



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ



Данка Вујанац

Бојење графова

мастер рад

Нови Сад, 2015

Садржај

Предговор.....	2
Увод	3
Глава 1. Основни појмови графа.....	5
Глава 2. Бојење чворова.....	11
Глава 3. Бојење грана	22
Глава 4. Бојење планарних графова и бојење мапа. Проблем четири боје.....	31
Закључак.....	38
Литература	39
Биографија	41

Предговор

У овом мастер раду се презентују разни аспекти бојења графова, као што су бојења чворова, бојења грана и бојења области.

Прва глава је уводног карактера и садржи основне појмове и дефиниције теорије графова које су повезане с проблемима бојења. Такође, дат је историјат проблема бојења графова међу којима је проблем 4 боје – један од главних покретача развоја теорије графова.

Друга глава се бави бојењем чворова и овде се упознајемо са појмом хроматски број, као и бојењем чворова појединих карактеристичних графова. Дат је преглед неких од важнијих теорема које говоре о бојењу чворова, као што су теореме Брукса и теорема Мициелског. Крај главе је посвећен хроматским критичним графовима.

Трећа глава је фокусирана на бојење грана па у оквиру ње је обухваћена прича о хроматском индексу (класи) и његовим основним резултатима. Дајемо увид у теорему Кенинга, као и Визингову теорему. Бавимо се и класификацијом графова у односу на хроматски индекс.

Четврта глава се фокусира на бојење планарних графова и бојење мапа. У овом делу говоримо о проблему 4 боје, али је за разлику од прве главе где је акценат на историјској страни овог проблема, овде говоримо о конкретном проблему и решавању истог.

Овом приликом бих захвалила свом ментору, др Војиславу Петровићу, не само на одабиру занимљиве теме, већ и на подршци и корисним саветима у току припреме овог мастер рада. Велику захвалност дугујем и члановима комисије, др Борису Шоботу и др Бојану Башићу.

На крају, највећу захвалност дугујем својим родитељима и сестри на подршци током свих година мог школовања, као и на свему осталом што су ми у животу пружили.

Данка Вујанац

Увод

Један од главних узрока за настанак и подстицаја за развој теорије графова, свакако је тзв. Проблем четири боје. Проблем је 1852. године уочио лондонски студент Френсис Гатри¹ који је, између осталог, био ангажован на бојењима карти лондонских округа. Због прегледности, како се то и данас чини при прављењу политичких карти, сваки округ је бојен посебном бојом и притом су суседни окрузи (они који имају заједничку границу) бојени различитим бојама. Гатри је приметио да при тим условима мање од 4 боје није било довољно, док је са 4 боје могао без проблема обојити карту. Заинтересовало га је шта је с другим картама, тј. да ли су и за њих довољне 4 боје. Не могавши да нађе одговор обратио се свом брату Фредерику, а овај професору математике на Универзитету у Лондону, Аугустусу де Моргану².

Први писани текст о Проблему четири боје је писмо које је 23. октобра 1852. Де Морган послао Сер Вилијам Роуан Хамилтону³ у ком је објаснио проблем, и затражио помоћ у његовом разумевању и решавању.

Ипак, проблем је постао познат тек после Де Морганове смрти 1878, када је Артур Кејли⁴ на састанку Лондонског друштва математичара запитио да ли је Проблем 4 боје решен, и недуго потом написао запис у којем је покушао да објасни у чему је тежина проблема.

Први озбиљан покушај доказивања проблема четири боје је начинио А. Б. Кемпе⁵, адвокат и математичар-аматер који је био благајник а касније и председник Лондонског друштва математичара. Године 1879. је објавио доказ у, тада новом, часопису „*American Journal of Mathematics*“, и више од 10 година се тај доказ узимао као валидан. 1890. године је П. Ј. Хивуд⁶ написао рад у ком је указао на грешке Кемпеовог доказа, иако је могао донекле спасити Кемпеове аргументе и искорисити их у доказивању да се свака мапа може обојити са пет боја. Неколико наредних година грешка није схватана као озбиљна, али како су године пролазиле и нико није налазио начин превазилажења грешке, постало је очигледно да је проблем озбиљнији него што се очекивало. Од тада је велики број

¹ F. Guthrie (1831. – 1899.)

² A. De Morgan (1806. – 1871.)

³ W. R. Hamilton (1805. — 1865.)

⁴ A. Cayley (1821. – 1895.)

⁵ Ser A. B. Kempe (1849. – 1922.)

⁶ P. J. Heawood (1861. – 1955.)

математичара покушао да докаже тврђење, али првима је то пошло за руком Кенету Апелу⁷ и Волфгану Хејкену⁸ тек 1976. године.

У последњих сто година се пажња концентрисала на бојење чворова графова и бојење мапа. Главни разлог за то је Проблем четири боје, али и многи проблеми чије се решавање сводило на бојење чворова. Први радови који су говорили о бојењу грана су се појавили тек 1880, када је Тејт⁹ издао рад у ком је показао да ако је тврђење четири боје тачно, онда се гране сваког 3 – регуларног планарног графа могу обојити користећи само три боје. Ово је посебан случај теореме Кенига¹⁰ која је доказана 36 година касније, 1916. године, коју ћемо у овом раду показати.

У овом раду ћемо се бавити различитим проблемима бојења графова, као што су бојење чворова, бојење грана и бојење области планарних графова.

⁷ K. I. Appel (1932. –2013.)

⁸ W. Haken (1928. –)

⁹ P. G. Tait (1831. – 1901.)

¹⁰ D. König (1884. –1944.)

Глава 1. Основни појмови графа

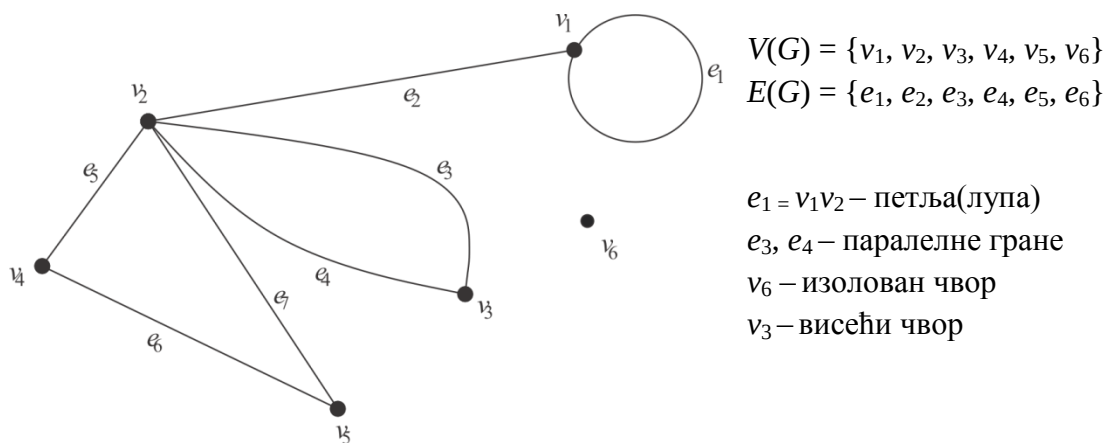
Дефиниција 1.1. Граф G је уређени пар $(V(G), E(G))$ где је $V(G)$ коначан непразан скуп елемената које називамо *чворовима*, док је $E(G)$ коначан скуп парова елемената из $V(G)$ које називамо *гране*.

Уколико је грана одређена чворовима u и v , тада уместо (u, v) можемо писати uv , или само e , где је $e = (u, v)$. За грану e кажемо још и да „спаја u и v ”, „крајеви гране e су u и v ”, „ e је инцидентно са u и v “...

Дефиниција 1.2. Гране које спајају исти пар чворова се називају *паралелне гране*. Грана која спаја чвор са самим собом се назива *петља* (лупа).

Дефиниција 1.3. Уколико у скупу грана графа G , $E(G)$, нема нити паралелних грана нити петљи, тада граф зовемо *прост граф*. *Мултиграфом* називамо графове у којима се могу појављивати паралелне гране или петље (лупе).

У овом раду ћемо се углавном бавити простим графовима.



Слика 1. Мултиграф

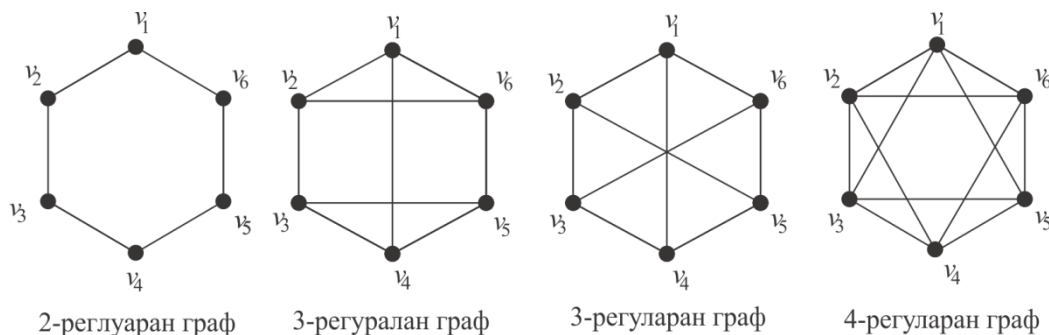
Дефиниција 1.4. Два чвора повезана граном називамо *суседним чворовима*. У супротном су чворови *несуседни*. Скуп свих суседа чвора $v \in V(G)$ означавамо са $N_G(v)$, и пишемо $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$.

Дефиниција 1.5. *Степен чвора* $v \in V(G)$ је број суседа тог чвора, и то записујемо са $d_G(v) = |N_G(v)|$. Минималан степен свих чворова графа обележавамо са $\delta(G)$, а максималан са $\Delta(G)$. Пишемо $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$ и $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$.

Дефиниција 1.6. Чвор који нема суседа се назива *изолован чвор*, док чвор са тачно једним суседом је *висећи (крајњи) чвор* или *лист*.

Дефиниција 1.7. Уколико сваки чвор у графу има исти број суседа, тада граф називамо *регуларним графом*. Посебно, ако је број суседа једнак k , онда је граф k – *регуларан*. За граф који је 0 – регуларан кажемо да је *празан*, а за 3 – регуларан кажемо да је *кубни граф*. За остале k – регуларне графове не постоје посебни називи.

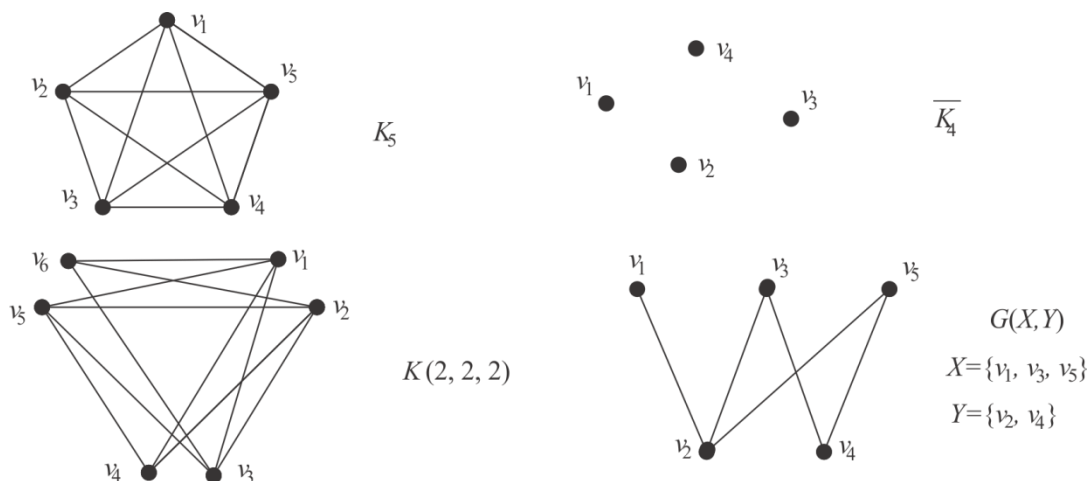
Јасно, у регуларним графовима је $\delta(G) = \Delta(G)$.



Слика 2. Регуларни графови

Карактеристични графови су:

- Комплетан граф K_n – граф са n чворова у ком између свака два чвора постоји грана;
- Празан граф $\bar{K}_n$ – граф са n чворова у ком никоја два чвора нису повезана;
- k – партитан граф $G(X_1, X_2, \dots, X_k)$ – граф у ком чворове делимо у k класа, $X_1, X_2, \dots, X_k$, док гране повезују искључиво чворове из различитих класа;
- Бипартитан граф $G(X, Y)$ – врста k – партитног графа са две класе, X и Y ;
- Комплетан k – партитан граф $K(n_1, n_2, \dots, n_k)$ – k – партитан граф такав да између свака два чвора из различитих класа постоји грана.

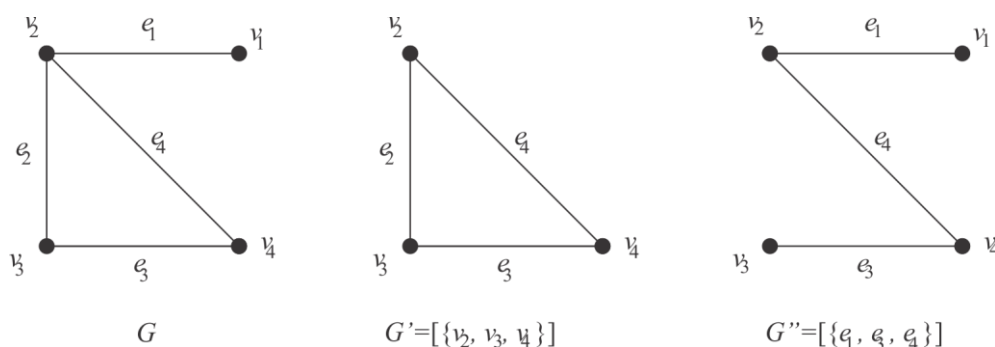


Слика 3. Неки карактеристични графови

Дефиниција 1.8. H је *подграф графа* G ако су сви његови чворови и све његове гране садржане у графу G .

Дефиниција 1.9. *Подграф графа* G *индукован скупом чворова* $V' \subset V(G)$ представља граф G' са скупом чворова $V(G') = V'$ и скупом грана $E(G') = \{uv \mid u \in V', uv \in E\}$. Означаваћемо га са $G[V']$.

Дефиниција 1.10. *Подграф графа* G *индукован скупом грана* $E' \subset E(G)$ представља граф G' са скупом чворова $V(G') = \{u \mid \exists uv \in E'\}$ и скупом грана $E(G') = E'$. Означаваћемо га са $G[E']$.

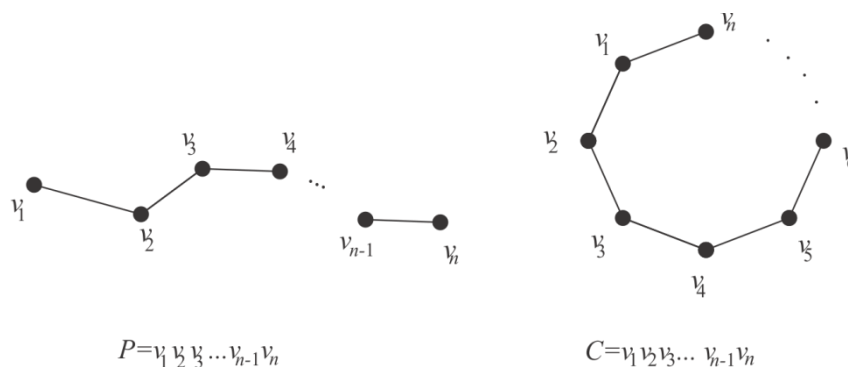


Слика 4. Граф и његови индуковани подграфови

Дефиниција 1.11. *Комплемент* $\bar{G}$ *графа* G је граф са истим скупом чворова као код G и са скупом грана $E(\bar{G}) = \{uv \mid u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$.

Дефиниција 1.12. *Пут* P_k у графу G је низ чворова $v_1v_2 \dots v_k$ ($k \geq 2$) који су сви раличити и притом $v_i v_{i+1} \in E(G)$ за $i = 1, 2, \dots, k-1$. Чворови v_1 и v_k су *крајеви* пута P_k који ћемо још звати (v_1-v_k) – пут или (v_k-v_1) – пут. *Дужина пута* P_k је број грана тога пута, тј. $k-1$.

Дефиниција 1.13. *Контура* C у графу G је пут са бар 3 чвора са додатном граном која спаја крајње чворове. Контуру са n ($n \geq 3$) чворова означаваћемо са C_n . Граф је *ацикличан* уколико нема контура.



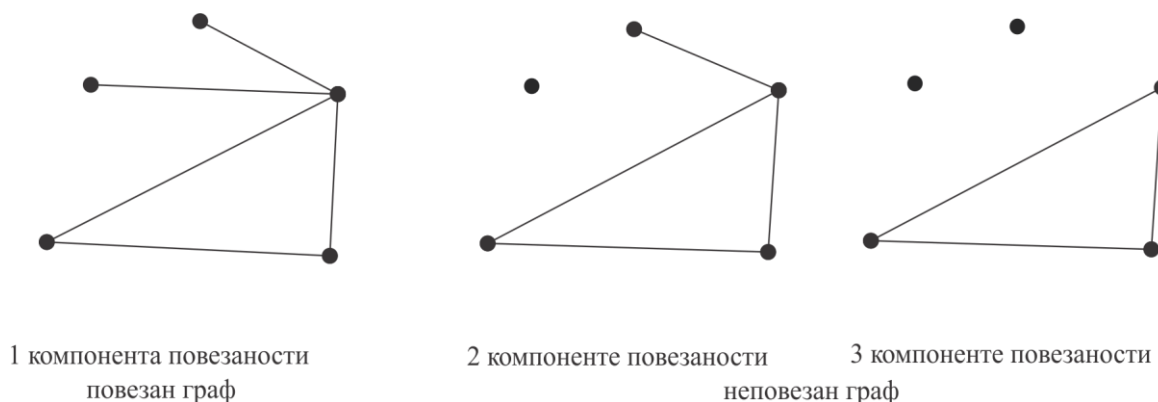
Слика 5. Пут и контура

Дефиниција 1.14. Два чвора су *повезана* у графу G ако у G постоји пут који их спаја.

Уз претпоставку да је сваки чвор повезан са самим собом, повезаност чворова је релација еквиваленције.

Дефиниција 1.15. *Компонента повезаности графа G* је класа еквиваленције у односу на повезаност.

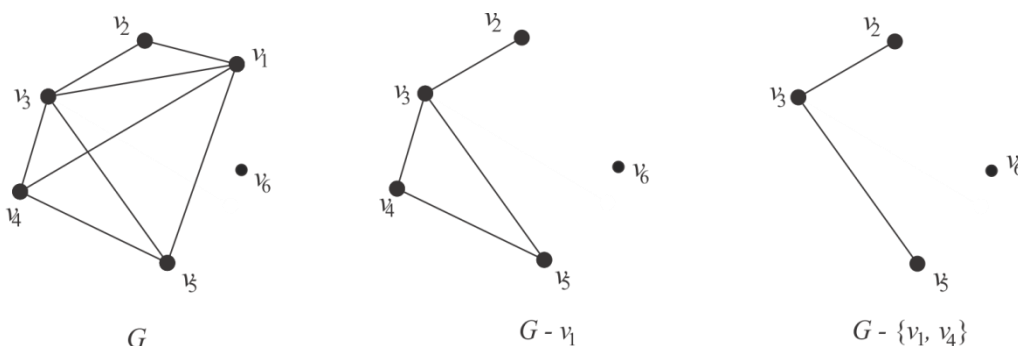
Дефиниција 1.16. Граф G је *повезан* ако су свака два чвора повезана, тј. за свака два чвора постоји пут који их спаја. Граф је повезан ако има само једну компоненту повезаности.



Слика 6. Компоненте повезаности

Дефиниција 1.17. *Уклањање чвора $v \in V(G)$* из графа G се врши тако што се из G уклони чвор v и све гране које су инцидентне са v . Добијени граф се означава $G - v$ и то је, сходно дефиницији 1.9, индукован подграф $G[V(G) - v]$.

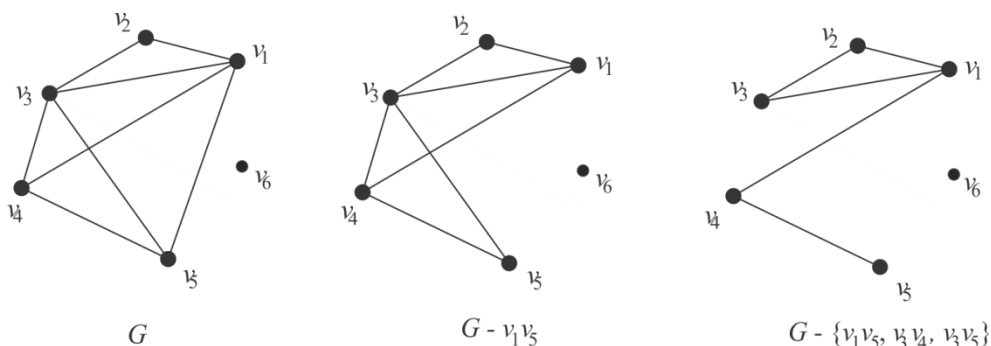
У општијем случају, *уклањање скупа чворова $V' \subset V(G)$* из графа G се врши тако што се из G уклоне сви чворови из V' и све гране чији је бар један крај у V' . Добијени граф се означава са $G - V'$ и по дефиницији 1.9 је $G - V' = G[V(G) - V']$.



Слика 7. Пример графа, графа са уклоњеним чвором и графа са уклоњеним скупом чворова

Дефиниција 1.18. *Уклањање гране $e \in E(G)$* из графа G се врши тако што се из G уклони грана e , док њени крајеви остају. Добијени граф се означава са $G - e$ и то је, сходно дефиницији 1.10, индукован подграф $G[E(G) - e]$.

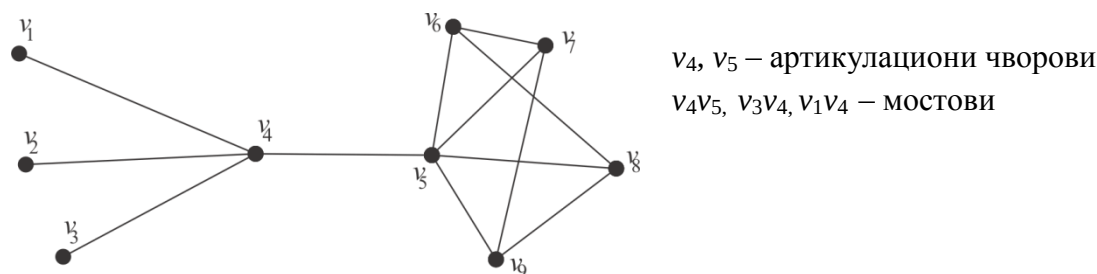
Уклањање скупа грана $E' \subset E(G)$ из графа G се врши тако што се из G уклоне све гране из E' , док њихови крајеви остају. Добијени граф се означава са $G - E'$ и и то је, по дефиницији 1.10, индуован подграф $G[E(G) - E']$.



Слика 8. Пример графа, графа са уклоњеном граном и графа са уклоњеним скупом грана

Дефиниција 1.19. Чвор $v \in V(G)$ је *артикулациони чвор* у графу G ако се уклањањем тог чвора повећава број компоненти повезаности графа G .

Дефиниција 1.20. Грана $e \in E(G)$ је *мост* у графу G ако се уклањањем те гране повећава број компоненти повезаности графа G .



Слика 9. Мост и артикулациони чворови

Дефиниција 1.21. Скуп чворова U , $U \subset V(G)$, је *чворни сепаратор* графа G ако се уклањањем скупа чворова U добија неповезан граф, тј. граф $G - U$ је неповезан.

Дефиниција 1.22. Минималан број чворова графа G чијим се уклањањем добија неповезан граф или K_1 назива се *чворна повезаност* и означава са $\kappa(G)$.

$\kappa(G) = 0$ ако и само ако је G неповезан или је $G = K_1$

$\kappa(G) = 1$ ако и само ако је G повезан и има артикулациони чвор или је $G = K_2$

Дефиниција 1.23. Граф G је *чворно k – повезан* ако и само ако је $\kappa(G) \geq k$, односно ако остаје повезан уклањањем мање од k чворова.

Дефиниција 1.24. Скуп грана $F \subset E(G)$ је *грански сепаратор* графа G ако се уклањањем скупа грана F добија неповезан граф, тј. ако је граф $G - F$ неповезан.

Дефиниција 1.25. Минималан број грана графа G чијим се уклањањем добија неповезан граф или K_1 назива се *гранска повезаност* и означава се са $\kappa_1(G)$.

$\kappa_1(G) = 0$ ако и само ако је G неповезан или $G = K_1$

$\kappa_1(G) = 1$ ако и само ако је G повезан и има мост

Дефиниција 1.26. Граф G је *грански k – повезан* ако и само ако је $\kappa_1(G) \geq k$, односно ако остаје повезан уклањањем мање од k чворова.

Дефиниција 1.27. Две гране које не излазе из истог чвора називамо *независним гранама*. Скуп међусобно независних грана се назива *мечинг*.

Дефиниција 1.28. Чвор је *покривен* у мечингу M ако је крај неке гране из M . У противном је *непокривен*.

Дефиниција 1.29. Мечинг M је *максималан* у графу G ако за сваки други мечинг M' важи $|M| \geq |M'|$. Мечинг који покрива све чворове графа зове се *савршен* или *перфектан мечинг* или *1 – фактор*.

Глава 2. Бојење чворова

Дефиниција 2.1. Бојење чворова графа G је додељивање по једне боје сваком чвору графа G . Прецизније, то је пресликавање $f: V(G) \rightarrow C$, где је $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ скуп боја.

Како ће у овој глави бити разматрано искључиво бојење чворова, кад кажемо бојење, подразумеваћемо бојење чворова.

Дефиниција 2.2. Правилно бојење графа G је бојење у којем су суседни чворови обојени различитим бојама, тј. ако $uv \in E(G)$, тада је $f(u) \neq f(v)$.

Даље ћемо се бавити искључиво правилним бојењима, па ће се атрибут „правилно“ понекад изостављати.

Дефиниција 2.3. Бојење у којем скуп боја C има k чланова, $|C| = k$, зове се k – бојење.

Дефиниција 2.4. Граф G је k – обојив ако постоји s – бојење графа G , за $s \leq k$.

Очигледно је да је сваки граф са n чворова n – обојив. Међутим, n често није минималан број потребних боја за правилно бојење чворова. Тако долазимо до следећег појма.

Дефиниција 2.5. Минимални број боја којим се може правилно обојити граф G се назива *хроматски број графа* G и обележава се са $\chi(G)$.

Дефиниција 2.6. Граф G је k – *хроматски*, ако је $\chi(G) = k$.

Теорема 2.1. $\chi(K_n) = n$. ■

Теорема 2.2. За $H \subseteq G$ је $\chi(H) \leq \chi(G)$. ■

Теорема 2.3. Ако су $G_1, G_2, \dots, G_s$ компоненте графа G , тада је $\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq s} \chi(G_i)$. ■

Теорема 2.4. $\chi(C_{2k}) = 2$; $\chi(C_{2k+1}) = 3$. ■

Теорема 2.5. $\chi(K(n_1, n_2, \dots, n_k)) = k$. ■

Ако се изузму неке специјалне класе, не постоји ефикасан поступак (алгоритам) за одређивање хроматског броја произвољног графа. Стога се често задовољавамо налажењем

горње границе за $\chi(G)$. Због теореме 2.3, у тим и другим разматрањима можемо, без утицаја на општост, узети да је дотични граф повезан.

Теорема 2.6. За сваки граф G важи $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Доказ. Индукцијом по броју чворова $|V(G)| = n$. За $n = 1$ је $\Delta(G) = 0$ и $\chi(G) = 1 = 0 + 1$. Претпоставимо да тврђење важи за сваки граф са мање од n чворова и посматрајмо граф G са n чворова.

Нека је $G' = G - v$, $v \in V(G)$. Тада је према индукцијској претпоставци $\chi(G') \leq 1 + \Delta(G')$. То значи да се чворови графа G' могу обојити са $1 + \Delta(G')$ боја. Како је $\Delta(G') \leq \Delta(G)$, постоји и $(1 + \Delta(G))$ – бојење графа G' . Нека је $1 + \Delta(G) = k$. Како је $d_G(v) \leq \Delta(G) < k$, постоји бар једна боја којом није обојен ниједан сусед чвора v у G . Бојећи том бојом чвор v добија се $(\Delta(G) + 1)$ – бојење графа G . Отуда је $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$. ■

Добијена оцена, иако некад врло груба, најбоља је могућа. Наиме, за $K_{1,n}$ је максималан степен n , док је $\chi(K_{1,n}) = 2$. С друге стране, за n непарно је $\chi(C_n) = 3 = 1 + 2 = 1 + \Delta(C_n)$. Слично је за комплетне графове.

Испоставиће се да су непарне контуре и комплетни графови једини изузеци, тј. да једино за њих важи да је $\chi(G) = 1 + \Delta(G)$. То је доказао амерички математичар Брукс¹¹. Између више доказа Бруксове теореме определили смо се за доказ индукцијом.

Теорема 2.7. (Брукс, 1941) Уколико је граф G повезан граф који није нити непарна контура нити комплетан граф, тада је $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Доказ. Индукцијом по $|V(G)| = n$. За $n < 5$, директном провером се утврђује да тврђење важи за све графове са n чворова који испуњавају услове теореме. Претпоставимо да тврђење важи за све повезане графове са мање од n ($n \geq 5$) чворова који нису ни непарне контуре ни комплетни графови. Нека је G такав граф са n чворова и нека је $\Delta(G) = r$.

Претпоставимо да постоји чвор $v \in V(G)$, такав да је $d_G(v) < r$. Нека је $G' = G - v$. Ако G' није ни непарна контура, ни комплетан граф, G' се може, на основу индукцијске претпоставке, обојити са $\Delta(G')$ боја. Како је $\Delta(G') \leq \Delta(G) = r$, G' се може обојити са r боја. С обзиром на $d_G(v) < r$, једна од r боја није употребљена за бојење суседа чвора v . Том бојом се обоји чвор v . Резултат је r – бојење, тј. $\Delta(G)$ – бојење графа G из чега следи $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Узмимо да је G' непарна контура, односно важи $G' = C_{2k+1}$, ($k \geq 1$). Тада је $\Delta(G) = r \geq 3$ (Сваки сусед чвора v има степен бар 3 у G). За $k = 1$ имамо $G' = C_3 = K_3$ и $\chi(G') = 3$, тј. G' се може обојити са 3 боје. Ако је $d_G(v) < 3$, тада v није сусед са једним од чворова графа G' и може се обојити истом бојом као тај чвор. Добија се 3 – бојење графа G , одакле је $\chi(G) \leq$

¹¹ R. L. Brooks (1916. –1993.)

$3 \leq r = \Delta(G)$. (У ствари је $\chi(G) = 3$). За $d_G(v) = 3$ имамо $G = K_4$, што је супротно претпоставци.

За $k > 1$ и даље је $\chi(G') = 3$. Ако је $d_G(v) \leq 3$ чворови контуре C_{2k+1} могу се обојити са 3 боје, тако да ниједан од суседа чвора v није обојен једном од боја. Тада је $\chi(G) = 3 \leq r = \Delta(G)$. Уколико је $d_G(v) \geq 4$, а тада је и $\Delta(G) \geq 4$, чвор v се боји новом, четвртом бојом. Добија се 4 – бојење графа G , одакле је $\chi(G) \leq 4 \leq \Delta(G)$. У сваком случају је $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Узмимо сад да је G' комплетан граф. Тада је $\Delta(G) = r = n - 1$, и $\chi(G') = n - 1$. С обзиром на $d_G(v) < r = n - 1$, из $(n - 1)$ – бојења графа G' лако се добија $(n - 1)$ – бојење графа G . Следи $\chi(G) = n - 1 = \Delta(G)$.

Тако остаје $d_G(v) = \Delta(G) = r$ за свако $v \in V(G)$. Другим речима G је r – регуларан граф. С обзиром да G није контура, следи $r \geq 3$. Нека је $G' = G - v$ и нека су $v_1, v_2, \dots, v_r$ суседи чвора v у G .

G' није непарна контура. У противном је $r = 3$ и v је сусед са свим чворовима из G' . Следи $G = K_4$, а то је контрадикција са условом теореме.

G' није комплетан граф. У противном је $G' = K_r$, а тада је $G = K_{r+1}$, што је такође контрадикција са условом теореме.

Дакле граф $G' = G - v$ задовољава услове теореме и како има $n - 1$ чворова за њега према индукцијској хипотези важи $\chi(G') \leq \Delta(G')$. Но, како је $\Delta(G') \leq \Delta(G) = r$, G' се може обојити са тих r боја.

Ако је при бојењу чворова $v_1, v_2, \dots, v_r$ графа G' , суседа чвора v у графу G , једна од боја 1, 2, ..., r употребљена више од једанпут, тада једна боја није употребљена. Такву боју зваћемо слободном. Бојењем чвора v слободном бојом добија се бојење графа G са r боја, чиме је доказ за овај случај завршен.

Претпоставимо да су у сваком r – бојењу графа G' сви чворови $v_1, v_2, \dots, v_r$ различито обојени. Без утицаја на општост можемо узети да је v_1 обојен бојом 1, v_2 бојом 2, ..., v_r бојом r . Обележимо са H_{ij} , $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$, подграф графа G' индукован чворовима обојеним бојом i или бојом j . Јасно, $v_i, v_j \in V(H_{ij})$. Карактеристична су два случаја.

- I За неко $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$ чворови v_i, v_j припадају различитим компонентама графа H_{ij} . Рецимо, $v_i \in V(H_{ij}')$, а $v_j \in V(H_{ij}'')$. Ако у компоненти H_{ij}' чворови замене боје, таква операција зове се алтернација боја i и j . Лако се види да се алтернацијом боја i и j опет добија правилно бојење компоненте H_{ij}' , а тиме и целог графа G' . Међутим, након тога чвор v_i добија боју j , чиме боја i постаје слободна. Ниједан од чворова $v_1, v_2, \dots, v_r$ више није обојен бојом i , тј. боја i постаје слободна. Бојењем чвора v бојом i добија се r – бојење графа G .

II Чворови v_i и v_j су у истој компоненти графа H_{ij} за свако $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$. Претпоставимо да се граф G не може обојити са r боја $1, 2, \dots, r$. Обележимо са G_{ij} компоненту од H_{ij} која садржи чворове v_i и v_j . Показаћемо да графови G_{ij} имају следеће особине.

(a) G_{ij} је $(v_i - v_j)$ – пут. Нека је $P = v_i x_1 x_2 \dots x_k v_j$, ($k \geq 0$) пут који спаја v_i и v_j у G_{ij} .

Приметимо да је чвор v_i обојен бојом i , x_1 бојом j , ..., x_k бојом i и најзад v_j бојом j , из чега следи да је k паран број. Обележимо са $d_{ij}(x)$ и $d'(x)$ степене чвора $x \in V(G_{ij})$ у G_{ij} односно G' . Показаћемо да је $d_{ij}(v_i) = d_{ij}(v_j) = 1$ и $d_{ij}(x_1) = d_{ij}(x_2) = \dots = d_{ij}(x_k) = 2$.

Претпоставимо да је $d_{ij}(v_j) \geq 2$. Тада су бар два суседа чвора v_i у G_{ij} (x_1 и бар још један) обојена бојом j . Чвор v_i има $r - 1$ суседа у G' , јер је $d_G(v_i) = r$ и $v_i v \in E(G)$. Како су за v_i и бар два његова суседа употребљене бар две боје i и j , за бојење преосталих мање од $r - 3$ суседа искоришћено је $r - 2$ боје. Према томе постоји боја, рецимо l , којом није обојен ниједан сусед чвора v_i . Ако се чвор v_i , уместо бојом i , обоји бојом l , добија се опет r – бојење графа G' .

Но, након тога боја i постаје слободна, њом се боји чвор v и добија r – бојење графа G . То је контрадикција са нашом претпоставком о G . Из тога следи $d_{ij}(v_i) = 1$. Слично је $d_{ij}(v_j) = 1$. Дакле, v_i и v_j су висећи чворови у G_{ij} .

Покажимо да је $d_{ij}(x_s) = 2$ за свако $s \in \{1, 2, \dots, k\}$. Претпоставимо да је $d_{ij}(x_s) \geq 3$ за неко $s \in \{1, 2, \dots, k\}$. Уочимо најмање такво s . Због минималности s подграф G_{ij} индукован са $\{v_i, x_1, \dots, x_{s-1}\}$ је пут, евентуално тривијалан. Узмимо да је чвор x_s обојен бојом i . Тада су бар три његова суседа у G_{ij} (два на путу P и још један) обојена бојом j . Како је G r – регуларан граф и $x_s v \notin E(G)$ јер $x_s \notin \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, x_s има r суседа у G' .

У r – бојењу графа G' за x_s и бар три његова суседа искоришћене су боје i и j . Остало је $r - 2$ боје на преостале суседе чвора x_s , којих има мање од $r - 3$. Како у предходном случају, бар једном бојом, рецимо l , није обојен ниједан сусед од x_s у G' . Ако се x_s обоји са l , а на путу $v_i x_1 \dots x_{s-1}$ изврши алтернација боја i и j , добија се опет једно r – бојење графа G , а то је контрадикција са претпоставком. Отуда $d_{ij}(x_1) = d_{ij}(x_2) = \dots = d_{ij}(x_k) = 2$.

Дакле, у повезаном графу G_{ij} важи $d_{ij}(v_i) = d_{ij}(v_j) = 1$ и $d_{ij}(x_1) = d_{ij}(x_2) = \dots = d_{ij}(x_k) = 2$. Отуда је G_{ij} пут P .

(b) $V(G_{ij}) \cap V(G_{ik}) = \{v_i\}$ за свако $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$. Као што је утврђено под (a), G_{ij} и G_{ik} су путеви. Нека је $G_{ij} = v_i x_1 \dots x_s v_j$ и $G_{ik} = v_i y_1 \dots y_t v_k$. Претпоставимо да G_{ij} и G_{ik} осим v_i имају бар још један заједнички чвор. То може да буде само чвор обојен бојом i , дакле различит од v_j и v_k . Нека је x_q , $1 \leq q \leq s$, последњи такав чвор на путу $v_i x_1 \dots x_s v_j$. Другим речима $\{x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_s, v_j\} \cap V(G_{ik}) = \emptyset$. За чвор x_q и четири његова суседа – два на G_{ij} , два на G_{ik} – искоришћене су три боје: i, j, k . Како је $d'(x_q) = r$, са преосталих $r - 1$ боја обојено је највише $r - 4$ суседа чвора x_q у G' . Према томе, једном бојом, рецимо l , није обојен ниједан сусед.

Обојимо чвор x_q бојом l , а на путу $x_{q+1} x_{q+2} \dots x_s v_j$ извршимо алтернацију боја i и j . Добијамо ново r – бојење графа G' у којем су и v_i и v_j обојени бојом i . Сада боја j постаје слободна. Њом се боји чвор v и тако добијамо r – бојење графа G . Контрадикција.

Подграф графа G' индукован чворовима $v_1, v_2, \dots, v_r$ није комплетан. У противном је $G = K_{r+1}$. Стога постоје несуседни чворови v_i и v_j . Уочимо подграфове G_{ij} и G_{ik} . Сагласно са (а), то су путеви $G_{ij} = v_i x_1 \dots x_s v_j$, $s \geq 1$, и $G_{ik} = v_i y_1 \dots y_t v_k$, $t \geq 0$, где је $k \neq i$ и $k \neq j$. Ако се на путу G_{ik} изврши алтернација боја i и k , добија се ново r – бојење графа G' у којем чвор v_i има боју k . Нека су у том бојењу G'_{ij} и G'_{ik} компоненте које садрже чворове v_i и v_j , односно v_i и v_k . Но, тада $x_1 \in V(G'_{ij}) \cap V(G'_{ik})$ што је у контрадикцији са (b).

И тако свако r – бојење графа G' може се проширити на r – бојење графа G . То је противно претпоставци. Тако је случај II компетиран, чиме је доказ теореме завршен.

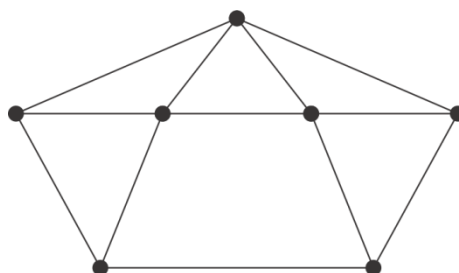
■

Из Бруксове теореме следи да сви графови, сем непарних контура и комплетних графова, имају мало бољу границу за хроматски број од $\Delta(G) + 1$.

Дефиниција 2.7. Граф G је *критичан k – хроматски* уколико је $\chi(G) = k$ и $\chi(G - v) = k - 1$ за сваки чвор $v \in V(G)$.

Дефиниција 2.8. Граф G је *минимални k – хроматски* уколико је $\chi(G) = k$ и $\chi(G - e) = k - 1$ за све $e \in E(G)$.

Тако је, на пример, непарна контура критичан 3 – хроматски, док је комплетан граф K_n критичан n – хроматски.



Слика 10. Пример критичног 4 – хроматског графа који није минималан 4 – хроматски

Из наведених дефиниција лако се изводи да су критични k – хроматски графови повезани. Друге особине таквих и минималних k – хроматских графова дате су у наредним теоремама.

Теорема 2.8. Сваки критичан k – хроматски граф је $(k - 1)$ – грански повезан за $k \geq 2$.

Доказ. Нека је G критичан k – хроматски граф, $k \geq 2$. Ако је $k = 2$ или $k = 3$ тада је $G = K_2$ или је G непарна контура, респективно. Одатле је граф G 1 – грански повезан или 2 – грански повезан.

Претпоставимо да је $k \geq 4$ и да G није $(k - 1)$ – грански повезан. Тада постоји минималан грански сепаратор E' , такав да је $|E'| < k - 1$. Нека су G_1 и G_2 компоненте графа $G - E'$. Како је G критичан k – хроматски граф, подграфови G_1 и G_2 су $(k - 1)$ – обојиви. Обојимо правилно чворове графа G_1 са $k - 1$ боја, а потом са истих $k - 1$ боја обојимо правилно чворове графа G_2 . Ако је свака грана из E' правило обојена (крајеви обојени различито) добили смо правилно бојење графа G са $k - 1$ боја, а то је контрадикторно чињеници да је $\chi(G) = k$. Из тога следи да постоји бар једна грана из E' чији су крајеви обојени истом бојом. Показаћемо да се $k - 1$ боја којима су обојени чворови графа G_1 могу пермутовати, тако да G_1 остане правилно обојен и да свака грана из E' буде такође правилно обојена. Тиме се добија $(k - 1)$ – бојење графа G , што је контрадикција са $\chi(G) = k$, чиме ћемо комплетирати доказ.

Нека су у $(k - 1)$ – бојењу графа G_1 коришћене (не обавезно све) боје $1, \dots, k - 1$. Означимо са $U_i, i = 1, \dots, k - 1$, скуп (класу) чворова из G_1 који су обојени бојом i . Уколико боја i није коришћена, тада је $U_i = \emptyset$. Међу класама $U_1, \dots, U_{k-1}$ уочимо оне чији је бар један чвор сусед с неким чвором из G_2 . С обзиром да је $|E'| < k - 1$, тј. да између G_1 и G_2 има највише $k - 2$ грана, таквих класа има највише $k - 2$. Узмимо да су то $U_1, \dots, U_t$, где је $1 \leq t \leq k - 2$. Нека из класе U_i води $k_i, k_i > 0$, грана у G_2 . Очигледно је $\sum_{i=1}^t k_i \leq k - 2$.

Ако за сваки чвор из U_1 важи да су сви његови суседи у G_2 обојени бојама различитим од 1, тада не мењамо првобитно бојење G_1 . Претпоставимо да постоји чвор $u_1 \in U_1$ који има бар једног суседа у G_2 обојеног бојом 1. Како из U_1 илази k_1 грана у G_2 , највише k_1 чворова из G_2 могу бити суседи неким чворовима из U_1 . Сходно томе, суседи чворова из U_1 у G_2 „покривају“ највише k_1 боја (укључујући боју 1 којом је обојен сусед u_1). Сада извршимо пермутацију $k - 1$ боја у бојењу G_1 , тако да класе остану исте, али да класа U_1 добије једну од преосталих $(k - 1) - k_1$ боја. То је могуће, јер је $(k - 1) - k_1 > k - 2 - k_1 \geq 0$.

Тако добијамо ново (правилно) бојење G_1 у којем су све гране из скупа U_1 које воде ка G_2 правилно обојене. Затим посматрамо пређашњи скуп U_2 . У новом бојењу U_2 може добити боју s различиту од 2 и, наравно, различиту од боје U_1 . Ако ниједан чвор из U_2 нема суседа у G_2 обојеног бојом s , задржавамо ново бојење и прелазимо на класу U_3 . У противном, постоји чвор $u_2 \in U_2$ који има суседа у G_2 обојеног бојом s . Слично као у претходном разматрању, с обзиром да класа U_2 „покрива“ највише k_2 боја, пермутујемо боје у новом бојењу G_1 , тако да класа U_1 задржи постојећу боју, а да класа U_2 добије једну од преосталих боја. То је могуће, јер је $(k - 1) - 1 - k_2 \geq (k - 1) - k_1 - k_2 > (k - 2) - k_1 - k_2 \geq 0$.

Настављајући овај процес добијамо (правилно) $(k - 1)$ – бојење графа G_1 у којем су све гране које воде од G_1 ка G_2 правилно обојене. То је истовремено и $(k - 1)$ – бојење графа G . Контрадикција са $\chi(G) = k$.

■

Пошто сваки повезан минимални k – хроматски граф је критични k – хроматски граф следећи резултат је јасан.

Теорема 2.9. Ако је G повезан минимални k – хроматски граф за $k \geq 2$, онда је G $(k - 1)$ – грански повезан.

■

Теорема 2.10. Ако је G критичан k – хроматски граф, тада је степен сваког чвора бар $k - 1$, тј. $\delta(G) \geq k - 1$.

Доказ. Претпоставимо да је G критичан k – хроматски граф и да постоји чвор $v \in V(G)$ такав да је $d(v) < k - 1$. Како је $\chi(G - v) < \chi(G) = k$, граф $G - v$ може да се обоји са $k - 1$ боја. Како је $d(v) < k - 1$ постоји бар једна боја којом није обојен ниједан сусед чвора v . Ако том бојом обојимо v , добијамо $k - 1$ бојење графа G . То је контрадикција са претпоставком $\chi(G) = k$. Дакле, $d(v) \geq k - 1$ за свако $v \in V(G)$, односно $\delta(G) \geq k - 1$.

■

Теорема 2.11. Сваки k – хроматски граф G садржи критичан k – хроматски подграф H .

Доказ. Нека је $\chi(G) = k$. Тада је $|V(G)| \geq k$. Посматрајмо произвољан чвор $v \in V(G)$. Ако је $\chi(G - v) < \chi(G)$, тада је $H = G$. У противном је $\chi(G - v) = \chi(G)$. Означимо са G_1 граф $G - v$ и уочимо чвор $v_1 \in V(G_1)$. У случају $\chi(G_1 - v_1) < \chi(G_1) = \chi(G)$ имамо $H = G_1$. Ако је $\chi(G_1 - v_1) = \chi(G_1)$ настављамо на исти начин. У крајњем случају стижемо до графа G_i , таквог да је $|V(G_i)| = k$. С обзиром да је $\chi(G_i) = k$, G_i је тражени критичан k – хроматски подграф H .

■

Границу која је прецизнија од оне у теорему 2.6 су добили су Секереш¹² и Вилф¹³.

Теорема 2.12. (Секереш, Вилф, 1968) За сваки граф G важи $\chi(G) \leq 1 + \max \delta(G')$ где је максимум узет над свим индукованим подграфовима G' графа G .

Доказ. Тврђење је тачно за празне графове, тако да ћемо претпоставити да за граф G важи $\chi(G) = k \geq 2$. Нека је H индуован критичан k – хроматски подграф од G . Како је H индуован подграф од G , важи $\delta(H) \leq \max \delta(G')$ где је максимум узет над свим индукованим подграфовима G' од G . Знамо из теореме 2.10 да за критични k – хроматски граф важи

¹² G. Szekeres (1911.– 2005.)

¹³ H. S. Wilf (1931.– 2012.)

$\delta(H) \geq k - 1$. Отуда је $\max \delta(G') \geq k - 1 = \chi(G) - 1$, где је максимум узет над свим индукованим подграфовима G' од G . Из последње неједнакости тврђење непосредно следи. ■

Доказана теорема нам говори да је горња граница хроматског броја графа $K_{1,n}$ једнака 2, што и јесте тачна вредност хроматског броја тог графа. Пошто сваки планаран граф има минималан степен највише 5, а сваки подграф планарног графа је планаран, следи да је хроматски број планарног графа највише 6.

Свакако, граница у теорему 2.12 је боља од претходних. Уколико је G регуларан граф степена r , тада обе теореме 2.7 и 2.12, дају горњу границу, $r + 1$. Ипак, и ова граница је далеко од добре за неке r – регуларне графове, као на пример за $K_{r,r}$.

Следећи интересантан резултат потиче од мађарског математичара Галаија¹⁴.

Теорема 2.13. (Галаи, 1968) За сваки граф G је $\chi(G) \leq 1 + l(G)$ где је $l(G)$ дужина најдужег пута у G .

Доказ. Резултат је очигледан ако је G празан граф, тако да можемо претпоставити да је $\chi(G) = k \geq 2$. Нека је H критичан k – хроматски подграф графа G , па по теорему 2.10 је $\delta(H) \geq k - 1$. Знамо да подграф H , па одатле и граф G , садржи пут дужине $k - 1$. Одавде је $l(G) \geq k - 1 = \chi(G) - 1$, што даје тражени резултат. ■

Сада ћемо пажњу усмерити на доње границе хроматског броја. Следећа теорема је директна последица теорема 2.1 и 2.2.

Теорема 2.14. Ако је $K_n \subseteq G$, тада је $\chi(G) \geq n$. ■

Дефиниција 2.9. Клика графа G је највећи комплетан подграф графа G . Величина клике је број чворова које клика садржи. Означаваћемо је са $\omega(G)$.

Из дефиниције клике и теореме 2.14 закључујемо да је хроматски број сваког графа већи или једнак од величине клике, односно да важи

Теорема 2.15. $\chi(G) \geq \omega(G)$. ■

Иако је за многе графове $\chi(G) > \omega(G)$, постоје графови за које важи једнакост.

Теорема 2.16. $\chi(G) = 1$ ако и само ако је G празан граф. ■

¹⁴ T. Gallai (1912. –1992.)

Теорема 2.17. $\chi(G) = 2$ ако и само ако је G нетривијалан бипартитан граф.

Доказ. ($\Rightarrow$) $\chi(G) = 2$ и нека је skup боја $C = \{1, 2\}$. Дефинишемо скупе A и B тако да у A упадају сви чворови који су обојени бојом 1, а у B бојом 2, односно $A = \{v \in V(G) \mid f(v) = 1\}$, $B = \{v \in V(G) \mid f(v) = 2\}$. Тада је $xy \in E(G) \Rightarrow x \in A, y \in B$ или $x \in B, y \in A \Rightarrow G(A, B)$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $G(A, B)$ нетривијалан бипартитан граф. Тада $E(G) \neq \emptyset$ као и $\chi(G) > 1$. Тада правимо бојење $f(v) = \begin{cases} 1, v \in A \\ 2, v \in B \end{cases} \Rightarrow \chi(G) = 2$

■

Дајемо још једну оцену доње границе хроматског броја једне класе графова.

Теорема 2.18. $\chi(G) \geq 3$ ако и само ако G садржи непарну контуру.

Доказ. ($\Rightarrow$) $\chi(G) \geq 3$. По претходним двома теоремама G није празан и није бипартитан граф. С обзиром да непразан бипартитан граф не садржи непарну контуру, граф G садржи такву контуру.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да G садржи непарну контуру C . Како је $\chi(C) = 3$ и како из теореме 2.2 важи $\chi(G) \geq \chi(C)$, следи $\chi(G) \geq 3$.

■

Дефиниција 2.10. Граф G је *савршен (перфектан) граф* ако је $\chi(H) = \omega(H)$ за сваки индуковани подграф H графа G .

Примери савршених графова су бипартитни графови.

Дефиниција 2.11. Граф G називамо *тетивним* ако свака контура у G дужине веће од 3 има тетиву, односно грану која повезује два чвора која нису суседна у тој контури.

За тетивне графове важе следећа тврђења.

Теорема 2.19. Ако је граф тетиван, онда је $\chi(G) = \omega(G)$.

■

Доказ теореме 2.19 овде нећемо помињати, а може се наћи у [8].

Теорема 2.20. Сваки тетиван граф је савршен.

■

Следеће тврђење, које је доказао Ловас¹⁵, потврда је хипотезе коју је поставио Берж. Доказ се може наћи у [14].

¹⁵ L. Lovász (1948. –)

Теорема 2.21. (Ловас, 1972) Граф G је савршен ако и само ако је $\bar{G}$ савршен.

■

Такође важи

Теорема 2.22. Граф G је савршен ако и само ако ниједан од графова G или $\bar{G}$ не садржи непарну контуру дужине најмање 5.

■

Теорема 2.22 је доказана у [9].

Као што је већ констатовано, неједнакост $\chi(G) \geq \omega(G)$ важи за сваки граф. Отуда, ако граф G садржи K_s као подграф, следи $\chi(G) \geq s$. Међутим, обратно не мора да важи. На пример, контура не садржи K_3 , а ипак је $\chi(C_{2k+1}) = 3$. Изненађујуће је, али постоје графови са произвољно великим хроматским бројем који не садрже, као подграф, никакав комплетан граф K_s за $s \geq 3$. То је резултат пољског математичара Мициељског.

Теорема 2.23. (Мициељски¹⁶, 1955) За сваки природан број k постоји k – хроматски граф који не садржи K_3 као подграф.

Доказ. Доказ се изводи индукцијом по k . За k једнако 1, 2 или 3 тражени графови су редом K_1 , K_2 и C_5 . Нека је H k – хроматски граф који нема троуглова, где је $k \geq 3$. Полазећи од H конструисаћемо $(k + 1)$ – хроматски граф G , који такође нема троуглова.

Нека је $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Узмимо да је $V(G) = V(H) \cup \{u, u_1, \dots, u_n\}$, где су $u, u_1, \dots, u_n$ нови чворови. При томе је чвор u сусед са сваким од чворова $u_1, \dots, u_n$, док је сваки чвор u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, сусед је са свим суседима чвора v_i у H . Гране графа H задржане су у G . Тврдимо да G нема троуглова и да је $\chi(G) = k + 1$.

- I G нема троуглова. Никоја два чвора u_i и u_j нису суседи, па u није ни у једном троуглу. Како H нема троуглова, једино чворови u_i, v_j, v_l за неко i, j, l могу да образују троугао у G . Тада је, према конструкцији графа G , $i \neq j, i \neq l$ и $v_i v_j, v_i v_l, v_j v_l \in E(H)$. То повлачи да је $v_i v_j v_l$ троугао у H , што је контрадикција са претпоставком да H нема троуглова.
- II $\chi(G) = k + 1$. Из $\chi(G) = k$ следи да постоји k – бојење графа H . Нека је чвор v_i обојен бојом $c(v_i)$. Проширимо то k – бојење графа H на $(k + 1)$ – бојење графа G , тако што чвор u_i обојимо бојом $c(v_i)$, а чвор u новом $(k + 1)$ – ом бојом. Такво бојење је правилно, јер $u_i u_j, u_i v_i \notin E(G)$. Из тога следи $\chi(G) \leq k + 1$. Покажимо да је $\chi(G) > k$. Претпоставимо да се граф G може обојити са k боја, 1, 2, ..., k . Тада, због $u u_i \in E(G)$, важи $c(u) \neq c(u_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Рецимо да је чвор u обојен бојом k , $c(u) = k$. Како је $\chi(H) = k$, неки од чворова подграфа H такође је обојен бојом k . Обележимо са H_k скуп свих чворова $v_i \in V(H)$, таквих да је $c(v_i) = k$. Уочимо

¹⁶ J. Mycielski (1932. –)

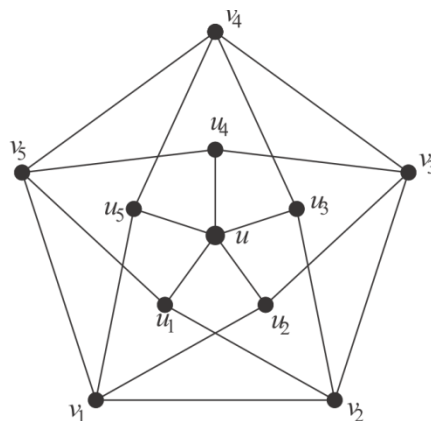
сад ново бојење c' графа H , у којем сви чворови из $V(H) - H_k$ задржавају старе боје из бојења c , док сваки чвор $v_i \in H_k$ добија боју $c'(v_i) = c(u_i)$. Тврдимо да је c' правилно бојење графа H .

Претпоставимо да у H постоје суседни чворови v_i и v_j исто обојени у c' , $c'(v_i) = c'(v_j)$. Како никоја два чвора из H_k нису суседна, а бојење c је правилно, један од тих чворова је у H_k , а други у $V(H) - H_k$. Рецимо $v_i \in H_k$, $v_j \in V(H) - H_k$. Како је $c(v_j) = c'(v_j)$ и $c(u_i) = c'(v_i) = c'(v_j)$, следи $c(u_i) = c(v_j)$. Како $u_i v_j \in E(G)$, то је контрадикција са претпоставком да је c правилно бојење графа G .

Дакле, c' је правилно бојење графа H . Како не садржи боју k , c' је једно $(k - 1)$ – бојење, а то је контрадикција са претпоставком $\chi(H) = k$. Отуда је $\chi(G) > k$, што заједно са $\chi(G) \leq k + 1$ даје $\chi(G) = k + 1$.

■

Ако се контури $C_5 = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$, која је 3 – хроматски граф, додају чворови $u, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ и нове гране, као у теорему Мициелског, добија се Гречеов¹⁷ граф. То је 4 – хроматски граф без труглова. Штавише, Гречеов граф је критичан 4 – хроматски. Гречеов граф је приказан на слици 11.



Слика 11. Гречеов граф

Општији резултат је дат у следећој теорему.

Теорема 2.24. (Ердеш 1961, Ловас 1967) За свака два природна броја k и l постоји граф чији је хроматски број бар k и чија је дужина најкраће контуре већа од l .

■

Доказ ове теореме се изводи такозваном вероватносним методама које су изван оквира овог рада и стога је изостављен. Заинтересовани доказ могу наћи у [8].

¹⁷ С. Н. Grötzsch (1902. –1993.)

Глава 3. Бојење грана

Дефиниција 3.1. Бојење грана графа G је додељивање по једне боје свакој грани графа G . Прецизније, то је пресликавање $f: E(G) \rightarrow C$, где је $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ скуп боја.

Дефиниција 3.2. Правилно бојење грана графа G је бојење такво да су све гране које излазе из истог чвора обојене различитим бојама, тј. ако су $e_1, e_2 \in E(G)$ суседне гране, тада је $f(e_1) \neq f(e_2)$.

Даље ћемо се бавити искључиво правилним бојењима, па ћемо атрибут „правилно“ понекад изостављати.

Дефиниција 3.3. Бојење у ком скуп боја C има k чланова, $|C| = k$, се назива k – бојење.

Дефиниција 3.4. Граф G је *грански k – обојив* ако постоји s – бојење графа G , за $s \leq k$.

Као и код бојења чворова, граф са t грана је t – обојив, али t није увек и најмањи број боја којим можемо правилно обојити гране графа. Тако долазимо до појма хроматски индекс.

Дефиниција 3.5. Минимални број боја којим се могу правилно обојити гране графа G се назива *хроматски индекс графа G* и обележава се са $\chi_1(G)$.

Дефиниција 3.6. Граф је *грански k – хроматски*, ако је $\chi_1(G) = k$.

Хроматски индекс се може посматрати и као најмањи број дисјунктних мечинга на које се може разбити скуп грана графа. Те мечинге називамо *хроматске класе*.

Очигледне су следеће теореме.

Теорема 3.1. $\chi_1(G) \geq \Delta(G)$.

■

Теорема 3.2. За $H \subseteq G$ је $\chi_1(H) \leq \chi_1(G)$.

■

Теорема 3.3. Ако су $G_1, G_2, \dots, G_s$ компоненте графа G , тада је $\chi_1(G) = \max_{1 \leq i \leq s} \chi_1(G_i)$.

■

Теорема 3.4. $\chi_1(C_{2k}) = 2$; $\chi_1(C_{2k+1}) = 3$.

■

Теорема 3.5. (Кениг, 1916) Ако је G бипартитан граф са максималним степеном $\Delta(G)$, тада је $\chi_1(G) = \Delta(G)$.

Доказ. Због теореме 3.3 можемо узети да је граф G повезан. Доказ изводимо индукцијом по броју грана, m . За $m = 1$ је $G = K_1$, па је $\chi_1(G) = \Delta(G) = 1$ и тврђење важи. Претпоставимо да тврђење важи за сваки бипартитан граф са мање од m грана.

Нека је $G(X, Y)$ бипартитан граф са класама X и Y који има m грана. Нека је $e = xy$ ($x \in X, y \in Y$) грана у G . Граф $G' = G - e$ је такође бипартитан и како има једну грану мање него граф G , за њега важи индукцијска претпоставка, тј. $\chi_1(G') = \Delta(G')$. Гране графа G' могу се обојити са $\Delta(G')$ боја. Како је $\Delta(G') \leq \Delta(G)$, могу се обојити и са $\Delta(G)$ боја. Показаћемо да се са $\Delta(G)$ боја могу обојити гране графа G .

Нека је $\Delta(G) = r$ и нека су у r – бојењу грана графа G' коришћене боје $1, 2, \dots, r$. Ако је бојом i обојена нека грана која излази из чвора v , кажемо да је боја i *присутна* или да се боја i *појављује* у v . Како је $d_{G'}(x) = d_G(x) - 1 < r$, бар једна боја, рецимо боја i , одсутна је у чвору x . Слично, постоји боја j која је одсутна у чвору y .

Ако је боја i истовремено одсутна и у чвору x и у чвору y или ако је боја j одсутна и у чвору x , тада бојењем гране e бојом i у првом, односно бојом j у другом случају, добијамо бојење грана графа G са $r = \Delta(G)$ боја.

Узмимо да је боја i присутна у y , а боја j у x . Нека је H_{ij} подграф графа G' индукован гранама обојеним бојом i или бојом j . Компоненте графа H_{ij} су путеви или контуре чије су гране алтернативно обојене бојама i и j . Зваћемо их алтернативни путеви и алтернативне контуре. Тврдимо да су чворови x и y у различитим компонентама од H_{ij} .

Претпоставимо супротно. Тада су чворови x и y у истој компоненти и постоји $(x - y)$ – алтернативни пут $P = xv_1v_2 \dots v_k y$. У ствари, читава компонента је пут P . Како је боја i одсутна у x , грана xv_1 обојена бојом j . Даље, грана v_1v_2 обојена је бојом i , грана v_2v_3 бојом j , итд. На крају, грана $v_k y$ обојена је бојом i , јер је боја j одсутна у y . То значи да је пут P парне дужине. (Гране се алтернативно мењају, а прва и последња су различите боје.) Како је G бипартитан граф и $x \in X$, следи да је $y \in X$, што је контрадикција са $y \in Y$.

Тако чворови x и y припадају различитим компонентама графа H_{ij} . Ако се у компоненти која садржи x изврши алтернација боја, гране обојене бојом i обоје се бојом j и обратно, добија се опет правилно бојење грана графа G' . Међутим, у том бојењу боја j је „слободна“. Одсутна је и у чвору x и у чвору y . Бојењем гране бојом j постиже се r – бојење грана графа G . Отуда је $\chi_1(G) = r = \Delta(G)$.

■

Теорема 3.6. $\chi_1(K_{2k}) = 2k - 1$.

Доказ. Познато је да је граф K_{2k} 1 – факторабилан, тј. важи $E(K_{2k}) = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_{2k-1}$, где су $M_1, M_2, \dots, M_{2k-1}$ дисјунктни 1 – фактори. Ако се гране фактора M_i обоје бојом i , добија се $(2k-1)$ – бојење грана K_{2k} . Дакле, $\chi_1(K_{2k}) \leq 2k-1$. С обзиром да је $\Delta(K_{2k}) = 2k-1$, следи $\chi_1(K_{2k}) = 2k-1$. ■

Теорема 3.7. $\chi_1(K_{2k-1}) = 2k-1$.

Доказ. Прво ћемо показати да је $\chi_1(K_{2k-1}) \geq 2k-1$. Претпоставимо супротно, тј. $\chi_1(K_{2k-1}) = s \leq 2k-2$. Тада је $E(K_{2k-1}) = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_s$, где су E_i хроматске класе, односно дисјунктни мечинзи у K_{2k-1} . Како сваки мечинг у K_{2k-1} има највише $k-1$ грана, следи $|E(K_{2k-1})| \leq s(k-1) \leq (2k-2)(k-1) < (2k-1)(k-1) = \binom{2k-1}{2} = |E(K_{2k-1})|$. Контрадикција.

Са друге стране, $(2k-1)$ – бојење графа K_{2k-1} може се извести на следећи начин. Дода се нови чвор v и повеже гранама са свим чворовима из K_{2k-1} . Добије се K_{2k} чије се гране могу обојити са $2k-1$ боја. Затим се чвор v уклони. Остаје граф K_{2k-1} обојен са $2k-1$ боја из чега следи $\chi_1(K_{2k-1}) \leq 2k-1$. С обзиром на горе показану неједнакост (теорема 3.1), важи $\chi_1(K_{2k-1}) \geq 2k-1$. Отуда је $\chi_1(K_{2k-1}) = 2k-1$. ■

Све до 1964. године, све што се могло рећи о хроматском индексу општег графа било је $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \frac{3}{2} \Delta(G)$. Лева неједнакост је тривијална, док је десна доказана од стране Шенона¹⁸ за општи мултиграф. Визинг¹⁹ је 1964. године показао да за просте графове важи

Теорема 3.8. (Визинг, 1964) Ако је G непразан граф, тада је $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Доказ. Доказ се изводи индукцијом по броју грана, m . За $m = 1$ тврђење очигледно важи. Претпоставимо да важи за сваки граф са мање од m грана и посматрајмо граф G са m грана. Како неједнакост $\Delta(G) \leq \chi_1(G)$ увек важи, довољно је показати да се гране графа G могу обојити са $\Delta(G) + 1$ боја.

Нека је $\Delta(G) = r \geq 1$ и нека је $e = v_1v_2$ грана у G . По индукцијској претпоставци гране графа $G' = G - e$ могу се обојити са $\Delta(G') + 1$ боја. Како је $\Delta(G') \leq \Delta(G) = r$ гране од G' могу се обојити са $r + 1$ боја. Показаћемо да се и гране графа G могу обојити са $r + 1$ боја.

Уочимо једно $(r + 1)$ – бојење грана графа G' бојама $1, 2, \dots, r + 1$. Како $d_{G'}(v_1) = d_G(v_1) - 1 \leq r - 1$, бар једна од боја $1, 2, \dots, r + 1$ је одсутна у чвору v_1 . Из истог разлога једна боја је одсутна у v_2 . Ако је у v_1 и v_2 одсутна иста боја, рецимо s , тада бојењем гране e бојом s , добијамо $(r + 1)$ – бојење грана графа G и доказ је готов.

¹⁸ C. E. Shannon (1916. –2001.)

¹⁹ V. G. Vizing (1937. –)

Стога узмемо да је боја која је одсутна у v_1 присутна у v_2 и да је истовремено боја која је одсутна у v_2 присутна у v_1 . Нека је у v_1 одсутна боја 1, а у v_2 боја 2. При томе је боја 1 присутна у v_2 , док је боја 2 присутна у v_1 . Нека је грана v_1v_3 обојена бојом 2. За чворове v_1 и v_3 , као за v_1 и v_2 , карактеристична су два случаја. Први је када иста боја, c , недостаје и у v_1 и у v_3 . Тада се бојом c уместо бојом 2 боји грана v_1v_3 . Тиме се ослобађа боја 2 којом се боји необојена грана v_1v_2 . Резултат је опет $(r + 1)$ – бојење грана графа G .

У другом случају боја 1, која недостаје у v_1 присутна је у v_3 , док је боја која недостаје у v_3 , рецимо 3, присутна у v_1 . Уочимо тада грану v_1v_4 обојену бојом 3, итд.

Ова процедура не може неограничено да се понавља. Наиме, из чвора v_1 излази највише $\Delta(G) = r$ грана, а боја има $r + 1$. Како у v_1 недостаје боја 1, најдаље у r – том кораку долазимо у ситуацију да се у v_1 не појављује новообојена грана. Рецимо да се то догодило у i – том кораку. Грана v_1v_{i+1} обојена је бојом i . С обзиром на напред речено, могу настати следећа два карактеристична случаја.

- I У чворовима v_1 и v_{r+1} недостаје иста боја. Нека је то боја c . Тада се грана v_1v_{i+1} , уместо бојом i , боји бојом c . Након тога, ослобођеном бојом i се боји грана v_1v_i која је претходно била обојена бојом $i - 1$. Даље, новоослобођеном бојом $i - 1$ боји се грана v_1v_{i-1} итд. У последњем кораку грана v_1v_2 боји се непосредно ослобођеном бојом 2. Тако се постиже да су све гране графа G обојене са $r + 1$ боја.
- II У чвору v_{i+1} присутна је боја 1, али недостаје боја j . То значи да је боја j присутна у чвору v_1 и њом је обојена грана v_1v_{i+1} . Сада се грана v_1v_{i+1} за тренутак остави необојеном, а бојама $j, j - 1, \dots, 3, 2$ обоје се уназад, као у I, гране $v_1v_j, v_1v_{j-1}, \dots, v_1v_3, v_1v_2$, редом.

Означимо са G'' тако обојен граф $G - v_1v_{j+1}$. Нека је H_{1j} подграф графа G'' индукован гранама обојеним бојама 1 или j . Очигледно, $v_1, v_{i+1}, v_{j+1} \in V(H_{1j})$. Како из сваког чвора графа излазе две гране, компоненте графа H_{1j} су алтернативни путеви или алтернативне контуре у којима се наизменично смењују гране обојене бојама 1 и j . У чворовима v_{i+1} и v_{j+1} недостаје боја j , а у чвору v_1 боја 1. Стога је $d_{H_{1j}}(v_1) = d_{H_{1j}}(v_{i+1}) = d_{H_{1j}}(v_{j+1}) = 1$.

Из тога следи да су компоненте којима припадају чворови v_1, v_{i+1}, v_{j+1} алтернативни путеви. Како пут има тачно два краја, два чвора степена 1, највише два од чворова v_1, v_{i+1}, v_{j+1} су у истој компоненти. То значи да или v_1 и v_{i+1} леже у различитим компонентама или то важи за v_1 и v_{j+1} .

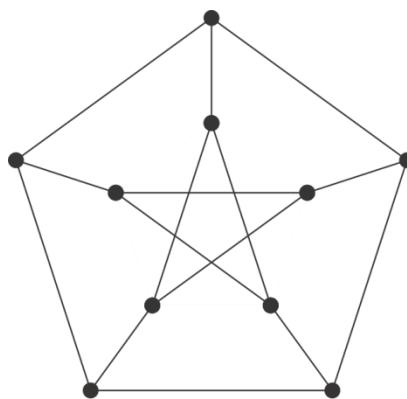
- (a) v_1 и v_{i+1} припадају различитим компонентама графа H_{1j} . Ако се у компоненти која садржи чвор v_{i+1} изврши алтернација боја 1 и j , добија се правилно бојење грана графа G'' у ком у чворовима v_1 и v_{i+1} недостаје боја 1. Уместо бојом i , грана v_1v_{i+1} боји се бојом 1. Ослобођеном бојом i боји се грана v_1v_i . Након тога ослобађа се боја $i - 1$ којом се боји грана v_1v_{i-1} итд. У последњем кораку непосредно осло-

бођеном бојом $j + 1$ боји се необојена грана v_1v_{j+1} . Приметимо да је у графу G'' у чвору v_{j+1} недостају боје j и $j + 1$. Тиме добијамо $(r + 1) -$ бојење грана графа G .

- (b) v_1 и v_{j+1} *припадају различитим компонентама графа* H_{1j} . Алтернацијом боја у компоненти која садржи v_{j+1} ослобађа се боја 1 у чвору v_{j+1} , након чега се необојена грана v_1v_{j+1} боји бојом 1. Опет су све гране графа G обојене са $r + 1$ боја.

Из свега наведеног следи $\chi_1(G) \leq r + 1 \leq \Delta(G) + 1$, чиме је доказ теореме завршен. ■

На основу теореме Визинга, закључујемо да се сви графови могу поделити у две класе према хроматском индексу. Кажемо да је непразан граф класе 1 уколико је $\chi_1(G) = \Delta(G)$, а класе 2 уколико је $\chi_1(G) = \Delta(G) + 1$. Карактеризација графова прве, односно друге класе, тзв. „**проблем класификације**“, још увек је отворен проблем. По Визинговој теореме је хроматски индекс r – регуларног графа или r или $r + 1$. На пример, контура C_k је класе 1 за k паран број, а класе 2 ако је k непаран; K_n је класе 1 ако је n паран, а класе 2 ако је n непаран. Генерално важи да је сваки регуларан граф са непарним бројем чворова, класе 1. С друге стране, не мора сваки регуларан граф са парним бројем чворова бити класе 1. На пример, Петерсенов граф је класе 2.



Слика 12. Петерсенов граф

Графови класе 1 преовлађују над графовима класе 2. Ердеш²⁰ и Вилсон²¹ су доказали да вероватноћа да случајан граф са n чворова буде класе 2 тежи нули када n тежи бесконачности. [11]

Тотални дефицит графа G који је има n чворова и m грана је број $n \cdot \Delta(G) - 2m$. Користећи појам тоталног дефицита можемо добити неке довољне услове да граф буде класе 2. Прво наводимо једну помоћну лему.

²⁰ P. Erdős (1913. –1996.)

²¹ R. J. Wilson (1943. –)

Лема 3.1. Ако је G граф са n чворова, m грана и максималног степена $\Delta(G)$, тада је G класе 2 ако је $m > \Delta(G) \cdot \lceil \frac{1}{2} n \rceil$.

Доказ. Претпоставимо да је G класе 1, тј. да је $\chi_1(G) = \Delta(G)$. Свако $\Delta(G)$ – бојење грана графа G врши партиципацију грана на $\Delta(G)$ мечинга. (Све гране обојене истом бојом чине један мечинг.) Број грана у сваком од $\Delta(G)$ мечинга је највише $\lceil \frac{1}{2} n \rceil$. Отуда је $m \leq \Delta(G) \lceil \frac{1}{2} n \rceil$, што је контрадикција с условом леме. ■

Теорема 3.9. Ако је G граф са непарним бројем чворова, максималног степена $\Delta(G)$, и тоталног дефицита мањег од $\Delta(G)$, тада је G класе 2.

Доказ. Ако G има n чворова и m грана, тада је тотални дефицит једнак $n \cdot \Delta(G) - 2m$. По услову теореме је $n \cdot \Delta(G) - 2m < \Delta(G)$. Из тога следи $m > \frac{1}{2} (n - 1) \Delta(G) = \Delta(G) \lceil \frac{1}{2} n \rceil (n - 1)$, па тврђење следи из леме 3.1. ■

Теорема 3.10. Ако је G регуларан граф са непарним бројем чворова, тада је класе 2.

Доказ. Тотални дефицит графа G једнак је нули и резултат следи из теореме 3.9. ■

Теорема 3.11. Ако је G регуларан граф који има артикулациони чвор, тада је G класе 2.

Доказ. Нека је G k – регуларан граф. Ако има непаран број чворова, тада тврђење следи из теореме 3.10. Нека G има паран број чворова и нека је v артикулациони чвор. Тада се G може представити као унија графова H и K , $G = H \cup K$, при чему је $H \cap K = \{v\}$. Можемо узети да H има непаран број чворова h . Тада сваки чвор из H , различит од v , има степен k у H . Степен чвора v у H је мањи од k . Из тога следи да је број грана у H једнак $\frac{1}{2} \{(h - 1)k + d_H(v)\} > k \lceil \frac{1}{2} h \rceil$. Из леме 3.1 следи да је H класе 2, $\chi_1(H) = \Delta(H) + 1 = k + 1$. Како је $H \subset G$, следи $\chi_1(G) \geq \chi_1(H) = k + 1 = \Delta(G) + 1$. Због Визингове теореме је $\chi_1(G) = \Delta(G) + 1$, тј. G је класе 2. ■

Овај резултат може бити побољшан. Наиме, према теореме 3.10 регуларан граф са непарним бројем чворова је класе 2. Испоставља се да се може уклонити одређен број грана, тако да добијени граф остане класе 2.

Теорема 3.12. Нека је H k – регуларан граф са непарним бројем чворова. Ако је G граф добијен од H уклањањем мање од $\frac{1}{2} k - 1$ грана, тада је G класе 2.

Доказ. Пошто је тотални дефицит графа G највише $k - 2$, тврђење следи директно из теореме 3.9. ■

Овај резултат је најбољи могући. Може се показати да се уклањањем $\frac{1}{2}k - 1$ или више грана у неким случајевима може добити граф класе 1.

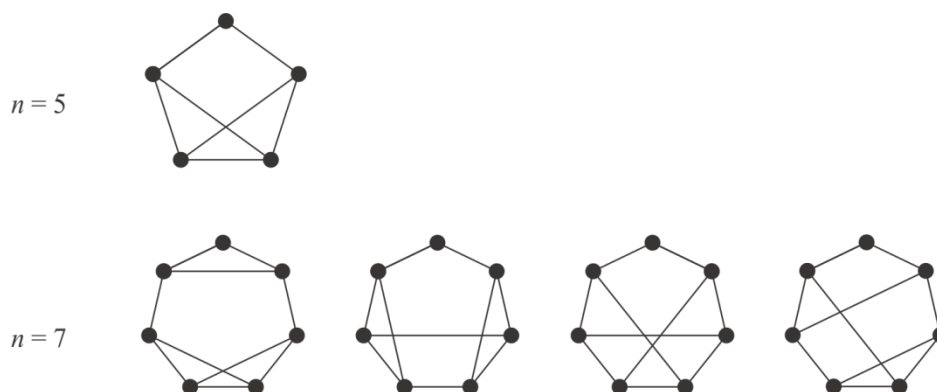
Други начин добијања графа класе 2 је дат у следећој теорему.

Теорема 3.13. Ако је H регуларан граф са парним бројем чворова и G граф добијен од H убацивањем новог чвора на неку грану од H , тада је G класе 2.

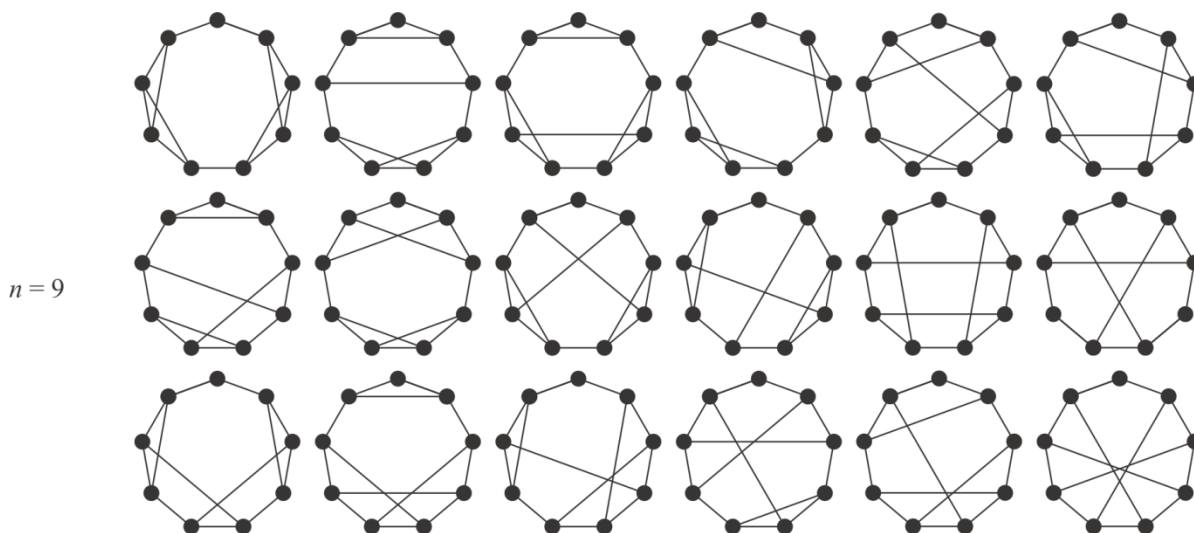
Доказ. Нека је $\Delta(G) = k$ и притом је H k – регуларан граф са n чворова. Граф G има $n + 1$ чворова. Отуда G има $m = \frac{1}{2}n \cdot \Delta(G) + 1$ грана. Због парности n је $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$, па је $m = \Delta(G) \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 > \Delta(G) \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Тврђење сада следи из леме 3.1. ■

Иако је проблем класификације генерално нерешен, значајан резултат је постигнут код планарних графова. Ако је G планаран граф чији је максималан степен највише 5, тада G може бити и класе 1 и класе 2. На пример, парне контуре и графови тетраедра, октаедра и икосаедра су класе 1. С друге стране, непарне контуре и графови који настају додавањем чвора у једну грану графа тетраедра, октаедра, односно икосаедра (као у теорему 3.13) су класе 2.

Дефиниција 3.7. Граф G је *критичан* ако је повезан граф класе 2 и ако се уклањањем било које гране смањује хроматски индекс. Уколико је $\Delta(G)$ максималан степен графа G , тада кажемо да је G $\Delta(G)$ – *критичан*.



Слика 13. 3 – критични графови са 5 и 7 чворова



Слика 14. 3 – критични графови са 9 чворова

Следећи резултат, тзв. теорема суседства, који припада Визингу дајемо без доказа. Доказ се може наћи у [12].

Теорема 3.14. (Визинг, 1965.) Нека је $G \Delta(G)$ – критичан граф, и нека су v и w суседни чворови у G са $d_G(v) = k$. Тада важи

- (a) ако је $k < \Delta(G)$, тада је w сусед са бар $\Delta(G) - k + 1$ чворова степена $\Delta(G)$;
- (b) ако је $k = \Delta(G)$, тада је w сусед са бар два чвора степена $\Delta(G)$.

■

Теорема 3.15. Уколико је G планаран граф са $\Delta(G) \geq 10$, тада је G класе 1.

Доказ. Претпоставимо да тврђење није тачно, односно да постоји планаран граф класе 2 са $\Delta(G) \geq 10$. Међу контрапримерима учимо онај са најмањим бројем грана. Нека је то граф G . По претпоставци, G је планаран, $\Delta(G) = d \geq 10$ и $\chi_1(G) = d + 1$. Пошто је планаран, G садржи бар један чвор степена највише 5. Нека је S скуп таквих чворова и нека је $H = G - S$. Како је и H планаран, и он садржи чвор степена највише 5. Нека је то w и нека је $d_H(w) \leq 5$. Пошто је $d_G(w) > 5$, чвор w је сусед са бар једним чвором из S . Нека је $v \in S$, такав да $wv \in E(G)$. С обзиром на дефиницију скупа S , важи $d_G(v) = k \leq 5$. Пошто је G граф са најмањим бројем грана, следи да је он $\Delta(G)$ – критичан, па по теорему 3.14, w је сусед са најмање $d - k + 1$ чворова степена d . Како је $d - k + 1 \geq 10 - 5 + 1 = 6$, w је сусед са најмање шест чворова степена d . Пошто је $d \geq 10$, w је суседан са бар шест чворова графа H , што је у контрадикцији са претпоставком $d_H(w) \leq 5$.

■

Визинг је поправио овај резултат доказавши следеће тврђење [22].

Теорема 3.16. Ако је G планаран граф са $\Delta(G) \geq 8$, тада је G класе 1. ■

Проблем одређивања класе планарног графа чији је максимални степен 6 или 7 и даље је отворен. Визинг [23] је поставио следећу хипотезу.

Хипотеза. Сваки планаран граф са максималним степеном 6 или 7 је класе 1.

Дефиниција 3.8. За граф кажемо да је *препун* уколико је $|E| > \Delta(G) \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$.

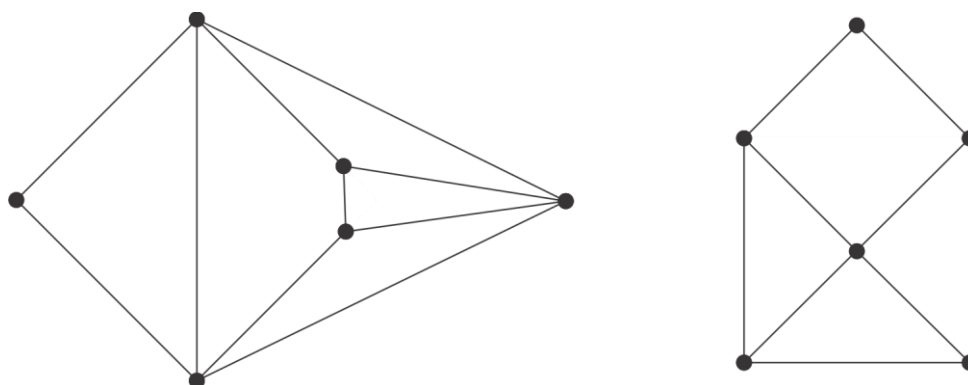
Симур²² [19] је претпоставио да је планаран граф класе 2 ако и само ако G садржи препун подграф H такав да $\Delta(G) = \Delta(H)$. Уколико се докаже да је тачна, Симурова хипотеза би имплицирала да сваки планаран граф G такав да важи $\Delta(G) \geq 6$ је класе 1.

²² P. Seymour (1950. –)

Глава 4. Бојење планарних графова и бојење мапа. Проблема четири боје

Као што је већ речено у првој глави, проблем четири боје био је један од главних иницијатора развоја теорије графова. Пошто је сам проблем потекао од бојења мапа у картографији, а завршио у математици, прошао је кроз одређене модификације и преформулације. Следи кратак осврт на главне еквиваленте и последице проблема четири боје.

Дефиниција 4.1. *Мапа* или *карта* је повезан планаран граф који нема мостова, односно грански 2 – повезан планаран граф.



Слика 15. Примери мапа

Свака мапа смештена у раван (сферу) дели раван (сферу) на неколико области. Две области су *суседне* уколико имају бар једну заједничку ивицу.

Дефиниција 4.2. *Бојење мапе* је придруживање боја областима мапе тако да су суседним областима придружене различите боје.

Дефиниција 4.3. Планаран граф G је *обласно k – обојив* ако се области могу обојити са највише k боја.

Теорема 4.1. (Проблем четири боје) Свака мапа је обласно 4 – обојива.

■

Дефиниција 4.4. *Обласни хроматски број* $\chi^*(G)$ планарног графа G је минимално k за које је G обласно k – обојив.

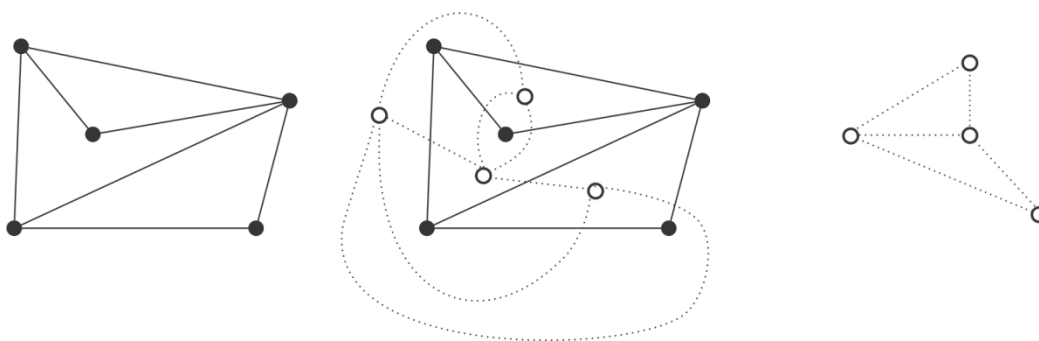
Сваком повезаном планарном графу G може се придружити мултиграф G_d .

Дефиниција 4.5. Дуал G_d је граф који се добија из графа G , тако што се свакој области графа G додели по један одговарајући чвор, а између два чвора у G_d постоји грана ако и само ако су одговарајуће области графа G суседне, тј. имају заједничку грану (ивицу).

Из дефиниције дуала видимо да G_d садржи петљу ако и само ако G садржи мост. Такође, из дефиниције следи да је G_d планаран и да је $(G_d)_d = G$.

Пошто је број грана између два чвора у G_d једнак броју заједничких грана (ивица) одговарајућих области, G_d може да буде мултиграф.

Дефиниција 4.6. Подвучен граф $\tilde{G}_d$ је граф који се добија из дуала G_d , тако што се сваки скуп паралелних грана у G_d замени једном граном и све петље уклоне.



Слика 16. Пример графа, његовог дуала, и подвученог графа

Из дефиниције дуала непосредно следе тврђења.

Теорема 4.2. Мапа G је обласно k – обојива ако и само ако је дуал G_d чворно k – обојив. ■

Теорема 4.3. Нека је G повезан планаран граф без петљи. Тада је G чворно k – обојив ако и само ако је његов дуал G_d обласно k – обојив. ■

Како је из претходне теореме $\chi^*(G) = \chi(G_d)$, очигледно следи тврђење.

Теорема 4.4. Сваки планаран граф је обласно 4 – обојив ако и само ако је сваки планаран граф чворно 4 – обојив. ■

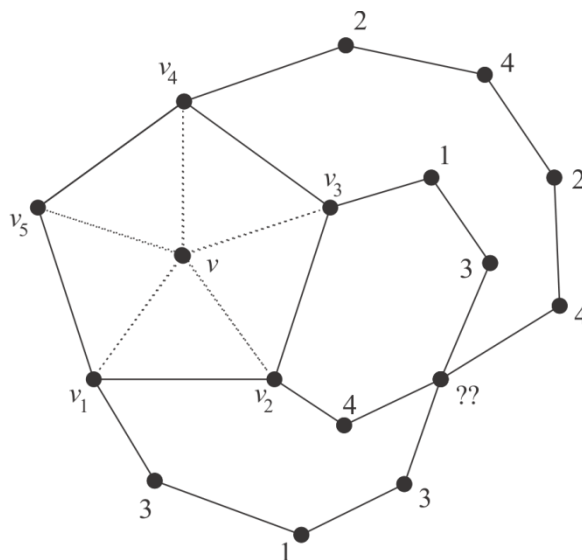
У теорији графова је проблем четири боје чешће помињан као проблем бојења чворова и грана уместо бојења области. Следећа теорема, последица теорема 4.1 и 4.4, еквивалент је проблема четири боје, изражен преко бојења чворова.

Теорема 4.5. (Теорема четири боје) Сваки планаран граф је чворно 4 – обојив. ■

Поменули смо на почетку да је Кемпеов доказ проблема четири боје био сматран коректним више од 10 година. Основна идеја је била у коришћењу такозваних алтернативних путева, касније названих Кемпеовим ланцима. Међутим, 10 година након објављивања Хивуд је указао на грешку у коришћењу те методе која се, нажалост, није могла поправити. Ипак, користећи исту идеју, Хивуд је доказао следеће тврђење.

Теорема 4.6. Сваки планаран граф је чворно 5 – обојив.

Доказ. Нека је G планаран граф. Без умањења општости може се узети да је повезан. Доказ ћемо дати индукцијом по броју чворова n . За $n \leq 5$ очигледно је да тврђење важи. Зато узмемо да је G планаран граф са $n \geq 6$ чворова и да тврђење важи за сваки планаран граф са мање од n чворова.



Слика 17.

Знамо да сваки планаран граф G садржи чвор v степена највише 5, $d(v) \leq 5$. Уочимо граф $G' = G - v$. Он је планаран, и како има мање од n чворова, његови чворови се по индукцијској претпоставци могу обојити са 5 боја. Нека су у бојењу чворова графа G' употребљене боје 1, 2, 3, 4, 5. Ако је $d_{G'}(v) < 5$, тада једном од боја није обојен ниједан сусед чвора v . Бојењем чвора v том бојом добија се 5 – бојење чворова графа G и доказ је готов. Зато узмемо да је $d_{G'}(v) = 5$.

Нека су v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 суседи чвора v у G као на слици 17. Без утицаја на општост можемо узети да је чвор v_i , за $i = 1, 2, 3, 4, 5$ обојен бојом i . Обележимо са H_{ij} , $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ подграф графа G' индукован чворовима обојним бојом i или бојом j . Претпоставимо прво да за неко i и j чворови v_i и v_j припадају различитим компонентама графа H_{ij} . Алтернацијом боја у компоненти која садржи чвор v_i постиже се да чвор v_i такође буде обојен бојом j . На тај начин добија се ново бојење чворова графа G' у којем ниједан сусед чвора v није обојен бојом i . Бојом i боји се чвор v чиме су сви чворови графа G обојени са 5 боја.

Претпоставимо да за свако i и j чворови v_i и v_j припадају истој компоненти графа H_{ij} . У том случају алтернација боја не помаже. Показаћемо да је такав случај немогућ. Уочимо компоненту H_{13} . Нека су чворови v_1 и v_3 повезани путем P_{13} . Чворови пута P_{13} обојени су алтернативно бојама 1 и 3. Како је G планаран граф контура која се састоји од грана vv_1 и vv_3 и пута P_{13} раздваја чворове v_2 и v_4 . Један је у њеној унутрашњости а други у спољашњости. Ако са P_{24} означимо $(v_2 - v_4)$ – пут у подграфу H_{24} , тада се на основу Жорданове теореме путеви P_{13} и P_{24} секу. С обзиром на планарност графа G , тај пресек је неки чвор u . Међутим, чворови пута P_{13} обојени су бојама 1 и 3, а чворови пута P_{24} бојама 2 или 4. Нема боје за чвор u , што је контрадикција.

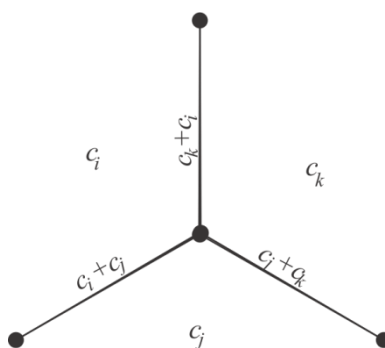
■

Један од најпознатијих еквивалената теореме 4 боје које се односи на бојење грана је тврђење Тејта.

Теорема 4.7. (Тејт, 1880) Теорема четири боје је еквивалена тврђењу да се гране сваке кубне (3 – регуларне) мапе могу обојити са 3 боје.

Доказ. ($\Rightarrow$) Свака мапа се може (обласно) обојити са 4 боје. Нека је G кубна мапа. Њене области се према претпоставици могу обојити са 4 боје. Нека су то боје $c_0 = (0, 0)$, $c_1 = (0, 1)$, $c_2 = (1, 0)$, $c_3 = (1, 1)$ где су боје представљене векторима. Бојење грана графа G са 3 боје реализује се на следећи начин. Ако је грана граница две области обојене бојама c_i и c_j , тада се та грана боји бојом $c_i + c_j$. Сабирање координата вектора c_i и c_j је по модулу 2. Бојење је приказано на слици 18.

На пример, ако је грана e граница области обојених бојама c_1 и c_3 , тада се e боји бојом $c_1 + c_3 = (0, 1) + (1, 1) = (1, 0) = c_2$. Лако се констатује да при том ниједна грана не добија боју c_0 и да су сваке три гране инцидентне са истим чвором увек различито обојене. На тај начин све гране графа G су правилно обојене бојама c_1 , c_2 и c_3 .



Слика 18.

($\Leftarrow$) Гране сваке кубне (3 – регуларне) мапе се могу обојити са 3 боје. Претпоставимо да постоји мапа чије се области не могу обојити са четири боје. Ако са G означимо граф дуалан тој мапи (који је такође планаран), тада се чворови графа G не могу обојити са

четири боје. Према претходној теореми је $\chi(G) = 5$. Нека је H триангулација од G . Тада је H_d , дуал од H , кубна мапа. По претпоставци, гране графа H_d могу се обојити са три боје. Нека су то боје c_1, c_2, c_3 . Посматрајмо подграф $(H_{ij})_d$ индукован бојама c_i и c_j . Како је H_d 3 – регуларан граф, у сваком чвору су присутне све три боје. Стога је $(H_{ij})_d$ 2 – регуларан граф, тј. унија дисјунктних контура. Одавде је $(H_{ij})_d$ обласно 2 – обојив. Свака област графа H_d пресек је једне области графа $(H_{12})_d$ и једне области графа $(H_{23})_d$. Нека су области $(H_{12})_d$ обојене бојама a и b , а области $(H_{23})_d$ бојама c и d . Ако је f област графа H_d која лежи у пресеку неке области графа $(H_{12})_d$ обојене бојом $x, x \in \{a, b\}$ и неке области графа $(H_{23})_d$ обојене бојом $y, y \in \{c, d\}$, обојимо област f бојом (x, y) . С обзиром да је $H_d = (H_{12})_d \cup (H_{23})_d$, лако се види да је ово правилно 4 – бојење области графа H_d . Дакле, $\chi^*(H_d) \leq 4$.

Граф G је подграф графа H . Отуда је $\chi(G) \leq \chi(H)$. С друге стране, из $\chi(H) = \chi^*(H_d) \leq 4$ следи $\chi(G) \leq 4$. Но, то је контрадикција са претпоставком $\chi(G) = 5$. ■

Последица. Сваки кубни планарни граф који нема мост има хроматски индекс 3.

Интересантна су и следећа тврђења.

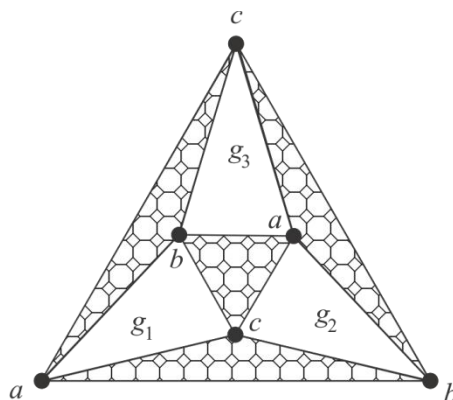
Теорема 4.8. Мапа G је 2 – обојива ако и само ако је G Ојлеров граф.

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је G 2 – обојива мапа. Тада је $\chi(G_d) = 2$ по теореми 4.2, и дуал G_d је бипартитан граф. Како је G_d планаран граф чије су све области парног степена (јер су све контуре у бипартитном графу парне дужине), степен сваког чвора дуала дуала $(G_d)_d$ је паран. А како је повезан, $(G_d)_d$ је Ојлеров граф. Па из $(G_d)_d \cong G$ следи да је G Ојлеров граф.

($\Leftarrow$) G је Ојлеров граф. Тада је и граф $(G_d)_d$ Ојлеров. Како је $(G_d)_d$ дуал од G_d , G_d је бипартитан граф. Следи $\chi(G_d) = 2$. На основу теореме 4.2, области мапе G могу се обојити са 2 боје. ■

Теорема 4.9. Ако је G планаран Ојлеров граф чије су све области троуглови, тада је $\chi(G) = 3$.

Доказ. Очигледно, G је мапа. На основу претходне теореме, области графа G могу да се обоје са 2 боје, рецимо црвено и плаво. Показаћемо како се сада чворови графа G могу правилно обојити са три боје a, b, c . Нека је f црвена област. Обојимо чворове области f бојама a, b, c , тако да троугао abc има позитивну оријентацију (Супротно смеру казаљке на сату), као на слици 19. Тада су три троугаоне области g_1, g_2, g_3 суседне са f , плаве. Њихове необојене чворове бојимо преосталом бојом a, b или c . Лакно се види да су оријентације троуглова abc које чине границе области g_1, g_2 и g_3 негативне (смер казаљке на сату).



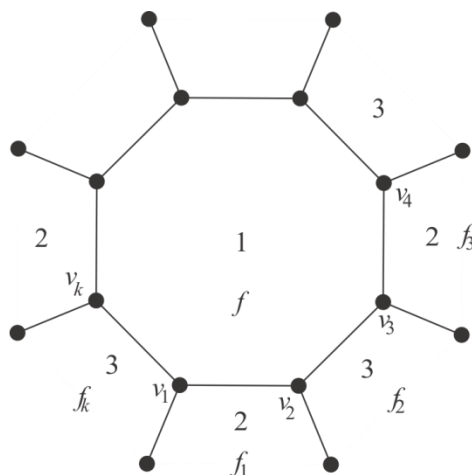
Слика 19.

Даље примењујемо исти поступак. Суседи од g_1, g_2, g_3 су поново црвене области. Боје њихових необојених чворова једнозначно су одређене бојама претходно обојених чворова итд. С обзиром да је G повезан граф, на овај начин биће обојени сви чворови. При томе се код црвених троуглова темена обојена са a, b, c ређају у позитивном смеру, док је код плавих троуглова тај смер негативан. Тако се постиже да су чворови графа G обојени са три боје, из чега следи $\chi(G) \leq 3$. Како је $K_3 \subset G$, следи $\chi(G) = 3$.

■

Теорема 4.10. Кубна мапа G је обласно 3 – обојива ако и само ако је свака област парног степена.

Доказ. ($\Rightarrow$) G је 3 – обојива кубна мапа. Нека су области мапе G обојене бојама 1, 2 и 3 и нека је f једна од њих. Узмимо да је f обојена бојом 1 и огранична контуром $v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k v_1$.



Слика 20.

Нека су $f_1, f_2, \dots, f_k$ области које са f имају заједничке гране $v_1 v_2, \dots, v_{k-1} v_k, v_k v_1$, редом. Тада су оне обојене бојама 2 или 3 као што је приказано на слици 20. Како је $d(v_i) = 3, i = 1,$

2, ..., k , области f_{i-1} и f_i су суседне, па су стога различито обојене. То значи да се боје 2 и 3 алтернативно смењују, одакле следи да је k паран број. Област f је парног степена.

($\Leftarrow$) Свака област кубне мапе G је парног степена. Тада је G_d Ојлеров граф чија је свака област троугао. На основу теореме 4.9 је G_d чворно 3 – обојив, а на основу теореме 4.3, G је обласно 3 – обојив.

■

Закључак

Графови су нашли велику примену у многим математичким али и другим, нематематичким областима. Срећемо их у областима попут комбинаторике, комбинаторне оптимизације, операционих истраживања, линеарне алгебре, комплексне анализе, али и у електротехници, саобраћају, информатици, рачунарству, хемији, физици, социологији, војним наукама. Главни разлог за то је њихова релативно једноставна структура и, истовремено, изузетно богат садржај који омогућава широке и разнолике примене.

Једна од лепих примена бојења грана графа је дата у раду Клод Шенона о електричним мрежама из 1949. године. Шенон је разматрао следећи проблем: *„Претпоставимо да имамо електричну јединицу, нешто као панел за релеј, и на њему одређени број релеја, прекидача, и других уређаја $A, B, \dots, E$ који су међусобно повезани. Повезане жице су прво спојене у кабл, тако да су жице које су спојене са уређајем A повезане у један исти кабл, жице спојене са B у други, и тако даље. У циљу њиховог издвајања је неопходно да се све жице које се појављују из истог кабла буду различито обојене. Који је најмањи број боја неопходан за целу мрежу?“* Шенон је дао решење овог проблема користећи резултате из бојења графова до којих је сам дошао.

Значајни су и проблеми распоређивања из области операционих истраживања који се могу формулисати уз помоћ терминологије теорије графова, а као такви, и решени уз помоћ метода бојења грана. Пример ових проблема је Лукасов проблем ученица: *„Сваки дан $2k$ ученица шета у k парова. Колико пута могу да шетају тако да се било које две девојчице неће шетати заједно више од једном?“* Одговор на овај проблем је $2k - 1$, што је еквивалентно чињеници да је хроматски индекс комплетног графа, K_{2k} , једнак $2k - 1$.

Проблеми слични овима, изражени су и кроз оквире теорије матроида.

Колин Мекдиармид²³ је неке од резултата бојења графова користио у проблемима теорије матрица.

Латински квадрати се често користе у статистици. Познат је проблем одређивања услова под којим се дати симетрични $k \times k$ латински квадрат може "потопити" у симетричан $n \times n$ латински квадрат, где је $k < n$. Хилтон²⁴ је показао да се проблеми ове врсте могу згодно формулисати и разматрати у терминима бојења грана графова.

Бојења графова су нашли примену и свакодневной пракси као што су: прављење реда часова, прављење реда вожње или реда летења и сл.

²³ Colin McDiarmid

²⁴ A. J. W. Hilton (1941 –)

Литература

- [1] Appel K., Haken W., Koch J., Every planar map is four-colorable, Illinois J. Math 21 (1977).
- [2] Beineke L. W., Wilson R. J. On the edge chromatic number of a graph, Discrete Math 5 (1973).
- [3] Beineke L. W., Wilson R. J., Selected topics in graph theory, Academic Press, London (1978).
- [4] Bondy J. A., Murty U.S.R., Graph Theory with Applications, North-Holland, New York (1976).
- [5] Bošnjak I., Mašulović D., Petrović V., Tošić R., *Zbirka zadataka iz teorije grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad (2005).
- [6] Brooks R. L., On coloring the nodes of a network, Proc Cambridge Philos Soc (1941).
- [7] Cayley A., On the colouring of maps, Proc Royal Geog Soc 1 (1879).
- [8] Chartrand G., Lesniak L., *Graphs & Digraphs*, Chapman & Hall/CRC, New York (2005).
- [9] Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R., The strong perfect graph theorem. Preprint
- [10] Dirac G. A., A property of 4-chromatic graph and some remarks on critical graphs, J. London Math Soc 27 (1952).
- [11] Erdős P., Wilson R. J., On the chromatic index of almost all graphs, J Combinatorial Theory (B) 26 (1977).
- [12] Fiorini S., Wilson R. J., *Edge – colouring of graphs*, Pitman, London (1977).
- [13] Galai T., *Theory of Graphs*, Academic Press, New York (1968).
- [14] Guthrie Frederick, Note on the colouring of maps, Proc Royal Soc Edinburgh 10 (1880).

- [15] Heawood P. J., Map–colour Theorem, Quart J Math 24 (1890).
- [16] Lovász L., Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. Discrete Math 2 (1972).
- [17] Lovász L., Three short proofs in graph theory, J Combin Theory 19B (1975).
- [18] Petrović V., *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad (1998).
- [19] Seymour P. D., On multicolourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte, Proc London Math Soc 38 (1979).
- [20] Szekeres G., Wilf H.S., An inequality for the chromatic number of a graph, J Combin Theory 4 (1968).
- [21] Tait P. G., Remarks on the colouring of maps, Proc Royal Soc London 10 (1880).
- [22] Vizing V. G., Critical graphs with a given chromatic class, Diskret Analiz 5 (1965).
- [23] Vizing V. G., Some unsolved problems in graph theory, Uspekhi Mat Nauk 23 (1968).
- [24] Woodall D. R., Willson R. J., *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press, New York (1978).
- [25] Wilson R. A., *Graph colourings and the Four–colour Theorem*, Oxford University Press, Oxford (2002).

Биографија



Данка Вујанац је рођена 27. маја 1990. године у Новом Пазару, Србија. Основну школу „Сутјеска“ у Рашкој је завршила 2005. године као носилац Вукове дипломе. Исте године је уписала природно–математички смер у Гимназији у Рашкој. Завршила је средњу школу 2009. године, поново као носилац Вукове дипломе. Исте године је уписала Природно–математички факултет у Новом Саду, смер Математика. Основне студије је завршила 2012. године са просечном оценом 8,88 и исте године се уписала на мастер студије, модул Настава математике, на Природно–математичком факултету у Новом Саду. На мастер студијама је положила испите предвиђене планом и програмом и стекла право одбране мастер рада.

Нови Сад, март 2015.

Данка Вујанац

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: Монографска документација

ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал

ТЗ

Врста рада: Мастер рад

ВР

Аутор: Данка Вујанац

АУ

Ментор: др Војислав Петровић

МН

Наслов рада: Бојење графова

МР

Језик публикације: српски (ћирилица)

ЈП

Језик извода: српски и енглески

ЈИ

Земља публиковања: Србија

ЗП

Уже географско подручје: Војводина

УГП

Година: 2015.

ГО

Издавач: Ауторски репринт

ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3

МА

Физички опис рада: 4 поглавља/ 41 страна / 25 литература/ 20 слика/ 1 фотографија

ФО

Научна област: Математика

НО

Научна дисциплина: Дискретна математика, теорија графова

НД

Кључне речи: Бојења, хроматски број, хроматски индекс, проблем четири боје

ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику

ЧУ

Важна напомена:

ВН

Извод: У овом раду се бавимо проблемом правилног бојења чворова, грана и области графова. Због непостојања ефикасног поступка за одређивање хроматског броја произвољног графа, анализира се горња и доња оцена хроматског броја општег графа. Дат је хроматски индекс појединих графова, за које је то могуће. Говори се и о проблему класификације као о још отвореном питању, али и о резултатима постигнутим на

решавању проблема класификације када су у питању планарни графови. На крају рада се бавимо проблемом четири боје, односно бојењем планарних графова и мапа. Дати су и разни еквиваленти теореме 4 боје.

ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 04.03.2014.

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: др Борис Шобот, доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: др Бојан Башић, доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: Др Војислав Петровић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code:

CC

Author: Danka Vujanac

AU

Mentor: dr Vojislav Petrović

MN

Title: Graph colourings

XI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: 4 chapters/ 41 pages/ 25 references/ 20 pictures/ 1 photograph

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Discrete mathematics, graph theory

SD

Key words: Colourings, chromatic number, chromatic index, Four Color Problem

SKW UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics

HD

Note:

Abstract: In this paper we consider a problem of regular colourings of vertices, edges and regions of graph. Because there is no efficient algorithm for determining chromatic number of arbitrary graph, we analyze upper and lower bounds of chromatic number of arbitrary graph. It is given a chromatic index of some graphs, for which that is possible to do. We speak about the "Classification Problem" like a still open question, but also about results that have been achieved on the solving Classification Problem when the subject are planar graphs. At the end of the paper we consider Four Colour Problem, that is, colouring of planar graphs and maps. There are some equivalents of the Four Colour Conjecture.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 04.3.2014.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr, Boris Šobot, Docent, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Bojan Bašić, Docent, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Vojislav Petrović, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad