



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТАМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



Дара Бошковић

**ЊУТНОВ ПОСТУПАК И ЊЕГОВЕ
МОДИФИКАЦИЈЕ ТРЕЋЕГ РЕДА
КОНВЕРГЕНЦИЈЕ**

мастер рад

Нови Сад, 2012.

Садржај

1.	Предговор	3
2.	Уводни део	5
2.1	Ознаке	5
2.2	Дефиниције	6
2.3	Теореме	8
2.4	Исак Њутн	10
3.	Њутнов поступак и његове модификације	11
3.1	Њутнов поступак	11
3.1.1	Локална конвергенција	15
3.1.2	Глобална конвергенција	17
3.2	Неке познате модификације	21
3.2.1	Халејев поступак	21
3.2.2	Поступци са специјалном функцијом H	27
3.2.3	Поступак сечице	28
3.2.4	Ралстонов поступак	31
3.2.5	Поступак Миловановића и Петковића	32
3.2.6	Поступак Херцега	34
3.3	Неке нове модификације Њутновог поступка	37
3.3.1	Оптимално диференцирање	37
3.3.2	Модификације четири поступка	40
3.3.3	Једна фамилија поступака реда 3	42

4.	Примери	44
5.	Закључак	47
6.	Биографија	49
7.	Литература	50

1. Предговор

Нумеричко решавање нелинеарних једначина је област нумеричке математике која се дуго и успешно развија. За већину нелинеарних једначина немогуће је одредити тачно решење, па се овакве једначине решавају само приближно, применом неког нумеричког поступка.

Многи итеративни поступци за нумеричко решавање нелинеарних једначина с једном непознатом откривани су више пута, [14]. Сваки пут је дат и доказ конвергенције, па за поједине поступке постоји више различитих доказа конвергенције. То је често и оправдано, пошто су претпоставке под којима се доказује конвергенција различите. Многи од поступака, као што је Њутнов, појављују се и као специјални случајеви неких поступака. У таквим случајевима се и доказ њихове конвергенције добија из доказа конвергенције целе фамилије.

У мастер раду посматрамо Њутнов поступак за решавање нелинеарне једначине са једном непознатом и његове модификације трећег реда конвергенције. Приказаћемо више поступака, њихову конвергенцију и ред конвергенције. Као оригинални резултат дајемо модификације Њутновог поступка трећег реда конвергенције.

Мастер рад је подељен у четири дела. У уводном делу дајемо ознаке дефиниције и теореме које ћемо користити у даљем раду. Други део садржи познате модификације Њутновог поступка, као што су Халејев, Ојлеров, Хансен-Патриков, поступак Островског, поступак инверзне интерполације, поступак сечице, Ралстонов поступак, поступак Миловановића и Петковића, поступак Херцега. Конвергенција већине ових поступака се може доказати и применом теорема из рада [4]. У трећем делу посматрамо неке наше модификације Њутновог поступка. Посматраћемо поступке који садрже први и други извод функције и заменом другог извода одговарајућим апроксимацијама добићемо нове поступке. За ове поступке доказујемо конвергенцију трећег реда.

У последњем делу рада приказаћемо нумеричке експерименте урађене у програмском пакету *Mathematica*. Примери су узети из наведених радова, а највише из [9], [10], [12], [13] и [15]. На крају је наведена коришћена литература.

Велику захвалност дугујем своме ментору, др Драгославу Херцегу на корисним саветима и сугестијама, као и на добронамерним примедбама, а пре свега на разумевању на менторским пословима. Имала сам велику част и задовољство да сарађујем са њим!

Исто тако, захваљујем се и члановима комисије др Наташи Крејић и др Ђорђу Херцегу.

Нови Сад, октобар 2012. године

Дара Бошковић

2. Уводни део

2.1 Ознаке

$$D = a, b$$

$C^k a, b$ - скуп k -пута непрекидно диференцијабилних функција на интервалу a, b

x_k низ бројева $x_0, x_1, \dots$

$Lip_\gamma a, b$ скуп функција које на интервалу a, b задовољавају Липшицов услов са константом γ

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

α решење једначине $f(x) = 0$, односно њој еквивалентне једначине $x = \varphi(x)$

$$C_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}, \quad j = 2, 3, \dots$$

једначина грешке $e_{k+1} = C e_k^p + O(e_k^{p+1})$,

где је $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$,

$$e_k = x_k - \alpha,$$

p је ред конвергенције итеративног поступка

C је асимптотска константа грешке

$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}$, $k = 1, 2, \dots$ је апроксимације асимптотске константе грешке

2.2 Дефиниције

Дефиниција 1. Једначина непокретне тачке је једначина облика

$$\varphi(x) = x.$$

Дефиниција 2. Број α је **непокретна тачка** функције φ ако је

$$\alpha = \varphi(\alpha).$$

Нека је x_0 произвољан број из интервала $[a, b]$. Формирајмо низ бројева $x_0, x_1, x_2, \dots$ према

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Овај низ је могуће формирати само ако $\varphi(x_k) \in [a, b]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ због дефинисаности функције φ на интервалу $[a, b]$. Очигледно, ако функција φ пресликава интервал $[a, b]$ у самог себе, важи $\varphi(x_k) \in [a, b]$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ако је низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ добро дефинисан и има граничну вредност, тј. за неко $\alpha \in [a, b]$ важи

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha,$$

онда је α решење једначине $\varphi(x) = x$, ако је функција φ непрекидна на интервалу $[a, b]$. Наиме, из $\varphi(x) \in [a, b]$, за свако $x \in [a, b]$ следи, због затворености интервала $[a, b]$, да тачка $\alpha \in [a, b]$, а због непрекидности функције φ следи

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \varphi(\alpha).$$

Дакле, ако низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ конвергира ка α , тада је његова гранична вредност, α , решење једначине $\varphi(x) = x$, а чланови тог низа апроксимирају то решење.

Овај поступак, у коме рачунамо вредности $x_0, x_1, x_2, \dots$ према $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, је пример **итеративног поступка** (поступак сукцесивних апроксимација), где је $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ **итеративно правило**, функција φ **функција корака**, а низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ је **итеративни низ**. Први члан тог низа x_0 је **почетна апроксимација** (стартна вредност). Када итеративни низ конвергира за произвољну почетну вредност из неког скупа, кажемо да **итеративни поступак конвергира**.

Дефиниција 3. Функција f задовољава **Липшицов услов** на интервалу $[a, b]$ ако постоји **ненегативна константа** γ таква да је

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|$$

за свако $x, y \in [a, b]$.

Дефиниција 4. Функција f је контракција ако задовољава Липшицов услов са константом γ мањом од 1.

Дефиниција 5. Нека је дат конвергентан низ $x_0, x_1, \dots$ чија је гранична вредност α . Кажемо да је $p \in 1, \infty$ ред конвергенције тог низа ако је

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = C,$$

а C је константа различита од нуле. Ако је $p=1$, онда додатно претпостављамо да је $C < 1$.

Такође, каже се да је ред конвергенције низа $x_0, x_1, \dots$ најмање p ако дозволимо да константа C може бити једнака нули.

Еквивалентан запис претходне дефиниције је следећи.

Дефиниција 6. Конвергентан низ $x_0, x_1, \dots$ чија је гранична вредност α , има ред конвергенције $p \in 1, \infty$ ако постоје константа C различита од нуле и природан број n_0 такви да је

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C |x_k - \alpha|^p, \quad k \geq n_0.$$

Ако је $p=1$, онда додатно претпостављамо да је $C < 1$.

Ред конвергенције се користи за упоређивање брзине конвергенције низова. Претпоставимо да имамо два конвергентна низа $x_0, x_1, \dots$ и $z_0, z_1, \dots$ са истом граничном вредношћу α и нека су њихови редови конвергенције p_1 и p_2 респективно. Ако је $p_1 > p_2$ кажемо да низ $x_0, x_1, \dots$ асимптотски конвергира брже од низа $z_0, z_1, \dots$.

Дефиниција 7. Ред конвергенције итеративног поступка једнак је реду конвергенције итеративног низа добијеног посматраним итеративним поступком.

Дефиниција 8. Кажемо да је итеративни поступак са редом конвергенције p_1 бржи од итеративног поступка са редом конвергенције p_2 ако је $p_1 > p_2$.

2.3 Теореме

Итеративни поступак се може користити и код решавања једначина облика $f(x) = 0$. Ако тражимо нуле функције f на интервалу $[a, b]$ потребно је одредити функцију φ тао да су једначине $x = \varphi(x)$ и $f(x) = 0$ еквивалентне на интервалу $[a, b]$. Услов еквивалентности ових једначина нам даје следећа теорема.

Теорема 1. *Нека је функција g ограничена на интервалу $[a, b]$ и нека је $g(x) \neq 0$ за $x \in [a, b]$. Тада су једначине $f(x) = 0$ и $x = \varphi(x)$ са $\varphi(x) = x - g(x)f(x)$ еквивалентне на интервалу $[a, b]$.*

Теорема 2. *Функција која испуњава Липшицов услов на интервалу $[a, b]$ је непрекидна у том интервалу.*

Обрнуто не важи, тј. непрекидна функција на интервалу $[a, b]$ не мора да задовољава Липшицов услов на датом интервалу.

Теорема 3. *Ако претпоставимо да је функција f диференцијабилна на интервалу $[a, b]$ и ако важи*

$$|f'(x)| \leq \gamma, \quad x \in [a, b],$$

онда је $f \in \text{Lip}_\gamma$ a, b .

Теорема 4. *[3, 8] Нека $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, где је D отворен интервал и нека f' задовољава Липшицов услов на интервалу D са константом γ . Тада за свако $x, y \in D$ важи*

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \frac{\gamma}{2}(y - x)^2.$$

Теорема 5. *[8] Нека је φ контракција на интервалу $[a, b]$ и нека пресликава тај интервал у самог себе. Тада итеративни низ $\{x_k\}$ одређен са*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

са произвољном $x_0 \in [a, b]$, конвергира ка јединственом решењу $\alpha \in [a, b]$ једначине $x = \varphi(x)$ и важи

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} |x_1 - x_0|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где је γ Липшицова константа контракције функције φ .

Априорна оцена грешке је $\frac{\gamma^k}{1-\gamma} |x_1 - x_0|$, а апостериорна је $\frac{\gamma}{1-\gamma} |x_k - x_{k-1}|$.

Често се поред априорне и апостериорне оцене грешке користи и Лагранжова оцена грешке која је заснована на Лагранжовој теореми.

Теорема 6. [8] Нека је f диференцијабилна на интервалу $[a, b]$ и нека је за $m > 0$

$$|f'(x)| \geq m, \quad x \in [a, b].$$

Ако је $\alpha \in [a, b]$, нула функције f , онда за свако $x \in [a, b]$ важи

$$|x - \alpha| \leq \frac{|f(x)|}{m}.$$

Под претпоставкама да је итеративни поступак $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ конвергентан, да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ и да је функција φ довољан број пута непрекидно диференцијабилна, важи следећа теорема, [15].

Теорема 7. [15] Ред конвергенције једнокорачног поступка

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

је позитиван цео број. Овај поступак има ред конвергенције p ако и само ако је

$$\alpha = \varphi(\alpha), \quad \varphi^j(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad \varphi^p(\alpha) \neq 0.$$

2.4 Исак Њутн

Исак Њутн (*sir Isaac Newton*, 1642-1727.) био је енглески физичар, математичар, астроном, алхемичар и филозоф природе, који је данас за већину људи једна од највећих личности у историји науке.

Рођен је на Божић 1642. у Енглеској, селу Волстропу, грофовији Линколн, у породици фармера. Још од детињства бавио се израдом разних механичких справа. У основној школи био је просечан ученик, док се на Универзитету у Кембриџу показао као један од најбољих студената. Након студија посветио се науци.



Бавећи се проблемима кретања планета размишљао је и о Земљиној тежи и тако долази да открића чувеног закона гравитације, који говори о узајамном привлачењу између два небеска тела или било која два друга тела. Њутн је на основу закона кретања, које је поставио Галилеј, формулисао опште законе механике и њих двојица се сматрају оснивачима класичне физике. Осим закона у механици, Њутн је проучавао и светлосне појаве, а увео је и нове области у математици.

У математици, Њутн дели заслуге са Готфридом Лајбницом за откриће инфинитезималног рачуна. Развио је свој метод за апроксимације нула функције и допринео проучавању разлагања функција у редове.

Главна дело Исака Њутна је *Математички принципи природне филозофије* (*Principia mathematica philosophiae naturalis*). Био је члан Краљевског научног друштва у Лондону, а затим и његов вишегодишњи председник.

Енглези су изразили захвалност Њутну овим речима:

“Човечанство се поноси тиме што је постојао такав и толики украс људског рода“.

Преминуо је 31. марта 1727. године, а на надгробној плочи је уклесан наведени цитат.

3. Њутнов поступак и његове модификације

Њутнов поступак је другог реда конвергенције и у једном итеративном кораку потребно је израчунати једну вредност функције и једну вредност њеног извода. Модификације Њутновог поступка можемо груписати у две класе. Прву чине поступци код којих је циљ да повисимо ред конвергенције уз што мање повећање броја израчунавања вредности функције и њених извода. У ову групу можемо сврстати Халејев, Ојлеров, Хансен-Патриков, поступак Островског, поступак инверзне интерполације, [4], поступак Херцега, [9]. Другу класу чине поступци код којих је циљ да се израчунавања извода замени рачунањем вредности функције у две или више тачака. У ову другу групу поступака спадају поступак поступак сечице, [8], Ралстонов поступак, [15], поступак Миловановића и Петковића, [13]. Наш оригинални допринос у којем извод замењујемо формулом за оптимално диференцирање такође се може сврстати у ову другу групу.

3.1 Њутнов поступак

Њутнов поступак је један од најпопуларнијих поступака за решавање једначина. У основи Њутновог поступка је апроксимација функције f , чије се нуле траже линеарном функцијом. Ова апроксимација се посматра у близини нуле која се тражи. Као апроксимациона функција се користи линеарна функција чији график је тангента функције f у изабраној тачки $(x_0, f(x_0))$. Пресек x_1 тангенте са x осом се посматра као приближна вредност нуле функције f , а затим се тачки $(x_1, f(x_1))$ поставља нова тангента итд.

Једначина тангенте у тачки $(x_0, f(x_0))$ је

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ако је $f'(x_0) \neq 0$, наредна апроксимација x_1 се добија као решење једначине $y(x) = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ако је x_k k -та апроксимација решења посматране једначине, следеће апроксимације се добијају по итеративном правилу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Њутнов поступак се може посматрати као поступак облика $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где је

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

под претпоставком да је $f'(x) \neq 0$ на интервалу у ком се тражи решење једначине $f(x) = 0$. Дакле, све теореме које се односе на поступак

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

можемо применити и на Њутнов поступак. При томе се Липшицова константа γ може одредити из

$$\gamma \geq \max\{|\varphi'(x)|: x \in [a, b]\}$$

како је

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

следи

$$\gamma \geq \max\left\{\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right|: x \in [a, b]\right\}.$$

Њутнов поступак се може посматрати и као посебан случај итеративног поступка

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

са

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} G(x),$$

и $G(x) = 1$.

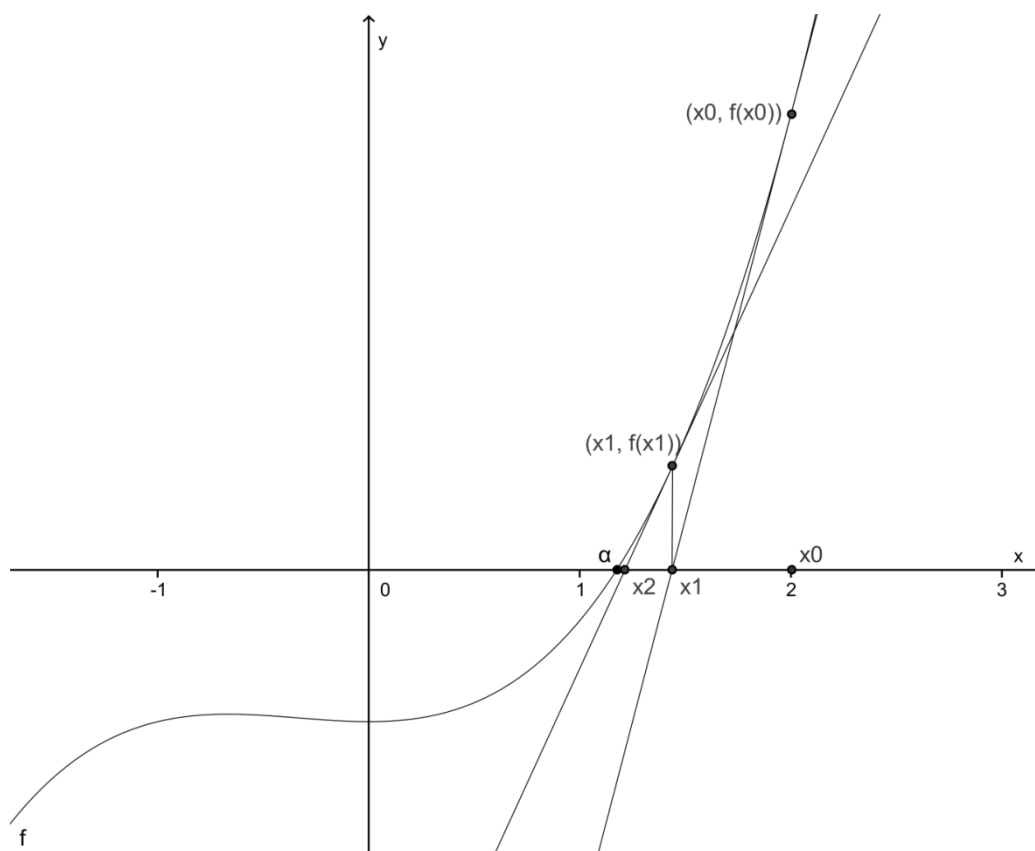
Да би се Њутнов поступак могао спровести, потребно је да први извод f' постоји у свим тачкама посматраног интервала и да је $f'(x) \neq 0$ за свако x из тог интервала.

Ако је први извод f' непрекидна функција и ако је $f'(x) \neq 0$ на посматраном интервалу, онда је f' или позитивна или негативна функција тј. важи $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ за x из посматраног интервала. Као последица овога добијамо да функција f може имати највише једну нулу у посматраном интервалу.

Следећи пример илуструје Њутнов поступак.

Пример1. Нека је дата функција $f(x) = x^3 + x^2 - 3$. Прикажимо на датој функцији Њутнов поступак за решавање једначине $f(x) = 0$.

Пре него што почнемо да тражимо нулу дате функције на слици 1. је дат графички приказ функције $f(x)$.



Слика 1.

Видимо да је једини корен ове функције на интервалу $(1, 2)$. Посматрајмо тангенту задате функције која садржи тачку $(x_0, f(x_0))$, тј. $(2, f(2))$. Једначина те тангенте је дата са

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ тј.}$$

$$y(x) = f(2) + f'(2)(x - 2).$$

Као апроксимацију решења α једначине $f(x) = 0$ узимамо решење x_1 једначине $y(x) = 0$.

То решење се израчунава из

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

и гласи

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

Под претпоставком да је $f'(x_0) \neq 0$. За изабрано $x_0 = 2$ на овај начин добијамо да је $x_1 = 1.4375$. Како је сада

$$f(x_1) = 2.03687 \text{ и } f'(x_1) = 9.07422 \neq 0.$$

Описани поступак можемо поновити са тангентом на функцију f у тачки $(x_1, f(x_1))$. Тако добијамо

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.21303 \dots$$

Јасно је да овај поступак можемо да понављамо све док је $f'(x_k) \neq 0$. После четвртог итеративног корака добија се табела 1.

k	x_k	$f(x_k)$
0	2.000000	9.000000
1	1.437500	2.036865
2	1.213033	0.256363
3	1.175555	0.006463
4	1.174560	$4.47907 \cdot 10^{-6}$

Табела 1.

3.1.1 Локална конвергенција

Теорема 8. (Локална конвергенција, [3, 8]) Нека су функција f и њен извод f' дефинисани на интервалу $[a, b]$ и нека f' задовољава Липшицов услов на истом интервалу. Нека је за неко позитивно m

$$|f'(x)| \geq m, \quad x \in [a, b]$$

и нека једначина $f(x) = 0$ има решење $\alpha \in (a, b)$. Тада постоји такво $\rho > 0$ да је $(\alpha - \rho, \alpha + \rho) \subset [a, b]$ и да је за свако $x_0 \in (\alpha - \rho, \alpha + \rho)$ итеративни низ

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

добро дефинисан и да конвергира ка α и важи

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_k - \alpha|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказ. Нека је $q \in (0, 1)$ и нека је τ највећи број за који важи $\alpha - \tau, \alpha + \tau \subset D$. Дефинишимо

$$\rho = \min \left\{ \tau, \frac{2qm}{\gamma} \right\}$$

и узмимо x_0 тако да важи $|x_0 - \alpha| < \rho$. Треба показати да важи

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq q |x_k - \alpha| < \rho,$$

што значи да је низ $\{x_k\}$ добро дефинисан (сви чланови тог низа припадају интервалу $(\alpha - \rho, \alpha + \rho)$) и да је конвергентан са граничном вредношћу α , јер из предходне релације следи

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq q |x_k - \alpha| \leq q^2 |x_{k-1} - \alpha| \leq \dots \leq q^{k+1} |x_0 - \alpha|,$$

односно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+1} - \alpha| = 0.$$

Како је $f(\alpha) = 0$ из итеративног правила добијамо

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \alpha - \frac{f(x_k) - f(\alpha)}{f'(x_k)},$$

тј.

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{1}{f'(x_k)} (f(\alpha) - f(x_k) - f'(x_k)(\alpha - x_k)).$$

Сада на основу Теорема 4 добијамо

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2|f'(x_k)|} |x_k - \alpha|^2.$$

На основу претпоставке о првом изводу имамо да је

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_k - \alpha|^2.$$

Релацију $|x_{k+1} - \alpha| \leq q|x_k - \alpha| < \rho$ доказаћемо индукцијом.

За $k = 0$ имамо

$$|x_0 - \alpha| \leq \rho \leq \frac{2qm}{\gamma}.$$

Како је $q \in (0, 1)$, из релације

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_k - \alpha|^2$$

добијамо

$$|x_1 - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_0 - \alpha|^2 \leq \frac{q}{\rho} |x_0 - \alpha|^2 \leq \frac{q}{\rho} \rho |x_0 - \alpha| = q|x_0 - \alpha| \leq q\rho < \rho.$$

Дакле важи $|x_1 - \alpha| \leq q|x_0 - \alpha| < \rho$.

Претпоставимо да важи

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq q|x_k - \alpha| < \rho.$$

Докажимо да важи $|x_{k+2} - \alpha| \leq q|x_{k+1} - \alpha| < \rho$. Из

$$|x_{k+2} - \alpha| \leq \frac{\gamma}{2m} |x_{k+1} - \alpha|^2 < \frac{q}{\rho} \rho |x_{k+1} - \alpha| = q|x_{k+1} - \alpha| < q\rho < \rho,$$

следи

$$|x_{k+2} - \alpha| \leq q|x_{k+1} - \alpha| < \rho$$

што је и требало доказати. ■

3.1.2 Глобална конвергенција

Теорема 9. (Глобална конвергенција) Нека је $D = [a, b]$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in C^2(D)$. Ако су задовољени следећи услови

$$f(a)f(b) < 0,$$

$$f'(x) \neq 0, \quad x \in D,$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ или } f''(x) \geq 0 \text{ за } x \in D,$$

$$x_0 \in D, f(x_0)f''(x_0) > 0,$$

онда Њутнов итеративни поступак конвергира ка јединственом решењу α једначине $f(x) = 0$ и за $k = 0, 1, 2, \dots$ важи следеће

$x \in D$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$	$x_k \geq x_{k+1}$	$x_k \leq x_{k+1}$
$f''(x) < 0$	$x_k \leq x_{k+1}$	$x_k \geq x_{k+1}$

Доказ. На основу претпоставки закључујемо да једначина $f(x) = 0$ има тачно једно решење у посматраном интервалу. Означимо га са α . Посматрајмо сада случај $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$, за $x \in [a, b]$. У преостала три случаја се поступа аналогно.

Како је $f'(x) > 0$ имамо да функција f расте на интервалу D , па мора да буде $f(a) < 0$. Из интервала $[a, b]$, где је α једина нула из интервала D узимамо произвољно x_0 .

Према Лагранжовој теореме имамо

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(\theta)(\alpha - x_0)$$

са неким $\theta \in (\alpha, x_0)$. Из ове релације добијамо

$$\alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\theta)}.$$

Због $f''(x) > 0$ функција f' је растућа, па из $x_0 > \theta$ следи $f'(x_0) > f'(\theta)$. Како је и $f(x_0) > 0$, имамо

$$\alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\theta)} < x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1.$$

Значи добили смо $\alpha < x_1 < x_0$.

Како је сада $f(x_1) > 0$, поступајући као у претходном случају добијамо $\alpha < x_2 < x_1$ итд. Итеративни низ који смо добили овим поступком $x_0, x_1, x_2, \dots$ је монотono опадајући и ограничен, па има граничну вредност. Због непрекидности функција f и f' следи да је та гранична вредност нула функције f , тј. једнака је са α . ■

Пример 2. Нека је $f(x) = x \sin x + \cos x$ и $D = [2, 3]$. Њутновим поступком одредимо нулу функције f са грешком мањом од 10^{-9} .

Прво ћемо проверити да ли су задовољени услови предходне теореме. Очигледно је да је $f \in C^2(D)$.

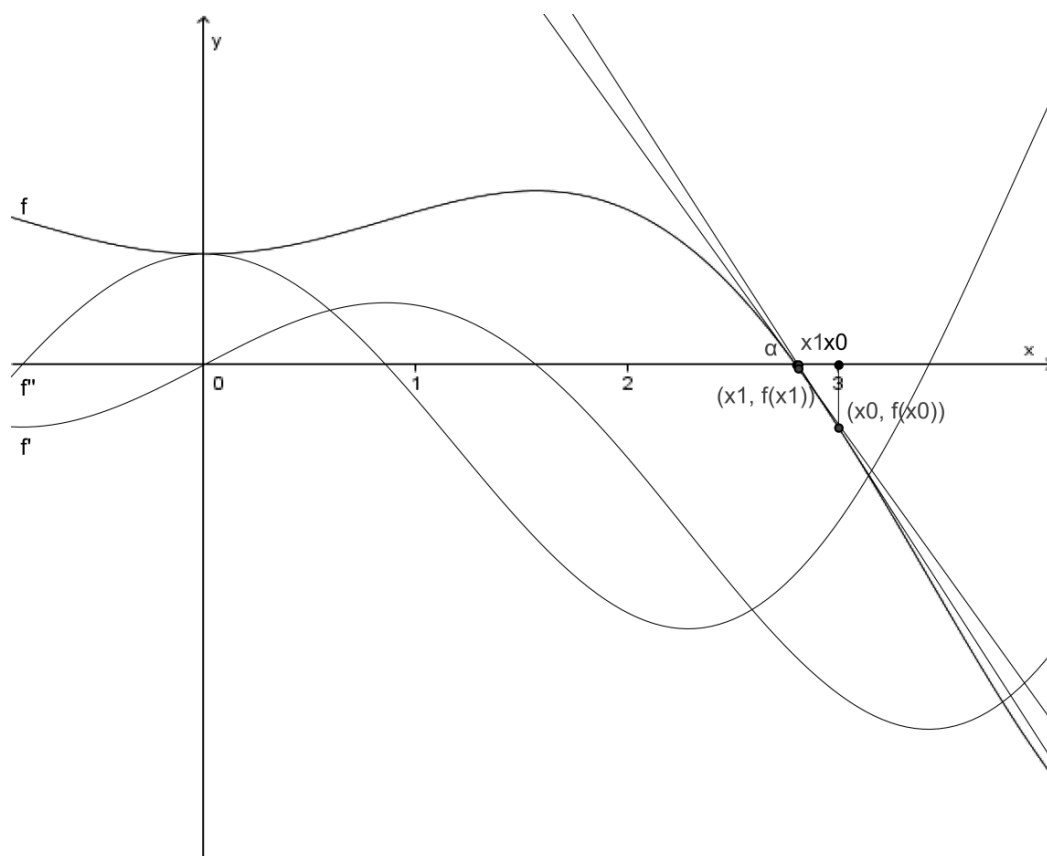
Како је $f(2) = 1.4$ и $f(3) = -0.57$ следи да је $f(2)f(3) < 0$,

$f'(x) = x \cos x < 0, x \in D$,

$f''(x) = \cos x - x \sin x < 0, x \in D$,

За $x_0 = 3$ важи $f(x_0)f''(x_0) = f(3)f''(3) > 0$.

Како су испуњени сви услови предходне теореме следи да Њутнов итеративни поступак са $x_0 = 3, x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots$ конвергира ка јединственом решењу α једначине $f(x) = 0$ на интервалу $[2, 3]$. Графичи приказ овог поступка дат је на слици 2.



Слика 2.

Имамо да је $|f'(x)| \geq |f'(2)| = 0.83 > 0.8 = m$, за $x \in D$, па на основу Лагранжове оцене грешке следи

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тражимо x_k тако да важи $\frac{|f(x_k)|}{m} \leq 10^{-9}$.

Следећа табела садржи чланове итеративног низа који је одређен наведеним Њутновим поступком.

k	x_k	$\frac{ f(x_k) }{m}$
0	3.0000	0.708291000
1	2.80921	0.035801900
2	2.79843	0.000135899
3	2.79839	2.00339×10^{-9}

Табела 2.

Дакле за нулу α функције f узимамо вредност апроксимације $x_2 = 2.79843$.

Пример 3. Нека је $f(x) = x^2 - 13$. Тада је позитивно решење једначине $f(x) = 0$ квадратни корен броја 13. Њутнов поступак у овом случају гласи

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 13}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{13}{x_k} \right).$$

Очигледно је да за позитивно x важи

$$f'(x) = 2x > 0 \text{ и } f''(x) = 2 > 0.$$

Бирајући a и b тако да важи $0 < a < \sqrt{13} < b$ услови теореме о глобалној конвергенцији биће испуњени ако је $x_0 \in [\sqrt{13}, b)$. Како су услови наведене теореме испуњени, следи да низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ одређен Њутновим итеативним поступком конвергира ка $\sqrt{13}$. Нека је $x_0 = 4$, тада добијамо табелу 3.

k	x_k	$f(x_k)$
0	4.00000	3.00000
1	3.62500	0.140625
2	3.60560	0.000376226
3	3.60555	2.72196×10^{-9}
4	3.60555	-1.77636×10^{-15}
5	3.60555	-1.77636×10^{-15}

Табела 3.

Како је $x_4 = x_5$ са наведеним бројем цифара, па као коначну вредност за $\sqrt{13}$ узимамо вредност апроксимације x_4 тј. $\sqrt{13} \approx 3.60555$.

3.2 Неке познате модификације

3.2.1 Халејев поступак

Године 1694. Халеј је објавио рад [6] на латинском језику, где представља нову методу за рачунање корена полинома. Халеј генерализује итерациону формулу за израчунавање кубног корена неког броја и тако добија итерацију за рачунање корена полинома. Описаћемо у модерној математичкој нотацији Халејев оригинални рад.

Нека је $f \in C^2$ и x_k апроксимација нуле α функције f . Заменимо једначину $f(x) = 0$ са $T(h) = 0$, где је T Тејлоров полином другог степена функције f

$$T(h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2}h^2$$

и $h = x - x_k$. Ако је x_k добра апроксимације нуле α функције f , тада занемаривањем h^2 , добијамо из

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)h$$

Њутнову корекцију

$$h = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

и нову апроксимацију

$$x_{k+1} = x_k + h = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Решавајући једначину $T(h) = 0$ добијамо

$$h = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}h}.$$

Ако h у имениоцу заменимо Њутновом корекцијом, добијамо Халејеву корекцију

$$h = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{f''(x_k)}{2} \left(-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)}.$$

и Халејев итеративни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{2}{2 - \frac{f(x_k) f''(x_k)}{f'(x_k)^2}}.$$

У свом раду Халеј ову формулу назива рационална формула.

Халеј такође разматра Ојлерову корекцију добијену решавањем једначине $T_h = 0$

$$h = \frac{-f'(x_k) \pm \sqrt{f'(x_k)^2 - 2 f(x_k) f''(x_k)}}{f''(x_k)}$$

и итеративни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2t(x_k)}}.$$

Ову формулу Халеј назива ирационална формула.

Халејев поступак припада класи једнокорачних поступака без меморије, [16] облика

$$x_{k+1} = F(x_k).$$

Посматраћемо неколико познатих поступака који се могу записати у облику једнокорачног поступка без меморије са функцијом корака у облику

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} G(x),$$

где је G функција са одређеним особинама.

Претпоставимо да је α јединствена нула функције f и да функције f и G имају довољан број непрекидних извода у некој околини α . На основу Теорема 7 итеративни поступак $x_{k+1} = F(x_k)$ је другог реда конвергенције ако је

$$F'(\alpha) = 0 \text{ и } F''(\alpha) \neq 0$$

Нека је $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Тада имамо да је $u'(x) = 1 - t(x)$ па следи да је

$$u(\alpha) = 0 \text{ и } u'(\alpha) = 1.$$

Диференцирањем функције F добијамо

$$F'(x) = 1 - u'(x)G(x) - u(x)G'(x)$$

и $F'(\alpha) = 1 - G(\alpha)$.

Теорема 10. Итеративни поступак $x_{k+1} = F(x_k)$, при чему је

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}G(x), \text{ је другог реда ако и само ако је } G(\alpha) = 1.$$

У случају када је $G(x) = 1$ имамо Њутнов поступак за једначину $f(x) = 0$.

Аналогно, користећи се резултатом Теорема 7 доказује се и следећа теорема.

Теорема 11. Итеративни поступак $x_{k+1} = F(x_k)$, при чему је

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}G(x), \text{ је трећег реда ако и само ако је } G(\alpha) = 1 \text{ и}$$

$$G'(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Доказ. Посматрани итеративни поступак је трећег реда ако и само ако је

$$F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0, \quad F'''(\alpha) \neq 0$$

Како је $F'(\alpha) = 1 - G(\alpha)$ и

$$F''(x) = -u''(x)G(x) - 2u'(x)G'(x) - u(x)G''(x).$$

следи да је

$$u''(x) = -t'(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x) \left(\frac{2f''(x)^2}{f'(x)^3} - \frac{f'''(x)}{f'(x)^2} \right),$$

па је

$$u''(\alpha) = -\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = -t'(\alpha)$$

и

$$F''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}G(\alpha) - 2G'(\alpha).$$

Очигледно, мора бити $G(\alpha) = 1$ и $G'(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ да би итеративни поступак био бар реда три. Ако је $F'''(\alpha) \neq 0$, поступак је реда три. ■

Претпоставке у претходним теоремама траже познавање функције F и њених извода у нули функције f . Како то није лако обезбедити, посматра се следећи избор функције G

$$G(x) = H(t(x))$$

са произвољном функцијом H за коју треба да важи

$$G(\alpha) = H(0)$$

и

$$G'(\alpha) = H'(0)t'(\alpha).$$

Због тога ћемо претпоставке Теорема 11 једноставније записати на следећи начин

$$H(0) = 1 \text{ и } H'(0) = \frac{1}{2}.$$

На основу овог разматрања долазимо до следеће теореме.

Теорема 12. Нека је α јединствена нула функције F и H произвољна функција за коју важи да је $H(0) = 1$, $H'(0) = \frac{1}{2}$ и $|H''(0)| < \infty$. Итеративни поступак $x_{n+1} = F(x_n)$ са функцијом F дефинисаном на следећи начин

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} H(t(x))$$

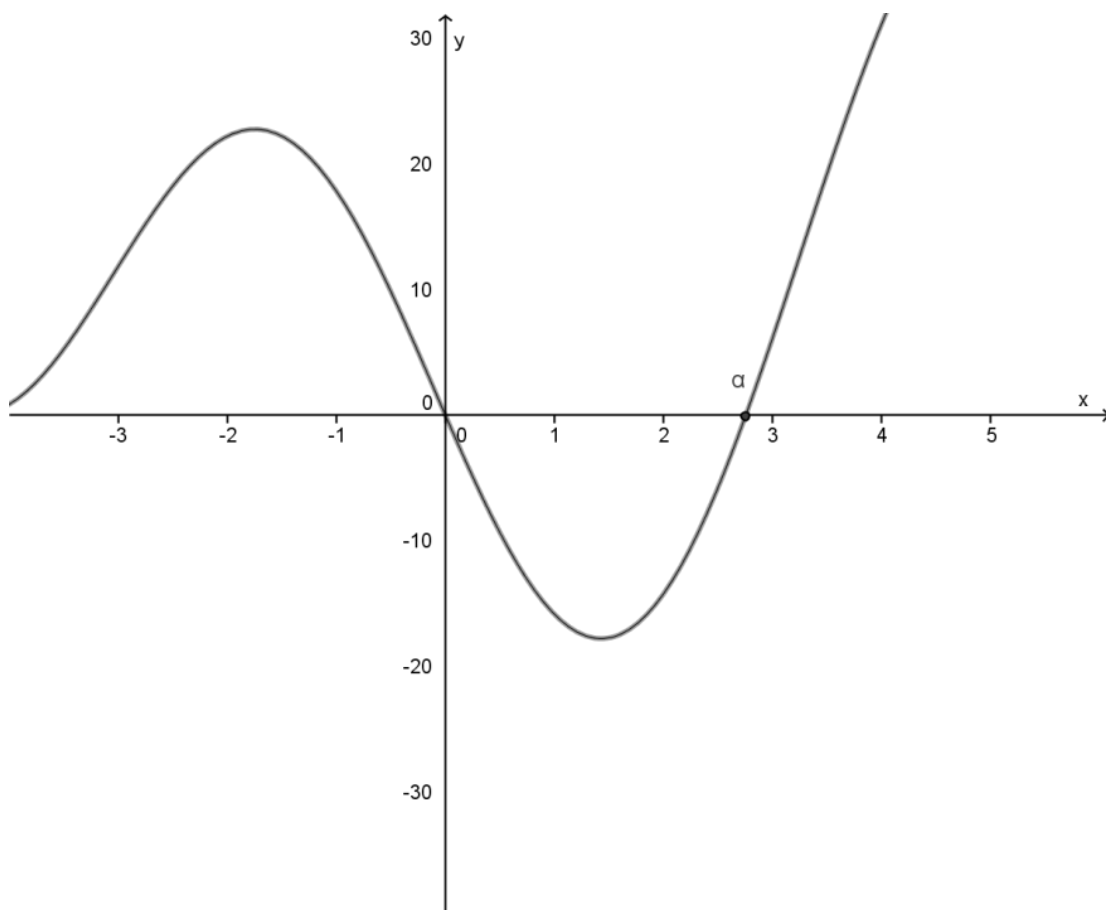
где је

$$t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

је трећег реда.

Пример 4. Функција f има нулу на интервалу D . Халејевим поступком израчунајмо нулу функције $f(x) = x^2 - 20\sin x$, ако је $D = [2.7, 2.8]$.

Како се и види на слици 3. једна од нула функције f се налази у интервалу $[2, 3]$.



Слика 3.

Нека је $x_0 = 2.7$. Користећи Халејев итеративни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \cdot \frac{2}{2 - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}}$$

при чему је $f'(x_k) \neq 0$, добијамо следећу таблицу.

k	x_k	$f(x_k)$
0	2.70000	-1.257600000
1	2.75292	-0.000627026
2	2.75295	-6.83897×10^{-14}
3	2.75295	-4.44089×10^{-15}
4	2.75295	-4.44089×10^{-15}

Табела 4.

Како је $x_3 = x_4$, следи да за нулу функције f узимамо вредност апоксимације x_4 , тј. $\alpha = 2.75295$.

3.2.2 Поступци са специјалном функцијом H

На основу претходне теореме утврђују се да су поступци које наводимо трећег реда конвергенције. За сваки од тих поступака дајемо функцију H и њен Тејлоров развој, [4]. Тејлоров развој показује, на извешан начин, сличност ових функција.

3.2.2.1 Халејев поступак

$$H(t) = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \dots$$

3.2.2.2 Ојлеров поступак

$$H(t) = 2(1 + \sqrt{1 - 2t})^{-1} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 + \dots$$

3.2.2.3 Хансен-Патриков поступак

$$H(t) = (a + 1) \left(a + \sqrt{1 - (a + 1)t}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{a + 3}{8}t^2 + \dots,$$

a је реалан број.

3.2.2.4 Поступак Островског

$$H(t) = (1 - t)^{-0,5} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + \dots$$

3.2.2.5 Поступак инверзне интерполације

$$H(t) = 1 + \frac{1}{2}t.$$

3.2.3 Поступак сечице

Поступак сечице се може посматрати као модификација Њутновог итеративног поступка

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

када се први извод функције замењује првим изводом интерполационог полинома првог степена. Интерполациони полином функције f одређен тачкама $x_k, f(x_k)$ и $x_{k-1}, f(x_{k-1})$, под претпоставком $x_k \neq x_{k-1}$ и $f(x_k) \neq f(x_{k-1})$ је

$$p(x) = f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} (x - x_{k-1})$$

где x_{k-1}, x_k представљају две узастопне апроксимације решења $f(x) = 0$ а $f[x_{k-1}, x_k]$ је подељена разлика првог реда. Сада је

$$p'(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

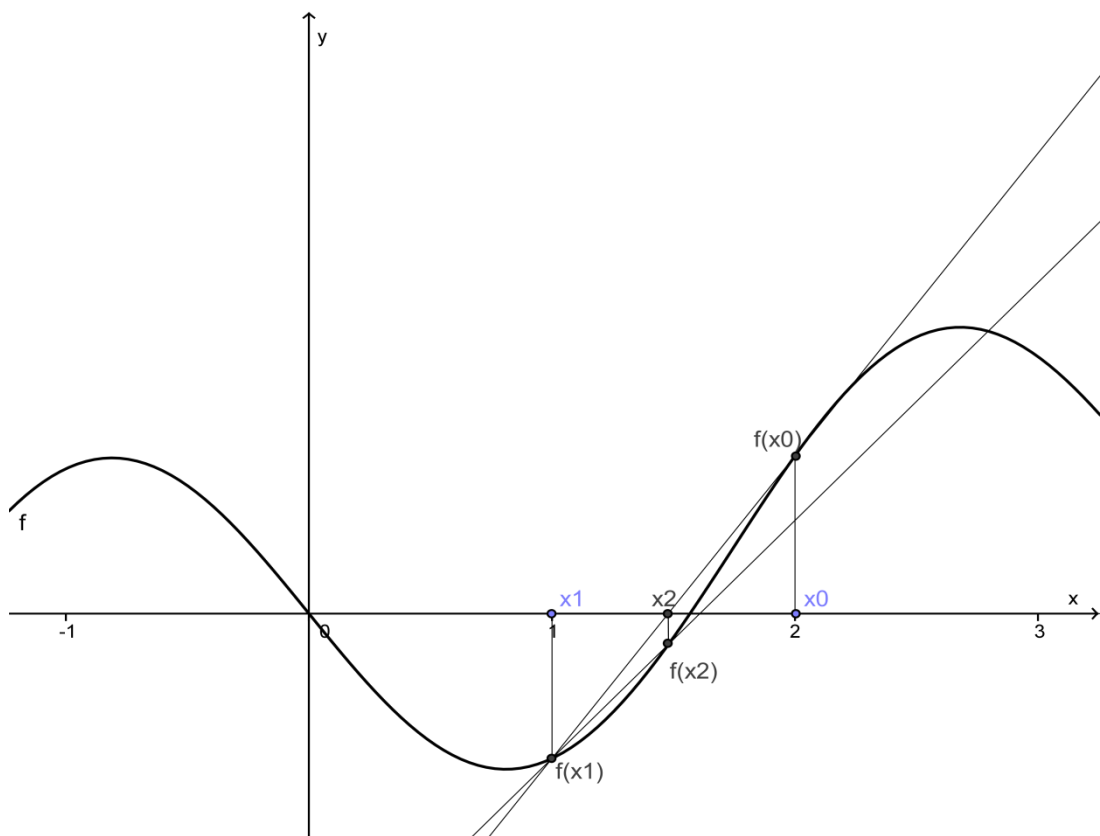
Замењујући $f'(x_k)$ са $p'(x_k)$ добијамо итеративни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Овај поступак називамо поступком сечице. Геометријско тумачење поступка сечице дато је на следећи начин. Посматрајмо праву која садржи тачке $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$. Она је дата следећом једначином

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} (x - x_k).$$

Пресек праве y и апсцисне осе је решење једначин $y = 0$ и то је управо x_{k+1} и ту вредност посматрамо као приближну вредност решења α једначине $f(x) = 0$. Кроз тачке $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ и $(x_k, f(x_k))$ постављамо сечицу и тако добијамо тачку x_{k+2} као нову апроксимацију за α . Понављајући описани поступак одређивања пресека правих кроз тачке $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, (са датим x_0 и x_1) са апсисом осом, добићемо низ $\{x_k\}$. Овај низ под одређеним условима конвергира ка решењу једначине $f(x) = 0$. Графички приказ овог поступка је дат на слици 5.



Слика 5.

Теореме о локалној и глобалној конвергенцији овога поступка сличне су одговарајућим теоремама за Њутнов поступак. Овде наводимо без доказа само теорему о локалној конвергенцији.

Теорема 13. [8] Нека је $f \in C^2(D)$ таква да је

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad x \in D.$$

Ако једначина $f(x) = 0$ има решење $\alpha \in D$, онда постоји $\eta > 0$ такво да за све $x_0, x_1 \in D_\eta(\alpha)$, $x_0 \neq x_1$, где је

$$D_\eta(\alpha) = \{x \in D: |x - \alpha| \leq \eta\}$$

поступак сечице конвергира ка α и важе оцене

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{2m}{M_2} q^{F_k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

и

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m} |x_{k-1} - x_k| |x_{k-2} - x_k|, \quad k = 2, 3, \dots$$

где је

$$M_2 \geq |f''(x)|, \quad x \in D, \quad q = \frac{M_2}{2m} \eta < 1,$$

а F_k су Фибоначијеви бројеви,

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

или се поступак прекида због $f(x_k) = 0$.

Како за Фибоначијеви бројеви важи

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

број $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1}$ постаје доминантан за велико k ; па се може показати да је ред

конвергенције поступка сечице $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$, [15].

3.2.4 Ралстонов поступак

У књизи [15] предложена је модификација Њутновог поступка тако што се у модификацији заснованој на инверзној интерполацији израчунавање другог извода замењује израчунавањем израза у којем фигуришу само вредности функције. Наиме, посматра се итеративни поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{t(x_k)}{2} \right)$$

који је трећег реда конвергенције. У [15] је други извод $f'' x_k$ у $t x_k$ замењен са

$$\tilde{f}'' x_k = -6 \frac{f x_k - f x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + 2 \frac{2 f' x_k + f' x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Тако је добијен поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{f(x_k) \tilde{f}'' x_k}{2 f'(x_k)^2} \right).$$

Овај поступак, као и Њутнов садржи само функцију и њен први извод. Међутим, за израчунавање новог члана итеративног низа потребно је познавање претходног члана низа. Са изабраним x_0 може се израчунати x_1 Њутновим поступком

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

али се x_1 може бирати произвољно.

Доказ конвергенције овог поступка дат је у [15]. Тамо је доказано да је ред конвергенције овог поступка $1 + \sqrt[3]{3}$. За асимптотску константу грешке, закључено је, али не и доказано, да је $|12C_4|^{1/\sqrt[3]{3}}$.

3.2.5 Поступак Миловановића и Петковића

У раду [13] посматра се модификација истог поступка као и у [15]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{f(x_k) f''(x_k)}{2 f'(x_k)^2} \right).$$

И овде се други извод замењује апроксимацијом у којој се појављују само функција и њен први извод, са циљем да се добије конвергенција реда већег од 2.

Апроксимацијом

$$f''(x_n) \sim \frac{f'(x_n + \varepsilon_n) - f'(x_n)}{\varepsilon_n}$$

у посматраном поступку, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ када $n \rightarrow +\infty$, добијамо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2}{2 f'(x_n)^3} \frac{f'(x_n + \varepsilon_n) - f'(x_n)}{\varepsilon_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Ако претпоставимо да је решење α једначине $f(x) = 0$ изоловано у интервалу $[a, b]$ и да је $x_0 \in (a, b)$, почетна апроксимација за α , изабрана тако да итеративни низ дефинисан модификованим итеративним поступком конвергира ка α када $n \rightarrow +\infty$, онда можемо доказати следећу теорему.

Теорема 14. Нека је $f \in C^3[a, b]$ и нека је $\varepsilon_n = x_n - x_{n-1}$. Тада итеративни поступак

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2}{2 f'(x_n)^3} \frac{f'(x_n + \varepsilon_n) - f'(x_n)}{\varepsilon_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

има ред конвергенције $1 + \sqrt{2}$ тј.

$$|x_{n+1} - \alpha| \sim A |x_n - \alpha|^{1+\sqrt{2}}, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

где је

$$A = \left| \frac{f'''(\alpha)}{4 f'(\alpha)} \right|^{1+\sqrt{2}}.$$

Ралстонов итеративни поступак има већи ред конвергенције од поступке из претходне теореме. Међутим, Ралстонов поступак тражи више израчунавања од поступка Миловановића и Петковића.

Ако се у поступку Миловановић&Петковић узме $\varepsilon_n = f(x_n)$ добија се нова модификација Њутновог поступка чији је ред 3. У раду [13] доказана је следећа теорема.

Теорема 15. *Нека је $f \in C^3[a, b]$ и нека је $\varepsilon_n = f(x_n)$. Тада итеративни поступак*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2}{2f'(x_n)^3} \frac{f'(x_n) + f''(x_n) - f'''(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

има ред конвергенције три, тј.

$$|x_{n+1} - \alpha| \sim B|x_n - \alpha|^3, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

где је

$$B = \frac{1}{12f'(\alpha)^2} \cdot |3f'(\alpha)^2 \cdot f'''(\alpha) + 2f'(\alpha) \cdot f''(\alpha) - 6f''(\alpha)^2|.$$

3.2.6 Поступак Херцега

У раду [9] приказана је фамилија поступака трећег реда конвергенције за решавање нелинеарних једначина. Показано је да овој фамилији припадају неки већ познати поступци: Халејев поступак и поступак из рада [2] и супер Халејев поступак из рада [5].

Фамилија итеративних поступака за израчунавање једноструког решења нелинеарних једначина $f(x) = 0$ посматра се под претпоставкама

$$f \in C^2[a, b], \quad f'(x) < 0, \quad x \in [a, b], \quad f(a) > 0 > f(b).$$

Под овим претпоставкама функција f има једну и само једну нулу $\alpha \in [a, b]$.

Прво је посматран Њутнов поступак за израчунавање апроксимације за α

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

за неку одговарајућу почетну вредност x_0 . Ако је $f''(x) > 0$ или $f''(x) < 0$ за $x \in [a, b]$, бирамо x_0 тако да је $f'(x_0) f''(x_0) > 0$, тј. $x_0 \in [a, \alpha]$ или $x_0 \in [\alpha, b]$. Њутнов поступак конвергира квадратно у некој околини од α ако је $f'(\alpha) \neq 0$, Теорема 9.

Халејев класичан поступак

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f(x_n) f''(x_n)}{2 f'(x_n)}},$$

може се записати и на следећи начин

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{2}{2 - t(x_n)},$$

где је

$$t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Под претпоставкама које су сличне оним које постављамо за Њутнов поступак, у раду [9] дат је доказ глобалне монотоне конвергенције трећег реда за једну фамилију поступака. Фамилија поступака се дефинише на следећи начин.

Нека је

$$x_{n+1} = F_k x_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где су функције F_k облика

$$F_k x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi_k(t(x)), \quad k = 1, 2, \dots$$

са

$$t(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

и функцијама φ_k дефинисаним са

$$\varphi_0(s) = 1, \quad \varphi_k(s) = \frac{2}{2 - s \cdot \varphi_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функције φ_k се лако рачунају. Наводимо првих осам $\varphi_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2-s}, \quad \frac{2-s}{2(1-s)}, \quad \frac{4-4s}{4-6s+s^2}, \quad \frac{4-6s+s^2}{4-8s+3s^2}, \quad -\frac{2(4-8s+3s^2)}{-8+20s-12s^2+s^3} \\ & \frac{-8+20s-12s^2+s^3}{4(-2+6s-5s^2+s^3)}, \quad -\frac{8(-2+6s-5s^2+s^3)}{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}, \quad \frac{16-56s+60s^2-20s^3+s^4}{16-64s+84s^2-40s^3+5s^4} \end{aligned}$$

Лако се види да су Њутнова и Халејева итеративна функција специјални случајеви са F_0 и F_1 респективно. Њутнов поступак не припада овој фамилији поступака трећег реда, али се може посматрати као гранични случај када $s \rightarrow 0$.

У раду [2] конструисан је нови поступак, који је заснован на Њутновом поступку и дат је са

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2 f'(x_n)^3 - 2 f(x_n) f'(x_n) f''(x_n)}.$$

После једноставних трансформација овај поступак се може записати и на следећи начин

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{2 - t(x_n)}{2 - t(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \varphi_2(t(x_n)).$$

То значи да је овај метод члан посматране фамилије са

$$F_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \varphi_2(t(x)).$$

3.3 Неке нове модификације Њутновог поступка

У радовима [15] и [13] посматра се модификација истог поступка

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{f(x_k) f''(x_k)}{2 f'(x_k)^2} \right).$$

Други извод замењује се апроксимацијом у којој се појављују само функција и њен први извод, са циљем да се добије конвергенција реда већег од 2.

3.3.1 Оптимално диференцирање

У раду [1] дата је оптимална апроксимација првог извода, тј. апроксимација првог извода трећег реда

$$f'(x) \approx \frac{32 f(x+3h) - 27 f(x+2h) - 5 f(x+h) + 4 f(x)}{120h} + \frac{4}{3} \frac{f^{(iv)}(\tau)}{4!} h^3,$$

где је τ неке вредност из интервала који садржи $x, x+3h, x+2h, x+h$ и на којем је функција f четири пута непрекидно диференцијабилна.

Користећи оптималну апроксимацију првог извода са $h = f'(x)$, добијамо следећу апроксимацију другог извода

$$f''(x) \approx \frac{32 f'(x+3h) - 27 f'(x+2h) - 5 f'(x+h) + 4 f'(x)}{120 f'(x)}.$$

Поступајући као у случају Ралстоновог поступка, добијамо следећи поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{f(x_k)}{2 f'(x_k)^2} \frac{32 f'(x_k+3h) - 27 f'(x_k+2h) - 5 f'(x_k+h) + 4 f'(x_k)}{120 f'(x_k)} \right)$$

односно

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{32 f'(x_k+3h) - 27 f'(x_k+2h) - 5 f'(x_k+h) + 4 f'(x_k)}{240 f'(x_k)^2} \right).$$

Нека је

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + \frac{32f'(x)^3 + 3f(x)f''(x) - 27f'(x)f''(x)^2 - 2f(x)f'''(x) - 5f'(x)^2f''(x) + 6f(x)f''(x)^2}{240f'(x)^5} \right).$$

Лако се проверава да је

$$\alpha = F(\alpha), \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0, \quad F'''(\alpha) = 2c_2^2 - c_3.$$

Како је $F'''(\alpha)$ у општем случају различито од нуле, поступак заснован на оптималној апроксимацији првог извода је реда 3.

Теорема 16. Нека је $f \in C^4(D)$ таква да је

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad x \in D.$$

Ако једначина $f(x) = 0$ има решење $\alpha \in D$, онда постоји $\eta > 0$ такво да за свако

$$x_0 \in D_\eta(\alpha) = \{x \in D : |x - \alpha| \leq \eta\}$$

поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{32f'(x_k)^3 + 3f(x_k)f''(x_k) - 27f'(x_k)f''(x_k)^2 - 2f(x_k)f'''(x_k) - 5f'(x_k)^2f''(x_k) + 6f(x_k)f''(x_k)^2}{240f'(x_k)^5} \right)$$

конвергира ка α са трећим редом. Асимптотска константа грешке је $2c_2^2 - c_3$.

Доказ. Из услова теореме следи да једначина $f(x) = 0$ има у интервалу D једно и само једно решење. Како је $f(\alpha) = 0$, постоји $\mu > 0$ такво да за $D_\mu(\alpha) \subset D$. Функција $x + \lambda f(x)$ (за било који фиксни реалан број λ) је непрекидна у α , па за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\omega > 0$ такво да важи

$$|x + \lambda f(x) - \alpha - \lambda f(\alpha)| = |x + \lambda f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

за свако $x \in D_\omega(\alpha)$. Нека је $\varepsilon = \min\{b - \alpha, \alpha - a\}$. Тада постоји $\rho > 0$ такво да је за свако $x \in D_\rho(\alpha)$ и $\lambda \in [-2, 3, 6]$

$$a < \alpha - \varepsilon < x + \lambda f(x) < \alpha + \varepsilon < b.$$

То значи да је за свако $x \in D_\rho$ $\alpha = x + 3f(x), x - 2f(x), x + 6f(x) \in D$.

Нека је $q \in (0,1)$. Означимо са M константу за коју важи $|F'''(x)| \leq \frac{M}{6}$, $x \in D$. Због $f \in C^4(D)$ следи да оваква константа M постоји. Нека је $\eta = \min \left\{ \mu, \rho, \sqrt{\frac{6q}{M}} \right\}$. Тада је за $x \in D_\eta$ $\alpha \subset D$ и функција корака посматраног итеративног поступка добро дефинисана.

На основу Тејлоровог развоја и особина функције F следи да постоји $\tau \in D_\eta$ α такво да за $x_0 \in D_\eta$ α важи

$$x_1 - \alpha = F(x_0) - F(\alpha) = \frac{F'''(\tau)}{3!} (x_0 - \alpha)^3.$$

Одатле следи

$$|x_1 - \alpha| = \left| \frac{F'''(\tau)}{3!} (x_0 - \alpha)^3 \right| \leq \frac{M_3}{6} \eta^2 |x_0 - \alpha| \leq q |x_0 - \alpha| \leq |x_0 - \alpha| \leq \eta,$$

што значи да $x_1 \in D_\eta$ α . Поступајући на исти начин добијамо да са $x_0 \in D_\eta$ α важи $x_k \in D_\eta$ α , $k = 0, 1, \dots$. Конвергенција низа следи из

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq q |x_k - \alpha| \leq q^2 |x_{k-1} - \alpha| \leq \dots \leq q^{k+1} |x_0 - \alpha|$$

јер је $q \in (0,1)$. Да је ред конвергенције 3 следи на основу Теорема 7.

Следећа теорема се доказује на потпуно исти начин као и претходна.

Теорема 17. Нека је $f \in C^4(D)$ таква да је

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad x \in D.$$

Ако једначина $f(x) = 0$ има решење $\alpha \in D$, онда постоји $\eta > 0$ такво да за свако

$$x_0 \in D_\eta \alpha = \{x \in D : |x - \alpha| \leq \eta\}$$

поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{32 f' \left(x_k + 3 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) - 27 f' \left(x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) - 5 f' \left(x_k + 6 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)}{240 f'(x_k)} \right)$$

конвергира ка α са трећим редом. Асимптотска константа грешке је $2c_2^2 - c_3$.

И овде користимо оптималну апроксимацију првог извода али са $h = \frac{f}{f'}$ и добијамо следећу апроксимацију другог извода

$$f'' \approx \frac{32 f' \left(x + 3 \frac{f}{f'} \right) - 27 f' \left(x - 2 \frac{f}{f'} \right) - 5 f' \left(x + 6 \frac{f}{f'} \right)}{120 \frac{f}{f'}}$$

3.3.2 Модификације четири поступка

У претходном параграфу, као и у радовима [15] и [13], посматра се модификација истог поступка

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{f(x_k) f''}{2 f'(x_k)^2} \right).$$

Други извод замењујемо апроксимацијом у којој се појављују само функција и њен први извод, са циљем да се добије конвергенција реда 3. Користећи исти поступак, сваки од следећих поступака

$$\text{Халејев} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(\frac{2}{2 - t \frac{f}{f'}} \right)$$

$$\text{Ојлеров} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2t \frac{f}{f'}}} \right)$$

Хансен-Патриков $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(\frac{a+1}{a + \sqrt{1 - a+1} t x_k} \right)$, a је реалан број,

Островског $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t} x_k} \right)$

можемо модификовати користећи

$$f''(x) \approx \frac{32 f'(x) + 3f(x) - 27 f'(x) - 2f(x) - 5 f'(x) + 6f(x)}{120 f(x)}$$

и стављајући

$$\frac{32 f'(x_k) + 3f(x_k) - 27 f'(x_k) - 2f(x_k) - 5 f'(x_k) + 6f(x_k)}{120 f'(x_k)^2}$$

уместо

$$t x_k = \frac{f(x_k) f''(x_k)}{f'(x_k)^2}.$$

Аналогно доказу Теорема 16 можемо дати доказ за конвергенцију сваког од четири овако модификована поступка. При томе добијамо следеће асимптотске константе грешке:

Поступак	Халејев	Ојлеров	Хансен-Патриков	Островског
Константа	$c_2^2 - c_3$	$-c_3$	$\frac{1-a}{2} c_2^2 - c_3$	$\frac{1}{2} c_2^2 - c_3$

3.3.3 Једна фамилија поступака реда 3

Код поступака где се користи оптимална апроксимација првог извода потребно је у сваком итеративном кораку израчунати вредност функције и четири пута вредност првог извода (за различите вредности променљиве). Са циљем да смањимо број израчунавања функције и њеног извода, посматрамо функцију корака дефинисану помоћу шест параметара

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + \frac{a_1 f(b_1 f(x) + x) - a_2 f(b_2 f(x) + x) - a_3 f(b_3 f(x) + x)}{2 f(x) f'(x)^2} \right).$$

Очигледно, и овде се апроксимира други извод функције f у

$$F'(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + \frac{f(x) f''(x)}{2 f'(x)^2} \right)$$

као и у претходним разматрањима. Да бисмо испунили услове

$$F(\alpha) = 0, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0,$$

довољно је да важи

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 - a_3 &= 0 \\ \frac{b_1^2 a_1}{2} - \frac{b_2^2 a_2}{2} - \frac{b_3^2 a_3}{2} &= 1 \\ \frac{b_1^3 a_1}{6} - \frac{b_2^3 a_2}{6} - \frac{b_3^3 a_3}{6} &= 0 \\ b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_3 a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Решење овог система (добито помоћу *Mathematica-e*) можемо изразити као функције два параметра b_1 и b_3 . Тако добијамо

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{2}{-2b_1^2 + b_1 b_3 + b_3^2}, \quad a_2 = -\frac{2}{2b_1^2 + 5b_1 b_3 + 2b_3^2}, \quad a_3 = \frac{2}{b_1^2 + b_1 b_3 - 2b_3^2}, \\ b_2 &= -b_1 - b_3 \end{aligned}$$

Са произвољним вредностима за параметре b_1 и b_3 добијамо поступак за који важи Теорема 16 са истим асимптотском константом грешке $2c_2^2 - c_3$.

Да би коефицијенти a_1, a_2 и a_3 били дефинисани, очигледно не могу оба параметра b_1 и b_3 бити једнаки нули. Ако изаберемо $b_1 = 0$ и $b_3 = 1$ добијамо $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $b_2 = -1$ и функцију корака

$$F(x) = x - \frac{f(x) + \frac{-2f(x) + f(x-h) - f(x+h) + f(x) + f(x)}{2f'(x)^2}}{f'(x)}.$$

У сваком итеративном кораку са овом функцијом корака потребно је рачунати вредност функције и три пута вредност првог извода.

Како је

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + \frac{-2f(x) + f(x-h) - f(x+h) + f(x) + f(x)}{2f(x)f'(x)^2} \right),$$

видимо да је

$$1 + \frac{-2f(x) + f(x-h) - f(x+h) + f(x) + f(x)}{2f(x)f'(x)^2}$$

добијено из

$$1 + \frac{t(x)}{2} = 1 + \frac{f(x)f''(x)}{2f'(x)^2}$$

апроксимацијом другог извода (централни диференцни количник)

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - f(x) - 2f(x) + f(x+h) + f(x)}{f(x)^2}$$

4. Примери

У овом делу приказујемо резултате наших експеримената са описаним поступцима. Сва рачунања су урађена у *Mathematica*-и 8. Прецизност је повећана на 10000 цифара са `SetPrecision` функцијом. Користили смо следећи излазни критеријум: $|x_k - \alpha| < \varepsilon$ и $|f(x_k)| < \varepsilon$ где је α тачно решење посматране једначине. У случајевима када тачно решење није доступно, користили смо његову апроксимацију α^* , која је рачуната са 10000 цифара, али смо приказали само 20 цифара.

Нумерички ред конвергенције (COC) је рачуната према

$$COC = \frac{\ln \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right|}{\ln \left| \frac{x_n - \alpha}{x_{n-1} - \alpha} \right|}.$$

У нашим модификацијама COC је увек био 3.

Решавали смо једначину $f(x) = 0$ користећи следеће тест функције и за њих одговарајуће стартне вредности x_0 и тачна решења α или апроксимације тачних решења α_1^* :

$$f_1(x) = \frac{1}{2} - \sin x, [9, 15], \alpha_1^* \approx 0.5235987755982988731, x_0 = 1,$$

$$f_2(x) = x^3 - 10, [10], \alpha_2^* \approx 2.1544346900318837218, x_0 = 2,$$

$$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10, [10], \alpha_4^* \approx 1.3652300134140968458, x_0 = 2$$

$$f_4(x) = e^{-x} \sin x + \ln x^2 + 1, [12], \alpha_{11} = 0, x_0 = 2,$$

$$f_5(x) = x - 1^3 - 1, [10], \alpha_5 = 2, x_0 = 1.8,$$

$$f_6 \ x = x - 1^3 - 2, [10], \alpha_6^* \approx 2.259921049894873, x_0 = 2.0,$$

$$f_7 \ x = x^2 \sin x - \cos x, [12], \alpha_{10}^* \approx 0.8952060453842319, x_0 = 1.5,$$

$$f_8 \ x = e^{x^2+7x-30} - 1, [10], \alpha_8 = 3, x_0 = 3.2,$$

$$f_9 \ x = x - \cos x, [10], \alpha_9^* \approx 0.7390851332151606, x_0 = 2,$$

Приказујемо само неке од добијених резултата. Резултати за тест функције f_5 , f_6 , f_7 и f_9 се не разликују много од резултата за тест функције f_1 , f_2 и f_3 , па их нећемо наводити.

Прву групу резултата дајемо за поступке које смо посматрали као познате модификације Њутновог поступка. У ову групу сврставамо Халејев, Ојлеров, Хансен-Патриков, поступак Островског, поступак инверзне интерполације и поступак Херцега. Другу групе чине познате модификације Њутновог поступка, Ралстонов и поступак Миловановића и Петковића.

Трећу групу чине модификације Њутновог поступка описане у параграфу 3.3.1. Поступак из теореме 16 називамо OD1 и он је дат са

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{32 f' x_k + 3 f x_k - 27 f' x_k - 2 f x_k - 5 f' x_k + 6 f x_k}{240 f'(x_k)^2} \right)$$

Поступак из теореме 17 називамо OD2 и он је дат са

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{32 f' \left(x_k + 3 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) - 27 f' \left(x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) - 5 f' \left(x_k + 6 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)}{240 f'(x_k)} \right)$$

У параграфу 3.3.3 описана је једна двопараметарска фамилија модификација Њутновог поступка. Као специјалан случај ове фамилије издвојили смо поступак

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 + \frac{-2 f x_k + f x_k - f(x_k) + f x_k + f(x_k)}{2 f x_k f'(x_k)^2} \right)$$

и означили га као ODcdk (оптимално диференцирање помоћу централног диференчног количника другог реда).

У параграфу 3.3.2 посматрали смо модификације Халејевог, Ојлеровог, постука Хансен-Патриковог и поступка Островског добијене заменом другог

извода изразом који смо користили код поступака OD1, OD2 и ODcdk, тј. користили смо

$$f''(x) \approx \frac{32f'\left(x+3\frac{f(x)}{f'(x)}\right) - 27f'\left(x-2\frac{f(x)}{f'(x)}\right) - 5f'\left(x+6\frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{120\frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Ову групу поступака означавамо као четврту.

У следећој табели приказане су вредности за $|x_8 - \alpha|$ за наведене поступке. При томе је ознака 1.4(-180) употребљена за број $1.4 \cdot 10^{-180}$, итд. Из табеле видимо да поступци OD1, OD2 и ODcdk за изабране стартне вредности не конвергирају.

Поступак	f_1	f_2	f_3	f_4	f_8
Њутнов	1.4 (-180)	4.5 (-288)	3.7 (-154)	5.8 (-423)	4.0 (-28)
Халејев	1.3 (-3431)	3.1 (-7986)	4.8 (-4287)	2.8 (-2059)	2.3 (-1299)
Ојлеров	3.7 (-5038)	3.3 (-9070)	1.7 (-5207)	4.1 (-1527)	5.7 (-207)
Хансен-Патриков	7.0 (-5792)	5.1 (-7223)	3.9 (-2456)	7.5 (-1020)	1.5 (-158)
Островског	4.4 (-4146)	0.0 (0)	1.1 (-5610)	1.8 (-1744)	9.4 (-1439)
Инверзне интерполације	2.4 (-2171)	1.4 (-6567)	2.4 (-3371)	1.5 (-5114)	1.6 (-574)
Ралстонов	6.1 (-1318)	1.4 (-6567)	2.4 (-3371)	1.0 (4)	2.0 (-318)
Миловановић-Петковић	3.8 (-687)	2.1 (-1502)	8.6 (-911)	3.0 (-351)	1.0 (-214)
OD1	1.7 (-2151)	1.4 (-6567)	2.4 (-3371)	4.2 (3)	-
OD2	3.9 (-2398)	1.4 (-6567)	2.4 (-3371)	2.5 (1)	-
ODcdk	4.8 (-2195)	1.4 (-6567)	2.4 (-3371)	4.7 (-2206)	-
Халејев+OD2	3.4 (-3735)	3.1 (-7986)	4.8 (-4287)	3.2 (0)	2.5 (-2)
Ојлеров+OD2	2.4 (-6669)	3.3 (-9070)	1.7 (-5207)	5.9 (-71)	9.5 (-19)
Хансен-Патриков+OD2	1.5 (-5078)	5.1 (-7223)	3.9 (-2456)	4.9 (-14)	2.6 (-20)
Островског+OD2	4.6 (-4652)	0.0 (0)	1.1 (-5610)	1.2 (-37)	1.5 (-12)

Табела 5. Вредности за $|x_8 - \alpha|$

Из табеле видимо да су за први пример поступци свих група добри и да се резултати прве и четврте групе мало разликују. Наше модификације, поступци треће групе, ефикасније су од поступака друге групе (Ралстонов поступак и поступак Миловановића и Петковића). За други пример смо добили сличне резултате. У трећем примеру нема разлике између поступака прве групе и њених модификација из четврте групе. Четврти пример показује да Њутнов поступак и његове познате модификације, поступци прве групе, конвергирају. Поступак

Ралстона и поступци OD1 и OD2 не конвергирају. Поступци Миловановића и Петковића и ODcdk конвергирају добро као и поступци прве групе. Поступци

групе четири показују различите особине. Поступак Халеј+ OD2 не конвергира, преостала три поступка ове групе конвергирају. Изабрана почетна вредност је таква да је грешка у почетку релативно велика, али је нумерички ред конвергенције после треће итерације ипак 3. Осми пример показује да поступци OD1, OD2 и ODcdk не конвергирају за изабрану стартну вредност. Остали поступци показују особине као и у претходном, четвртом примеру. Због тога смо посматрали осми пример и већи број итерација. У табели 6 приказани су додатни резултати за осми пример. Наиме, после осам итерација чинило се да Њутнов поступак даје боље резултате од поступака насталих његовом модификацијом. Међутим, после 12 и 14 итерација видимо да су модификације боље. Очигледно, избор стартних вредности не мора бити једнако добар за Њутнов поступак и поступке настале његовом модификацијом. То показује и пример када смо уместо $x_0 = 3.2$ узели $x_0 = 3.1$ и добили конвергенцију поступка OD2 са $|x_8 - \alpha| = 4.0 \cdot 10^{-293}$.

Поступак	$ x_8 - \alpha $	$ x_{12} - \alpha $	$ x_{14} - \alpha $
Њутнов	4.0 (-28)	8.4 (-427)	1.4 (-1702)
Ралстонов	2.0 (-318)	8.6 (-2368)	1.9 (-17664)
Миловановић-Петковић	1.0 (-214)	4.3 (-3001)	3.4 (-17484)
OD1	-	-	-
OD2	-	-	-
ODcdk	-	-	-
Халејев+OD2	2.5 (-2)	1.9 (-75)	1.2 (-668)
Ојлеров+OD2	9.5 (-19)	5.2 (-1402)	2.1 (-12606)
Хансен-Патриков+OD2	2.6 (-20)	3.1 (-1513)	6.4 (-13606)
Островског+OD2	1.5 (-12)	4.8 (-923)	4.2 (-8298)

Табела 6. Вредности за f_8

5. Закључак

У раду смо посматрали Њутнов поступак и неке његове модификације. Оригиналне модификације приказали смо у трећем делу и у теоремама 16 и 17 доказали њихову локалну конвергенције. Нумерички резултати показују да наше модификације дају добре резултате, слично познатим модификацијама Њутновог поступка. Свакако, избор стартне вредности код локалне конвергенције има важну улогу. Приказали смо резултате само пет примера. Слични резултати су добијени и за остале наведене посматране случајеве.

Нумерички резултати показују да се не може ни за једну модификацију рећи да је најбоља. Међутим, све наше модификације имају ред конвергенције 3, што смо и утврдили у одговарајућим теоремама.

6. Биографија

Рођена сам 19. јуна 1987. године у Бачкој Паланци. Основну школу „Вук Караџић” завршила сам у Бачкој Паланци, као носилац Вукове дипломе, а потом сам уписалла гимназију „20. октобар „ у Бачкој Паланци, општи смер, и матурирала са одличним успехом 2006. године. На Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду, одсек за математику, смер професор математике, уписала сам 2006. године и дипломирала 25. августа 2010. године са просечном оценом 8,76. Након завршетка основних студија уписала сам мастер студије на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду, одсек за математику. Положила сам све испите предвиђене наставним планом и програмом мастер студија и тако стекла право за одбрану матер рада.



Од јануара 2012. године засновала сам стални радни однос у Основној школи „Ратко Павловић- Ћићко“ у Раткову.

Нови Сад, октобар 2012.године

Дара Бошковић

7. Литература

- [1] Ash, M. J., Jones, R. L., Optimal numerical differentiation using three function evaluations, *Math. Comp.*, 37 (1981), 159-167.
- [2] Basto, M., Semiao, V., Calheiros, F. L., A new iterative method to compute nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 173(2006), 468-483.
- [3] Dennis, J.E., Schnabel, R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983).
- [4] Gander, W., On Halley's iteration method, *Amer. Math. Monthly* 92 (1985), 131–134.
- [5] Gutierrez, J. M., Hernandez, M. A., An acceleration of Newton's method: super-Halley method, *Applied Mathematics and Computation* 117(2001), 223-239.
- [6] Halley, E., A new and general method of finding the roots of equations, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 18 (1694), 136–148.
- [7] Hasanov, V.I., I.G. Ivanov, G. Nedzhibov, A new modification of Newton method, *Appl. Math. Eng.* 27 (2002), 278–286.
- [8] Herceg D., Krejić N., *Numerička analiza*, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1997.
- [9] Herceg, Đ., Herceg, D., On a third order family of methods for solving nonlinear equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 2010, 1-9.
- [10] Homeier, H.H.H., On Newton-type methods with cubic convergence, *J. Comput. Appl. Math.* 176 (2005), 425–432.
- [11] Ide, Y., On modified Newton methods for solving a non linear algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation* 198 (2008), 138–142.
- [12] Kou, J., Li, Z., Wang, X., A modification of Newton method with third-order convergence, *Applied Mathematics and Computation* 181 (2006), 1106–1111.
- [13] Milovanović, G.V., Petković, M.S., On some modification of a third order method for solving equations, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* No. 678-715(1980), 63-67.
- [14] Petković, M., Herceg, D., On rediscovered methods for solving equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 107 Issue 2, July 31, 1999.
- [15] Ralston, A., *A First Course in Numerical Analysis*, Tokyo [etc.]: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.
- [16] Traub J.F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., United States of America, 1964.
- [17] Weerakoon, S., G.I. Fernando, A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, *Appl. Math. Lett.* 17 (2000) 87–93.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Мастер рад

ВР

Аутор: Дара Бошковић

АУ

Ментор: др Драгослав Херцег

МН

Наслов рада: Њутнов поступак и његове модификације трећег реда конвергенције

МР

Језик публикације: Српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода: српски и енглески

ЈИ

Земља публиковања: Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2012.

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3

МА

Физички опис рада: (4 поглавља/ 49 страна/ 7 табела/ 6 слика/ 1 фотографија/17 литературе)

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Нумеричка математика

НД

Кључне речи: Поступци, интерполација, ред конвергенције, модификације

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод: У раду се посматра Њутнов поступак за решавање нелинеарне једначине са једном непознатом и његове модификације трећег реда конвергенције. Приказано је више поступака и анализирана њихова конвергенција и ред конвергенције. Као оригинални резултат дате су неке модификације Њутновог поступка трећег реда конвергенције.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 10. 5. 2012.

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: др Наташа Крејић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: др Ђорђе Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Dara Bošković

AU

Mentor: dr. Dragoslav Herceg

MN

Title: Newton's method and its modifications of third order of convergence

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg
Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: (4 chapters/49 pages/ 7 tables/ 6 pictures/ 1 photography/17 references)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words: Methods, interpolation, order of convergence, modification

SKW UC:

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract: The paper the Newton's method for solving nonlinear equations with one unknown and its modification of third order convergence is considered. There are presented also several methods and their convergence and order of convergence are discussed. As a original result are given some modifications of Newton's method of third order of convergence.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10. 5. 2012.

ASB

Defended:

DE

Thesis defence board:

DB

President: dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Đorđe Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad