuće iterativne postupke oblika

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0,1,\ldots.$$

Navodimo nekoliko teorema iz [4] koje se odnose na jednačinu $x = \varphi(x)$ i teoremu o redu konvergencije jednokoračnog postupka.

Teorema 1. *Neka je* $g(x) \neq 0$ *za* $x \in [a,b]$. *Tada su jednačine* $f(x) = 0$ *i* $x = \varphi(x)$ *sa* $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ *ekvivalentne na intervalu* $[a,b]$.

Teorema 2. *Neka je* φ *neprekidna funkcija na intervalu* $[a,b]$ *i* $\varphi(a), \varphi(b) \in [a,b]$. *Tada postoji* $\alpha \in [a,b]$ *takvo da je* $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Teorema 3. *Funkcija koja zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu D je neprekidna na tom intervalu.*

Obrnuto ne mora da važi, tj. neprekidna funkcija na intervalu *D* ne mora da zadovoljava Lipšicov uslov na istom intervalu.

Teorema 4. *Ako funkcija* φ *ima u intervalu* $[a,b]$ *prvi izvod za koji na tom intervalu važi* $|\varphi'(x)| \leq \gamma$, *onda* $\varphi \in Lip_\gamma[a,b]$.

Teorema 5. *Neka je* φ *kontrakcija na intervalu* $[a,b]$ *i neka preslikava taj interval u samog sebe. Tada iterativni niz* $\{x_k\}$ *određen sa*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 0,1,\ldots$$

sa proizvoljnim $x_0 \in [a,b]$, *konvergira ka jedinstvenom rešenju* $\alpha \in [a,b]$ *jednačine* $x = \varphi(x)$ *i važi*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|,\ k = 1,2,\ldots.$$

gde je γ *Lipšicova konstanta kontrakcije funkcije* φ.

Vrednosti $\frac{\gamma}{1-\gamma}|x_k - x_{k-1}|$ i $\frac{\gamma^k}{1-\gamma}|x_1 - x_0|$ definisane u prethodnoj teoremi nazivaju se aposteriorna i apriorna ocena greške.

Pored apriorne i aposteriorne, često se koristi i sledeća ocena greške koja ne zavisi od iterativne funkcije φ.

Teorema 6. *Neka $f \in C^1(D)$ i $|f'(x)| \geq m > 0$ za $x \in D$. Ako je $\alpha \in D$ rešenje jednačine $f(x) = 0$ i $x_k \in D, k = 0,1,\ldots$, onda je*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}.$$

Ova ocena se naziva Lagranžova ocena greške

Teorema 7. *[14] Red konvergencije jednokoračnog postupka*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,\ldots$$

je pozitivan ceo broj. Ovaj postupak ima red konvergencije p ako i samo ako je

$$\alpha = \varphi(\alpha),\ \ \varphi^{(j)}(\alpha) = 0,\ \ j = 1,2,\ldots, p-1,\ \ \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Red konvergencije i asimptotske konstante greške svih postupaka koje posmatramo u ovom radu određujemo koristeći prethodnu teoremu. U zavisnosti od p za asimptotske konstante greške uzimamo

$$\frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

a dobijeni rezultat izražavamo preko konstanti

$$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)},\ \ j = 2,3,\ldots.$$

Kako su funkcije koraka posmatranih iterativnih postupaka složene i izračunavanje njihovih izvoda nije jednostavno, taj posao smo prepustili programskom paketu *Mathematica*.

2 Iterativni postupci četvrtog reda konvergencije

Kada se posmatraju postupci četvrtog reda konvergencije posebno se obraća pažnja na optimalne postuke, tj. postupke kod kojih je broj izračunavanja funkcije u jednom iterativnom koraku tri. Indeks efikasnosti ovih postupaka je $4^{1/3} = 1.5874\ldots$.

Da bi se dobio viši red konvergencije i indeks efikasnosti predloženi su mnogi postupci. Većina tih postupaka čini grupu postupaka zasnovanih na poboljšanju Njutnovog postupka, čiji je red konvergencije dva a indeks efikasnosti je $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$. U ovom delu posmatraćemo neke od tih postupaka.

2.1 Kou-Li-Wangov postupak

U radu [9] posmatrana je linearna kombinacija postupaka Potra-Ptáka i Stefensena

$$x_{n+1} = x_n - \theta \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} - (1-\theta) \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)\left(f(x_n) - f(y_n)\right)} \tag{1}$$

gde je

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

postupak Potra-Pták definisan funkcijom koraka

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{3}$$

a Postupak Stefensena sa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)\, f(y_n)} \tag{4}$$

a θ je proizvoljan realan broj. Ovaj ostupak je u [9] nazvana Njutn-Stefensen-Potra-Ptákov postupak. Očigledno je, kada $\theta = 1$ iz (1) se dobija (3) $\theta = 0$ iz (1) se dobija (4).

Postupaci Potra-Pták i Stefensena su trećeg reda konvergencije sa indeksom efikasnosti $3^{1/3} = 1.4422\ldots$

Teorema 10. [9] *Pretpostavimo da funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ima prost koren $\alpha \in D$, gde je D otvoreni interval. Ako je $f(x)$ dovoljno gladka u okolini korena α, onda je red konvergencije postuak definisan sa* (1) *najmanje tri, a ako je $\theta = -1$ red konvergencije je četiri.*

Dokaz. Neka je $e_n = x_n - \alpha$ i $d_n = y_n - \alpha$, gde je $y_n = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Koristeći Tejlorov razvoj i uzimajući u obzir $f(\alpha) = 0$, imamo

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left[e_n + c_2 e_n^{\,2} + c_3 e_n^{\,3} + c_4 e_n^{\,4} + \mathrm{O}\left(e_n^{\,5}\right)\right] \tag{5}$$

i

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^{\,2} + 4c_4 e_n^{\,3} + \mathrm{O}\left(e_n^{\,4}\right)\right). \tag{6}$$

Iz ove dve relacije dobijamo

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^{\,2} + 2\left(c_2^{\,2} - c_3\right)e_n^{\,3} + \left(7c_2c_3 - 4c_2^{\,3} - 3c_4\right)e_n^{\,4} + \mathrm{O}\left(e_n^{\,5}\right) \tag{7}$$

i

$$d_n = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = c_2 e_n^{\,2} - 2\left(c_2^{\,2} - c_3\right)e_n^{\,3} - \left(7c_2c_3 - 4c_2^{\,3} - 3c_4\right)e_n^{\,4} + \mathrm{O}\left(e_n^{\,5}\right). \tag{8}$$

Postupajući analogno, dobijamo

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(d_n + c_2 d_n^{\,2} + c_3 d_n^{\,3} + c_4 d_n^{\,4} + \mathrm{O}\left(d_n^{\,5}\right)\right) \tag{9}$$

a zatim iz (8)

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left[c_2 e_n^{\,2} - 2\left(c_2^{\,2} - c_3\right)e_n^{\,3} - \left(7c_2c_3 - 4c_2^{\,3} - 3c_4\right)e_n^{\,4} + \mathrm{O}\left(e_n^{\,5}\right)\right]. \tag{10}$$

Sada iz (5) i (10) sledi prvo

$$f(x_n) + f(y_n) = f(\alpha)[e_n + 2c_2 e_n^{\,2} - (2c_2^{\,2} - 3c_3)e_n^{\,3} - (7c_2c_3 - 5c_2^{\,3} - 4c_4)e_n^{\,4} + O(e_n^{\,5})]$$

a zatim

$$\frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)} = e_n - 2c_2^2e_n^3 - \left(7c_2c_3 - 9c_2^3\right)e_n^4 + \mathrm{O}\left(e_n^5\right) \tag{11}$$

S druge strane, pošto iz (5) i (10) sledi

$$f(x_n) - f(y_n) = f'(\alpha)[e_n + (2c_2^2 - c_3)e_n^3 + (7c_2c_3 - 5c_2^3 - 2c_4)e_n^4 + \mathrm{O}(e_n^5)],$$

imamo

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(y_n)} = 1 + c_2e_n + 2\left(c_3 - c_2^2\right)e_n^2 + 3\left(c_2^3 + c_4 - 2c_2c_3\right)e_n^3 + \mathrm{O}\left(e_n^4\right) \tag{12}$$

Stoga, iz (7) i (12) dobijamo

$$\frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)\left(f(x_n)-f(y_n)\right)} = e_n - c_2^2e_n^3 - 3\left(c_2c_3 - c_2^3\right)e_n^4 + \mathrm{O}\left(e_n^5\right). \tag{13}$$

Kako je na osnovu (1)

$$e_{n+1} = e_n - \theta\frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)} - (1-\theta)\frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)\left(f(x_n)-f(y_n)\right)}$$

to iz (11) i (13) sledi

$$\begin{aligned} e_{(n+1)} &= e_n - [e_n - 2c_2^2e_n^3 - (7c_2c_3 - 9c_2^3)e_n^4] - (1-\theta)[e_n - c_2^2e_n^3 - 3(c_2c_3 - c_2^3)e_n^4] + O(e_n^5) \\ &= (1+\theta)c_2^2e_n^3 + [(4\theta+3)c_2c_3 - 3(2\theta+1)c_2^3)]e_n^4 + O(e_n^5) \end{aligned}$$

To znači da je postupak definisan sa (1) kubno konvergentan za bilo koje $\theta \in \mathbb{R}$. Štaviše, kada je $\theta = -1$ red konvergencije je četiri, a odgovarajuća jednačina greške je

$$e_{(n+1)} = (3c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Indeks efikasnosti postupka Njutn-Stefensen-Potra-Ptáka je $4^{1/3} = 1.5874\ldots$.

2.2 Chunov postupak

U radu [1] posmatrana je linearna kombinacija

$$\Phi(x) = x - \theta_1\left[x - \phi(x)\right] - \theta_2\left[x - \zeta(x)\right] - \theta_3\left[x - \eta(x)\right] \tag{14}$$

tri postupka ϕ, ζ i η reda tri, gde $\theta_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3,\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$. Očigledno, kada je $\theta_1 = 1,\ \theta_2 = \theta_3 = 0$ i $\theta_2 = 1,\ \theta_1 = \theta_3 = 0$ važi $\Phi(x) = \phi(x)$ odosno $\Phi(x) = \zeta(x)$, a za $\theta_3 = 1,\ \theta_1 = \theta_2 = 0$ $\Phi(x) = \eta(x)$.

Teorema 8. *[1] Neka je $\alpha \in I$ prosta nula dovoljno diferencijabilne funkcije $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ za otvoren interval I. Neka su θ_i, $i = 1, 2, 3$ nenula realni brojevi tako da $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ i ϕ, ζ i η su iterativne funkcije reda tri. Tada je iterativna funkcija definisana sa (14) reda najmanje tri, a iterativni postupak definisan sa $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ zadovoljava jednačinu greške*

$$e_{n+1} = \frac{1}{6}\left[\theta_1\phi^{(3)}(\alpha) + \theta_2\zeta^{(3)}(\alpha) + \theta_3\eta^{(3)}(\alpha)\right]e_n^{\ 3} + \mathrm{O}\left(e_n^{\ 4}\right) \tag{15}$$

Štaviše, iterativna funkcija definisana sa (14) je *reda najmanje četiri za svaki izbor parametara $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ za koje je koeficijent uz $e_n{}^3$ u* (15) jednak nuli*, a iterativni postupak definisan sa $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ zadovoljava jednačinu greške*

$$e_{n+1} = \frac{1}{24}\left[\theta_1\phi^{(4)}(\alpha) + \theta_2\zeta^{(4)}(\alpha) + \theta_3\eta^{(4)}(\alpha)\right]e_n^{\ 4} + \mathrm{O}\left(e_n^{\ 5}\right) \tag{16}$$

Dokaz. Pošto su ϕ, ζ i η iterativne funkcije reda tri, imamo

$$\phi(\alpha) = \zeta(\alpha) = \eta(\alpha) = \alpha$$

i

$$\phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \zeta'(\alpha) = \zeta''(\alpha) = \eta'(\alpha) = \eta''(\alpha) = 0$$

Koristeći Tejlorovo razvijanje dobijamo

$$\phi(x) = \alpha + \phi_3(x-\alpha)^3 + \phi_4(x-\alpha)^4 + \mathrm{O}\left((x-\alpha)^5\right) \tag{17}$$

$$\zeta(x) = \alpha + \zeta_3(x-\alpha)^3 + \zeta_4(x-\alpha)^4 + \mathrm{O}\left((x-\alpha)^5\right) \tag{18}$$

$$\eta(x) = \alpha + \eta_3(x-\alpha)^3 + \eta_4(x-\alpha)^4 + \mathrm{O}\left((x-\alpha)^5\right) \tag{19}$$

gde je

$$\phi_k = \frac{1}{k!}\phi^{(k)}(\alpha), \quad \zeta_k = \frac{1}{k!}\zeta^{(k)}(\alpha), \quad \eta_k = \frac{1}{k!}\eta^{(k)}(\alpha), \ k = 3,4 .$$

Pošto je $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$, koristeći (17), (18) i (19) iz (14) dobijamo

$$\Phi(x) = \alpha + \left[\theta_1\phi_3 + \theta_2\zeta_3 + \theta_2\eta_3\right](x-\alpha)^3 + \left[\theta_1\phi_4 + \theta_2\zeta_4 + \theta_2\eta_4\right](x-\alpha)^4 + \mathrm{O}\left((x-\alpha)^5\right)$$

što znači da je iterativna funkcija definisana sa (14) reda najmanje tri, i da jednačina greške definisana sa (15). Ako postavimo uslov da je koeficijent uz $(x-\alpha)^3$ jednak nuli i odredimo koeficijente θ_1, θ_2 i θ_3 kao rešenje sistema

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$$
$$\theta_1\phi_3 + \theta_2\zeta_3 + \theta_2\eta_3 = 0$$

dobićemo da je iterativna funkcija definisana sa (14) reda najmanje četiri i da iterativni postupak definisan sa $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ zadovoljava jednačinu greške

$$e_{n+1} = \frac{1}{24}\left[\theta_1\phi^{(4)}(\alpha) + \theta_2\zeta^{(4)}(\alpha) + \theta_3\eta^{(4)}(\alpha)\right]e_n^{\ 4} + \mathrm{O}\left(e_n^{\ 5}\right). \tag{20}$$

Time je teorema dokazana.

Da bismo konstruisali iterativni postupak četvrtog reda preko koristeći rezultate prethodne teoreme, razmatramo sledeće iterativne funkcije trećeg reda $\phi,\ \zeta$ i η definisane sa

$$y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

i

$$\phi(x) = x - \frac{f(x) + f(y)}{f'(x)} \tag{21}$$

što je Potra-Ptákova iterativna funkcija,

$$\zeta(x) = x - \frac{f^2(x)}{f'(x)\left[f(x) - f(y)\right]} \tag{22}$$

što je Njutn-Stefensenova iterativna funkcija,

$$\eta(x) = x - \left[\frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{f'(x)f(y)}{f^2(x) + f'^2(x)}\right] \tag{23}$$

što je iterativna funkcija dobijena u [1].

Kako je, prema [1],

$$\phi^{(3)}(\alpha) = 12c_2^{\ 2} \qquad \phi^{(4)}(\alpha) = -216c_2^{\ 3} + 168c_2c_3$$
$$\zeta^{(3)}(\alpha) = 6c_2^{\ 2} \qquad \zeta^{(4)}(\alpha) = 72\left(c_2c_3 - c_2^{\ 3}\right)$$
$$\eta^{(3)}(\alpha) = 12c_2^{\ 2} \qquad \eta^{(4)}(\alpha) = 24c_2 - 216c_2^{\ 3} + 168c_2c_3$$

Po po teoremi 8 dovoljno je odrediti θ_1, θ_2 i θ_3 kao rešenja sistema

$$\begin{gathered}\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1 \\ \phi^{(3)}(\alpha)\theta_1 + \zeta^{(3)}(\alpha)\theta_2 + \eta^{(3)}(\alpha)\theta_3 = 0\end{gathered} \tag{24}$$

da bismo dobili iterativne funkcije četrvrtog reda oblika (14).

U slučaju da biramo $\phi = \phi_1, \zeta = \phi_2$ i $\eta = \phi_3$, prethodni sistem jednačina postaje

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$$
$$12{c_2}^2\theta_1 + 6{c_2}^2\theta_2 + 12{c_2}^2\theta_3 = 0$$

Rešenje ovog sistema je

$$\theta_1 = -1 - \beta, \quad \theta_2 = 2, \quad \theta_3 = \beta,$$

gde je $\beta \in \mathbb{R}$. Iterativna funkcija definisana sa (14) sada daje familiju neograničeno mnogo novih iterativnih postupaka četvrtog reda

$$x_{n+1} = x_n + (1+\beta)\frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} - 2\frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\left[f(x_n) - f(y_n)\right]} - \beta\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(x_n)f(y_n)}{f^2(x_n) + f'^2(x_n)}\right]$$

gde $y_n = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Odgovarajuća jednačina greške je

$$e_{n+1} = \left(\beta c_2 + 3{c_2}^3 - c_2c_3\right){e_n}^4 + O\left({e_n}^5\right),$$

što dokazuje konvergenciju četvrtog reda za bilo koji realni broj β.

Kao posebne slučajeve posmatrane familije izdvajamo sledeće:

- za $\beta = 0$ dobijamo postupak četvrtog reda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n) + f^2(y_n)}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]}$$

- za $\beta = -1$, dobijamo novi postupak četvrtog reda

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(x_n)f(y_n)}{f^2(x_n) + f'^2(x_n)}$$

- za $\beta = -2$ dobijamo novi postupak četvrtog reda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} + 2\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)[f(x_n) - f(y_n)]} + \frac{f'(x_n)f(y_n)}{f^2(x_n) + f'^2(x_n)}\right]$$

što se može smatrati unapređenim Potra-Ptákovim postupkom. Indeks efikasnosti ovog postupka je $4^{1/3} = 1.5874\ldots$

2.3 Kingov postupak

U [7] je posmatran iterativni postupak

$$w_n = x_n - f_n / f'_n$$
$$x_{n+1} = w_n - f(w_n) / f'(w_n)$$

kod kojega je prvi izvod $f'(w_n)$ zamenjen sa

$$\bar{f}'(w_n) = f'_n \frac{f_n + \gamma f(w_n)}{f_n + \beta f(w_n)}$$

pri čemu su β i γ paarametri. Da bi se odredila jednačina greške, prvo posmatramo Tejlorove razvoje:

$$f_n = f'(\alpha)\left(\varepsilon_n + \frac{F_2}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{F_3}{6}\varepsilon_n{}^3 + \frac{F_4}{24}\varepsilon_n{}^4 + \cdots\right),$$

$$f'_n = f'(\alpha)\left(1 + F_2\varepsilon_n + \frac{F_3}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{F_4}{6}\varepsilon_n{}^3 + \cdots\right),$$

$$f(w_n) = f'(\alpha)\left(\varepsilon(w_n) + \frac{F_2}{2}\varepsilon^2(w_n) + \frac{F_3}{6}\varepsilon^3(w_n) + \frac{F_4}{24}\varepsilon^4(w_n) + \cdots\right) =$$

$$= f'(\alpha)\left(\frac{F_2}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{1}{6}(2F_3 - F_2{}^2)\varepsilon_n{}^3 + \frac{1}{24}(-14F_2F_3 + 15F_2{}^3 + 3F_4)\varepsilon_n{}^4 + \cdots\right).$$

Sada je

$$\varepsilon(w_n) = \varepsilon_n - \frac{f_n}{f'_n} =$$

$$= \frac{F_2}{2}\varepsilon_n{}^2 + \frac{1}{6}\left(2F_3 - 3F_2{}^2\right)\varepsilon_n{}^3 + \frac{1}{24}\left(-14F_2F_3 + 12F_2{}^3 + 3F_4\right)\varepsilon_n{}^4 + \cdots.$$

Očigledno, da bi se postigla konvergencija četvrtog reda, neophodno je uzeti $\gamma = \beta - 2$, u ovom slučaju jednačina greške postaje

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + [3 + 6\beta]F_2{}^3\right)\varepsilon_n{}^4 + O\left(\varepsilon_n{}^5\right)$$

a odgovarajuća familija postupaka četvrtog reda sa jednim parametrom je

$$w_n = x_n - f_n/f'_n$$
$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n}\frac{f_n + \beta f(w_n)}{f_n + (\beta - 2)f(w_n)}.$$

U sledećoj varijanti polaznog postupka uzimamo $\bar{f}'(w_n)$ kao koeficijent pravca sečice određene sa (x_n, f_n) i $(w_n, f(w_n))$ f_n do $f(w_n)$

$$\bar{f}'(w_n) = \frac{f_n - f(w_n)}{x_n - w_n} = f'_n \frac{f_n - f(w_n)}{f_n}.$$

Rezultirajući postupak je

$$\begin{aligned} w_n &= x_n - f_n/f'_n \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n} \frac{f_n + f(w_n)}{f_n - f(w_n)}. \end{aligned}$$

sa vodećim članom greške

$$\frac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + 9{F_2}^3\right){\varepsilon_n}^4,$$

što znači da je posmatrani postupak četvrtog reda konvergencije.

Ako se $\bar{f}'(w_n)$ odredi tako da važi

$$\frac{\bar{f}'(w_n) + f'_n}{2} = \frac{f_n - f(w_n)}{x_n - w_n}$$

dobija se

$$\bar{f}'(w_n) = f'_n \frac{f_n - 2f(w_n)}{f_n}$$

a polazni postupak postaje novi postupak četvrtog reda

$$\begin{aligned} w_n &= x_n - f_n/f'_n \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n} \frac{f_n}{f_n - 2f(w_n)}. \end{aligned}$$

Ovo je poznati postupak, Traub [13], a njegov vodeći član greške je

$$\frac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + 3{F_2}^3\right){\varepsilon_n}^4 .$$

Nove postupke četvrtog reda možemo dobiti i na sledeći način. Pretpostavimo da je

$$z_n = x_n - \delta(f_n/f'_n)$$

pri čemu je δ neki parametar. Posmatrajmo postupak

$$w_n = x_n - a_1 \frac{f_n}{f'_n},$$
$$x_{n+1} = w_n - a_2 \frac{f(z_n)}{f'_n} - a_3 \frac{[f(z_n)/f'_n]^2}{f_n/f'_n}$$

i odredimo parametre δ, a_1, a_2 i a_3 tako da postupak bude reda četiri. Ako se greška ε_{n+1} razvija kao stepeni red po ε_n, onda izjednačavajući koeficijente uz treći stepen od ε_n sa nulom dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$a_1 + (1-\alpha)a_2 + (1-\alpha)^2 a_3 = 1,$$

$$a_1 - (\alpha^2 + \alpha - 1)a_2 + (2\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1)a_3 = 0,$$

$$2a_1 - (4\alpha^2 + 2\alpha - 2)a_2 + (\alpha^4 + 8\alpha^3 - 6\alpha^2 - 4\alpha + 2)a_3 = 0,$$

$$2a_1 + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 2)a_2 - (2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 4\alpha^2 + 4\alpha - 2)a_3 = 0.$$

U [7] je dokazano da sa $\delta = 1$ i

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = 2.$$

dobijamo postupak četvrtog reda,

$$w_n = x_n - f_n/f'_n$$
$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f'_n} \frac{f_n + 2f(w_n)}{f_n}.$$

Odgovarajući vodeći član greške je

$$\frac{1}{24}\left(-2F_2F_3 + 15{F_2}^3\right){\varepsilon_n}^4$$

sa

$$\bar{f}'(w_n) = f'_n \frac{f_n}{f_n + 2f(w_n)}.$$

Indeks efikasnosti Kingovog postupka je $4^{1/3} = 1.5874\ldots$

2.4 Jarrattov postupak

U [6] je posmatran iterativni postupak

$$x_{n+1} = x_n - \phi_1(x_n) - \phi_2(x_n) \tag{25}$$

gde je

$$\phi_1(x) = a_1 w_1(x_n) + a_2 w_2(x_n)$$
$$\phi_2(x) = \frac{f(x)}{b_1 f'(x) + b_2 f'\left[x + \delta w_1(x)\right]}$$

po ugledu na postupak Trauba [13]

$$x_{n+1} = x_n - a_1 w_1(x_n) - a_2 w_2(x_n)$$

$$w_1(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$
$$w_2(x) = \frac{f(x)}{f'\left[x + \delta w_1(x)\right]}$$

Pretpostavljamo da $f(x)$ ima prostu nulu α. Koristeći Tejlorove razvoje za $f(x)$ i $f'(x)$ oko α dobijamo

$$w_1(x_n) = \epsilon_n - \frac{c_2}{c_1}{\epsilon_n}^2 + 2\left(\frac{{c_2}^2}{{c_1}^2} - \frac{c_3}{c_1}\right){\epsilon_n}^3 + O({\epsilon_n}^4)$$

i

$$w_2(x_n) = \epsilon_n - \frac{c_2}{c_1}(1 + 2\delta){\epsilon_n}^2 + \left[2\frac{{c_2}^2}{{c_1}^2}(2\delta^2 + 4\delta + 1) - \frac{c_3}{c_1}(3\delta^2 + 6\delta + 2)\right]{\epsilon_n}^3 + O({\epsilon_n}^4)$$

Na osnovu prethodne dve relacije sledi

$$\phi_1(x_n) = (a_1 + a_2)\epsilon_n - \frac{c_2}{c_1}[a_1 + a_2(1 + 2\delta)]{\epsilon_n}^2 +$$

$$+\left[2\frac{{c_2}^2}{{c_1}^2}(a_1 + (2\delta^2 + 4\delta + 1)a_2) - \frac{c_3}{c_1}(2a_1 + (3\delta^2 + 6\delta + 2)a_2)\right]{\epsilon_n}^3 + O({\epsilon_n}^4)$$

i

$$\phi_2(x_n) = \frac{c_1}{p_1}\epsilon_n + \left(\frac{c_2}{p_1} - c_1\frac{p_2}{{p_1}^2}\right){\epsilon_n}^2 + \left[\frac{c_3}{p_1} + \left(\frac{{p_2}^2}{{p_1}^3} - \frac{p_3}{{p_1}^2}\right)c_1 - \frac{p_2}{{p_1}^2}c_2)\right]{\epsilon_n}^3 + O({\epsilon_n}^4)$$

gde je

$$p_1 = c_1(b_1 + b_2), \quad p_2 = 2c_2[b_1 + (1 + \delta)b_2], \quad p_3 = 3c_3 b_1 + b_2\left[3c_3(1 + \delta)^2 - 2\frac{{c_2}^2}{c_1}\delta\right].$$

Imajući u vidu prethodne relacije, vidimo da bi posmatrani postupak bio četvrtog reda mora biti zadovoljen sledeći sistem jednačina

$$1 - a_1 - a_2 - \frac{1}{b_1 + b_2} = 0$$
$$a_2 + \frac{b_2}{(b_1 + b_2)^2} = -\frac{1}{2\delta}$$
$$a_2 + \frac{{b_2}^2}{(b_1 + b_2)^3} = \frac{1}{2\delta^2}$$
$$a_2 + \frac{b_2}{(b_1 + b_2)^2} = \frac{1}{3\delta^2}$$

Ovo je sistem od četiri jednačine sa pet slobodnih parametara a_1, a_2, b_1, b_2 i δ. Iz druge i poslednje jednačine dobijamo da je $\delta = -\frac{2}{3}$, tako da se sistem redukuje na

$$a_1 + a_2 + \frac{1}{b_1 + b_2} = 1$$
$$a_2 + \frac{b_2}{(b_1 + b_2)^2} = \frac{3}{4}$$
$$a_2 + \frac{{b_2}^2}{(b_1 + b_2)^3} = \frac{9}{8}$$

U rešavanju ovog sistema zgodno je eliminisati b_1 smenom $b_2/(b_1 + b_2) = \theta$, a za $\theta \neq 0$, $\theta \neq 1$ opšte rešenje je

$$a_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2\theta}\right), \qquad a_2 = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2(\theta - 1)}\right), \qquad b_2 = \frac{8\theta^2}{3}(\theta - 1).$$

Poseban slučaj $\theta = 1$ implicira $b_1 = 0$, dok $\theta = 0$ daje $b_2 = 0$. U opštijem smislu, sa $\theta \neq 0,\ \theta \neq 1$ možemo da konstruišemo klasu postupaka četvrtog reda. Biramo vrednosti za θ, tako da ostali koeficijenti budu jednostavni. Na primer, $\theta = -\frac{3}{2}$ daje $a_1 = 0$, a vrednosti ostalih parametara su onda $a_2 = \frac{9}{10},\ b_1 = 25,\ b_2 = -15$. Za $\theta = \frac{3}{2}$ dobijamo $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 0,\ b_1 = -1$ i $b_2 = 3$, a odgovarajući iterativni postupak je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}w_1(x_n) + \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - 3f'\left[x_n - \frac{2}{3}w_1(x_n)\right]}$$

Ako uzmemo $b_1 = b_2$, tj. $\theta = \frac{1}{2}$ dobijamo $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2},\ b_1 = b_2 = -\frac{1}{3}$ odgovarajući iterativni postupak

$$x_{n+1} = x_n - w_1(x_n) - \frac{3}{2}w_2(x_n) + \frac{3f(x_n)}{f'(x_n) + f'\left[x_n - \frac{2}{3}w_1(x_n)\right]}.$$

Koeficijent uz ${\epsilon_n}^4$ u jednačini greške može se prikazati u obliku

$$\frac{1}{9}(21-8\theta)\frac{{c_2}^3}{{c_1}^3}-\frac{c_2c_3}{{c_1}^2}+\frac{1}{9}\frac{c_4}{c_1},$$

Vidimo da vrednost $\theta=\frac{21}{8}$ pojednostavljuje ovu konstantu otklanjanjem prvog člana. Odgovarajuće vrednosti parametara su

$$a_1=\frac{11}{28},\qquad a_2=\frac{27}{52},\qquad b_1=-\frac{1183}{64},\qquad b_2=\frac{1911}{64}.$$

Indeks efikasnosti Jarrattovog postupka je $4^{1/3}=1.5874\ldots$.

3 Familije iterativnih postupaka četvrtog reda

U ovom delu posmatramo tri familije postupaka reda četiri. Ove familije su konstruisane na isti način, ali sa različitim pomoćnim funkcijama σ, λ i μ. Zbog toga su odgovarajuće teoreme o konvergenciji praktično iste, njihovi dokazi isti sem u detaljima gde se pojavljuju pomoćne funkcije. Dokazaćemo samo teoremu koja se odnosi na prvu familiji i ukazati na razlike koje impliciraju pomoćne funkcije. Te razlike se vide u poslednjim relacijama u (34), (43) i (47) i imaju za posledicu razlike u izrazima za asimptotske konstante greške.

Ideja za formiranje familija je preuzeta iz [4], a dokaz je izveden na osnovu rada [3].

3.1 Prva familija postupaka četvrtog reda

U radu [4] prikazana je familija postupaka trećeg reda konvergencije za rešavanje nelinearnih jednačina. Pokazano je da ovoj familiji pripadaju neki već poznati postupci kao što su Halejev i super Halejev postupak. Prvo je posmatran Njutnov postupak za izračunavanje aproksimacije za α

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,\dots$$

za neku odgovarajuću početnu vrednost x_0. Njutnov postupak kvadratno konvergira u nekoj okolini od α ako je $f'(\alpha) \neq 0$.

Pod pretpostavkama koje su slične onim koje postavljamo za Njutnov postupak, u radu [4] dat je dokaz konvergencije trećeg reda za sledeću familiju postupaka. Familija postupaka se definiše na sledeći način.

Neka je

$$x_{n+1} = F_k(x_n), \quad n = 0,1,\dots,$$

gde su funkcije F_k oblika

$$F_k(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi_k(t(x)),\ k = 1, 2, \ldots$$

sa

$$t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

i funkcijama φ_k definisanim sa

$$\varphi_0(s) = \frac{2}{2-s}, \quad \varphi_k(s) = \frac{2}{2 - s\cdot\varphi_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Funkcije φ_k se lako računaju. Navodimo prvih osam $\varphi_k(s)$, $k = 1, 2, \ldots, 7$:

$$\frac{2-s}{2(1-s)}, \quad \frac{4-4s}{4-6s+s^2}, \quad \frac{4-6s+s^2}{4-8s+3s^2}, \quad -\frac{2(4-8s+3s^2)}{-8+20s-12s^2+s^3}$$

$$\frac{-8+20t-12t^2+t^3}{4(-2+6t-5t^2+t^3)}, \quad -\frac{8(-2+6s-5s^2+s^3)}{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}, \quad \frac{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}{16-64s+84s^2-40s^3+5s^4}$$

Lako se vidi, [4], da su Njutnova i Halejeva iterativna funkcija specijalni slučajevi sa F_0 i F_1 respektivno. Njutnov postupak ne pripada ovoj familiji postupaka trećeg reda, ali se može posmatrati kao granični slučaj kada $s \to 0$.

Sada posmatramo iterativni postupak

$$x_{n+1} = F_k(x_n) \tag{27}$$

$$F_k(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi_k(\sigma(x)) \tag{28}$$

$$\sigma(x) = 2\frac{f(x - u(x))}{f(x)} \tag{29}$$

sa funkcijama φ_k definisanim sa (26). Specijalan slučaj ovog postuka za $k = 1$ je postupak Ostrovskog, [3].

Teorema 9. *Pretpostavimo da funkcija* $f : (a,b) \subset R \to R$ *ima jednostruku nulu* $\alpha \in (a,b)$ *i da je* f *dovoljno neprekidno diferencijabilna u okolini nule* α*.Tada postupak* (27)-(29) *ima četvrti red konvergencije. Odgovarajuća asimptotska konstanta greške je*

$$E_k = \begin{cases} c_2^3 - c_2 c_3, & k = 3 \\ -c_2 c_3, & k > 3 \end{cases}$$

Dokaz. Radi jednostavnosti izostavićemo indeks k *kod* φ i F. Jednosatvnim računanjima koristeći *Mathematica* dobijamo

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = \frac{1}{2} \quad \varphi''(0) = 1, \tag{30}$$

$$\varphi'''(0) = \frac{1}{4} \begin{cases} 12 & k = 3 \\ 15 & k > 3 \end{cases}, \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = 0, \quad F''(\alpha) = 2c_2\left(1 - 2\varphi'(0)\right), \\ &F'''(\alpha) = 12\left(c_3\left(1 - 2\varphi'(0)\right) + c_2^2\left(4\varphi'(0) - \varphi''(0) - 1\right)\right), \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} F^{(4)}(\alpha) = 24c_4\big(3 - 6\varphi'(0)\big) + 24c_2c_3(28\varphi'(0) - 8\varphi''(0) - 7) \\ +16{c_2}^3(6 - 39\varphi'(0) + 21\varphi''(0) - 2\varphi'''(0)) \end{aligned} \tag{33}$$

Kako je

$$\begin{aligned} &\sigma(\alpha) = 0, \\ &\sigma'(\alpha) = 2c_2, \\ &\sigma''(\alpha) = 4\left(-3c_2^2 + 2c_3\right), \\ &\sigma'''(\alpha) = 12\left(8c_2^3 - 10c_2c_3 + c_4\right), \end{aligned} \tag{34}$$

i

$$\begin{aligned} &u(\alpha) = 0, \quad u'(\alpha) = 1, \quad u''(\alpha) = -2c_2, \quad u^{(3)}(\alpha) = 12\left(c_2^2 - c_3\right), \\ &u^{(4)}(\alpha) = 24\left(-4c_2^3 + 7c_2c_3 - 3c_4\right). \end{aligned} \tag{35}$$

sledeće važi u svim slučajevima: $\varphi(0) = 1$, (30), (31), (32) i (33). Iz (30) i (32) sledi

$$\frac{F''(\alpha)}{2} = 0 \tag{36}$$

i

$$\frac{F'''(\alpha)}{6} = 0\,. \tag{37}$$

Koristeći (30), (31) i (33) dobijamo za $k > 3$

$$\frac{\mathrm{F}^{(4)}(\alpha)}{24} = -c_2c_3 + c_2^3\left(5 - \frac{4}{3}\varphi'''(0)\right) \tag{38}$$

i, u zavisnosti od $\varphi'''(0)$, iz (31)

$$\frac{F^{(4)}(\alpha)}{24} = -c_2c_3 + c_2^3\begin{cases}1 & k=3\\ 0 & k>3\end{cases} \tag{39}$$

Sada, iz (36), (37) i (39) sledi tvrđenje teoreme.

3.2 Druga familija postupaka četvrtog reda

Sada posmatramo iterativni postupak

$$x_{n+1} = F_k(x_n) \tag{40}$$

$$F_k(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\varphi_k(\lambda(x)) \tag{41}$$

$$\lambda(x) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{f'\left(x - \frac{2}{3}u(x)\right)}{f'(x)}\right) \tag{42}$$

sa funkcijama φ_k definisanim sa (26).

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha) &= 0,\\
\lambda'(\alpha) &= 2c_2,\\
\lambda''(\alpha) &= 4\left(-3c_2^2 + 2c_3\right),\\
\lambda'''(\alpha) &= 12\left(8c_2^3 - 10c_2c_3 + \frac{26}{9}c_4\right),
\end{aligned} \tag{43}$$

Teorema 10. *Pretpostavimo da funkcija* $f:(a,b)\subset R \to R$ *ima jednostruku nulu* $\alpha \in (a,b)$ *i da je* f *dovoljno neprekidno diferencijabilna u okolini nule* α*.Tada postupak* (40)-(42) *ima četvrti red konvergencije. Odgovarajuća asimptotska konstanta greške je*

$$E_k = \begin{cases} c_2^3 - c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4, & k=3\\ -c_2c_3 + \frac{1}{9}c_4, & k>3\end{cases}$$

3.3 Treća familija postupaka četvrtog reda

Sada posmatramo iterativni postupak

$$x_{n+1} = F_k\left(x_n\right) \tag{44}$$

$$F_k(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\varphi_k(\mu(x)) \tag{45}$$

$$\mu\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)^2} f''\left(x - \frac{1}{3}u\left(x\right)\right) \tag{46}$$

sa funkcijama φ_k definisanim sa (26).

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\alpha\right) = 0,\\
&\mu'\left(\alpha\right) = 2c_2,\\
&\mu''\left(\alpha\right) = 4\left(-3c_2^2 + 2c_3\right),\\
&\mu'''\left(\alpha\right) = 12\left(8c_2^3 - 10c_2c_3 + \frac{8}{3}c_4\right),
\end{aligned} \tag{47}$$

Teorema 11. *Pretpostavimo da funkcija* $f:\left(a,b\right) \subset R \to R$ *ima jednostruku nulu* $\alpha \in \left(a,b\right)$ *i da je* f *dovoljno neprekidno diferencijabilna u okolini nule* α*.Tada postupak* (44)-(46) *ima četvrti red konvergencije. Odgovarajuća asimptotska konstanta greške je*

$$E_k = \begin{cases} c_2^3 - c_2c_3 + \dfrac{1}{3}c_4, & k = 3 \\ -c_2c_3 + \dfrac{1}{3}c_4, & k > 3 \end{cases}$$

4 Numerički eksperimenti

Rešavali smo jednačinu $f(x)=0$ koristeći sledeće test funkcije iz [3] sa odgovarajućim startnim vrednostima x_0:

$f_1(x)=\frac{1}{2}-\sin x$, $\alpha_1{*}\approx 0.5235987755982988731$, $x_0=0.7$,

$f_2(x)=x^3-10$, $\alpha_2{*}\approx 2.1544346900318837218$, $x_0=2$,

$f_3(x)=3x^2-e^x$, $\alpha_3{*}\approx 0.91000757248870906065$, $x_0=2$

$f_4(x)=x^3+4x^2-10$, $\alpha_4{*}\approx 1.3652300134140968458$, $x_0=2$

$f_5(x)=(x-1)^3-1$, $\alpha_5=2$, $x_0=1.8$,

$f_6(x)=(x-1)^3-2$, $\alpha_6^*\approx 2.259921049894873$, $x_0=2.0$,

$f_7(x)=\frac{x}{2}-\sin x$, $\alpha_7{*}\approx 1.8954942670339809471$, $x_0=1.5$

$f_8(x)=e^{x^2+7x-30}-1$, $\alpha_8=3$, $x_0=3.1$,

$f_9(x)=x-\cos x$, $\alpha_9^*\approx 0.7390851332151606$, $x_0=2$,

$f_{10}(x)=x^2\sin x-\cos x$, $\alpha_{10}^*\approx 0.8952060453842319$, $x_0=1.5$.

Svi rezultati dobijeni su u programskom paketu *Mathematica*. Preciznost je povećana na 20000 cifara sa funkcijom *SetPrecision*. Koristili smo izlazni kriterijum

$$|x_k-\alpha|<\varepsilon \text{ i } |f(x_k)|<\varepsilon,$$

gde je α tačno rešenje posmatrane jednačine. U slučajevima gde je tačno rešenje nepoznato koristili smo njegovu aproksimaciju $\alpha*$, koja je dobijena sa 30000 cifara. Zbog jednostavnosti uz svaku jednačinu navedeno je tačno ili približno rešenje α odnosno $\alpha*$ samo sa 20 cifara.

Numerički red konvergencije (COC) računamo prema

$$COC\approx\frac{\ln|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|}{\ln|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)|}.$$

U svim slučajevima je $|COC-4|\le 10^{-5}$, za $n=3,4,\ldots$ Dakle, numerički red konvergencije je veoma blizak broju 4, što potvrđuje teorijske rezultate.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
f_1	1111.4	1200.0	1193.5	1193.5	1193.9	1193.9
f_2	1213.0	1300.1	1325.1	1323.0	1323.2	1323.2
f_3	480.4	526.6	527.5	527.5	527.5	527.5
f_4	651.7	935.0	788.6	768.2	763.1	761.8
f_5	722.8	783.2	862.9	840.3	844.8	843.8
f_6	707.2	766.4	849.3	824.7	829.8	828.6
f_7	508.3	736.6	786.0	966.5	875.3	897.6
f_8	407.7	276.2	133.5	73.8	103.5	94.8
f_9	961.9	982.1	982.1	982.1	982.1	982.1
f_{10}	533.4	607.2	609.7	610.0	610.0	610.0

Tabela 1. Upoređenje postupaka $-log|x_5-\alpha|$

U tabeli 1 prikazani su rezultati koje smo dobili sa prvom familijom. Slični razultati se dobijajiu i za druge dve familije, odnosno razlika je zanemarljiva. Iz tabela vidimo da se sa trećim ili četvrtim članom svake familije dobijaju najbolji rezultati.

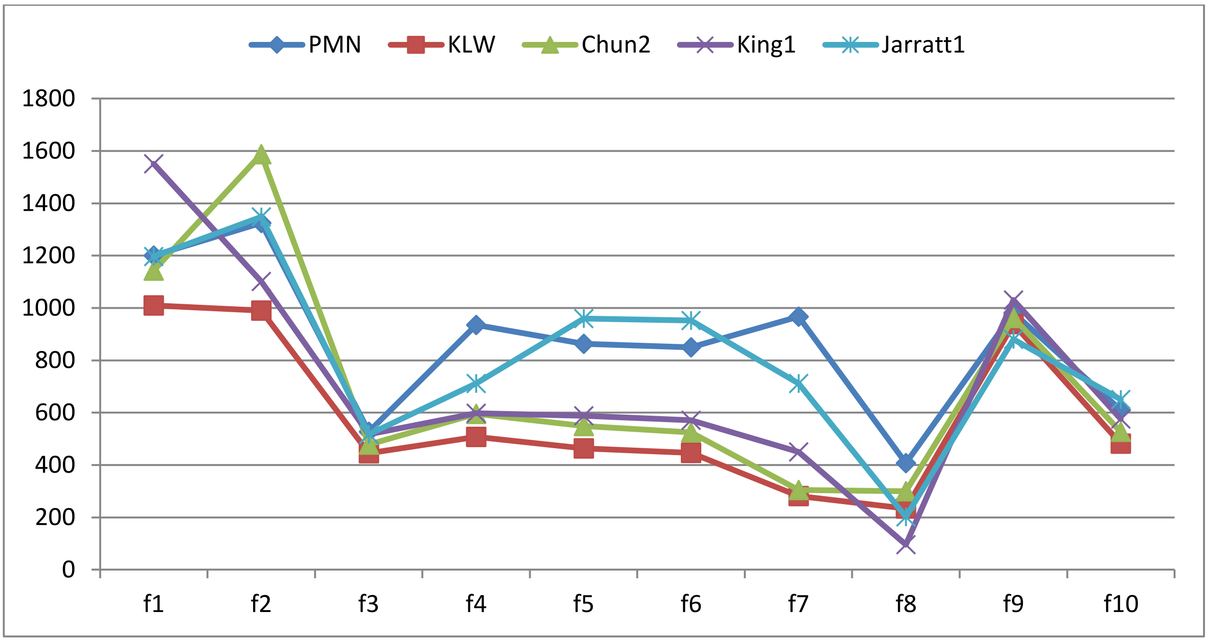
	PM1	PMN	KLW	Chun		King		Jarratt			
				1	2	1	2	1	2	3	4
f_1	1111.4	1200.0	1009.8	1061.1	1143.1	1551.6	1172.0	1197.2	1063.4	980.0	1116.3
f_2	1213.0	1325.1	990.5	1084.1	1587.3	1101.3	976.2	1347.6	1079.7	941.3	1213.0
f_3	480.4	527.5	445.5	459.0	478.6	517.6	465.8	517.6	500.6	475.4	520.6
f_4	651.7	935.0	507.4	542.3	595.1	598.2	393.1	711.3	560.9	495.4	651.7
f_5	722.8	862.9	463.5	705.0	549.1	587.7	478.2	959.1	575.6	316.3	722.8
f_6	707.2	849.3	446.0	709.7	524.8	570.6	461.8	952.2	559.4	285.9	707.2
f_7	508.3	966.5	280.9	58.1	304.9	450.2	326.8	711.1	394.4	80.2	510.6
f_8	407.7	407.7	233.2	258.2	300.3	95.3	313.3	201.4	277.9	226.5	395.1
f_9	961.9	982.1	939.3	948.9	961.9	1030.1	975.9	879.6	844.4	827.5	857.0
f_{10}	533.4	610.0	481.8	500.5	527.1	575.9	576.9	651.0	523.6	488.7	555.1

Tabela 2. Upoređenje postupaka $-log|x_5-\alpha|$

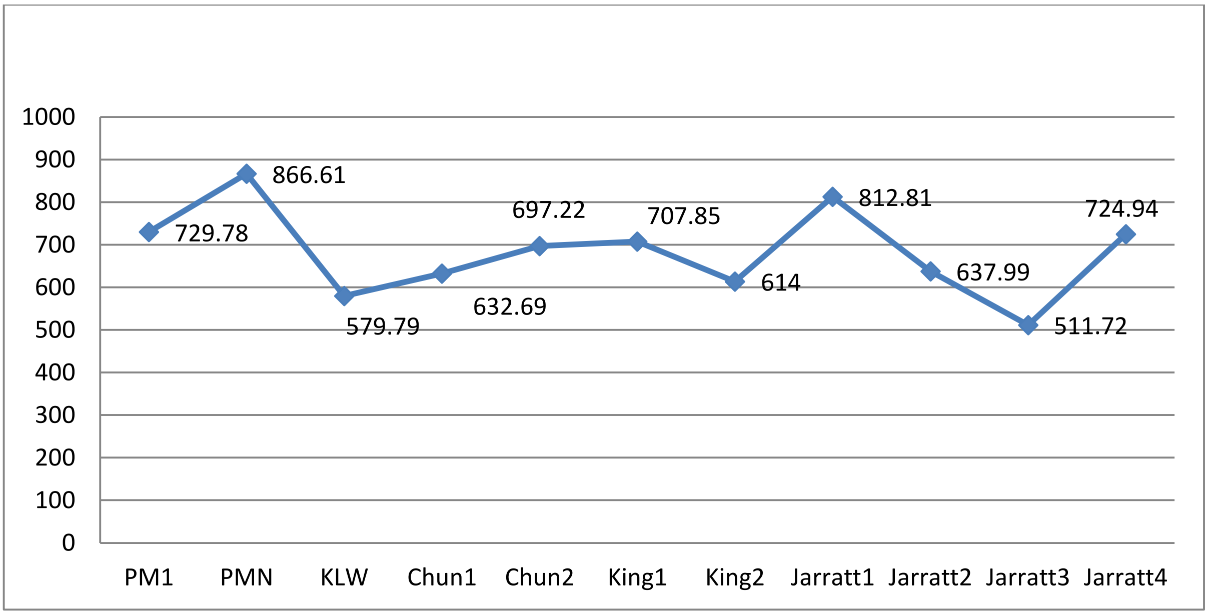
U tabeli 2 prikazane su vrednosti $-log|x_5-\alpha|$ za sve postupke koje smo testirali. Pri tom je u koloni PM1 prikazana kolona φ_1 iz tabele 1; u koloni PMN najbolji rezultat iz kolona $\varphi_2-\varphi_6$ iz tabele 1; u kolonama Chun rezultati za $\beta=-1$ (Chun 1) i $\beta=-2$ (Chun 2); U kolonama King rezultati za $\beta=-1$ (King 1) i $\beta=-2$ (King 2); u kolonama Jarratt rezultati za $a_2=27/52$ (Jarratt 1), $a_2=3/2$ (Jarratt 2), $a_2=9/10$ (Jarratt 3) i $a_2=0$ (Jarratt 4).

Iz svake grupe postupaka izdvojili smo one koji imaju najveće vrednosti za $-log|x_5 - \alpha|$ i prikazali na sledećoj slici. Za većinu posmatranih funkcija najbolje rezultate daje naš postupak (PMN) i postupak Jarratta1. Prosečna vrednost za $-log|x_5 - \alpha|$ za svaku kolonu tabele 2 prikazana je na slici 2. Vidimo da it u najbolje rezultate imaju naš postupak i postupak Jarratta.

Rezultati se razlikuju, za pojedine funkcije neki postupci u odnosu na druge daju bolje rezultate, a za druge funkcije daju lošije, tako da se ni za jedan postupak ne može reći da je najbolji.



Slika 1. Vrednost $-log|x_5 - \alpha|$ za najbolje postupke



Slika 2. Prosečna vrednost $-log|x_5 - \alpha|$ za sve postupke

5 Zaključak

U radu smo posmatrali optimalne postupke četvrtog reda konvergencije za numeričko rešavanje nelinearnih jednačina sa jednom nepoznatom. Indeks efikasnosti ovih postupaka je $4^{1/3} = 1.5874\ldots$. Posmatrani postupci polaze od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, a povišenje reda sa dva na četiri postiže se ubrzanjem Njutnovog postupka sa dodatnim korakom. Prikazani su postupak Chuna, postupak Wang&Kou&Li, postupak Kinga i postupak Jaratta. Postupajući na način prikazan u radu [4], dobijena je familija optimalnih postupaka četvrtog reda konvergencije, kao originalan doprinos. Dokazane su teoreme o lokalnoj konvergenciji posmatrane familije i određene su asimptotske konstante greške koristeći rezultate iz [3]. Pod određenim pretpostavkama dokazali smo konvergenciju postupaka i odredili asimptotske konstante greške.

U četvrtom delu rada prikazali smo više rezultata izvedenih eksperimenata koji su urađeni u programskom paketu *Mathematica*. Numerički rezultati pokazuju da naše modifikacije i primeri daju dobre rezultate, slične postupcima na koje smo se ugledali.

Primeri koje smo koristili za numerički eksperiment uzeti su iz relevantnih radova. Numerički rezultati su u skladu sa teorijskim razmatranjima.

6 Literatura

[1] Chun C., A family of composite fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 187 (2007) 951–956.

[2] Chun C., Iterative methods improving Newton's method by the decomposition method, Comput. Math. Appl. 50 (2005) 1559–1568.

[3] Herceg Đ., Herceg D., A family of methods for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 259 (2015) 882–895.

[4] Herceg Đ., Herceg D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, International Journal of Computer Mathematics, 87(2010), 11, 2533–2541.

[5] Herceg D., Krejić N., *Numerička analiza*, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.

[6] Jarratt P., *Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations*, Math. Comp. 20 (1966), 434–437.

[7] King R., A family of fourth order methods for nonlinear equations, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973) 876–879.

[8] Kou J., Li Y., An improvement of Jarratt method, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 1816–1821.

[9] Kou J., Li Y., Wang X., A composite fourth-order iterative method, Appl. Math. Comput. 184 (2007) 471–475.

[10] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.

[11] Ostrowski A.M., *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press Inc., 1966.

[12] Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.

[13] Traub J.F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, Clifford, NJ, 1964.

7 Biografija

Rođena sam 23. septembra 1989. godine u Subotici. Osnovnu školu „Sečenji Ištvan“ u Subotici završila sam 2004. godine, a Gimnaziju „Svetozar Marković“ u Subotici 2008. godine. Iste te godine upisala sam se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematičar. Osnovne studije završila sam 14. septembra 2011. godine. U oktobru te godine upisala sam se na master studije, smer master matematika - nastava matematike. Položila sam sve ispite predviđene planom i programom master studija.

Zaposlena sam od januara 2013. godine u Tehničkoj Školi „Ivan Sarić“ u Subotici.

Novi Sad, avgust 2015. *Granjak Đenđi*

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Granjak Đenđi
AU
Mentor: dr Dragoslav Herceg
MN
Naslov rada: Jedna familija postupaka četvrtogtog reda za numeričko rešavanje jednačina
MR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2015.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/ 35 strana/ 2 tabele/ 13 literatura
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička matematika
ND
Ključne reči: red konvergencije, postupak, jednačina greške
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U master radu posmatramo teoreme i algoritme koje se odnose na iterativne postupake četvrtog reda konvergencije za izračunavanje jednostrukih korena nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Pretpostavljamo da u posmatranom intervalu $[a, b]$ funkcija f ima jednostruko rešenje α, tj. da je $f'(\alpha) \neq 0$. Polazeći od Njutnovog postupka, koji je drugog reda konvergencije, dajemo modifikacije čiji je red povišen na četiri. Kao originalan doprinos dajemo tri nove familije postupaka. Pod

određenim pretpostavkama za posmatrane postupke dokazujemo konvergenciju četvrtog reda i određujemo odgovarajuće simptotske konstante greške.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.9.2013.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Helena Zarin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član:	dr Đorđe Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor:	dr Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC

Author: Granjak Đenđi
AU
Mentor: dr. Dragoslav Herceg
MN

Title: A family forth order methods for nonlinear equations
XI
Language of text: Serbian (Latinic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2015.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description 4 chapters/ 35 pages/ 2 tables/ 13 references
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Numerical mathematics
SD
Key words: order of convergence, method, equation error
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N

The master work we consider theorems and algorithms related to the iterative procedure of the fourth-order convergence for numerical solving of the nonlinear equation . We assume that function f has a simple solution α in $[a,b]$, ie. $f'(\alpha) \neq 0$. Starting from Newton's method, which is second order convergence, we present some known methods of fourth order of. As an original contribution we give

some tree families procedures. Under certain conditions, for the concerned methods we prove the convergence of the fourth order and determine corresponding asymptotic constant errors.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 25. 9. 2013.
ASB
Defended:
DE
Thesis defense board:
DB
President: dr Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor : dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad