Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Daria Hloda

Topološke dimenzije

Master rad

Mentor:
dr Aleksandar Pavlović

2016, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor

Pojmu dimenzije nekog prostora može da se pristupi na više načina. Kako se svaki prostor sastoji od tačaka, možemo postaviti sebi sledeće pitanje - koji je najmanji broj parametara pomoću kojih se svaka tačka može jedinstveno odrediti? Ovakav pristup problemu poklapa se sa vektorskom dimenzijom euklidskih prostora. Znamo da je svaka tačka neke prave određena jednim parametrom, za tačku u ravni koristimo dve koordinate, a za tačku u prostoru tri. Sa druge strane, na ovaj način se određuje dimenzija površi, mnogostrukosti i geometrijskih tela; kažemo da su sfera i torus dimenzije 2, dok je jedinična lopta u $\mathbb{R}^3$ dimenzije 3, prema broju koordinata koji je potreban za opisivanje neke tačke.

Još u 19. veku među naučnicima je pojam dimenzije geometrijskih objekata posmatran sa dobrom dozom intuicije, kao i mnogi drugi pojmovi u naivnoj teoriji skupova. Podrazumevalo se da je interval dimenzije 1, kvadrat dimenzije 2, a kocka dimenzije 3. Međutim, kada je Kantor[1] 1878. godine pokazao da su interval i kvadrat skupovi iste kardinalnosti, i nakon Peanovog[2] otkrića 1890. godine da se interval može neprekidno preslikati na kvadrat, stvari su postale složenije. Mnogi su se zapitali da li postoji uzajamno neprekidno bijektivno preslikavanje između I i I^2, da li su ova dva prostora homeomorfna, odnosno da li se može pokazati ono što nam sugeriše intuicija, da generalno važi $I^n \ncong I^m$, za $n \neq m$.

Odgovor na ovo pitanje dato je kroz nekoliko primera u periodu od 1890. do 1910. godine, ali prvi zvaničan dokaz potiče od Brauera[3], objavljen 1911. godine u [1]. Ovaj dokaz zasniva se na ideji da se definiše preslikavanje d koje svakom prostoru dodeljuje prirodan broj n i pritom za svako $n \in \mathbb{N}$ važi jednakost $d(I^n) = n$. Brauer u svom dokazu ovo preslikavanje nije eksplicitno naveo, a kako mnogi netrivijalni problemi često podstiču razvoj teorije tako je i zadatak traženja funkcija koje zadovoljavaju ove uslove podstakao razvoj teorije dimenzije topoloških prostora.

Vremenom su postale zastupljenije tri takve funkcije, koje će biti predstavljene i analizirane u ovom radu. To su mala induktivna dimenzija ind, velika induktivna dimenzija Ind i pokrivajuća dimenzija dim. Prve dve funkcije dimenzije zasnivaju se na principu matematičke indukcije, dok je pokrivajuća dimenzija definisana preko pokrivača prostora. Svaka od ovih funkcija ima posebnu ulogu u razvoju teorije dimenzije.

Nakon Brauerovog otkrića, Lebeski[4] je u svom radu [15] iste godine pokazao jedno svojstvo kocke I^n čime je potvrđen Brauerov rezultat, iako je dokaz Lebeskog zahtevao neke korekture koje su kasnije date od strane Brauera 1913. godine u [3] i samog Lebeskog u [16], 1921. godine. Prema radu Lebeskog, za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačna familija zatvorenih skupova dijametra manjeg od ε koja pokriva I^n, takva da je presek svakih

[1]Georg Cantor (1845-1918), nemački matematičar

[2]Giuseppe Peano (1858– 1932), italijanski matematičar

[3]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), holandski matematičar

[4]Henri Léon Lebesgue (1875-1941), francuski matematičar

$n+2$ elemenata familije prazan, i ne postoji konačna familija zatvorenih skupova dijametra manjeg od 1 koja pokriva I^n takva da je presek svakih $n+1$ elemenata te familije prazan. Ovaj dokaz vodio je ka definiciji pokrivajuće dimenzije.

Godinu dana kasnije svoj doprinos daje Poenkare[5]. On je primetio da se sledeće geometrijsko svojstvo može iskoristiti u definisanju nove dimenzije, i to induktivnim putem - svako telo se može podeliti uz pomoć ravni, svaka ravan se može podeliti pomoću prave, a svaka prava se može podeliti tačkom. On je sugerisao da se dimenzija prostora može definisati preko razdvajanja prostora nekim drugim prostorom manje dimenzije. Zbog prirode žurnala za koji je pisao i sopstvene smrti iste godine, Poenkareove ideje nisu odmah uzete kao podloga za definisanje nove dimenzije. Međutim, Brauer je predstavio Poenkareov rad u [3] u kome definiše dimenziju koja se u klasi kompletnih metričkih prostora poklapa sa velikom induktivnom dimenzijom i pokazuje jednakost $\operatorname{Ind}\mathbb{R}^n = n$.

Definiciju male induktivne dimenzije ind uveli su Menger[6] u [17] 1923. godine i Urison[7] u [21] 1922. godine, i to nezavisno jedan od drugog. Oni su započeli rad sa dimenzijom u klasi kompaktnih metričkih prostora i u narednih par godina pokazali su mnoga značajna svojstva male induktivne dimenzije ovih prostora. Tumarkin[8] i Hurevič[9] su kasnije proširili teoriju na klasu separabilnih metričkih prostora. Hurevič je uspeo da pojednostavi neke od postojećih dokaza ove teorije, a pomoću teoreme kompaktifikacije mnoge teoreme koje su važile na klasi kompaktnih metričkih prostora proširio je na klasu separabilnih metričkih prostora.

Jedan od važnih rezultata teorije dimenzije jeste teorema o poklapanju koja važi u klasi separabilnih metričkih prostora. Ovu teoremu su predstavili Hurevič i Valman[10] 1941. godine u [13] i prema njoj za svaki prostor X ove klase važi $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$. Nakon ovog otkrića postavljeno je pitanje da li teorema o poklapanju važi u klasi svih topoloških prostora, ili bar unutar klase svih metričkih prostora. Negativan odgovor na ovo pitanje dao je P. Roj[11] tako što je konstruisao metrizabilan prostor čija je mala induktivna dimenzija različita od velike induktivne i pokrivajuće dimenzije. Mnogi drugi primeri topoloških prostora u kojima se ove tri dimenzije ne poklapaju mogu se naći u [19].

U ovom radu ćemo definisati i analizirati tri pomenute funkcije dimenzije u klasi separabilnih metričkih prostora, a na kraju ćemo pokazati teoremu o poklapanju u klasi separabilnih metričkih prostora kao i fundamentalnu teoremu teorije dimenzije prema kojoj je $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n = \operatorname{Ind}\mathbb{R}^n = \dim\mathbb{R}^n = n$ za $n \in \mathbb{N}$. Sama definicija funkcije ind u našem pristupu će se odnositi na klasu T_3-prostora, a preostale dve na klasu T_4-prostora. Neke teoreme su formulisane tako da važe i van separabilnih metričkih prostora, pre svega one čiji dokazi ne zahtevaju korišćenje ovih osobina.

Prvo od četiri poglavlja predstavlja uvodno poglavlje u kome su navedene osnovne definicije, teoreme i ilustrativni primeri iz opšte topologije koje čitalac treba da pročita i razume kako bi mogao da prati ostatak rada. Neke od teorema u ovoj glavi su navedene bez dokaza, uz referencu gde se dokazi mogu pronaći.

U drugom poglavlju uvodimo pojam male induktivne dimenzije. U prvom odeljku ove glave dajemo definiciju i osnovne primere, pokazujemo monotonost ovog operatora

[5] Jules Henri Poincaré (1854-1912), francuski matematičar
[6] Karl Menger (1902-1985), austrijsko-američki matematičar
[7] Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924), ruski matematičar
[8] Lev Abramovič Tumarkin (1901-1974), ruski matematičar
[9] Witold Hurewicz (1904-1956), poljski matematičar
[10] Henry Wallman (1915-1992), američki matematičar
[11] Roy Patrick Kerr (1934-), novozelandski matematičar

u klasi T_3-prostora kao i invarijantnost na homeomorfizme, uvodimo pojam particija i dajemo dva ekvivalentna uslova za ovu dimenziju preko pojma particija i preko dimenzije rubova baznih skupova. Drugi odeljak odnosi se na nula-dimenzionalne prostore stoga dajemo verzije teorema pokazanih u prethodnom odeljku koje se odnose na dimenziju 0, a nakon toga dajemo ekvivalentan uslov nula-dimenzionalnih potprostora prostora $\mathbb{R}$ preko intervala. Pored toga ovaj odeljak sadrži i dokaze prve i druge teoreme separacije za nula-dimenzionalne prostore. U trećem odeljku pokazujemo teoremu o sumi, prvu i drugu teoremu dekompozicije i prvu i drugu teoremu o separaciji za dimenziju n. Na kraju ovog odeljka pokazujemo da je za svako n $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n \leq n, \operatorname{ind} I^n \leq n$ i $\operatorname{ind} S^n \leq n$.

U trećem poglavlju uvodimo pojam velike induktivne dimenzije i pokrivajuće dimenzije u klasi T_4-prostora. U prvom odeljku dajemo definiciju i osnovne primere velike induktivne dimenzije, pokazujemo monotonost i invarijantnost na homeomorfizam i dajemo jedan ekvivalentan uslov za ovu dimenziju. Na kraju ovog odeljka pokazujemo da za svaki separabilan metrički prostor X važi $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$. U drugom odeljku ove glave uvodimo pojam pokrivajuće dimenzije, dajemo dva ekvivalentna uslova za ovu dimenziju, a na kraju pokazujemo dva ekvivalentna uslova za ovu dimenziju u klasi kompaktnih metričkih prostora.

U četvrtom, poslednjem poglavlju, pokazujemo fundamentalnu teoremu teorije dimenzije pomoću teoreme kompaktifikacije. U prvom odeljku ove glave uvodimo pojmove i definicije iz opšte topologije koji se odnose samo na ovu glavu, koji su neophodni za dalje razumevanje teksta. Na početku drugog odeljka pokazujemo teoremu kompaktifikacije iz koje kasnije izvodimo teoremu o poklapanju u klasi separabilnih metričkih prostora. U trećem poglavlju pokazujemo teoremu o particijama i navodimo Brauerovu teoremu, te na kraju pokazujemo fundamentalnu teoremu i pokazujemo da je $\operatorname{ind} I^n = \operatorname{Ind} I^n = \dim I^n = n = \operatorname{ind} S^n = \operatorname{Ind} S^n = \dim S^n$ za $n \in \mathbb{N}$, kao i da je prostor $I^{\mathbb{N}}$ beskonačne dimenzije.

Najveći broj teorema koje su pokazane u drugoj, trećoj i četvrtoj glavi mogu se naći u [8]. Suština ovog rada jeste da čitaoca uputi u teoriju dimenzije separabilnih metričkih prostora, pokaže raznolikost pristupa ovoj problematici preko tri različite funkcije dimenzije i pokaže način kako ove definicije vode do zajedničkog rezultata - sve tri funkcije dimenzije se poklapaju sa pojmom vektorske dimenzije prostora $\mathbb{R}^n$.

Glava 1

Uvod

Na početku ovog rada uvodimo osnovne algebarske i topološke pojmove i teoreme koje ćemo koristiti. Neke od teorema u uvodu ćemo dokazati, a neke samo navesti radi bolje preglednosti. Dokazi koji nedostaju mogu se naći u [7] i [14].

1.1 Osnovni algebarski pojmovi i oznake

Kako su skupovi osnovni alat koji koristimo u topologiji, na početku ćemo uvesti oznake koje ćemo koristiti, a koje se tiču skupova.

Podsetimo se, skup A je podskup skupa B ako i samo ako svaki element skupa A pripada skupu B. Ako je A podskup skupa B koristimo oznaku $A \subseteq B$. Ukoliko želimo da naglasimo da je skup A strogo sadržan u skupu B, tada pišemo $A \subset B$.

Osnovne operacije među skupovima jesu presek, unija i razlika, koje označavamo sa $\cap, \cup, \setminus$. Sada ćemo navesti neke osobine ovih operacija, koje ćemo vrlo često koristiti:

$$
\begin{aligned}
&X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) && \text{(distributivnost } \cap \text{ prema } \cup\text{)}\\
&X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) && \text{(distributivnost } \cup \text{ prema } \cap\text{)}\\
&X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) && \text{(De Morganov}^1 \text{ zakon)}\\
&X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) && \text{(De Morganov zakon)}\\
&X \subseteq X_1 \wedge Y \subseteq Y_1 \Rightarrow X \cap Y \subseteq X_1 \cap Y_1 && \text{(monotonost preseka)}\\
&X \subseteq X_1 \wedge Y \subseteq Y_1 \Rightarrow X \cup Y \subseteq X_1 \cup Y_1 && \text{(monotonost unije)}
\end{aligned}
$$

Ukoliko imamo familiju skupova $\mathcal{A}$, tada uniju i presek svih skupova te familije, u oznaci $\bigcup \mathcal{A}$ i $\bigcap \mathcal{A}$, definišemo na sledeći način:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : \exists X \in \mathcal{A}\ (x \in X)\}, \quad \bigcap \mathcal{A} = \{x : \forall X \in \mathcal{A}\ (x \in X)\},$$

pri čemu se presek familije $\mathcal{A}$ se definiše samo za $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Za uniju i presek familije $\mathcal{A}$ koristimo i oznake $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ i $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.

Ukoliko je familija $\mathcal{A}$ zadata preko indeksirane familije, odnosno dat je skup indeksa I i $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, tada se unija i presek familije $\mathcal{A}$ definišu na sledeći način:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : \exists i \in I\ (x \in A_i)\}, \quad \bigcap \mathcal{A} = \{x : \forall i \in I\ (x \in A_i)\}.$$

Može se proveriti da za presek i uniju indeksirane familije skupova važe uopštenja zakona distributivnosti i De Morganovih zakona:

$$X \cup \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(X \cup X_i) \qquad X \cap \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(X \cap X_i)$$
$$X \setminus \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus X_i) \qquad X \setminus \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(X \setminus X_i)$$

Ako je $f : X \to Y$ preslikavanje i $A \subseteq X$ proizvoljan skup, tada direktnu sliku skupa A definišemo sa

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}.$$

Za $B \subseteq Y$ definišemo inverznu sliku skupa B sa

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

1.2 Osnovni topološki pojmovi

1.2.1 Topologija, baza i podbaza

Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako važe sledeća tri uslova:

(O1) Prazan skup i skup X su otvoreni, tj. $\emptyset \in \mathcal{O}$ i $X \in \mathcal{O}$;

(O2) Presek dva otvorena skupa je otvoren skup, tj. ako $O_1 \in \mathcal{O}$ i $O_2 \in \mathcal{O}$ tada $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, tj. za bilo koju familiju $\{O_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je topologija na skupu X, za uređenu dvojku $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je topološki prostor, dok elemente skupa X zovemo tačke. Nadalje ćemo topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ često označavati samo sa X kada je jasno iz konteksta o kojoj je topologiji reč.

Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup. Familija svih zatvorenih skupova $\mathcal{F}$ zadovoljava sledeće uslove:

(F1) Prazan skup i skup X su zatvoreni, tj. $\emptyset \in \mathcal{F}$ i $X \in \mathcal{F}$;

(F2) Unija dva zatvorena skupa je zatvoren skup, tj. ako $F_1 \in \mathcal{F}$ i $F_2 \in \mathcal{F}$ tada $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$;

(F3) Unija proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup, tj. za bilo koju familiju $\{F_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$ važi $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$

Familija skupova $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ je baza topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ ako se svaki neprazan otvoren skup može predstaviti kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$.

Ako je X neprazan skup, za familiju $\mathcal{B}$ podskupova skupa X kažemo da je baza neke topologije na skupu X ukoliko je kolekcija $\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X, odnosno zatvorenje familije $\mathcal{B}$ u odnosu na proizvoljne unije predstavlja topologiju na skupu X. Može se pokazati da važi sledeća lema:

Lema 1.2.1. Neka familija podskupova $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ zadovoljava sledeće uslove:

(BN1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;

(BN2) ako $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tada $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$.

Tada je familija $\mathcal{B}$ baza neke topologije na skupu X.

Familija skupova $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$ je podbaza topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ ako familija svih konačnih preseka elemenata iz $\mathcal{P}$ predstavlja bazu topologije $\mathcal{O}$.

Primer 1.2.2 (Uobičajena topologija na skupu realnih brojeva). U ovom primeru uvodimo jednu topologiju na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ koju ćemo u daljem radu često koristiti. Pokazaćemo da je familija skupova

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$$

baza neke topologije na skupu $\mathbb{R}$.

Uslov (BN1) važi jer je $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}(-n, n)$, gde su skupovi oblika $(-n, n)$ za svaki prirodan broj n jasno unutar familije $\mathcal{B}$.

Dalje, neka $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathcal{B}$ i neka je $a = \max\{a_1, a_2\}$ i $b = \min\{b_1, b_2\}$. Tada važi

$$(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ako } a \geq b; \\ (a, b), & \text{ako } a < b. \end{cases}$$

Dakle, i uslov (BN2) je zadovoljen.

Topologija određena familijom $\mathcal{B}$ naziva se uobičajena topologija na skupu $\mathbb{R}$, a odgovarajući topološki prostor označavamo sa $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. Otvoreni skupovi u $\mathcal{O}_{uob}$ su proizvoljne (konačne ili beskonačne) unije skupova iz familije $\mathcal{B}$, kao npr. $(-2, 3), (0.25, 4) \cup (5, 8.75), \bigcup_{n \in \mathbb{N}}(0, n) = (0, \infty)$.

Primer 1.2.3 (Proizvod konačne familije topoloških prostora). Neka su dati topološki prostori $(X_1, \mathcal{O}_1)$ i $(X_2, \mathcal{O}_2)$. Tada je familija

$$\mathcal{B} = \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \mathcal{O}_1 \wedge O_2 \in \mathcal{O}_2\}$$

baza neke topologije $\mathcal{O}$ na skupu $X_1 \times X_2$. Uslov (BN1) je zadovoljen jer $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$, dok $(O_1 \times O_2) \cap (O_1' \times O_2') = (O_1 \cap O_1') \times (O_2 \cap O_2') \in \mathcal{B}$, stoga važi i (BN2). Za prostor $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ kažemo da je proizvod prostora X_1 i X_2.

Za svaki prirodan broj n se može definisati proizvod n topoloških prostora. Naime, ako su $(X_i, \mathcal{O}_i), i \leq n$ topološki prostori, onda bazu topologije $\mathcal{O}$ na skupu $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ čine skupovi oblika $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n$, gde je $O_i \in \mathcal{O}_i$, za sve $i \leq n$.

Sada ćemo uvesti još jedan poseban topološki prostor koji ćemo koristiti u daljem radu. Ako u prethodnom primeru stavimo $(X_i, \mathcal{O}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ za $i \leq n$, tada dobijamo topologiju koju nazivamo uobičajena topologija na skupu $\mathbb{R}^n$. Nadalje ćemo podrazumevati da je topologija na skupu $\mathbb{R}^n$ upravo uobičajena topologija, osim ako ne naglasimo da to nije slučaj.

Ako topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ ima bazu $\mathcal{B}$ koja je prebrojiva, tada kažemo da taj prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Sada dajemo bez dokaza jednu važnu teoremu koja se tiče ovog svojstva.

Teorema 1.2.4 (Lindelef[2]). Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$. Tada važi:

a) Ako $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, tada postoji prebrojiv podskup $J \subseteq I$ takav da je

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in J} O_i$$

b) Ako je $\mathcal{B}'$ neka druga baza topologije $\mathcal{O}$, tada postoji prebrojiv podskup skupa $\mathcal{B}'$ koji je takođe baza topologije $\mathcal{O}$.

Primetimo da, prema prvom delu ove teoreme, za svaku familiju otvorenih skupova $\{O_i : i \in I\}$ gde $X = \bigcup_{i \in I} O_i$ postoji prebrojiv podskup $\{O_i : i \in J\}$ tako da $X = \bigcup_{i \in J} O_i$. Kažemo da je familija $\{O_i : i \in I\}$ otvoren pokrivač skupa X, a familija $\{O_i : i \in J\}$ njen potpokrivač.

1.2.2 Topologija određena metrikom

Neka je X neprazan skup. Svaka funkcija $d : X^2 \to [0, \infty)$ takva da za sve $x, y, z \in X$ važi

(M1) $d(x, y) = 0$ akko je $x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

je metrika na skupu X. Uređeni par (X, d) se naziva metrički prostor. Broj $d(x, y)$ nazivamo rastojanje tačaka x i y. Ako je $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, onda skup

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

zovemo otvorena lopta sa centrom u tački x i poluprečnikom ε. Pomoću metrike se na skupu X na prirodan način može uvesti topologija, te iz tog razloga navodimo sledeću teoremu čije je dokaz dat u [14].

Teorema 1.2.5. Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je familija svih otvorenih lopti, $\mathcal{B}_d = \{B(x, \varepsilon) : x \in X \wedge \varepsilon > 0\}$, baza neke topologije na skupu X.

Topologiju definisanu u prethodnoj teoremi ćemo označavati sa $\mathcal{O}_d$. Kažemo da je ova topologija određena (ili indukovana) metrikom d. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je metrizabilan ako i samo ako postoji neka metrika d na skupu X tako da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Primer 1.2.6 (Prostori $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ su metrizabilni topološki prostori). Pokažimo da se na skupu $\mathbb{R}$ može definisati metrika koja indukuje uobičajenu topologiju. Za preslikavanje $d : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ definisano sa $d(x, y) = |x - y|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$ lako se može pokazati, zahvaljujući osobinama apsolutne vrednosti, da važe uslovi (M1)-(M3). Potrebno je još pokazati da je $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}_{uob}$, gde je $\mathcal{B}_{uob} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$.

Primetimo prvo da su uslovi $d(x, y) < \varepsilon$ i $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ekvivalentni, stoga važi jednakost $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Dakle, $\mathcal{B}_d \subseteq \mathcal{B}_{uob}$. Međutim, važi i obrnuta inkluzija jer $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ gde je $x = \frac{a+b}{2}$ i $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Odavde sledi da je uobičajena topologija na $\mathbb{R}$ upravo topologija $\mathcal{O}_d$ indukovana metrikom d.

[2]Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946), švedski matematičar

Na sličan način može se pokazati da preslikavanje na skupu $\mathbb{R}^n$, za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_2)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, definisano sa

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

indukuje uobičajenu topologiju na skupu $\mathbb{R}^n$. U literaturi ova metrika se naziva i Euklidska metrika.

Za dva metrička prostora (X, d_X) i (Y, d_Y) kažemo da su izometrična ako postoji sirjektivno preslikavanje koje je izometrija, odnosno preslikavanje $f : X \to Y$ takvo da za svako $x_1, x_2 \in X$ važi

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Dijametar nepraznog skupa A, sa oznakom $\delta(A)$, metričkog prostora (X, d) je najmanje gornje ograničenje rastojanja svih tačaka skupa A, tj.

$$\delta(A) = \sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\}.$$

Ako je A prazan skup, tada $\delta(\emptyset) = 0$.

Neka je dat skup $A \subseteq X$, gde je (X, d) metrički prostor. Udaljenost tačke x od skupa A, u oznaci $d(x, A)$ definišemo na sledeći način:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}, \text{ ako } A \neq \emptyset, \text{ i } d(x, \emptyset) = 1.$$

1.2.3 Okoline, osnovni operatori i separabilnost

Ako je $x \in X$ i U otvoren skup topološkog prostora X za koji važi $x \in U \subseteq X$, tada kažemo da je U okolina tačke x. Sada ćemo pokazati jednu lemu na koju ćemo se često pozivati u daljem radu.

Lema 1.2.7. Familija skupova $\mathcal{B}$ je baza topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ akko $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ i za svako $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x postoji otvoren skup $U \in \mathcal{B}$ tako da $x \in U \subseteq V$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ baza prostora X, $x \in X$ i V okolina tačke x. Kako je V otvoren skup, postoji familija skupova $\{B_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ tako da važi $V = \bigcup_{i \in I} B_i$. To znači da postoji $j \in I$ tako da $x \in B_j \subseteq V$.

Obratno, neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ tako da važe uslovi tvrđenja. Neka je V neprazan otvoren skup i $x \in V$. Kako je V okolina tačke x, prema pretpostavci postoji $U_x \in \mathcal{B}$ tako da važi $x \in U_x \subseteq V$. Tada je unija familije $\{U_x : x \in V\}$ jednaka V, odnosno važi $V = \bigcup_{x \in V} U_x$. □

Za familiju $\mathcal{B}(x)$ nekih okolina tačke x kažemo da je baza okolina tačke x u prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako za svaku okolinu V tačke x postoji $U \in \mathcal{B}(x)$ tako da $x \in U \subseteq V$. Može da se pokaže da je familija $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ baza topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$.

Primer 1.2.8 (Baza okolina neke tačke u prostoru $\mathbb{R}$). Ako $x \in \mathbb{R}$, tada je familija $\mathcal{S} = \{(a, b), a < x < b\}$ baza okolina tačke x. Primetimo prvo da su otvoreni intervali otvoreni skupovi u uobičajenoj topologiji na $\mathbb{R}$, a kako svi oni sadrže tačku x sledi da je $\mathcal{S}$ familija okolina tačke x. Neka je sada V proizvoljna okolina tačke x. Kako je, prema primeru 1.2.2, familija svih otvorenih intervala u $\mathbb{R}$ baza topološkog prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$, postoji otvoreni interval U tako da $x \in U \subseteq V$. Kako je U otvoreni interval koji sadrži x, važi $U \in \mathcal{S}$.

Postoje topološki prostori u kojima za svaku tačku x postoji prebrojiva baza okolina. Za takve prostore kažemo da zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti. U klasu ovih prostora spadaju i metrički prostori, što je pokazano u [14].

Neka je $A \subseteq X$ i neka je $\mathcal{C}_A$ familija svih zatvorenih skupova koji sadrže A. Presek svih elemenata familije $\mathcal{C}_A$ nazivamo zatvaranje ili adherencija skupa A u prostoru X i označavamo ga sa $\overline{A}$. Lako se pokazuje da je $\overline{A}$ najmanji zatvoren skup koji sadrži A i da je $A = \overline{A}$ akko je A zatvoren skup.

Lema 1.2.9. Neka je $A \subseteq X$ gde je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada $x \in \overline{A}$ akko za svaku okolinu U tačke x važi $A \cap U \neq \emptyset$.

Dokaz. Neka $x \in \overline{A}$. Pretpostavimo da postoji skup U koji je okolina tačke x tako da važi $A \cap U = \emptyset$. Skup U je otvoren pa je prema tome skup $X \setminus U$ zatvoren, i pri tome sadrži A. Dakle, $X \setminus U \in \mathcal{C}$. Takođe, $x \notin X \setminus U$. Prema pretpostavci važi $x \in \overline{A} = \bigcap \mathcal{C}$, a kako $X \setminus U \in \mathcal{C}$ sledi $x \in X \setminus U$. Kontradikcija.

Neka je sada $x \in X$ i za svaku okolinu U tačke X važi $A \cap U \neq \emptyset$. Pretpostavimo da $x \notin \overline{A}$, odnosno da postoji zatvoren skup C koji sadrži A dok $x \notin C$. Tada je $X \setminus C$ otvoren skup koji sadrži x pa je prema tome i okolina tačke x. Prema pretpostavci to znači da $A \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$, iz čega sledi da $C \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$ što je nemoguće. □

Sada ćemo dati teoremu koja se tiče zatvaranja skupa u metričkom prostoru, a dokaz se može naći u [7] ili [14].

Teorema 1.2.10. Za svaki podskup $A \subseteq X$ metričkog prostora X važi

(a) $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

(b) $x \in \overline{A}$ akko $d(x, A) = 0$.

Neka je $A \subseteq X$ i neka je $\mathcal{U}_A$ familija svih otvorenih skupova koji su sadržani u A. Uniju svih elemenata iz $\mathcal{U}$ nazivamo unutrašnjost skupa A i označavamo sa $\operatorname{Int} A$. Lako se pokazuje da je to najveći otvoren skup sadržan u A i da je $A = \operatorname{Int} A$ akko je A otvoren skup.

Lema 1.2.11. Neka je $A \subseteq X$ gde je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada $x \in \operatorname{Int} A$ akko postoji okolina U tačke x tako da važi $x \in U \subseteq A$.

Dokaz. Neka $x \in \operatorname{Int} A$. Kako $\operatorname{Int} A = \bigcup_{O \in \mathcal{U}} O$, postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da $x \in U \subseteq A$. Skup U je otvoren i sadrži x, pa je prema tome i okolina tačke x.

Obrnuto, neka je $x \in A$ tako da postoji okolina U tako da važi $x \in U \subseteq A$. Skup U je otvoren i sadržan u A, prema tome $U \in \mathcal{U}$. Stoga $U \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{U}} O = \operatorname{Int} A$, pa važi $x \in \operatorname{Int} A$. □

Za $A \subseteq X$ definišemo rub skupa A, u oznaci $\operatorname{Fr} A$, na sledeći način:

$$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A \tag{1.1}$$

Posledica 1.2.12. Neka je $A \subseteq X$ gde je X topološki prostor. Tada $x \in \operatorname{Fr} A$ akko za svaku okolinu U tačke x važi $U \cap A \neq \emptyset$ i $U \setminus A \neq \emptyset$.

Dokaz. Prema (1.1) sledi da $x \in \operatorname{Fr} A$ akko $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, odnosno $x \in \overline{A}$ i $x \in \overline{X \setminus A}$. Prema lemi 1.2.9 to je ekvivalentno uslovu da za svaku okolinu U tačke x važi $U \cap A \neq \emptyset$ i $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Kako važi $U \cap (X \setminus A) = U \setminus (X \setminus (X \setminus A)) = U \setminus A$, sledi tvrđenje. □

Sada bez dokaza dajemo jednu lemu koja se tiče operatora koje smo upravo uveli, a dokaz se nalazi u [7].

Lema 1.2.13. Neka je X topološki prostor i $A, B \subseteq X$. Tada važi:

(i) ako je $A \subseteq B$ tada je $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(ii) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(iv) $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$;

(v) $\operatorname{Fr}(X \setminus A) = \operatorname{Fr} A$;

(vi) A je otvoren skup akko $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus A$

(vii) A je zatvoren akko $\operatorname{Fr} A = A \setminus \operatorname{Int} A$

(vii) A je otvoren i zatvoren akko $\operatorname{Fr} A = \emptyset$

Primer 1.2.14 (Unutrašnjost, zatvaranje i rub otvorene lopte u metričkom prostoru $\mathbb{R}^n, n \geq 1$.). Neka je $B(x,\varepsilon)$ otvorena lopta, za neko $x \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Kako je $\operatorname{Int} A = A$ ako i samo ako je skup otvoren, a sve otvorene lopte su otvoreni skupovi, sledi da je $\operatorname{Int} B(x,\varepsilon) = B(x,\varepsilon)$. Dalje, znamo da $x \in \overline{A}$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke x važi $U \cap A \neq \emptyset$. Kako uvek važi $A \subseteq \overline{A}$, ostaje da ispitamo tačke iz $\mathbb{R}^n \setminus B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \geq \varepsilon\}$. Neka je $S(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = \varepsilon\}$, odnosno sfera sa centrom u tački x poluprečnika ε. Ako neka okolina U tačke $y \in \mathbb{R}^n$ seče $B(x,\varepsilon)$, tada postoji skup $B \in \mathcal{B}_d$, $y \in B \subseteq U$ takav da B seče $B(x,\varepsilon)$, stoga ćemo posmatrati samo skupove baze $\mathcal{B}_d$ koji sadrže y. Neka je $y \in S(x,\varepsilon)$. Tada za proizvoljno malo $\delta > 0$ važi $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\delta) \neq \emptyset$. Zaista, primetimo da za svaku tačku z koja se nalazi na duži određenoj tačkama x i y važi $d(x,z) + d(z,y) = d(x,y) = \varepsilon$. Iz neprekidnosti funkcije d sledi da možemo odabrati tačku z_0 sa ove duži tako da $d(y,z_0) < \delta$, a tada je i $d(x,z_0) < \varepsilon$. Prema tome, $S(x,\varepsilon) \subseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$. Preostalo nam je da proverimo tačke $y \in \mathbb{R}^n$ takve da $d(x,y) > \varepsilon$. Ako je $\delta = (d(x,y) - \varepsilon)/2$, tada $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\delta)$. Zaista, ako $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\delta)$, tada $d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + (d(x,y) - \varepsilon)/2 = (d(x,y) + \varepsilon)/2 = \varepsilon = d(x,y)$, što je u kontradikciji sa (M3). Dakle, $\overline{B(x,\varepsilon)} = B(x,\varepsilon) \cup S(x,\varepsilon)$. Kako za svaki otvoren skup važi $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus A$, sledi $\operatorname{Fr} B(x,\varepsilon) = S(x,\varepsilon)$.

Na kraju, primetimo da upravo pokazano svojstvo za otvorene lopte može da se primeni za ispitivanje otvorenih realnih intervala. Naime, kako svaki otvoreni realni interval (a,b) može da se predstavi kao lopta $B(x,\varepsilon)$ gde $x = \frac{a+b}{2}$ i $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, sledi da $\operatorname{Int}(a,b) = (a,b)$, $\overline{(a,b)} = [a,b]$ i $\operatorname{Fr}(a,b) = \{a,b\}$.

Lema 1.2.15. Ako je $A \cap B = \emptyset$ i A otvoren, tada je $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Dokaz. Neka je A otvoren skup i skup B takav da $A \cap B = \emptyset$. Tada je $B \subseteq X \setminus A = \overline{X \setminus A}$, iz čega sledi $\overline{B} \subseteq X \setminus A$. Sada direktno dobijamo $A \cap \overline{B} = \emptyset$. $\square$

Za skup $D \subseteq X$ kažemo da je gust u X ako i samo ako je $\overline{D} = X$. Prostor $(X, \mathcal{O})$ je separabilan ako i samo ako postoji skup $D \subseteq X$ koji je gust i prebrojiv. Bez dokaza navodimo teoremu koja daje potreban i dovoljan uslov da skup $D \subseteq X$ bude gust.

Teorema 1.2.16. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{B}$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}$. Tada važi: skup $D \subseteq X$ je gust ako i samo ako je $B \cap D \neq \emptyset$, za svaki neprazan skup $B \in \mathcal{B}$.

Primer 1.2.17 (Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je separabilan.). Kako bismo pokazali separabilnost prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ koristićemo poznato tvrđenje da se između svaka dva realna broja nalazi racionalan broj. Prema primeru 1.2.6, jedna baza uobičajene topologije na $\mathbb{R}$ je familija otvorenih lopti

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : x \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon > 0\}.$$

Dovoljno je pokazati da skup $\mathbb{Q}$ seče svaku otvorenu loptu $B(x, \varepsilon)$. Ako je x racionalan broj jasno je da tvrđenje važi, stoga pretpostavimo da je x iracionalan broj. Prema ranijem primeru znamo da $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Kako znamo da se između svaka dva realna broja nalazi racionalan, sledi da $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Dakle, $\mathbb{Q}$ seče svaki skup iz baze $\mathcal{B}$, što na osnovu teoreme 1.2.16 znači da je $\mathbb{Q}$ gust skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. Kako je $\mathbb{Q}$ i prebrojiv skup, sledi da je prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ separabilan.

Teorema 1.2.18. Metrički prostor (X, d) je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

1.2.4 Aksiome separacije, neprekidno preslikavanje i homeomorfizam

Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je

- T_0-prostor ako i samo ako za svaki par različitih tačaka $x, y \in X$ postoji otvoren skup O koji sadrži tačno jednu od tačaka x i y;
- T_1-prostor ako i samo ako za svaki par različitih tačaka $x, y \in X$ postoji otvoren skup O tako da $x \in O$ i $y \notin O$;
- T_2 ili Hauzdofov[3] ako i samo ako za svaki par tačaka x i y postoje otvoreni disjunktni skupovi O_1 i O_2 takvi da $x \in O_1$ i $y \in O_2$;
- regularan ako i samo ako za svaki zatvoren skup F i svaku tačku x koja mu ne pripada postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $x \in O_1$ i $F \subseteq O_2$;
- normalan ako i samo ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 postoje otvoreni disjunktni skupovi O_1 i O_2 da je $F_1 \subseteq O_1$ i $F_2 \subseteq O_2$;
- T_3-prostor ako i samo ako je regularan T_1-prostor;
- T_4-prostor ako i samo ako je normalan T_1-prostor.

U sledećoj teoremi data je karakterizacija T_1-prostora preko singltona (jednoelementnih skupova).

Teorema 1.2.19. Topološki prostor X je T_1-prostor ako i samo ako su svi singltoni skupa X zatvoreni skupovi.

[3] Felix Hausdorff (1868-1942), nemački matematičar

U [14] je pored tvrđenja iz prethodne teoreme pokazano i to da je svaki metrički (pa i metrizabilan topološki) prostor je T_4-prostor, svaki T_4-prostor i T_3-prostor, a svaki T_3 i T_2-prostor.

Neka su X i Y topološki prostori i $x_0 \in X$. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidno u tački x_0 ako i samo ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 da je $f[U] \subseteq V$. Ako je funkcija f neprekidna u svakoj tački $x \in X$, tada kažemo da je f neprekidna funkcija. Dva potrebna i dovoljna uslov za neprekidnost funkcije dajemo u sledećoj teoremi.

Teorema 1.2.20. Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno ako i samo ako je inverzna slika svakog otvorenog skupa otvoren skup ako i samo ako je inverzna slika zatvorenog skupa zatvoren skup.

Sledeća dva tvrđenja su takođe vrlo značajna kada su u pitanju neprekidna preslikavanja.

Teorema 1.2.21. Kompozicija dva neprekidna preslikavanja je neprekidno preslikavanje.

Teorema 1.2.22. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori $X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$, gde su $F_1, F_2, \ldots, F_n$ zatvoreni skupovi, $f_k : F_k \to Y$, $k \leq n$ neprekidna preslikavanja takva da je za $k, l \leq n$ $f_k(x) = f_l(x)$ za $x \in F_k \cap F_l$. Tada je preslikavanje $f : X \to Y$ dato sa

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{za } x \in F_1 \\ f_2(x), & \text{za } x \in F_2 \\ \quad\vdots & \\ f_k(x), & \text{za } x \in F_k \end{cases}$$

neprekidno. Preslikavanje f se naziva kombinacija neprekidnih preslikavanja $f_k, k \leq n$.

Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da je prelsikavanje $f : X \to Y$ homeomorfizam ako je f neprekidna bijekcija i f^{-1} neprekidno preslikavanje. Prostori X i Y su homeomorfni ako i samo ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$, što se označava sa $X \cong Y$. Lako se pokazuje da je $\cong$ relacija ekvivalencije na klasi svih topoloških prostora.

Kažemo da je peslikavanje f otvoreno ako i samo ako je slika svakog otvorenog skupa otvoren skup. Analogno, preslikavanje f je zatvoreno ako i samo ako je slika zatvorenog skupa zatvoren skup.

Sada ćemo navesti teoremu koja daje vezu između homeomorfizma, otvorenog i zatvorenog preslikavanja.

Teorema 1.2.23. Neka su X i Y proizvoljni topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada je f homeomorfizam ako i samo ako je otvoreno preslikavanje ako i samo ako je zatvoreno preslikavanje.

Kažemo da je osobina $\mathcal{P}$ topoloških prostora invarijanta neprekidnih preslikavanja ako i samo ako za svaka dva topološka prostora X i Y i svaku neprekidnu sirjekciju $f : X \to Y$ važi: ako prostor X ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i prostor Y ima osobinu $\mathcal{P}$. Invarijante homeomorfizama zovemo topološke osobine.

1.2.5 Potprostor

Neka je dat topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ i skup $M \subseteq X$. Posmatrajmo skupove oblika $M \cap U$, gde je $U \in \mathcal{O}$. Da familija ovih skupova zadovoljava uslove (O1)-(O3) lako se pokazuje. Naime, iz $\emptyset = M \cap \emptyset$ i $M = M \cap X$ sledi osobina (O1), dok iz jednakosti

$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = M \cap (U_1 \cap U_2), \quad \bigcup_{s \in S} (M \cap U_s) = M \cap \bigcup_{s \in S} U_s$$

slede osobine (O2) i (O3). Dakle, kolekcija $\{M \cap U : U \in \mathcal{O}\}$ je familija otvorenih skupova na skupu M. Na ovaj način definišemo indukovanu topologiju na M koju označavamo sa $\mathcal{O}_M$, a uređeni par $(M, \mathcal{O}_M)$ nazivamo potprostor prostora X. Ako je skup M otvoren u prostoru X kažemo da je M otvoren potprostor, a ako je zatvoren, kažemo da je zatvoren potprostor prostora X.

Primer 1.2.24 (Potprostori $I \subseteq \mathbb{R}$, $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ i $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$). U ovom radu ćemo najviše raditi sa uobičajenom topologijom na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$, pa ćemo u ovom primeru navesti neke potprostore ovih prostora koje ćemo takođe koristiti.

Zatvoreni interval $I = [0, 1]$ prostora $\mathbb{R}$ je zatvoren potprostor. Svi otvoreni skupovi topologije $\mathcal{O}_I$ su oblika $[0, 1] \cap O$, gde $O \in \mathcal{O}_{uob}$. Neki od njih su otvoreni i u $\mathbb{R}$, ali u opštem slučaju ne važi $\mathcal{O}_I \subseteq \mathcal{O}_{uob}$ jer $(\frac{1}{2}, 1] = (\frac{1}{2}, 2) \cap I \in \mathcal{O}_I \setminus \mathcal{O}_{uob}$. Slično, na prostoru $\mathbb{R}^n$ možemo posmatrati uobičajenu topologiju na skupu $I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$.

Još jedan značajan primer je uobičajena topologija na jediničnoj sferi S^n u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ koju definišemo na sledeći način:

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

U prostoru $\mathbb{R}^2$ sfera S^1 je zapravo jedinična kružnica.

Primer 1.2.25 (Baza okolina neke tačke u potprostoru prostora $\mathbb{R}$). Neka je M potprostor prostora $\mathbb{R}$ i $x \in M$. Iz primera 1.2.8 znamo da je familija intervala $\mathcal{S} = \{(a, b), a < x < b\}$ baza okolina tačke x u prostoru $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da je tada $\mathcal{S} \cap M = \{S \cap M : S \in \mathcal{S}\}$ baza okolina tačke x u prostoru M. Neka je V_M okolina tačke x u prostoru M. Kako je V_M otvoren skup u M, postoji $V \in \mathcal{O}_{uob}$ tako da $V_M = M \cap V$. Kako je V okolina tačke x, a $\mathcal{S}$ baza okolina tačke x u prostoru $\mathbb{R}$, tada postoji $U \in \mathcal{S}$ tako da $x \in U \subseteq V$. Tada je $U_M = U \cap M \in \mathcal{S} \cap M$ okolina tačke x u prostoru M tako da važi $x \in U_M \subseteq V_M$. Dakle, familija $\mathcal{S} \cap M$ jeste baza okolina tačke x u potprostoru M.

Kažemo da je topološka osobina nasledna ako za svaki prostor X sa tom osobinom važi: ako prostor X ima tu osobinu, tada i svaki potprostor prostora X ima tu osobinu.

Teorema 1.2.26. Osobine T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, separabilnost, prva i druga aksioma prebrojivosti su topološke osobine. Sve ove osobine, osim separabilnosti, su i nasledne osobine.

Ako je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$, može se pokazati da je funkcija $d_A = d\lceil A^2$ (preslikavanje čiji je domen $A \times A$, kodomen isti kao kod d i na svom domenu se poklapa sa d) metrika na potprostoru A i da važi $(A, \mathcal{O}_A) = (A, \mathcal{O}_{d_A})$. Iz ovoga možemo zaključiti da je potprostor metričkog prostora zapravo metrički prostor sa metrikom koja se razlikuje samo u domenu.

Sada dajemo teoremu koja se tiče potprostora metričkog prostora, koju ćemo u daljem radu često koristiti.

Teorema 1.2.27. Separabilnost je nasledna osobina u klasi metričkih topoloških prostora.

Dokaz. Ako je X separabilni metrički prostor, prema teoremi 1.2.18 on zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Ako je A potprostor prostora X, A je metrički prostor, te prema teoremi 1.2.26 on zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti takođe. Iz teoreme 1.2.18 sledi da je prostor A separabilan. $\square$

U narednom tvrđenju podrazumevaćemo da je $[0, \infty)$ potprostor prostora $\mathbb{R}$ sa uobičajenom topologijom. Za dokaz videti [7].

Teorema 1.2.28. Za svaki skup $A \subseteq X$, gde je (X, d) metrički prostor, funkcija $f : X \to [0, \infty)$ definisana sa $f(x) = d(x, A)$ jeste neprekidno preslikavanje na skupu X.

Sada ćemo pokazati lemu o zatvaranju skupa unutar nekog potprostora.

Lema 1.2.29. Neka je X topološki prostor i M potprostor prostora X. Skup $A \subseteq M$ je zatvoren u M akko postoji zatvoren skup F unutar prostora X tako da $A = M \cap F$. Ako je $\overline{A}$ zatvaranje skupa A u prostoru X i $\widetilde{A}$ zatvaranje skupa A u okviru prostora M, tada važi jednakost $\widetilde{A} = M \cap \overline{A}$.

Dokaz. Ako je $A = M \cap F$, gde je F zatvoren skup prostora X, tada je

$$M \setminus A = M \cap (X \setminus A) = M \cap (X \setminus (M \cap F)) = M \cap ((X \setminus M) \cup (X \setminus F)) = M \cap (X \setminus F).$$

Tada je prema definiciji otvorenog skupa u potprostoru, skup $M \cap (X \setminus F)$ otvoren u M, stoga je skup A zatvoren. Sa druge strane, neka je A zatvoren skup unutar potprostora M. Tada postoji otvoren skup U prostora X tako da $M \setminus A = M \cap U$. Tada je

$$A = M \setminus (M \setminus A) = M \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus (M \cap U) = M \cap (X \setminus U).$$

Tada je $A = M \cap F$, gde je $F = X \setminus U$ zatvoren skup u prostoru X.

Što se tiče drugog dela tvrđenja, znamo da je po definiciji $\widetilde{A}$ jednako preseku svih zatvorenih skupova prostora M koji sadrže A, a prema upravo pokazanom svi su oni oblika $M \cap F$, gde je F zatvoren skup prostora X koji sadrži A. Označimo ovu familiju zatvorenih skupova sa $\mathcal{C}$. Tada

$$\widetilde{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{C}} M \cap F = M \cap \bigcap_{F \in \mathcal{C}} F = M \cap \overline{A}.$$

$\square$

Neka su X i Y neprazni skupovi, $f : X \to Y$ i $A \subseteq X$. Za preslikavanje $g : A \to f[A]$ dato sa $g(x) = f(x)$, za svako $x \in A$, kažemo da je sirjektivna restrikcija preslikavanja f na skup A i označavamo ga sa $f|A$. Lako se pokazuje da je sirjektivna restrikcija bijekcije takođe bijekcija.

Teorema 1.2.30. Neka su X i Y topološki prostori i $A \subseteq X$ neprazan skup. Tada za proizvoljno preslikavanje $f : X \to Y$ važi:

a) f je neprekidno $\Rightarrow$ $f|A$ je neprekidno;

b) f je otvoreno $\Rightarrow$ $f|A$ je otvoreno.

1.2.6 Povezanost prostora

Prostor X je povezan ako i samo se ne može predstaviti kao unija dva neprazna otvorena disjunktna skupa. Skup $A \subseteq X$ je povezan skup ako i samo ako je potprostor $(A, \mathcal{O}_A)$ povezan. U [14] se pokazuje da je prostor X povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i X jedini otvoreni i zatvoreni skupovi prostora X, kao i da je prostor $\mathbb{R}$ povezan.

Teorema 1.2.31. Povezanost je invarijanta neprekidnih preslikavanja (pa time i topološka osobina).

Primer 1.2.32 (Realni intervali su povezani skupovi). Prvo ćemo pokazati da je interval $I = [0, 1]$ je povezan skup. Preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato sa $f(x) = \sin(x)$ je neprekidno, pa je, prema prethodnoj teoremi, $f[\mathbb{R}] = [-1, 1]$ povezan skup. Preslikavanje $g : [-1, 1] \to [0, 1]$ dato sa $g(x) = \frac{x+1}{2}$ je neprekidno preslikavanje tako da $g[[-1, 1]] = [0, 1]$, pa je stoga i $I = [0, 1]$ je povezan skup. Na sličan način se može uspostaviti neprekidno preslikavanje između svaka dva zatvorena realna intervala pa tako dobijamo da je svaki zatvoren interval $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$ povezan skup. Dalje, kako je preslikavanje $h(x) : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $h(x) = tg(\frac{\pi x}{2})$ homeomorfizam između $\mathbb{R}$ i $(-1, 1)$, sledi da je i prostor $(-1, 1)$ povezan. Lako se pokazuje da su svi otvoreni intervali takođe povezani, kao i intervali oblika $(a, b], [a, b), a, b \in \mathbb{R}$.

1.2.7 Topološki proizvod

Sada bismo želeli da definišemo proizvod prebrojive familije topoloških prostora. Kako bismo to ostvarili, navodimo sledeću teoremu, gde smo sa π_i označili preslikavanje koje elementu oblika $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$ dodeljuje a_i.

Teorema 1.2.33. Neka je I neprazan skup, a $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada važi:

a) Kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\prod X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[O_i]$, gde je $i \in I$ proizvoljan indeks, a $O_i \in \mathcal{O}_i$ otvoren skup u prostoru X_i, je podbaza neke topologije na skupu $\prod X_i$. Označimo tu topologiju sa $\mathcal{O}$.

b) Familija $\mathcal{B}$ svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$ je baza topologije $\mathcal{O}$.

Topologiju $\mathcal{O}$ na skupu $\prod_{i \in I} X_i$ definisanu na ovaj način zovemo topologija Tihonova[4]. U daljem radu ćemo za ovaj topološki prostor koristiti oznaku nosača $\prod_{i \in I} X_i$.

Ako je n konačno i dati su topološki prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \leq n$ prema primeru 1.2.3 na skupu $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ možemo posmatrati topologiju koju nazivamo proizvodom ovih topoloških prostora. Sa druge strane, prema prethodnoj teoremi možemo definisati topologiju Tihonova na istom tom skupu. U [14] je pokazano da su ovi prostori homeomorfni. Prema tome, uobičajena topologija na $\mathbb{R}^n$ uvedena kroz primer 1.2.3 i upravo definisana topologija na $\prod_{i=1}^n \mathbb{R}$ se poklapaju. Slično važi i za prostore I^n i S^n.

Primer 1.2.34 (Proizvod prebrojive familije prostora). Ako su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in \mathbb{N}$ topološki prostori, $j \in \mathbb{N}$ i $O_j \in \mathcal{O}_j$, onda je

$$\pi_j^{-1}[O_j] = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{j-1} \times O_j \times X_{j+1} \times \ldots .$$

Baza topologije na skupu $\prod X_i$ sastoji se od konačnih preseka oblika

[4]Andrei Nikolaevič Tihonov (1906-1993), ruski matematičar

$$\pi_{i_1}^{-1}[O_{i_1}] \cap \pi_{i_2}^{-1}[O_{i_2}] \cap \ldots \cap \pi_{i_n}^{-1}[O_{i_n}]$$

gde $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ i $O_{i_j} \in \mathcal{O}_{i_j}$, za sve $j \leq k$.

Ako je $X_i = \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$, na ovaj način definišemo prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ako je $X_i = I, i \in \mathbb{N}$, gde je $I = [0,1]$ prostor sa uobičajenom topologijom, tada dobijamo prostor $I^{\mathbb{N}}$ koji ćemo nazivati kub Hilberta[5].

Za topološku osobinu kažemo da je multiplikativna (resp. prebrojivo multiplikativna) ako i samo ako proizvod svake familije (resp. svake prebrojive familije) topoloških prostora $(X_i, \mathcal{O}_i)$ sa osobinom $\mathcal{P}$ ima osobinu $\mathcal{P}$.

Teorema 1.2.35. Osobine T_0, T_1, T_2 i T_3 su multiplikativne osobine, dok su prva i druga aksioma prebrojivosti, separabilnost i metrizabilnost prebrojivo multiplikativne osobine.

Primetimo da su, prema tome, prostori $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i $I^{\mathbb{N}}$ metrizabilni prostori u kojima važi druga aksioma prebrojivosti, pa stoga i separabilni.

Teorema 1.2.36. Neka su X, Y_1 i Y_2 topološki prostori i $f_i : X \to Y_i, i = 1,2$ neprekidna preslikavanja. Tada je preslikavanje $f : X \to \prod_{i=1,2} Y_i$, dato sa $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ neprekidno preslikavanje.

Teorema 1.2.37. Ako su $A, B \subseteq X$ razdvojeni skupovi, gde je $(X.d)$ metrički prostor, funkcije $f, g : X \to [0, \infty)$ date sa $f(x) = d(x, A)$, $g(x) = d(x, B)$, tada je funkcija $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ neprekidna funkcija.

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.2.28 znamo da su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidna preslikavanja. Prema teoremi 1.2.36 je i preslikavanje $\phi : X \to [0,\infty) \times [0,\infty)$ definisano sa $\phi(x) = (f(x), g(x))$ neprekidno preslikavanje. Realna funkcija $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa $k(x,y) = x - y$ je neprekidna, što je poznato tvrđenje iz matematičke analize. Sada, kako je $h(x) = k \circ \phi(x)$ kompozicija dva neprekidna preslikavanja, prema teoremi o kompoziciji neprekidnih preslikavanja, ona je neprekidno preslikavanje. □

Teorema 1.2.38. Ako su A i B zatvoreni, disjunktni skupovi u metričkom prostoru (X, d), tada je preslikavanje $f : X \to [0, \infty)$ definisano na sledeći način

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \tag{1.2}$$

neprekidno preslikavanje.

Dokaz. Pokazuje se slično kao i prethodno tvrđenje. Koristi se $k : [0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gde $k(x,y) = \frac{x}{x+y}$ koje je realno neprekidno preslikavanje, i činjenica da je imenilac u (1.2) uvek različit od nule jer su A i B disjunktni zatvoreni skupovi. □

[5]David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

Glava 2

Mala induktivna dimenzija topoloških prostora

U ovom poglavlju uvodimo definiciju male induktivne dimenzije definisane u topološkim T_3-prostorima. U prvom odeljku ćemo pokazati da je dimenzija ind invarijantna u odnosu na homeomorfna preslikavanja, kao i da potprostori imaju dimenziju manju ili jednaku dimenziji prostora. Nakon toga dajemo potreban i dovoljan uslov da prostor ima dimenziju n preko pojma particije, a na kraju dajemo potreban i dovoljan uslov koji važi u separabilnim metričkim prostorima. U drugom odeljku pokazujemo osnovne teoreme koje važe u nula-dimenzionalnim prostorima, pored toga i prvu i drugu teoremu o separaciji za dimenziju 0, dok u trećem odeljku pokazujemo opšti slučaj ovih teorema, kao i teoreme o sumi i o dekompoziciji. Na kraju trećeg poglavlja pokazujemo da dimenzija prostora $\mathbb{R}^n$, I^n i S^n nije veća od n.

2.1 Mala induktivna dimenzija

Na početku ćemo dati definiciju male induktivne dimenzije za T_3-prostore, a nakon toga sledi teorema o dimenziji potprostora.

Definicija 2.1.1. Neka je X topološki T_3-prostor. Mala induktivna dimenzija prostora X u oznaci $\operatorname{ind} X$ je ceo broj veći ili jednak od -1 ili beskonačan broj (sa oznakom „∞“) koji zadovoljava sledeće uslove:

(MD1) $\operatorname{ind} X = -1$ ako i samo ako $X = \emptyset$;

(MD2) $\operatorname{ind} X \leq n$, gde $n = 0, 1, \ldots$, ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x postoji otvoren skup $U \subseteq X$ tako da važi

$$x \in U \subseteq V, \quad \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1;$$

(MD3) $\operatorname{ind} X = n$ ako je $\operatorname{ind} X \leq n$ i ako ne važi $\operatorname{ind} X \leq n-1$;

(MD4) $\operatorname{ind} X = \infty$ ako $\operatorname{ind} X > n$ za $n = -1, 0, 1, \ldots$

Primetimo da iz (MD3) sledi da, ako želimo da pokažemo da je $\operatorname{ind} X = n$, dovoljno je pokazati da za svako $x \in X$, svaku okolinu tačke V i svaki otvoren skup U takav da $x \in U \subseteq V$ važi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = n-1$. Ovaj dovoljan uslov ćemo koristiti u sledećem primeru.

Primer 2.1.2 (Dimenzije nekih potprostora prostora $\mathbb{R}$). Neka je dat konačan potprostor $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ prostora $\mathbb{R}$. Kako je

$$\begin{aligned}\{x_1\} &= X \cap (x_1 - \frac{1}{2}, x_1 + \frac{x_1 + x_2}{2}),\\ \{x_i\} &= X \cap (x_i - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, x_i + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}), \text{ za } 1 < i < n,\\ \{x_n\} &= X \cap (x_n - \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, x_n + \frac{1}{2}),\end{aligned}$$

sledi da je svaki podskup skupa X otvoren u prostoru X kao unija singltona koji su otvoreni skupovi, odnosno $\mathcal{O}_X = P(X)$. Ovakvu topologiju, koja je jednaka partitivnom skupu nosača, nazivamo još i diskretnom topologijom na skupu X. Primetimo da, za svako $A \subseteq X$ važi $A = X \setminus B$, gde $B \subseteq X$, stoga su svi podskupovi skupa X otvoreno-zatvoreni u prostoru X. Neka je $x \in X$ i V okolina tačke x u prostoru X. Kako su svi podskupovi skupa X otvoreni, uzmimo proizvoljan skup $U \subseteq X$ takav da $x \in U \subseteq V$. Kako je skup U otvoreno-zatvoren, prema lemi 1.2.13 znamo da $\operatorname{Fr} U = \emptyset$, pa je prema (MD1) $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = -1$. Dakle, $\operatorname{ind} X = 0$. Može se pokazati da je topologija na skupu $\mathbb{N}$, kao i na svakom podskupu skupa $\mathbb{N}$, diskretna, pomoću čega se na sličan način pokazuje da su ovi prostori takođe nula-dimenzionalni.

Pokažimo sada da je $\operatorname{ind} \mathbb{R} = 1$. Za svaku tačku x i svaki otvoren skup V koji sadrži x postoji otvoren interval (a, b) takav da $x \in (a, b) \subseteq V$. Kako je $\operatorname{Fr}(a, b) = \{a, b\}$, na osnovu prvog dela ovog primera sledi da je $\operatorname{ind} \operatorname{Fr}(a, b) = 0$, stoga iz (MD2) sledi $\operatorname{ind} \mathbb{R} \leq 1$. Ostaje da se pokaže da je $\operatorname{ind} \mathbb{R} > 0$. Pretpostavimo suprotno, neka je $\operatorname{ind} \mathbb{R} \leq 0$. Neka je dalje $x \in \mathbb{R}$ i skup V otvoren skup različit od $\mathbb{R}$ takav da $x \in V$. Prema (MD2) tada postoji otvoren skup U takav da $x \in U \subseteq V$ i $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = -1$, odnosno važi $\operatorname{Fr} U = \emptyset$. Dakle, skup U je neprazan otvoreno-zatvoren skup različit od $\mathbb{R}$, što je nemoguće jer je $\mathbb{R}$ povezan prostor. Prema tome $\operatorname{ind} \mathbb{R} = 1$.

Jedna od važnih osobina male induktivne dimenzije jeste invarijatnost u odnosu na homeomorfna preslikavanja. Kako bismo pokazali da je $\operatorname{ind} X = n$ prema tome topološka osobina, prvo ćemo pokazati dve pomoćne leme.

Lema 2.1.3. Neka su X i Y topološki prostori tako da $X \cong Y$ i f odgovarajući homeomorfizam. Ako je M potprostor prostora X, tada je $M \cong f[M]$.

Dokaz. Pokazaćemo da je sirjektivna restrikcija $f|M$ homeomorfizam između prostora M i $f[M]$. Prema teoremi 1.2.23 dovoljno je pokazati da je $f|M$ neprekidna otvorena bijekcija. Zaista, $f|M$ jeste bijekcija kao sirjektivna restrikcija bijekcije, a i druge dve osobine važe na osnovu teoreme 1.2.30. □

Lema 2.1.4. Neka su X i Y homeomorfni topološki prostori, gde je f odgovarajući homeomorfizam. Za svaki skup $A \subseteq X$ važi $f[\operatorname{Fr} A] = \operatorname{Fr} f[A]$.

Dokaz. ($\subseteq$) Neka $y \in f[\operatorname{Fr} A]$. Tada postoji $x \in X$ tako da $f(x) = y$ i pritom važi $x \in \operatorname{Fr} A$. Kako $x \in \operatorname{Fr} A$, prema posledici 1.2.12 za svako $U \in \mathcal{U}$ važi $U \cap A \neq \emptyset$ i $U \setminus A \neq \emptyset$. Kako je f bijekcija, sledi

$$f[U \cap A] = f[U] \cap f[A] \neq \emptyset \quad \text{i} \quad f[U \setminus A] = f[U] \setminus f[A] \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Ako je V okolina tačke y tada je $f^{-1}[V]$ okolina tačke x, jer je zbog neprekidnosti preslikavanja f skup $f^{-1}[V]$ otvoren i važi $x = f^{-1}(y) \in f^{-1}[V]$. Tada svaku okolinu V tačke y

možemo predstaviti kao sliku neke okoline tačke x, odnosno $V = f[f^{-1}[V]]$, te na osnovu (2.1) važi $V \cap F[A] \neq \emptyset$ i $V \setminus f[A] \neq \emptyset$. Dakle, $y \in \operatorname{Fr} f[A]$.

($\supseteq$) Neka $y \in \operatorname{Fr} f[A]$. Kako je f bijekcija, tada postoji $x \in X$, $f(x) = y$. Kako $y \in \operatorname{Fr} f[A]$, za svaku okolinu V tačke y važi $V \cap F[A] \neq \emptyset$ i $V \setminus f[A] \neq \emptyset$. Tada, kako je f^{-1} takođe bijekcija, imamo

$$f^{-1}[V \cap f[A]] = f^{-1}[V] \cap f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[V] \cap A \neq \emptyset, \tag{2.2}$$
$$f^{-1}[V \setminus f[A]] = f^{-1}[V] \setminus f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[V] \setminus A \neq \emptyset. \tag{2.3}$$

Za svaku okolinu U tačke x skup $f[U]$ je okolina tačke y, jer je f kao homeomorfizam i otvoreno preslikavanje, a važi i $y = f(x) \in f[U]$. Dakle, svaka okolina U tačke x može da se predstavi kao inverzna slika neke okoline tačke y jer $U = f^{-1}[f[U]]$, stoga prema (2.2) i (2.3) važi $U \cap A \neq \emptyset$ i $U \setminus A \neq \emptyset$. Zaključujemo da $x \in \operatorname{Fr} A$. □

Sada pokazujemo da je $\operatorname{ind} X = n$ topološka osobina među T_3-prostorima.

Lema 2.1.5. Ako su X i Y T_3-prostori i važi $X \cong Y$ tada je $\operatorname{ind} X \leq n$ ako i samo ako $\operatorname{ind} Y \leq n$, za $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $X \cong Y$, gde su X i Y T_3-prostori, neka je $\operatorname{ind} X \leq n$ i neka je preslikavanje $f : X \to Y$ odgovarajući homeomorfizam. Tvrđenje pokazujemo indukcijom po n. Ako je $n = -1$ tada je prema (MD1) X prazan skup, pa isto važi i za Y jer su prostori homeomorfni, stoga $\operatorname{ind} Y = -1 = \operatorname{ind} X$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $\operatorname{ind} X \leq n-1$ i pokažimo da važi i za $\operatorname{ind} X \leq n$. Neka je $y \in Y$ i $V_y \subseteq Y$ okolina tačke y. Kako je f bijekcija, postoji $x \in X$ tako da $f(x) = y$. Kako je f neprekidno preslikavanje, $V_x = f^{-1}[V_y]$ je otvoren skup u X. Jasno, $x \in V_x$, stoga je V_x okolina tačke x, pa kako je $\operatorname{ind} X \leq n$ tada prema (MD2) postoji okolina U_x tačke x da važi

$$x \in U_x \subseteq V_x,\ \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U_x \leq n-1.$$

Kako je $U_x \subseteq V_x$, važi $f[U_x] \subseteq f[V_x] = V_y$, a kako je f kao homeomorfizam i otvoreno preslikavanje, $U_y = f[U_x]$ je i otvoren skup u Y. Kako je $y \in U_y \subseteq V_y$, dovoljno je još pokazati da $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U_y \leq n-1$ kako bi (MD2) bilo zadovoljeno. Kako je prema lemi 2.1.4 $f[\operatorname{Fr} U_x] = \operatorname{Fr} f[U_x] = \operatorname{Fr} U_y$, prema lemi 2.1.3 važi $\operatorname{Fr} U_x \cong \operatorname{Fr} U_y$. Sada prema induktivnoj hipotezi imamo $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U_x = \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U_y \leq n-1$. Dakle, sledi $\operatorname{ind} Y \leq n$.

($\Leftarrow$) Analogno prethodnom smeru.

□

Teorema 2.1.6. Ako su X i Y T_3-prostori i važi $X \cong Y$ tada je $\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} Y$.

Dokaz. Slučaj za $n = -1$ je već obuhvaćem prethodnom lemom. Ako je $\operatorname{ind} X = n$, za $n \geq 0$, tada važi i $\operatorname{ind} X \leq n$, stoga je, prema prethodnoj lemi, $\operatorname{ind} Y \leq n$. Ako je $\operatorname{ind} Y < n$, tada je $\operatorname{ind} Y \leq k$ za neko $k < n$, te prema prethodnoj lemi važi $\operatorname{ind} X \leq k < n$, što je nemoguće. Dakle, $\operatorname{ind} Y = n$. Ako je $\operatorname{ind} X = \infty$ i pretpostavimo da $\operatorname{ind} Y = n < \infty$, tada iz upravo pokazanog sledi $\operatorname{ind} X = n$, što daje kontradikciju. □

Sada ćemo pokazati teoremu o potprostoru prema kojoj je dimenzija potprostora manja ili jednaka dimenziji prostora.

Teorema 2.1.7 (Teorema o potprostoru). Neka je X T_3-prostor i M potprostor prostora X. Tada je $\operatorname{ind} M \leq \operatorname{ind} X$.

Dokaz. Neka je X T_3-prostor. Ukoliko je $\operatorname{ind} X = \infty$ tada tvrđenje trivijalno važi. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X = n$, $n \geq -1$. Indukcijom po n ćemo pokazati da tvrđenje važi za svako n.

Ako je $n = -1$ tada je prema (MD1) $X = \emptyset$, pa i $M = \emptyset$, te tvrđenje važi. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1 \geq -1$ i pokažimo da važi i za n. Neka je M potprostor prostora X gde $\operatorname{ind} X = n$, $x \in M$ i V okolina tačke x u prostoru M. Tada postoji otvoren skup V_1 u prostoru X tako da važi $V = M \cap V_1$. Kako je $\operatorname{ind} X \leq n$ tada postoji otvoren skup U_1 u prostoru X tako da važi

$$x \in U_1 \subseteq V_1, \ \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U_1 \leq n-1. \tag{2.4}$$

Tada je skup $U = M \cap U_1$ otvoren skup u prostoru M i važi $x \in U \subseteq V$. Ako sa $\operatorname{Fr}_M U$ označimo rub skupa U u prostoru M, sa $\widetilde{U}$ zatvaranje skupa U u prostoru M, a sa $\overline{U}$ zatvaranje skupa U u prostoru X, tada na osnovu leme 1.2.29 važi

$$\operatorname{Fr}_M U = \widetilde{U} \cap \widetilde{M \setminus U} = M \cap \overline{U} \cap \overline{M \setminus U} = M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1}.$$

Dalje, iz monotonosti operatora zatvaranja i prethodne jednakosti sledi

$$\operatorname{Fr}_M U \subseteq \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1} \subseteq \overline{X \cap U_1} \cap \overline{X \setminus U_1} = \operatorname{Fr} U_1.$$

Sada, iz (2.4) na osnovu indukcijske hipoteze sledi da je $\operatorname{ind} \operatorname{Fr}_M U \leq n-1$, iz čega direktno sledi da $\operatorname{ind} M \leq \operatorname{ind} X = n$. □

Primedba 2.1.8. U dokazu prethodne teoreme pokazali smo jedno tvrđenje o rubu skupa u potprostoru na koje ćemo se pozivati u nekim od dokaza koji slede. Naime, za potprostor M prostora X i skup $U = M \cap U_1$, $U_1 \subseteq X$, važi $\operatorname{Fr}_M U \subseteq \operatorname{Fr} U_1$. Iako u dokazu radimo sa T_3-prostorom i skup U_1 je otvoren, u ovom delu dokaza ovi uslovi nisu korišćeni, stoga ova relacija važi u za proizvoljan prostor X i proizvoljan podskup U_1 prostora X.

Sada ćemo dati još dva ekvivalentna uslova za određivanje male induktivne dimenzije topološkog T_3-prostora. Pre toga uvodimo definiciju particije dva skupa.

Definicija 2.1.9. Neka je X topološki prostor, A i B par nepraznih, disjunktnih skupova u prostoru X. Kažemo da je skup $L \subset X$ particija skupova A i B ako postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ tako da važe uslovi

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq W, \quad U \cap W = \emptyset \ \text{ i } \ X \setminus L = U \cup W. \tag{2.5}$$

Ako je neki od ova dva skupa jednak singltonu, npr. $A = \{x\}$, tada kažemo da je L particija između tačke x i skupa B. Jasno, u oba slučaja particija L je zatvoren skup u prostoru X.

Propozicija 2.1.10. Za T_3-prostor X važi nejednakost $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$ ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaki zatvoren skup $B \subseteq X$ takav da $x \notin B$ postoji particija L između tačke x i skupa B tako da $\operatorname{ind} L \leq n-1$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je X T_3-prostor tako da važi $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$. Neka je $x \in X$ i B zatvoren podskup prostora X tako da $x \notin B$. Tada postoji okolina $V \subseteq X$ tačke x tako da $\overline{V} \subseteq X \setminus B$. Podsetimo se sada da je T_3-prostor po definiciji T_1 i regularan prostor. Zbog regularnosti prostora X, za tačku x i skup B postoje otvoreni disjunktni skupovi O_1 i O_2 tako da $x \in O_1$ i $B \subseteq O_2$. Tada $O_1 \subseteq X \setminus O_2 \subseteq X \setminus B$. Kako je $X \setminus O_2$ zatvoren skup i zatvaranje monotona operacija u odnosu na podskup, važi $\overline{O_1} \subseteq \overline{X \setminus O_2} = X \setminus O_2 \subseteq X \setminus B$. Prema tome, skup O_1 zadovoljava date uslove, što znači da traženi skup V svakako postoji.

Dalje, kako je $\operatorname{ind} X \leq n$, za tačku x i skup V čije smo postojanje upravo pokazali, postoji otvoren skup U tako da $x \in U \subseteq V$ i $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$. Tvrdimo da je particija između tačke x i skupa B skup $L = \operatorname{Fr} U$, gde su skupovi U i $W = X \setminus \overline{U}$ skupovi koji zadovoljavaju uslove (2.5). Primetimo prvo da su oba skupa otvorena; skup W je otvoren jer je komplement skupa $\overline{U}$ koji je zatvoren po definiciji, a za skup U već je rečeno. Kako $U \subseteq \overline{U}$ važi $U \cap X \setminus \overline{U} = \emptyset$. Jasno $x \in U$, a $B \subseteq X \setminus \overline{U}$ važi jer je $\overline{U} \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus B$ pa imamo $B = X \setminus (X \setminus B) \subseteq X \setminus \overline{U}$. Na kraju, kako je U otvoren skup, na osnovu leme 1.2.13 imamo $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus U$, pa važi $X \setminus \operatorname{Fr} U = X \setminus (\overline{U} \setminus U) = X \setminus (\overline{U} \cap (X \setminus U)) = (X \setminus \overline{U}) \cup (X \setminus (X \setminus U)) = (X \setminus \overline{U}) \cup U$.

($\Leftarrow$) Sada, pretpostavimo da T_3-prostor X zadovoljava uslove teoreme. Neka je $x \in X$ i skup V okolina tačke x. Tada je skup $B = X \setminus V$ zatvoren i $x \notin B$. Prema pretpostavci, tada postoji particija L između tačke x i skupa B, tako da $\operatorname{ind} L \leq n-1$. Neka su U i W otvoreni disjunktni skupovi takvi da $x \in U$, $B \subseteq W$ i $X \setminus L = U \cup W$. Tada važi

$$x \in U \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus B = V.$$

Dakle, skup U je otvoren, i važi $x \in U \subseteq V$. Dalje, prema definiciji ruba skupa i zatvaranja skupa kao i činjenice da je skup U otvoren, dobijamo

$$\operatorname{Fr} U \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U. \tag{2.6}$$

Slično, kako je W otvoren skup i kako je prema lemi 1.2.13 $\overline{U} = \operatorname{Fr} U \cup U$, dobijamo

$$\operatorname{Fr} U \subseteq \overline{U} \subseteq \overline{X \setminus W} = X \setminus W. \tag{2.7}$$

Sada, na osnovu (2.6) i (2.7) sledi

$$\operatorname{Fr} U \subseteq (X \setminus U) \cap (X \setminus W) = X \setminus (U \cup W) = L.$$

Sada, na osnovu teoreme 2.1.7 dobijamo $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq \operatorname{ind} L \leq n-1$, te je prema (MD2) $\operatorname{ind} X \leq n$.

□

Primedba 2.1.11. Primetimo da smo u dokazu prethodne teoreme pokazali sledeće: ako su U i W otvoreni disjunktni skupovi u prostoru X, tada važi relacija

$$\operatorname{Fr} U \subseteq (X \setminus U) \cap (X \setminus W) = X \setminus (U \cup W).$$

Na ovo relaciju ćemo se pozivati u nekom od narednih dokaza.

Sada ćemo dati potreban i dovoljan uslov za određivanje male induktivne dimenzije separabilnog metričkog prostora. Podsetimo se da je svaki metrički prostor T_4-prostor, a svaki T_4 je i T_3-prostor, pa je stoga za separabilni metrički prostor X dimenzija $\operatorname{ind} X$ dobro definisana.

Teorema 2.1.12. Separabilni metrički prostor $(X, \mathcal{O}_d)$ zadovoljava nejednakost $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$ ako i samo ako X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ tako da $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$ za svako $U \in \mathcal{B}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je dat separabilni metrički prostor X za koji važi $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$. Tada za svako $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x postoji otvoren skup U_x^V tako da $x \in U_x^V \subseteq V$ i $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U_x^V \leq n-1$. Sada za svako $x \in X$ definišimo familiju $\mathcal{A}_x$ otvorenih skupova sa $\mathcal{A}_x = \{U_x^V : V \text{je okolina tačke } x\}$. Tvrdimo da je skup $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x$ baza topologije $\mathcal{O}_d$. Dovoljno je pokazati da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_d$ i da se svaki element iz $\mathcal{O}_d$ može predstaviti kao unija neke familije skupova iz $\mathcal{B}$. Kako je $\mathcal{B} = \{U_x^V : x \in X \wedge V \text{je okolina tačke } x\}$, sledi da su svi elementi iz $\mathcal{B}$ otvoreni skupovi. Dalje, neka je $O \in \mathcal{O}_d$ neprazan skup. Ako je $x \in O$, tada je O okolina tačke x, i važi $O = \bigcup_{x \in O} U_x^O$ (smer ($\subseteq$) je jasan jer za $x \in O$ važi $x \in U_x^O$, dok smer ($\supseteq$) važi jer je $U_x^O \subseteq O$ za svako $x \in O$).

Dakle, $\mathcal{B}$ je baza prostora $(X, \mathcal{O}_d)$ pri čemu za svako $U \in \mathcal{B}$ važi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$. Kako je prostor $(X, \mathcal{O}_d)$ separabilan metrički prostor, tada on zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. To znači da možemo primeniti teoremu Lindelefa, prema kojoj postoji prebrojiv skup $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ koji je takođe baza, što je i trebalo pokazati.

($\Leftarrow$) Neka je $(X, \mathcal{O}_d)$ separabilni metrički prostor koji ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ tako da za svako $U \in \mathcal{B}$ važi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$. Neka je $x \in X$ i neka je V okolina tačke x. Tada prema lemi 1.2.7 postoji otvoren skup $U \in \mathcal{B}$ tako da $x \in U \subseteq V$. Kako $U \in \mathcal{B}$, važi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$, što daje upravo $\operatorname{ind} X \leq n$. □

2.2 Nula-dimenzionalni prostori

Kažemo da je T_3-prostor X nula-dimenzionalan ukoliko je $\operatorname{ind} X = 0$. U prethodnom delu dali smo neka opšta tvrđenja o maloj induktivnoj dimenziji, a sada ćemo izvesti formulacije tih tvrđenja koja se odnose na nula-dimenzionalne prostore.

Propozicija 2.2.1. T_3-prostor X je nula-dimenzionalan ako i samo ako je X neprazan skup i za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu $V \subseteq X$ tačke x postoji otvoreno-zatvoren skup $U \subseteq X$ tako da $x \in U \subseteq V$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $\operatorname{ind} X = 0$ tada je i $\operatorname{ind} X \leq 0$ te po definiciji znamo da za svaku tačku x i svaku okolinu V tačke x postoji otvoren skup U tako da $x \in U \subseteq V$ i $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = -1$. Prema tome, $\operatorname{Fr} U = \emptyset$ a iz leme 1.2.13 znamo da to važi ako i samo ako je U otvoreno-zatvoren skup.

($\Leftarrow$) Neka je X neprazan T_3-prostor za koji važi ovaj uslov. Tada prema istoj lemi, za svaku tačku x i svaku okolinu V tačke x postoji otvoren skup U tako da $\operatorname{Fr} U = \emptyset$, odnosno $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = -1$. To znači da je, prema definiciji, $\operatorname{ind} X \leq 0$, ali kako je X neprazan skup, važi $\operatorname{ind} X = 0$. □

Primedba 2.2.2. U prethodnom dokazu pokazali smo ekvivalentan uslov koji važi za sve potprostore U nekog T_3-prostora: $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = -1$ ako i samo ako je U otvoreno-zatvoren skup.

Propozicija 2.2.3. Ako je T_3-prostor X nula-dimenzionalan i $M \subseteq X$ neprazan skup, tada je i M nula-dimenzionalan prostor.

Dokaz. Prema teoremi o potprostoru $M \subseteq X$ implicira $\operatorname{ind} M \leq \operatorname{ind} X = 0$, a kako je $M \neq \emptyset$ sledi $\operatorname{ind} M = 0$. □

Propozicija 2.2.4. T_3-prostor X je nula-dimenzionalan ako i samo ako je X neprazan skup i za svako $x \in X$ i zatvoren skup $B \subseteq X$ tako da $x \notin B$ prazan skup je particija između tačke x i skupa B.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je X T_3-prostor i $\operatorname{ind} X = 0$. Neka je $x \in X$ i $B \subseteq X$ zatvoren skup. Tada je i $\operatorname{ind} X \leq 0$ pa prema propoziciji 2.1.10 postoji particija L između tačke x i skupa B tako da $\operatorname{ind} L \leq -1$, odnosno $L = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Neka je X T_3-prostor i neka važi uslov tvrđenja. Kako za svaku tačku $x \in X$ i svaki zatvoren skup $B \subseteq X$ gde $x \notin B$ postoji particija $L = \emptyset$, tj. particija L tako da $\operatorname{ind} L = -1$, tada prema propoziciji 2.1.10 mora da važi $\operatorname{ind} X \leq 0$. Kako je X neprazan, $\operatorname{ind} X = 0$. □

Primedba 2.2.5. Primetimo da, ako je u prostoru X prazan skup particija skupova A i B, tada postoje otvoreni disjunktni skupovi U i W tako da $A \subseteq U$, $B \subseteq W$ i $X = X \setminus \emptyset = U \cup W$. Prema tome, važi $W = X \setminus U$. Kako je W otvoren skup, sledi da je U zatvoren, odnosno otvoreno-zatvoren skup. Sa druge strane, ako za disjunktne skupove A i B postoji otvoreno-zatvoren skup U tako da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq X \setminus U$, tada je prazan skup particija skupova A i B jer za skupove U i $W = X \setminus U$ važi da su otvoreni i disjunktni, i zadovoljen je uslov $X \setminus \emptyset = X = U \cup X \setminus U$. Prema tome, važi sledeći ekvivalentan uslov: prazan skup je particija skupova A i B ako i samo ako postoji otvoreno-zatvoren skup U tako da $A \subseteq U$ i $B \subseteq X \setminus U$.

Propozicija 2.2.6. Separabilni metrički prostor X je nula-dimenzionalan ako i samo ako je X neprazan skup i ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ tako da je svaki skup $U \in \mathcal{B}$ otvoreno-zatvoren skup.

Dokaz. Pokazuje se slično kao prethodno tvrđenje koristeći teoremu 2.1.12, činjenicu da je $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = -1$ ako i samo ako je U otvoreno-zatvoren skup, kao i uslov $X \neq \emptyset$. □

Primer 2.2.7. U ovom primeru pokazaćemo da je neprazan potprostor M realne prave $\mathbb{R}$ sa uobičajenom topologijom nula-dimenzionalan ako i samo ako ne sadrži interval.

($\Rightarrow$) Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da M sadrži otvoren interval $I = (a, b)$. Kako je prema primeru 2.1.2 $\operatorname{ind}(a, b) = 1$ i $(a, b) \subseteq M$, prema teoremi 2.1.7 sledi da je $1 = \operatorname{ind}(a, b) \leq \operatorname{ind} M \leq \operatorname{ind} \mathbb{R} = 1$. Prema tome, $\operatorname{ind} M = 1$.

($\Leftarrow$) Sada, neka je M neprazan potprostor prostora $\mathbb{R}$ koji ne sadrži interval. Prema primeru 1.2.25 familija $\mathcal{B}_M(x) = M \cap \mathcal{B}(x)$, gde je $\mathcal{B}(x) = \{(a, b), a < x < b\}$, je baza okolina tačke $x \in M$ u prostoru M. Tada, za svako $V = M \cap (a, b) \in \mathcal{B}_M(x)$ postoji skup U_x^V koji je otvoreno-zatvoren u M tako da $x \in U_x^V \subseteq V$. Naime, neka je $U = M \cap (c, d)$, gde $c \in (a, x) \setminus M$ i $d \in (x, b) \setminus M$. Kako M prema pretpostavci ne sadrži interval, ovakav izbor tačaka c i d je dobro definisan. Skup U jeste otvoren u M, a pokazaćemo da je i zatvoren. Naime, kako $c, d \notin M$, važi $M \cap [c, d] = M \cap ((c, d) \cup \{c, d\}) = (M \cap (c, d)) \cup (M \cap \{c, d\}) = (M \cap (c, d)) \cup \emptyset = M \cap (c, d) = U$. Kako je $[c, d] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, c) \cup (d, \infty))$, to je zatvoren skup u $\mathbb{R}$, pa je stoga U zatvoren skup u M. Dakle, možemo uzeti $U_x^V = U$.

Pokažimo sada da je familija $\mathcal{B}_M = \{U_x^V : x \in M \wedge V \in \mathcal{B}(x)\}$ baza prostora M. Kako je svaki element ove familije otvoren skup u M, dovoljno je pokazati da se svaki otvoren skup O prostora M može prikazati kao unija neke podfamilije iz $\mathcal{B}_M$. Neka je $x \in O$. Kako je $\mathcal{B} \cap M$, gde $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$, baza potprostora M, tada postoji $L_x = (a, b) \cap M \in \mathcal{B} \cap M$ tako da $x \in L_x \subseteq O$. Primetimo da tada $L_x \in \mathcal{B}_M(x)$, stoga postoji $U_x^{L_x} \in \mathcal{B}_M$ tako da $x \in U_x^{L_x} \subseteq L_x \subseteq O$. Tada je $O = \bigcup_{x \in O} U_x^{L_x}$.

Kako prostor M ima bazu koja je otvoreno-zatvorena i kako kao potprostor prostora $\mathbb{R}$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, prema teoremi Lindelefa može se izvući prebrojiva familija ove baze koja je takođe baza prostora M. Tada prema propoziciji 2.2.6 direkno sledi da je M nula-dimenzionalan prostor.

U ovom primeru smo na nešto drugačiji način došli do zaključka da su svi konačni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ nula-dimenzionalni. Takođe, svi prebrojivi podskupovi skupa $\mathbb{R}$, ali i skup $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ koji je neprebrojiv, jesu nula-dimenzionalni jer ne sadrže interval. Pokažimo sada da je dvotačkast potprostor $M = \{a, b\}$ prostora $\mathbb{R}^2$ takođe nula-dimenzionalan. Naime, prave $p(a, b)$ i $\mathbb{R}$ su homeomorfne jer je preslikavanje $\phi(x, y) : p(a, b) \to \mathbb{R}$, $\phi(x, y) = x$ homeomorfizam. Tada je prostor M homeomorfan nekom dvotačkastom potprostoru prostora $\mathbb{R}$ koji je nula-dimenzionalan. Kako je dimenzija ind invarijantna na homeomorfna preslikavanja tako je i prostor M nula-dimenzionalan.

Prema propoziciji 2.2.4, u nula-dimenzionalnom T_3-prostoru X svaku tačku x i zatvoren skup B takav da $x \notin B$ razdvaja prazan skup. Sada ćemo pokazati da u nula-dimenzionalnim separabilnim metričkim prostorima važi i nešto jače tvrđenje.

Teorema 2.2.8 (Prva teorema separacije za dimenziju 0). Ako je X nula-dimenzionalni separabilni metrički prostor, tada za svaki par disjunktnih, zatvorenih skupova A i B prazan skup je particija skupova A i B, odnosno postoji otvoreno-zatvoren skup U tako da $A \subseteq U$ i $B \subseteq X \setminus U$.

Dokaz. Na početku ćemo pokazati da za svaku tačku $x \in X$ postoji otvoreno-zatvoren skup $W_x \subseteq X$ tako da $x \in W_x$ i važi tačno jedna od dve jednakosti

$$A \cap W_x = \emptyset, \quad B \cap W_x = \emptyset. \tag{2.8}$$

Naime, razlikujemo tri slučaja: $x \in A$, $x \in B$ ili $x \in X \setminus (A \cup B)$. Primetimo prvo da je prostor X metrički, pa prema tome i T_4, pa i T_3-prostor. Ako x pripada A, to znači da $x \notin B$, a kako je B zatvoren, prema propoziciji 2.2.4 prazan skup razdvaja tačku x i skup B, što znači da postoji otvoreno-zatvoren skup U tako da $x \in U$ i $B \subseteq X \setminus U$. Tada je jasno $B \cap U = \emptyset$, te možemo uzeti $W_x = U$. Ako $x \in B$, tada se analogno pokazuje da postoji otvoren i zatvoren skup W_x tako da $x \in W_x$ i $A \cap W_x = \emptyset$. Slučaj $x \in X \setminus (A \cup B)$ možemo svesti na jedan od prethodna dva slučajeva, jer važi $x \notin A$ i $x \notin B$.

Na ovaj način smo formirali otvoren pokrivač $\{W_x : x \in X\}$ prostora X. Kako prostor X zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, prema teoremi Lindelefa ovaj otvoren pokrivač ima prebrojiv potpokrivač $\{W_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$. Posmatrajmo sada familiju skupova

$$\begin{aligned}
&U_1 = W_{x_1} \\
&U_2 = W_{x_2} \setminus W_{x_1} \subseteq W_{x_2} \\
&U_3 = W_{x_3} \setminus (W_{x_1} \cup Wx_2) \subseteq W_{x_3} \\
&\vdots \\
&U_i = W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j} \ \subseteq W_{x_i}, i \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Primetimo da su svi skupovi U_i, $i \in \mathbb{N}$ otvoreni. Zaista, kako su svi skupovi iz $\{W_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ zatvoreni, tako je i $\bigcup_{j<i} W_{x_j}$ kao konačna unija zatvorenih zatvoren skup. Dalje,

$$X \setminus U_i = X \setminus (W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j}) = X \setminus (W_{x_i} \cap (X \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j})) = (X \setminus W_{x_i}) \cup \bigcup_{j<i} W_{x_j}.$$

Kako je $X \setminus W_{x_i}$ takođe zatvoren skup, sledi da je $X \setminus U_i$ kao unija dva zatvorena zatvoren skup, pa je U_i otvoren skup.

Sada ćemo pokazati da familija $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ jeste pokrivač prostora X, odnosno da za svako $x \in X$ postoji $l \in \mathbb{N}$ tako da $x \in U_l$. Naime, ako $x \in X$, tada postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in W_{x_i}$, jer je $\{W_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ pokrivač. Neka je $W_{x_{i_0}}$ takav skup sa najmanjim indeksom. Ako $x \in U_{i_0}$, tada je U_{i_0} tražen skup. Ako $x \notin U_{i_0}$ tada postoji $j < i_0$ tako da $x \in W_{x_j}$. Ako ponovo $x \notin U_j$ tada postoji $k < j$ tako da $x \in W_{x_k}$. Ako bismo pretpostavili da za svako $U_k, k < i$ postoji $W_{x_l}, l < k$ tako da $x \in W_{x_l}$ to bi bilo u kontradikciji sa pretpostavkom da je skup $\{W_{x_s}, s < i\}$ konačan. Dakle, postoji U_l tako da $x \in U_l$ i $x \notin W_{x_s}, s < l$.

Prema tome, familija $\{U_i : i \in I\}$ je otvoren pokrivač prostora X. Neka su sada U i W skupovi definisani na sledeći način:

$$U = \bigcup\{U_i : A \cap U_i \neq \emptyset\}, \quad W = \bigcup\{U_i : A \cap U_i = \emptyset\}.$$

Kako je $\{U_i : i \in I\}$ pokrivač prostora X, a U predstavlja uniju svih skupova iz ove familije koji seku A, sledi $A \subseteq U$. Kako je $U_i \subseteq W_{x_i}$, a svaki skup iz $\{W_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ na osnovu (2.8) seče najviše jedan od skupova A i B, sledi da su svi skupovi iz $\{U_i : i \in I\}$ koji seku B obuhvaćeni sa W. Dakle, $B \subseteq W$. Dalje, iz konstrukcije familije $\{U_i : i \in I\}$ vidimo da su skupovi ove familije uzajamno disjunktni, stoga $U \cap W = \emptyset$. Kako važi $X = U \cup W$, sledi $W = X \setminus U$. Kako su skupovi U i W po konstrukciji otvoreni skupovi, na osnovu upravo rečenog sledi da je U i zatvoren skup, i da važi $B \subseteq X \setminus U$, što je i trebalo pokazati.

□

Jedna od važnijih teorema vezanih za nula-dimenzionalne prostore jeste druga teorema separacije za dimenziju 0, koja važi u klasi metričkih prostora. Kako bismo pokazali ovu teoremu potrebno je da uvedemo pojam razdvojenih skupova; kažemo da su podskupovi A i B u prostoru X razdvojeni ako

$$A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B.$$

Sada ćemo dati potreban i dovoljan uslov za razdvojenost dva skupa.

Lema 2.2.9. Podskupovi A i B u prostoru X su razdvojeni ako i samo ako su disjunktni i otvoreni u potprostoru $M = A \cup B$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka su A i B razdvojeni skupovi u prostoru X, odnosno važi $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$. Kako je $A \cap B \subseteq A \cap \overline{B} = \emptyset$, sledi da su skupovi A i B disjunktni. Neka je $\widetilde{A}$ zatvaranje skupa A u prostoru $M = A \cup B$, a $\overline{A}$ zatvaranje skupa A u prostoru X. Tada prema lemi o zatvaranju skupa u potprostoru važi

$$\widetilde{A} = M \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap \overline{A} = (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cap \overline{A}) \cup \emptyset = A.$$

Dakle, skup A je zatvoren u prostoru M, a kako je $B = M \setminus A$, to znači da je B otvoren u prostoru M. Analogno se pokazuje da je skup A takođe otvoren u prostoru M.

($\Leftarrow$) Neka su A i B podskupovi u prostoru X koji su disjunktni i otvoreni u potprostoru M. Kako je B otvoren u M, tada je $A = M \setminus B$ zatvoren u M, pa važi $\widetilde{A} = A$. Tada je

$$A = \widetilde{A} = M \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap \overline{A} = (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A}).$$

Prema tome, $B \cap \overline{A} \subseteq A$ pa važi i $B \cap \overline{A} \subseteq A \cap B = \emptyset$. Dakle, $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Analogno se pokazuje da važi $A \cap \overline{B} = \emptyset$. □

Sada ćemo pokazati dve leme koje prethode drugoj teoremi separacije za nula-dimenzionalne prostore.

Lema 2.2.10. Za svaki par razdvojenih skupova $A, B \subseteq X$, gde je (X, d) metrički prostor, postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ tako da

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq W \quad \text{i} \quad U \cap W = \emptyset.$$

Dokaz. Definišimo funkcije $f, g : X \to [0, \infty)$ sa $f(x) = d(x, A)$ i $g(x) = d(x, B)$. Tada je funkcija $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x) = d(x, A) - d(x, B)$ je neprekidna, kao kompozicija neprekidnih preslikavanja. Posmatrajmo skupove

$$U = \{x \in X : h(x) < 0\}, \quad W = \{x \in X : h(x) > 0\}.$$

Kako je $h^{-1}[(-\infty, 0)] = U$ i $h^{-1}[(0, \infty)] = W$, a $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ otvoreni skupovi u $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$, tada su i skupovi U i V otvoreni, jer je h neprekidno preslikavanje. Kako je $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$, to znači da $f^{-1}(0) = \overline{A}$ i slično, $g^{-1}(0) = \overline{B}$. Dakle, za svako $x \in A$ je $h(x) = f(x) - g(x) = -g(x)$. Kako zbog razdvojenosti skupova A i B važi $A \cap \overline{B} = \emptyset$, važi $g(x) \neq 0$, iz čega sledi $h(x) = -g(x) < 0$. Prema tome, $A \subseteq U$. Analogno se pokazuje $B \subseteq W$. Disjunktnost skupova U i W sledi iz dobre definisanosti funkcije h.

□

Lema 2.2.11. Neka je M potprostor metričkog prostora X, a skupovi $A, B \subseteq X$ disjunktni i zatvoreni. Za svaku particiju L' u prostoru M skupova $M \cap \overline{V}_1$ i $M \cap \overline{V}_2$, gde su V_1 i V_2 otvoreni skupovi u prostoru X tako da $A \subseteq V_1$ i $B \subseteq V_2$ i $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$, postoji particija L u prostoru X skupova A i B tako da važi $M \cap L \subseteq L'$.

Dokaz. Neka su dati potprostor $M \subseteq X$, skupovi A i B i otvoreni skupovi V_1 i V_2 tako da važe uslovi tvrđenja. Neka je L' particija skupova $M \cap \overline{V}_1$ i $M \cap \overline{V}_2$ u prostoru M, a U' i W' otvoreni skupovi u prostoru M takvi da važe sledeći uslovi:

$$M \cap \overline{V}_1 \subseteq U', \; M \cap \overline{V}_2 \subseteq W', \; U' \cap W' = \emptyset \text{ i } M \setminus L' = U' \cup W'. \tag{2.9}$$

Primetimo da tada $A \cap \overline{W'} = \emptyset$ i $B \cap \overline{U'} = \emptyset$. Zaista, kako $V_1 \cap W' = M \cap V_1 \cap W' \subseteq U' \cap W' = \emptyset$, te kako je V_1 otvoren skup, prema lemi 1.2.15 važi $V_1 \cap \overline{W'} = \emptyset$. Dalje, kako je $A \subseteq V_1$, važi $A \cap \overline{W'} = \emptyset$. Slično se pokazuje da $B \cap \overline{U'} = \emptyset$.

Pokažimo sada da su U' i W' razdvojeni skupovi. Ako $S = U' \cup W'$, tada je $U' = S \cap U'$ i $W' = S \cap W'$, te kako su U' i W' otvoreni u prostoru X, oni su otvoreni i u S. Kako su U' i W' još i disjunktni, sledi da su i razdvojeni, prema lemi 2.2.9. Dakle, za skupove U' i W' važe jednakosti

$$U' \cap \overline{W'} = \emptyset, \; W' \cap \overline{U'} = \emptyset. \tag{2.10}$$

Pokažimo sada da su i skupovi $A \cup U'$ i $B \cup W'$ takođe razdvojeni. Naime, kako su A i B disjuntni i zatvoreni, na osnovu prethodno pokazanog važi

$$(A \cup U') \cap \overline{B \cup W'} = (A \cup U') \cap (\overline{B} \cup \overline{W'}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{W'}) \cup (U' \cap \overline{W'}) \cup (U' \cap \overline{W'}) = \emptyset.$$

Slično se može pokazati da važi i $\overline{A \cup U'} \cap (B \cup W') = \emptyset$. Sada, na osnovu prethodne leme, postoje otvoreni skupovi U i W u prostoru X tako da važi

$$A \cup U' \subseteq U, \; B \cup W' \subseteq W \text{ i } U \cap W = \emptyset. \tag{2.11}$$

Skup $L = X \setminus (U \cup W)$ je particija skupova A i B u prostoru X. Kako važi

$$M \cap L = M \cap (X \setminus (U \cup W)) = M \setminus (X \setminus (X \setminus (U \cup W))) = M \setminus (U \cup W) \subseteq M \setminus (U' \cup W') = L',$$

sledi tvrđenje. $\square$

Sada konačno dolazimo do teoreme koju smo želeli dokazati.

Teorema 2.2.12 (Druga teorema separacije dimenziju 0). Ako je X metrički prostor i Z nula-dimenzionalni separabilni potprostor prostora X, tada za svaki par A, B disjunktnih zatvorenih podskupova skupa X postoji particija L skupova A i B tako da $L \cap Z = \emptyset$.

Dokaz. Neka su $V_1, V_2 \subseteq X$ otvoreni skupovi tako da važi $A \subseteq V_1, B \subseteq V_2$ i $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Kako je prostor Z separabilan, prema prvoj teoremi separacije za nula-dimenzionalne prostore 2.2.8 za disjunktne skupove $Z \cap \overline{V_1}$ i $Z \cap \overline{V_2}$ koji su zatvoreni unutar Z, skup $L' = \emptyset$ je particija između ova dva skupa u potprostoru Z. Prema prethodnoj lemi tada postoji particija L između skupova A i B unutar prostora X tako da $Z \cap L \subseteq L' = \emptyset$. Dakle, $Z \cap L = \emptyset$ i L je tražena particija. $\square$

Komentar 2.2.13. U dokazu prethodne teoreme koristili smo tvrđenje da u metričkom prostoru za dva zatvorena disjunktna skupa A i B postoje otvoreni skupovi V_1 i V_2 takvi da $A \subseteq V_1$, $B \subseteq V_2$ i $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Pokažimo sada postojanje ovakvih skupova. Naime, kako su A i B zatvoreni i disjunktni u T_4-prostoru, tada postoje otvoreni disjunktni skupovi U_1 i U_2 takvi da $A \subseteq U_1$ i $B \subseteq U_2$. Dalje, kako su A_1 i $X \setminus U_1$ zatvoreni disjunktni skupovi, postoje otvoreni disjunktni skupovi W_1 i W_2 takvi da $A_1 \subseteq W_1$ i $X \setminus U_1 \subseteq W_2$. Prema lemi 1.2.15 znamo da, kako je W_2 otvoren skup i $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ tada je $\overline{W_1} \cap W_2 = \emptyset$. Tada važi i

$$\overline{W_1} \cap \overline{U_2} \subseteq \overline{W_1} \cap \overline{X \setminus U_1} = \overline{W_1} \cap (X \setminus U_1) \subseteq \overline{W_1} \cap W_2 = \emptyset.$$

Kako je pored toga $A \subseteq W_1$ i $B \subseteq U_2$, sledi tvrđenje.

Sada dajemo karakterizaciju nula-dimenzionalnih separabilnih potprostora metričkih prostora preko okolina u celom prostoru.

Propozicija 2.2.14. Separabilni potprostor M metričkog prostora X je nula-dimenzionalan ako i samo ako je neprazan, i za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x u prostoru X postoji otvoren skup $U \subseteq X$ tako da $x \in U \subseteq V$ tako da $M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je potprostor M separabilan i nula-dimenzionalan. Neka je $x \in X$ i $V \subseteq X$ okolina tačke x. Tada su skupovi $A = \{x\}$ i $B = X \setminus V$ zatvoreni i disjunktni skupovi (skup A je zatvoren jer je prostor X kao T_4- prostor ujedno i T_1-prostor). Tada prema prethodnoj teoremi postoji particija L skupova A i B tako da $L \cap M = \emptyset$. Neka su otvoreni skupovi U i W takvi da važi

$$x \in U, \quad B \subseteq W, \quad U \cap W = \emptyset, \quad X \setminus L = U \cup W. \tag{2.12}$$

Kako su skupovi U i W otvoreni i disjunktni, prema primedbi 2.1.11 važi

$$\operatorname{Fr} U \subseteq X \setminus (U \cup W) = L \tag{2.13}$$

Tada $\operatorname{Fr} U \cap M \subseteq L \cap M = \emptyset$. Dalje, kako je $U \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus B = V$, sledi tvrđenje.

($\Leftarrow$) Neka je M separabilan potprostor tako da važe uslovi tvrđenja. Neka je $x \in M$ i neka je $V \subseteq M$ okolina tačke x u M. Tada je skup V i otvoren u M, prema tome, postoji otvoren skup $V_1 \subseteq X$ tako da $V = M \cap V_1$. Prema pretpostavkama tvrđenja, kako je V_1 okolina tačke x u X, postoji otvoren skup U_1 tako da $x \in U_1 \subseteq V_1$ i $M \cap \operatorname{Fr} U_1 = \emptyset$. Tada je skup $U = M \cap U_1$ otvoren u prostoru M, i važi $x \in U \subseteq V$. Ako sa $\operatorname{Fr}_M U$ označimo rub skupa U u prostoru M, prema primedbi 2.1.8 sledi $\operatorname{Fr}_M U \subseteq \operatorname{Fr} U_1$. Dalje, kako je $\operatorname{Fr}_M U \subseteq M$, sledi

$$\operatorname{Fr}_M U \subseteq M \cap \operatorname{Fr} U_1 = \emptyset. \tag{2.14}$$

Dakle, skup U je otvoren i zatvoren u prostoru M, te prema propoziciji 2.2.1 sledi da je M nula-dimenzionalan prostor. □

Na kraju dajemo karakterizaciju nula-dimenzionalnog potprostora separabilnog metričkog prostora preko baze.

Propozicija 2.2.15. Potprostor M separabilnog metričkog prostora X je nula-dimenzionalan ako i samo ako je $M \neq \emptyset$ i X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ tako da $M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset$ za svako $U \in \mathcal{B}$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je $M \neq \emptyset$ potprostor separabilnog metričkog prostora X koji ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ koja zadovoljava date uslove. Primetimo da je i prostor M separabilan, kao potprostor separabilnog metričkog prostora. Kako za svako $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x postoji $U \in \mathcal{B}$ tako da $x \in U \subseteq V$, a prema pretpostavci $M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset$, tada je prema prethodnoj propoziciji prostor M nula-dimenzionalan.

($\Rightarrow$) Neka je $M \neq \emptyset$ nula-dimenzionalan potprostor separabilnog metričkog prostora X. Prema prethodnoj propoziciji, za svako $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x postoji otvoren skup $U_x^V \subseteq X$ tako da $x \in U_x^V \subseteq V$ i $M \cap \operatorname{Fr} U_x^V = \emptyset$. Pokažimo da je familija $\mathcal{B} = \{U_x^V : x \in X \wedge V \text{je okolina tačke } x\}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Kako su svi elementi iz $\mathcal{B}$ otvoreni skupovi, dovoljno je pokazati da se svako $O \in \mathcal{O}$ može prikazati kao unija neke familije skupova iz $\mathcal{B}$. Neka $x \in O$. Kako je O okolina tačke x, tada postoji otvoren skup $U_x^O \in \mathcal{B}$ takav da $x \in U_x^O \subseteq V$ i $M \cap \operatorname{Fr} U_x^O = \emptyset$. Tada je $O = \bigcup_{x \in X} U_x^O$. Sada, kako je $\mathcal{B}$ baza, prema teoremi Lindelefa postoji prebrojiv skup $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ koji je takođe baza, a kako za svako $U \in \mathcal{B}$ važi uslov $M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset$, sledi tvrđenje. □

2.3 Teoreme sume, dekompozicije i separacije topoloških prostora

U ovom delu ćemo dati nekoliko važnih teorema o maloj induktivnoj dimenziji koristeći pojam sume topoloških prostora. Za datu familiju $\{X_s\}_{s \in S}$ topoloških prostora takvih da su im nosači po parovima disjunktni skupovi, posmatrajmo skup $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ i familiju $\mathcal{O}$ skupova $U \subseteq X$ takvu da je $U \cap X_s$ otvoren u X_s, za svako $s \in S$. Lako se proverava da familija $\mathcal{O}$ zadovoljava uslove (O1)-(O3), stoga je $\mathcal{O}$ topologija na skupu X (videti [7], glava 2). Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ nazivamo suma topoloških prostora $\{X_s\}_{s \in S}$.

Prva teorema koju ćemo pokazati jeste teorema o sumi, a kako bismo je uveli posebno pokazujemo slučaj kada je prostor nula-dimmenzionalan kao zasebnu teoremu.

Teorema 2.3.1 (Teorema sume za dimenziju 0). Ako se separabilni metrički prostor X može predstaviti kao suma zatvorenih nula-dimenzionalnih potprostora $F_1, F_2, \ldots$, tada je X nula-dimenzionalan prostor.

Dokaz. Prema propoziciji 2.2.4 dovoljno je pokazati da za svaku tačku $x \in X$ i zatvoren skup $B \subseteq X$, tako da $x \notin B$, postoje otvoreni disjunktni skupovi U i W, tako da $x \in U$, $B \subseteq W$ i $X = U \cup W$. Mi ćemo pokazati nešto jače tvrđenje - da za svaka dva zatvorena, disjunktna skupa A i B postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ tako da

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq W, \quad U \cap W = \emptyset, \quad X = U \cup W, \tag{2.15}$$

što je dovoljno jer su singltoni u T_1-prostoru zatvoreni skupovi, prema tome i skup $A = \{x\}$. Kako smo pokazali u komentaru 2.2.13, za proizvoljne zatvorene i disjunktne skupove A i B u T_4-prostoru X postoje otvoreni skupovi U_0 i W_0 prostora X tako da važi

$$A \subseteq U_0, \quad B \subseteq W_0, \quad \overline{U_0} \cap \overline{W_0} = \emptyset. \tag{2.16}$$

Neka je $F_0 = \emptyset$. Tada je $F_0, F_1, F_2, \ldots$ niz zatvorenih potprostora prostora X. Sada ćemo induktivno definisati dva niza otvorenih podskupova $U_0, U_1, U_2, \ldots$ i $W_0, W_1, W_2, \ldots$ prostora X, tako da za $i = 0, 1, 2, \ldots$ važe sledeći uslovi:

$$U_{i-1} \subseteq U_i, \quad W_{i-1} \subseteq W_i \;\text{ za }\; i \geq 1, \quad \overline{U_i} \cap \overline{W_i} = \emptyset, \quad F_i \subseteq U_i \cup W_i. \tag{2.17}$$

Skupovi U_0 i W_0, koje smo definisali na početku, zadovoljavaju ovaj uslov za $i = 0$. Pretpostavimo da su skupovi U_i i W_i koji zadovoljavaju ovaj uslov definisani za $i < k$ i definišimo ih za $i = k$.

Posmatrajmo skupove $\overline{U}_{k-1} \cap F_k$ i $\overline{W}_{k-1} \cap F_k$, koji su zatvoreni i disjunktni. Kako je potprostor F_k nula-dimenzionalan, prema teoremi 2.2.8 postoji skup $V \subseteq F_k$ koji je otvoreno-zatvoren u F_k tako da važi

$$\overline{U}_{k-1} \cap F_k \subseteq V, \quad \overline{W}_{k-1} \cap F_k \subseteq F_k \setminus V. \tag{2.18}$$

Primetimo da tada važi

$$(\overline{U}_{k-1} \cup V) \cap (\overline{W}_{k-1} \cup (F_k \setminus V)) = (V \cap \overline{W}_{k-1}) \cup (\overline{U}_{k-1} \cap (F_k \setminus V)) = \emptyset. \tag{2.19}$$

Dalje, kako je V zatvoren u prostoru F_k, tada postoji $V_1 \subseteq X$ koji je zatvoren u X, tako da $V = F_k \cap V_1$. Prema tome, skup V je zatvoren skup u X. Kako je V i otvoren u F_k, tada je $F_k \setminus V$ zatvoren u F_k, pa se slično pokazuje da je i $F_k \setminus V$ zatvoren skup u X. Prema tome, skupovi $(\overline{U}_{k-1} \cup V)$ i $\overline{W}_{k-1} \cup (F_k \setminus V)$ su zatvoreni skupovi u prostoru X. Kako su oni, prema (2.19) i disjunktni, tada postoje otvoreni skupovi U_k i W_k za koje važi

$$(\overline{U}_{k-1} \cup V) \subseteq U_k, \quad \overline{W}_{k-1} \cup (F_k \setminus V) \subseteq V_k, \quad \overline{U_k} \cap \overline{W_k} = \emptyset.$$

Skupovi U_k i W_k zadovoljavaju uslov (2.17), što znači da su nizovi $U_0, U_1, U_2, \ldots$ i $W_0, W_1, W_2, \ldots$ dobro definisani. Tada iz (2.16) i (2.17) sledi da skupovi $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$ i $W = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$ zadovoljavaju uslove (2.15). Naime, kako je $A \subseteq U_0$ i $B \subseteq W_0$ sledi da $A \subseteq U$ i $B \subseteq W$. Dalje, $U \cap W = \emptyset$ jer ako $x \in U \cap W$ tada postoje $j, l \in \mathbb{N}$ takvi da $x \in U_j \cap W_l$. Ako je $j = l$ tada dolazimo do kontradikcije jer $U_j \cap W_j = \emptyset$, a ako je b.u.o. $j < l$, tada je $U_j \cap W_l \subseteq U_l \cap W_l = \emptyset$, što ponovo daje kontradikciju. Na kraju, za svako $i \geq 1$ važi $F_i \subseteq U_i \cup W_i \subseteq U \cup W$, a kako je X suma prostora $F_1, F_2, \ldots$ sledi da je $X = U \cup W$. $\square$

Sledeću lema govori o tome da se svaki separabilan prostor dimenzije $\leq n$ može predstaviti kao suma dva prostora određenih osobina, i nju koristimo prilikom dokazivanja teoreme o sumi.

Lema 2.3.2. Ako separabilni metrički prostor X može da se predstavi kao suma dva potprostora Y i Z, gde $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ i $\operatorname{ind} Z \leq 0$, tada je $\operatorname{ind} X \leq n$.

Dokaz. Neka je $x \in X$ i neka je $V \subseteq X$ okolina tačke x. Tada je $B = X \backslash V$ zatvoren skup, kao i $A = \{x\}$, i važi $A \cap B = \emptyset$. Prema teoremi 2.2.12 postoje otvoreni disjunktni skupovi $U, W \subseteq X$ tako da $x \in U$, $B \subseteq W$ i $(X \backslash (U \cup W)) \cap Z = \emptyset$. Tada važi $x \in U \subseteq X \backslash W \subseteq V$, a kako prema primedbi 2.1.11 $\operatorname{Fr} U \subseteq X \backslash (U \cup W)$, sledi $\operatorname{Fr} U \subseteq X \backslash (U \cup W) \subseteq X \backslash Z \subseteq Y$, te je na kraju $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$. Dakle, $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Teorema 2.3.3 (Teorema o sumi). Ako separabilni metrički prostor X može da se predstavi kao suma niza zatvorenih potprostora $F_1, F_2, \ldots$, tako da $\operatorname{ind} F_i \leq n$, za $i = 1, 2, \ldots$, tada $\operatorname{ind} X \leq n$.

Dokaz. Dokaz sprovodimo indukcijom po dimenziji n. Prema teoremi 2.3.1 tvrđenje važi za $n = 0$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za dimenzije manje od n i neka je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, gde su prostori F_i zatvoreni i važi $\operatorname{ind} F_i \leq n$, $n \geq 1$, za $i = 1, 2, \ldots$. Prema teoremi 2.1.12, uzimajući u obzir da su potprostori F_i kao potprostori separabilnog metričkog prostora X takođe separabilni, za svako $i = 1, 2, \ldots$ postoji prebrojiva baza $\mathcal{B}_i$ prostora F_i tako da $\operatorname{ind} \operatorname{Fr}_i U \leq n-1$ za svako $U \in \mathcal{B}_i$, gde je sa $\operatorname{Fr}_i U$ označen rub skupa U u prostoru F_i. Prema induktivnoj pretpostavci, potprostor $Y = \bigcup\{\operatorname{Fr} U : U \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i\}$ prostora X zadovoljava nejednakost $\operatorname{ind} Y \leq n-1$.

Sada posmatrajmo prostore $Z_i = F_i \setminus Y$, $i = 1, 2, \ldots$. Prema propoziciji 2.2.15, kako potprostor Z_i separabilnog metričkog prostora F_i ne seče rub nijednog baznog skupa prostora F_i, sledi da je prostor Z_i nula-dimenzionalan, stoga važi $\operatorname{ind} Z_i \leq 0$. Neka je $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = X \backslash Y$ potprostor prostora X. Kako važi relacija $Z_i = F_i \backslash Y = F_i \cap Z$, sledi da je potprostor Z_i zatvoren u Z za svako i, pa stoga prema teoremi 2.3.1, potprostor Z prostora X takođe zadovoljava nejednakost $\operatorname{ind} Z \leq 0$. Dakle, prostor X je suma dva prostora Y i Z tako da $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ i $\operatorname{ind} Z \leq 0$, pa iz prethodne leme sledi $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Teoremu koja sledi ćemo nazivati prvom teoremom o dekompoziciji i ona daje potreban i dovoljan uslov o predstavljanju prostora X dimenzije $\leq n$ preko sume dva potprosora određenih dimenzija. Dovoljan uslov već je dat u lemi 2.3.2.

Teorema 2.3.4 (Prva teorema o dekompoziciji). Separabilni metrički prostor X zadovoljava nejednakost $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$ ako i samo ako može da se predstavi kao suma dva potprostora Y i Z tako da $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ i $\operatorname{ind} Z \leq 0$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Sledi direktno iz leme 2.3.2.

($\Rightarrow$) Neka je X separabilni metrički prostor za koji važi $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$. Prema teoremi 2.1.12 prostor X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ tako da $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$ za svako $U \in \mathcal{B}$. Tada na osnovu teoreme 2.3.3 o sumi sledi da je prostor $Y = \bigcup\{\operatorname{Fr} U : U \in \mathcal{B}\}$ dimenzije $\leq n-1$. Sada, kako potprostor $Z = X \setminus Y$ prostora X ne seče rub nijednog baznog skupa iz $\mathcal{B}$, iz propozicije 2.2.15 sledi da $\operatorname{ind} Z \leq 0$. Dakle, X je suma prostora Y i Z tako da važe uslovi tvrđenja. □

Na osnovu prve teoreme o dekompoziciji indukcijom se lako dobija sledeća teorema.

Teorema 2.3.5 (Druga teorema o dekompoziciji). Separabilni metrički prostor X zadovoljava nejednakost $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$ ako i samo ako se može predstaviti kao suma $n+1$ potprostora $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$, tako da $\operatorname{ind} Z_i \leq 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Podsetimo se da smo u prethodnom odeljku pokazali prvu i drugu teoremu separacije za dimenziju 0. Sada slede uopštenja ovih teorema za proizvoljnu dimenziju n.

Teorema 2.3.6 (Prva teorema separacije). Ako je X separabilni metrički prostor tako da $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$, tada za svaki par A, B disjunktnih zatvorenih skupova X postoji particija L skupova A i B tako da $\operatorname{ind} L \leq n-1$.

Dokaz. Kako dimenzija separabilnog metričkog prostora X manja ili jednaka n, prema prvoj teoremi dekompozicije (2.3.4) postoje potprostori Y i Z prostora X gde $X = Y \cup Z$ tako da $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ i $\operatorname{ind} Z \leq 0$. Tada, prema drugoj teoremi separacije za dimenziju 0 (2.2.12), za par disjunktnih zatvorenih skupova A i B postoji particija L skupova A i B tako da $L \cap Z = \emptyset$. Tada je $L \subseteq X \setminus Z \subseteq Y$, stoga prema teoremi 2.1.7 o potprostoru važi $\operatorname{ind} L \leq n-1$. $\square$

Teorema 2.3.7 (Druga teorema separacije). Neka je X metrički prostor i M separabilan metrički potprostor prostora X takav da $\operatorname{ind} M \leq n \geq 0$. Tada za svaki par A, B disjunktnih zatvorenih skupova prostora X postoji particija L skupova A i B takva da $\operatorname{ind}(L \cap M) \leq n-1$.

Dokaz. Kako je M separabilan metrički prostor, prema prvoj teoremi dekompozicije (2.3.4) on može da se predstavi kao suma prostora Y i Z takvih da $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ i $\operatorname{ind} Z \leq 0$. Neka su A i B zatvoreni podskupovi prostora X. Kako je Z nula-dimenzionalan separabilan potprostor prostora X, tada prema drugoj teoremi separacije za dimenziju 0 (2.2.12) postoji particija L skupova A i B takva da $L \cap Z = \emptyset$. Tada je $L \cap M \subseteq (X \setminus Z) \cap M \subseteq Y \cap M = Y$, stoga, prema teoremi 2.1.7 o potprostoru, sledi $\operatorname{ind}(L \cap M) \leq \operatorname{ind} Y$. $\square$

Na kraju ovog poglavlja pokazaćemo da mala induktivna dimenzija jeste saglasna sa intuitivnim pojmom dimenzije kada su u pitanju prostori $\mathbb{R}^n, S^n$ i I^n. Pre toga pokazujemo jednu pomoćnu lemu.

Lema 2.3.8. Nijedan povezan T_3-prostor X koji sadrži neprazan otvoren skup različit od X nije nula-dimenzionalan.

Dokaz. Neka je X povezan prostor V neprazan otvoren skup različit od X. Pretpostavimo da je prostor X nula-dimenzionalan. Tada za $x \in V$ i njegovu okolinu V postoji otvoren i zatvoren skup U tako da $x \in U \subseteq V$. Ali, kako zbog povezanosti prostora X za skup U mora da važi $U = \emptyset$ ili $U = X$, ovo nije moguće. $\square$

Primer 2.3.9 (Za $n \in \mathbb{N}$ važi $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \leq n$, $\operatorname{ind} S^n \leq n$ i $\operatorname{ind} I^n \leq n$). Neka je $n = 1$. Iz primera 2.1.2 znamo da $\operatorname{ind} \mathbb{R} = \operatorname{ind} I = 1$. Pokažimo da isto važi i za sferu S^1.

Ako $x \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, i V je okolina tačke x u S^1, tada postoji otvoren skup V_1 u $\mathbb{R}^2$ tako da $V = S^1 \cap V_1$. Tada postoji dovoljno malo $\varepsilon > 0$ tako da $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq V_1$ i da rub lopte $B(x, \varepsilon)$ seče sferu S^1 u dvema različitim tačkama, $a, b \in S^1$. Tada je $U = B(x, \varepsilon) \cap S^1$ otvoren skup u S^1 tako da $x \in U \subseteq V$. Primetimo da je tada U jednak kružnom luku na sferi S^1 od tačke a do tačke b, stoga $U \neq S^1$. Kako je skup

$$\operatorname{Fr}_{S^1} U \subseteq S^1 \cap \operatorname{Fr} B(x, \varepsilon) = S^1 \cap S(x, \varepsilon) = \{a, b\},$$

a skup $\{a, b\}$ dvotačkast skup u $\mathbb{R}^2$, iz primera 2.2.7 znamo da je taj potprostor nula-dimenzionalan, pa iz teoreme 2.1.7 o potprostoru sledi da je $\operatorname{ind} \operatorname{Fr}_{S^1} U \leq 0$. Dakle, važi $\operatorname{ind} S^1 \leq 1$. Dalje, kako je preslikavanje $f(x) : [0, 2\pi] \to S^1$ dato sa $f(x) = (\sin(x), \cos(x))$

neprekidna sirjekcija, a znamo da je povezanost invarijanta neprekidnih preslikavanja, sledi da je sfera S^1 povezan skup. Kako je U jedan neprazan otvoren skup u S^1 tako da $U \neq S^1$, prema lemi 2.3.8 sledi $\operatorname{ind} S^1 > 0$. Dakle, $\operatorname{ind} S^1 = 1$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ okolina tačke x. Tada postoji lopta $B(x,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ takva da $x \in B(x,\varepsilon) \subseteq V$. Kako su sve sfere u prostoru $\mathbb{R}^n$ homeomorfne, sledi da je $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} B(x,\varepsilon) = \operatorname{ind} S^{n-1} \leq n-1$. Tada je, prema teoremi 2.1.12, $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \leq n$, a kako je $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ sledi i $\operatorname{ind} I^n \leq n$.

Neka je sada $x \in S^n$ i $V \subseteq S^n$ okolina tačke x. Tada postoji dovoljno mala lopta $B(x,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ takva da za skup $U = B(x,\varepsilon) \cap S^n$ važi $x \in U \subseteq V$ i $U \neq S^n$. Tada je $\operatorname{Fr}_{S^n} U \subseteq S^n \cap \operatorname{Fr} B(x,\varepsilon)$ a važi i $\operatorname{Fr} B(x,\varepsilon) = S(x,\varepsilon) \cong S^n$. Kako je $U \neq S^n$ sledi da je $S(x,\varepsilon) \cap S^n \neq \emptyset$, a kako je neprazan presek dve sfere u $\mathbb{R}^{n+1}$ homeomorfan sferi S^{n-1}, prema teoremi 2.1.7 o potprostoru i indukcijskoj hipotezi dobijamo $\operatorname{ind} \operatorname{Fr}_{S^n} U \leq n-1$ te na kraju prema teoremi 2.1.12 sledi $\operatorname{ind} S^n \leq n$.

U samom začetku razvoja teorije dimenzije, mala induktivna dimenzija je bila najzastupljenija zbog svoje efikasnosti. Upravo to je dovelo do razvoja čitave teorije bazirane na ovoj dimenziji, dok su preostale dve funkcije dimenzije za to vreme imale samo sporednu ulogu i nisu bile eksplicitno definisane. Tek kada se teorija dimenzije 50-tih godina prošlog veka proširila na šire klase prostora uočeno je da mala induktivna dimenzija nema veliki značaj van klase separabilnih metričkih prostora.

Kao što smo imali priliku da vidimo u ovom poglavlju, mnoge korisne teoreme su pokazane kada je ovaj operator u pitanju, i za nula-dimenzionalne i za n-dimenzionalne prostore. Teoremu o potprostoru (2.1.7) su pokazali Urison u [21] 1922. godine i Menger u [17] 1923. godine i oni se ubrajaju u prve radove koji se tiču male induktivne dimenzije. Prvu teoremu separacije za dimenziju 0 (2.2.8), teoremu o sumi za dimenziju 0 (2.3.1) i kasnije teoremu o sumi za dimenziju n (2.3.3) pokazao je Menger 1924. godine i objavio u [18] 1926. godine kao i Urison u [22] iste godine, dok su Tumarkin u [20] 1926. godine i Hurevič u [11] 1927. godine proširili ove teoreme sa kompaktnih metričkih na separabilne metričke prostore. Drugu teoremu separacije za dimenziju 0 (2.2.12) i drugu teoremu separacije za proizvoljnu dimenziju (2.3.7) pokazao je Menger u [18] za kompaktne metričke prostore, a kasnije proširio Hurevič u [11]. Prvu i drugu teoremu dekompozicije (2.3.4), (2.3.5) pokazao je Urison u [22], a proširili su Tumarkin i Hurevič u [20] i [11].

Iako rad sa malom induktivnom dimenzijom nije preterano zaživeo van klase separabilnih metričkih prostora, njena uloga u teoriji dimenzije nije zanemarljiva. Zapravo, zahvaljujući teoremi o poklapanju u klasi ovih prostora, koju ćemo pokazati u četvrtoj glavi, znamo da sve teoreme koje važe za malu induktivnu dimenziju, od kojih smo neke pokazali i u ovom radu, zapravo važe i za veliku induktivnu i pokrivajuću dimenziju separabilnih metričkih prostora. Dakle, itekako imamo koristi od male induktivne dimenzije, jer se mnoge teoreme koje se odnose na nju zbog njene jednostavnosti i induktivne prirode lakše pokazuju u odnosu na iste te teoreme koje se odnose na druge dve dimenzije.

Glava 3

Velika induktivna dimenzija i pokrivajuća dimenzija topoloških prostora

U ovom poglavlju uvodimo dve nove definicije dimenzije - veliku induktivnu dimenziju Ind i pokrivajuću dimenziju dim. U prvom odeljku nakon definicije i osnovnih primera velike induktivne dimenzije slede teoreme koje se odnose na ovu dimenziju a predstavljaju odgovarajući analogon teorema 2.1.6, 2.1.7 i 2.1.10 koje važe za dimenziju ind. Na kraju ćemo pokazati da se dimenzije ind i Ind u klasi separabilnih metričkih prostora poklapaju. U drugom odeljku dajemo definiciju dim preko pojmova pokrivača kao i profinjenja i sužavanja pokrivača nekog prostora, pokazujemo invarijantnost ove dimenzije u odnosu na homeomorfizam kao i još neke teoreme koje se tiču ove dimenzije. Na kraju dajemo ekvivalentne uslove za dimenziju dim u klasi T_4-prostora i kompaktnih prostora.

3.1 Velika induktivna dimenzija

Na početku uvodimo pojam velike induktivne dimenzije u klasi T_4-prostora.

Definicija 3.1.1. Neka je X T_4-prostor. Velika induktivna dimenzija prostora X u oznaci $\operatorname{Ind} X$ je ceo broj veći ili jednak od -1 ili beskonačan broj (sa oznakom „∞“) koji zadovoljava sledeće uslove:

(VD1) $\operatorname{Ind} X = -1$ ako i samo ako $X = \emptyset$;

(VD2) $\operatorname{Ind} X \leq n$, gde $n = 0, 1, \ldots$, ako za svaki zatvoren skup $A \subseteq X$ i svaki otvoren skup $V \subseteq X$ tako da $A \subseteq V$ postoji otvoren skup $U \subseteq X$ tako da važi

$$A \subseteq U \subseteq V, \ \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1;$$

(VD3) $\operatorname{Ind} X = n$ ako je $\operatorname{Ind} X \leq n$ i ako ne važi $\operatorname{Ind} X \leq n - 1$;

(VD4) $\operatorname{Ind} X = \infty$ ako $\operatorname{Ind} X > n$ za $n = -1, 0, 1, \ldots$

U sledećem primeru koristićemo dovoljan uslov da je $\operatorname{Ind} X = n$ koji se može pokazati na sličan način kao i odgovarajući uslov za dimenziju ind, koristeći (VD2) i (VD3). Naime, ako za svaki zatvoren skup $A \subseteq X$, svaki otvoren skup $V \subseteq X$ i svaki otvoren skup U takav da $A \subseteq U \subseteq V$ važi $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U = n - 1$, tada je $\operatorname{Ind} X = n$.

Primer 3.1.2 (**Dimenzija** Ind **nekih potprostora prostora** $\mathbb{R}$**).** Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ konačan potprostor. Iz primera 2.1.2 znamo da je $\mathcal{O}_X = P(X)$ i da su svi podskupovi skupa X otvoreno-zatvoreni u prostoru X. Neka je $A \subseteq X$ zatvoren skup a $V \subseteq X$ otvoren skup u prostoru X takav da $A \subseteq V$. Neka je $U \subseteq X$ proizvoljan skup takav da $A \subseteq U \subseteq V$. Kako je U otvoreno-zatvoren skup tada je $\operatorname{Fr} U = \emptyset$, stoga je $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U = -1$. Prema tome, $\operatorname{Ind} X = 0$. Kako je topologija na svim konačnim podskupovima skupa $\mathbb{R}$ i svim podskupovima skupa $\mathbb{N}$ diskretna i prema tome svi elementi topologije otvoreno-zatvoreni, na sličan način se pokazuje da je velika induktivna dimenzija ovih prostora jednaka 0.

Sada ćemo pokazati da je $\operatorname{Ind} X = n$ topološka osobina u klasi T_4-prostora.

Lema 3.1.3. Ako su X i Y T_4-prostori i važi $X \cong Y$ tada je $\operatorname{Ind} X \leq n$ ako i samo ako $\operatorname{Ind} Y \leq n$, za $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka su X i Y T_4-prostori i neka je preslikavanje $f : X \to Y$ homeomorfizam. Tvrđenje pokazujemo indukcijom po dimenziji $\operatorname{Ind} X \leq n$. Ako je $n = -1$, tada je prema (VD1) X prazan skup, pa isto važi i za Y jer su prostori homeomorfni, stoga $\operatorname{Ind} Y = -1 = \operatorname{Ind} X$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za dimenziju $n-1$ i pokažimo da važi i za n. Neka je $B \subseteq Y$ zatvoren skup u Y i neka je $V_B \subseteq Y$ otvoren skup tako da $B \subseteq V_B$. Kako je f neprekidno preslikavanje, skup $A = f^{-1}[B] \subseteq X$ je zatvoren, a skup $V_A = f^{-1}[V_B] \subseteq X$ otvoren skup u prostoru X. Tada prema (VD2) postoji otvoren skup U_A prostora X tako da

$$A \subseteq U_A \subseteq V_A, \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U_A \leq n-1.$$

Tada važi poredak $B = f[A] \subseteq f[U_A] \subseteq f[V_A] = V_B$. Dalje, kako je f otvoreno preslikavanje, skup $U_B = f[U_A]$ je otvoren skup u prostoru X, a kako je prema lemi 2.1.4 $f[\operatorname{Fr} U_A] = \operatorname{Fr} f[U_A] = \operatorname{Fr} U_B$, prema lemi 2.1.3 važi $\operatorname{Fr} U_A \cong \operatorname{Fr} U_B$. Sada prema induktivnoj hipotezi imamo $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U_A = \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U_B \leq n-1$. Dakle, $\operatorname{Ind} Y \leq n$.

($\Leftarrow$) Analogno prethodnom smeru. □

Teorema 3.1.4. Ako su X i Y T_3-prostori i važi $X \cong Y$ tada je $\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y$.

Dokaz. Slučaj za $n = -1$ je već obuhvaćem prethodnom lemom. Ako je $\operatorname{Ind} X = n \geq 0$ tada važi i $\operatorname{Ind} X \leq n$, stoga je, prema prethodnoj lemi, $\operatorname{Ind} Y \leq n$. Ako je $\operatorname{Ind} Y < n$, tada je $\operatorname{Ind} Y \leq k$ za neko $k < n$, te prema prethodnoj lemi važi $\operatorname{Ind} X \leq k < n$, što je nemoguće. Dakle, $\operatorname{Ind} Y = n$. Ako je $\operatorname{Ind} X = \infty$ i pretpostavimo da $\operatorname{Ind} Y = n < \infty$, tada iz upravo pokazanog sledi $\operatorname{Ind} X = n$, što daje kontradikciju. □

Sledeća teorema govori o tome da je dimenzija Ind potprostora manja ili jednaka dimenziji prostora.

Teorema 3.1.5 (**Teorema o potprostoru za dimenziju Ind**)**.** Neka je X T_4-prostor i M potprostor prostora X. Tada je $\operatorname{Ind} M \leq \operatorname{Ind} X$.

Dokaz. Dokaz je potpuno analogan dokazu teoreme 2.1.7 o potprostoru za dimenziju ind. □

Sledeća propozicija je verzija propozicije 2.1.10 prilagođena dimenziji Ind, odnosno daje potreban i dovoljan uslov za veliku induktivnu dimenziju u klasi T_4-prostora pomoću particija skupova.

Propozicija 3.1.6. Za T_4-prostor X važi nejednakost $\operatorname{Ind} X \leq n$, $n \geq 0$ ako i samo ako za svaka dva zatvorena, disjunktna skupa $A, B \subseteq X$ postoji particija L skupova A i B tako da $\operatorname{Ind} L \leq n-1$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je X T_4-prostor tako da važi $\operatorname{Ind} X \leq n$, $n \geq 0$. Neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni, disjunktni skupovi prostora X. Tada postoji otvoren skup V prostora X tako da $A \subseteq V$ i $\overline{V} \subseteq X \setminus B$, jer je X T_4-prostor. Dalje, kako je $\operatorname{Ind} X \leq n$, za skup A i skup V postoji otvoren skup U tako da $A \subseteq U \subseteq V$ i $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$. Tvrdimo da je particija skupova A i B skup $L = \operatorname{Fr} U$, gde su skupovi U i $W = X \setminus \overline{U}$ skupovi koji zadovoljavaju uslove (2.5) iz definicije particije. Primetimo prvo da su oba skupa otvorena; skup W je otvoren jer je komplement skupa $\overline{U}$ koji je zatvoren po definiciji, a za skup U već je rečeno. Kako je $U \subseteq \overline{U}$, važi $U \cap X \setminus \overline{U} = \emptyset$. Da $A \subseteq U$ to je jasno; a da je $B \subseteq X \setminus \overline{U}$ važi jer je $\overline{U} \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus B$ pa imamo $B = X \setminus (X \setminus B) \subseteq X \setminus \overline{U}$. Na kraju, kako je U otvoren skup imamo $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus U$, pa važi $X \setminus \operatorname{Fr} U = X \setminus (\overline{U} \setminus U) = X \setminus (\overline{U} \cap (X \setminus U)) = (X \setminus \overline{U}) \cup (X \setminus (X \setminus U)) = (X \setminus \overline{U}) \cup U$.

($\Leftarrow$) Sada, pretpostavimo da T_4-prostor X zadovoljava uslove teoreme. Neka je $A \subseteq X$ zatvoren i skup V otvoren skup tako da važi $A \subseteq V$. Tada je skup $B = X \setminus V$ zatvoren i $A \cap B = \emptyset$. Prema pretpostavci, tada postoji particija L skupova A i B, tako da $\operatorname{Ind} L \leq n-1$. Neka su U i W otvoreni disjunktni skupovi takvi da da $A \subseteq U$, $B \subseteq W$ i $X \setminus L = U \cup W$. Tada važi

$$A \subseteq U \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus B = V.$$

Dakle, skup U je otvoren, i važi $A \subseteq U \subseteq V$. Dalje, kako su U i W otvoreni disjunktni skupovi, prema primedbi 2.1.11 sledi

$$\operatorname{Fr} U \subseteq X \setminus (U \cap W) = L.$$

Sada, na osnovu teoreme 3.1.5 o potprostoru za dimenziju Ind sledi $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq \operatorname{Ind} L \leq n-1$, te je prema (VD2) $\operatorname{Ind} X \leq n$. $\square$

Primer 3.1.7 (Dimenzija Ind prostora $\mathbb{R}$). U ovom primeru pokazaćemo da je $\operatorname{Ind} \mathbb{R} = 1$. Neka su A i B zatvoreni disjunktni skupovi prostora $\mathbb{R}$. Kako smo u prethodnoj glavi pokazali da je $\operatorname{ind} \mathbb{R} = 1$, prema prvoj teoremi separacije (2.3.6), za skupove A i B postoji particija L takva da $\operatorname{ind} L \leq 0$. Tada postoje i otvoreni skupovi U i W takvi da $A \subseteq U$, $B \subseteq W$ i $X \setminus L = U \cup W$. U prethodnoj glavi takođe smo pokazali da za neprazan potprostor X prostora $\mathbb{R}$ jednakost $\operatorname{ind} X = 0$ važi ako i samo ako X ne sadrži interval. Lako se pokazuje da rub otvorenog skupa u prostoru $\mathbb{R}$ ne sadrži interva,l kao i to da je neprazan, prema tome važi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = 0$. Kako je $\operatorname{Fr} U \subseteq L$, iz monotonosti operatora ind sledi $0 = \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq \operatorname{ind} L \leq 0$, odnosno $\operatorname{ind} L = 0$.

Pokažimo sada da je $\operatorname{Ind} L = 0$. Neka su A_L i B_L zatvoreni disjunktni skupovi prostora L. Kako je $\operatorname{ind} L = 0$ tada prema teoremi 2.3.6 postoji particija Z skupova A_L i B_L takva da $\operatorname{ind} Z = -1$, odnosno $Z = \emptyset$. Tada je prema (VD1) $\operatorname{Ind} Z = -1$, te na osnovu propozicije 3.1.6 dobijamo $\operatorname{Ind} L = 0$. Sada možemo primeniti propoziciju 3.1.6 na skupove A, B i particiju L i direktno dobijamo $\operatorname{Ind} \mathbb{R} \leq 1$.

Ostaje da se pokaže da je $\operatorname{Ind} \mathbb{R} > 0$. Pretpostavimo suprotno, neka je $\operatorname{Ind} \mathbb{R} \leq 0$ i neka je A neprazan zatvoren skup i V otvoren skup različit od $\mathbb{R}$ takav da $A \subseteq V$. Tada prema (VD2) postoji otvoren skup U takav da $A \subseteq U \subseteq V$ i $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U = -1$, odnosno $\operatorname{Fr} U = \emptyset$. Dakle, U je neprazan otvoreno-zatvoren skup različit od $\mathbb{R}$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je prostor $\mathbb{R}$ povezan. Prema tome, važi $\operatorname{Ind} \mathbb{R} = 1$.

Sada ćemo pokazati da se dimenzije ind i Ind poklapaju na klasi separabilnih metričkih prostora. Ovu teoremu pokazujemo iz dva dela, a prvo ćemo pokazati da važi nejednakost $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X$ u svim T_4-prostorima.

Teorema 3.1.8. Za svaki T_4-prostor X važi $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X$.

Dokaz. Kako je svaki T_4-prostor ujedno i T_3-prostor, dimenzija ind za T_4-prostore je dobro definisana. Dokaz sprovodimo indukcijom po dimenziji Ind. Primetimo, ako je $\operatorname{Ind} X = \infty$, tvrđenje trivijalno važi. Neka je $n = -1$. Tada je prema (VD1) $X = \emptyset$, stoga prema (MD1) važi $\operatorname{ind} X = -1 = \operatorname{Ind} X$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$ i pokažimo da važi za n. Neka je $x \in X$ i B zatvoren skup tako da $x \notin B$. Tada, kako je X T_1-prostor, skup $A = \{x\}$ je zatvoren, te su skupovi A i B zatvoreni i disjunktni. Prema propoziciji 3.1.6 za skupove A i B postoji particija L tako da $\operatorname{Ind} L \leq n-1$. Kako prema indukcijskoj pretpostavci važi $\operatorname{ind} L \leq \operatorname{Ind} L \leq n-1$, koristeći propoziciju 2.1.10 dobijamo $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Teorema 3.1.9. Za svaki separabilni metrički prostor X važi $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

Dokaz. Kako je svaki metrički prostor T_4-prostor, prema teoremi 3.1.8 važi $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X$, stoga je dovoljno pokazati obrnutu nejednakost. Dokaz sprovodimo indukcijom po $\operatorname{ind} X$. Primetimo, ako je $\operatorname{ind} X = \infty$ tada tvrđenje trivijalno važi.

Neka je $n = 0$. Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni, zatvoreni skupovi. Kako je $\operatorname{ind} X = 0$, prema prvoj teoremi separacije za dimenziju 0 (2.2.8), $L = \emptyset$ je particija skupova A i B, te važi $\operatorname{ind} L = -1$. Sada prema propoziciji 3.1.6 sledi da je $\operatorname{Ind} X \leq 0$, pa je zadovoljeno $\operatorname{Ind} X \leq \operatorname{ind} X = 0$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve separabilne metričke prostore male induktivne dimenzije manje od n, $n \geq 0$, i pokažimo da važi kada je $\operatorname{ind} X = n$. Neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni, disjunktni skupovi. Prema prvoj teoremi separacije (2.3.6) postoji particija L skupova A i B tako da $\operatorname{ind} L \leq n-1$. Tada prema induktivnoj hipotezi važi $\operatorname{Ind} L \leq n-1$, te primenom propozicijie 3.1.6 dobijamo $\operatorname{Ind} X \leq n$. Dakle, važi $\operatorname{Ind} X \leq \operatorname{ind} X$. □

3.2 Pokrivajuća dimenzija

Sam naziv ovog odeljka govori nam da je sastavni deo ovog pristupa pojmu dimenzije topološkog prostora upravo pojam pokrivača nekog prostora. Podsetimo se, familija $\mathcal{A}$ nekih podskupova prostora X je pokrivač prostora X ako i samo ako je $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$. Ako je familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ takođe pokrivač prostora X, kažemo da je $\mathcal{B}$ potpokrivač pokrivača $\mathcal{A}$.

Vrlo važan pojam kada je u pitanju pokrivajuća dimenzija jeste i pojam reda neke familije skupova. Ako je X prostor i $\mathcal{A}$ familija podskupova prostora X, kažemo da je red familije $\mathcal{A}$ jednak n, u oznaci $\operatorname{ord} \mathcal{A} = n$, ako postoji $n+1$ skupova unutar familije $\mathcal{A}$ koji imaju neprazan presek i ako je to maksimalan broj skupova koji zadovoljavaju ovaj uslov. Ako konačan broj n ne postoji, kažemo da je red familije $\mathcal{A}$ jednak ∞. Dakle, ako je red familije $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ jednak n, to znači da za svaka $n+2$ različita indeksa $s_1, s_2, \ldots, s_{n+2}$ važi $A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \ldots \cap A_{s_{n+2}} = \emptyset$. Familija reda -1 sadrži samo prazan skup, dok se familija reda 0 sastoji od uzajamno disjunktnih skupova.

Neka je familija $\mathcal{A}$ podskupova prostora X pokrivač prostora X. Za pokrivač $\mathcal{B}$ prostora X kažemo da je profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$, odnosno da $\mathcal{B}$ profinjuje $\mathcal{A}$, ako za svako $B \in \mathcal{B}$ postoji $A \in \mathcal{A}$ tako da $B \subseteq A$. Primetimo da je svaki potpokrivač pokrivača $\mathcal{A}$ zapravo profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$.

Sada, kada smo uveli pojam reda neke familije i profinjenja pokrivača topološkog prostora, uvodimo definiciju pokrivajuće dimenzije topološkog prostora.

Definicija 3.2.1. Neka je X T_4-prostor. Pokrivajuća dimenzija prostora X u oznaci $\dim X$ je ceo broj veći ili jednak od -1 ili beskonačan broj (sa oznakom„∞“) koji zadovoljava sledeće uslove:

(PD1) $\dim X \le n$, gde $n = -1, 0, 1, \ldots$ ako svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima konačno otvoreno profinjenje reda $\le n$;

(PD2) $\dim X = n$ ako $\dim X \le n$ i $\dim X > n - 1$;

(PD3) $\dim X = \infty$ ako $\dim X > n$ za svako $n = -1, 0, 1 \ldots$

Primedba 3.2.2. Primetimo da smo, u sklopu definicije male i velike induktivne dimenzije, uvodili kao poseban uslov tvrđenje da je topološki prostor X dimenzije -1 ako i samo ako je $X = \emptyset$. Ovde taj uslov sledi iz osobine (PD1). Naime, ako je $X = \emptyset$ i familija $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač prostora X, kako je prazan skup jedini otvoren skup prostora X, mora da važi $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$. Dakle, familija $\mathcal{A}$ je reda -1. Jasno, njeno jedino otvoreno profinjenje jednako je $\mathcal{A}$, stoga prema (PD1) sledi da je $\dim X = -1$. Sa druge strane, ako je $\dim X = -1$, to znači da svaki konačan otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ prostora X ima konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{B}$ reda -1, što znači da $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$. Kako je profinjenje pokrivača topološkog prostora i samo pokrivač tog prostora, sledi da je $X = \emptyset$.

Sada ćemo pokazati da je $\dim X = n$ takođe topološka osobina.

Lema 3.2.3. Neka su X i Y T_4-prostori i važi $X \cong Y$. Tada je $\dim X \le n$ akko $\dim Y \le n$, za $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\dim X = n$. Ako je $n = -1$, tada je prema upravo pokazanom X prazan skup, a kako su X i Y homeomorfni prostori Y je takođe prazan skup, stoga važi $\dim Y = -1 = \dim X$.

Pokažimo sada da tvrđenje važi za $n \ge 0$. Neka su X i Y homeomorfni T_4-prostori gde je f homeomorfizam između X i Y i neka je $\dim X \le n$. Neka je familija $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^k$ konačan otvoren pokrivač prostora Y. Tada je familija $\mathcal{B} = \{f^{-1}[A_i]\}_{i=1}^k$ konačan pokrivač prostora X, a kako je f homeomorfizam, inverzna slika otvorenog skupa otvoren skup. Dakle, familija $\mathcal{B}$ je otvoren pokrivač.

Kako je $\dim X \le n$ to znači da postoji konačano otvoreno profinjenje $\mathcal{V}_B = \{B_j\}_{j=1}^s$ pokrivača $\mathcal{B}$ reda n. Kako je f bijekcija, familija $\mathcal{V}_A = \{f[B_j]\}_{j=1}^s$ je konačan pokrivač prostora Y, a kako je f i otvoreno preslikavanje, pokrivač $\mathcal{V}_A$ je otvoren. Pokažimo da je $\mathcal{V}_A$ profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$. Neka $f[B_j] \in \mathcal{V}_A$ za neko $j \le s$. Kako $B_j \in \mathcal{V}_B$, a $\mathcal{V}_B$ je profinjenje pokrivača $\mathcal{B}$, postoji $i \le k$ tako da $B_j \subseteq f^{-1}[A_i]$. Kako je f bijekcija, važi $f[B_j] \subseteq f[f^{-1}[A_i]] = A_i$. Dakle, familija $\mathcal{V}_A$ je konačno, otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$. Kako je f bijekcija, slika preseka konačno mnogo skupova je jednaka preseku slika, te iz toga sledi da je slika proizvoljne familije reda n takođe jednaka n. Dakle, familija $\mathcal{V}_A$ je takođe reda n. Dakle, $\dim Y \le n$.

($\Leftarrow$) Analogno prethodnom smeru.

□

Teorema 3.2.4. Ako su X i Y T_4-prostori i važi $X \cong Y$, tada je $\dim X = \dim Y$.

Dokaz. Neka je $\dim X = n$. Slučaj za $n = -1$ već je obuhvaćem prethodnom lemom. Ako je $\dim X = n, n \geq 0$, tada važi i $\dim X \leq n$, stoga je, prema prethodnoj lemi, $\dim Y \leq n$. Ako je $\dim Y < n$, tada je $\dim Y \leq k$ za neko $k < n$, te prema prethodnoj lemi važi $\dim X \leq k < n$, što je nemoguće. Dakle, $\dim Y = n$. Ako je $\dim X = \infty$ i pretpostavimo da $\dim Y = n < \infty$, tada iz upravo pokazanog sledi $\dim X = n$, što daje kontradikciju. □

U sledećoj propoziciji dajemo dva ekvivalentna uslova vezana za pokrivajuću dimenziju prostora, ali pre toga uvodimo još jedan pojam koji se tiče pokrivača topološkog prostora. Za pokrivač $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s\in S}$ kažemo da je sužavanje pokrivača $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ prostora X ako za svako $s \in S$ važi $B_s \subseteq A_s$. Sužavanje je otvoreno (zatvoreno) ako su svi elementi familije $\mathcal{B}$ otvoreni (zatvoreni) podskupovi prostora X.

Primetimo da je sužavanje $\mathcal{B}$ pokrivača $\mathcal{A}$ takođe i refinement pokrivača $\mathcal{A}$. Takođe, važi i $\operatorname{ord}\mathcal{B} \leq \operatorname{ord}\mathcal{A}$. Naime, ako je $n = \infty$ tvrđenje trivijalno važi, stoga pretpostavimo da $\operatorname{ord} A \leq n$. Kako za svakih $n+2$ različitih indeksa iz S važi $B_{s_1} \cap B_{s_2} \cap ... \cap B_{s_{n+2}} \subseteq A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \ldots \cap A_{s_{n+2}} = \emptyset$, sledi $\operatorname{ord}\mathcal{B} \leq n$.

Propozicija 3.2.5. Za svaki T_4-prostor X sledeći uslovi su ekvivalentni:

(a) Prostor X zadovoljava nejednakost $\dim X \leq n$;

(b) Svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno profinjenje reda $\leq n$;

(c) Svaki konačan otvoren pokrivač prostora X ima otvoreno sužavanje reda $\leq n$.

Dokaz. Implikacija $(a) \Rightarrow (b)$ sledi iz (PD2), a kako svako sužavanje možemo posmatrati kao profinjenje dobijamo i $(c) \Rightarrow (a)$. Stoga, pokažimo još da važi $(b) \Rightarrow (c)$.

Neka je $\{A_i\}_{i=1}^k$ konačan otvoren pokrivač prostora X i $\mathcal{B}$ njegovo konačno profinjenje reda $\leq n$. Za $B \in \mathcal{B}$ odaberimo broj $i(B) \leq k$ tako da $B \subseteq A_{i(B)}$ i definišimo skupove $B_i = \bigcup\{B : i(B) = i\}$. Ako postoji $j \leq k$ koje ovim postupkom nije odabrano, neka je $B_j = \emptyset$. Pokažimo da je familija $\{B_i\}_{i=1}^k$ otvoreno sužavanje pokrivača $\{A_i\}_{i=1}^k$ reda $\leq n$. Jasno, za svako i skup B_i je otvoren, kao unija otvorenih skupova ili kao prazan skup. Takođe, prema konstrukciji važi $B_i \subseteq A_i$ za svako i. Dalje, pretpostavimo da je $\operatorname{ord}\{B_i\}_{i=1}^k > n$. Tada postoji $n+2$ skupa ove familije čiji je presek neprazan. Međutim, prema konstrukciji elemenata familije $\{B_i\}_{i=1}^k$ tada postoji $n+2$ skupa famlije $\mathcal{B}$ čiji je presek neprazan, što je nemoguće jer $\operatorname{ord}\mathcal{B} \leq n$. Prema tome, $\operatorname{ord}\{B_i\}_{i=1}^k \leq n$. □

U sledećoj teoremi navodimo jedan način za proveru da li je $\dim X \leq n$, pri čemu je dovoljno posmatrati samo pokrivače sa $n+2$ elementa.

Teorema 3.2.6. Za topološki T_4-prostor X važi nejednakost $\dim X \leq n$ ako i samo ako svaki otvoren pokrivač sa $n+2$ elementa $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ prostora X ima otvoreno sužavanje $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ reda $\leq n$, odnosno tako da važi $\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \emptyset$.

Dokaz. Da je ovaj uslov potreban sledi na osnovu propozicije 3.2.5. Kako bismo pokazali da je uslov i dovoljan, dovoljno je da pokažemo da u svakom T_4-prostoru X takvom da $\dim X > n$ postoji otvoren pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ prostora X tako da za svako njegovo sužavanje $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ važi $\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i \neq \emptyset$.

Kako je $\dim X > n$, prema propoziciji 3.2.5 postoji otvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^k$ prostora X koji nema sužavanje reda $\leq n$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da pokrivač $\mathcal{V}$ ima sledeću osobinu: ako je $\mathcal{V}' = \{V_i'\}_{i=1}^k$ njegovo otvoreno sužavanje, tada

$$V_{i_1}' \cap V_{i_2}' \cap \ldots \cap V_{i_m}' \neq \emptyset \quad \text{kada god} \quad V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \ldots \cap V_{i_m} \neq \emptyset, \tag{3.1}$$

pri čemu je $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$. Ako postoji neki skup indeksa $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ za koji je presek elemenata iz $\mathcal{V}'$ određen ovim skupom indeksa prazan, dok je odgovarajući presek iz $\mathcal{V}$ neprazan, tada možemo skup $\mathcal{V}$ zameniti sa $\mathcal{V}'$. Tako smo neprazan presek zamenili praznim, te kada posmatramo preseke sužavanja familije $\mathcal{V}'$ u odnosu na preseke familije $\mathcal{V}'$ on više ne ulazi u proveru uslova (3.1). Kako je partitivni skup skupa $\{1, 2 \ldots, k\}$ konačan, odnosno svih preseka iz $\mathcal{V}$ ima konačno mnogo, tada se i ovaj postupak popravljanja skupa $\mathcal{V}$ završava u konačno mnogo koraka. Primetimo da, ako je $\mathcal{V}''$ otvoreno sužavanje familije $\mathcal{V}'$, tada je ono i otvoreno sužavanje familije $\mathcal{V}$ jer je $\mathcal{V}''$ familija otvorenih skupova sa k elemenata, i za svako $V_i'' \in \mathcal{V}''$ važi $V_i'' \subseteq V_i' \subseteq V_i, i \leq k$. Prema tome, sva sužavanja familije koja se dobija na kraju ovog postupka jesu sužavanja početne familije $\mathcal{V}$, stoga uslov da traženi konačan otvoren pokrivač prostora X nema sužavanje reda $\leq n$ nije narušen.

Kako familija $\mathcal{V}$ nema sužavanje reda $\leq n$, a trivijalno svaka familija je takođe sužavanje same sebe, sledi da $\operatorname{ord} \mathcal{V} > n$. Tada postoji podskup skupa $\mathcal{V}$ sa $n+2$ elementa čiji je presek neprazan, te ako izvršimo odgovarajuću prenumeraciju skupa $\mathcal{V}$ dobijamo

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} V_i \neq \emptyset \tag{3.2}$$

Neka je sada familja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ otvoren pokrivač prostora X sa $n+2$ elementa tako da $U_i = V_i$ za $i \leq n+1$ i $U_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^{k} V_i$. Pokažimo da je to traženi pokrivač prostora X. Neka je $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ proizvoljno otvoreno sužavanje pokrivača $\mathcal{U}$. Tada je pokrivač

$$\{W_1, W_2, \ldots, W_{n+1}, W_{n+2} \cap V_{n+2}, W_{n+2} \cap V_{n+3}, \ldots, W_{n+2} \cap V_k\} \tag{3.3}$$

otvoreno sužavanje familije $\mathcal{V}$ (primetimo samo da je $W_{n+2} \subseteq U_{n+2}$, stoga $\bigcup_{i=n+2}^{k} W_{n+2} \cap V_i = W_{n+2} \cap \bigcup_{i=n+2}^{k} V_i = W_{n+2} \cap U_{n+2} = W_{n+2}$, iz čega sledi da je familija data u (3.3) pokrivač; ostalo se lako proverava). Tada je prema (3.1) i (3.2)

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i \supseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} W_i\right) \cap (W_{n+2} \cap V_{n+2}) \neq \emptyset,$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Kažemo da je prostor X kompaktan ako je Hauzdorfov i svaki otvoren pokrivač prostora X ima konačan potpokrivač. U narednom poglavlju koristićemo ekvivalentan uslov za pokrivajuću dimenziju kompaktnog metričkog prostora, ali pre toga moramo da uvedemo nov pojam koji se tiče pokrivača prostora.

Neka je $\mathcal{A}$ familija podskupova metričkog prostora X. Mreža familije $\mathcal{A}$, u oznaci $\operatorname{mesh} \mathcal{A}$, je najmanje gornje ograničenje dijametara svih elemenata iz $\mathcal{A}$, odnosno

$$\operatorname{mesh} \mathcal{A} = \sup\{\delta(A) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Primetimo da je $\operatorname{mesh} \mathcal{A} = a \in \mathbb{R}$ ili $\operatorname{mesh} \mathcal{A} = \infty$.

Sada dajemo lemu koja se u literaturi navodi kao pokrivajuća teorema Lebeskog (videti [7], glava 4).

Lema 3.2.7. Za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{A}$ kompaktnog metričkog prostora X postoji $\varepsilon > 0$ tako da je pokrivač $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$.

Dokaz. Kako je $\mathcal{A}$ pokrivač, za svako $x \in X$ postoji $A_x \in \mathcal{A}$ tako da $x \in A_x$. Dalje, za tačku x i skup A_x postoji dovoljno malo $\varepsilon_x > 0$ tako da $B(x, 2\varepsilon_x) \subseteq A_x$. Otvoren pokrivač $\{B(x, \varepsilon_x)\}_{x \in X}$ prostora X ima konačan potpokrivač, odnosno postoji konačan skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq X$ tako da

$$X = B(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup B(x_2, \varepsilon_{x_2}) \cup \ldots B(x_k, \varepsilon_{x_k}).$$

Pokažimo da $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \ldots, \varepsilon_{x_k}\}$ zadovoljava uslov tvrđenja, odnosno da je pokrivač $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$. Neka $x_0 \in X$. Kako je familija $\{B(x_i, \varepsilon_{x_i})\}_{i \leq k}$ pokrivač prostora X, tada postoji $j \leq k$ tako da $x_0 \in B(x_j, \varepsilon_{x_j})$. Dalje, za svako $x \in B(x_0, \varepsilon)$ važi $d(x, x_j) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_j) \leq \varepsilon + \varepsilon_{x_j} \leq 2\varepsilon_{x_j}$. Dakle, $B(x_0, \varepsilon) \subseteq B(x_j, 2\varepsilon_{x_j}) \subseteq A_{x_j}$, iz čega sledi da familija $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ jeste profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$. □

Broj $\varepsilon > 0$ koji zadovoljava uslove prethodne leme naziva se broj Lebeskog za pokrivač $\mathcal{A}$.

Teorema 3.2.8. Za svaki kompaktan metrizabilan prostor X sledeći uslovi su ekvivalentni:

(a) Prostor X zadovoljava nejednakost $\dim X \leq n$;

(b) Za svaku metriku d na prostoru X i svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X tako da $\operatorname{mesh} \mathcal{U} < \varepsilon$ i $\operatorname{ord} \mathcal{U} \leq n$;

(c) Postoji metrika d na prostoru X tako da za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X tako da $\operatorname{mesh} \mathcal{U} < \varepsilon$ i $\operatorname{ord} \mathcal{U} \leq n$.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$ Neka je X kompaktan metrički prostor tako da $\dim X \leq n$. Neka je d metrika na prostoru X i $\varepsilon > 0$. Zbog kompaktnosti prostora X otvoren pokrivač $\{B(x, \frac{\varepsilon}{3})\}_{x \in X}$ ima konačan potpokrivač. Dalje, iz (PD1) dobijamo konačno otvoreno profinjenje ovog pokrivača koji je reda $\leq n$. Time smo dobili pokrivač koji zadovoljava uslove pod (b).

$(b) \Rightarrow (c)$ Trivijalno važi.

$(c) \Rightarrow (a)$ Neka je d metrika kompaktnog prostora X koja zadovoljava uslove pod (c) i neka je $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^k$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Neka je $\varepsilon > 0$ broj Lebeskog za pokrivač $\mathcal{A}$. Kako se svaki podskup skupa X dijametra manjeg od ε može pokriti nekom loptom $B(x, \varepsilon)$, pri čemu je, prema lemi 3.2.7, $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$, to znači da se svaki podskup skupa X dijametra manjeg od ε nalazi u nekom od elemenata familije $\mathcal{A}$. Prema (c), za ε postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X takav da $\operatorname{mesh} \mathcal{U} < \varepsilon$ i $\operatorname{ord} \mathcal{U} \leq n$. Kako je $\operatorname{mesh} \mathcal{U} < \varepsilon$, to znači da je $\mathcal{U}$ i profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$, stoga sledi $\dim X \leq n$. □

U ovom poglavlju uveli smo dve nove funkcije dimenzije u klasi separabilnih metričkih prostora - veliku induktivnu dimenziju i pokrivajuću dimenziju dim. Velika induktivna dimenzija u mnogome podseća na malu induktivnu dimenziju sa kojom deli neke osnovne osobine dok se pokrivajuća dimenzija zasniva na potpuno drugačijem pristupu putem pokrivača prostora.

Kao što smo spomenuli u predgovoru, velika induktivna dimenzija predstavlja ekvivalent prve funkcije dimenzije koju je konstruisao Brauer 1913. godine u [3]. Za uvođenje formalne definicije zaslužan je Čeh[1] koji je svoje prve rezultate u vezi ove dimenzije dao 1931. godine u [4]. U ovom odeljku smo pokazali i prvi važan korak ka teoremi o poklapanju, a to je da za svaki separabilni metički prostor X važi $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$. Primetimo da je ova teorema direktna posledica teoreme o separaciji (2.3.6) iz prethodnog poglavlja. Ovu jednakost pokazali su Menger i Urison u [18] i [22]. U klasi separabilnih metričkih prostora teoremu o poklapanju male i velike induktivne dimenzije pokazali su Tumarkin i Hurevič u [20] i [11].

Počeci pokrivajuće dimenzije vezani su za rad Lebeskog [15] iz 1911. godine u kojem je pokazao posebno svojstvo n-dimenzionalne kocke preko pokrivača, iz čega je sledilo da $I^n \ncong I^m$, za $n \neq m$. Formalnu definiciju ove dimenzije takođe je uveo Čeh u [5] 1933. godine. U ovom poglavlju smo takođe pokazali teoremu 3.2.6 koju je pokazao Hemingsen[2] 1946. godine u [10] i nju ćemo koristiti u sledećoj glavi u dokazu teoreme o particijama. Poslednju teoremu u ovoj glavi, teoremu 3.2.8, koristićemo za dokazivanje teoreme o kompaktifikaciji koja je ključna za dokazivanje teoreme o poklapanju, teoreme koja potpuno definiše odnos između sve tri dimenzije u klasi separabilnih metričkih prostora.

Kada je u pitanju odnos dimenzija Ind i dim van klase separabilnih metričkih prostora, može se pokazati da se ove dve dimenzije poklapaju na svim metričkim prostorima ali ne i na svim kompaktnim prostorima. Sa druge strane, dimenzije ind i dim se u opštem slučaju razilaze kada su u pitanju i metrički i kompaktni prostori. Više detalja vezanih za ovu problematiku čitalac može pronaći u [8].

[1] Eduard Čech (1893-1960), češki matematičar

[2] Erik Hemmingsen (1917-2012), danski matematičar

Glava 4

Fundamentalna teorema teorije dimenzije

Sada kada smo uveli pojam topološke dimenzije na tri različita načina - preko male i velike induktivne dimenzije kao i pokrivajuće dimenzije, i pokazali da za sve separabilne metričke prostore važi $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$, pitamo se da li se pokrivajuća dimenzija dim značajno razlikuje od prve dve dimenzije u klasi ovih prostora. Odgovor na ovo pitanje nam daje teorema o poklapanju - sve tri dimenzije se poklapaju u klasi separabilnih metričkih prostora. Kako bismo to pokazali, u prvom odeljku ove glave uvodimo osnovne pojmove koji se tiču kompaktifikacije, kompletnosti, kao i totalno ograničene metrike nekog metričkog prostora, a u drugom odeljku pokazujemo teoremu kompaktifikacije koja ima posebnu ulogu u dokazivanju teoreme o poklapanju. U trećem odeljku pokazujemo fundamentalnu teoremu teorije dimenzije prema kojoj su sve tri dimenzije prostora $\mathbb{R}^n$ jednake n, da isto važi i za separabilne metričke prostore I^n i S^n, a da je Hilbertova kocka $I^{\mathbb{N}}$ beskonačne dimenzije.

4.1 Osnovni pojmovi

Sadržaj ovog odeljka prema svojoj složenosti više odgovara uvodnom delu ovog rada. Međutim, kako se pojmovi i teoreme navedene na ovom mestu direktno nadovezuju na ovo poglavlje, radi bolje preglednosti dajemo ga na početku ovog poglavlja. Kompletni dokazi teorema koje su samo navedene mogu se naći u [7] i [14], odakle su preuzete i definicije.

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je metrizabilan ako postoji metrika d na skupu X tako da se topologija indukovana metrikom d poklapa sa topologijom $\mathcal{O}$, odnosno $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}$. Ako metrika d indukuje topologiju $\mathcal{O}$ kažemo da je d metrika u prostoru X.

Kažemo da su metrike d_1 i d_2 na skupu X ekvivalentne ako indukuju istu topologiju na skupu X.

Za niz $x_1, x_2, \ldots$ tačaka prostora X kažemo da konvergira ka tački $x \in X$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke x postoji prirodan broj n_0 tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$, i pri tome koristimo oznaku $\lim_{i\to\infty} x_i = x$. Za niz koji ima bar jednu granicu kažemo da je konvergentan. Može se pokazati da u Hauzdorfovom prostoru niz može imati najviše jednu granicu. Kako su prostori sa kojima radimo metrički, a svi metrički (metrizabilni) prostori T_4-prostori, pa time i Hauzdorfovi, pod pojmom konvergencije niza podrazumevaćemo da granica postoji i da je jedinstvena.

Sada ćemo dati teoremu koja daje potreban i dovoljan uslov za konvergenciju niza u metričkom prostoru, a nakon toga teoremu koja govori o ekvivalenciji dve metrike u istom metrizabilnom prostoru.

Teorema 4.1.1. Ako je (X, d) metrički prostor i $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz u X, $x \in X$, tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ako i samo ako važi:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ \ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Teorema 4.1.2. Metrike d_1 i d_2 na skupu X su ekvivalentne ako i samo ako za svako $x \in X$ i svaki niz $x_1, x_2, \ldots$ tačaka prostora X važi

$$\lim_{i\to\infty} d_1(x, x_i) = 0 \ \text{ ako i samo ako } \ \lim_{i\to\infty} d_2(x, x_i) = 0.$$

Sada ćemo uvesti poseban pojam po pitanju kompaktnosti topološkog prostora, a to je kompaktifikacija prostora. Ako je X topološki prostor, kažemo da je kompaktan prostor $\tilde{X}$ kompaktifikacija prostora X ako $\tilde{X}$ sadrži gust potprostor koji je homeomorfan prostoru X.

Neka je (X, d) metrički prostor i $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz tačaka u prostoru X. Kažemo da je niz $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ Košijev u (X, d) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 tako da za svako $m, n \geq n_0$ važi $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. Svaki konvergentan niz je Košijev. Ako u prostoru X svaki Košijev niz konvergira, kažemo da je taj prostor kompletan. Vrlo važan primer kompletnog prostora jeste i prostor $\mathbb{R}$.

Za dati metrički prostor (X, d) postoji više kompletnih metričkih prostora (Y, σ) koji sadrže potprostor izometričan potprostoru prostora (X, d). Međutim, prostor (Y, σ) je jedinstveno određen (do na izometriju) ako dodamo uslov da potprostor prostora (Y, σ) izometričan prostoru (X, d) jeste gust u (Y, σ).

Teorema 4.1.3. Za svaki metrički prostor (X, d) postoji tačno jedan (do na izometriju) kompletan metrički prostor $(\tilde{X}, \tilde{d})$ tako da $\tilde{X}$ sadrži gust potprostor izometričan prostoru (X, d). Prostor $(\tilde{X}, \tilde{d})$ zovemo kompletiranje prostora (X, d).

Kažemo da je skup A $\varepsilon-$gust u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako za svako $x \in X$ postoji $x' \in A$ tako da $d(x, x') < \varepsilon$.

Metrički prostor (X, d) je totalno ograničen ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup $A \subseteq X$ koji je $\varepsilon-$gust u (X, d). Metrika d je totalno ograničena na skupu X ako je prostor (X, d) totalno ograničen. Kažemo da je topološki prostor X je metrizabilan totalno ograničenom metrikom ako postoji totalno ograničena metrika na prostoru X.

Primer 4.1.4. U ovom primeru pokazaćemo da je metrika $d_I(x, y) = |x - y|, x, y \in I$ totalno ograničena na prostoru I sa uobičajenom topologijom, pri čemu ćemo koristiti tvrđenje iz [14] prema kome su svi zatvoreni realni intervali kompaktni, pa prema tome i interval I. Za $\varepsilon > 0$ familija $\{B(x, \varepsilon)\}_{x\in I}$ je pokrivač prostora I. Kako je prostor I kompaktan, postoji konačan skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq I$ tako da

$$I = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_k, \varepsilon).$$

Tada je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ $\varepsilon-$gust skup u I jer za svako $x \in X$ postoji $i \leq k$ tako da $x \in B(x_i, \varepsilon)$, odnosno $d_I(x, x_i) < \varepsilon$.

U ovom poglavlju će nas posebno zanimati veza između kompaktnosti i kompletnosti metričkog prostora. U sledećoj teoremi dajemo potreban i dovoljan uslov kada je metrizabilan prostor kompaktan.

Teorema 4.1.5. Metrizabilan prostor X je kompaktan ako i samo ako na prostoru X postoji metrika d koja je totalno ograničena i kompletna.

Teorema 4.1.6. Kompletiranje metričkog prostora (X,d) je kompaktno ako i samo ako je (X,d) totalno ograničen prostor.

U jednom od prethodnih poglavlja smo definisali neprekidnost funkcije preko otvorenih skupova. Sada ćemo dati teoremu o neprekidnosti funkcije u metričkom prostoru.

Teorema 4.1.7. Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori i $x_0 \in X$. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako važi uslov

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X \;\; (d_X(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon).$$

Jedna vrsta neprekidnosti koja se pojavljuje u metričkim prostorima jeste i uniformna (ravnomerna) neprekidnost. Ako su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori, kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ je uniformno neprekidna na X ako i samo ako važi uslov

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x,y \in X \;\; (d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

Lako se pokazuje da uniformna neprekidnost na X implicira neprekidnost u svakoj tački $x_0 \in X$.

Još jedna vrsta neprekidnosti koju ćemo koristiti jeste sekvencijalna (nizovna) neprekidnost. Neka su $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ sekvencijalno neprekidna u tački x_0 ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u prostoru X iz $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sledi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Kad je u pitanju veza između neprekidnosti i sekvencijalne neprekidnosti, važi sledeća teorema.

Teorema 4.1.8. Neka su X i Y metrički prostori. Funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je sekvencijalno neprekidna u toj tački.

Sada ćemo navesti jednu teoremu koja daje potreban i dovoljan uslov da skup bude gust, koji je opisan preko nizova.

Teorema 4.1.9. Neka je $(X,\mathcal{O})$ prostor u kome važi prva aksioma prebrojivosti. Skup $D \subseteq X$ je gust ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ postoji niz $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u skupu D, čija je granica tačka x.

Na kraju dajemo vrlo važnu teoremu koju ćemo koristiti u dokazu teoreme kompaktifikacije, a koja se tiče proširenja uniformno neprekidnih funkcija sa gustog skupa na ceo prostor.

Teorema 4.1.10. Neka je (X,d) metrički prostor i (Y,δ) kompletan metrički prostor. Tada svako preslikavanje $f : A \to Y$, gde je A gust skup u prostoru X, koje je uniformno neprekidno u odnosu na metriku d na skupu A, može se proširiti do preslikavanja $\tilde{f} : X \to Y$ koje je uniformno neprekidno u odnosu na metriku d na X.

4.2 Teorema kompaktifikacije i teorema o poklapanju

Teorema kompaktifikacije predstavlja vrlo važan korak ka dokazivanju fundamentalne teoreme topološke dimenzije. Ona spada u grupu teorema koje se pokazuju preko dimenzije dim, stoga su pokrivači esencijalan deo pristupa ovoj teoremi. Iz tog razloga, na početku ovog poglavlja uvodimo tri jednostavne operacije na pokrivačima.

Ako su $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k$ pokrivači topološkog prostora X, tada je familija svih preseka $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$, gde $A_i \subseteq \mathcal{A}_i$, za $i = 1, 2, \ldots, k$, pokrivač prostora X koji obeležavamo sa $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_k$. Jasno, ako $x \in X$, tada za svako $i \leq k$ postoji A_{i_x} tako da $x \in A_{i_x} \in \mathcal{A}_i$, jer su $\mathcal{A}_i$ pokrivači prostora X, stoga je ova familija zaista pokrivač. Kako su konačni preseci otvorenih skupova otvoreni, ova familija je otvorena ako su i pokrivači $\mathcal{A}_i$ otvoreni, i konačna, ako su i $\mathcal{A}_i$ konačni.

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno (sirjektivno) preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y i neka je $\mathcal{A}$ pokrivač prostora Y. Tada je familija svih inverznih slika $f^{-1}[A]$, gde $A \in \mathcal{A}$, pokrivač prostora X, jer $X = f^{-1}[Y] = f^{-1}[\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A] = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}[A]$. Ako je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač tada je i familija inverznih slika takođe otvoren pokrivač (jer je f neprekidno preslikavanje), a konačnost se takođe prenosi na novi pokrivač.

Ako je M potprostor prostora X i $\mathcal{A}$ pokrivač prostora X, tada je familija svih preseka $M \cap A$, gde $A \in \mathcal{A}$, pokrivač potprostora M jer $M = M \cap X = M \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} M \cap A$. Pokrivač prostora M dobijen na ovakav način označavamo sa $\mathcal{A}|M$. Ako je familija $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač tada su i skupovi $M \cap A$ otvoreni, pa je pokrivač $\mathcal{A}|M$ takođe otvoren, a iz konačnosti familije $\mathcal{A}$ takođe sledi konačnost familije $\mathcal{A}|M$.

U sledećoj lemi dajemo potreban i dovoljan uslov kada je prostor metrizabilan totalno ograničenom metrikom, koji ćemo kasnije koristiti.

Lema 4.2.1. Prostor (X, d) je totalno ograničen metrikom d ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X takav da $\operatorname{mesh}\mathcal{U} < \varepsilon$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je prostor (X, d) totalno ogrančen metrikom d. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo konačan $\frac{\varepsilon}{3}-$gust skup $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq X$. Tada je familija $\{B(a_i, \frac{\varepsilon}{3})\}_{i=1}^k$ pokrivač prostora X jer za $x \in X$ postoji $i \leq k$ tako da $d(x, a_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, odnosno $x \in B(a_i, \frac{\varepsilon}{3})$. Pored toga, kako je $\{B(a_i, \frac{\varepsilon}{3})\}_{i=1}^k$ konačna familija otvorenih lopti, to je konačan otvoren pokrivač prostora X. Jasno, za svako $i \leq k$ važi $\delta(B(a_i, \frac{\varepsilon}{3})) < \varepsilon$ pa je $\operatorname{mesh}\{B(a_i, \frac{\varepsilon}{3})\}_{i=1}^k < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Neka je (X, d) metrički prostor takav da važi uslov tvrđenja i neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ prostora X takav da $\operatorname{mesh}\mathcal{U} < \varepsilon$. Za svako $i \leq k$ odaberimo $a_i \in U_i$, i neka $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Neka je $x \in X$. Tada postoji $U_j \subseteq \mathcal{U}$ takav da $x \in U_j$. Kako $\operatorname{mesh}\mathcal{U} < \varepsilon$, tada je $\delta(U_j) < \varepsilon$, stoga $d(x, a_j) < \varepsilon$. Dakle, skup A je $\varepsilon-$gust skup. □

Primedba 4.2.2. Ako je (X, d) totalno ograničen metrikom d takav da $\dim X \leq n$, tada, prema (PD1), postoji konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{U}$ pokrivača $\{B(a_i, \frac{\varepsilon}{3})\}_{i=1}^k$ takav da $\operatorname{ord}\mathcal{U} \leq n$, koji, naravno, zadovoljava uslov $\operatorname{mesh}\mathcal{U} < \varepsilon$.

Sada dajemo lemu koju ćemo koristiti u dokazu teoreme kompaktifikacije.

Lema 4.2.3. Neka je metrički prostor (X, d) totalno ograničen metrikom d i neka je $\dim X \leq n$. Za svaki niz neprekidnih funkcija $f_1, f_2, \ldots f_k$, koje preslikavaju X na I, i svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X tako da $\operatorname{mesh}\mathcal{U} < \varepsilon$, $\operatorname{ord}\mathcal{U} \leq n$, i $|f_i(x) - f_j(y)| < \varepsilon, i \leq k$, pri čemu x i y pripadaju istom članu pokrivača $\mathcal{U}$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ i funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_k$ neprekidna preslikavanja iz prostora X u prostor I. Kako su prostori X i I prostori sa totalno ograničenim metrikama, postoje konačni otvoreni pokrivači $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ prostora X, odnosno I tako da važi $\operatorname{mesh}\mathcal{V} < \varepsilon$ i $\operatorname{mesh}\mathcal{W} < \varepsilon$. Kako su $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ konačni otvoreni pokrivači, tada je i pokrivač $\mathcal{V} \wedge f_1^{-1}[\mathcal{W}] \wedge f_2^{-1}[\mathcal{W}] \wedge \ldots \wedge f_k^{-1}[\mathcal{W}]$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Pokažimo sada da proizvoljan potpokrivač $\mathcal{U}$ ovog pokrivača takav da $\operatorname{ord}\mathcal{U} \leq n$ (jer $\dim X \leq n$) zadovoljava uslove tvrđenja.

Posmatrajmo proizvoljan potpokrivač $\mathcal{U}$ ovog pokrivača reda $\leq n$. Prema konstrukciji pokrivača $\mathcal{U}$, za svako $U \in \mathcal{U}$ postoji $V \in \mathcal{V}$ tako da $U \subseteq V$. Kako je $\operatorname{mesh}\mathcal{V} < \varepsilon$, sledi $\delta(U) < \varepsilon$, odnosno $\operatorname{mesh}\mathcal{U} < \varepsilon$.

Sada, neka $x, y \in U \subseteq \mathcal{U}$ i f_i jedno od preslikavanja. Tada je $U = V \cap W_1' \cap W_2' \cap \ldots \cap W_k'$, za neko $V \in \mathcal{V}$ i $W_i' = f_i^{-1}[W_i], W_i \in \mathcal{W}$. Tada $f_i(x), f_i(y) \in f_i[U] = f_i[V] \cap f_i[W_1'] \cap \ldots \cap f_i[W_i'] \cap \ldots \cap f_i[W_k'] \subseteq f_i[W_i'] = f_i[f_i^{-1}[W_i]] \subseteq W_i$ (jer generalno važi $f[f^{-1}[A]] \subseteq A$ za svako preslikavanje f). Sada, kako je $\delta(W_i) < \varepsilon$ i $f_i(x), f_i(y) \in W_i$, sledi $d_I(f_i(x), f_i(y)) = |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. □

Kako bismo prethodnu lemu mogli iskoristiti u dokazu teoreme kompaktifikacije, bez dokaza dajemo teoremu koja daje vezu između separabilnosti i metrizabilnosti totalno ograničenom metrikom. Njen dokaz se može naći u [7], str 268.

Teorema 4.2.4. Topološki prostor je metrizabilan totalno ograničenom metrikom ako i samo ako je separabilan.

Teorema 4.2.5 (Teorema kompaktifikacije). Za svaki separabilni metrički prostor X postoji kompaktifikacija $\tilde{X}$ takva da $\dim \tilde{X} \leq \dim X$. Tačnije, za svaku totalno ograničenu metriku na prostoru X postoji ekvivalentna metrika $\tilde{d}$ na X takva da za $x, y \in X$ važi $d(x, y) \leq \tilde{d}(x, y)$, pri čemu je kompletiranje $\tilde{X}$ prostora X u odnosu na metriku $\tilde{d}$ kompaktifikacija prostora X koja zadovoljava nejednakost $\dim \tilde{X} \leq \dim X$.

Dokaz. Neka je $\dim X = n < \infty$ i neka je d totalno ograničena metrika na prostoru X. Sada ćemo za svako $m \in \mathbb{N}$ definisati konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}_m$ prostora X koji zadovoljava određena svojstva. Prema primedbi 4.2.2 za $\varepsilon = 1/2$ možemo odabrati konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}_1 = \{U_{1,j}\}_{j=1}^{k_1}$ tako da $\operatorname{mesh}\mathcal{U}_1 < 1/2$ i $\operatorname{ord}\mathcal{U}_1 \leq n$. Dalje, definišimo preslikavanja $f_{1,j}$, $j = 1, \ldots, k_1$ iz prostora X u prostor I na sledeći način:

$$f_{1,j}(x) = \frac{d(x, X \setminus U_{1,j})}{\sum_{l=1}^{k_1} d(x, X \setminus U_{1,l})}, \quad \text{za} \quad x \in X.$$

Pokažimo da je preslikavanje $f_{1,j}$ dobro definisano, odnosno da je imenilac u $f_{1,j}(x)$ različit od nule za svako $x \in X$. Primetimo da su skupovi $X \setminus U_{1,l}$ zatvoreni, stoga prema teoremi 1.2.10 imamo $d(x, X \setminus U_{1,l}) = 0$ akko $x \in X \setminus U_{i,l}$, i važi $X \setminus \bigcup_{l=1}^{k_1} U_{1,l} = \emptyset$. Tada je

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k_1} d(x, X \setminus U_{1,l}) = 0 &\Leftrightarrow d(x, X \setminus U_{1,l}) = 0, \ l = 1, \ldots, k_1 \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{l=1}^{k_1} X \setminus U_{1,l} = X \setminus \bigcup_{l=1}^{k_1} U_{1,l} = \emptyset. \end{aligned}$$

Dakle, $f_{1,j}$ jeste dobro definisano za svako j. Ovo preslikavanje je i neprekidno, kao kompozicija neprekidnih preslikavanja.

Sada, prema lemi 4.2.3, za konačan niz neprekidnih funkcija $f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,k_1}$ i $\varepsilon = 1/2^2$ postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}_2 = \{U_{2,j}\}_{j=1}^{k_2}$ prostora X tako da mesh$\,\mathcal{U}_2 < 1/2^2$, ord$\,\mathcal{U}_2 \leq n$, i

$$|f_{1,j}(x) - f_{1,j}(y)| < \frac{1}{2^2}, \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \dots, k_1$$

kad god x i y pripadaju istom elementu pokrivača $\mathcal{U}_2$. Koristeći lemu 4.2.3, svaki naredni pokrivač $\mathcal{U}_m, m \geq 2$ definišemo induktivno: konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}_m = \{U_{m,j}\}_{j=1}^{k_m}$ prostora X je takav da mesh$\,\mathcal{U}_m < \frac{1}{2^m}$, ord$\,\mathcal{U}_m \leq n$ i

$$|f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| < \frac{1}{2^m}, \quad \text{za} \quad i < m, \text{i } j = 1, 2, \dots, k_i$$

kad god x i y pripadaju istom elementu pokrivača $\mathcal{U}_m$, gde

$$f_{i,j}(x) = \frac{d(x, X \setminus U_{i,j})}{\sum_{l=1}^{k_i} d(x, X \setminus U_{i,l})}, \quad \text{za} \quad x \in X.$$

Sada, kada smo definisali otvorene pokrivače $\mathcal{U}_m = \{U_{m,j}\}_{j=1}^{k_m}$ za svako m, sve uređene parove (i,j), $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots k_i$ poređajmo u niz $\{n(i,j)\}_{n \in \mathbb{N}}$ na sledeći način:

$$n(i,j) < n(l,k) \ \text{ ako i samo ako } \ i < l \ \text{ ili } \ i = l \text{ i } j < k,$$

pri čemu $n(i,j)$ označava redni broj para (i,j) u tom nizu. Definišimo sada metriku $\tilde{d}$ na skupu X na sledeći način:

$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)|.$$

Iz osobina (M1)-(M3) metrika d na prostoru X i d_I na prostoru I sledi da je $\tilde{d}$ zaista metrika na prostoru X. Primetimo i to da za sve $x, y \in X$ važi $d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y)$.

Pokažimo sada da su ove dve metrike ekvivalentne. Prema teoremi 4.1.2 treba pokazati da za svako $x \in X$ i niz $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ u X važi

$$\lim_{i \to \infty} d(x, x_i) = 0 \ \text{ ako i samo ako } \ \lim_{i \to \infty} \tilde{d}(x, x_i) = 0.$$

Neka $\lim_{i \to \infty} \tilde{d}(x, x_i) = 0$. Kako je niz nenegativnih realnih brojeva $\{d(x, x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ ograničen sa gornje strane nenegativnim realnim nizom koji konvergira ka nuli, tada i niz $\{d(x, x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konvergira ka nuli.

Neka je sada $\lim_{i \to \infty} d(x, x_i) = 0$ i neka je $\varepsilon > 0$. Tražimo $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tako da za sve $k \geq k_0$ važi

$$d(x, x_k) + \sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(x_k)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Uzmimo $m \in \mathbb{N}$ tako da $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}$. Neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $d(x, x_{k_0}) < \frac{1}{2^m}$. Kako za pokrivač $\mathcal{U}_m$ važi mesh$\,\mathcal{U}_m < \frac{1}{2^m}$, sledi da za svako $k \geq k_0$ tačke x i x_k se nalaze u istom elementu pokrivača $\mathcal{U}_m$. Prema tome, za $i < m$, $j = 1, \dots, k_i$ važi $|f_{i,j}(x) - f_{i,j}(x_k)| < \frac{1}{2^m}$. Neka je sada $N = n(m, 1)$. Lako se vidi da $N \geq m$. Dalje, koristeći prethodno navedeno kao i ograničenja $|f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \leq 1$ za $i > 1, j = 1, \ldots, k_i$, $x, y \in X$, kao i $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} < 1$, sledi da za svako $k \geq k_0$ važi

$$\begin{aligned}\sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(x_k)| &= \sum_{n(i,j)=1}^{N-1} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(x_k)| \\ &+ \sum_{n(i,j)=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(x_k)| \\ &< \frac{1}{2^m} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{2^l} + \sum_{n(i,j)=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N} < \frac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Sa druge strane, za svako $k \geq k_0$ važi $d(x, x_k) \leq d(x, x_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$, stoga sledi (4.1).

Dakle, upravo smo pokazali da su metrike d i $\tilde{d}$ ekvivalentne, iz čega sledi da one indukuju istu topologiju na skupu X. Sada ćemo pokazati da je metrika $\tilde{d}$ totalno ograničena, te će prema teoremi 4.1.5 slediti da je kompletiranje $(\tilde{X}, \tilde{d})$ prostora $(X, \tilde{d}) = (X, d)$ takođe i kompaktno.

Neka je $\widetilde{\mathrm{mesh}\mathcal{U}_m}$ oznaka za mrežu pokrivača $\mathcal{U}_m$ u odnosu na metriku $\tilde{d}$. Pokazaćemo da je $\lim_{m\to\infty} \widetilde{\mathrm{mesh}\mathcal{U}_m} = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji prirodan broj N takav da važi $1/2^N < \varepsilon/3$. Neka je M prirodan broj takav da $M \geq N$, $M > i$ kad $n(i,j) \leq N$ i

$$\frac{1}{2^M} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Neka su $x, y \in U_j \in \mathcal{U}_m, m \geq M$. Tada

$$\begin{aligned}\sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| &= \sum_{n(i,j)=1}^{N} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \\ &+ \sum_{n(i,j)=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \\ &< \frac{1}{2^M} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^N} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2^N} < \frac{2\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Prema tome, kako $\mathrm{mesh}\,\mathcal{U}_m < 1/2^m \leq 1/2^M \leq 1/2^N < \varepsilon/3$, sledi

$$\tilde{d}(x, y) = d(x, y) + \sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| < \frac{1}{2^m} + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Dakle, $\widetilde{\mathrm{mesh}\mathcal{U}_m} < \varepsilon$ za $m \geq M$, što po definiciji konvergencije daje $\lim_{m\to\infty} \widetilde{\mathrm{mesh}\mathcal{U}_m} = 0$.

Sada kada smo pokazali da je kompletiranje $(\tilde{X}, \tilde{d})$ prostora $(X, \tilde{d})$ zapravo i kompaktifikacija prostora $(X, \tilde{d})$, ostaje da se pokaže i drugi deo tvrđenja, tj. da $\dim \tilde{X} \leq \dim X$. Ovaj deo pokazujemo tako što formiramo niz konačnih otvorenih pokrivača prostora $\tilde{X}$ čija mreža teži nuli i čiji red nije veći od n kako bismo pomoću teoreme 3.2.8 dobili da $\dim \tilde{X} \leq n$. Pokažimo najpre da su funkcije $f_{m,k}$ za sve m i sve k uniformno neprekidne u odnosu na metriku $\tilde{d}$, odnosno da važi

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in X\ (\tilde{d}(x, y) < \delta \Rightarrow |f_{m,k}(x) - f_{m,k}(y)| < \varepsilon)$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Za $\delta = \varepsilon/2^{n(m,k)}$ i $\tilde{d}(x,y) < \delta$ sledi

$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \sum_{n(i,j)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(i,j)}} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| < \frac{\varepsilon}{2^{n(m,k)}}. \tag{4.2}$$

Kako je svaki sabirak u (4.5) nenegativan, sledi da svi sabirci moraju biti ograničeni odozgo sa $\varepsilon/2^{n(m,k)}$. Dakle

$$\frac{1}{2^{n(m,k)}} |f_{m,k}(x) - f_{m,k}(y)| < \frac{\varepsilon}{2^{n(m,k)}} \Rightarrow |f_{m,k}(x) - f_{m,k}(y)| < \varepsilon.$$

Kako su preslikavanja $f_{m,k} : X \to I$ uniformno neprekidna u odnosu na metriku $\tilde{d}$, prostor X gust u prostoru $\tilde{X}$ i prostor I kompletan, prema teoremi 4.1.10 ova preslikavanja mogu se proširiti do uniformno neprekidnih, pa samim tim i neprekidnih preslikavanja $\tilde{f}_{m,k} : \tilde{X} \to I$. Primetimo da za svako $m \in \mathbb{N}$ i svako $x \in X$ važi $\sum_{k=1}^{k_m} f_{m,k}(x) = 1$. Pokažimo da je tada i $\sum_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(x) = 1$ za svako $x \in \tilde{X}$.

Neka je $x \in \tilde{X}$. Kako je skup X gust u $\tilde{X}$, tada postoji niz $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ iz X takav da $\lim_{i\to\infty} x_i = x$. Kako su funkcije $\tilde{f}_{m,k}$ neprekidne, tada su i sekvencijalno neprekidne, stoga važi $\lim_{i\to\infty} \tilde{f}_{m,k}(x_i) = \tilde{f}(x)$. Kako je niz $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u X, za svako i važi $f_{m,k}(x_i) = \tilde{f}_{m,k}(x_i)$. Stoga sledi

$$\sum_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(x) = \sum_{k=1}^{k_m} \lim_{i\to\infty} \tilde{f}_{m,k}(x_i) = \sum_{k=1}^{k_m} \lim_{i\to\infty} f_{m,k}(x_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_m} f_{m,k}(x_i) = 1. \tag{4.3}$$

Definišimo sada familiju skupova $\tilde{\mathcal{U}}_m = \{\tilde{U}_{m,k}\}_{k=1}^{k_m}$ za $m = 1, 2, \ldots$, gde $\tilde{U}_{m,k} = \tilde{f}^{-1}[(0,1]]$. Pokažimo da ova familija jeste otvoren pokrivač prostora $\tilde{X}$. Kako je skup $(0,1]$ otvoren skup u prostoru I, a preslikavanje $\tilde{f}$ neprekidno, tako je i skup $\tilde{f}^{-1}[(0,1]]$ otvoren u prostoru $\tilde{X}$. Dalje, neka je $x \in \tilde{X}$. Kako je $\sum_{k=1}^{k_m} \tilde{f}_{m,k}(x) = 1$, sledi da postoji $j \leq k_m$ takav da $\tilde{f}_{m,j}(x) > 0$, iz čega sledi da $x \in \tilde{f}^{-1}[(0,1]] = \tilde{U}_{m,j}$. Dakle, $\tilde{\mathcal{U}}_m$ jeste otvoren pokrivač prostora $\tilde{X}$.

Neka je sada $x \in X \cap \tilde{U}_{m,k}$, za neko m i $k \leq k_m$. Tada je $\tilde{f}_{m,k}(x) = f_{m,k}(x)$, i važi sledeće

$$f_{m,k}(x) > 0 \Leftrightarrow d(x, X \setminus U_{m,k}) > 0 \Leftrightarrow x \notin X \setminus U_{m,k} \Leftrightarrow x \in U_{m,k}. \tag{4.4}$$

Sa druge strane, ako $x \in U_{m,k}$ tada je $x \in X$, stoga $\tilde{f}_{m,k}(x) = f_{m,k}(x)$, a kako prema (4.4) važi $f_{m,k}(x) > 0$, sledi da $x \in \tilde{U}_{m,k}$. Dakle, važi jednakost $X \cap \tilde{U}_{m,k} = U_{m,k}$.

Pokažimo sada da je skup $U_{m,k}$ gust u $\tilde{U}_{m,k}$. Neka $x \in \tilde{U}_{m,k}$. Ako $x \in U_{m,k}$ tada je stacionarni niz $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ takav da $x_i = x$ za svako i niz u $U_{m,k}$ koji konvergira u $\tilde{U}_{m,k}$. Pretpostavimo da $x \notin U_{m,k}$. Kako $x \in \tilde{X}$, a skup X je gust u $\tilde{X}$, postoji niz $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u X takav da $\lim_{i\to\infty} x_i = x$. Kako je $\tilde{U}_{m,k}$ otvoren skup i $x \in \tilde{U}_{m,k}$, postoji $\varepsilon > 0$ tako da $B(x,\varepsilon) \subseteq \tilde{U}_{m,k}$. Kako niz $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x, postoji dovoljno veliko $i_0 > 0$ tako da za sve $i > i_0$ svi članovi niza upadaju u loptu $B(x,\varepsilon)$. Dakle, važi $\{x_i\}_{i=i_0}^{\infty} \subseteq X \cap \tilde{U}_{m,k} = U_{m,k}$. Dakle, pokazali smo da za $x \in \tilde{U}_{m,k}$ postoji niz u $U_{m,k}$ koji konvergira ka x, što znači da je skup $U_{m,k}$ zaista gust u $\tilde{U}_{m,k}$.

Ranije smo pokazali da $\lim_{m\to\infty} \widetilde{\operatorname{mesh}\mathcal{U}_m} = 0$. Kako je $U_{m,k}$ gust skup u $\tilde{U}_{m,k}$, sledi $\overline{U}_{m,k} = \tilde{U}_{m,k}$, za sve m i $k \leq k_m$. Kako važi $\delta(U_{m,k}) = \delta(\overline{U}_{m,k}) = \delta(\tilde{U}_{m,k})$, sledi da je $\widetilde{\operatorname{mesh}\mathcal{U}_m} = \widetilde{\operatorname{mesh}\tilde{\mathcal{U}}_m}$, stoga $\lim_{m\to\infty} \widetilde{\operatorname{mesh}\tilde{\mathcal{U}}_m} = 0$.

Podsetimo se da za svako m važi $\operatorname{ord}\mathcal{U}_m \leq n$. Pokažimo da je i $\operatorname{ord}\tilde{\mathcal{U}}_m \leq n$. Pretpostavimo suprotno, neka su $\tilde{U}_{m,j_1}, \tilde{U}_{m,j_2}, \ldots, \tilde{U}_{m,j_{n+2}}$ takvi elementi familije $\tilde{\mathcal{U}}_m$ da

$\bigcap_{l=1}^{n+2} \tilde{U}_{m,j_l} \neq \emptyset$, i neka x pripada tom preseku. Kako je U_{m,j_l} gust skup u $\tilde{U}_{m,j_l}$ za $l \leq n+2$, za svako l postoji niz $\{x_i^l\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq U_{m,j_l} \subseteq X$ takav da $\lim_{i\to\infty} x_i^l = x$. Kako je skup $\bigcap_{l=1}^{n+2} \tilde{U}_{m,j_l}$ otvoren, za svako l postoji i_l tako da za sve $i > i_l$ $x_i^l \in B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{l=1}^{n+2} \tilde{U}_{m,j_l}$. Neka je $i_s = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_{n+2}\}$. Uzimajući u obzir i to da su svi ovi nizovi u X, za $i > i_s$ i $l \leq n+2$ važi $x_i^l \in X \cap \bigcap_{l=1}^{n+2} \tilde{U}_{m,j_l} = \bigcap_{l=1}^{n+2} (\tilde{U}_{m,j_l} \cap X) = \bigcap_{l=1}^{n+2} U_{m,j_l}$, što je nemoguće jer $\operatorname{ord} \mathcal{U}_m \leq n$.

Na kraju, kako $\lim_{m\to\infty} \widetilde{\operatorname{mesh}} \tilde{\mathcal{U}}_m = 0$ i $\operatorname{ord} \tilde{\mathcal{U}}_m \leq n$ za $m = 1, 2, \ldots$, to znači da u kompaktnom prostoru $\tilde{X}$ za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan otvoren pokrivač takav da je njegov red $\leq n$, što prema teoremi 3.2.8 znači da je $\dim \tilde{X} \leq \dim X = n$. $\square$

Sledeća lema prethodi tvrđenju prema kome u separabilnim metričkim prostorima važi nejednakost $\dim X \leq \operatorname{ind} X$.

Lema 4.2.6. Neka je X metrički prostor i M potprostor prostora X. Za svaku familiju $\{F_i\}_{i=1}^k$ po parovima disjunktnih otvorenih i zatvorenih podskupova prostora M postoji familija $\{W_i\}_{i=1}^k$ po parovima disjunktnih otvorenih skupova prostora X tako da $F_i \subseteq W_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$.

Dokaz. Znamo da su funkcije $f_i(x) : X \to \mathbb{R}$, $f_i(x) = d(x, F_i), i \leq k$ neprekidne, iz čega sledi neprekidnost funkcije $h_{i,j}(x) = d(x, F_j) - d(x, F_i), i, j \leq k$. Prema tome, skup $\{x \in X : 0 < d(x, F_j) - d(x, F_i)\} = h^{-1}[(0, \infty)]$ je otvoren, kao inverzna slika otvorenog skupa. Skupovi oblika

$$W_i = \bigcap_{j\neq i} \{x \in X : d(x, F_i) < d(x, F_j)\} \tag{4.5}$$

su takođe otvoreni, kao konačni preseci otvorenih skupova, i zadovoljavaju tražene uslove. Disjunktnost sledi iz stroge nejednakosti u (4.5), dok za svako $x \in F_i, i \leq k$ i svako $j \neq i$ važi $0 = d(x, F_i) < d(x, F_j)$ jer $F_i \cap F_j = \emptyset$, stoga $x \in W_i$. $\square$

Lema 4.2.7. Za svaki separabilan metrički prostor X važi $\dim X \leq \operatorname{ind} X$.

Dokaz. Ako je $\operatorname{ind} X = \infty$ tada tvrđenje trivijalno važi, stoga pretpostavimo da $\operatorname{ind} X < \infty$. Ako je $\operatorname{ind} X = -1$ tada je prema (MD1) $X = \emptyset$, iz čega sledi $\dim X = -1$. Razmotrimo sada slučaj $\operatorname{ind} X = 0$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Prema propoziciji 2.2.6 prostor X ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$ koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova, iz čega sledi da postoji profinjenje $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ pokrivača $\mathcal{U}$ koje se takođe sastoji od otvoreno-zatvorenih podskupova prostora X. Naime, kako se svako $U_j \in \mathcal{U}$ kao otvoren skup može predstaviti kao unija podfamilije baze $\mathcal{B}$, jedno takvo profinjenje je familija $\{B_i \in \mathcal{B} : \exists U_j \in \mathcal{U}, B_i \subseteq U_j\}$. Sada, pomoću profinjenja $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ definišimo familiju $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ na sledeći način:

$$W_1 = V_1, \quad W_2 = V_2 \setminus W_1, \quad \ldots \quad W_i = V_i \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{i-1}) \tag{4.6}$$

Kako je skup W_1 je otvoreno-zatvoren tako je i $W_2 = V_2 \cap (X \setminus W_1)$ otvoreno-zatvoren kao presek dva otvoreno-zatvorena skupa. Slično, ako su W_k, za $k < i$ otvoreno-zatvoreni, tada je i $W_i = V_i \cap (X \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{i-1}))$ otvoreno-zatvoren skup. Prema konstrukciji se vidi da je u pitanju familija uzajamno disjunktnih skupova, da važi $W_i \subseteq V_i$ za svako i kao i da je $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ pokrivač prostora X. Dakle, familija $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ je profinjenje profinjenja $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ pokrivača $\mathcal{U}$, pa time i sama profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Kako je $\operatorname{ord}\{W_i\}_{i=1}^\infty = 0$, prema propoziciji 3.2.5 sledi da je i $\dim X \leq 0 = \operatorname{ind} X$.

Neka je sada $\operatorname{ind} X = n > 0$ uz pretpostavku da tvrđenje važi za sve prostore M gde je $\operatorname{ind} M < n$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Prema drugoj teoremi dekompozicije (2.3.5) X se može predstaviti kao suma $n+1$ prostora čija je dimenzija ind manja ili jednaka nuli, odnosno

$$X = Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_{n+1}, \quad \text{gde } \operatorname{ind} Z_j \leq 0 \text{ za } j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{4.7}$$

Iz slučaja teoreme koji smo već pokazali sledi da je $\dim Z_j \leq 0$ za $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Tada, prema propoziciji 3.2.5 pokrivač $\mathcal{U}|Z_j$ prostora Z_j ima sužavanje $\{F_{j,i}\}_{i=1}^k$ koje se sastoji od uzajamno disjunktnih otvorenih podskupova prostora Z_j. Štaviše, ovi skupovi su i zatvoreni u prostoru Z_j, jer za svako i, $F_{j,i} = Z_j \setminus \bigcup_{k \neq i} F_{j,k}$.

Dakle, familija $\{F_{j,i}\}_{i=1}^k$ je familija uzajamno disjunktnih otvoreno-zatvorenih skupova prostora Z_j. Sada pomoću prethodne leme dobijamo familiju $\{W_{j,i}\}_{i=1}^k$ uzajamno disjunktnih otvorenih skupova prostora X tako da $F_{j,i} \subseteq W_{j,i}$, za $i = 1, 2, \ldots, k$. Tada skupovi oblika $V_{j,i} = W_{j,i} \cap U_i$, gde $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n+1$ formiraju otvoren pokrivač prostora X koj profinjuje pokrivač $\mathcal{U}$. Naime, ako $x \in X$ tada postoji $i \leq k$ i $j \leq n+1$ tako da $x \in Z_j$ i $x \in F_{j,i} \subseteq U_i \cap Z_j \subseteq U_i$, odnosno $x \in F_{j,i} \subseteq W_{j,i}$. Dakle $x \in V_{j,i}$, te je familija $\mathcal{V} = \{V_{j,i}\}_{j \leq n+1, i \leq k}$ zaista pokrivač, a kako su $W_{j,i}$ i U_i za svako i i j otvoreni skupovi, on je i otvoren pokrivač. Jasno, $V_{j,i} \subseteq U_i$, dakle $\mathcal{V}$ je otvoreno profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Red familije $\mathcal{V}$ nije veći od n jer se u svaka $n+2$ skupa $V_{j,i}$ nalaze bar dva sa istim indeksom j, a njihov presek je prazan jer $V_{j,i} \cap V_{j,k} = W_{j,i} \cap U_i \cap W_{j,k} \cap U_k \subseteq W_{j,i} \cap W_{j,k} = \emptyset$. Dakle, kako konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ ima otvoreno profinjenje reda ne većeg od n, prema propoziciji 3.2.5 $\dim X \leq n = \operatorname{ind} X$. □

Sada ćemo pokazati jednu lemu koja će nam koristiti u nastavku izlaganja.

Lema 4.2.8. U kompaktnom metričkom prostoru (X, d) udaljenost između dva zatvorena disjunktna skupa uvek je pozitivna.

Dokaz. Neka su A i B zatvoreni disjunktni podskupovi prostora X. Udaljenost između skupova A i B možemo predstaviti preko udaljenosti proizvoljne tačke skupa A od skupa B, odnosno

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = \inf\{d(x, B), x \in A\}.$$

Kako je u [14] pokazano da je podskup kompaktnog prostora kompaktan ako i samo ako je zatvoren, sledi da je skup A kompaktan skup. Prema tome, preslikavanje $f(x) : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, B)$ je neprekidno preslikavanje na kompaktnom skupu i kao takvo dostiže svoj minimum i maksimum na skupu A. Neka je $d(A, B) = 0$. Tada je

$$0 = \inf\{(d(x, B), x \in A\} = \min\{d(x, B) : x \in A\}.$$

Neka je $x \in A$ takvo da $d(x, B) = 0$. Tada je $x \in \overline{B} = B$, što je nemoguće jer su A i B disjunktni skupovi. □

Primer 4.2.9. U ovom primeru pokazaćemo da tvrđenje iz prethodne leme u opštem slučaju ne važi za metričke prostore koji nisu kompaktni. Posmatrajmo potprostor $C = [-1, 0) \cup (0, 1]$ prostora $\mathbb{R}$. Kako je potprostor prostora $\mathbb{R}$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren (videti [14]), prostor C nije kompaktan jer nije zatvoren.

Posmatrajmo skupove $A = [-1/2, 0)$, $B = (0, 1/2]$ koji su zatvoreni i disjunktni u prostoru C. Pretpostavimo da je $d_C(A, B) = \varepsilon > 0$. Kako je $d_C(x, y) = d(x, y) = |x - y|, x, y \in C$, za $x = -\varepsilon/4, y = \varepsilon/4$ važi $d_C(x, y) = \varepsilon/2 < d_C(A, B) = \inf\{d_C(a, b) : a \in A, b \in B\}$, što je nemoguće. Dakle, $d_C(A, B) = 0$.

Lema 4.2.10. Za svaki kompaktan metrički prostor (X, d) važi $\operatorname{ind} X \leq \dim X$.

Dokaz. Ako je $\dim X = \infty$ tvrđenje trivijalno važi, stoga dokaz dalje sprovodimo indukcijom po $\dim X = n < \infty$. Ako je $\dim X = -1$ tada je $X = \emptyset$ pa je i $\operatorname{ind} X = -1$, stoga $\operatorname{ind} X \leq \dim X$. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi sa svaki kompaktan metrički prostor pokrivajuće dimenzije manje od n. Neka je $\dim X = n \geq 0$. Neka je $x \in X$ i B zatvoren podskup takav da $x \notin B$. Dovoljno je da pokažemo da postoje otvoreni skupovi $K, M \subseteq X$ i $L = X \setminus (K \cup M)$ tako da važe uslovi

$$x \in K, \quad B \subseteq M, \quad K \cap M = \emptyset \quad i \quad \dim L \leq n - 1. \tag{4.8}$$

Tada prema indukcijskoj pretpostavci $\operatorname{ind} L \leq \dim L \leq n - 1$ jer je L kao zatvoren podskup kompaktnog prostora takođe kompaktan, stoga prema lemi 2.1.10 sledi $\operatorname{ind} X \leq n = \dim X$.

Napre ćemo pokazati da postoje nizovi $K_0, K_1, K_2, \ldots$ i $M_0, M_1, M_2, \ldots$ zatvorenih podskupova prostora X tako da za skupove K_i, M_i i $L_i = X \setminus (K_i \cup M_i)$, gde $i = 1, 2, \ldots$, važe uslovi

$$x \in K_{i-1} \subseteq \operatorname{Int} K_i, \quad B \subseteq M_{i-1} \subseteq \operatorname{Int} M_i \;\; \text{i} \;\; K_i \cap M_i = \emptyset, \tag{4.9}$$

$$L_i \text{ ima konačan otvoren pokrivač } \mathcal{U}_i \text{ takav da } \operatorname{mesh} \mathcal{U}_i < \frac{1}{i} \text{ i } \operatorname{ord} \mathcal{U}_i \leq n - 1. \tag{4.10}$$

Neka je $K_0 = \{x\}$, $M_0 = B$ i pretpostavimo da su definisani skupovi K_i, M_i za $0 < i < j$ takvi da važe uslovi (4.9) i (4.10). Kako su K_{j-1}, M_{j-1} disjunktni zatvoreni podskupovi kompaktnog prostora, prema prethodnoj lemi važi $d(K_{j-1}, M_{j-1}) > 0$. Neka je $\varepsilon = \min\{1/j, d(K_{j-1}, M_{j-1})\} > 0$. Prema teoremi 3.2.8, kako je X kompaktan prostor i važi $\dim X \leq n$, postoji konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}_j$ prostora X tako da $\operatorname{mesh} \mathcal{U}_j < \varepsilon$ i $\operatorname{ord} \mathcal{U}_j \leq n$. Neka su $K_j = X \setminus H_j$ i $M_j = X \setminus G_j$, gde

$$G_j = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_j : \overline{U} \cap \overline{M}_{j-1} = \emptyset\}, \tag{4.11}$$

$$H_j = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_j : \overline{U} \cap M_{j-1} \neq \emptyset\}. \tag{4.12}$$

Primetimo da za bilo koji skup $U_j \in \mathcal{U}_j$ zatvaranje $\overline{U}_j$ seče najviše jedan od skupova M_{j-1}, K_{j-1}. Naime, ako $x, y \in \overline{U_j}$, $x \in M_{j-1}$, $y \in K_{j-1}$, tada $\delta(U_j) = \delta(\overline{U}_j) \geq d(M_{j-1}, K_{j-1})$, iz čega sledi $\operatorname{mesh} \mathcal{U} \geq d(M_{j-1}, K_{j-1})$, što je nemoguće.

Sada, neka je S skup svih indeksa skupova $U_i \in \mathcal{U}_j$ takvih da $U_i \subseteq G_j$. Kako je S konačan skup a zatvaranje konačne unije skupova jednako konačnoj uniji zatvaranja tih skupova, važi $\overline{G}_j \cap M_{j-1} = \overline{\bigcup_{i \in S} U_i} \cap M_{j-1} = \bigcup_{i \in S} \overline{U}_i \cap M_{j-1} = \bigcup_{i \in S} \overline{U}_i \cap \overline{M}_{j-1} = \emptyset$.

Neka je T skup svih indeksa skupova U_i takvih da $U_i \subseteq H_j$. Tada $\overline{H}_j \cap K_{j-1} = \overline{\bigcup_{i \in T} U_i} \cap K_{j-1} = \bigcup_{i \in T} \overline{U}_i \cap K_{j-1} = \bigcap_{i \in T} (\overline{U}_i \cap K_{j-1})$. Kako za svako $U_i \in \mathcal{U}$ skup $\overline{U}_i$ seče najviše jedan od skupova M_{j-1}, K_{j-1}, a za svako $i \in T$ važi $\overline{U}_i \cap M_{j-1} \neq \emptyset$, sledi da $\overline{U}_i \cap K_{j-1} = \emptyset$, stoga $\overline{H}_j \cap K_{j-1} = \emptyset$.

Dalje, iz $\overline{G}_j \cap M_{j-1} = \emptyset$, sledi $M_{j-1} \subseteq X \setminus \overline{G}_j$. Kako $\operatorname{Int} M_j = M_j \setminus \operatorname{Fr} M_j = (X \setminus G_j) \setminus \operatorname{Fr}(X \setminus G_j) = (X \setminus G_j) \setminus \operatorname{Fr} G_j = (X \setminus G_j) \cap (X \setminus \operatorname{Fr} G_j) = X \setminus (G_j \cup \operatorname{Fr} G_j) = X \setminus \overline{G}_j$, sledi $M_{j-1} \subseteq X \setminus \overline{G}_j$. Slično se pokazuje da iz $\overline{H}_j \cap K_{j-1} = \emptyset$ sledi $K_{j-1} \subseteq X \setminus \overline{H}_j$.

Iz uslova (4.11) i (4.12) za konstrukciju skupova G_j i H_j i činjenice da je $\mathcal{U}_J$ pokrivač, sledi $X = G_j \cup H_j$, stoga $K_j \cap M_j = (X \setminus H_j) \cap (X \setminus G_j) = X \setminus (G_j \cup H_j) = \emptyset$. Dakle, uslov (4.9) je zadovoljen za $i = j$.

Posmatrajmo familiju $\mathcal{W}_j = \{U \cap L_j : U \in \mathcal{U}, \, \overline{U} \cap M_{j-1} \neq \emptyset\}$, gde $L_j = X \setminus (K_j \cap M_j) = G_j \cap H_j$. Kako je $\bigcup_{W \in \mathcal{W}_j} W = \bigcup_{k \in T} (U_k \cap L_j) = \bigcup_{k \in T} U_k \cap L_j = H_j \cap L_j = L_j$, i kako je svako $U \in \mathcal{U}$ otvoren skup, sledi da je $\mathcal{W}_j$ otvoren pokrivač skupa L_j. Kako je $\operatorname{mesh}\mathcal{U} < 1/j$, sledi da je $\operatorname{mesh}\mathcal{W}_j < 1/j$. Pokažimo sada da je $\operatorname{ord}\mathcal{W}_j \leq n-1$. Ako to nije slučaj, tada postoji $n+1$ skupova familije $\mathcal{U}_j$ takvih da $\bigcap_{k=1}^{n+1}(U_{i_k} \cap L_j) = \bigcap_{k=1}^{n+1} U_{i_k} \cap L_j \neq \emptyset$, pri čemu $\overline{U}_{i_k} \cap M_{j-1} \neq \emptyset$ za $k \leq n+1$. Neka $x \in \bigcap_{k=1}^{n+1}(U_{i_k} \cap L_j) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n+1} U_{i_k}$. Kako $x \in L_j \subseteq G_j$, postoji skup $U \in \mathcal{U}_j$ takav da $x \in U$ i $\overline{U} \cap M_{j-1} = \emptyset$. Kako je $\operatorname{ord}\mathcal{U}_j \leq n$, tada je U jednak jednom od skupova $U_{i_k}, k \leq n+1$, iz čega sledi $\overline{U} \cap M_{j-1} \neq \emptyset$, što daje kontradikciju. Dakle, $\operatorname{ord}\mathcal{W}_j \leq n-1$, pa stoga važi uslov (4.12) za $i = j$.

Sada kada smo pokazali da je konstrukcija skupova $K_0, K_1, K_2, \dots$ i $M_0, M_1, M_2, \dots$ takvih da važe uslovi (4.11) i (4.12) dobro definisana, posmatrajmo skupove $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ i $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Primetimo da su oba skupa otvorena. Naime, ako $x \in K$, tada postoji $i > 0$ tako da $x \in K_i \subseteq \operatorname{Int} K_{i+1}$. Kako je skup $\operatorname{Int} K_{i+1}$ otvoren, postoji bazni skup B_x takav da $x \in B_x \subseteq \operatorname{Int} K_{i+1} \subseteq K_{i+1} \subseteq K$. Dakle, važi $K = \bigcup_{x \in K} B_x$, iz čega sledi da je K otvoren skup. Slično se pokazuje za skup M. Prema konstrukciji skupova K i M lako zaključujemo da su oni disjunktni, i da $x \in K$ i $B \subseteq M$. Dalje, $L = X \setminus (K \cap M) = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}) = (X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(X \setminus K_i) \cap (X \setminus M_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$. Kako je za presek svaka dva skupa koji imaju konačne otvorene pokrivače reda $\leq n+1$ jedan konačan otvoreni pokrivač upravo presek ova dva pokrivača koji je takođe reda $\leq n-1$, a mreža manja ili jednaka minimumu mreža ova dva pokrivača, prema konstrukciji skupa L sledi da je L takav skup da za svako $\varepsilon > 0$ može da se napravi konačan otvoren pokrivač reda $\leq n-1$. Kako je L kao zatvoren podskup kompaktnog prostora kompaktan, prema teoremi 3.2.8 sledi da je $\dim L \leq n-1$. Dakle, uslovi (4.8) su zadovoljeni, iz čega sledi $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Konačno, nakon što smo pokazali sva neophodna tvrđenja, možemo da dokažemo sledeću teoremu.

Teorema 4.2.11 (Teorema o poklapanju). Za svaki separabilni metrički prostor X važi $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$.

Dokaz. Kako smo već pokazali u teoremi 3.1.9 da važi $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$, i u lemi 4.2.7 da je $\dim X \leq \operatorname{ind} X$, ostaje da se pokaže da je $\operatorname{ind} X \leq \dim X$. Iz teoreme kompaktifikacije 4.2.5 sledi da postoji kompaktan metrički prostor $\tilde{X}$ koji sadrži X takav da $\dim \tilde{X} \leq \dim X$. Prema prethodnoj lemi važi $\operatorname{ind} \tilde{X} \leq \dim \tilde{X}$, a kako prema teoremi 2.1.7 o potprostoru za dimenziju ind važi $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{ind} \tilde{X}$, sledi $\operatorname{ind} X \leq \dim X$. □

4.3 Fundamentalna teorema

Sada, kada smo pokazali da se na separabilnim metričkim prostorima dimenzije ind, Ind i dim poklapaju, i kako iz primera 2.3.9 sledi da je $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \leq n$, ostaje da se pokaže da je $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \geq n$. Za dokaz ovog tvrđenja koristićemo teoremu o particijama, a za dokaz ove teoreme biće nam potrebna sledeća teorema o postojanju zatvorenog sužavanja konačnog otvorenog pokrivača normalnog prostora.

Teorema 4.3.1. Svaki konačan otvoren pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ T_4-prostora X ima zatvoreno sužavanje $\{F_i\}_{i=1}^{k}$.

Dokaz. Dokaz sprovodimo indukcijom po k. Neka je $k = 2$, odnosno $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ otvoren pokrivač prostora X. Tada su $A = X \setminus U_1$ i $B = X \setminus U_2$ disjunktni skupovi jer $A \cap B = X \setminus (U_1 \cup U_2) = \emptyset$, a i zatvoreni jer je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač. Kako je X normalan prostor, postoje otvoreni disjunktni skupovi V_1 i V_2 takvi da $A \subseteq V_1$ i $B \subseteq V_2$. Tada skupovi $F_1 = X \setminus V_1$ i $F_2 = X \setminus V_2$ čine zatvoreno sužavanje pokrivača $\mathcal{U}$. Skupovi F_1 i F_2 su zatvoreni, a kako $F_1 \cup F_2 = X \setminus (V_1 \cap V_2) = X$ to je i pokrivač prostora X. Kako $F_1 = X \setminus V_1 \subseteq X \setminus A \subseteq U_1$, i slično $F_2 \subseteq U_2$, sledi da oni čine zatvoreno sužavanje pokrivača $\mathcal{U}$.

Sada, neka tvrđenje važi za svako $k < m \geq 3$ i neka je $\{U_i\}_{i=1}^m$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Definišimo sada skupove

$$U_i' = U_i \ \text{ za } i \leq m-2 \ \text{ i } \ U_{m-1}' = U_{m-1} \cup U_m. \tag{4.13}$$

Familija $\{U_i'\}_{i=1}^{m-1}$ je konačan otvoren pokrivač prostora X sa $m-1 < m$ elemenata, stoga prema indukcijskoj pretpostavci postoji zatvoreno sužavanje $\{F_i'\}_{i=1}^{m-1}$ ovog pokrivača. Skup $\{F_{m-1}' \cap U_{m-1}, F_{m-1}' \cap U_m\}$ je konačan otvoren pokrivač potprostora F_{m-1}' jer $F_{m-1}' \subseteq U_{m-1}'$, a kako je T_4 nasledna osobina, potprostor F_{m-1}' prostora X je T_4-prostor. Prema već pokazanom slučaju za $k = 2$ sledi da postoji zatvoreno sužavanje $\{F_{m-1}, F_m\}$ ovog pokrivača. Kako su skupovi F_{m-1}, F_m zatvoreni podskupovi zatvorenog potprostora, mogu se prikazati kao presek dva zatvorena skupa prostora X, pa su stoga zatvoreni i u prostoru X. Ako je $F_i = F_i'$ za $i \leq m-2$, tada je familija $\{F_i\}_{i=1}^m$ zatvoreno sužavanje familije $\{U_i\}_{i=1}^m$. Kako je $X = \bigcup_{i=1}^{m-1} U_i' = \bigcup_{i=1}^{m-1} F_i' = \bigcup_{i=1}^{m-2} F_i' \cup F_{m-1}' = \bigcup_{i=1}^{m-2} F_i \cup F_{m-1} \cup F_m = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, familija $\{F_i\}_{i=1}^m$ je zatvoren pokrivač prostora X, a kako za $i \leq m-2$ važi $F_i' \subseteq U_i$ i $F_{m-1} \subseteq F_{m-1}' \cap U_{m-1} \subseteq U_{m-1}$ i $F_m \subseteq F_{m-1}' \cap U_m \subseteq U_m$, sledi da je i sužavanje pokrivača $\{U_i\}_{i=1}^m$ □

Teorema 4.3.2 (Teorema o particijama). Separabilni metrički prostor X zadovoljava nejednakost $\operatorname{ind} X \leq n \geq 0$ ako i samo ako za svaki niz $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ $n+1$ parova disjunktnih i zatvorenih podskupova prostora X postoji niz $L_1, L_2, \ldots, L_{n+1}$ zatvorenih podskupova takvih da je L_i particija skupova A_i i B_i za svako i, i važi $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je X separabilan metrički prostor za koji važi $\operatorname{ind} X \leq n \geq 0$ i $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ niz parova disjunktnih i zatvorenih podskupova prostora X. Prema prvoj teoremi separacije (2.3.6), za skupove A_1 i B_1 postoji particija L_1 takva da $\operatorname{ind} L_1 \leq n-1$. Sada, prema drugoj teoremi separacije (2.3.7), kako je L_1 separabilan potprostor metričkog prostora X, za skupove A_2 i B_2 postoji particija L_2 takva da $\operatorname{ind}(L_2 \cap L_1) \leq n-2$. Ako je L_{i-1}, $i-1 < n+1$, particija skupova A_{i-1} i B_{i-1} takva da $\operatorname{ind}(L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{i-1}) \leq n-i+1$, tada ponovo, prema drugoj teoremi separacije, postoji particija L_i između A_i i B_i takva da $\operatorname{ind}(L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_i) \leq n-i$. Za $i = n+1$ dobijamo $\operatorname{ind}(\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i) \leq -1$, odnosno važi $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$. Svaka particija je po definiciji zatvoren skup, stoga tvrđenje važi.

($\Leftarrow$) Neka separabilni metrički prostor X zadovoljava uslove teoreme. Pokazaćemo da je $\dim X \leq n$, iz čega će, prema teoremi 4.2.11 o poklapanju, slediti da je $\operatorname{ind} X \leq n$. Neka je $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$ otvoren pokrivač prostora X. Pokazaćemo da postoji sužavanje ovog pokrivača čiji je presek prazan, te će na osnovu teoreme 3.2.6 slediti $\dim X \leq n$. Prema teoremi 4.3.1 postoji zatvoreno sužavanje $\{B_i\}_{i=1}^{n+2}$ pokrivača $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$. Neka je $A_i = X \setminus U_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Tada je niz $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_{n+1}, B_{n+1})$ niz zatvorenih disjunktnih parova prostora X. Tada prema uslovu tvrđenja postoji niz zatvorenih skupova $L_1, L_2, \ldots, L_{n+1}$ takvih da je L_i particija između skupova A_i i B_i gde važi $\bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = \emptyset$. Neka su skupovi $V_i, W_i \subseteq X$ takvi da važi

$$A_i \subseteq V_i, \ \ B_i \subseteq W_i, \ \ V_i \cap W_i = \emptyset \ \text{ i } \ X \setminus L_i = V_i \cap W_i, \ \text{za } i = 1, \ldots, n+1 \tag{4.14}$$

Primetimo da

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i = \bigcup_{i=1}^{n+1}(V_i \cup W_i) = \bigcup_{i=1}^{n+1}(X \setminus L_i) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n+1} L_i = X. \tag{4.15}$$

Sada prema (4.14) i (4.15), i kako $B_{n+2} \subseteq U_{n+2}$, jer je $\{B_i\}_{i=1}^{n+2}$ je sužavanje, sledi

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i \cup (U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) = (\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i \cup U_{n+2}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} W_i \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = X. \tag{4.16}$$

Neka je $W_{n+2} = (U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i)$. Kako je, za $i \leq n+1$, $W_i \subseteq X \setminus V_i \subseteq X \setminus A_i = U_i$ i $W_{n+2} \subseteq U_{n+2}$, prema (4.16) sledi da je familija $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ sužavanje pokrivača $\{U_i\}_{i=1}^{n+2}$. Dalje, kako $V_i \cap W_i = \emptyset$, $i \leq n+1$, sledi

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i \cap (U_{n+2} \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n+1} W_i \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i = \emptyset.$$

Sada, prema teoremi 3.2.6 sledi da je $\dim X \leq n$, te prema teoremi o koincidenciji dobijamo $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Jedna od teorema koju ćemo koristiti jeste i Brauerova teorema o fiksnoj tački čija je formulacija vrlo jednostavna, ali dokaz zahteva određenu dozu kombinatornih i algebarskih argumenata. Na ovom mestu teoremu ćemo samo navesti, a zainteresovan čitalac dokaz može videti u [7], str. 411.

Teorema 4.3.3 (Brauerova teorema o fiksnoj tački). Za svako neprekidno preslikavanje $g : I^n \to I^n$ postoji tačka $x \in I^n$ takva da $g(x) = x$.

Sada ćemo pokazati teoremu koja govori o jednom geometrijskom svojstvu $n-$kocke I^n, a koja prethodi fundamentalnoj teoremi topološke dimenzije.

Teorema 4.3.4. Neka su A_i i B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ podskupovi $n-$kocke I^n definisani na sledeći način:

$$A_i = \{x \in I^n : x_i = 0\} \;\text{ i }\; B_i = \{x \in I^n : x_i = 1\}, \;\text{ gde } x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in I^n, \tag{4.17}$$

tj. A_i i B_i su suprotne strane kocke I^n. Ako je L_i particija skupova A_i i B_i, $i \leq n$, tada je $\bigcap_{i=1}^{n} L_i = \emptyset$.

Dokaz. Primetimo prvo da je svaki zatvoreni skup prostora $\mathbb{R}^n$ oblika $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, gde $F_i \in \mathcal{F}_{uob}, i \leq n$. Kako je

$$A_i = [0,1] \times \ldots \times [0,1] \times \{0\} \times [0,1] \times \ldots \times [0,1];$$
$$B_i = [0,1] \times \ldots \times [0,1] \times \{1\} \times [0,1] \times \ldots \times [0,1];$$

za $i = 1, \ldots, n$, sledi da su A_i i B_i zatvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$, a kako $A_i = I^n \cap A_i$ i $B_i = I^n \cap B_i$ sledi da su oni zatvoreni i u prostoru I^n. Jasno je da je $A_i \cap B_i = \emptyset$ za svako i, stoga je particija L_i između skupova A_i i B_i dobro definisan pojam.

Neka su otvoreni skupovi $U_i, W_i \subseteq I^n$, za svako $i \leq n$, takvi da važi

$$A_i \subseteq U_i, \quad B_i \subseteq W_i, \quad U_i \cap W_i = \emptyset \;\text{ i }\; I^n \setminus L_i = U_i \cup W_i.$$

Za $i \leq n$ definišimo preslikavanja $f_i : I^n \to I$ na sledeći način:

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d(x,L_i)}{d(x,L_i)+d(x,A_i)} + \frac{1}{2}, & \text{za } x \in I^n \setminus W_i, \\ -\frac{1}{2}\frac{d(x,L_i)}{d(x,L_i)+d(x,B_i)} + \frac{1}{2}, & \text{za } x \in I^n \setminus U_i. \end{cases}$$

Pokažimo da su ovako definisana preslikavanja f_i neprekidna. Naime, preslikavanja $g_i(x) = \frac{1}{2}\frac{d(x,L_i)}{d(x,L_i)+d(x,A_i)} + \frac{1}{2}$, i $h_i(x) = -\frac{1}{2}\frac{d(x,L_i)}{d(x,L_i)+d(x,B_i)} + \frac{1}{2}$ definisana na skupovima $I^n \setminus W_i$ i $I^n \setminus U_i$ redom su dobro definisana, jer su L_i, A_i i B_i zatvoreni skupovi, te iz $\overline{L_i} \cap \overline{A_i} = L_i \cap A_i = \emptyset$, $\overline{L_i} \cap \overline{B_i} = L_i \cap B_i = \emptyset$ sledi

$$d(x, L_i) + d(x, A_i) > 0, \quad d(x, L_i) + d(x, B_i) > 0 \quad \text{za } x \in I^n.$$

Takođe, preslikavanja $g_i(x)$ i $h_i(x)$ su i neprekidna kao kompozicija neprekidnih preslikavanja. Dalje, primetimo da su skupovi $I^n \setminus W_i$ i $I^n \setminus U_i$ zatvoreni i da važi

$$(I^n \setminus W_i) \cap (I^n \setminus U_i) = I^n \setminus (W_i \cup U_i) = I^n \setminus (I^n \setminus L_i) = L_i.$$

Kako za svako $x \in L_i$ važi $d(x, L_i) = 0$, sledi da je $g_i(x) = \frac{1}{2} = h_i(x)$, za $x \in L_i$. Prema tome, upravo smo pokazali da je za svako i preslikavanje f_i kombinacija neprekidnih preslikavanja g_i i h_i, te je f_i, prema teoremi 1.2.22, neprekidno.

Sada, primetimo da za $i \leq n$ važi

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d(x, L_i) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{L_i} = L_i, \; f_i[A_i] = \{1\} \text{ i } f_i[B_i] = \{0\}. \tag{4.18}$$

Neka je preslikavanje $f : I^n \to I^n$ definisano sa $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), x \in I^n$. Prema teoremi o dijagonalnom preslikavaju preslikavanje f je neprekidno. Pretpostavimo sada da $\bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$. Primetimo da je tada, prema (4.18), tačka $a = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2) \in I^n$ takva da $a \notin f[I^n]$. Neka je preslikavanje $p : I^n \setminus a \to B$ gde $B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup B_i)$, projekcija tačke $x \in I^n \setminus a$ kroz tačku a na ivicu kocke I^n. Može se pokazati da ovo preslikavanje jeste neprekidno. Tada je kompozicija $g(x) = p \circ f(x)$ koja preslikava I^n na I^n takođe neprekidno preslikavanje. Kako je $p[I^n \setminus \{a\}] \subseteq B$, sledi da je $g[I^n] \subseteq B$. Takođe, kako je $f_i(x) = 1$ za $x \in A_i$, sledi da je $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{i-1}(x), 1, f_{i+1}(x), \ldots, f_n(x)) \in B_i$, odnosno važi $f[A_i] \subseteq B_i$, a kako $p(x) = x$ za $x \in B$, sledi da je $g[A_i] = p[f[A_i]] = p[B_i] = B_i$. Slično, važi $g[A_i] = B_i$. Prema tome, preslikavanje g sve tačke skupa I^n preslikava na stranice $n-$kocke, pri čemu svaku stranicu na suprotnu stranicu, iz čega sledi da je $g(x) \neq x$ za $x \in I^n$, što je u kontradikciji sa Brauerovom teoremom o fiksnoj tački. Dakle, $\bigcap_{i=1}^n L_i \neq \emptyset$. □

Sada konačno imamo dovoljno argumenata da pokažemo fundamentalnu teoremu teorije dimenzije.

Teorema 4.3.5 (**Fundamentalna teorema teorije dimenzije**). Za svaki prirodan broj n važi $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Dokaz. Kako je prema teoremi 4.2.11 o poklapanju $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$, a prema primeru 2.3.9 $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \leq n$, ostaje da se pokaže da je $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \geq n$. Pretpostavimo suprotno, da je $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \leq n-1$. Ako su skupovi A_i, B_i zatvoreni disjunktni podskupovi prostora $\mathbb{R}^n$, za $i \leq n$, definisani kao u prethodnoj teoremi, tada prema teoremi o particijama 4.3.2 postoji niz zatvorenih skupova $L_1, \ldots, L_n$ gde je za svako i skup L_i particija skupova A_i

i B_i u prostoru $\mathbb{R}^n$, takav da $\bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$. Neka su U_i, W_i otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$ takvi da važi

$$A_i \subseteq U_i, \quad B_i \subseteq W_i, \quad U_i \cap W_i = \emptyset, \quad \mathbb{R}^n \setminus L_i = U_i \cup W_i. \tag{4.19}$$

Posmatrajmo sada skupove

$$U_i' = I^n \cap U_i, \quad W_i' = I^n \cap W_i,$$

$$L_i' = I^n \cap L_i = I^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus (U_i \cup W_i)) = I^n \setminus (U_i \cup W_i) = I^n \setminus (U_i' \cup W_i').$$

Primetimo prvo da su U_i', W_i' otvoreni skupovi prostora I^n. Dalje, kako $A_i, B_i \subseteq I^n$, sledi $A_i \subseteq I^n \cap U_i = U_i'$, $B_i \subseteq I^n \cap W_i = W_i'$, a kako $U_i \cap W_i = \emptyset$ sledi $U_i' \cap W_i' = \emptyset$. Takođe, $I^n \setminus L_i' = I^n \setminus (I^n \setminus (U_i' \cup W_i')) = U_i' \cap W_i'$. Prema tome, skupovi L_i', $i \leq n$, predstavljaju jednu particiju skupova A_i, B_i u prostoru I^n. Kako $\bigcap_{i=1}^n L_i' \subseteq \bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$, dolazimo do kontradikcije sa prethodnom teoremom. Dakle, $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = n$. $\square$

Na samom kraju pokazaćemo da se sve tri topološke dimenzije koje smo definisali poklapaju i na prostorima I^n, S^n i $I^{\mathbb{N}}$.

Posledica 4.3.6. Za svaki prirodan broj n važi $\operatorname{ind} I^n = \operatorname{Ind} I^n = \dim I^n = n$.

Dokaz. Kako je I^n, kao potprostor prostora $\mathbb{R}^n$, separabilni metrički prostor, prema teoremi o poklapanju 4.2.11 dobijamo $\operatorname{ind} I^n = \operatorname{Ind} I^n = \dim I^n$, a iz primera 2.3.9 $\operatorname{ind} I^n \leq n$.

Slično kao u dokazu fundamentalne teoreme za $\mathbb{R}^n$, pretpostavimo da je $\operatorname{ind} I^n \leq n-1$. Tada skupovi $A_i, B_i \subseteq I^n$ definisani u (4.17) predstavljaju niz parova uzajamno disjunktnih skupova u prostoru I^n. Prema teoremi o particijama 4.3.2 postoji niz $L_1, \ldots, L_n$ zatvorenih skupova koji redom predstavljaju particije skupova $A_i, B_i, \leq n$, takav da $\bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$, što je prema teoremi 4.3.4 nemoguće. $\square$

Posledica 4.3.7. Za svaki prirodan broj n važi $\operatorname{ind} S^n = \operatorname{Ind} S^n = \dim S^n = n$.

Dokaz. Slično kao za prostor I^n, iz teoreme o poklapanju 4.2.11 sledi $\operatorname{ind} S^n = \operatorname{Ind} S^n = \dim S^n$, a iz primera 2.3.9 $\operatorname{ind} S^n \leq n$. Pokažimo još da je $\operatorname{ind} S^n = n$.

Primetimo da je jedna baza metričkog prostora $\mathbb{R}^{n+1}$ upravo familija svih otvorenih lopti na ovom prostoru. Prema teoremi 2.1.12 lako se može pokazati da postoji prebrojiva podfamilija $\mathcal{B}$ ove baze koja je takođe baza prostora $\mathbb{R}^{n+1}$, takva da za svaki element $U \in \mathcal{B}$ važi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n$, jer $\operatorname{ind} \mathbb{R}^{n+1} = n+1$. Kako su sve otvorene lopte u $\mathbb{R}^{n+1}$ homeomorfne, one imaju istu malu induktivnu dimenziju. Pretpostavimo da je za sve $U \in \mathcal{B}$, $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = k < n$. Tada je, prema teoremi 2.1.12, $\operatorname{ind} \mathbb{R}^{n+1} \leq k+1 < n+1$, što je nemoguće. Dakle, za svako $U \in \mathcal{B}$ važi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = n$. Kako je $U \cong B(0,1)$, a na osnovu lema 2.1.3 i 2.1.4 rubovi homeomorfnih prostora su homeomorfni, sledi da $\operatorname{Fr} U \cong S^n = \operatorname{Fr} B(0,1)$. Tada direktno sledi $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = \operatorname{ind} S^n = n$. $\square$

Posledica 4.3.8. Za Hilbertovu kocku $I^{\mathbb{N}}$ važi $\operatorname{ind} I^{\mathbb{N}} = \operatorname{Ind} I^{\mathbb{N}} = \dim I^{\mathbb{N}} = \infty$.

Dokaz. Kako su prema teoremi 1.2.35 metrizabilnost i separabilnost prebrojivo multiplikativne osobine, sledi da je i prostor $I^{\mathbb{N}}$ separabilan i metrizabilan, jer je prostor I takođe separabilan i metrizabilan. Stoga, prema teoremi o poklapanju 4.2.11 važi $\operatorname{ind} I^{\mathbb{N}} = \operatorname{Ind} I^{\mathbb{N}} = \dim I^{\mathbb{N}}$. Ostaje da se pokaže da je $\operatorname{ind} I^{\mathbb{N}} = \infty$.

Za svako $n \in \mathbb{N}$ prostor $I^{\mathbb{N}}$ sadrži homeomorfnu sliku prostora I^n jer je restrikcija $f|I^n$ preslikavanja $f : I^n \to I^{\mathbb{N}}$ definisanog sa $f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$ homeomorfizam između prostora I^n i $f[I^n] \subseteq I^{\mathbb{N}}$. Pretpostavimo da je sada $\operatorname{ind} I^{\mathbb{N}} = k <$

∞. Kako je $\operatorname{ind} X = m$ topološka osobina, sledi da je $\operatorname{ind} f[I^{n+1}] = n+1$, a kako je $f[I^{n+1}] \subseteq I^{\mathbb{N}}$, prema teoremi o potprostoru za malu induktivnu dimenziju 2.1.7 sledi $n+1 = \operatorname{ind} f[I^{n+1}] \leq \operatorname{ind} I^{\mathbb{N}} = n$, što je nemoguće. $\square$

Moglo bi se reći da je teorema kompaktifikacije 4.2.5 jedna od ključnih teorema na putu ka dokazivanju fundamentalne teoreme teorije dimenzije. Ovaj rezultat objavio je Hurevič u [12] 1927. godine i time je napravio veliki pomak u razvoju teorije dimenzije. Kao što smo mogli videti u drugom poglavlju, Mengel i Urison su razvijali teoriju unutar klase kompaktnih metričkih prostora, a upravo teorema kompaktifikacije omogućila je da se mnoge teoreme pokazane u okviru kompaktnih metričkih prostora prenesu i na klasu separabilnih metričkih prostora.

Jedna od takvih teorema je i lema 4.2.7 prema kojoj važi $\dim X \leq \operatorname{ind} X$ za separabilan metrički prostor X, koju su prvo pokazali Menger u [18] i Urison u [22] za kompaktne metričke prostore a proširio Hurevič u [12] na separabilne metričke prostore. Nejednakost $\operatorname{ind} X \leq \dim X$ u klasi kompaktnih metričkih prostora pokazao je Urison u [22], dok je jednakost $\dim X = \operatorname{ind} X$ za separabilne metričke prostore pokazao Hurevič u istom radu u kom je pokazao i teoremu kompaktifikacije. Zajedno sa jednakošću $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ koju smo pokazali u prethodnoj glavi dobijamo i teoremu o poklapanju (4.2.11).

Sledeća važna teorema koju smo koristili u dokazu fundamentalne teoreme je teorema o particijama (4.3.2) putem koje je dat ekvivalentan uslov za pokrivajuću dimenziju separabilnog metričkog prostora. Dokaz ove teoreme dat je od strane Ajlenberga[1] i Ota[2] radu [6] iz 1938. godine, gde je dat i dokaz geometrijskog svojstva n-dimenzionalne kocke opisan u teoremi 4.3.4. Poslednji deo slagalice čini Brauerova teorema o fiksnoj tački koja je dokazana 1912. godine u [2].

Možemo primetiti da sam dokaz same fundamentalne teoreme dimenzije, kao i njenih posledica, jeste neuporedivo jednostavniji od npr. dokaza teoreme kompaktifikacije. Sa druge strane, bilo nam je potrebno dosta materijala kako bismo mogli da izvedemo dokaz ove teoreme koja predstavlja jednu od najvažnijih teorema teorije dimenzije. To nam upravo oslikava samu prirodu rada u matematici - nijednu teoremu nije teško pokazati ukoliko imate dovoljno znanja, volje i kreativnosti.

[1] Samuel Eilenberg (1913-1998), američki matematičar

[2] Edward Otto (1908-1986), poljski matematičar

Zaključak

U ovom radu pokazali smo tri različita načina da se pristupi problematici dimenzije topološkog prostora, pri čemu svaki od njih ima posebna svojstva i specifičnosti. Mala induktivna dimenzija se najviše ističe u separabilnim metričkim prostorima, dok velika induktivna dimenzija i pokrivajuća dimenzija dobijaju svoju prednost u odnosu na malu induktivnu dimenziju van klase ovih prostora. Sve tri dimenzije ispunjavaju zahtev koji je postavljen sa začetkom ove teorije - sve tri funkcije dodeljuju broj n euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Mnogo je rada uloženo kako bi se pokazao ovaj rezultat koji je formulisan u fundamentalnoj teoremi teorije dimenzije, a u ovom radu ilustrovan je jedan od načina da se ova teorema i dokaže. Tako smo definisali smo topološku dimenziju euklidskog prostora koja se poklapa sa vektorskom dimenzijom ovog prostora.

Teorija dimenzije se vremenom proširila i na druge klase topoloških prostora. Pokazane su mnoge druge teoreme koje navedene funkcije dimenzije zadovoljavaju, i na taj način početna ideja se raširila i na preostale topološke grane. Radoznalom čitaocu prepuštamo da samostalno istraži lepote koje matematika krije u ovom segmentu topologije, pri čemu kao izvor preporučujemo [8], [9] ili [19].

Literatura

[1] Brouwer L.E.J., Beweis der Invarianz det Dimensionenzahl, Math. Ann. 70, 1911.

[2] Brouwer L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71, 1912.

[3] Brouwer L.E.J., Über den natürlichen Dimensionsbegriff, J. Reine Angew. Math. 142, 1913.

[4] Čech E., Sur la théorie de la dimension, C. R. Acad. Paris 193, 1931.

[5] Čech E., Přispěvek k theorii dimense, Časopis Pěst. Mat. Fys. 62 1933.

[6] Eilenberg S., Otto E., Quelques propriétés caractéristiques de la théorie de la dimension, Fund. Math. 31, 1938.

[7] Engelking R., General Topology, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[8] Engelking R., Theory of Dimensions. Finite and Infinite, Heldermann Verlag, ISBN 3-88538-010-2, 1995.

[9] Fedorchuk V. V., The Fundamentals of Dimension Theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 17, General Topology I (A. V. Arkhangel'skii, L. S. Pontryagin (Eds.)) Springer-Verlag, Berlin ISBN 3-540-18178-4, 1993.

[10] Hemmingsen E., Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces, Duke Math. Journ. 13, 1946.

[11] Hurewicz W., Normalbereiche und Dimensionstheorie, Math. Ann. 96, 1927.

[12] Hurewicz W., Über das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen, Proc. Akad. Amsterdam 30, 1927.

[13] Hurewicz W., Wallman H., Dimension Theory, Princeton University Press, 1941.

[14] Kurilić M., Osnovi opšte topologije, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1998.

[15] Lebesgue H., Sur la non applicabilité de deux domains appartenant à des espaces de n et n + p dimensions, Math. Ann. 70, 1911.

[16] Lebesgue H., Sur les correspondances entre les points de deux espaces, Fundam. Math. 2, 1921.

[17] Menger K., Über die Dimensionalittät von Punktmengen I, Monatsh. für Math. und Phys. 33, 1923.

[18] Menger K., Über die Dimension von Punktmengen II, Monatsh. für Math. und Phys. 34 1926.

[19] Pears A. R., Dimension theory of general spaces, Cambridge University Press, 1975.

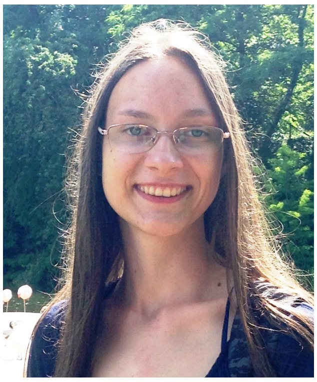
[20] Tumarkin L.A., Beitrag zur allgemeinen Dimensionstheorie, Mum. C6. 33, 1926.

[21] Urysohn P. S., Les multiplicités Cantoriennes. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 157, 1922.

[22] Urysohn P. S., Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (suite), Fund. Math. 8, 1926.

Biografija

Daria Hloda rođena je 17. septembra 1992. godine u Beogradu, Rep. Srbija. Završava osnovnu školu „Heroj Janko Čmelik“ u Staroj Pazovi kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje ekonomsko-trgovinsku školu „Vuk Karadžić“ u Staroj Pazovi, smer Poslovni administrator, koju završava 2011. godine kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Matematika. Iste završava 2014. godine sa prosekom 9.69 i upisuje master akademske studije na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Sve ispite predviđene planom i programom položila je u septembarskom roku 2016. čime je stekla uslov za odbranu ovog master rada.



Novi Sad, oktobar 2016. Daria Hloda

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Daria Hloda
AU

Mentor: Dr Aleksandar Pavlović, red. prof.
MN

Naslov rada: Topološke dimenzije
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2016.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada:: (4/69/0/0/0/0/0)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Topologija, Teorija dimenzije
ND

Ključne reči: Topološki prostor, separabilni metrički prostor, mala induktivna dimenzija, velika induktivna dimenzija, pokrivajuća dimenzija, pariticija, teorema o sumi, teorema o dekompoziciji, teorema o separaciji, kompaktifikacija, teorema o poklapanju, fundamentalna teorema teorije dimenzije
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Na početku rada uvedeni su osnovni topološki pojmovi vezani za rad u separabilnim metričkim prostorima. U toku rada uveden je pojam male induktivne, velike induktivne i pokrivajuće dimenzije topološkog prostora, njihove osnovne osobine kao i neke teoreme koje važe za ove funkcije dimenzija. Pokazane su teoreme o sumi, separaciji i dekompoziciji male induktivne dimenzije kao i neki ekvivalentni uslovi za ovu funkciju, uključujući pojam particija. Nakon uvođenja druge dve funkcije pokazana je i teorema kompaktifikacije iz koje je izvedena teorema o poklapanju sve tri funkcije dimenzija u klasi separabilnih metričkih prostora. Na kraju je pokazana fundamentalna teorema teorije dimenzije koja je izvedena pomoću jednog geometrijskog svojstva n-kocke, teoreme o particijama i Brauerove teoreme o fiksnoj tački.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 08.07.2016.
DP

Datum odbrane: Oktobar, 2016.
DO

Članovi komisije:
KO

Dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, predsednik
Dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodni-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član
Dr Aleksandar Pavlović, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master thesis
CC

Author: Daria Hloda
AU

Mentor: Aleksandar Pavlović, PhD
MN

Title: Topological Dimensions
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2016.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (4/69/0/0/0/0/0)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Topology/Topological dimensions
SD

Key words: Topological space, separable metric space, small inductive dimension, large inductive dimension, covering dimesion, partitons, sum theorem, decomposition theorem, separation theorem, compactification, coincidence theorem, fundamental theorem of dimension theory
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: At the beginning of this thesis we introduce basic theorems involved in work with separable metric spaces. Further, we introduce terms of small inductive dimension, large inductive dimension and covering dimension of topological spaces followed by some basic features and theorems that work for these dimension functions. Regarding to small inductive dimension, we are showing the sum, separation and decomposition theorems and some equivalent conditions including terms of partitions. As we introduce another two functions, we prove compactification theorem. Afterwards, the coincidence theorem of all three dimension functions in class of separable metric spaces is deduced from compactification theorem. Finally, we prove fundamental theorem of dimension theory using special geometric feature of n-cube, theorem of partitions and Brouwer fixed-point theorem.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 08.07.2016.
ASB

Defended: October, 2016.
DE

Thesis defend board:
DB

Dr Miloš Kurilić, Full profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, president
Dr Ljiljana Gajić, Full profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, member
Dr Aleksandar Pavlović, Associate profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor