UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Danijela Popović

PRIMENA DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE U TEORIJI RELATIVNOSTI

-master rad-

Mentor:
dr Nevena Pušić

Novi Sad, 2012

SADRŽAJ

UVOD

Ovaj master rad je nastao iz želje da se znanja iz difererencijalne geometrije sagledaju, ne samo sa matematičkog aspekta, već i sa aspekta njoj srodne nauke – fizike. Sam rad ima šest poglavlja, sa velikim brojem definicija i osnovnih teorema koje su bile neophodne za bolje razumevanje osnovnih pojmova diferencijalne geometrije na kojima je izgrađena Opšta teorija relativnosti (OTR) čiji tvorac je Albert Ajnštajn, a kojom su se bavili Elvin Kristofel, Stiven Hoking i mnogi drugi fizičari. Ono što je autora privuklo samoj ideji pisanja master rada na ovu temu je upoznavanje nekih neeuklidskih prostora, gde neka tvrđenja koja važe u Euklidovom prostoru, u neeuklidskom prostoru su netačna, a najbolji način za razumevanje takvog prostora je sama primena istog.

U prvom poglavlju rada su date osnovne operacije sa tenzorima, koji čine osnovni aspekt za shvatanje OTR. Važna tvrđenja, definicije, kao i slike neophodne za razumevanje osnovnih pojmova su preuzete i detaljnije dokazane i objašnjene u [17].

Drugo poglavlje je posvećeno kratkom upoznavanju sa specijalnom teorijom relativnosti, koje je dato više zbog istorijskog uvoda u tok nastajanja OTR, stoga se autor nije previše zadržavao na prostoru Minkovskog, već su date neke osnovne karakteristike. Specijalna teorija relativnosti je važna jer je ona podstakla OTR, koja je proširila revoluciju u našim idejama o prostoru i vremenu. Osnovne osobine prostora i metrike, u prostoru Minkovskog su preuzete iz [20]. Slike u ovom poglavlju su preuzete iz [10].

U poglavlju **Osnovi Rimanove geometrije** je dokazana fudamentalna teorema koja govori o postojanju metrički kompatibilne povezanosti na mnogostrukosti, što je bitno za stvaranje uslova neophodnih za proces diferenciranja na mnogostrukostima. Pojmovi iz datog poglavlja su detaljnije objašnjeni u [13].

Četvrto poglavlje je logički sled prvog i trećeg poglavlja. Tu je objašnjeno detaljnije kovarijantno diferenciranje, da su geodezijske linije izuzetno važne u Rimanovoj geometriji jer za zakrivljen prostor predstavljaju isto što i prave u Euklidskom prostoru. Tvrđenja iz datog poglavlja se mogu pogledati u [20] i [13].

Peto poglavlje daje bitnu razliku između Euklidovog i Rimanovog prostora, da samo u slučaju kada je Riman-Kristofelov tenzor jednak nuli, prostor je ravan. Za detaljnija objašnjenja i tvrđenja koja nisu izvedena u ovom poglavlju, autor upućuje čitaoca na [20], [3], [16].

U šestom poglavlju se vidi direktna primena diferencijalne geometrije na izvođenje Anštajnovih jednačina. Tvrđenja čiji dokazi nisu dati u ovom poglavlju, čitalac može pogledati u [20], [16].

Ovo je bilo samo kratak pregled rada, u samom radu su svi prethodni pojmovi objašnjeni detaljnije.

Na samu ideju za pisanje master rada na ovu temu, autor je došao u saradnji sa profesorkom dr Nevenom Pušić, kojoj bih se ovom prilikom zahvalila za svu neophodnu podršku koju mi je pružila, ne samo pri pisanju master rada, već i tokom studija. Takođe se zahvaljujem i profesoru dr Milanu Pantiću i profesorki dr Sanji Konjik na korisnim sugestijama pri nastajanju rada. Zahvaljujem se roditeljima Mileni i Radušku, bratu i sestri Aleksandru i Dragani, za pruženu podršku u dosadašnjim životnim pobedama i porazima. Za tehničku podršku zahvaljujem se Mladenu Karakliću.

Ime i prezime
Danijela Popović

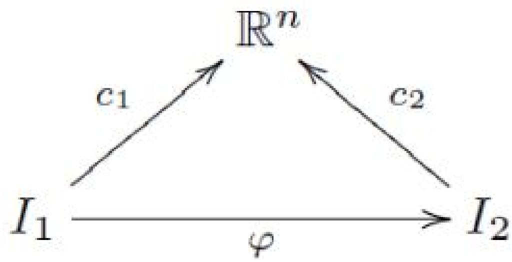
Novi Sad, avgust 2012.

1. OSNOVI TENZORSKE ANALIZE

1.1. Osnovni pojmovi diferencijalne geometrije. Diferenciranje na mnogostrukostima

Definicija 1.1.1.
Regularna parametrizovana kriva je neprekidno definisana na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, tako da važi $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t) \neq 0$ za sve $t \in I$.

Definicija 1.1.2.
Regularna kriva je klasa ekvivalencije regularnih parametrizovanih krivih s obzirom na sledeću relaciju ekvivalencije: neka su $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ regularne parametrizovane krive. Tada je c_1 ekvivalentno sa c_2 ako postoji difeomorfizam $\varphi : I_1 \to I_2$ (tj. φ je bijekcija i φ, φ^{-1} su C^1) takvo da je $c_2 \circ \varphi = c_1$ i $\varphi' > 0$ (takvo φ očuvava orijentaciju).



SLIKA 1.1. PARAMETRIZACIJA KRIVE

Teorema 1.1.3. (Teorema o inverznoj funkciji)
Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : U \to \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $p_0 \in U$, $y_0 := f(p_0)$ i $Df(p_0)$ invertibilno ($\det Df(p_0) \neq 0$*). Tada je lokalno oko p_0, f difeomorfizam, tj. postoji $U_1 \subseteq U$, otvorena okolina od p_0 i V_1 otvorena okolina od y_0, takva da je $f : U_1 \to V_1$ bijekcija i $f^{-1} : V_1 \to U_1$ je takođe $\mathcal{C}^\infty$ preslikavanje.*

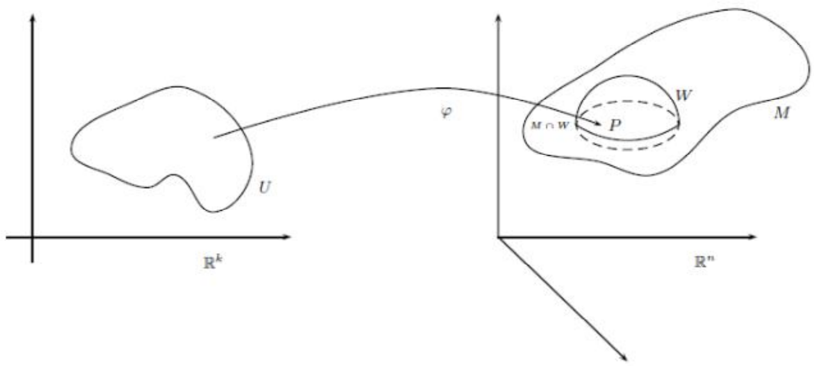
Teorema 1.1.4. (Teorema o implicitnoj funkciji)
Neka su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoreni, $f : U \times V \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^\infty$, $(p_0, y_0) \in U \times V$, $f(p_0, y_0) = 0$ i neka je $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0, y_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertibilno ($det \frac{\partial f}{\partial y}(p_0, y_0) \neq 0$). Tada postoje otvorene okoline $U_1 \subseteq U$ od p_0, $V_1 \subseteq V$ od y_0, takve da: $\forall p \in U_1 \exists! \, y = y(p) \in V_1$ i važi da je $f\big(p, y(p)\big) = 0$. Preslikavanje $p \longmapsto y(p)$ je $\mathcal{C}^\infty$.

Pojam mnogostrukosti je izuzetno važan pojam u diferencijalnoj geometriji i teoriji relativnosti, jer omogućava da se komplikovanije strukture izraze i shvate u okviru dobro razumljivih svojstava jednostavnijih prostora. Krive i površi su primeri mnogostrukosti dimenzija 1 i 2, respektivno. U samom izračunavanju mnogostrukosti se i polazi od krivih i površi u $\mathbb{R}^n$, dok apstraktne mnogostrukosti ne moraju da budu date u euklidskom prostoru.

Definicija 1.1.5.
Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren skup i $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^\infty$-preslikavanje. φ je regularno akko je za sve $x \in U$ rang jakobijana $D\varphi(x)$ maksimalan, tj. jednak sa $min\{k, n\}$. Tada za rang $rk(D\varphi)$ od $D\varphi$ imamo $rk\big(D\varphi(x)\big) = \dim Im\big(D\varphi(x)\big) = \dim(\mathbb{R}^k) - \dim\big(KerD\varphi(x)\big)$. Dakle, ako je $k \leq n$,

tada je $KerD\varphi(x) = \{0\}$ i $D\varphi(x)$ je injektivno za sve x. U ovom slučaju se φ naziva imerzijom. Za $k \geq n$, $D\varphi(x)$ je sirjekcija sve x i φ se naziva submerzija.

Definicija 1.1.6.
Podskup M od $\mathbb{R}^n$ je k-dimenziona podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$ ako važi: Za svako $p \in M$ postoji otvorena okolina W od p u $\mathbb{R}^n$, otvoreni podskup U od $\mathbb{R}^k$ i imerzija $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ takva da je $\varphi: U \to \varphi(U)$ homomorfizam i $\varphi(U) = M \cap W$. Takvo φ je lokalna parametrizacija od M.



SLIKA 1.2. LOKALNA PARAMETRIZACIJA

Definicija 1.1.7.
Neka su $M \subseteq \mathbb{R}^m$ i $N \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnogostrukosti. Preslikavanje $f: M \to N$ je C^∞, ako za sve $p \in M$ postoji okolina U_p od p u $\mathbb{R}^m$ i neko glatko preslikavanje $\bar{f}: U_p \to \mathbb{R}^n$ tako da važi $\bar{f}\big|_{M\cap U_p} = f|_{M\cap U_p}$. Ako je f bijekcija, f i f^{-1} glatki, f je difeomorfizam.

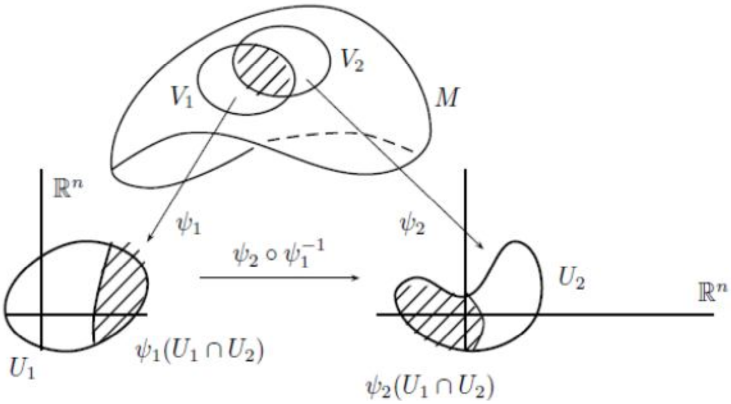
Definicija 1.1.8.
Neka je M k-dimenziona podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$. Karta (ψ, V) od M je difeomorfizam otvorenog skupa $V \subseteq M$ u otvoren podskup od $\mathbb{R}^k$.

Karte su bitan pojam u diferencijalnoj geometriji, jer se pomoću njih može preći lokalno iz nekog nepoznatog prostora u kom se nalazi podmnogostrukost, koji može da bude neeuklidski, u prostor $\mathbb{R}^k$ koji je intuitivno bliži, jasniji, koncept datog prostora i njegove osobine su poznatije, nego proizvoljni prostor u kom se nalazi podmnogostrukost.

Teorema 1.1.9.
Neka su $M^m \subseteq \mathbb{R}^s$, $N^n \subseteq \mathbb{R}^t$ podmnogostrukosti i $f: M \to N$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:
1) f je glatko.
2) Za sve $p \in M$ postoji karta (φ, U) od M u p, (ψ, V) od N u $f(p)$ takva da je domen $\varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big)$ lokalne reprezentacije $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ otvoren i $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \to \psi(V)$ je glatko.
3) f je neprekidno i za sve $p \in M$ postoje karte (φ, U) od M u p, (ψ, V) od N u $f(p)$ takve da je lokalna reprezentacija $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \to \psi(V)$ je glatka.
4) f je neprekidno i za sve $p \in M$, za sve karte (φ, U) od M u p i sve karte (ψ, V) od N u $f(p)$, lokalna reprezentacija $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \to \psi(V)$ je glatka.

Napomena 1.1.10.
Prethodne teoreme u datom poglavlju su navedene bez dokaza, jer bi njihovo navođenje učinilo rad preobimnim. Za dokaze datih teorema pogledati u [17]. *Osnovna tvrđenja o glatkim preslikavanjima i podmnogostrukostima su navedena, radi boljeg razumevanja aparata diferencijalne geometrije koji će biti korišćen u OTR. U nastavku će biti navedene teoreme i definicije u kojima se daju neke osnovne osobine i pojmovi vezani za apstraktnu mnogostrukost, kao i uvođenje pojmova diferenciranja i integraljenja na mnogostrukostima.*

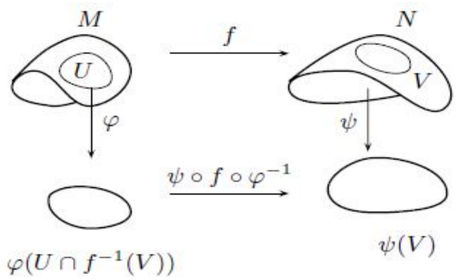
Definicija 1.1.11.
Neka je M skup. Karta (ψ, V) od M je bijektivno preslikavanje ψ iz $V \subseteq M$ u otvoreni podskup U od $\mathbb{R}^n$, $\psi: V \to U$. Dve karte (ψ_1, V_1), (ψ_2, V_2) su $\mathcal{C}^\infty$-kompatibilne ako su $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ i $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ otvoreni u $\mathbb{R}^n$, i promena karti $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}: \psi_1(V_1 \cap V_2) \to \psi_2(V_1 \cap V_2)$ je $\mathcal{C}^\infty$-difeomorfizam (dati uslov je simetričan, po ψ_1 i ψ_2). $\mathcal{C}^\infty$-atlas od M je familija $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) | \alpha \in A\}$, u kojoj su svake dve karte $\mathcal{C}^\infty$-kompatibilne, takva da je $M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Dva atlasa $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ su ekvivalentna ako je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ i sam atlas od M, tj. ako su sve karte iz $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ kompatibilne. Diferencijabilna mnogostrukost je skup M zajedno sa klasom ekvivalencije atlasa. Takva struktura ekvivalencije se naziva diferencijabilna struktura na M.



SLIKA 1.3. DEFINICIJA KARTE

Propozicija 1.1.12.
Neka je M mnogostrukost sa maksimalnim atlasom $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha, V_\alpha) | \alpha \in A\}$. Tada je $\mathcal{B} = \{V_\alpha | \alpha \in A\}$ baza topologije, tzv. prirodna ili topologija mnogostrukosti od M.

Definicija 1.1.13.
Neka su M i N $\mathcal{C}^\infty$ mnogostrukosti, $f: M \to N$, preslikavanje f je glatko ako je neprekidno, ako je neprekidno, i za svako $p \in M$ postoji karta φ od M oko p i karta ψ od N oko $f(p)$, tako da je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatko preslikavanje. f je difeomorfizam, ako je bijekcija i f i f^{-1} su glatki.



1.4. DEFINICIJA GLATKOG PRESLIKAVANJA

Propozicija 1.1.14.
Neka je M mnogostrukost. M zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti akko M ima prebrojiv atlas.
Definicija 1.1.15.
Neka je M mnogostrukost. Nosač bilo kog preslikavanja $f: M \to \mathbb{R}$ je definisan kao skup $supp(f) := \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$. Familija podskupova ν od M je lokalno konačna ako svako $p \in M$ ima okolinu koja seče samo konačno mnogo skupova iz ν. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od M. Particija jedinice koja odgovara $\mathcal{U}$ je familija $\{\chi_\alpha | \alpha \in A\}$ glatkih preslikavanja $\chi_\alpha: M \to \mathbb{R}^+$ takva da:
1) $\{supp\chi_\alpha | \alpha \in A\}$ je lokalno konačna.
2) Za svako $\alpha \in A$ postoji neko $U \in \mathcal{U}$ tako da važi $supp\chi_\alpha \subseteq U$.
3) Za svako $p \in M$, važi da je $\sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha(p) = 1$.

Teorema 1.1.16.
Neka je M Hauzdorfova mnogostrukost koja zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Tada za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od M postoji particija jedinice $\{\chi_j | j \in N\}$ koja odgovara pokrivaču $\mathcal{U}$, takva da je za sve $supp\chi_j$ kompaktan skup i sadržan u karti.

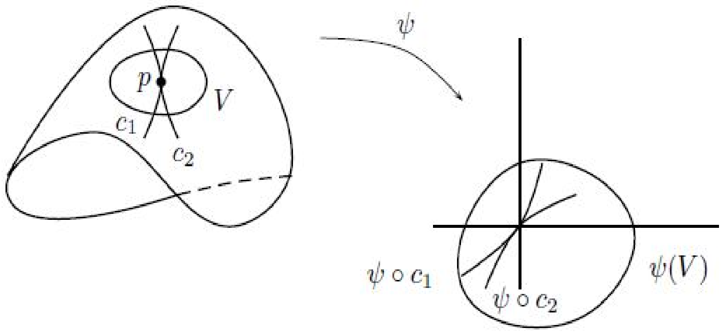
Napomena 1.1.17.
1) *U nastavku će se pod glatkom mnogostrukošću podrazumevati mnogostrukost čija je prirodna topologija Hauzdorfova i zadovoljava drugu aksimu prebrojivosti.*
2) *Da bi se uveo pojam diferenciranja na mnogostrukostima, mora se na neki način doći do strukture vektorskog prostora, zato se mnogostrukost mora aproksimirati vektorskim prostorom (tangentnim prostorom, koji odgovara tangentnoj ravni na površ). Kada se formira neophodna vektorska struktura, sam postupak nije nimalo jednostavan, tada se iskoristi ideja iz $\mathbb{R}^n$ za definisanje izvoda preslikavanja. U $\mathbb{R}^n$ je izvod preslikavanja odgovarajuća linearna aproksimacija preslikavanja.*

Teorema 1.1.18.
Neka je M podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i $p \in M$. Sledeći podskupovi u $\mathbb{R}^n$ se poklapaju:
1) $ImD\varphi(0)$, gde je φ lokalna parametrizacija od M, gde važi $\varphi(0) = p$.
2) $\{c'(0) | c: I \to M, \mathcal{C}^\infty, I \subseteq \mathbb{R}, c(0) = p\}$
3) $KerDf(p)$, gde je lokalno oko p, M nula skup regularnog preslikavanja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ $(k = dimM)$
4) $graph(Dg(p'))$, gde je lokalno oko p, M grafik glatkog preslikavanja g i $p = (p', g(p'))$.

Definicija 1.1.19.
*Neka je M podmnogostrukost od $\mathbb{R}^n$ i $p \in M$. Linearni podskup od $\mathbb{R}^n$ koji je okarakterisan u **Teoremi 1.1.18.** se naziva tangentnim prostorom od M u p i označava se sa T_pM. Elementi od T_pM se nazivaju tangentni vektori od M u p. Ako je N podmnogostrukost od $\mathbb{R}^{n'}$ i $f: M \to N$ je glatko, tada je $T_pf: T_pM \to T_{f(p)}N$, $c'(0) \longmapsto (f \circ c)'(0)$. T_pf je tangentno preslikavanje od f u p.*

Lema 1.1.20. (Lančano pravilo)
Neka su M, N, P podmnogostrukosti, $f: M \to N$, $g: N \to P$, f, g $\mathcal{C}^\infty$-preslikavanja, $p \in M$. Tada važi $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_pf$.

Definicija 1.1.21.
Neka je M mnogostrukost, $p \in M$ i (ψ, V) karta oko p. Dve $\mathcal{C}^\infty$-krive $c_1, c_2 : I \to M$ sa $c_1(0) = p = c_2(0)$ se nazivaju tangentnim u p s obzirom na ψ ako je $(\psi \circ c_1)'(0) = (\psi \circ c_2)'(0)$.



Slika 1.5. Tangentne krive

Definicija 1.1.22.
Tangentni prostor mnogostrukosti M u $p \in M$ je $T_pM = \{[c]_p \mid c : I \to M, \mathcal{C}^\infty, I \subseteq \mathbb{R}, c(0) = p\}$.

Definicija 1.1.23.
Neka su M i N mnogostrukosti i $f : M \to N$ glatko preslikavanje. Tada je

$$T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$$
$$[c]_p \to [f \circ c]_{f(p)}$$

Tangentno preslikavanje od f u p.

Propozicija 1.1.24. (Lančano pravilo)
Neka su M, N i P mnogostrukosti, $f : M \to N$ i $g : N \to P$ glatki i $p \in M$. Tada $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_pf$. Pošto je $T_p(id_M) = id_{T_pM}$, za bilo koji difeomorfizam $f : M \to N$, T_pf je bijektivno i $(T_pf)^{-1} = T_{f(p)}f^{-1}$.

Lema 1.1.25.
Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $p \in U$. Tada je $i : T_pU \to \mathbb{R}^n$, $i([c]_p) := c'(0)$ bijekcija, pa se T_pU može identifikovati sa $\mathbb{R}^n$. S obzirom na ovu identifikaciju, za bilo koje glatko preslikavanje $f : U \to V$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ važi da je $T_pf = Df(p)$.

$$\begin{tikzcd}
T_pU \arrow[r, "T_pf"] \arrow[d, "i"'] & T_{f(p)}V \arrow[d, "i"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "Df(p)"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Slika 1.6. Identifikacija tangentnog prostora sa $\mathbb{R}^n$

Propozicija 1.1.26.
Neka je M mnogostrukost, $p \in M$ i (ψ, V) karta oko p. Struktura vektorskog prostora indukovanog na T_pM pomoću bijekcije $T_p\psi : T_pM \to T_{\psi(p)}\psi(V) \cong \mathbb{R}^n$ je nezavisna od izbora

karte (ψ, V).

Napomena 1.1.27.

i) *Bilo koja karta od M daje odgovarajuću bazu od T_pM. Neka je (ψ, V) karta od M u p, i $\psi(p) = \big(x^1(p), \dots, x^n(p)\big)$ (x^i su koordinatne funkcije od ψ). Za $1 \le i \le n$, neka je e_i, i-ti standardni jedinični vektor od $\mathbb{R}^n$. Neka je $\psi(p) = 0$. Tada se definiše*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \coloneqq \big(T_p\psi\big)^{-1}(e_i) \in T_pM.$$

Preciznije se prethodna formula zapisuje u obliku

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \coloneqq \big(T_p\psi\big)^{-1}([t \longmapsto te_i]_0) = [t \longmapsto \psi^{-1}(te_i)]_p.$$

Kako je $T_p\psi$ linearni izomorfizam, $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$ zaista čini bazu od T_pM.

ii) *Neka je $v = [c]_p \in T_pM$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Tada je definisana operacija $\partial_v\colon \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sa $\partial_v f \coloneqq T_pf(v)$. Imamo da važi*

$$\partial_v(f) = T_pf(v) = T_pf\big([c]_p\big) = [f \circ c]_{f(p)} = (f \circ c)'(0) \tag{1.1}$$

koja odgovara diferenciranju u pravcu v.

Specijalno za $v = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, važi ($v$ se piše umesto ∂_v):

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \big(f \circ \psi^{-1}(t \longmapsto te_i)\big)'(0) = D_i(f \circ \psi^{-1})\big(\psi(p)\big) \tag{1.2}$$

pa $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ odgovara parcijalnom diferenciranju u karti ψ.

Definicija 1.1.28.

Preslikavanje $\partial\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ je izvod u $p \in M$, ako je ∂ linearno i zadovoljava Lajbnicovo pravilo:

1) $\partial(f + \alpha g) = \partial f + \alpha \partial g$.

2) $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g$, *za sve $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i za sve $\alpha \in \mathbb{R}$. Vektorski prostor svih izvoda u p se označava sa $Der_p(\mathcal{C}^\infty(M), \mathbb{R})$.*

Teorema 1.1.29.

Preslikavanje

$$\begin{aligned} A\colon T_pM &\longmapsto Der_p(\mathcal{C}^\infty(M), \mathbb{R}) \\ v &\longmapsto \partial_v \end{aligned}$$

je linearni izomorfizam.

U nastavku će biti uvedeni pojam vektorskog polja i tangentnog raslojenja, koji su neophodni za povezivanje pojedinačnih vektorskih prostora koji su pridruženi svakoj tački mnogostrukosti, u jednu celinu.

Definicija 1.1.30.

Neka je M glatka mnogostrukost. Tangentno raslojenje (tangentni prostor) od M je definisan *kao unija vektorskih prostora T_pM $(p \in M)$:*

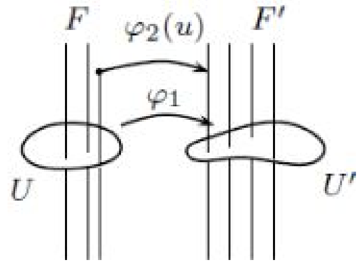
$$TM \coloneqq \coprod_{p\in M} T_pM = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM.$$

Preslikavanje $\pi_M: TM \to M$, $(p, v) \longmapsto p$ je kanonička projekcija. Ako je $f: M \to N$ glatko, tada je njeno tangentno preslikavanje Tf od f definisano sa $Tf(p, v) = \big(f(p), T_pf(v)\big)$.

Lema 1.1.31. (Lančano pravilo)
Neka su $f: M \to N$ i $g: N \to P$ glatka preslikavanja. Tada je $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$. Štaviše, $T(id_M) = id_{TM}$, pa za bilo koji difeomorfizam $f: M \to N$ važi da je $(Tf)^{-1} = Tf^{-1}$.

Definicija 1.1.32.
1) Lokalno vektorsko raslojenje:

Neka su E, F konačno dimenzioni vektorski prostori u $U \subseteq E$ otvoren skup. Tada se $U \times F$ naziva lokalno vektorsko raslojenje sa bazom U. U se identifikuje sa $U \times \{0\}$. Za $u \in U$, $\{u\} \times F$ je vlakno nad u. Vlakno ima strukturu vektorskog prostora iz F. Projekcija $\pi: U \times F \to U$, $(u, f) \longmapsto u$ se naziva projekcija od $U \times F$. Tada je vlakno nad u baš $\pi^{-1}(u)$. Preslikavanje $\varphi: U \times F \to U' \times F'$ lokalnog vektorskog raslojenja (lokalni vektorski izomorfizam), ako je φ glatko (difeomorfizam), zapisuje se u obliku $\varphi(u, f) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) \cdot f)$, gde je $\varphi_2(u)$ linearno (linearni izomorfizam) iz F u F' za sve $u \in U$.



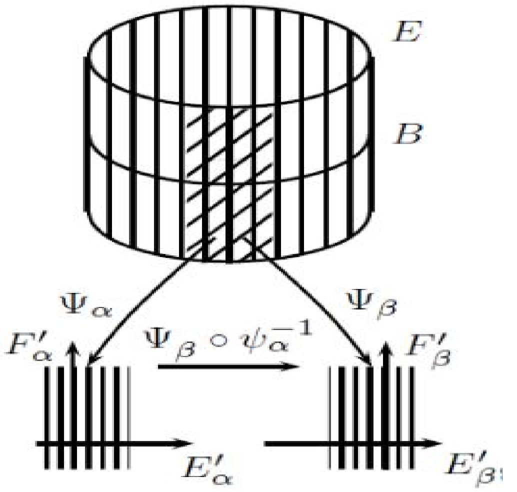
Slika 1.7. Lokalno vektorsko raslojenje

2) Vektorsko raslojenje:

Neka je E skup. Karta lokalnog vektorskog raslojenja od E je (Ψ, W), gde je $W \subseteq E$ i $\Psi: W \to W' \times F'$ je bijekcija na lokalno vektorsko raslojenje $W' \times F'$ (gde W' i F' zavise od Ψ). Atlas vektorskog raslojenja je familija $\{(\Psi_\alpha, W_\alpha) | \alpha \in A\}$ lokalno vektorskih karti takvih da W_α pokriva E i bilo koje dve karte vektorskog raslojenja (Ψ_α, W_α), (Ψ_β, W_β) u $\mathcal{A}$, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ su kompatibilne u smislu da je

$$\Psi_\beta \circ {\Psi_\alpha}^{-1}: \Psi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \to \Psi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$$

izomorfizam lokalnog vektorskog raslojenja, i da su $\Psi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$ i $\Psi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$ lokalna vektorska raslojenja.



Slika 1.8. Vektorsko raslojenje

Dva atlasa vektorskog raslojenja $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ su ekvivalentna, ako je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ atlas vektorskog raslojenja. Struktura vektorskog raslojenja ν je klasa ekvivalencije atlasa vektorskog raslojenja. Vektorsko raslojenje je skup E zajedno sa strukturom vektorskog raslojenja. Kako je svaki atlas vektorskog raslojenja istovremeno i $\mathcal{C}^\infty$-atlas, E je i $\mathcal{C}^\infty$-mnogostrukost. Za topologiju mnogostrukosti se pretpostavlja da je Hauzdorfova i da zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

Napomena 1.1.33.
U svakom vektorskom raslojenju E postoji podskup B, baza od E, definisana sa: $B \coloneqq \{e \in E | \exists VR - karta\ (\Psi, W), tako\ da\ je\ e = \Psi^{-1}(\omega', 0)\ za\ neko\ \omega' \in W'\}$.

Definicija 1.1.34.
Neka je (E, B, π) vektorsko raslojenje. Preslikavanje $X\colon B \to E$ se naziva presek od E (preciznije od $\pi\colon E \to B$), ako je

$$\pi \circ X = id_B.$$

Skup svih glatkih preseka od E se označava sa $\Gamma(B, E)$ ili $\Gamma(E)$.

Napomena 1.1.35.
Vektorsko polje je presek od TM $\left(\pi(X_p) = p\ \forall p\right)$. Ako je (Ψ, V), $\Psi = (x^1, \dots, x^n)$ karta od M, tada za svako $p \in V$, $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ čine bazu od T_pM. Pošto $X_p \in T_pM$, za svako p postoji jedinstveno određeno $X^i(p) \in \mathbb{R}$, takvo da važi $X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Propozicija 1.1.36.
Neka je X vektorsko polje na mnogostrukosti M. Sledeći uslovi su ekvivalentni:
1) $X\colon M \to TM$ je glatko, tj. $X \in \Gamma(TM)$.
2) Za svako $f \in \mathcal{C}^\infty$, $p \mapsto X_p(f)\colon M \to \mathbb{R}$ je glatko.
3) Za svaku kartu (Ψ, V) od M, $\Psi = (x^1, \dots, x^n)$ važi da je u lokalnoj reprezentaciji $X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, $X^i \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ za sve $i = 1, \dots, n$.

Definicija 1.1.37

Prostor glatkih vektorskih polja na M se označava sa $\mathfrak{X}(M)$.

Definicija 1.1.38.

$\mathbb{R}$-linearno preslikavanje $D: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ je izvod algebre $C^\infty(M)$, ako zadovoljava pravilo proizvoda:

$$D(f \cdot g) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f).$$

Prostor izvoda na $C^\infty(M)$ se označava sa $Der\big(C^\infty(M)\big)$.

Definicija 1.1.39.

Neka su $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Lijeva zagrada od X i Y je definisana na sledeći način:

$$[X, Y](f) := X(Yf) - Y(Xf), f \in C^\infty(M).$$

Sledi da je $[X, Y]: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ linearno i da zadovoljava pravilo proizvoda, tako da važi $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Propozicija 1.1.40.[1] **(Osobine Lijeve zagrade)**

Neka su $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. Tada:

1) $(X, Y) \longmapsto [X, Y]$ je $\mathbb{R}$-bilinearno.

2) $[X, Y] = -[Y, X]$ ($[\,,]$ je kososimetrična).

3) $\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] = 0$ (Jakobijev identitet).

4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

5) $[\,,]$ je lokalno. Ako je V otvoreno u M, tada je $[X, Y]|_V = [X|_V, Y|_V]$.

6) Lokalna reprezentacija: Ako je (Ψ, V) karta, $\Psi = (x^1, \dots, x^n)$, $X|_V = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_V = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, tada: $[X, Y]|_V = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Definicija 1.1.41.

Preslikavanje $Alt: T_k^0(E) \to T_k^0(E)$

$$Alt(t)(f_1, \dots, f_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) t\big(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(k)}\big)$$

se naziva alternator.

Definicija 1.1.42.

Neka je E konačnodimenzioni vektorski prostor. $\Lambda^k E^* := L^k_{\mathrm{alt}}(E, \mathbb{R})$ je prostor svih multilinearnih alternirajućih funkcija iz $E^k = E \times \dots \times E$ u $\mathbb{R}$.

Lema 1.1.43

Alt je linearna projekcija $T_k^0(E)$ na $\Lambda^k E^*$, tj.

1) Alt je linearno, $Alt(T_k^0(E)) \subseteq \Lambda^k E^*$

2) $Alt|_{\Lambda^k E^*} = id_{\Lambda^k E^*}$

---

[1] *Dokaz propozicije se može pogledati u [17].*

3) $Alt \circ Alt = Alt$

4) $Alt\left(T_k^0(E)\right) = \Lambda^k E^*$.

Definicija 1.1.44.

Neka je $dim(E) = n$, $\omega \in \Lambda^n E^*$, $\omega \neq 0$. ω *se naziva zapreminski element na* E. *Dva zapreminska elementa* ω_1 *i* ω_2 *su ekvivalentna ako je* $\omega_1 = c \cdot \omega_2$, *za neko* $c > 0$. *Klasa ekvivalencije zapreminskih elemenata na* E *se naziva orijentacija od* E.

Definicija 1.1.45.

Neka je $\phi \in L(E,F), \alpha \in T_k^0(F)$. *PULL-BACK od* α *pod dejstvom* ϕ *je funkcija*

$$\phi^*: T_k^0(F) \to T_k^0(E)$$

$$\phi^*(\alpha)(e_1,..,e_k) \coloneqq \alpha\big(\phi(e_1),\dots,\phi(e_k)\big),\ \ e_1,\dots,e_k \in E.$$

Ako je ϕ *bijekcija, tada je PUSH-FORWARD*

$$\phi_*: T_k^0(E) \to T_k^0(F)$$

$$\phi_* := (\phi^{-1})^*, \text{ pa je}$$

$$\phi_*\alpha(f_1,..,f_k) = \alpha\big(\phi^{-1}(f_1),\dots,\phi^{-1}(f_k)\big), \qquad f_1,\dots,f_k \in F.$$

Tada je $\phi_* = \phi_k^0$.

Definicija 1.1.46.

Neka je (E,B,π) *vektorsko raslojenje,* $E_b = \pi^{-1}(b)$ *vlakno nad* $b \in B$. *Tada je*

$$\Lambda^k E^* \coloneqq \coprod_{b\in B} \Lambda^k E_b^* = \bigcup_{b\in B} \{b\} \times \Lambda^k E_b^*$$

i $\pi_k^0: \Lambda^k E^* \to B, \pi_k^0(e) = b$, *za* $e \in \Lambda^k E_b^*$. *Za* $A \subseteq B$ *važi*

$$\Lambda^k E^*|_A = \coprod_{b\in A} \Lambda^k E_b^*.$$

Definicija 1.1.47.

Neka je M mnogostrukost, $\Lambda^k T^* M \coloneqq \Lambda^k (TM)^*$ *se naziva vektorsko raslojenje spoljašnjih k-formi na TM. Prostor glatkih preseka od* $\Lambda^k T^* M$ *se označava sa* $\Omega^k(M)$ *i njegovi elementi se nazivaju diferencijalne forme reda k ili (spoljašnje) k-forme na M.Za* $k = 0$ *važi da je* $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Definicija 1.1.48.

Neka $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$. *Spoljašnji proizvod (eng exterior ili wedge product)* α *i* β *se definiše kao*

$$\alpha \wedge \beta \coloneqq \frac{(k+l)!}{k!\,l!} Alt(\alpha \otimes \beta).$$

Za $\alpha \in T_0^0(E) = \Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$ *je* $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \alpha \cdot \beta$.

Propozicija 1.1.49.

Neka su $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$ *i* $\gamma \in T_m^0(E)$. *Tada je:*

1) $\alpha \wedge \beta = Alt(\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge Alt(\beta)$

2) $\wedge$ *je bilinearno*

3) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$

4) $\wedge$ *je asocijativno:* $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

1.2. Skalari, vektori i tenzori

Tenzori su veličine koje podležu određenim zakonima transformacije. Skalari, vektori, matrice i nizovi višeg reda se mogu smatrati komponentama tenzorske veličine. Informacije o ovim transformacionim zakonima su neophodne, da bi se mogli da predstaviti fizički zakoni u obliku koji je nezavistan od izabranog koordinatnog sistema. Biće pokazano u nastavku kako se ove komponente mogu predstaviti u nekoliko koordinatnih sistema.

Pre nego što budu uvedeni različiti tipovi tenzora, biće ispitano šta se smatra pod koordinatnim transformacijama. Posmatraju se koordinatne transformacije od sistema koordinata (x, y, z) u (u, v, ω) definisane sistemom transformacionih jednačina

$$x = x(u, v, \omega)$$
$$y = y(u, v, \omega)$$
$$z = z(u, v, \omega).$$

Date koordinatne transformacije mogu se generalizovati u višim dimenzijama. Neka $x^i, i = 1, \dots, N$ označava N promenljivih. Ove veličine se mogu uzeti za predstavljanje tačke $(x^1, \dots, x^N)$ u N-dimenzionalnom prostoru V_N. Drugi skup od N veličina $\bar{x}^i, i = 1, \dots, N$ može se koristiti za predstavljanje tačke $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N)$ u N-dimenzionalnom prostoru $\bar{V}_N$. Postoji transformacija između koordinata x^i i $\bar{x}^i, i = 1, \dots, N$ kada su x i $\bar{x}$ povezani jednačinama oblika:

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N), i = 1, \dots, N. \qquad (1.3)$$

Kada su relacije (1.3) funkcionalno nezavisne, jednoznačno određene, imaju parcijalne izvode takve da je Jakobijan transformacije

$$J\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) = J\left(\frac{x^1, \dots, x^N}{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^N} \\ \frac{\partial x^N}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^N}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^N}{\partial \bar{x}^N} \end{vmatrix}$$

različit od nule, tada postoji inverzna transformacija

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^N), i = 1, \dots, N. \qquad (1.4)$$

Neka je dat niz transformacija iz x u $\bar{x}$, a zatim iz $\bar{x}$ u $\bar{\bar{x}}$. Radi jednostavnijeg zapisa, neka je $\bar{x} = y, \bar{\bar{x}} = z$. Neka su sa T_1 i T_2 označene transformacije:

$$T_1\colon\ y^i = y^i(x^1, \dots, x^N), i = 1, \dots, N \text{ ili } T_1 x = y$$
$$T_2\colon\ z^i = z^i(y^1, \dots, y^N), i = 1, \dots, N \text{ ili } T_2 y = z.$$

Tada se transformacija T_3 dobijena zamenom T_1 u T_2 naziva proizvodom dve uzastopne transformacije i zapisuje se u obliku:

$$T_3\colon\ z^i = z^i\big(y^1(x^1, \dots, x^N), \dots, y^N(x^1, \dots, x^N)\big), i = 1, \dots, N \text{ ili } T_3 x = T_2 T_1 x = z.$$

Ovaj proizvod transformacija se označava sa $T_3 = T_2 T_1$. Jakobijan proizvoda transformacija je jednak proizvodu Jakobijana koji odgovaraju transformacijama T_1 i T_2, $J_3 = J_2 J_1$.

1.3. Skalarne funkcije i invarijante

Prvo se uvodi definicija za skalarnu invarijantu odnosno za tenzor nultog reda.

Definicija 1.3.1. (Apsolutno skalarno polje)

Neka postoji koordinatna transformacija oblika $x^i = x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N), i = 1, \dots, N$ *sa Jakobijanom različitim od nule. Neka je skalarna funkcija*

$$f = f(x^1, \dots, x^N), \tag{1.5}$$

funkcija koja zavisi od $x^i, i = 1, \dots, N$ *u prostoru* V_N*. Kada postoji funkcija*

$$\bar{f} = \bar{f}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N), \tag{1.6}$$

koja je funkcija koordinata $\bar{x}^i, i = 1, \dots, N$ *takva da je* $\bar{f} = J^w f$*, tada se f zove tenzorom ranga (reda) nula, veličine W u prostoru* V_N*. Kada je W=0 skalar f se naziva komponentom apsolutnog skalarnog polja u odnosu na apsolutni tenzor ranga (reda) nula.*

Apsolutno skalarno polje je invarijantni objekat u prostoru V_N s obzirom na grupu koordinatnih transformacija. Ima po jednu komponentu u svakom koordinatnom sistemu. U bilo koju skalarnu funkciju koja je definisana jednačinom (1.5), mogu se zameniti transformacione jednačine (1.3), i dobija se

$$f = f(x^1, \dots, x^N) = f = f\big(x^1(\bar{x}), \dots, x^N(\bar{x})\big) = \bar{f}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N). \tag{1.7}$$

1.4. Vektorske transformacije, kontravarijante komponente

Neka je u V_N data kriva c, definisana sistemom parametarskih jednačina $c : x^i = x^i(t), i = 1, \dots, N$, gde je t parametar. Tangentni vektor na krivu c je vektor $\vec{T}\left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^N}{dt}\right)$. U indeksnoj notaciji koja se više fokusira na komponente, ovaj tangentni vektor se označava sa $T^i = \frac{dx^i}{dt}, i = 1, \dots, N$. Za koordinatnu transformaciju tipa definisanog jednačinom (1.3), sa svojom inverznom transformacijom definisanom jednačinom (1.4), kriva c je predstavljena u prostoru sa koordinatama $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1(t), \dots, x^N(t)) = \bar{x}^i(t), i = 1, \dots, N$, sa nepromenljivim t.

Tangenta krive u koordinatnom sistemu $\bar{x}$ je predstavljena na sledeći način:

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \cdot \frac{dx^j}{dt}, i = 1, \dots, N. \tag{1.8}$$

Neka su sa $\bar{T}^i, i = 1, \dots, N$ označene komponente ovog tangentnog vektora u koordinatnom sistemu $\bar{x}$, jednačina (1.8) se može zapisati u obliku

$$\bar{T}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} T^j, i, j = 1, \dots, N. \tag{1.9}$$

Ova jednačina definiše transformacioni zakon apsolutnog kontravarijantnog tenzora prvog ranga (reda jedan). Kada je N=3 matrica ove transformacije je predstavljena na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}^1 \\ \bar{T}^2 \\ \bar{T}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Definicija 1.4.1. (Kontravarijantni tenzor)

Neka je N veličina A^i u koordinatnom sistemu $(x^1,\dots,x^N)$ povezano sa N veličina $\bar{A}^i$ u koordinatnom sistemu $(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^N)$ tako da je Jakobijan različit od nule. Ako je tada transformacioni zakon $\bar{A}^i = J^w \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j$ ispunjen, ove veličine se nazivaju komponentama relativnog tenzora prvog ranga (reda jedan) veličine W. Kada je $W = 0$ ove veličine se nazivaju komponentama apsolutnog tenzora prvog ranga (reda jedan).

Primer 1.4.2. (Tranzitivna osobina kontravarijante transformacije)
Kompozicija kontravarijantnih transformacija je takođe kontravarijantna transformacija.

Rešenje
Neka je data transformacija vektora iz koordinatnog sistema $(x^1,\dots,x^N)$ u $(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^N)$. Vektor ili apsolutni tenzor prvog ranga $A^i = A^i(x), i = 1,\dots,N$ transformisaće se kao u jednačini (1.9), odnosno važiće

$$\bar{A}^i(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j(x). \tag{1.11}$$

Druga transformacija koordinata $\bar{x} \rightarrow \bar{\bar{x}}$ će dati komponente

$$\bar{\bar{A}}^i(\bar{\bar{x}}) = \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^j(\bar{x}). \tag{1.12}$$

Ovde je korišćena notacija $A^j(x)$ da bi bila naglašena zavisnost komponenata A^j od koordinata x. Menjajući indekse i zamenjujući jednačinu (1.11) u (1.12) dobija se da važi

$$\bar{\bar{A}}^i(\bar{\bar{x}}) = \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} A^m(x). \tag{1.13}$$

Iz činjenice da je $\frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} = \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^m}$, jednačina (1.13) se svodi na $\bar{\bar{A}}^i(\bar{\bar{x}}) = \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^m} A^m(x)$ i zato je ova transformacija takođe kontravarijantna.

Napomena 1.4.3.
Iz "pravila lanca" se dobija

$$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^1} \cdot \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^n} + \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^2} \cdot \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^n} + \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^3} \cdot \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^n} = \frac{\partial x^m}{\partial x^n} = \delta_n^m .$$

1.5. Vektorske transformacije, kovarijantne komponente

Neka je data skalarna invarijanta $A(x) = \bar{A}(\bar{x})$ što je skraćeno od jednačine $A(x^1,\dots,x^N) = \bar{A}(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^N)$ koja uključuje koordinatne transformacije (1.3) . Pravilom za izvod složene funkcije, diferencira se ova invarijanta i dolazi se do zaključka da komponente gradijenta moraju da zadovoljavaju relaciju

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial A}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}. \tag{1.14}$$

Neka su $A_j = \frac{\partial A}{\partial x^j}$ i $\bar{A}_i = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}^i}$, tada se jednačina (1.14) može izraziti kao transformacioni zakon

$$\bar{A}_i = A_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}. \quad (1.15)$$

Ovo je transformacioni zakon za apsolutni kovarijantni tenzor ranga ili reda jedan. Uopštenija definicija je:

Definicija 1.5.1. (Kovarijantni tenzor)
Kada je N veličina A_i u koordinatnom sistemu $(x^1, \dots, x^N)$ povezano sa N veličina $\bar{A}_i$ u koordinatnom sistemu $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N)$, pri čemu je Jakobijan J različit od nule, takoda je transformacioni zakon $\bar{A}_i = J^w \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j$ zadovoljen, onda se ove veličine nazivaju komponentama relativnog kovarijantnog tenzora prvog ranga (reda jedan) koji ima veličinu W. Kada je W=0 ove veličine se nazivaju komponentama apsolutnog kovarijantnog tenzora prvog ranga (reda jedan). Za apsolutne tenzore prvog ranga (reda jedan) se uzimaju vektori dok se za apsolutne tenzore prvog ranga (reda nula) uzimaju skalari.

Primer 1.5.2. [2](Tranzitivna osobina kovarijantne transformacije)
Neka je data kompozicija transformacija definisanih jednačinom (1.15)

$$x \to \bar{x} \quad \bar{A}_i(\bar{x}) = A_j(x) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$$

$$\overline{x} \to \bar{\bar{x}} \quad \overline{\overline{A_k}}(\bar{\bar{x}}) = \overline{A_m}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial \bar{\bar{x}}^k}$$

Transformacija komponenata s obzirom na koordinatnu transformaciju $x \to \bar{\bar{x}}$ se može izraziti u obliku $\overline{\overline{A_k}}(\bar{\bar{x}}) = \left(A_j(x) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\right) \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial \bar{\bar{x}}^k} = A_j(x) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{\bar{x}}^k}$, koji pokazuje tranzitivnu osobinu kovarijantne transformacije.

1.6. Tenzori višeg reda

Pokazano je da su tenzori prvog reda veličine koje zadovoljavaju određene transformacione zakone. Tezori višeg reda su definisani na sličan način i takođe zadovoljavaju osobine grupe. Neka su date transformacije oblika predstavljenog u jednačinama (1.3) i (1.4), koje su jednoznačno određene, neprekidne, sa Jakobijanom J koji je različit od nule. U nastavku će veličine x^i i $\bar{x}^i, i = 1, \dots, N$ predstavljati koordinate u bilo koja dva koordinatna sistema. Sledeći transformacioni zakoni definišu tenzore drugog i trećeg reda.

Definicija 1.6.1. (Kontravarijantni tenzor drugog reda)
Kada je N^2 veličina A^{ij} u koordinatnom sistemu $(x^1, \dots, x^N)$ povezano sa N^2 veličina $\bar{A}^{mn}$ u koordinatnom sistemu $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N)$, tako da su ispunjeni transformacioni zakoni

$$\bar{A}^{mn}(\bar{x}) = A^{ij}(x) J^w \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j}, \quad (1.16)$$

[2] *Detaljnije o kontravarijantnim i kovarijantnim transformacijama se može pogledati u [15] i [12].*

onda se ove veličine nazivaju komponentama relativnog kontravarijantnog tenzora drugog ranga (reda dva) sa veličinom W. Kada je W=0 ove veličine se nazivaju komponentama apsolutnog kontravarijantnog tenzora drugog ranga (reda dva).

Definicija 1.6.2. (Kovarijantni tenzor drugog reda)
Kada je N^2 veličina A_{ij} u koordinatnom sistemu $(x^1, \dots, x^N)$ povezano sa N^2 veličina $\bar{A}_{mn}$ u koordinatnom sistemu $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N)$ tako da je transformacioni zakon ispunjen

$$\bar{A}_{mn}(\bar{x}) = A_{ij}(x) J^w \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}, \tag{1.17}$$

tada se ove veličine nazivaju komponentama relativnog kovarijantnog tenzora drugog ranga (reda dva) veličine W. Kada je W=0 ove veličine se nazivaju komponentama apsolutnog kovarijantnog tenzora drugog ranga (reda dva).

Definicija 1.6.3. (Mešoviti tenzor drugog reda)
Kada je N^2 velicina A^i_j u koordinatnom sistemu $(x^1, \dots, x^N)$ povezano sa N^2 velicina $\bar{A}^m_n$ u koordinatnom sistemu $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^N)$ tako da je transformacioni zakon

$$\bar{A}^m_n(\bar{x}) = A^i_j(x) J^w \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \tag{1.18}$$

ispunjen, tada se ove veličine nazivaju komponentama relativnog mešovitog tenzora drugog ranga (reda dva) veličine W. Ako je W=0 ove veličine se nazivaju komponentama apsolutnog mešovitog tenzora drugog ranga (reda dva). Dati tenzor je jedanput kontravarijantan i jednom kovarijantan.

Tenzori višeg reda se definišu na sličan način. Na primer ako se može naći N^3 veličina A^m_{np} tako da je $\bar{A}^i_{jk}(\bar{x}) = A^\gamma_{\alpha\beta}(x) J^w \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\gamma} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}$ onda je ovo relativni mešoviti tenzor trećeg reda veličine W. On je jedanput kontravarijantan i dva puta kovarijantan .

1.6.1. Opšta definicija[3]

Definicija 1.6.4.
Neka su $E_1, \dots, E_k, F$ konačnodimenzioni vektorski prostori. Prostor multilinearnih preslikavanja iz $E_1 \times \dots \times E_k$ u F se označava sa $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$. Za $k = 1$ se dobija $L(E, \mathbb{R}) = E^*$, dualni prostor od E, tj. vektorski prostor linearnih funkcionela na E. Ako je $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza od E, tada funkcioneli definisani sa $\alpha^j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ $(j = 1, \dots, n)$ formiraju bazu od E^*, dualnu bazu od $\mathcal{B}_E$.

Napomena 1.6.5.
Za svako $e \in E$ važi $e = \sum_{i=1}^n \alpha^i(e) e_i$, za sve $\alpha \in E^*$, dobija se $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e)\alpha^i$. Bidualni prostor $E^{**} = (E^*)^*$ je kanonički izomorfan sa E:

[3] *Teoreme koje su navedene u ovom podnaslovu bez dokaza, detaljnije su obrađene u [17].*

$$i: E \to E^{**} i(e) = \underbrace{\alpha}_{E^*} \mapsto \alpha(e)$$

Preslikavanje i je linearni izomorfizam.

Definicija 1.6.6.

Neka je E vektorski prostor. Tada $T_s^r(E) \coloneqq L^{r+s}\left(\underbrace{E^*, \dots, E^*}_{r}, \underbrace{E, \dots, E}_{s}; \mathbb{R}\right)$ je prostor r-puta kontravarijantnih i s-puta kovarijantnih tenzora, ili kraće tenzori tipa $\binom{r}{s}$. Za $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$, $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$, tenzorski proizvod $t_1 \otimes t_2$ je definisan sa:

$$\begin{aligned} &t_1 \otimes t_2\left(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}\right) \coloneqq \\ &\coloneqq t_1\left(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, f_1, \dots, f_{s_1}\right) \cdot t_2\left(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, g_1, \dots, g_{s_2}\right) \end{aligned} \tag{1.19}$$

$\left(\beta^j, \gamma^j \in E^*, f_j, g_j \in E\right)$.

Napomena 1.6.7.
Iz same definicije proizvoda sledi da je $\otimes$ asocijativno i bilinearno.

Propozicija 1.6.8.
Neka je $dim(E) = n$. Tada je $dim\left(T_s^r(E)\right) = n^{r+s}$. Ako je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza od E i $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ odgovarajuća dualna baza, tada je

$$\mathcal{B}_s^r \coloneqq \left\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s} \middle| 1 \le i_k, j_k \le n\right\}$$

baza od $T_s^r(E)$.

Definicija 1.6.9.
Neka je $\varphi \in L(E, F)$ bijekcija. Tada je $T_s^r(\varphi) = \varphi_s^r \in L(T_s^r E, T_s^r F)$ definisano sa $(\varphi_s^r t)(\beta^1, \dots, \beta^r, f_1, \dots, f_s) \coloneqq t\left(\varphi^*(\beta^1), \dots, \varphi^*(\beta^r), \varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_s)\right)$ za $t \in T_s^r(E)$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in F^*$, $f_1, \dots, f_s \in F$, gde je $\varphi^* \in L(F^*, E^*)$ za $\beta \in F^*$, $e \in E$, $\varphi^*(\beta)(e) \coloneqq \beta\left(\varphi(e)\right)$.

Napomena 1.6.10.
Prostor T_p^* je dualan prostor tangentnom prostoru T_p i naziva se kotangentni prostor.

Propozicija 1.6.11.
Neka je $\varphi: E \to F$, $\psi: F \to G$ linearni izomorfizam. Tada je:
1) $(\psi \circ \varphi)_s^r = \psi_s^r \circ \varphi_s^r$.
2) $(id_E)_s^r = id_{T_s^r(E)}$.
3) $\varphi_s^r: T_s^r E \to T_s^r F$ je linearni izomorfizam i $(\varphi_s^r)^{-1} = (\varphi^{-1})_s^r$.
4) Ako je $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$, $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$, tada važi $\varphi_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(t_1 \otimes t_2) = \varphi_{s_1}^{r_1}(t_1) \otimes \varphi_{s_2}^{r_2}(t_2)$.

Definicija 1.6.12.
Neka je $\varphi: U \times F \to U' \times F'$, $\varphi(u, f) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) f)$ LVR (lokalno vektorsko raslojenje) izomorfizam. Tada se φ_s^r definiše na sledeći način:

$$\varphi_s^r: U \times T_s^r F \to U' \times T_s^r F',$$

$$\varphi_s^r(u, t) = \left(\varphi_1(u), \left(\varphi_2(u)\right)_s^r(t)\right) \ (t \in T_s^r F).$$

Definicija 1.6.13.

Neka je (E, B, π) vektorsko raslojenje, sa $E_{\mathscr{b}} = \pi^{-1}(\mathscr{b})$ je definisano vlakno nad $\mathscr{b}$. Neka je

$$T_s^r(E) \coloneqq \coprod_{\mathscr{b}\in B} T_s^r(E_{\mathscr{b}}) = \bigcup_{\mathscr{b}\in B} \{\mathscr{b}\} \times (E_{\mathscr{b}})_s^r$$

$\binom{r}{s}$-tenzorsko raslojenje nad E. Neka $\pi_s^r : \pi(E) \to B$, $\pi_s^r(e) = \mathscr{b}$ za $e \in T_s^r(E_{\mathscr{b}})$ označava konačnu projekciju. Za $A \subseteq B$ neka je $T_s^r(E)|_A \coloneqq \coprod_{\mathscr{b}\in A} T_s^r(E_{\mathscr{b}})$.

Definicija 1.6.14.
Neka su E i E' vektorska raslojenja i $f : E \to E'$. f je homomorfizam vektorskog raslojenja, ako za svako $e \in E$ postoji VR- karta (Ψ, W) oko e i VR- karta (Ψ', W') oko $f(e)$, tako da je $f(W) \subseteq W'$ i $f_{\Psi'\Psi} \coloneqq \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}$ je LVR- homomorfizam. Ako je f difeomorfizam i $f|_{E_{\mathscr{b}}} : E_{\mathscr{b}} \to E'_{f(\mathscr{b})}$ linearni izomorfizam za sve $\mathscr{b} \in B$, tada je f izomorfizam vektorskog raslojenja. Definiše se $f_s^r : T_s^r E \to T_s^r E'$ sa $f_s^r|_{T_s^r(E_{\mathscr{b}})} \coloneqq \left(f|_{E_{\mathscr{b}}}\right)_s^r \ \forall \mathscr{b} \in B$.

Teorema 1.6.15.
Neka je (E, B, π) vektorsko raslojenje sa atlasom vektorskog raslojenja $\mathcal{A} = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha) | \alpha \in A\}$. Tada je $(T_s^r E, B, \pi_s^r)$ vektorsko raslojenje sa atlasom vektorskog raslojenja $\mathcal{A}_s^r = \left\{\left((\Psi_\alpha)_s^r, (T_s^r E)|_{W_\alpha \cap B}\right) \middle| \alpha \in A\right\}$. $(T_s^r E, B, \pi_s^r)$ je tenzorsko raslojenje tipa $\binom{r}{s}$ nad E.

Definicija 1.6.16.
Neka je M mnogostrukost. Tada se $T_s^r(M) \coloneqq T_s^r(TM)$ naziva raslojenjem r-puta kontravarijantnih i s-puta kovarijantnih tenzora na M. $T^*M \coloneqq T_1^0(M)$ se naziva kotangentno raslojenje od M.

Definicija 1.6.17.
Glatki preseci od $T_s^r M$ (tj. glatka preslikavanja $t : M \to T_s^r M$ sa $\pi_s^r \circ t = id_M$) se nazivaju $\binom{r}{s}$-tenzori (respektivno $\binom{r}{s}$-tenzorska polja) na M. Prostor $\Gamma(M, T_s^r M)$ $\binom{r}{s}$-tenzorskih polja se označava sa $\mathcal{T}_s^r(M)$. Specijalno, $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$. Takođe se koristi oznaka $\Omega^1(M)$ za $\mathcal{T}_1^0(M)$. Elementi od $\Omega^1(M)$ se nazivaju diferencijalnim formama reda 1 (1-forme, kovektorska polja).

Napomena 1.6.18.
Ako $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$ i $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, tada je $ft : p \mapsto f(p)t(p) \in \left(T_pM\right)_s^r$ tenzorsko polje na M. $\mathcal{T}_s^r(M)$ sa operacijama $+, f \cdot$ je $\mathcal{C}^\infty(M)$-modul. Biće posmatran specijalan slučaj opštih tenzorskih polja $\Omega^1(M) = \mathcal{T}_1^0(M) = \Gamma(M, T_1^0 M)$, kako bi bila izvedena lokalna reprezentacija vektorskog polja u karti.

$$T_1^0(M) = \coprod_{p\in M} \left(T_pM\right)^* = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times \left(T_pM\right)^*.$$

VR (vektorsko raslojenje) karte od $T_1^0 M = T^*M$ su oblika $(T\psi)_1^0 M : T_1^0 M|_V \to \psi(V) \times (\mathbb{R}^n)_1^0 = \psi(V) \times (\mathbb{R}^n)^*$, za bilo koju kartu (Ψ, V) od M. VR-karte se koriste da bi se definisala baza od $\left(T_pM\right)^*$. Za T_pM je baza koja se dobija korišćenjem karti, data kao skup $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \middle| 1 \leq i \leq n\right\}$,

gde je $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \left(T_p\psi\right)^{-1}(e_i)$ *tj.* $\frac{\partial}{\partial x^i} = p \longmapsto (T\psi)^{-1}(\psi(p), e_i)$. *Za* T_1^0M, *neka je* $\left\{\alpha^j \middle| 1 \leq j \leq n\right\}$ *dualna baza od* $\{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ *u* $(\mathbb{R}^n)^*$. *Tada je za bilo koje* $p \in V$ *familija* $dx^i\big|_p \coloneqq [(T\psi)_1^0]^{-1}(\psi(p), \alpha^i)$ $(1 \leq i \leq n)$ *baza od* $\left(T_pM\right)^*$. *Važi da je*

$$dx^i\big|_p = [(T\psi)_1^0]^{-1}\left(\psi(p), \alpha^i\right) = \left(p, \left[\left(T_p\psi\right)_1^0\right]^{-1}\left(\alpha^i\right)\right) =$$

$$= \left(p, \left(\left(\left(T_p\psi\right)^{-1}\right)^*\right)^{-1}\left(\alpha^i\right)\right) = \left(p, \left(T_p\psi\right)^*\left(\alpha^i\right)\right).$$

Kako je $dx^j\big|_p \in \left(T_pM\right)^*$ *i* $dx^i\big|_p \in T_pM$, *može se primeniti* $dx^j\big|_p$ *na* $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$*:*

$$dx^j\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \left(T_p\psi\right)^*\left(\alpha^j\right)\left(\left(T_p\psi\right)^{-1}(e_i)\right) =$$

$$= \alpha^j\left(T_p\psi\left(\left(T_p\psi\right)^{-1}(e_i)\right)\right) = \alpha^j(e_i) = \delta_{ij}$$

Sledi da je $\left\{dx^j\big|_p \middle| 1 \leq j \leq n\right\}$ *dualna baza od* $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \middle| 1 \leq i \leq n\right\}$ *u* $\left(T_pM\right)^*$.

Definicija 1.6.19.
Neka je $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. *Tada je* $df: M \to T^*M$, $p \longmapsto T_pf$ *spoljašnji izvod od* f.

Napomena 1.6.20.

1) $df \in \mathcal{T}_1^0(M)$. *Za svako* $p \in M$, $T_pf \in L\left(T_pM, \mathbb{R}\right) = \left(T_pM\right)^*$. *Štaviše,* df *je glatko, pošto za bilo koju kartu* ψ *oko* p $(\psi(p) = x)$, *važi da je:*

$$(T\psi)_1^0 \circ df \circ \psi^{-1}(x) = \left(x, \left(\left(T_p\psi\right)^{-1}\right)^* \circ T_pf\right) = \left(x, T_pf \circ \left(T_p\psi\right)^{-1}\right) =$$
$$= \left(x, T_x(f \circ \psi^{-1})\right) = \left(x, D(f \circ \psi^{-1})(x)\right)$$

2) *Ako je* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *i* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *tada za sve* $p \in M$, $X_p \in T_pM$ *i* $df|_p \in \left(T_pM\right)^*$, *tako da je* $df(X) \coloneqq p \longmapsto df|_p\left(X_p\right): M \to \mathbb{R}$ *dobro definisano, važi da je:*

$$df|_p\left(X_p\right) = T_pf\left(X_p\right) = X(f)|_p.$$

   Stoga je $df(X) = X(f)$. *Specijalno,* $df(X) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

3) *Neka je* (ψ, V) *karta,* $\psi = (x^1, \dots, x^n)$. *Tada,* $d\left(x^i\right)$ *u smislu* ***Definicije 1.6.19.*** *je baš* dx^i. $d\left(x^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(x^j\right) = \delta_{ij}$, *tj.* $\left\{d\left(x^j\right)\big|_p \middle| 1 \leq j \leq n\right\}$ *je dualna baza od* $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \middle| 1 \leq i \leq n\right\}$ *za svako* $p \in V$. *Ako je* (ψ, V) *karta od* M, $\psi = (x^1, \dots, x^n)$, *tada za svako* $p \in M$ n*-torka* $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \middle| 1 \leq i \leq n\right\}$ *je baza od* T_pM, *a* $\left\{dx^j\big|_p \middle| 1 \leq j \leq n\right\}$ *je odgovarajuća dualna baza od* T_pM^*. *Stoga je za svako* $p \in M$, n*-torka:*

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\Big|_p \otimes dx^{j_1}\big|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s}\big|_p \middle| 1 \leq i_k, j_k \leq n\right\}$$

baza od $\left(T_pM\right)^r_s$. Dakle, ako je t sečenje od T^r_sM, tada postoje jedinstveno određene funkcije $t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ na V, takve da važi

$$t|_V = t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}\,. \tag{1.20}$$

Propozicija 1.6.21.
Neka je t presek od T^r_sM. Uslovi 1) i 2) su ekvivalentni:
1) t je glatko, tj. $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$.
2) U svakoj reprezentaciji u karti iz ***Napomene 1.6.20.*** *pod 3) svi koeficijenti $t^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ su glatke funkcije.*

1.7. Operacije sa tenzorima[4]

U nastavku su date neke bitne operacije sa tenzorima koje se koriste za izvođenje i dokazivanje nekoliko identiteta.

1.7.1. Sabiranje i oduzimanje

Tenzori istog tipa i veličine mogu se sabirati i oduzimati. Neka su A^i_{jk} i B^i_{jk} dva mešovita tenzora trećeg reda. Kada se saberu, dobija se neki mesovit tenzor trećeg reda. Njihova suma se označava $C^i_{jk} = A^i_{jk} + B^i_{jk}$. U nastavku se pokazuje da je suma takođe mešoviti tenzor. Po pretpostavci su A^i_{jk} i B^i_{jk} mešoviti tenzori trećeg reda i zato zadovoljavaju transformacione zakone:

$$\bar{A}^i_{jk} = A^m_{np} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}$$
$$\bar{B}^i_{jk} = B^m_{np} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}$$

Sa $\bar{C}^i_{jk} = \bar{A}^i_{jk} + \bar{B}^i_{jk}$ će biti označena suma u transformisanim koordinatama. Tada, sabiranje prethodne dve transformacione jednačine daje

$$\bar{C}^i_{jk} = \left(\bar{A}^i_{jk} + \bar{B}^i_{jk}\right) = \left(A^m_{np} + B^m_{np}\right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}$$

Iz prethodnog, se kao posledica dobija da se suma transformiše kao mešoviti tenzor trećeg reda.

1.7.2. Množenje (spoljašnji proizvod) tenzora

Proizvod dva tenzora je ponovo tenzor. Rang ili red rezultujućeg tenzora je zbir rangova tenzora koji učestvuju u množenju. Kao primer će biti uzeto da je sa A^i_{jk} označen mešoviti tenzor trećeg reda, a sa B^l_m je označen mešoviti tenzor drugog reda. Spoljašnji proizvod ova dva tenzora je tenzor petog reda

---

[4] *O operacijama sa tenzorima se može pogledati detaljnije u [12],[15].*

$$C_{jkm}^{il} = A_{jk}^{i} B_{m}^{l}, \qquad i, j, k, l, m = 1, \ldots, N.$$

Neka su sa $\bar{A}_{jk}^{i}$ i $\bar{B}_{m}^{l}$ označene komponente datih tenzora u $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^N)$ sistemu koordinata. Sa $\bar{C}_{jkm}^{il}$ je definisan spoljašnji proizvod ovih komponenata. Treba primetiti da je C_{jkm}^{il} tenzor kada su po pretpostavci A_{jk}^{i} i B_{m}^{l} tenzori i otuda zadovoljavaju transformacione zakone

$$\bar{A}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = A_{jk}^{i} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{\gamma}},$$
$$\bar{B}_{\varepsilon}{}^{\delta} = B_{m}^{l} \frac{\partial \bar{x}^{\delta}}{\partial x^{l}} \cdot \frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}.$$

Spoljašnji proizvod ovih komponenata je dat u obliku:

$$\bar{C}_{\beta\gamma\varepsilon}^{\alpha\delta} = \bar{A}_{\beta\gamma}^{\alpha} \bar{B}_{\varepsilon}^{\delta} = A_{jk}^{i} B_{m}^{l} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{\delta}}{\partial x^{l}} \cdot \frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{\varepsilon}} = C_{jkm}^{il} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{\gamma}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{\delta}}{\partial x^{l}} \cdot \frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}$$

Prethodna jednačina pokazuje da se C_{jkm}^{il} transformiše kao mešoviti apsolutni tenzor petog reda.

1.7.3. Kontrakcija tenzora

Operacija kontrakcije bilo kog mešovitog tenzora ranga m se izvodi tako što se gornji indeks izjednači sa donjim indeksom, pri čemu se koristi konvencija o sumiranju. Kada je izvedena sumacija preko ponovljenih indeksa, veličina koja se dobija kao rezultat je takođe tenzor reda $(m-2)$. Na primer, neka je sa $A_{jk}^{i}, i, j, k = 1, \ldots, N$ označen mešoviti tenzor, kontrakcija se izvodi tako što se postavi da je j jednako sa i.Dobija se

$$A_{ik}^{i} = A_{1k}^{1} + A_{2k}^{2} + \cdots + A_{Nk}^{N} = A_{k}, \tag{1.21}$$

gde je k slobodan indeks. Da bi bilo pokazano da je A_k tenzor, posmatra se kontrakcija na transformisanim komponentama od A_{jk}^{i} , neka je $\bar{A}_{ik}^{i} = \bar{A}_{k}$. Po pretpostavci je A_{jk}^{i} mešoviti tenzor, stoga komponente moraju da zadovoljavaju transformacioni zakon

$$\bar{A}_{jk}^{i} = A_{np}^{m} \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{m}} \cdot \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{j}} \cdot \frac{\partial x^{p}}{\partial \bar{x}^{k}}. \tag{1.22}$$

Kada se izvši kontrakcija, izjednačavanjem indeksa j sa i, sumiranjem po ponovljenim indeksima, dobija se sledeće:

$$\bar{A}_{ik}^{i} = \overline{A_{k}} = A_{np}^{m} \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{m}} \cdot \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{i}} \cdot \frac{\partial x^{p}}{\partial \bar{x}^{k}} = A_{np}^{m} \frac{\partial x^{n}}{\partial x^{m}} \cdot \frac{\partial x^{p}}{\partial \bar{x}^{k}} = A_{np}^{m} \delta_{m}^{n} \frac{\partial x^{p}}{\partial \bar{x}^{k}} = A_{np}^{n} \frac{\partial x^{p}}{\partial \bar{x}^{k}} = A_{p} \frac{\partial x^{p}}{\partial \bar{x}^{k}}. \tag{1.23}$$

Otuda se kontrakcijom dobija tenzor čiji je rang za dva manji od polaznog tenzora. Kontrakcije na drugim mešovitim tenzorima se na sličan način mogu analizirati. Novi tenzori se mogu izvesti od već postojećih tenzora primenjujući kontrakciju na gornji i donji indeks. Ovaj proces se može ponavljati sve dok postoji gornji i donji indeks nad kojim se moze vršiti kontrakcija. Svaki put kada se izvrši kontrakcija, rang rezultujećeg tenzora je za dva manji od ranga polaznog.

1.7.4. Množenje (unutrašnji proizvod) tenzora

Unutrašnji proizvod tenzora se dobija tako sto se prvo izvrši spoljašnji proizvod nad datim vektorima, nakon toga se izvrši kontrakcija na dva indeksa.

Primer 1.7.1. (unutrašnji proizvod)
Neka su sa A^i i B_j označene komponente dva tenzora prvog reda (vektora). Spoljašnji proizvod ovih tenzora je $C_j^i = A^i B_j, i, j = 1, \dots, N$.

Unutrašnji proizvod ovih tenzora je skalar $C = A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 + \cdots + A^N B_N$.

Zakon količnika
Neka su B_r^{qs} i C_p^s proizvoljni apsolutni tenzori. U nastavku se posmatra veličina $A(ijk)$, za koju se smatra da je mešoviti tenzor trećeg reda A_{jk}^i. Ako se pokaže da je ispunjena jednačina

$$A_{qp}^r B_r^{qs} = C_p^s, \tag{1.24}$$

tada će važiti da A_{qp}^r mora da bude tenzor. Ovo je primer zakona količnika. Ovaj rezultat se može generalizovati i primeniti na tenzore bilo kog reda odnosno ranga.

Pokazuje se u nastavku da je A_{jk}^i iz (1.24) tenzor. Neka su sa x^i i $\bar{x}^i$ označeni sistemi koordinata koji su povezani transformacijama koje su definisane u jednačinama (1.3) i (1.4).

U koordinatnom sistemu $\bar{x}^i$, $i = 1, \dots, N$ se pretpostavlja da je

$$\bar{A}_{qp}^r \bar{B}_r^{qs} = \bar{C}_p^s, \tag{1.25}$$

gde su po pretpostavci B_k^{ij} i C_m^l proizvoljni apsolutni tenzori, stoga moraju da zadovoljavaju transformacione jednačine

$$\bar{B}_r^{qs} = B_k^{ij} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}$$

$$\bar{C}_p^s = C_m^l \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}.$$

Zamenom $\bar{B}_r^{qs}$ i $\bar{C}_p^s$ u jednačini (1.25) dobija se jednačina

$$\bar{A}_{qp}^r \left(B_k^{ij} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \right) = \left(C_m^l \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \right) = A_{qm}^r B_r^{ql} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}.$$

Pošto su indeksi po kojima se sumira nemi, mogu se zameniti drugim oznakama. Zamenom l u j, q u i, r u k, prethodne jednačine su sledećeg oblika:

$$\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \left(\bar{A}_{qp}^r \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} - A_{im}^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \right) B_k^{ij} = 0.$$

Koristeći unutrašnji proizvod sa $\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^s}$, pojednostavljuje se prethodna jednačina na oblik

$$\delta_j^n \left[\bar{A}_{qp}^r \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} - A_{im}^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \right] = 0 \text{ ili } \left[\bar{A}_{qp}^r \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} - A_{im}^k \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \right] B_k^{in} = 0.$$

Pošto je B_k^{in} proizvoljan tenzor, veličina unutar zgrade je nula i stoga važi

$$\bar{A}^r_{qp}\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} - A^k_{im}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} = 0.$$

Ova jednačina se pojednostavljuje unutrašnjim proizvodom sa $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}$, i dobija se

$$\delta^q_j \delta^l_r \bar{A}^r_{qp} - A^k_{im}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} = 0,$$

odnosno $\bar{A}^l_{jp} = A^k_{im}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}$ je transformacioni zakon za mešoviti tenzor trećeg reda.

Primer 1.7.2.
Metričke komponente g_{ij} su kovarijantni tenzori drugog reda.

Rešenje
U koordinatnom sistemu $x^i, i = 1, \ldots, N$ kvadrat dužine luka je $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ dok se u koordinatnom sistemu $\bar{x}^i, i = 1, \ldots, N$ kvadrat dužine luka predstavlja u obliku $ds^2 = \bar{g}_{mn}d\bar{x}^m d\bar{x}^n$.

Kvadrat dužine luka treba da bude invarijantan, zato mora da bude ispunjeno

$$\bar{g}_{mn}d\bar{x}^m d\bar{x}^n = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{1.26}$$

Ovde se pretpostavlja da postoji koordinatna transformacija data jednačinama (1.3) i (1.4). Uopšteno, ako je $x^i = x^i(\bar{x})$, tada za $i = 1, \ldots, N$ važi da je

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}d\bar{x}^m \text{ i } dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}d\bar{x}^n. \tag{1.27}$$

Kada se ovi diferencijali zamene u jednačinu (1.26), dobija se $\bar{g}_{mn}d\bar{x}^m d\bar{x}^n = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}d\bar{x}^m d\bar{x}^n$ ili $\left(\bar{g}_{mn} - g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}\right)d\bar{x}^m d\bar{x}^n = 0$.

Za proizvoljne promene $d\bar{x}^m$ iz ove jednačine sledi da je $\bar{g}_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n}$, iz datog sledi da se g_{ij} transformiše kao apsolutni kovarijantni tenzor drugog reda.

Primer 1.7.3. (Krivolinijske koordinate)
Neka je dat skup generalnih transformacionih jednačina iz pravougaonih koordinata (x, y ,z) u krivolinijske (u, v, w). Ove transformacione jednačine i odgovarajuće inverzne transformacije su predstavljene u sledećem obliku :

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \qquad & u &= u(x, u\,, z) \\ y &= y(u, v, w) \qquad & v &= v(x, u\,, z) \\ z &= z(u, v, w) \qquad & w &= w(x, u\,, z). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Ovde su $y^1 = x, y^2 = y, y^3 = z$ i $x^1 = u, x^2 = v, x^3 = w$ Dekartove i uopštene koordinate. Presek koordinatnih površi $u = c_1, v = c_2, w = c_3$ definiše koordinatne krive krivolinijskog koordinatnog sistema. Zamenom datih transformacionih jednačina (1.28) u vektor položaja $\vec{r} = x\hat{e_1} + y\hat{e_2} + z\hat{e_3}$ dobija se vektor položaja koji je funkcija uopštenih koordinata $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\hat{e_1} + y(u, v, w)\hat{e_2} + z(u, v, w)\hat{e_3}$. Iz prethodnog se dobija $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}dw$, gde su:

$$\overline{E_1} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\widehat{e_1} + \frac{\partial y}{\partial u}\widehat{e_2} + \frac{\partial z}{\partial u}\widehat{e_3}$$
$$\overline{E_2} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\widehat{e_1} + \frac{\partial y}{\partial v}\widehat{e_2} + \frac{\partial z}{\partial v}\widehat{e_3}$$
$$\overline{E_3} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w}\widehat{e_1} + \frac{\partial y}{\partial w}\widehat{e_2} + \frac{\partial z}{\partial w}\widehat{e_3}$$

tangentni vektori na koordinatne krive.

Kvadrat dužine luka u krivolinijskim koordinatama je dat sa
$ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}dudu + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dudv + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}dudw + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dvdv + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}dvdu + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}dvdw + \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}dwdu + \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dwdv + \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}dwdw.$

Definišu se veličine:
$$g_{11} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\quad g_{12} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v},\quad g_{13} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}$$
$$g_{21} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\quad g_{22} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v},\quad g_{23} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}$$
$$g_{31} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\quad g_{32} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v},\quad g_{33} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}.$$

Neka je $x^1 = u, x^2 = v, x^3 = w$. Tada se kvadrat dužine luka može napisati u obliku $ds^2 = \vec{E}_i\vec{E}_j dx^i dx^j = g_{ij}dx^i dx^j$, i,j = 1,2,3 gde se $g_{ij} = \vec{E}_i\cdot\vec{E}_j = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^m}{\partial x^j}$, ($i,j$ su slobodni indeksi) nazivaju metričkim komponentama krivolinijskog koordinatnog sistema. Metričke komponente se mogu posmatrati kao elementi simetrične matrice, pošto je $g_{ij} = g_{ji}$. U pravouglom koordinatnom sistemu x, y, z kvadrat dužine luka $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. U ovom prostoru metričke komponente su date sa
$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 1.7.4. (Cilindrične koordinate ($\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z}$))
Transformacija pravouglih koordinata u cilindrične koordinate se može izraziti u obliku $x = r\,cos\theta, y = r\,sin\theta, z = z$. Ovde su $y^1 = x, y^2 = y, y^3 = z$ i $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z$ i vektor položaja se može izraziti u obliku
$$\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,z) = r\,cos\theta\widehat{e_1} + r\,sin\theta\widehat{e_2} + z\widehat{e_3}$$
$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = cos\theta\widehat{e_1} + sin\theta\widehat{e_2}$$
$$\overrightarrow{E_2} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -rsin\theta\widehat{e_1} + rcos\theta\widehat{e_2}$$
$$\overrightarrow{E_3} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \widehat{e_3}$$

Pošto je $g_{ij} = \vec{E}_i\cdot\vec{E}_j$, metričke komponente ovog prostora su
$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pošto je $g_{ij} = 0$, za $i \neq j$, koordinatni sistem je ortogonalan.

Primer 1.7.5.
Kronekerov delta simbol δ_j^i je mešoviti tenzor drugog reda.

Dokaz
Neka je data koordinatna transformacija (1.3) i (1.4). Neka su sa $\bar{\delta}_j^i$ i δ_j^i označeni Kronekerovi delta simboli u $\bar{x}^i$ i $x^i(i = 1, \dots, N)$ koordinatnim sistemima. Prema definiciji Kronekerovog delta simbola važi

$$\bar{\delta}_j^i = \delta_j^i = \begin{cases} 0, ako\ je\ i \neq j \\ 1, ako\ je\ i = j \end{cases}.$$

Koristeći pravilo lanca za diferenciranje, dobija se

$$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \cdot \delta_k^i.$$

Po pretpostavci su $\bar{x}^i, i = 1, \dots, N$ nezavisne koordinate i zato važi $\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial \bar{x}^n} = \bar{\delta}_n^m$ prethodna jednačina se svodi na $\bar{\delta}_n^m = \delta_k^i \cdot \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$. Zato se Kronekerov delta simbol transformiše kao mešoviti tenzor drugog reda.

1.7.5. Konjugovani metrički tenzor

U nastavku se navodi teorema iz algebre, bez dokaza, koja predstavlja osobinu determinante, a ona glasi:

Teorema 1.7.6.
Determinanta je jednaka zbiru proizvoda elemenata jedne vrste (ili kolone) i njihovih odgovarajućih algebarskih kofaktora. Neka je A matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, tada važi: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}$, gde je A_{kj} algebarski kofaktor koji odgovara elementu a_{kj} matrice A.

Neka je sa g označena determinanta matrice kojoj su elementi metrički tenzori $g_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ i naziva se fundamentalnom determinantom. Prema **Teoremi 1.7.6.** važi

$$g = g_{i1}G_{(i,1)} + \cdots + g_{in}G_{(i,n)}, \qquad (1.29)$$

gde su $G_{(i,j)}$ algebarski kofaktori koji odgovaraju elementima g_{ij} matrice g.

Ako se elementi i-te vrste zamene elementima k-te vrste, dobija se da je vrednost ove determinante jednaka nuli, dato se zapisuje u sledećem obliku:

$$g_{k1}G_{(i,1)} + \cdots + g_{kn}G_{(i,n)} = g\delta_k^i$$
$$g_{kj}G_{(i,j)} = g\delta_k^i$$

Kada se podeli prethodna relacija sa g i dobija se

$$g_{kj}\frac{G_{(i,j)}}{g} = \delta_k^i. \qquad (1.30)$$

Neka je $\frac{G(i,j)}{g} = g_{(i,j)}$, relacija (1.30) se zapisuje u obliku $g_{kj}g_{(i,j)} = \delta_k^i$. Pokazuje se da je $g_{(i,j)}$ kontravarijantni tenzor drugog ranga. Primenom zakona količnika jednačina (1.30) se može pisati u obliku

$$g_{kj}g_{(i,j)} = \delta_k^i \tag{1.31}$$

pri čemu je Kronekerov simbol δ_k^i mešoviti tenzor drugog reda sto je pokazano u **Primeru 1.7.5.**

Prelaskom na sistem koordinata S', dobija se

$$g_{kj}{}' \cdot g_{(i,j)}{}' = \delta_k^i. \tag{1.32}$$

Primenom zakona transformacije na tenzorske veličine $g_{kj}{}'$ i δ'^i_k dobija se

$$g'_{(i,j)}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^j}g_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\xi}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^k}\delta_\varepsilon^\xi.$$

Posle zamene δ_ε^ξ iz jednačine (1.31),tj. $\delta_\varepsilon^\xi = g_{\varepsilon\gamma}g_{(\xi,\gamma)}$ i $\varepsilon \to \beta$ jer su ε i γ nemi indeksi, dobija se

$$\left[g'_{(i,j)}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^j} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^\xi}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^k}g_{(\xi,\gamma)}\right]g_{\varepsilon\gamma} = 0$$

Pošto je $g_{\varepsilon\gamma}$ proizvoljni tenzor važi da je : $g'_{(i,j)}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^j} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^\xi}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k}g_{(\xi,\gamma)} = 0.$

Unutrašnjim množenjem ove jednačine sa $\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta}$ i $\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma}$, dobija se

$$[\delta'^\rho_j g'_{(i,j)} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^\xi}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma}g_{(\xi,\gamma)}]\,\delta'^\sigma_i = 0,$$

$$g'_{(i,\rho)} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\xi}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma}g_{(\xi,\gamma)}. \tag{1.33}$$

Na osnovu zakona transformacije $Q'^{\mu v} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^v}{\partial x^\beta}Q^{\alpha\beta}$ zaključuje se da veličina $g_{(\xi,\gamma)} = \frac{G(\xi,\gamma)}{g}$ predstavlja kontravarijantni tenzor drugog ranga $g^{\xi\gamma}$ koji se naziva konjugovani metrički tenzor.

1.7.6. Asocirani tenzori[5]

Definicija 1.7.7. (Asocirani tenzor)
Bilo koji tenzor koji nastaje unutrašnjim množenjem datog tenzora sa metričkim ili konjugovanim metričkim tenzorom se naziva asocirani tenzor.

Asocirani tenzori su različiti načini predstavljanja tenzora. Množenje tenzora metričkim ili konjugovanim metričkim tenzorom utiče na podizanje ili spuštanje indeksa tenzora. Na

[5] *Detaljnije o asociranim tenzorima se može pogledati u [20],[12], [15].*

primer kovarijantne i kontravarijantne komponente vektora su različita predstavljanja istog vektora u različitim oblicima. Ovi oblici su povezani na način na koji su povezani metrički i konjugovani metrički tenzori $g^{ij}A_i = A^j, g_{ij}A^j = A_i$.

Primer 1.7.8.
Neka su A_i i A^i označene respektivno kovarijantne i kontravarijantne komponente vektora $\vec{A}$. Ove komponente su povezane jednačinama

$$A_i = g_{ij}A^j \tag{1.34}$$

$$\text{i } A^k = g^{jk}A_j, \tag{1.35}$$

gde su g_{ij} i g^{ij} metričke i konjugovane metričke komponente prostora.

Dokaz
Neka je jednačina (1.34) pomnožena sa g^{im} (unutrašnjim proizvodom) i koristeći jednačinu $g^{ij}g_{ik} = \delta^j_k$, pojednostavljuje se rezultat na:

$$g^{im}A_i = g^{im}g_{ij}A^j = \delta^m_j A^m = A^m.$$

Zamenjujući $i \to j, m \to k$ dobija se jednačina (1.35). Obrnuto, ako se pođe od jednačine (1.35) i pomnoži se sa g_{km} (unutrašnjim proizvodom) dobija se

$$g_{km}A^k = g_{km}g^{jk}A_j = \delta^j_m A_j = A_m,$$

što je oblik jednačine (1.34) sa promenjenim indeksima. Kao posledica jednačina (1.34) i (1.35) dobija se da su u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu kontravarijantne i kovarijantne komponente identične.

Iz $g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, i $g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dobija se $A_i = g_{i1}A^1 + g_{i2}A^2 + g_{i3}A^3 = A^i$.

Primeri asociranih tenzora:

$$A^i = g^{ij}A_i, \quad A^m_{.jk} = g^{mi}A_{ijk}, \qquad A^{.nm}_{i..} = g^{mk}g^{nj}A_{ijk}$$

$$A_j = g_{ij}A^i, \quad A^{i.k}_m = g_{mj}A^{ijk}, \qquad A_{mjk} = g_{im}A^i_{.jk}$$

Uobičajeno se "tačke" koriste da bi se označio položaj indeksa koji su podignuti ili spušteni. Ako je tenzor simetričan, položaj indeksa nije bitan zato tačka nije potrebna. Ako je A_{mn} simetričan tenzor, tada su $A^n_{.m}$ i A^{n}_{m} jednaki i zato se može pisati A^n_m.

Ako je dat kovarijantni tenzor T_{ijkm} može se izvesti kontravarijantni tenzor T^{pqrs} pomoću relacije $T^{pqrs} = g^{pi}g^{qj}g^{rk}g^{sm}T_{ijkm}$. Dati tenzor četvrtog reda se može izraziti kao mešoviti tenzor. Mešoviti tenzori asocirani sa datim kovarijantnim tenzorom četvrtog reda su $T^p_{.jkm} = g^{pi}T_{ijkm}, T^{pq}_{..km} = g^{qj}T^p_{.jkm}$.

2. PROSTOR MINKOVSKOG

2.1. Vektori i tenzori u prostoru Minovskog

Da bi se u potpunosti okarakterisao neki dogagađaj u fizici, neophodno je zadati prostorne koordinate tog događaja i vreme. Zbog toga se fizički događaji u n-dimenzionom prostoru karakterišu sa četiri broja: trima prostornim koordinatama x, y, z i vremenskom koordinatom t. Tačka u 3-dimenzionom prostoru karakteriše se skupom od tri broja x, y, z. Po analogiji sa ovim može se reći da četiri broja, x, y, z, t karakterišu tačku u četvorodimenzionom (4-dimenzionom) prostoru (svetu).

U 4-dimenzionom prostoru STR, prelaz sa jednog sistema koordinata na drugi realizuje se pomocu Lorencovih transformacija[6]. Koordinate tačke (događaja) u ovom 4-dimenzionom prostoru će biti definisane na sledeći način:

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z. \tag{2.1}$$

U nastavku se koristi važna karakteristika prostor-vremena, koju je otkrio Minkovski i koja se sastoji u tome da je geometrija prostorno-vremenskog kontinuuma pseudoeuklidska. Naime, rastojanje ds između dve bliske tačke (interval između dva infinitezimalno bliska događaja), odnosno metrička forma u prostoru sa koordinatama x^0, x^1, x^2, x^3, jednaka je

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.2}$$

Kao što se vidi, 4-dimenzioni metrički tenzor $\eta_{\mu\nu}$ određen je dijagonalnom matricom (dimenzije 4x4)

$$\eta = \|\eta_{\mu\nu}\| = diag\,[1, -1, -1, -1] \tag{2.3}$$

i očigledno je da se podudara sa svojim inverznim

$$(\eta^{-1})^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

ovako definisan 4-dimenzioni prostor naziva se prostor ili svet Minkovskog. Metrika prostora Minkovskog se nikakvim transformacijama i realnim promenljivim ne može svesti na sumu kvadrata diferencijala koordinata $ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, tj. na euklidsku metriku. Zbog toga se ovaj prostor, koji je realan ali nije euklidski, često naziva pseudoeuklidski ili prostor Minkovskog. On je specijalan slučaj jednog 4-dimenzionog neeuklidskog Rimanovog prostora koji je ravan i realan. Sveukupnost svih mogućih vrednosti x, y, z, t naziva se *svetom događaja*, a svaki odvojeni događaj, koji se dešava u prostornoj tački x, y, z u trenutku vremena t, naziva se *svetskom tačkom* tog događaja.

Zbog specifičnosti prostora Minkovskog, definišu se dve vrste komponenata 4-dimenzionog vektora, koje se označavaju slovima A^μ i A_μ sa indeksom gore i dole. Veličine A^μ nazivaju se kontravarijantnim, a A_μ-kovarijantnim komponentama 4-vektora.

---

[6] *O Lorencovim transformacijama se može pogledati detaljnije u [5].*

Skup veličina A^0, A^1, A^2 ,A^3, koje se pri Lorencovim transformacijama koordinata transformišu na sledeći način

$$A^{t\mu} = \frac{\partial x^{t\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = \alpha_{\nu}^{\mu} A^{\nu}, \tag{2.5}$$

naziva se kontravarijantni vektor ili kontravarijantni tenzor prvog ranga. Slično, skup veličina $A_0, A_{1,} A_2, A_3$ (sa donjim indeksima) koji se transformišu prema pravilu

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{t\mu}} A_{\nu} = \alpha_{\mu}^{\nu} A_{\nu}, \tag{2.6}$$

predstavlja kovarijantni vektor ili kovarijantni tenzor prvog ranga.

Analogno slučaju 3-dimenzionih vektora mogu se definisati i vektori, tzv. kvadrivektori ili četvorovektori u prostoru Minkovskog. Tako, kvadrivektor položaja (ili 4-dimenzioni vektor) tačke x^{μ} (μ = 0,1,2,3) određen je skupom

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \equiv (ct, \vec{r}) \tag{2.7}$$

Lorencove transformacije između dva sistema reference u stanju relativnog uniformnog kretanja duž zajedničke $x - x'$ - ose, imaju oblik

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma \cdot x^0 - \gamma u \;/\; c \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ x'^1 &= -\gamma u \;/\; c \cdot x^0 + \gamma \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ x'^2 &= 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ x'^3 &= 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

gde je $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Ove transformacije[7] se mogu zapisati u konciznom obliku kao

$$x^{t\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \alpha_{\mu\nu} x_{\nu} = \alpha_{\nu}^{\mu}\, x^{\nu}; (\mu = 0,1,2,3), \tag{2.9}$$

gde koeficijenti α_{ν}^{μ} definišu matricu Lorencovih transformacija L koja je određena sa

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma u}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Prema transformacionom pravilu (2.5) i (2.6) za kvadrivektore, može se uočiti da se koordinate kvadrivektora tačke, pri Lorencovim transformacija, transformišu kao kovarijantni vektori sa opštim članom $\alpha_{\nu}^{\mu} \equiv \partial x'^{\mu} / \partial x^{\nu}$.

Odgovarajuća inverzna transformacija je oblika

---

[7] *U radu će biti korišćena Ajnštajnova konvencija o sumiranju, koja se sastoji u tome da kada se indeksi ponavljaju, po njima se vrši sumiranje.*

$$x^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} x'^{\mu} = \bar{\alpha}^{\nu}_{\mu} x'^{\mu}, \left(\bar{\alpha}^{\nu}_{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\right), \tag{2.11}$$

pri čemu je $\bar{\alpha}^{\nu}_{\mu}$ inverzna matrica matrice α^{μ}_{ν}. Nije teško pokazati da koeficijenti α^{μ}_{ν} koji su definisani matricom zadovoljavaju relaciju:

$$\bar{\alpha}^{\nu}_{\mu} \alpha^{\mu}_{\sigma} = \delta^{\nu}_{\sigma} \tag{2.12}$$

Sve što je rečeno za transformacije koordinata kvadrivektora položaja x^{μ} može se uopštiti. Naime, bilo koji skup A^0, A^1, A^2, A^3(A^{μ}, μ = 0,1,2,3) koje se transformiše pri prelasku sa jednog sistema koordinata na drugi prema zakonu (2.5) i (2.6)

$$A^{t\mu} = \frac{\partial x^{t\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = \alpha^{\mu}_{\nu} A^{\nu}, A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu} = \bar{\alpha}^{\nu}_{\mu} A'^{\mu}, \tag{2.13}$$

gde su koeficijenti α^{μ}_{ν} definisani matricom (2.9), predstavlja kontravarijantni kvadrivektor u prostoru Minkovskog.

Navedene transformacione relacije za kontravarijantne vektore se mogu napisati u eksplicitnom obliku. Na osnovu matrice (2.9) se dobija

$$\begin{aligned}
A'^0 &= \alpha^0_{\nu} A^{\nu} = \alpha^0_0 A^0 + \alpha^0_1 A^1 + \alpha^0_2 A^2 + \alpha^0_3 A^3 = \gamma(A^0 + \beta A^1) \\
A'^1 &= \alpha^1_{\nu} A^{\nu} = \alpha^1_0 A^0 + \alpha^1_1 A^1 + \alpha^1_2 A^2 + \alpha^1_3 A^3 = \gamma(A^1 + \beta A^0) \\
A'^2 &= \alpha^2_{\nu} A^{\nu} = \alpha^2_2 A^2 = A^2 \\
A'^3 &= \alpha^3_{\nu} A^{\nu} = \alpha^3_3 A^3 = A^3
\end{aligned}$$

Konačno, komponente kontravarijantnog kvadrivektora pri Lorencovim transformacijama se transformisu prema zakonu:

$$A'^0 = \gamma(A^0 + \beta A^1), A'^1 = \gamma(A^1 + \beta A^0), A'^2 = A^2, A'^3 = A^3. \tag{2.14}$$

Uobičajeno je da se tri prostorne koordinate kvadrivektora (A^1, A^2, A^3) objedine u jedan 3-dimenzioni vektor i da se piše

$$A^{\mu} = \left(A^0, \vec{A}\right) \tag{2.15}$$

Kontravarijantnom vektoru A^{μ} (μ = 0,1,2,3), mogu se pomoću metričkog tenzora $\eta_{\mu\nu}$, pridružiti kontravarijantne komponente 4-vektora A_{μ}, obrazujući njegov unutrašnji proizvod sa metričkim tenzorom $\eta_{\mu\nu}$ kao

$$A_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu}. \tag{2.16}$$

Za A_0 i A_1 eksplicitno se dobija:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \eta_{0\nu} A^{\nu} = \eta_{00} A^0 + \eta_{01} A^1 + \eta_{02} A^2 + \eta_{03} A^3 = 1 \cdot A^0 \\
A_1 &= \eta_{1\nu} A^{\nu} = \eta_{10} A^0 + \eta_{11} A^1 + \eta_{12} A^2 + \eta_{13} A^3 = -1 \cdot A^1
\end{aligned}$$

Analogno se nalazi $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$. Prema tome

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3, \tag{2.17}$$

ili koncizno $A_{\mu} = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = \left(A^0, -\vec{A}\right)$.

Po analogiji sa slučajem 3-dimenzionih vektora u Euklidskom prostoru, definiše se skalarni proizvod dva proizvoljna kvadrivektora u prostoru Minkovskog, kao

$$(A, B) = A^{\mu} B_{\mu} = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

Imajući u vidu (2.17), može se pisati

$$A^{\mu}B_{\mu} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3. \qquad (2.18)$$

Ova veličina je skalar, tj ne menja se pri Lorencovim transformacijama, što je lako proveriti.

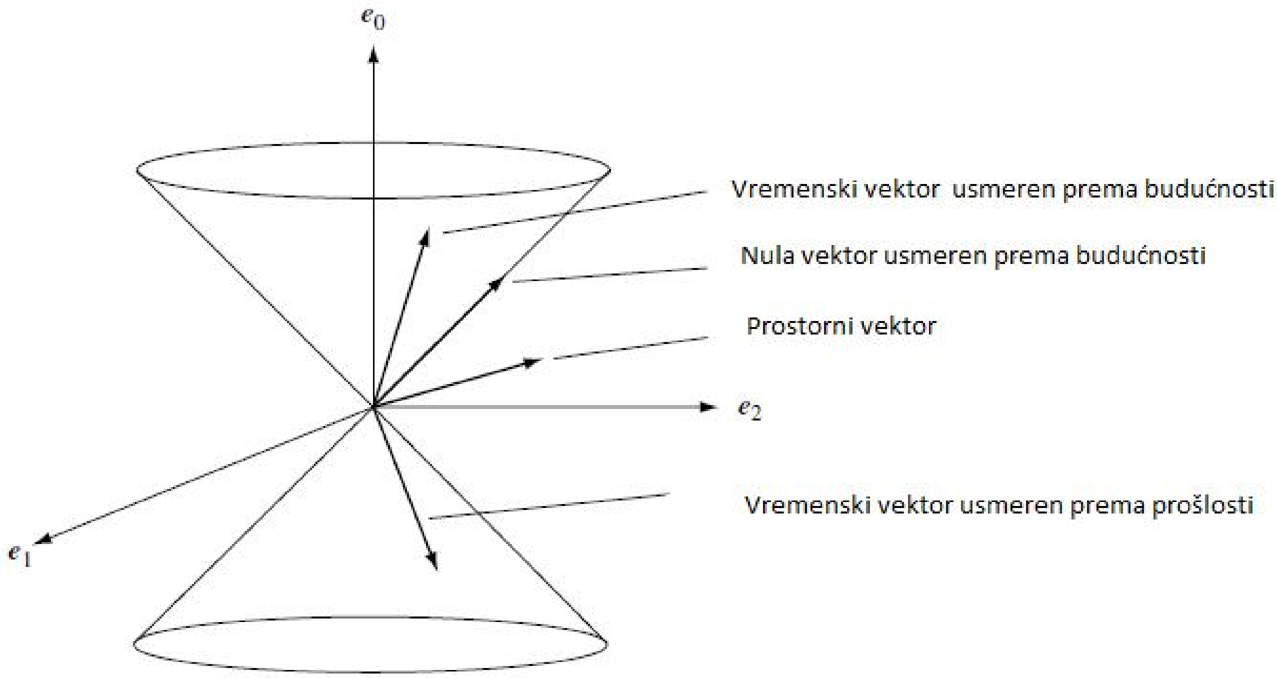
Specijalno, iz (2.18) sledi izraz za kvadrat inteziteta kvadrivektora

$$A^2 = (A^{\mu})^2 = \left(A^{\mu}, A_{\mu}\right) = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \qquad (2.19)$$

I ova veličina je takođe invarijanta:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = inv. \qquad (2.20)$$

Upravo zbog pogodnosti zapisa kvadrata veličine proizvoljnog 4-vektora u prostoru Minkovskog, uvode se dve "sorte" komponenata 4-vektora: kontravarijante i kovarijanne komponente. Specijalno, za kvadrat intenziteta kvadrivektora položaja x^{μ}, gde je $x^{\mu} = (ct, \vec{r})$ i $x_{\mu} = (ct, -\vec{r})$ dobija se: $x^{\mu}x_{\mu} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, što jasno ukazuje da je ova veličina invarijantna, jer predstavlja interval između nultog događaja sa koordinatama x^{μ}.



Slika 2.1. Svetlosni konus

3. OSNOVI RIMANOVE GEOMETRIJE

Georg Riman[8] (1826-1866) je 10. juna 1854. godine izložio svoj poznati "Habilitationsvortrag" na simpozijumu na filozofskom fakultetu u Gotingenu. Govor[9] koji je održao tada se smatra najvažnijim u istoriji diferencijalne geometrije. Rimanove revolucionarne ideje su generalizovale geometriju površi, koju su pre njega proučavali Gaus, Boljai i Lobačevski.

Diferencijalna geometrija koja se koristi u opštoj teoriji relativnosti je rezultat Rimanove generalizacije Gausovog rada na krivini dvodimenzionih površi u bilo kojoj dimenziji. Riman je 1854. godine generalizovao Gausovu[10] formulu za krivinu dvodimenzione površi za bilo koju dimenziju i na taj način je nastao tenzor krivine koji je nazvan po njemu. Rimanov rad su nastavili Kristofel, Riči i Levi-Čivita. Rimanov doprinos matematici je izuzetan, zato što je u potpunosti napustio ideju razmišljanja o krivini kao osobini prostora koji je ugrađen kao potprostor u višedimenzioni Euklidov prostor. Riman je pokazao da za postojanje Euklidovih koordinata, sve komponente tenzora krivine, moraju biti jednake nuli. Takođe je uveo "normalni koordinatni sistem" u okolini tačke, koji čini da g_{ik} bude konstantno u maloj okolini oko date tačke. Postojanje takvog koordinatnog sistema je sadržaj principa ekvivalencije u OTR. Bio je to hrabar potez, razmišljati o našem trodimenzionom prostoru ne kao o homogenom Euklidovom prostoru, već kao suštinski definisanom zakrivljenom prostoru, koji nije površ nekog višedimenzionog Euklidovog prostora. Riman je ukazao, u jednom od svojih radova, da ako se pretpostave homogenost i izotropnost prostora (nezavisnost tela od pozicije u kojoj se nalazi), prostor je konstantne krivine i mera odstupanja od Euklidovog prostora se vidi samo na veoma velikim rastojanjima, verovatno, suviše dalekim da bi se moglo posmatrati. Ali, ako prostor nije homogen, ne postoji takva restrikcija, i moguće je da, na beskonačno malim rastojanjima, mogu da se dese odstupanja od Euklidove geometrije, koja ne moraju biti uočljiva na uobičajenim rastojanjima. Riman predlaže da, ako je neophodno, čak se i kvadratna forma linijskog elementa može zameniti uopštenijim izrazom. Takođe, tvrdi da je fizička koncepcija rastojanja zasnovana na krutom telu i svetlosnim zracima, i da je za ove pojave neophodno preispitivanje za beskonačno malu skalu.

3.1. Rimanova mnogostrukost

Definicija 3.1.1.

Ako je M data m-dimenzionalna glatka mnogostrukost, g svuda nedegenerisan simetričan kovarijantni tenzor reda 2, tada je M uopštena Rimanova mnogostrukost, a g se naziva fudamentalni tenzor ili metrički tenzor na M. Ako je g pozitivno definitan, tada se M naziva Rimanova mnogostrukost. U smislu atlasa $\{(u_\alpha, M_\alpha)|\alpha \in I\}$, za svako $\alpha \in I$ postoji g_α, takvo da je za dato $(\alpha, \beta) \in I \times I$, $u_\beta \circ u_\alpha^{-1}: u_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \mapsto u_\beta(M_\alpha \cap M_\beta)$ izometrija.

---

[8] *Georg Friedrich Bernhard Riemann,nemački matematičar*

[9] *"Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"*

[10] *O Gausovoj krivini zainteresovani čitalac može pogledati u [17].*

Napomena 3.1.2.

i) *Neka je* $(U; x^i)$ *lokalni koordinatni sistem na* M*, tada se metrički tenzor* g *može napisati u obliku*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \tag{3.1}$$

na U*, gde je* $g_{ij} = g_{ji}$ *glatka funkcija na* U*. Na* T_pM*,* g *omogućuje bilinearnu funkciju u svakoj tački* $p \in M$*. Neka je* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$*,* $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$*, tada je*

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j. \tag{3.2}$$

ii) *Za tenzor* g *se kaže da je nedegenerisan u tački* p*, ako važi* $X \in T_pM$ *i* $g(X, Y) = 0$*, za sve* $Y \in T_pM$*, mora da bude* $X = 0$*. Dato implicira da je* g *nedegenerisan u* p *akko sistem linearnih jednačina* $g_{ij}(p)X^i = 0$*,* $1 \leq j \leq m$ *ima nulu kao jedino rešenje, tj.*$det\left(g_{ij}(p)\right) \neq 0$*.*

iii) *Ako za sve* $X \in T_pM$ *važi :*

$$g(X, X) \geq 0 \tag{3.3}$$

i ako jednakost važi samo ako je $X = 0$*, tada se za* g *kaže da je pozitivno definitan u* p*. Iz linearne algebre je poznato da je potreban i dovoljan uslov da* g *bude pozitivno definitan ako je matrica* $[g_{ij}]$ *pozitivno definitna. Stoga je pozitivno definitan tenzor* g *obavezno nedegenerisan.*

iv) *Za uopštenu Rimanovu mnogostrukost* M*, (3.2) definiše unutrašnji proizvod na tangentnom prostoru* T_pM *u svakoj tački* $p \in M$*. Za svako* $X, Y \in T_pM$*, neka je*

$$X \cdot Y = g(X, Y) = g_{ij}(p) X^i Y^j. \tag{3.4}$$

v) *Ako je* g *pozitivno definitan, onda je značajno definisati dužinu tangentnog vektora i ugla između dva tangentna vektora u istoj tački, tj.*

$$|X| = \sqrt{g_{ij} X^i X^j}, \tag{3.5}$$

$$\cos \sphericalangle(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{|X| \cdot |Y|}. \tag{3.6}$$

Stoga je Rimanova mnogostrukost diferencijabilna mnogostrukost koja ima pozitivno definitan unutrašnji proizvod na tangentnom prostoru u svakoj tački. Neophodno je da unutrašnji proizvod bude gladak: ako su X *i* Y *glatka tangentna vektorska polja, tada je* $X \cdot Y$ *glatka funkcija na* M*.*

Definicija 3.1.3.

Diferencijalna 2-forma

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{3.7}$$

je nezavisna od izbora lokalnog koordinatnog sistema x^i *i naziva se metričkom formom ili Rimanovom metrikom. Element dužine luka,* ds*, je dužina infinitezimalnog tangentnog vektora.*

Definicija 3.1.4.
Neka je $c: x^i = x^i(\tau)$, $\tau_0 \le \tau \le \tau_1$, neprekidna i po delovima glatka parametrizovana kriva na M. Dužina luka krive c je definisana sa

$$s = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}} d\tau. \tag{3.8}$$

Teorema 3.1.5.
Postoji Rimanova metrika na bilo kojoj m-dimenzionalnoj glatkoj mnogostrukosti M.

Dokaz
Neka je izabran lokalno konačan koordinatni pokrivač $\{(U_\alpha; x_i^\alpha)\}$ na M. Neka je $\{h_\alpha\}$ odgovarajuća particija jedinice, takva da je $supp\, h_\alpha \subset U_\alpha$. Neka je

$$ds_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(dx_\alpha^i\right)^2, \tag{3.9}$$

$$ds^2 = \sum_\alpha h_\alpha \cdot ds_\alpha^2, \tag{3.10}$$

gde su $h_\alpha \cdot ds_\alpha^2$ definisane sa

$$(h_\alpha \cdot ds_\alpha^2)(p) = \begin{cases} h_\alpha(p) ds_\alpha^2, p \in U_\alpha \\ 0 \qquad\qquad ,p \notin U_\alpha \end{cases}. \tag{3.11}$$

Jednačine (3.9) i (3.10) definišu glatke diferencijalne 2-forme na M. Kako je desna strana od (2.10) suma konačno mnogo izraza u svakoj tački $p \in M$, formula je smislena. Štaviše, ako se bira koordinatna okolina $(U; x^i)$ takva da je $\bar{U}$ kompaktno, tada U preseca samo konačno mnogo $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_r}$ jer je familija $\{U_\alpha\}$ lokalno konačna. Stoga je restrikcija (3.10) na U data u obliku

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\alpha_\lambda} \cdot ds_{\alpha_\lambda}^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

gde je

$$g_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} h_{\alpha_\lambda} \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x^j}. \tag{3.12}$$

Pošto je $0 \le h_\alpha \le 1$ i $\sum_\alpha h_\alpha = 1$, postoji indeks β takav da je $h_\beta(p) > 0$. Stoga važi $ds^2(p) = h_\beta \cdot ds_\beta^2$. Dakle, ds^2 je pozitivno definitna svuda na M. ∎

Napomena 3.1.6.
Postojanje Rimanove metrike na glatkoj mnogostrukosti je izvanredan rezultat. U opštem slučaju, ne mora da postoji negativno definitna Rimanova metrika na M (što je teže za dokazivanje).

Napomena 3.1.7.
Pomoću fudamentalnog tenzora, može se identifikovati tangentni prostor sa kotangentnim prostorom, i stoga kontravarijantni vektor i kovarijantni vektor mogu se posmatrati kao

različita predstavljanja istog vektora. Štaviše, za $X \in T_pM$ *neka je*

$$\alpha_X(Y) = g(X,Y), \qquad Y \in T_pM. \tag{3.13}$$

Tada je α_X *linearna funkcionela na* T_pM*, tj.* $\alpha_X \in T_p^*M$*. Obrnuto, pošto je* g *nedegenerisano, bilo koji element od* T_p^*M *može se predstaviti u obliku* α_X*. Dakle,* α *uspostavlja izomorfizam između* T_pM *i* T_p^*M*. U komponentnom obliku, ako je* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\alpha_X = X^i dx^i$*, tada se dobija iz formule* (3.13) *da je*

$$X^i = g_{ij}X^j, \qquad X^j = g^{ij}X_j. \tag{3.14}$$

3.2. Fudamentalna teorema Rimanove geometrije

Definicija 3.2.1.
Neka je (M,g) *uopštena* m*-dimenzionalna Rimanova mnogostrukost, i* ∇ *afina povezanost na* M*. Ako važi*

$$\nabla g = 0, \tag{3.15}$$

tada je ∇ *metrički kompatibilna povezanost na* (M,g)*.*

Napomena 3.2.2.

i) *Uslov* (3.15) *označava da je fudamentalni tenzor* g *paralelan s obzirom na metrički kompatibilnu povezanost.*

ii) *Ako je matrica povezanosti* ∇ *u lokalnim koordinatama* x^i*, data sa* $\omega = [\omega_i^j]$*, tada je*

$$\nabla g = \left(dg_{ij} - \omega_i^k g_{kj} - \omega_j^k g_{ik}\right) \otimes dx^i \otimes dx^j. \tag{3.16}$$

Stoga je (3.15) *ekvivalentno sa*

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}, \tag{3.17}$$

u matričnom obliku zapisano:

$$dg = \omega \cdot g + g \cdot \omega^T, \tag{3.18}$$

gde g *i* ω *predstavljaju matrice*

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_m^1 & \cdots & \omega_m^m \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Geometrijsko značenje metrički kompatibilne povezanosti je da paralelna pomeranja očuvavaju metriku.

iii) *Na Rimanovoj mnogostrukosti dužina tangentnih vektora i ugla između dva tangentna vektora su invarijantni pri paralelnom pomeranju. Ako su* $X(t)$ *i* $Y(t)$ *paralelna vektorska polja duž krive* $c: x^i = x^i(\tau)$ $(1 \le i \le m)$ *s obzirom na metrički kompatibilnu povezanost,tada je*

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} X^j \frac{dx^k}{d\tau} = 0\\ \frac{dY^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} Y^j \frac{dx^k}{d\tau} = 0\end{aligned}\right\}, \tag{3.21}$$

stoga važi

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(g_{ij}X^iY^j\right) &= \frac{dg_{ij}}{d\tau}X^iY^j + g_{ij}\frac{dX^i}{d\tau}Y^j + g_{ij}X^i\frac{dY^j}{d\tau} = \\ &= \left(\frac{dg_{ij}}{d\tau} - g_{ik}\Gamma^k_{jh}\frac{dx^h}{d\tau} - g_{jk}\Gamma^k_{ih}\frac{dx^h}{d\tau}\right)X^iY^j.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Iz (3.17) sledi da je desna strana jednakosti (3.22) jednaka nuli. Stoga, duž c važi

$$g_{ij}X^iY^j = const. \tag{3.23}$$

Teorema 3.2.3. (Fudamentalna teorema Rimanove geometrije)
Neka je M m-dimenziona uopštena Rimanova mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena, metrički kompatibilna povezanost na M, koja se naziva Levi-Čivitina povezanost na M ili Rimanova povezanost na M.

Dokaz
Neka je ∇ metrički kompatibilna povezanost, bez torzije na M. Matrica povezanosti ∇ u lokalnim koordinatama, neka je označena sa $\omega = \left[\omega^j_i\right]$, gde je

$$\omega^j_i = \Gamma^j_{ik}dx^k. \tag{3.24}$$

Tada važi da je

$$dg_{ij} = \omega^k_i g_{kj} + \omega^k_j g_{ki}, \tag{3.25}$$

$$\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}. \tag{3.26}$$

$$\Gamma_{ij,k} = g_{lk}\Gamma^k_{ij}, \qquad \omega_{ik} = g_{lk}\omega^l_i. \tag{3.27}$$

Iz (3.25) i (3.26) sledi da je

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}, \tag{3.28}$$

$$\Gamma_{ik,j} = \Gamma_{jk,i}. \tag{3.29}$$

Ciklično menjajući indekse u (3.28), dobija se

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i}, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j}. \tag{3.31}$$

Od zbira (3.30) i (3.31) se oduzima (3.28), dobija se

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{3.32}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \tag{3.33}$$

Iz prethodnog se vidi da je metrički kompatibilna povezanost, bez torzije, jedinstveno određena metričkim tenzorom.

Obrnuto, Γ_{ij}^{k} definisano u (3.33), zaista zadovoljava transformacione jednačine za koeficijente povezanosti pri promeni lokalnih koordinata. Stoga, oni definišu afinu povezanost ∇ na M. Jednostavnim računanjem se pokazuje da oni, takođe, zadovoljavaju formule (3.28) i (3.29). Stoga je ∇ povezanost bez torzije i metrički kompatibilna povezanost na M. ■

Napomena 3.2.4.

Neka je data proizvoljna baza (frame field) umesto prirodne baze u okolini Rimanove mnogostrkosti. Lokalna baza (local frame field) na mnogostrukosti je lokalni presek baznog raslojenja (frame bundle). Neka je $(e_1, \dots, e_m)$ *lokalna baza (local frame field) sa ko-bazom (coframe field)* $(\theta^1, \dots, \theta^m)$*. Neka je*

$$\nabla e_i = \theta_i^j e_j, \tag{3.34}$$

gde je $\theta = [\theta_i^j]$ *matrica povezanosti od* ∇*, s obzirom na lokalnu bazu* $(e_1, \dots, e_m)$*. Ovde su* θ^i, θ_i^j *forme dobijene "povlačenjem" (pulling) diferencijalnih 1-formi* θ^i *i* θ_i^j *sa baznog raslojenja* P *nazad na lokalne preseke (koristi se ista notacija ovde za* θ^i *i* θ_i^j*). Iz strukturnih jednačina povezanosti, zna se da je tvrđenje da je* ∇ *povezanost bez torzije, ekvivalentno sa tvrđenjem da* θ_i^j *zadovoljava jednačine*

$$d\theta^i - \theta^j \wedge \theta_j^i = 0. \tag{3.35}$$

$$g_{ij} = g(e_i, e_j)$$

$$ds^2 = g_{ij}\theta^i\theta^j.$$

Pošto je $g = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j$*, važi da je*

$$\nabla g = \left(dg_{ij} - g_{ik}\theta_j^k - g_{kj}\theta_i^k\right) \otimes \theta^i \otimes \theta^j. \tag{3.36}$$

Stoga je uslov da ∇ *bude metrički kompatibilna povezanost*

$$dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ik}. \tag{3.37}$$

Prethodna teorema se može preformulisati na sledeći način.

Teorema 3.2.5.[11]

Neka je (M, g) *uopštena Rimanova mnogostrukost, i* $\{\theta^i | 1 \le i \le m\}$ *je skup diferencijalnih 1-formi u okolini* $U \subset M$*, koji je linearno nezavistan svuda. Tada postoji jedinstveni skup od* m^2 *diferencijalnih 1-formi* θ_j^k *na* U*, takvih da važi*

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i = 0,$$

$$dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ik},$$

[11] *Dokaz teoreme je dat u [13].*

gde su g_{ij} komponente od g s obzirom na lokalnu ko-bazu (local coframe field) $\{\theta^i\}$, tj.

$$g = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j. \tag{3.38}$$

Napomena 3.2.6.[12]

Uslov ∇g = 0 u fundamentalnoj teoremi Rimanove geometrije je ekvivalentan sa uslovom $Z < X, Y > = < \nabla_z X, Y > + < X, \nabla_z Y >$, gde su $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definicija 3.2.7.

Neka su $E_{1,\dots,}E_n, F$ konačnodimenzioni vektorski prostori. Sa $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$ se označava prostor multilinearnih preslikavanja iz $E_1 \times \dots \times E_k$ u F.

Definicija 3.2.8.

Neka je E vektorski prostor. Tada se $T_s^r(E)$: $L^{r+s}(E^*, \dots, E^*, E, \dots, E; \mathbb{R})$, gde postoji r-puta dualni prostor od E, (E^*) i s-puta prostor E, naziva r-puta kontravarijantan i s-puta kovarijantan tenzor, ili kraće tenzor tipa $\binom{r}{s}$.

U specijalnom slučaju za $g_{ij} = \delta_{ij}$ se Rimanov prostor svodi na Euklidov prostor. Kvadrat dužine luka definisan jednačinom $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ se naziva Rimanovom metrikom i bilo koja geometrija koja koristi ovu metriku se naziva Rimanovom geometrijom. Prostor je ravan ako je moguće naći koordinatnu transformaciju gde je kvadrat dužine luka dat sa $ds^2 = \varepsilon_i (dx^i)^2$ gde je svako ε_i ili +1 ili -1. Prostor koji nije ravan je zakrivljen.Tangentni prostor T_pM sa na njemu zadatom metrikom ρ je Euklidov vektorski prostor.

Metrički tenzor g na diferencijabilnoj mnogostrukosti M se naziva takođe Rimanovom metrikom tangentnog raslojenja TM, zato što g indukuje Euklidovu metriku na svakom sloju T_pM. Metrički tenzor na M se naziva jos i Rimanovom metrikom na M. U nastavku će biti izložen način izgrađivanja Rimanove metrike na diferencijabilnoj mnogostrukosti TM, koja proizilazi iz metričkog tenzora na M. Bitno je primetiti da unutrašnji proizvod "na diferencijalni način zavisi od p", tj. preslikavanje $p \to g(Xp, Yp)$ se diferencira po svim diferencijabilnim vektorskim poljima na M, što proizilazi direktno iz definicije tenzora.

Napomena 3.2.9.

Rimanova geometrija je uopštenje Euklidove geometrije, jer zadavanje Rimanove metrike označava na diferencijabilnoj mnogostrukosti, na diferencijabilan način zavisnost od tačaka Euklidove strukture. Svakoj tački p se dodeljuje funkcija $\measuredangle: TpM^0 \times TpM^0 \to [0, \pi]$, gde je $TpM^0 = TpM \setminus \{0\}$, data formulom

$$cos\measuredangle(v, \omega) = \frac{g(v, \omega)}{IIvII\ II\omega II}. \tag{3.39}$$

Funkcija $\measuredangle(v, \omega)$ se naziva (neorijentisanim) uglom između v i ω, $v, \omega \epsilon TpM^0$. Vektori $v, \omega \in TpM$ su ortogonalni ako važi $< v, \omega >=0$ $(v, \omega \epsilon TpM^0)$.

[12] *Dokaz teoreme sa ekvivalentnim uslovom je izložen u [2].*

Ako su $c_1, c_2 : J \to M$ *glatke krive,* $t_o \in J, c_1(t_o) = c_2(t_o)$ *i* $c_1(t_o) \neq 0$, $c_2(t_o) \neq 0$ *ugao* $\sphericalangle\big(c_1(t_o), c_2(t_o)\big)$ *je ugao preseka krivih* c_1, c_2 *u* t_o. *Neka je* (x, U) *karta na M,* $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$. *Tada se vektorska polja* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ *predstavljaju u obliku* $X = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{n} \psi^j X_j$ *gde su* φ^i *i* $\psi^j \in C^\infty(U)$.*Iz bilinearnosti preslikavanja g proizilazi predstavljanje* $< X, Y >= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi^i \psi^j g_{ij}$. *Funkcije* $g_{ij} =< X_i, X_j >\in C^\infty(U)$ *se nazivaju komponentama tenzora g s obzirom na kartu* x. *Definiše se za tenzore* ω_1, ω_2 *tipa* $\binom{r}{0}$ *i* $\binom{s}{0}$ *tenzorski proizvod* $\omega_1 \otimes \omega_2$ *tj* $(r + s)$ *–forma zadata formulom* $(\omega_1 \otimes \omega_2)(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s) = \omega_1(X_1, \dots, X_r)\omega_2(Y_1, \dots, Y_s)$, $X_i, Y_j \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$.*Tenzor g se takođe naziva “prvom osnovnom formom” Rimanove mnogostrukosti.*

4. KRISTOFELOVI SIMBOLI

4.1. Povezanosti[13]

4.1.1. Povezanosti na vektorskim raslojenjima[14]

Da bi se mogao „diferencirati“ presek vektorskog raslojenja, odnosno vektorsko polje na mnogostrukosti, u nastavku će biti uvedena struktura koja se naziva povezanost na vektorskom raslojenju. Afina povezanost je struktura vezana za diferencijabilnu mnogostrukost, kako bi se mogla „diferencirati“ njena tenzorska polja. Vektorsko raslojenje i njegov presek su uvedeni u **1.6.1.** podnaslovu.

Definicija 4.1.1.
Povezanost na vektorskom raslojenju (E, B, π) *(*E *je konačnodimenzioni prostor dimenzije* n*) je preslikavanje* $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ *koje zadovoljava uslove:*
1) Za sve $t_1, t_2 \in \Gamma(E)$ $\nabla(t_1 + t_2) = \nabla t_1 + \nabla t_2$.
2) Za svako $t \in \Gamma(E)$ *i svako* $\alpha \in C^\infty(M)$, $\nabla(\alpha t) = d\alpha \otimes t + \alpha \nabla t$.

Neka je X *glatko tangentno vektorsko polje na* M *i* $t \in \Gamma(E)$. *Neka je*

$$\nabla_X t = \langle X, \nabla t \rangle, \tag{4.1}$$

gde $\langle , \rangle$ *predstavlja par sa elementima iz* TM *i* T^*M. *Tada je* $\nabla_X t$ *presek od* E, *koji se naziva kovarijantnim izvodom preseka* t *duž* X.

Napomena 4.1.2.
Neka je $\alpha = -1$. *Tada iz osobine 2) iz* ***Definicije 4.1.1.*** *sledi da važi*

$$\nabla(-t) = -\nabla t. \tag{4.2}$$

Stoga ∇ *preslikava nula presek u nula presek. Zato je* ∇ *linearni operator iz* $\Gamma(E)$ *u* $\Gamma(T^*M \otimes E)$.

Napomena 4.1.3.
Neka su X, Y *neka dva glatka tangentna vektorska polja na* M, t, t_1, t_2 *preseci od* E *i* $\alpha \in C^\infty(M)$. *Tada važi:*
1) $\nabla_{X+Y} t = \nabla_X t + \nabla_Y t$.
$\nabla_{X+Y} t = \langle X + Y, \nabla t \rangle = \langle X, \nabla t \rangle + \langle Y, \nabla t \rangle = \nabla_X t + \nabla_Y t$.
2) $\nabla_{\alpha X} t = \alpha \nabla_X t$.
$\nabla_{\alpha X} t = \langle \alpha X, \nabla t \rangle = \alpha \langle X, \nabla t \rangle = \alpha \nabla_X t$.
3) $\nabla_X(t_1 + t_2) = \nabla_X t_1 + \nabla_X t_2$.

$$\nabla_X(t_1 + t_2) = \langle X, \nabla(t_1 + t_2) \rangle \overset{1)\ iz\ def\ \nabla}{=} \langle X, \nabla t_1 + \nabla t_2 \rangle = \langle X, \nabla t_1 \rangle + \langle X, \nabla t_2 \rangle = \nabla_X t_1 + \nabla_X t_2.$$

4) $\nabla_X(\alpha t) = (X\alpha)t + \alpha \nabla_X t$.

[13] *Umesto termina povezanost se u literaturi koriste termini koneksija ili konekcija. U ovom radu će u nastavku biti korišćen termin povezanost. U literaturi na engleskom jeziku, termin glasi: connection.*
[14] *Opštija tvrđenja o povezanostima se mogu pogledati u [13].*

$$\nabla_X(\alpha t) = \langle X, \nabla(\alpha t)\rangle = \langle X, d\alpha \otimes t + \alpha\nabla t\rangle = \langle X, d\alpha \otimes t\rangle + \langle X, \alpha\nabla t\rangle =$$
$$= \langle X, d\alpha \otimes t\rangle + \alpha\nabla_X t = (X\alpha)t + \alpha\nabla_X t.$$

Napomena 4.1.4.

Kovarijantni presek t duž $X(\nabla_X t)$ ima sledeće lokalne osobine:

1) *Ako su X_1, X_2 tangentna vektorska polja sa istom vrednošću u $p \in M$, tada za bilo koji presek t od E, $\nabla_{X_1} t$ i $\nabla_{X_2} t$, takođe, imaju istu vrednost u p. Može se definisati apsolutni diferencijalni količnik $(\nabla_X t)$ preseka od E s obzirom na tangentni vektor od M u p. Za $X \in T_pM$, $\nabla_X : \Gamma(E) \to E_p$.*
2) *Za preslikavanje $\nabla_X : \Gamma(E) \to E_p$ $\left(X \in T_pM\right)$, $\nabla_X t_1 = \nabla_X t_2$, vrednosti na presecima t_1 i t_2 na parametrizovanoj krivoj na M koja je tangentna na X su iste. Povezanost je lokalno data skupom diferencijalnih 1-formi.*

Definicija 4.1.5.

Neka je U koordinatna okolina od M sa lokalnim koordinatama x^i, $1 \leq i \leq m$. Neka je izabrano n glatkih preseka t_α $(1 \leq \alpha \leq n)$ od E na U, tako da su oni linearno nezavisni svuda. Takav skup od n glatkih preseka se naziva lokalna baza (local frame field) od E na U. U svakoj tački $p \in U, \left\{dx^i \otimes t_\alpha, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n\right\}$ formira bazu tenzorskog proizvoda $T_p^* \otimes E_p$.

Napomena 4.1.6.

Pošto je ∇t_α lokalni presek na U raslojenja $T^*(M) \otimes E$, može se pisati

$$\nabla t_\alpha = \sum_{1\leq i\leq m, 1\leq\beta\leq n} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} dx^i \otimes t_\beta, \tag{4.3}$$

gde su $\Gamma_{\alpha i}^{\beta}$ glatke funkcije na U. Neka je

$$\omega_\alpha^\beta = \sum_{i=1}^{m} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} dx^i. \tag{4.4}$$

Tada se (4.3) *može zapisati u obliku*

$$\nabla t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \omega_\alpha^\beta \otimes t_\beta. \tag{4.5}$$

U nastavku se uvodi matrična notacija, radi kraćeg zapisivanja i lakšeg računanja. Neka je sa S označena kolona matrica koju čini lokalna baza, a sa ω je označena matrica sa elementima ω_α^β, tj.

$$S = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}, \qquad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Tada se (4.5) *može zapisati u matričnom obliku*

$$\nabla S = \omega \otimes S. \tag{4.7}$$

Matrica ω je matrica povezanosti, koja zavisi od izbora lokalne baze.

Napomena 4.1.7.
Ako je $S' = [t'_1, \dots, t'_n]^T$ *neka druga lokalna baza na* U, *pretpostavlja se da je*

$$S' = A \cdot S, \tag{4.8}$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

U matrici A *su* a_i^j *glatke funkcije na* U *i neka je* $detA \neq 0$. *Neka je matrica povezanosti* ∇ *s obzirom na lokalnu bazu* S' *označena sa* ω'. *Tada se iz uslova* ***Definicije 4.1.1.*** *dobija da je*

$$\nabla S' = dA \otimes S + A \cdot \nabla S = (dA + A \cdot \omega) \otimes S = (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}) \otimes S'. \tag{4.9}$$

Stoga je

$$\omega' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}. \tag{4.10}$$

Formula (4.10) *predstavlja transformacionu formulu matrice povezanosti pri promeni lokalne baze.*

Teorema 4.1.8.
Povezanost uvek postoji na vektorskom raslojenju.

Dokaz
Neka je dat koordinatni pokrivač $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ od M. Kako su vektorska raslojenja trivijalno lokalna, može se pretpostaviti da postoji lokalna baza S_α za svako U_α. Zbog dobijanja lokalne strukture povezanosti treba konstruisati matricu ω_α reda $n \times n$ na svakom U_α, tako da konstruisane matrice zadovoljavaju (4.10) pri promeni lokalne baze. Može se pretpostaviti da je $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokalno konačan i $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je odgovarajuća particija jedinice, takva da $supp\ g_\alpha \subseteq U_\alpha$. Kada je $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tada prirodno postoji nedegenerisana matrica $A_{\alpha\beta}$ glatkih funkcija na $U_\alpha \cap U_\beta$ takva da je

$$S_\alpha = A_{\alpha\beta} \cdot S_\beta, \qquad detA_{\alpha\beta} \neq 0. \tag{4.11}$$

Za svako $\alpha \in A$, bira se proizvoljna $n \times n$ matrica φ_α diferencijalnih 1-formi na U_α. Neka je

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} g_\beta \cdot \left(dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot \varphi_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}\right), \tag{4.12}$$

gde su izrazi u sumi po β sa $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ jednaki nuli . Tada je ω_α matrica diferencijalnih 1-formi na U_α. Treba samo pokazati da važi sledeća transformaciona formula za $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$:

$$\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta} \cdot \varphi_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}. \tag{4.13}$$

Ovo će biti urađeno direktnim računanjem. Prvo treba razmotriti da kada je $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, sledeća formula je tačna u preseku: $A_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma}$.

Na $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, važi da je

$$A_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} = \sum_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset} g_\gamma \cdot A_{\alpha\beta} \cdot \left(dA_{\beta\alpha} \cdot A_{\beta\alpha}^{-1} + A_{\beta\gamma} \cdot \varphi_\gamma \cdot A_{\beta\gamma}^{-1}\right) \cdot A_{\alpha\beta}^{-1} =$$

$$= \omega_\alpha - dA_{\alpha\beta} \cdot A_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Što je i trebalo pokazati. Iz prethodnog se može videti da postoji velika sloboda u izboru povezanosti. ■

Teorema 4.1.9.
Neka je ∇ povezanost na vektorskom raslojenju E i $p \in M$. Tada, postoji lokalna baza S u koordinatnoj okolini od p, tako da je odgovarajuća matrica povezanosti ω nula u p.

Dokaz
Neka je izabrana koordinatna okolina $(U; x^i)$ od p takva da je $x^i(p) = 0$, $1 \leq i \leq m$. Neka je S' lokalna baza na U sa odgovarajućom matricom povezanosti $\omega' = [\omega'^\beta_\alpha]$, gde je

$$\omega'^\beta_\alpha = \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^\beta_{\alpha i} x^i, \tag{4.14}$$

a $\Gamma'^\beta_{\alpha i}$ su glatke funkcije na U. Neka je

$$a_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \sum_{i=1}^{m} \Gamma'^\beta_{\alpha i}(p) x^i. \tag{4.15}$$

Tada je $A = [a_\alpha^\beta]$ identička matrica u p. Stoga, postoji okolina $V \subset U$ od p, takva da je A nedegenerisana na V. Dakle,

$$S = A \cdot S' \tag{4.16}$$

je lokalna baza na V. Pošto je $dA(p) = -\omega'(p)$, iz formule (4.13) se dobija da je

$$\omega(p) = (dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega' \cdot A^{-1})(p) = -\omega'(p) + \omega'(p) = 0 \tag{4.17}$$

Stoga je S tražena lokalna baza. ■

Definicija 4.1.10.
$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ je matrica krivine povezanosti ∇ na U.

Napomena 4.1.11.
Neka su X i Y dva proizvoljna tangentna vektorska polja na M. Tada matrica krivine Ω definiše linearnu transformaciju $R(X,Y)$ iz $\Gamma(E)$ u $\Gamma(E)$. Neka su $X, Y \in T_pM$ $p \in U$. Tada se može definisati linearna transformacija $R(X,Y)$ iz vlakna $\pi^{-1}(p)$ u $\pi^{-1}(p)$ pomoću matrice krivine Ω. Neka je $t \in \pi^{-1}(p)$. Koristeći lokalnu bazu $S_U = [t_1, \dots, t_n]^T$ vektorskog raslojenja E na U, t se može izraziti kao $t = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda^\alpha t_\alpha|_p$, $\lambda^\alpha \in \mathbb{R}$. Neka je

$$R(X,Y)t = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \lambda^\alpha \langle X \wedge Y, \Omega_\alpha^\beta \rangle t_\beta\big|_p. \tag{4.18}$$

Pošto se $\Omega = [\Omega_\alpha^\beta]$ transformiše prema formuli $\Omega' = A \cdot \Omega \cdot A^{-1}$, pri promeni lokalne baze, $\langle X \wedge Y, \Omega_\alpha^\beta \rangle$ je $\binom{1}{1}$-tenzor na linearnom prostoru $\pi^{-1}(p)$. Stoga $R(X,Y)$, koja je definisana u (4.18), je linearna transformacija iz $\pi^{-1}(p)$ u $\pi^{-1}(p)$ nezavisna od izbora lokalnih koordinata.

Napomena 4.1.12.
Neka su X i Y dva glatka tangentna polja na glatkoj mnogostrukosti M, tada je $R(X,Y)$ linearni operator na $\Gamma(E)$: za svako $t \in \Gamma(E)$, $p \in M$,

$$(R(X,Y)t)(p) = R(X_p, Y_p)t_p. \tag{4.19}$$

Operator $R(X,Y)$ ima sledeće osobine:
1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$.
2) $R(fX,Y) = f \cdot R(X,Y)$.
3) $R(X,Y)(ft) = f \cdot (R(X,Y)t)$, gde su $X, Y \in \Gamma(T(M))$, $f \in C^\infty(M)$, $t \in \Gamma(E)$. $R(X,Y)$ se naziva operator krivine povezanosti ∇.

Teorema 4.1.13.
Neka su X i Y dva proizvoljno izabrana tangentna vektorska polja na mnogostrukosti M. Tada je

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}. \tag{4.20}$$

Dokaz
Pošto su apsolutni diferencijalni količnik i operator krivine lokalni operatori, treba razmatrati operacije u (4.20) sa leve i desne strane na lokalnom preseku. Neka se $t \in \Gamma(E)$ može lokalno izraziti u obliku $t = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda^\alpha t_\alpha$. Tada je

$$\nabla_X t = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(X\lambda^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n} \lambda^\beta \langle X, \omega_\beta^\alpha \rangle \right) t_\alpha, \tag{4.21}$$

i

$$\nabla_Y \nabla_X t =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ Y(X\lambda^\alpha) + \sum_{\beta=1}^{n} \left(X\lambda^\beta \langle Y, \omega_\beta^\alpha \rangle + Y\lambda^\beta \langle X, \omega_\beta^\alpha \rangle \right) + \sum_{\beta=1}^{n} \lambda^\beta \left(Y\langle X, \omega_\beta^\alpha \rangle + \sum_{\gamma=1}^{n} \langle X, \omega_\beta^\gamma \rangle \langle Y, \omega_\gamma^\alpha \rangle \right) \right\} t_\alpha.$$

Stoga je

$$\nabla_X \nabla_Y t - \nabla_Y \nabla_X t =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ [X,Y]\lambda^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n} \lambda^\beta \left(\langle [X,Y], \omega_\beta^\alpha \rangle + \langle X \wedge Y, d\omega_\beta^\alpha - \sum_{\gamma=1}^{n} \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha \rangle \right) \right\} t_\alpha =$$

$$= \nabla_{[X,Y]} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \lambda^\beta \langle X \wedge Y, \Omega_\beta^\alpha \rangle t_\alpha, \tag{4.22}$$

tj. važi da je

$$R(X,Y)t = \nabla_X \nabla_Y t - \nabla_Y \nabla_X t - \nabla_{[X,Y]} t. \blacksquare$$

Teorema 4.1.14.
Matrica krivine Ω zadovoljava Bjankijev identitet.

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega. \tag{4.23}$$

Dokaz
Na obe strane jednakosti $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ se primenjuje spoljašnje diferenciranje:

$$d\Omega = -d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega = -(\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) =$$
$$= -\Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega. \blacksquare$$

Definicija 4.1.15.
Ako presek t vektorskog raslojenja E zadovoljava uslov

$$\nabla t = 0, \tag{4.24}$$

tada je t paralelni presek.

Definicija 4.1.16.
Neka je c parametrizovana kriva u M, a X je tangentno vektorsko polje duž c. Ako presek t vektorskog raslojenja E na c zadovoljava

$$\nabla_X c = 0, \tag{4.25}$$

tada je t paralelan duž krive c.

Napomena 4.1.17.
Neka je kriva c data u lokalnoj koordinatnoj okolini U od M sa $x^i = x^i(\tau)$, $1 \leq i \leq n$. Tangentno vektorsko polje od c je $X = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Neka je S lokalna baza na U. Tada je $t = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda^\alpha t_\alpha$ paralelni presek duž c akko zadovoljava sledeći sistem jednačina:

$$\langle X, \nabla t \rangle = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{d\lambda^\alpha}{d\tau} + \sum_{\beta,i} \Gamma_{\beta i}^{\alpha} \frac{dx^i}{d\tau} \lambda^\beta \right) t_\alpha = 0,$$

tj.

$$\frac{d\lambda^\alpha}{d\tau} + \sum_{\beta,i} \Gamma_{\beta i}^{\alpha} \frac{dx^i}{d\tau} \lambda^\beta = 0, \qquad 1 \leq \alpha \leq n. \tag{4.26}$$

Pošto je (4.26) sistem običnih diferencijalnih jednačina, jedinstveno rešenje postoji za bilo koje početne uslove. Dakle, za bilo koji dati vektor $v \in E_p$ u tački $p \in c$, određeno je jedinstveno vektorsko polje paralelno duž c, koje se naziva paralelnim pomeranjem od v duž c. Očigledno je da paralelna pomeranja duž c definišu izomorfizam između vlakana vektorskog raslojenja E u različitim tačkama na c.

Napomena 4.1.18.
Povezanost ∇ vektorskog raslojenja E, takođe indukuje povezanost (koja se takođe označava sa ∇) na dualnom raslojenju E^*. Neka je $t \in \Gamma(E)$, $t^* \in \Gamma(E^*)$, i par $\langle t, t^* \rangle$ je glatka funkcija na M. Tada je indukovana povezanost ∇ na E^* određena jednačinom

$$d\langle t, t^* \rangle = \langle \nabla t, t^* \rangle + \langle t, \nabla t^* \rangle, \tag{4.27}$$

gde $\langle , \rangle$ na desnoj strani označava uparivanje elemenata iz E i E^*. Neka t_α $(1 \leq \alpha \leq n)$ predstavljaju lokalnu bazu na E, i neka je dualna lokalna baza na E^*, $t^{*\beta}$ $(1 \leq \beta \leq n)$, tj.

$$\langle t_\alpha, t^{*\beta} \rangle = \delta_\alpha^\beta. \tag{4.28}$$

Neka je

$$\nabla t^{*\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} \omega^{*\beta}_{\gamma} \otimes t^{*\gamma}. \tag{4.29}$$

Tada iz (4.27) *važi da je*

$$\omega_{\alpha}^{\beta} = \langle \nabla t_{\alpha}, t^{*\beta} \rangle = -\langle t_{\alpha}, \nabla t^{*\beta} \rangle = -\omega^{*\beta}_{\alpha}.$$

Stoga je

$$\nabla t^{*\beta} = -\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_{\alpha}^{\beta} \otimes t^{*\alpha}. \tag{4.30}$$

Ako je presek t^* od E^* izražen lokalno $t^* = \sum_{\alpha=1}^{n} x_{\alpha} t^{*\alpha}$, tada se iz (4.30) *dobija*

$$\nabla t^* = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(dx_{\alpha} - \sum_{\beta=1}^{n} x_{\beta} \omega_{\alpha}^{\beta} \right) \otimes t^{*\alpha}. \tag{4.31}$$

Prethodne teoreme u ovom podnaslovu su se odnosile na opšte povezanosti, a u nastavku rada će biti razmatrane povezanosti na TM, koje se još nazivaju i afinim povezanostima, a mnogostrukost sa datom afinom povezanošću se naziva afin povezani prostor. Iz prethodnog opšteg razmatranja o mnogostrukostima, proizilazi da afina povezanost obavezno postoji na M.

Napomena 4.1.19.

Neka je $(U; x^i)$ bilo koji koordinatni sistem na M. Tada prirodna baza $\left\{ t_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq n \right\}$ formira lokalnu bazu tangentnog raslojenja TM na U. Tada je

$$\nabla t_i = \omega_i^j \otimes t_j = \Gamma_{ik}^{j} dx^k \otimes t_j \tag{4.32}$$

gde su Γ_{ik}^{j} glatke funkcije na U, koje se nazivaju koeficijentima povezanosti ∇ s obzirom na lokalne koordinate x^i.

Napomena 4.1.20.

Koeficijenti Γ_{ik}^{j} ne zadovoljavaju transformaciono pravilo za tenzore. Zato se definiše veličina

$$T_{ik}^{j} = \Gamma_{ki}^{j} - \Gamma_{ik}^{j}. \tag{4.33}$$

$$T = T_{ik}^{j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^i \otimes dx^k. \tag{4.34}$$

koja je $\binom{1}{2}$-tenzor koji se naziva tenzorom torzije afine povezanosti ∇. Iz (4.33) *sledi da su komponente tenzora torzije T kososimetrične s obzirom na donje indekse, tj.*

$$T_{ik}^{j} = -T_{ki}^{j}. \tag{4.35}$$

T se može posmatrati kao preslikavanje iz $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ u $\Gamma(TM)$. Neka su X i Y proizvoljna tangentna vektorska polja na M. Tada je $T(X, Y)$ tangentno vektorsko polje na M, u lokalnim koordinatama dato u obliku

$$T(X, Y) = T_{ij}^{k} X^i Y^i \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4.36}$$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{4.37}$$

Definicija 4.1.21.
Ako je tenzor torzije afine povezanosti jednak nuli, povezanost je bez torzije.

Napomena 4.1.22.
Afina povezanost bez torzije uvek postoji. Koeficijenti Γ_{ik}^{j} povezanosti ∇ određuju koeficijente povezanosti bez torzije ∇ na sledeći način:

$$\tilde{\Gamma}_{ik}^{j} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ik}^{j} + \Gamma_{ki}^{j}\right) \tag{4.38}$$

Bilo koja povezanost se može predstaviti kao suma tenzora torzije povezanosti bez torzije.

$$\Gamma_{ik}^{j} = -\frac{1}{2}T_{ij}^{k} + \tilde{\Gamma}_{ik}^{j} \tag{4.39}$$

Zapisano u obliku vektorskih polja

$$\nabla_X Z = \frac{1}{2}T(X,Z) + \tilde{\nabla}_X Z \tag{4.40}$$

Teorema 4.1.23.
Neka je ∇ afina povezanost bez torzije na M. Tada za svaku tačku $p \in M$ postoji lokalni koordinatni sistem x^i takav da su odgovarajući koeficijenti povezanosti Γ_{ik}^{j} jednaki nuli u p.

Dokaz
Neka je $(W;\omega^i)$ lokalni koordinatni sistem u p sa koeficijentima povezanosti $\Gamma_{ik}'^{j}$. Neka je

$$x^i = \omega^i + \frac{1}{2}\Gamma_{ik}'^{j}\left(\omega^j - \omega^j(p)\right)\left(\omega^k - \omega^k(p)\right). \tag{4.41}$$

Tada važi

$$\left.\frac{\partial x^i}{\partial \omega^j}\right|_p = \delta_j^i, \qquad \left.\frac{\partial^2 x^i}{\partial \omega^j \partial \omega^k}\right|_p = \Gamma_{jk}'^{i}(p). \tag{4.42}$$

Stoga je matrica $\left[\frac{\partial x^i}{\partial \omega^j}\right]$ nedegenerisana u okolini od p, a (4.41) omogućava promenu lokalnih koordinata u okolini od p. Formula za transformaciju koeficijenata povezanosti Γ_{ik}^{j} pri promeni koordinata je

$$\Gamma_{ik}'^{j} = \Gamma_{pr}^{q}\frac{\partial \omega^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial \omega^i}\frac{\partial x^r}{\partial \omega^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \omega^i \partial \omega^k}\cdot\frac{\partial \omega^j}{\partial x^p}. \tag{4.43}$$

Iz (4.43) se dobija da koeficijenti povezanosti Γ_{ik}^{j} u novom koordinatnom sistemu x^i zadovoljavaju sledeće:

$$\Gamma_{ik}^{j}(p) = 0, \qquad 1 \leq i,j,k \leq m. \blacksquare$$

Teorema 4.1.24.

Neka je ∇ povezanost bez torzije na M. Tada važi Bjankijev identitet

$$R_{ikl,h}^{j} + R_{ilh,k}^{j} + R_{ihk,l}^{j} = 0. \tag{4.44}$$

Dokaz

Iz **Teoreme 4.1.15.** važi da je $d\Omega_i^j = \omega_i^k \wedge \Omega_k^j - \Omega_i^k \wedge \omega_k^j$, *odnosno*

$$\frac{\partial R_{ikl}^j}{\partial x^h} dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = \left(\Gamma_{ih}^p R_{pkl}^j - \Gamma_{ph}^j R_{ikl}^p\right) dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l.$$

Stoga je

$$R_{ikl,h}^j dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = -\left(\Gamma_{kh}^p R_{ipl}^j - \Gamma_{lh}^p R_{ikp}^j\right) dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = 0,$$

gde je u poslednjoj jednakosti korišćena osobina povezanosti bez torzije. Dakle važi da je

$$\left(R_{ikl,h}^j + R_{ilh,k}^j + R_{ihk,l}^j\right) dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = 0. \tag{4.45}$$

Pošto su koeficijenti u (4.45) kososimetrični s obzirom na k, l, h, važi

$$R_{ikl,h}^j + R_{ilh,k}^j + R_{ihk,l}^j = 0. \blacksquare$$

4.2. Kristofelovi simboli prvog reda[15]

Dati simboli su dobili naziv po Elvinu Brunu Kristofelu, nemačkom matematičaru i fizičaru, jer je on za određene kombinacije parcijalnih izvoda uveo posebne oznake. Dati koeficijenti predstavljaju izvode potencijala gravitacionog polja, čime se manifestuje gravitacija kroz zakrivljenost mnogostrukosti.

Važe jednačine prelaza sa jednog sistema koordinata na drugi, tenzora $g_{\mu\nu}$ i $g'_{\mu\nu}$

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}.$$

Data jednačina će biti diferencirana po x'^σ

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\sigma \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\sigma \partial x'^\nu} \right). \tag{4.46}$$

Veličine $\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma}$ se ne transformišu kao tenzori. Cikličnom permutacijom indeksa μ, ν, σ odnosno α, β, γ se dobija

$$\frac{\partial g'_{\nu\sigma}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} + g_{\beta\gamma} \left(\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma} \right), \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial g'_{\sigma\mu}}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} + g_{\gamma\alpha} \left(\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\nu \partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \right). \tag{4.48}$$

Kada se saberu (4.46) i (4.47) i od njihovog zbira oduzme (4.48), a zatim se dobijena jednačina podeli sa 2, dobija se:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma} + \frac{\partial g'_{\nu\sigma}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial g'_{\sigma\mu}}{\partial x'^\nu} \right) =$$

[15] *Detaljnija objašnjenja Kristofelovih simbola prvog reda mogu se pogledati u [20], [3], [8]. Drugačiji dokaz za Bjankijev identitet se može pogledati u [20].*

$$= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}\right) + g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\sigma \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \tag{4.49}$$

Uvode se sledeće oznake:

$$\Gamma_{\sigma\mu,\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\right). \tag{4.50}$$

Veličina $\Gamma_{\sigma\mu,\nu}$ se naziva Kristofelov simbol prve vrste.

Iz definicije od $\Gamma_{\sigma\mu,\nu}$ se dobija da je Kristofelov simbol prve vrste simetričan u odnosu na prva dva indeksa, tj.

$$\Gamma_{\sigma\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu} \tag{4.51}$$

Na osnovu (4.50), jednačina (4.51) se može napisati u obliku:

$$\Gamma'_{\sigma\mu,\nu} = \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Gamma_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\sigma \partial x'^\mu}\right)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}, \tag{4.52}$$

što predstavlja zakon transformacije ovih simbola. Ako se izvrši kontrakcija dobijenog izraza sa $\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\eta}$ i uzme u obzir da je $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\eta} = \delta^\beta_\eta$, dobija se

$$\Gamma'_{\sigma\mu,\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\eta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Gamma_{\gamma\alpha,\eta} + g_{\alpha\eta}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\sigma \partial x'^\mu}. \tag{4.53}$$

4.3. Kristofelovi simboli drugog reda[16]

Dati simboli se uvode tako što se izvrši kontrakcija sa metričkim tenzorom $g^{\gamma\eta}$

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = g^{\gamma\eta}\Gamma_{\alpha\beta,\eta}. \tag{4.54}$$

Kada su poznati Kristofelovi simboli drugog reda $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, mogu se naći Kristofelovi simboli prvog reda:

$$\Gamma^\xi_{\alpha\beta}g_{\xi\gamma} = g^{\xi\eta}\Gamma_{\alpha\beta,\eta}g_{\xi\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta,\eta}g^{\xi\eta}g_{\xi\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta,\eta}\delta^\xi_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}. \tag{4.55}$$

Zbog simetrije $\Gamma_{\sigma\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}$ sledi da je Kristofelov simbol drugog reda simetričan u odnosu na donje indekse

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}. \tag{4.56}$$

Formula za transformaciju Kristofelovih simbola drugog reda pri prelasku sa jednog sistema koordinata na drugi se izvodi na sledeći način:

$$\Gamma'^\tau_{\mu\nu} = g'^{\tau\sigma}\Gamma'_{\mu\nu,\sigma}. \tag{4.57}$$

Koristeći da je $g'^{\tau\sigma} = g^{\theta\eta}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\theta}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\eta}$ i $\Gamma'_{\mu\nu,\sigma} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\xi}\frac{\partial^2 x^\xi}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\right)\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma}$ dobija se

---

[16] *Detaljnija objašnjenja Kristofelovih simbola drugog reda mogu se pogledati u [20], [3], [8].*

$$\Gamma'^{\tau}_{\mu\nu} = g^{\theta\eta}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\theta}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\xi}\frac{\partial^2 x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right)\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}} =$$
$$= g^{\theta\eta}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\theta}}\delta^{\gamma}_{\eta}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\xi}\frac{\partial^2 x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta} + g^{\theta\eta}g_{\gamma\xi}\frac{\partial^2 x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right)\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\theta}} =$$
$$= \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^{\theta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right)\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\theta}}$$

Zakon transformacije za Kristofelove simbole drugog reda, dat je sledećom jednačinom:

$$\Gamma'^{\tau}_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^{\theta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right)\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\theta}}. \tag{4.58}$$

Ako se izvrši kontrakcija sa $\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\tau}}$, dobija se

$$\Gamma'^{\tau}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\tau}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}. \tag{4.59}$$

Napomena 4.3.1.
Kristofelovi simboli prvog i drugog reda, u opštem slučaju nisu tenzori. Ako se posmatraju samo linearne transformacije, drugi članovi u (4.53) *i* (4.59) *postaju indentički jednaki nuli i u tom slučaju su dati simboli kovarijantni i mešoviti tenzori trećeg ranga. Dati simboli zavise isključivo od metrike posmatranog prostora. Kada je posmatrani prostor Euklidov, u pravouglim Dekartovim koordinatama sve komponente metričkog tenzora* $g_{\mu\nu}$ *su konstantne, pa su svi izvodi ovih veličina jednaki nuli. Kako se u datom slučaju metrička forma može svesti na prostu sumu kvadrata diferencijala koordinata, zaključuje se da u Euklidovom prostoru postoji bar jedan sistem koordinata u kome su svi Kristofelovi simboli prvog i drugog reda jednaki nuli.*

Definicija 4.3.2.
U lokalnom koordinatnom sistemu, neka je $x_i = \partial_i$, $g_{ij} = g(x_i, x_j)$ *i* $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$, *tako da je* $g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. *Definiše se* $\Gamma^i_{jk} = \sum_l g^{il} g(\nabla_j \partial_k, \partial_l)$. *Prethodnom formulom su definisani Kristofelovi simboli povezanosti.*

Napomena 4.3.3.
U prethodnoj definiciji je ∇_i *skraćena notacija od* ∇_{x_i}. *Alternativna definicija za Kristofelove simbole je data relacijom*

$$\nabla_j \partial_i = \sum_k \Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

U nastavku će biti pokazano da su prethodne dve definicije za Kristofelove simbole ekvivalentne, tj. ako su Kristofelovi simboli na Rimanovoj mnogostrukosti (M, g) definisani sa $\Gamma^i_{jk} = \sum_l g^{il} g(\nabla_j \partial_k, \partial_l)$, i ako je $\tilde{\Gamma}$ definisano sa $\nabla_i \partial_i = \sum_k \tilde{\Gamma}^k_{ij}\partial_k$, tada je $\Gamma^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}$.

U $\Gamma^i_{jk} = \sum_l g^{il} g(\nabla_j \partial_k, \partial_l)$ se zamenjuje $\nabla_j \partial_k$ sa $\sum_m \tilde{\Gamma}^m_{jk} \partial_m$, koristeći linearnost od g i definiciju $g(\partial_k, \partial_l) = g_{kl}$, $\sum_l g^{il} g_{kl} = \delta^i_k$ dobija se

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_l g^{il} \tilde{\Gamma}^m_{jk} g(\partial_m, \partial_l) = \sum_{l,m} \tilde{\Gamma}^l_{jk} g^{il} g_{kl} = \sum_m \tilde{\Gamma}^l_{jk} \delta^i_k = \tilde{\Gamma}^i_{jk}.$$

4.4. Kovarijantno diferenciranje[17]

Geodezijske linije[18] Rimanovog prostora obrazuju familiju krivih, određenih na invarijantan način zbog svojstva stalnosti intervala izmerenog duž bilo koje od krivih. Zato date krive ne zavise od posebnih oblika sistema koordinata i predstavljaju jedinstvenu krivu pri premeštanju iz jedne tačke prostora u drugu. Tako se mogu koristiti za računanje promene vektora ili tenzora iz jedne tačke u drugu, može se zamisliti da se dati objekti “prenose” duž geodezijske linije, spajajući te dve tačke. Neka je x neka tačka na geodezijskoj liniji, a $x + dx$ susedna tačka, takođe na datoj liniji, i neka je $\lambda^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ jedinični tangentni vektor geodezijske linije. Neka je V^μ kontravarijantni vektor, njegov kovarijantni oblik je V_μ, tada je $V_\mu V^\mu$ skalar. Vektor $V^\mu(x + dx)$ određuje rezultat prenošenja V^μ iz tačke x u tačku $x + dx$ tako da $\frac{d}{ds}(V_\mu \lambda^\mu) = \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} V^\nu \lambda^\mu)$ mora biti skalar, nezavisno od toga kakve se dve tačke na geodezijskim linijama posmatraju. Dato razmatranje dovodi do nekog mešovitog tenzora drugog ranga, koji se naziva kovarijantnim izvodom od V^μ.

Ubacivanjem u prethodni izraz, izraze za Kristofelove simbole prvog reda i jednačinu geodezijske linije, dobija se:

$$\frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} V^\nu \lambda^\mu) = \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\sigma} + V^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\tau_{\sigma\mu} g_{\nu\tau} V^\nu\right] \lambda^\sigma \lambda^\mu =$$
$$= \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\sigma} + \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu,\nu}\right) V^\nu\right] \lambda^\sigma \lambda^\mu =$$
$$= \left[\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\nu_{\sigma\mu} V^\nu\right] \lambda_\nu \lambda^\sigma.$$

Leva strana date jednakosti je skalar, tada kada je na desnoj strani unutrašnji proizvod kontravarijantnog vektora λ^σ, kovarijantnog vektora λ_ν i veličine $\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\nu_{\sigma\mu} V^\nu$ tenzor nultog reda. Prema teoremi o količniku, poslednja veličina mora biti komponenta tenzora drugog ranga kontravarijantnog po indeksu ν i kovarijantnog po indeksu σ. Dati tenzor se naziva kovarijantnim izvodom vektora V^μ i označava sa $V^\mu_{;\nu}$, zapisuje se u obliku:

$$V^\mu_{;\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma. \tag{4.60}$$

Unutrašnji proizvod kovarijantnog izvoda od V^μ sa jediničnim tangentnim vektorom λ^ν geodezijske linije je kontravarijantni vektor, koji se može zapisati u obliku

[17] *Detaljnije o kovarijantnom diferenciranju se može pogledati u [20], [5], [4], [22].*
[18] *Geodezijske linije će biti uvedene i detaljnije objašnjene u* ***4.4.5***

$$V^{\mu}_{;\nu}\lambda^{\nu} = \frac{dV^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}V^{\sigma}\lambda^{\tau}. \tag{4.61}$$

Prethodni vektor se naziva potpunim kovarijantnim izvodom polaznog vektora V^{μ}. Ako se za vektor V^{μ} bira jedinični tangentni vektor iz jednačine geodezijske linije, dobija se da je potpuni kovarijantni izvod jediničnog tangentnog vektora jednak nuli. Na ovaj način se dobija još jedna definicija geodezijske linije, da su krive čiji je potpuni kovarijantni izvod jediničnog tangentnog vektora jednak nuli.

Invarijantnost duž geodezijske linije unutrašnjeg proizvoda kovarijantnog vektora U_{μ} i jediničnog tangentnog vektora, određuje kovarijantni izvod $U_{\mu;\nu}$ od U_{μ}. Dato je

$$\frac{d}{ds}\left(U_{\mu}\lambda^{\mu}\right) = \left[\frac{\partial U_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}U_{\sigma}\right]\lambda^{\mu}\lambda^{\nu}$$

$$U_{\mu;\nu} = \frac{\partial U_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}U_{\sigma}. \tag{4.62}$$

Kovarijantno diferenciranje tenzora ranga većeg od jedan sastoji se u tome da se obrazuje skalar pomoću unutrašnjeg proizvoda tenzora i jediničnog tangentnog vektora geodezijske linije, a zatim se na dobijeni skalar primeni $\frac{d}{ds}$. Tada, ako je $Y_{\mu\nu}$ kovarijantni tenzor drugog ranga, veličina $Y_{\mu\nu}\lambda^{\mu}\lambda^{\nu}$ je skalar, dobija se

$$\frac{d}{ds}\left(Y_{\mu\nu}\lambda^{\mu}\lambda^{\nu}\right) = \left[\frac{\partial Y_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma^{\tau}_{\mu\sigma}Y_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\sigma}Y_{\mu\tau}\right]\lambda^{\sigma}\lambda^{\mu}\lambda^{\nu}.$$

Zbog teoreme o količniku suma veličina

$$Y_{\mu\nu;\sigma} = \frac{\partial Y_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma^{\tau}_{\mu\sigma}Y_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\sigma}Y_{\mu\tau}, \tag{4.63}$$

je kontravarijantni tenzor trećeg ranga i predstavlja kovarijantni izvod od tenzora $Y_{\mu\nu}$. Kovarijantni izvod mešovitog tenzora drugog ranga X^{λ}_{ν} je dat sa

$$X^{\lambda}_{\nu;\mu} = \frac{\partial X^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}X^{\sigma}_{\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}X^{\lambda}_{\sigma}. \tag{4.64}$$

Kovarijantni izvod kontravarijantnog tenzora drugog ranga $Z^{\lambda\nu}$ je

$$Z^{\lambda\nu}_{;\mu} = \frac{\partial Z^{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}Z^{\sigma\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}Z^{\lambda\sigma}. \tag{4.65}$$

Izjednačavanjem formula (4.63), (4.64), (4.65) sa formulama (4.60) i (4.62) pokazuje da članovi, koji uključuju Kristofelove simbole u prve tri pomenute formule, zadovoljavaju sledeća pravila: svaki kovarijantni indeks polaznog tenzora dovodi do pojave člana, koji sadrži Kristofelov simbol, dati član je takvog oblika kao i odgovarajući član u kovarijantnom izvodu kovarijantnog vektora. Svaki kontravarijantni indeks dovodi do pojave člana, analognog članu u kovarijantnom izvodu kontravarijantnog vektora.

Prethodno pravilo se očuvava u slučaju tenzora bilo kog ranga.

Važan tenzor koji se može dobiti iz kovarijantnog izvoda nekog zadatog tenzora drugog ranga se naziva vektorska divergencija. Da bi se pokazalo kako se dobija vektorska divergencija, koristi se sledeći rezultat o sumi Kristofelovih simbola. Ako je g determinanta, koja se dobija iz metričkih koeficijenata, po pravilu za izvod determinante važi da je:

$$\frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \sum_{\lambda,\mu}\left(algebarski\ kofaktor\ g_{\lambda\mu}\ u\ g\right)\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = g g^{\lambda\mu}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}.$$

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma}\right) = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu}.$$

Zato važi da je

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial ln\sqrt{g}}{\partial x^\nu}. \quad (4.66)$$

Neka je V^λ kontravarijantni vektor i $V^\lambda_{;\mu}$ njegov kovarijantni izvod, tada je $V^\lambda_{;\lambda}$ skalar, koji se naziva divergencijom od V^λ.

$$V^\lambda_{;\lambda} = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}V^\lambda = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\nu}V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}V^\lambda\right)}{\partial x^\nu}. \quad (4.67)$$

Neka je $T^{\mu\nu}$ kontravarijantni tenzor drugog ranga i $T^{\mu\nu}_{;\lambda}$ njegov kovarijantni izvod, tada se vektor $T^{\mu\lambda}_{;\lambda}$, asociran sa $T^{\mu\nu}$, naziva vektorska divergencija. Formula za vektorsku divergenciju ima oblik:

$$T^{\mu\lambda}_{;\lambda} = \frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}T^{\sigma\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}T^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\mu\lambda}\right)}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}T^{\sigma\lambda}. \quad (4.68)$$

Postoji i druga vektorska divergencija, koja se dobija kontrakcijom po prvom kontravarijantnom indeksu tenzora $T^{\mu\nu}$, odnosno

$$T^{\lambda\nu}_{;\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}T^{\lambda\nu}\right)}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma}T^{\sigma\lambda}.$$

Date dve vektorske divergencije su jednake, ako je tenzor $T^{\mu\nu}$ simetričan, tj. njegove komponente su takve da je $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. U drugim slučajevima, date dve vektorske divergencije dobijene iz datog tenzora drugog ranga se ne poklapaju.

4.4.1. Kovarijantni izvod kovarijantnog i kontravarijantnog vektora

Kao što je poznato, formule transformacije kovarijantnog vektora pri prelazu sa sistema koordina S na S', imaju oblik

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}V_\alpha.$$

Diferenciranje po x'^ν daje

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}. \quad (4.69)$$

Iz (4.69) se vidi da drugi član narušava tenzorski karakter veličine $\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu}$. Samo u slučaju linearnih transformacija, izvodi $\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta}$ transformisali bi se kao tenzori. Iako $\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta}$ ne obrazuju tenzor, ipak pomoću njega može se formirati tenzor. Ako se ranije dobijena formula (4.58) pomnoži sa V'_τ, dobija se

$$\Gamma'^{\tau}_{\mu\nu}V'_\tau = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\Gamma^\theta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\theta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\right)\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\theta}V'_\tau = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\Gamma^\theta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\theta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\right)V_\theta. \quad (4.70)$$

Oduzimajući (4.70) od (4.69), nehomogeni članovi se potiru,dobija se

$$\frac{\partial V'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'^{\tau}_{\mu\nu}V'_\tau = \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\theta_{\alpha\beta}V_\theta\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (4.71)$$

Iz ove jednačine sledi da se veličine $\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\theta_{\alpha\beta}V_\theta\right)$ transformišu kao tenzori. Na taj način, se došlo do definicije *kovarijantnog izvoda* vektora V_α po x^β, koji se označava sa $V_{\alpha;\beta}$

$$V_{\alpha;\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\theta_{\alpha\beta}V_\theta. \quad (4.72)$$

Kovarijantni izvod $V_{\alpha;\beta}$ kovarijantnog vektora V_α pri prelazu sa jednog sistema koordinata na drugi, transformiše se, s obzirom na (4.71), po formuli

$$V'_{\mu;\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}V_{\alpha;\beta}.$$

Iz jednačine (4.72) se dobija da kovarijantno diferenciranje predstavlja uopštenje običnog diferenciranja. Slično se može definisati i kovarijantni izvod kontravarijantnog vektora V^α. Ako se pođe od jednakosti $V_\alpha = g_{\alpha\xi}V^\xi$, tada jednačina (4.72) uz korišćenje (4.50), postaje

$$V_{\alpha;\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\theta_{\alpha\beta}V_\theta = \frac{\partial\left(g_{\alpha\xi}V^\xi\right)}{\partial x^\beta} - \Gamma^\theta_{\alpha\beta}\left(g_{\theta\xi}V^\xi\right) = \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial x^\beta}V^\xi + g_{\alpha\xi}\frac{\partial V^\xi}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta,\xi}V^\xi =$$

$$= g_{\alpha\xi}\frac{\partial V^\xi}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\xi}\right)V^\xi = g_{\alpha\xi}\frac{\partial V^\xi}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\xi,\alpha}V^\xi =$$

$$= g_{\alpha\xi}\frac{\partial V^\xi}{\partial x^\beta} + g_{\alpha\xi}\Gamma^\xi_{\beta\varepsilon}V^\varepsilon = g_{\alpha\xi}\left(\frac{\partial V^\xi}{\partial x^\beta} + \Gamma^\xi_{\beta\varepsilon}V^\varepsilon\right).$$

Ako se izvrši kontrakcija poslednje jednačine sa $g^{\sigma\alpha}$, dobija se

$$g^{\sigma\alpha}V_{\alpha;\beta} = g^{\sigma\alpha}g_{\alpha\xi}\left(\frac{\partial V^\xi}{\partial x^\beta} + \Gamma^\xi_{\beta\varepsilon}V^\varepsilon\right) = \left(\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\beta} + \Gamma^\sigma_{\beta\varepsilon}V^\varepsilon\right).$$

Na ovaj način je definisan kovarijantni izvod kontravarijantnog vektora

$$V^\sigma_{;\beta} = \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\beta} + \Gamma^\sigma_{\beta\varepsilon}V^\varepsilon.$$

Kovarijantni izvod kontravarijantnog vektora V^σ predstavlja mešoviti tenzor drugog ranga i za njega se u literaturi koriste oznake: $\nabla_\beta V^\sigma$ i $(V^\sigma)_\beta$.

4.4.2. Kovarijantni izvod tenzora

Pravila kovarijantnog diferenciranja vektora (tenzora prvog ranga) mogu se analogno proširiti i na tenzore bilo kog ranga.

U slučaju tenzora drugog ranga važe sledeće formule:

$$Q_{\alpha_1\alpha_2;\mu} = \frac{\partial Q_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_1\mu} Q_{\varepsilon\alpha_2} - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_2\mu} Q_{\alpha_1\varepsilon}, \tag{4.73}$$

$$Q^{\alpha_1\alpha_2}{}_{;\mu} = \frac{\partial Q^{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^\mu} + \Gamma^{\alpha_1}_{\varepsilon\mu} Q^{\varepsilon\alpha_2} + \Gamma^{\alpha_2}_{\varepsilon\mu} Q^{\alpha_1\varepsilon}, \tag{4.74}$$

$$Q^{\alpha_2}_{\alpha_1;\mu} = \frac{\partial Q^{\alpha_2}_{\alpha_1}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_1\mu} Q^{\alpha_2}_\varepsilon + \Gamma^{\alpha_2}_{\varepsilon\mu} Q^\varepsilon_{\alpha_1}. \tag{4.75}$$

Kovarijantni izvod po x^σ mešovitog tenzora je

$$\begin{aligned} Q^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\alpha_1\cdots\alpha_r;\sigma} = \frac{\partial Q^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\alpha_1\cdots\alpha_r}}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_1\sigma} Q^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\varepsilon\alpha_2\cdots\alpha_r} - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_2\sigma} Q^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\alpha_1\varepsilon\cdots\alpha_r} - \cdots - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_r\sigma} Q^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\varepsilon} + \\ + \Gamma^{\mu_1}_{\varepsilon\sigma} Q^{\varepsilon\mu_2\cdots\mu_s}_{\alpha_1\cdots\alpha_r} + \Gamma^{\mu_2}_{\varepsilon\sigma} Q^{\mu_1\varepsilon\mu_3\cdots\mu_s}_{\alpha_1\cdots\alpha_r} + \ldots + \Gamma^{\mu_s}_{\varepsilon\sigma} Q^{\mu_1\cdots\varepsilon}_{\alpha_1\cdots\alpha_r}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Kombinovanjem kovarijantnog diferenciranja sa algebarskim operacijama koje su definisane ranije, dolazi se do formula analognih običnom diferenciranju. Specijalno, kada su V i W tenzori istog ranga sa istim brojem gornjih i istim brojem donjih indeksa, važi:

1. Kovarijantni izvod tenzora pomnoženog proizvoljnom konstantom svodi se na prosto množenje konstante i kovarijantnog izvoda samog tenzora
$$(kV)_{;\mu} = kV_{;\mu}, \qquad k = const. \tag{4.77}$$
2. Kovarijantni izvod sume tenzora sa konstantnim koeficijentima α i β jednak je sumi kovarijantnih izvoda svakog tenzora:
$$(\alpha V + \beta W)_{;\mu} = \alpha V_{;\mu} + \beta W_{;\mu}. \tag{4.78}$$
3. Kovarijantni izvod direktnog proizvoda tenzora V i W izvodi se po Lajbnicovom pravilu:
$$(VW)_{;\mu} = V_{;\mu} W + V W_{;\mu}. \tag{4.79}$$

4.4.3. Kovarijantni izvod fudamentalnog tenzora

1. Kovarijantni izvod kovarijantnog fudamentalnog tenzora $g_{\alpha_1\alpha_2}$ identički je jednak nuli.
   Na osnovu (4.54) i (4.73), kovarijantni izvod metričkog tenzora jednak je
$$g_{\alpha_1\alpha_2;\mu} = \frac{\partial g_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_1\mu} g_{\varepsilon\alpha_2} - \Gamma^\varepsilon_{\mu\alpha_2} g_{\alpha_1\varepsilon} = \frac{\partial g_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha_1\mu,\alpha_2} + \Gamma_{\alpha_2\mu,\alpha_1} =$$
$$= \frac{\partial g_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}} - \frac{\partial g_{\alpha_1\mu}}{\partial x^{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha_2\alpha_1}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}} - \frac{\partial g_{\alpha_2\mu}}{\partial x^{\alpha_1}}\right) = 0. \tag{4.80}$$
2. Kovarijantni izvod mešovitog fudamentalnog tenzora takođe je indentički jednak nuli. Ako se uzme u obzir da je
$$g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ 1, & \mu = \nu \end{cases},$$
   s obzirom na činjenicu da su Kronekelovi simboli δ^ν_μ konstante, onda se može, na osnovu (4.75) pisati
$$g^{\alpha_2}_{\alpha_1;\mu} = \frac{\partial g^{\alpha_2}_{\alpha_1}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\varepsilon_{\alpha_1\mu} g^{\alpha_2}_\varepsilon + \Gamma^{\alpha_2}_{\varepsilon\mu} g^\varepsilon_{\alpha_1} = \frac{\partial g^{\alpha_2}_{\alpha_1}}{\partial x^\mu} - \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\mu} + \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\mu} \equiv 0. \tag{4.81}$$
3. Na analogan način se može pisati da je kovarijantni izvod kontravarijantnog fudamentalnog tenzora takođe identički jednak nuli. Naime, polazeći od jednakosti

$$g^{\alpha_2}_{\alpha_1;\mu} = \left(g_{\alpha_1\beta}g^{\beta\alpha_2}\right)_{;\mu} = 0,$$

dobija se

$$g_{\alpha_1\beta;\mu}g^{\beta\alpha_2} + g_{\alpha_1\beta}g^{\beta\alpha_2}{}_{;\mu} = 0.$$

Kako je, s obzirom na (4.80), $g_{\alpha_1\beta;\mu} = 0$, sledi da je $g_{\alpha_1\beta}g^{\beta\alpha_2}{}_{;\mu} = 0$. Ako se izvrši kontrakcija ovog izraza sa $g^{\varepsilon\alpha_1}$, dobija se

$$g^{\varepsilon\alpha_1}g_{\alpha_1\beta}g^{\beta\alpha_2}{}_{;\mu} = 0,$$

ili

$$g^{\varepsilon}_{\beta}g^{\beta\alpha_2}{}_{;\mu} = g^{\varepsilon\alpha_2}{}_{;\mu} = 0.$$

Ova činjenica, da je kovarijantni izvod fudamentalnog tenzora identički jednak nuli, veoma često se koristi pri izračunavanjima. Tako na primer, sledi da ako je kovarijantni izvod bilo kakvog tenzora jednak nuli, onda je kovarijantni izvod konjugovanog njemu tenzora, takođe, jednak nuli. Na primer

$$0 = g^{\alpha\nu}V_{\nu;\mu} = (g^{\alpha\nu}V_\nu)_{;\mu} = V^{\alpha}{}_{;\mu}.$$

Važnost operacije kovarijantnog diferenciranja proizilazi iz sledećeg svojstva: ona prevodi jedne tenzore u druge i u odsustvu gravitacije, tj. kada je $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$ prelazi u obično diferenciranje.

Tvrđenje 4.4.1.
Kovarijantni izvod Kronekerovog simbola jednak je nuli.

Dokaz
Zaista, na osnovu (4.75) se dobija

$$\delta^{\nu}_{\mu;\sigma} = \frac{\partial \delta^{\nu}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\delta^{\nu}_{\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma}\delta^{\sigma}_{\mu} = 0 - \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} = 0. \blacksquare$$

4.4.4. Paralelni prenos tenzora

Jedna od najvažnijih osobina afinog prostora je mogućnost da se dati vektor prenese iz bilo koje tačke. Postavlja se pitanje kako se prenos vektora može realizovati kada je posmatrana oblast Ω data u krivolinijskim koordinatama x^i. Neka je dat vektor ξ_0 zadat svojim koordinatama ξ_0^i u nekoj tački M_0, i neka se prenosi dati vektor u neku drugu tačku M_1. U nastavku će biti objašnjeno kako će se izmeniti ξ_0^i, da bi u lokalnom okviru tačke M_1, one određivale prethodni vektor ξ_0. Bitan je neprekidan prenos vektora ξ_0 po nekoj krivoj $\widetilde{M_0M_1}$, pri čemu se posmatra neprekidna promena njegovih koordinata ξ_0^i na svakom beskonačno malom segmentu krive.

Neka je kriva $\widetilde{M_0M_1}$ zadata parametarskim jednačinama $x^i = x^i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, gde su $x^i(t)$ neprekidno diferencijabilne funkcije. Koordinate ξ_0^i datog vektora zavise od parametra t, tj.

$$\xi_0^i = \xi_0^i(t). \tag{4.82}$$

Kako su funkcije $x^i(t)$ neprekidno diferencijabilne, dobija se da su duž krive vektori lokalnog okvira $x_i(x^1,\dots,x^n)$, to znači i ξ^i, neprekidno diferencijabilne funkcije po t. U tački $M(t)$, s obzirom na lokalni okvir, ξ_0 se piše u obliku

$$\xi_0 = \xi^i(t)x_i(x^1, \dots, x^n). \tag{4.83}$$

Diferencirajući prethodnu relaciju po t, pri $\xi_0 = const$, dobija se:

$$0 = d\xi^i x_i + \xi^i dx_i. \tag{4.84}$$

Da bi se razumeo prethodni rezultat moraju se vektori dx_i predstaviti preko vektora lokalnog okvira. Prema formuli totalnog diferencijala, dobija se

$$dx_i(x^1, \dots, x^n) = x_{ij}dx^j, \tag{4.85}$$

gde je

$$x_{ij} = \frac{\partial^2 x(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Vektori x_{ij} koji su definisani u svakoj tački oblasti Ω (a ne samo duž posmatrane krive) mogu se razložiti po vektorima lokalnog okvira x_i u datoj tački:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k. \tag{4.86}$$

Sa Γ_{ij}^k su označeni koeficijenti razlaganja. Iz $x_{ij} = x_{ji}$ dobija se

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{4.87}$$

Γ_{ij}^k zavisi od tačke, gde se vrši razlaganje (4.86), jer je

$$\Gamma_{ij}^k(M) = \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n). \tag{4.88}$$

Zamenjujući (4.86) u (4.85), dobija se:

$$dx_i = \Gamma_{ij}^k x_k dx^j,$$

nakon čega jednakost (4.84) dobija osnovni oblik:

$$0 = d\xi^k x_k + \Gamma_{ij}^k x_k \xi^i dx^j.$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora x_k, njihova linearna kombinacija koja je jednaka nuli označava da su i svi njihovi koeficijenti jednaki nuli, dobija se $d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j = 0$, odnosno

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j. \tag{4.89}$$

Formula (4.89) je formula paralelnog prenosa vektora u beskonačno malom. Ona rešava pitanje: ako u datoj tački $M(x^i)$ vektor ima koordinate ξ^k, kakve će koordinate imati vektor u beskonačno bliskoj tački $M'\left(x^i + dx^i\right)$?

Odgovor na dato pitanje neće biti dat tačno, već koristeći beskonačno male višeg reda. Diferencijalne koordinate ξ^k se izražavaju pri prelazu sa M na M'. $d\xi^k$ linearno zavise i od datih koordinata ξ^i i od diferencijala dx^i koordinata tačaka. Koeficijenti Γ_{ij}^k služe da se pomoću njih povežu vektori iz M sa vektorima iz M', odatle i potiče naziv “koeficijenti povezanosti”. Da bi dobijena formula (4.89) mogla da se primeni na prenos vektora po konačnoj krivoj $\widetilde{M_0 M_1}$, mora se integraliti sistem odgovarajućih diferencijalnih jednačina. U specijalnom slučaju, kada su x^i afine $x(x^1, \dots, x^n) = x^i e_i$, $x_i = e_i$, $x_{ij} = 0$ iz (4.86) sledi $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Obrnuto, ako su u bilo kom krivolinijskom koordinatnom sistemu $\Gamma_{ij}^{k}(x^1, \dots, x^n)$ identički jednaki nuli, to iz (4.86) sledi da je $x_{ij} = 0$, $x_i = const$. Ako se označi $x_i = e_i$, dobija se

$$x = x^i e_i + x_0.$$

Takav izraz za radijus-vektor (gde je $x_0 = const$) pokazuje da su x^i-afine koordinate. Na ovaj način je pokazano tvrđenje:

Tvrđenje 4.4.2.
U posmatranoj oblasti Ω, da bi krivolinijske koordinate bile specijalni slučaj, prostoafinih, potreban i dovoljan uslov je da su u tim koordinatama Γ_{ij}^{k} indentički jednaki nuli.

4.4.5. Geodezijske linije[19]

Geodezijske linije u prostoru afine povezanosti imaju približnu ulogu kakvu imaju prave linije u afinom prostoru. Imaju istu osnovnu karakteristiku - konstantan pravac.

Definicija 4.4.3.
Kriva u prostoru afine povezanosti se naziva geodezijskom, ako svaki vektor $\xi_0^i (\neq 0)$, koji je tangentan na datu krivu u bilo kojoj tački M_0, ostaje tangentan na nju pri paralelnom prenosu duž nje. Neka je geodezijska linija zadata jednačinama $x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, gde su $x^i(t)$ dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije i neka je $\xi^i(t)$ tangentni vektor koji se paralelno prenosi duž geodezijske linije. Zbog kolinearnosti tangetnih vektora u svakoj tački krive, može se pisati:

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha d\xi^i, \tag{4.90}$$

gde $\alpha = \alpha(t)$ zavisi od tačke na krivoj i nigde nije jednak nuli, u suprotnom bi $\frac{dx^i}{dt}$ bili jednaki nuli istovremeno, što se isključuje kao slučaj.uvek se može preći na takav parametar τ duž geodezijske linije, tako da koeficijent α bude identički jednak jedinici. Za to je dovoljno staviti da je $\tau = \int \alpha(t)dt$, tako da je

$$d\tau = \alpha(t)dt, \tag{4.91}$$

zato formula (4.90) *dobija oblik*

$$\frac{dx^i}{d\tau} = d\xi^i. \tag{4.92}$$

Definicija 4.4.4.
Parametar τ na geodezijskoj liniji za koji je $\frac{dx^i}{d\tau}$ paralelno prenosiv tangentni vektor, naziva se kanoničkim parametrom. Uslov da se vektor $\frac{dx^i}{d\tau}$ paralelno prenosi duž željene krive, istovremeno označava da je kriva geodezijska i da je τ na njoj kanonički parametar. Primenom formule paralelnog prenosa na vektor $\frac{dx^i}{d\tau}$, dobija se:

---

[19] *O geodezijskim linijama se može detaljnije pogledati u [20],[16], [22].*

$$d\frac{dx^k}{d\tau} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{d\tau} dx^i,$$

deljenjem sa $d\tau$, dobijaju se diferencijalne jednačine geodezijskih linija

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \tag{4.93}$$

s obzirom na kanonički parametar.

Tvrđenje 4.4.5.

Jednačine geodezijskih linija (4.93) *ne menjaju svoj oblik pri proizvoljnim transformacijama koordinata, kovarijantne su.*

Dokaz

Jednačine geodezijskih linija zadovoljavaju jednačinu (4.93) gde je τ neki parametar uzet duž trajektorije. Oba izraza zajedno u ovoj jednačini imaju tenzorski karakter (tenzor prvog ranga), dok pojedinačno uzeti nemaju tenzorski karakter. Ovo će biti dokazano direktno.

Jednačina (4.93) je invarijantna u odnosu na proizvoljne transformacije koordinata $x'^i \to x^i$. Može se pisati:

$$\frac{d^2x'^k}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{4.94}$$

U izrazu za Kristofelove simbole drugog reda

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\rho}\Gamma^\theta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\rho}, \tag{4.95}$$

transformiše se nehomogeni član. Diferenciranjem jednakosti $\frac{\partial x'^k}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^j} = \delta_j^k$ po x'^i, dobija se

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\theta}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^\rho \partial x^\theta} = 0.$$

Zbog toga se (4.95) može zapisati u obliku:

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\theta}{\partial x'^j}\Gamma^\rho_{\tau\theta} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\theta}{\partial x'^i}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^\rho \partial x^\theta},$$

koji se dalje može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\Gamma'^k_{ij}\frac{dx'^i}{dx^\tau}\frac{dx'^j}{dx^\tau} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\tau\theta}\frac{dx^\tau}{d\tau}\frac{dx^\theta}{d\tau} - \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^\rho \partial x^\theta}\frac{dx^\theta}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}. \tag{4.96}$$

Sabirajući (4.94) i (4.96) dobija se da leva strana jednakosti predstavlja tenzor prvog ranga (vektor), tj.

$$\frac{d^2x'^k}{d\tau^2} + \Gamma'^k_{ij}\frac{dx'^i}{dx^\tau}\frac{dx'^j}{dx^\tau} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha}\left(\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\tau\theta}\frac{dx^\tau}{d\tau}\frac{dx^\theta}{d\tau}\right). \tag{4.97}$$

Jednačina (4.91) je kovarijantna. Kako je ova jednačina tenzorske prirode, na osnovu principa opšte kovarijantnosti, da ako je ona zadovoljena u jednom sistemu (lokalno-inercijalnom), tada ona važi i u proizvoljnom gravitacionom polju.■

Da li geodezijske linije postoje zavisi od toga da li postoje rešenja diferencijalnih jednačina kojima su zadate geodezijske linije.

Funkcije $x^k(t)$ posmatraju se kao nepoznate. Drugi izvod svake nepoznate funkcije je ovde izražen preko samih nepoznatih funkcija (koje ulaze kao argumenti u Γ_{ij}^k) i preko njihovih prvih izvoda. Postoji specijalan slučaj kanoničkog sistema običnih diferencijalnih jednačina. Rešenje takvog sistema je na jedinstven način određeno potencijalnim vrednostima nepoznatih funkcija, i svih njihovih izvoda izraženih, u diferencijalnim jednačinama. Mogu se proizvoljno zadati vrednosti nepoznatih funkcija x^k i njihovih prvih izvoda $\frac{dx^k}{d\tau}$ za bilo koju početnu vrednost parametra τ:

$$\left(x^i\right)_{\tau=\tau_0} = a^i, \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = b^i. \tag{4.98}$$

Prema opštoj teoremi o egzistenciji rešenja, može se utvrditi da u nekoj okolini vrednosti $\tau = \tau_0$ postoje i na jedinstven način su određene funkcije $x^i(t)$ koje zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina (4.92) i početne uslove (4.98). Za neizotropne geodezijske linije, dužina luka s služi kao kanonički parametar, a svi ostali kanonički parametri τ se od s razlikuju samo zbog množenja konstantom. Geodezijske linije, s obzirom na parametar s, imaju diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}. \tag{4.99}$$

Teorema 4.4.6.
Geodezijska linija, koja prolazi kroz datu tačku M_0 u izotropnom pravcu, biće izotropna na celom svom toku.

U nastavku će biti razmotren problem izračunavanja varijacije dužine luka proizvoljne neizotropne krive u Rimanovom prostoru, koji je označen sa V_n. Data kriva

$$x^i = x^i(t) \; (t_1 \le t \le t_2) \tag{4.100}$$

se varira i uključena je u nekoliko familija krivih

$$x^i = x^i(t, \alpha) \; (t_1 \le t \le t_2) \tag{4.101}$$

koje zavise od parametra α. Na ovaj način, za određenu vrednost α, jednačine (4.101) se poklapaju sa jednačinama (4.100). Pretpostavka je da za $t_1 \le t \le t_2$ i u tom intervalu variranja[20], koji prolazi kroz α, funkcije $x^i(t, \alpha)$ su dva puta neprekidno diferencijabilne. Dužina krive iz familije se računa prema formuli

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt.$$

[20] *O varijaciji dužine geodezijske linije se može pogledati u [7].*

Prema dogovoru se označavaju parcijalni izvodi po t simbolom d, a parcijalni izvodi po α simbolom δ. Dobijena dužina s krive iz familije krivih zavisi od izbora date krive, tj. parametra α. Izračunava se varijacija dužine krive s, tj. njen izvod δs po argumentu α:

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \delta \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta\left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right)}{2\sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}} dt. \quad (4.102)$$

Pretpostavka o neizotropnosti krive, dužini luka koja varira je veoma važna, jer bi u suprotnom imenilac podintegralnog izraza,koji je jednak $2\frac{ds}{dt}$, bio jednak nuli.

Običan izvod δ od invarijante $g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$, može se zameniti odgovarajućim apsolutnim diferencijalom $\widetilde{D}$ (pri beskonačno malom pomeranju po liniji α pri konstantnom t):

$$\delta\left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right) = \widetilde{D}\left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right) = g_{ij} \widetilde{D} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \widetilde{D} \frac{dx^j}{dt} =$$

$$= 2 g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \widetilde{D} \frac{dx^j}{dt}. \quad (4.103)$$

Ovde su korišćene jednakosti $\widetilde{D} g_{ij} = 0$ i $g_{ij} = g_{ji}$. Zbog poslednje jednakosti mogu se objediniti dva dobijena člana. Zapisano u proširenom obliku $\widetilde{D} \frac{dx^j}{dt}$:

$$\widetilde{D} \frac{dx^j}{dt} = \delta \frac{dx^j}{dt} + \Gamma^j_{kp} \frac{dx^p}{dt} \delta x^k = \frac{d}{dt} \delta x^j + \Gamma^j_{pk} \delta x^k \frac{dx^p}{dt} = \frac{D \delta x^j}{dt}.$$

U procesu transformisanja je izmenjen redosled parcijalnih izvoda d i δ, ispermutovani su donji indeksi u Γ^j_{kp}, dato važi jer je Rimanova povezanost bez torzije. Sa D je označen apsolutni diferencijal, koji odgovara beskonačno malom pomeranju dt po krivoj iz familije krivih (pri konstantnom α).

Sada (4.102) dobija oblik

$$\delta\left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right) = 2 g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{D \delta x^j}{dt}.$$

Vraćanjem na formulu (4.102), i zamenom brojioca sa dobijenim izrazom, a imenilac sa $2\frac{ds}{dt}$. Kao rezultat se dobija

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} g_{ij} \frac{dx^i}{ds} D \delta x^j dt. \quad (4.104)$$

Proširivanjem dejstva simbola D na svaki podintegralni izraz i oduzimanjem rezultata zbog ovog dodatnog člana, dobija se:

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} D\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} g_{ij} D \frac{dx^i}{ds} \delta x^j dt. \quad (4.105)$$

Pod znakom prvog integrala je apsolutni diferencijal D od invarijanti. Zbog toga, se on može zameniti sa običnim diferencijalom d. Integraljenjem se dobija:

$$\delta s = \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_2 - \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_1 - \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j dt. \tag{4.106}$$

Brojevi 1 i 2 u (4.106) označavaju da se odgovarajući izrazi računaju za $t = t_1$ i $t = t_2$, tj. u početnoj i krajnjoj tački krive. Kada se od date krive iz familije krivih sa određenom vrednošću parametra α, pređe na beskonačno blisku krivu $\alpha + \delta\alpha$, pri čemu svaka tačka krive α prelazi u tačku krive $\alpha + \delta\alpha$, sa istom vrednošću t, vektori za beskonačno mala pomeranja tačke su dati sa $\delta x^i(t,\alpha)$. Zato su integraljeni članovi projekcija vektora beskonačno malog pomeranja δx^j na jedinični vektor $\frac{dx^i}{ds}$ na početku i na kraju krive.

Ako se krajevi krive koja varira fiksiraju, tj.

$$x^i(t_1,\alpha) = const, \qquad x^i(t_2,\alpha) = const \tag{4.107}$$

pri promeni α, δx^i na krajevima krive je nula, integraljeni članovi nestaju i (4.106) dobija oblik

$$\delta s = -\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j dt. \tag{4.108}$$

Neka je posmatrana kriva u (4.90) konstantne dužine. Pod datim se smatra da variranjem date krive na proizvoljan način, ali pod uslovom da se krajevi ne pomeraju, uvek se dobija $\delta s = 0$. Tada iz (4.108) se dobija $\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j dt = 0$, pri svakom izboru $\frac{\delta x^j}{\delta\alpha}$, neprekidno diferencijabilna funkcija po t. Po osnovnoj Lemi varijacionog računa, sledi izjednačavanje sa nulom datih funkcija po t, koji su koeficijenti za δx^j pod znakom integrala:

$$g_{ij}D\frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Zbog prethodnog, tenzor $D\frac{dx^i}{ds}$ je jednak nuli:

$$D\frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Data jednakost označava da se tangentni vektor $\frac{dx^i}{ds}$ paralelno prenosi duž krive. Odavde se dobija da je kriva geodezijska, a dužina luka s služi duž nje kao kanonički parametar.

Obrnuto, neka je kriva (4.90) neizotropna geodezijska linija. Tada je $\frac{dx^i}{ds}$ tangentni vektor koji se paralelno prenosi duž geodezijske linije, tako da

$$D\frac{dx^i}{ds} = 0, \tag{4.109}$$

i (4.108) daju za svako δx^j da je $\delta s = 0$.

Zbog ovoga je varijacija dužine geodezijske linije sa fiksiranim krajevima uvek jednaka nuli.

Teorema 4.4.7.
Da bi neizotropna linija u Rimanovom prostoru imala stacionarnu dužinu, potrebno je i dovoljno da ona bude geodezijska linija (u specijalnom slučaju, u Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^n$, ona bi bila prava).

Napomena 4.4.8.
U slučaju pravog Rimanovog prostora V_n sve linije su neizotropne, tako da ustaljenost stanja dužine može da se koristi kao definicija geodezijske linije. Za geodezijsku liniju formula (4.106) *dobija jednostavniji oblik*

$$\delta s = \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_2 - \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_1. \tag{4.110}$$

Varijacija dužine geodezijske linije u potpunosti određuje vektore beskonačno malih pomeranja njenih krajeva. Pri datom ne treba razmišljati o tome da pri varijaciji geodezijske linije ona treba ponovo da bude geodezijska, familija kojoj ona pripada ostaje proizvoljna.

Posmatra se formula (4.108) još u slučaju krive opšteg oblika, kada nije geodezijska. Tada $\frac{dx^i}{ds} = \nu_0^i$, i po prvoj formuli Frenea $\frac{D\nu_0^i}{ds} = \kappa_1\nu_1^i$, tako da je $D\frac{dx^i}{ds} = \kappa_1\nu_1^i ds$.

$$\begin{cases} \dfrac{D\nu_0^i}{ds} = \kappa_1\nu_1^i \\ \dfrac{D\nu_1^i}{ds} = \pm\kappa_1\nu_0^i + \kappa_2\nu_2^i \\ \dfrac{D\nu_2^i}{ds} = \pm\kappa_2\nu_1^i + \kappa_3\nu_3^i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{D\nu_{n-2}^i}{ds} = \pm\kappa_{n-2}\nu_{n-3}^i + \kappa_{n-1}\nu_{n-1}^i \\ \dfrac{D\nu_{n-1}^i}{ds} = \pm\kappa_{n-1}\nu_{n-2}^i. \end{cases}$$

Date formule su Frenove formule za krive u Rimanovom prostoru. Koeficijenti $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ su prva, druga,...,(n – 1)-va krivina krive u datoj tački.

Sada formula (4.108) ima oblik

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} k_1(s) g_{ij}\nu_1^i \delta x^j ds. \tag{4.111}$$

Varijacija dužine krive sa fiksiranim krajevima se dobija na sledeći način: projekcija vektora beskonačno malog pomeranja δx^j na prvu normalu ν_1^i, pomnoži se sa prvom krivinom k_1 i sa ds, integrali se po celoj krivoj i rezultat se uzima sa suprotnim predznakom.

4.4.6. Normalne geodezijske koordinate

$X^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ je tangentni vektor krive c. Po definiciji je tangentni vektor geodezijske linije paralelan duž krive s obzirom na Levi-Čivitinu povezanost, zato je dužina tangentnog vektora X^i geodezijske linije konstantna, tj. važi $\frac{ds}{d\tau} = const$. Iz datog se vidi da parametar geodezijske krive na Rimanovoj mnogostrukosti mora da bude linearna funkcija dužine luka s, tj. $\tau = \lambda s + \mu$, gde su $\lambda(\neq 0)$ i μ konstante. U nastavku će biti razmatran specijalni koordinatni sistem u datoj tački, takav da su koordinate bilo koje geodezijske linije sa početkom u datoj tački linearne funkcije dužine luka.

Neka je sistem funkcija geodezijskih linija u koordinatnom sistemu $(U;\ x^i)$ dat sa

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0. \tag{4.112}$$

Iz teorije ODJ se dobija da za svako $p_0 \in U$ postoji okolina $W \subset U$ od p_0 i pozitivni brojevi r, δ takvi da za bilo koju početnu vrednost $p \in W$ i $\alpha \in \mathbb{R}^m$ koja zadovoljava $\|\alpha\| < r$, sistem jednačina (4.112) ima jedinstveno rešenje na U:

$$x^i = f^i(\tau, p^k, \alpha^k), |\tau| < \delta, \tag{4.113}$$

koje zadovoljava početne uslove

$$\left.\begin{aligned} x^i(0) = f^i(0, p^k, \alpha^k) = p^i \\ \frac{dx^i}{d\tau}(0) = \left.\frac{\partial f^i(\tau, p^k, \alpha^k)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \alpha^i \end{aligned}\right\} \tag{4.114}$$

Ako je izabrana konstanta c, različita od nule, tada će funkcije $f^i(c\tau, p^k, \alpha^k)$, $\left(x \in W, \|\alpha\| < r, \tau < \frac{\delta}{|c|}\right)$ i dalje zadovoljavati (4.114), tj. važiće

$$\left.\begin{aligned} f^i(c\tau, p^k, \alpha^k)\big|_{\tau=0} = p^i \\ \left.\frac{\partial f^i(c\tau, p^k, \alpha^k)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = c\alpha^i \end{aligned}\right\} \tag{4.115}$$

Zbog osobine jedinstvenosti rešenja (4.114) kada je $\|\alpha\|$, $\|c\alpha\| < r$ i $|\tau|$ $|c\tau| < \delta$, važi

$$f^i(c\tau, p^k, \alpha^k) = f^i(\tau, p^k, c\alpha^k) \tag{4.116}$$

Leva strana gornje jednačine je uvek dobro definisana kada važi $x \in W, \|\alpha\| < r, |\tau| < \frac{\delta}{|c|}$. Prethodno će biti iskorišćeno za definisanje desne strane jednačine (4.116). Zato je funkcija $f^i(\tau, p^k, c\alpha^k)$ uvek definisana za $x \in W$, $\tau \leq 1$ i $\|\alpha\| < |c|r$. Neka je

$$x^i = f^i(1, p^k, \alpha^k). \tag{4.117}$$

Tada je

$$f^i(1, p^k, 0) = f^i(0, p^k, \alpha^k) = p^i. \tag{4.118}$$

Stoga, za fiksno $p \in W$, (4.117) obezbeđuje glatko preslikavanje iz početka tangetnog prostora $T_pM(= \mathbb{R})$ u okolinu od p na mnogostrukosti M. Zbog

$$\left.\frac{\partial f^i(1, p^k, \tau\alpha^k)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial f^i(1, p^k, \alpha^k)}{\partial \alpha^j}\right|_{\alpha=0} \cdot \alpha^j,$$

i, sa druge strane,

$$\left.\frac{\partial f^i(1, p^k, \tau\alpha^k)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial f^i(\tau, p^k, \alpha^k)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \alpha^i,$$

dobija se da je

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial\alpha^j}\right)_{\alpha=0} = \delta^i_j \qquad (4.119)$$

tj. preslikavanje (4.117) je regularno u početku $\alpha = 0$. Zato se α^i mogu birati da budu lokalne koordinate od p u M i nazivaju se geodezijske normalne koordinate od p ili, jednostavno, normalne koordinate. Pošto je tangentni prostor linearan, i bilo koja dva koordinatna sistema u njemu su ista do na nedegenerisanu linearnu transformaciju, normalni koordinatni sistem tačke na M je određen do na nedegenerisanu linearnu transformaciju. Neka je $\alpha^k = \alpha^k_0$. Kako se τ menja, $\tau\alpha^k_0$ opisuje pravu liniju u $T_p(M)$ počevši iz početka, opisujući geodezijsku krivu na mnogostrukosti, koja počinje u p i tangentna je na tangentni vektor α^k_0. Stoga je jednačina ove geodezijske krive u normalnom koordinatnom sistemu α^i, data sa

$$\alpha^k = \tau\alpha^k_0, \qquad (4.120)$$

gde je α^k_0 konstantno.

Teorema 4.4.9.[21]

Ako je M prostor afine povezanosti bez torzije (torzija je jednaka nuli), tada su s obzirom na normalni koordinatni sistem α^i u tački p, koeficijenti povezanosti Γ^j_{ik} jednaki nuli u p.

Dokaz

Pošto geodezijska kriva $\alpha^i = \tau\alpha^i_0$ zadovoljava (4.112) u normalnom koordinatnom sistemu α^i, za bilo koje α^k_0 važi

$$\Gamma^i_{jk}(0)\alpha^j_0\alpha^k_0 = 0. \qquad (4.121)$$

Pošto je Γ^i_{jk} simetričan po donjim indeksima za povezanosti bez torzije, važi da je

$$\Gamma^i_{jk}(0) = 0, \qquad 1 \le i, j, k \le m \qquad (4.122)$$

■

Teorema 4.4.10.

Za bilo koju tačku p_0 u prostoru afine povezanosti M, *postoji okolina W od p_0 takva da svaka tačka u W ima normalnu koordinatnu okolinu koja sadrži W.*

Dokaz

Neka je $(U; x^i)$ normalni koordinatni sistem u tački p_0. Neka je

---

[21] *O normalnoj koordinatnoj okolini se može detaljnije pogledati u [13] i [21].*

$$U(p_0;\rho) = \left\{p \in U \left| \sum_{i=1}^{m} \left(x^i(p)\right)^2 < \rho^2 \right.\right\} \tag{4.123}$$

Iz prethodne diskusije rešenja jednačine (4.112), postoji okolina $W = U(p_0, r)$ od p_0 i $\delta > 0$ takav da za bilo koje $p \in W$ i $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\|\alpha\| < \delta$ postoji jedinstvena geodezijska kriva.

$$x^i = f^i(\tau, p^k, \alpha^k), |\tau| < 2, \tag{4.124}$$

sa početnim uslovima (p, α^k). U nastavku će biti korišćena oznaka $B(0;\delta)$ za obeležavanje skupa $\{\alpha \in \mathbb{R}^m | \|\alpha\| < \delta\}$. Tada se iz (4.124) dobija preslikavanje $\varphi: W \times B(0;\delta) \to W \times U$ takvo da je

$$\varphi(p, \alpha) = \left(p^k, f^k\left(1, p^i, \alpha^i\right)\right), \tag{4.125}$$

gde $p \in W$, $\alpha \in B(0;\delta)$. Pošto funkcija f^k zavisi glatko od p i α, preslikavanje φ je glatko. Iz (4.119) se dobija

$$\left.\frac{\partial(p^k, f^k)}{\partial(p^i, \alpha^i)}\right|_{(p_0,0)} = 1$$

Stoga je Jakobijan preslikavanja φ nedegerisan u okolini tačke $(p_0, 0) \in W \times B(0;\delta)$. Iz teoreme o inverznoj funkciji, postoji okolina V tačke $(p_0, 0) \in W \times B(0;\delta)$ i $0 < a < \delta$ takva da je $\varphi: V \to U(p_0, a) \times U(p_0, a)$ difeomorfizam.

Za bilo koje $p \in U(p_0, a)$, neka je

$$B_p = \{\alpha \in B(0;a) | (p, \alpha) \in V\}. \tag{4.126}$$

Tada preslikavanje

$$x^i = f^i(1, p^k, \alpha^k), \alpha \in B_p \tag{4.127}$$

dato sa (4.124) je difeomorfizam iz B_p u $U(p_0;a)$. Bira se $W' = U(p_0;a)$. Poslednja jednačina pokazuje da za bilo koju tačku u W' postoji normalna koordinatna okolina koja sadrži W'. ■

Propozcija 4.4.11.
Za svaku tačku p_0 u prostoru afine povezanosti M, postoji okolina W od p_0, takva da bilo koje dve tačke u W mogu biti povezane geodezijskom krivom.

Teorema 4.4.12.
Afina povezanost bez torzije je u potpunosti određena tenzorom krivine.

Dokaz
Neka je dat normalni koordinatni sistem u nepokretnoj tački O. Neka je izabrana prirodna baza u O i neka se paralelno pomera duž geodezijske krive, počevši od tačke O. Na ovaj način se dobija polje baza (frame field) $\{e_i, 1 \le i \le m\}$ u okolini od O. Neka je θ^i dualna diferencijalna 1-forma od τ, α^k. Kada su α^k konstante, θ^i, θ_i^j su restrikovane na geodezijske krive $\alpha^i\tau$. Pošto je polje baza paralelno duž geodezijske krive $\alpha^i\tau$, važi da je

$$\left.\begin{aligned} \theta^i &\equiv \alpha^i d\tau (mod\ d\alpha^k) \\ \theta_i^j &\equiv 0 (mod\ d\alpha^k) \end{aligned}\right\} \tag{4.128}$$

odnosno važi

$$\theta^i = \alpha^i d\tau + \bar{\theta}^i, \theta_i^j = \bar{\theta}_i^j \tag{4.129}$$

gde su $\bar{\theta}^i$ i $\bar{\theta}_i^j$ delovi od θ^i i θ_i^j bez $d\tau$.

Strukturne jednačine povezanosti su date formulama

$$\left.\begin{aligned} d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j &= \frac{1}{2} P_{kl}^j \theta^k \wedge \theta^l \\ d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j &= \frac{1}{2} S_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l \end{aligned}\right\}, \tag{4.130}$$

gde su funkcije P_{kl}^j i S_{ikl}^j nezavisne od izbora lokalnih koordinata, date sa

$$\left.\begin{aligned} P_{kl}^j &= X_r^{*j} X_k^p X_l^q T_{pq}^r \\ S_{ikl}^j &= X_q^{*j} X_i^p X_k^r X_l^s R_{prs}^q \end{aligned}\right\}.$$

Kada se jednačine (4.129) uvrste u strukturne jednačine (4.130), dobijaju se sledeće dve jednačine:

$$\left.\begin{aligned} d\theta^i - \theta^j \wedge \theta_j^i &= 0 \\ d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j &= \frac{1}{2} S_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l \end{aligned}\right\}$$

Upoređujući izraze sa $d\tau$, dobija se

$$\left(d\alpha^i - \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \tau} + \alpha^j \bar{\theta}_i^j\right) \wedge d\tau = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}_i^j}{\partial \tau} - \alpha^k S_{ikl}^j \bar{\theta}^l\right) \wedge d\tau = 0.$$

gde $\frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \tau}$ i $\frac{\partial \bar{\theta}_i^j}{\partial \tau}$ predstavljaju diferencijalne 1-forme, dobijene traženjem parcijalnog izvoda koeficijenata $\bar{\theta}^i$, $\bar{\theta}_i^j$, respektivno, po τ. Pošto se $d\tau$ ne javlja u zagradama, dobija se:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \tau} &= d\alpha^i + \alpha^j \bar{\theta}_j^i \\ \frac{\partial \bar{\theta}_i^j}{\partial \tau} &= \alpha^k S_{ikl}^j \bar{\theta}^l \end{aligned}\right\} \tag{4.131}$$

Ovo je sistem običnih diferencijalnih jednačina u kojima je τ nezavisna promenljiva. Diferenciranjem prve jednačine ponovo po τ, dobija se:

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}^i}{\partial \tau^2} = \alpha^j \frac{\partial \bar{\theta}_j^i}{\partial \tau} = \alpha^j \alpha^k S_{jkl}^i \bar{\theta}^l \tag{4.132}$$

Pošto je baza e_i paralelna duž bilo kog pravca koji prolazi kroz tačku O, važi da je:

$$\bar{\theta}_i^j\big|_{t=0} = 0. \tag{4.133}$$

Štaviše, po definiciji se dobija:

$$\theta^i\big|_{t=0} = \alpha^i d\tau \tag{4.134}$$

Stoga je:

$$\bar{\theta}^i\big|_{t=0} = 0. \qquad (4.135)$$

Zato se iz (4.133) i prve formule iz (4.131), dobija:

$$\left.\frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = d\alpha^i. \qquad (4.136)$$

Za dati tenzor krivine, sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda (4.132) ima jedinstveno rešenje za $\bar{\theta}^i$ za početne uslove (4.135) i (4.136), $\bar{\theta}_i^j$ je potpuno određen prvom formulom u (4.131). Stoga, tenzor krivine u potpunosti određuje lokalno afinu povezanost bez torzije. ■

Napomena 4.4.13.
Neka je M m-dimenzionalna Rimanova mnogostrukost. Neka je $p_0 \in M$ i neka je izabran nepokretan ortogonalni okvir (frame) F_0 u tangentnom prostoru $T_{p_0}(M)$. Tada se normalni koordinantni sistem x^i u p_0 može izraziti sa

$$x^i = \alpha^i s, \qquad (4.137)$$

gde je (α^i) jedinični vektor u $T_{p_0}(M)$ i s je dužina luka geodezijske krive sa početkom u p_0. Pomerajući okvir F_0 paralelno, duž geodezijske krive koja počinje u p_0, dobija se ortogonalna baza u okolini od p_0. Iz dokaza prethodne teoreme može se pisati:

$$\left.\begin{aligned} \theta^i &= \alpha^i ds + \bar{\theta}^i \\ \theta_i^j &= \bar{\theta}_i^j \end{aligned}\right\} \qquad (4.138)$$

gde $\bar{\theta}^i$ i $\bar{\theta}_i^j$, ne sadrže diferencijal ds, i zadovoljavaju jednačine

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial s} &= d\alpha^i + \alpha^j \bar{\theta}_i^j \\ \frac{\partial \bar{\theta}_i^j}{\partial s} &= \alpha^k S_{ikl}^j \bar{\theta}^l \\ \bar{\theta}_i^j + \bar{\theta}_j^i &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (4.139)$$

sa početnim uslovima

$$\bar{\theta}^i\big|_{s=0} = 0, \qquad \bar{\theta}_i^j\big|_{s=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial s}\right|_{s=0} = d\alpha^i. \qquad (4.140)$$

Ako je

$$\bar{\theta}^i = s d\alpha^i + A_j^i d\alpha^j, \qquad (4.141)$$

tada A_j^i zadovoljava polazne uslove

$$A_j^i\big|_{s=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial A_j^i}{\partial s}\right|_{s=0} = 0 \qquad (4.142)$$

Stoga se element dužine u okolini tačke O može izraziti formulom

$$d\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\theta^i\right)^2 = ds^2 + 2ds \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \bar{\theta}^i + \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{\theta}^i\right)^2 \qquad (4.143)$$

Pošto je $\sum_{i=1}^{m} \alpha^i d\alpha^i = 0$, $\bar{\theta}_i^j + \bar{\theta}_j^i = 0$, važi

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha^i \bar{\theta}^i\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^i \left(d\alpha^i + \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \bar{\theta}_i^j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha^i \bar{\theta}^i \bigg|_{s=0} = 0.$$

Stoga je

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha^i \bar{\theta}_i^j = 0. \tag{4.144}$$

Dakle, iz (4.143), element dužine luka u okolini tačke O je

$$d\sigma^2 = ds^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{\theta}^i\right)^2. \tag{4.145}$$

Teorema 4.4.14.
Za svaku tačku O na Rimanovoj mnogostrukosti, postoji normalna koordinatna okolina W, takva da važi:

1) *Svaka tačka u W ima normalnu koordinatnu okolinu koja sadrži W.*
2) *Geodezijska kriva koja povezuje O i tačku u W je jedinstvena najkraća kriva u W koja spaja date dve tačke.*

Dokaz
Primenjujući **Teoremu 4.4.10.** na Levi-Čivitinu povezanost na M, dobija se dokaz za 1).

Neka je x^i normalni koordinatni sistem tačke O, dat sa (4.137). normalna koordinatna okolina W koja se traži pod 1) je definisana na sledeći način: $W = \left\{p \in M \middle| \sum_{i=1}^{m} \left(x^i(p)\right)^2 < \varepsilon^2\right\}$, gde je ε dovoljno mail, pozitivan broj. Pošto je W normalna koordinatna okolina, za bilo koju tačku $p \in W$, postoji jedinstvena geodezijska kriva γ u W, koja spaja O sa p. Neka je dužina od γ jednaka s_0. Prvo će biti pokazano da je γ najkraći put u W koji spaja O i p. Neka je c bilo koja po delovima glatka kriva u W koja spaja O i p. Može se pretpostaviti da je parametrizovana jednačina za c data sa $x^i = x^i(s)$, gde je s parametar dužine luka od γ. Tada je dužina luka od c

$$\int_0^{s_0} d\sigma = \int_0^{s_0} \sqrt{ds^2 + \sum_{i=1}^{m} (\bar{\theta}^i)^2} \geq \int_0^{s_0} ds = s_0. \tag{4.146}$$

Ako je c najkraći put u W spajajući O i p, tada jednakost (4.146) važi. Stoga, duž krive c mora biti $\bar{\theta}^i = 0$.

Iz (4.141) sledi

$$d\alpha^i + \sum_{j=1}^{m} A_j^i \frac{d\alpha^j}{s} = 0. \tag{4.147}$$

Pošto A^i_j zadovoljava početne uslove (4.142), $A^i_j = o(s)$. Kada se pusti da je $s \to 0$ u (4.147), tada je $d\alpha^i = 0$, $\alpha^i = const.$, tj. c je geodezijska kriva koja povezuje O i p. Zato je $c = \gamma$. ■

Teorema 4.4.15.
Neka je U normalna koordinatna okolina tačke O. Postoji $\varepsilon > 0$ takvo da, za svako $0 < \delta < \varepsilon$, hipersfera $\Sigma_\delta = \left\{p \in U \middle| \sum_{i=1}^m \left(x^i(p)\right)^2 < \delta^2\right\}$ ima sledeće osobine:

1) *Svaka tačka na Σ_δ može biti spojena sa O jedinstvenom, najkraćom geodezijskom krivom u U.*
2) *Bilo koja geodezijska kriva tangentna na Σ_δ je striktno izvan Σ_δ u okolini tangentne tačke.*

Dokaz
Neka je W normalna koordinatna okolina kao u **Teoremi 4.4.14**. Može se pretpostaviti da je W sferna okolina sa radijusom ε:

$$W = \left\{p \in U \middle| \sum_{i=1}^m \left(x^i(p)\right)^2 < \varepsilon^2\right\}.$$

Kada važi $0 < \delta < \varepsilon$, pošto je $\Sigma_\delta \subset W \subset U$ i U je normalna koordinatna okolina, osobina 1) je posledica prethodne teoreme pod 1).

U nastavku dokaza se povećava ε tako da 2) date teoreme bude tačno.

Pošto je (U, x^i) normalni koordinatni sistem sledi iz **Teoreme 4.4.9.** da je

$$\Gamma^j_{ik}(0) = 0. \tag{4.148}$$

Jednačina za hipersferu Σ_δ se može napisati kao

$$F(x^1, \dots, x^m) = \frac{1}{2}[(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2 - \delta^2] = 0 \tag{4.149}$$

Neka je γ geodezijska kriva tangentna na Σ_δ u p, i neka je njena jednačina

$$x^i = x^i(\sigma), \tag{4.150}$$

gde je σ dužina luka od γ, merena od p. Tada je

$$F\left(x^i(\sigma)\right)\Big|_{\sigma=0} = 0. \tag{4.151}$$

Pošto je hipersfera Σ_δ ortogonalna na geodezijske krive, koje počinju u tački O, geodezijska kriva γ tangentna na Σ_δ u tački p, treba da bude normalna na geodezijsku krivu koja povezuje O i p. Dakle, važi

$$\sum_{i=1}^m x^i(\sigma)\frac{dx^i}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0} = 0. \tag{4.152}$$

Direktnim računanjem se dobija

$$\frac{d}{d\sigma}F\left(x^i(\sigma)\frac{dx^i}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} = \sum_{i=1}^{m} x^i(\sigma)\frac{dx^i}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0} = 0, \tag{4.153}$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}F\left(x^i(\sigma)\frac{dx^i}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} = \sum_{i,j=1}^{m}\left[\delta_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x^k(p)\Gamma_{ij}^k(p)\right]\left(\frac{dx^i}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{dx^j}{d\sigma}\right)_0. \tag{4.154}$$

Zato je, dalje,

$$F(x^i(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left[\delta_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x^k(p)\Gamma_{ij}^k(p)\right]\left(\frac{dx^i}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{dx^j}{d\sigma}\right)_0 \sigma^2 + o(\sigma^2). \tag{4.155}$$

Zbog (4.148) mogu se vrednosti od Γ_{ij}^k načiniti proizvoljno malim u okolini tačke O. Stoga se može birati dovoljno malo ε, takvo da kada je $0 < \delta < \varepsilon$, (4.154) je stalno pozitivno. Zbog toga geodezijska kriva (4.150) leži striktno izvan Σ_δ u okolini od p, i ima jednu zajedničku tačku sa Σ_δ, tačku p. ■

Kada se proučava Rimanova mnogostrukost, korisna tehnika je definisanje rastojanja na mnogostrukosti, kako bi postala metrički prostor, koji je bliži našoj intuiciji.

Definicija 4.4.16.
Neka je M povezana Rimanova mnogostrukost, neka su p i q dve proizvoljne tačke u M. Neka je

$$\rho(p,q) = inf\,\overset{\frown}{pq}, \tag{4.156}$$

gde $\overset{\frown}{pq}$ označava dužinu luka krive koja spaja p i q čija je dužina luka merljiva. Tada se $\rho(p,q)$ naziva rastojanjem između tačaka p i q.

Napomena 4.4.17.
Pošto je M povezana, uvek postoji kriva koja povezuje p i q, čija je dužina luka merljiva. Stoga je funkcija (4.156) *smislena i definiše realnu funkciju na $M \times M$.*

Teorema 4.4.18.
Funkcija $\rho: M \times M \to \mathbb{R}$ ima sledeće osobine:

1) za bilo koje $p, q \in M$, $\rho(p,q) \geq 0$, jednakost važi samo kada je $p = q$;
2) $\rho(p,q) = \rho(q,p)$;
3) *za bilo koje tri tačke $p, q, r \in M$, važi $\rho(p,q) + \rho(q,r) \geq \rho(p,r)$.*

Stoga je, ρ funkcija rastojanja na M, pa je (M,ρ) metrički prostor. Topologija na M, kao metričkog prostora i polazne topologije na M kao mnogostrukosti su ekvivalentne.

Dokaz

Prema (4.156), **Definiciji 4.4.16.** dobija se da osobina 2) važi zbog same definicije od ρ, jer je $\overset{\frown}{pq}$ dužina luka krive koja spaja p i q.

3) Važi $\overset{\frown}{pq} + \overset{\frown}{qr} \geq \overset{\frown}{pr}$ $\forall p,q,r \in M$. Treba pokazati da važi $inf\,\overset{\frown}{pq} + inf\,\overset{\frown}{qr} \geq inf\,\overset{\frown}{pr}$. $\forall p,q,r \in M$, važi $\overset{\frown}{pr} \leq \overset{\frown}{pq} + \overset{\frown}{qr}$.

$$\overset{\frown}{pr} - \overset{\frown}{pq} \leq \overset{\frown}{qr} \tag{4.157}$$

$$\overset{\frown}{pr} \geq inf\overset{\frown}{pr} \tag{4.158}$$

$$\overset{\frown}{pq} \leq sup\overset{\frown}{pq} \Rightarrow -\overset{\frown}{pq} \geq -sup\overset{\frown}{pq} \tag{4.159}$$

Uvrsti se (4.158) i (4.159) u (4.157) i dobija se nejednakost

$$inf\overset{\frown}{pr} - sup\overset{\frown}{pq} \leq \overset{\frown}{qr} \tag{4.160}$$

$$inf\overset{\frown}{pq} \leq sup\overset{\frown}{pq}$$

$$-inf\overset{\frown}{pq} \geq -sup\overset{\frown}{pq} \tag{4.161}$$

Uvrsti se (4.161) u (4.160)

$$inf\overset{\frown}{pr} - inf\overset{\frown}{pq} \leq \overset{\frown}{qr} \tag{4.162}$$

Kako leva strana nejednakosti (4.162) predstavlja jedno od donjih ograničenja za $\overset{\frown}{qr}$, iz definicije infimuma se dobija

$$inf\overset{\frown}{pr} - inf\overset{\frown}{pq} \leq inf\overset{\frown}{qr} \tag{4.163}$$

Na kraju iz (4.163) se dobija $inf\overset{\frown}{pr} \leq inf\overset{\frown}{pq} + inf\overset{\frown}{qr}$, što je trebalo dokazati.

1) Biće pokazano da je $\rho(p,q) > 0$, kad god je $p \neq q$. Neka su $p,q \in M$, $p \neq q$. Pošto je M Hauzdorfov prostor, postoji okolina U od p takva da $q \notin U$. Iz **Teoreme 4.4.14.**, postoji normalna koordinatna okolina $W \subset U$ od p, takva da su njene normalne koordinate $u^i = \alpha^i s$, gde je $\sum_{i=1}^{m}(\alpha^i)^2 = 1$ i $0 \leq s \leq s_0$. Biće izabrano takvo δ da važi $0 \leq \delta \leq s_0$. Neka je hiperpovrš takva da važi $\Sigma_\delta \subset W$. Neka je γ merljiva kriva koja povezuje p i q. Tada je dužina od γ najmanje δ, tj. $\rho(p,q) \geq \delta > 0$. Iz **Teoreme 4.4.15.** unutrašnjost od Σ_δ je skup $\{q \in M | \rho(p,q) < \delta\}$, tj. unutrašnjost od Σ_δ je okolina od p, δ-lopta, kada se M posmatra kao metrički prostor. Stoga su topologija od M, kada se posmatra kao metrički prostor, i polazna topologija ekvivalentne. ■

Napomena 4.4.19.

Treba primetiti da ako je W normalna koordinatna okolina u obliku lopte, u tački O konstruisana, kako je objašnjeno u **Teoremi 4.4.14.***, tada za bilo koju tačku $p \in W$, postoji jedinstvena geodezijska kriva koja povezuje O i p u W ima dužinu $\rho(O,p)$.*

Teorema 4.4.20.

Postoji μ-lopta koja je okolina od W u bilo kojoj tački p na Rimanovoj mnogostrukosti M, gde je μ dovoljno mali pozitivan broj, takav da bilo koje dve tačke u W mogu biti spojene jedinstvenom geodezijskom krivom.

Dokaz

Neka je $p \in M$. Iz **Teoreme 4.4.14.** postoji normalna koordinatna okolina U od p u obliku lopte sa radijusom ε takva da za bilo koju tačku q u U postoji normalna koordinatna okolina V_q koja sadrži U. Neka ε takođe zadovoljava uslove **Teoreme 4.4.15.**. Bira se pozitivan broj $\mu \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Tada je μ-lopta okolina u W od p, geodezijska konveksna okolina od p. Biraju se bilo koje $q_1, q_2 \in W$. Tada je

$$\rho(q_1,q_2) \leq \rho(p,q_1) + \rho(p,q_2) < 2\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.164}$$

Neka je $U\left(q_1;\frac{\varepsilon}{2}\right)$ okolina od q_1, $\frac{\varepsilon}{2}$-lopta. Tada formula (4.164) ukazuje da je $q_2 \in U\left(q_1;\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Za bilo koje $q \in U\left(q_1;\frac{\varepsilon}{2}\right)$ važi $\rho(p,q) \leq \rho(p,q_1) + \rho(q_1,q) < \frac{3\varepsilon}{4}$.

Stoga, važi:

$$U\left(q_1;\frac{\varepsilon}{2}\right) \subset U \subset V_{q_1}, \tag{4.165}$$

tj. $\frac{\varepsilon}{2}$–lopta je okolina od q_1 sadržana u normalnoj koordinatnoj okolini od q_1. Iz **Teoreme 4.4.14.** i **Napomene 4.4.19.**, postoji jedinstvena geodezijska kriva γ u $U\left(q_1;\frac{\varepsilon}{2}\right)$ koja povezuje q_1 i q_2, čija je dužina $\rho(q_1,q_2)$. Specijalno, ako $r \in \gamma$, tada je

$$\rho(q_1,r) \leq \rho(q_1,q_2). \tag{4.166}$$

U nastavku se dokazuje da geodezijska kriva γ leži u W. Pošto važi $\gamma \subset U\left(q_1;\frac{\varepsilon}{2}\right) \subset U$, funkcija $\rho(p,q)$, $(q \in \gamma)$ je ograničena. Ako γ ne leži cela u W, i $q_1, q_2 \in W$, tada funkcija $\rho(p,q)$, $(q \in \gamma)$ mora dostići svoj maksimum u unutrašnjoj tački $q_0 \in \gamma$. Neka je $\delta = \rho(p,q_0)$. Tada je $\delta < \varepsilon$, i hipersfera Σ_δ je tangentna na γ u q_0. Iz **Teoreme 4.4.15.**, γ leži u potpunosti izvan Σ_δ u blizini q_0, što je u kontradikciji sa tim da $\rho(p,q)$, $(q \in \gamma)$ dostiže svoj maksimum u q_0. Stoga je $\gamma \subset W$. ■

4.4.7. Segmentna krivina

Neka je M m-dimenziona Rimanova mnogostrukost, čiji je tenzor krivine R kovarijantni tenzor četvrtog ranga, i neka je x^i lokalni koordinatni sistem na M. Tada se R može izraziti u obliku:

$$R = R_{ijkl}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l, \tag{4.167}$$

gde je R_{ijkl} definisan kao u svojstvima Riman-Kristofelovog tenzora. Kovarijantni tenzor četvrtog reda se može posmatrati kao linearna funkcija na prostoru kontravarijantnih tenzora četvrtog reda, tako da u svakoj tački p postoji multilinearna funkcija $R: T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to R$, definisana sa

$$R(X,Y,Z,W) = \langle X \otimes Y \otimes Z \otimes W, R\rangle \tag{4.168}$$

gde je oznaka $\langle , \rangle$ definisana u poglavlju **1.Osnovi tenzorske analize**. Ako je

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Z = Z^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad W = W^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.169}$$

tada je

$$R(X,Y,Z,W) = R_{ijkl}X^iY^iZ^iW^i. \tag{4.170}$$

Tenzor krivine povezanosti ∇ se interpretira kao operator zakrivljenosti na sledeći način: za bilo koje $Z, W \in T_pM$, $R(Z,W)$ je linearno preslikavanje iz T_pM u T_pM, definisano sa

$$R(Z,W)X = R^j_{ikl}X^iZ^kW^l\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{4.171}$$

Ako je ∇ Levi-Čivitina povezanost Rimanove mnogostrukosti M, tada je

$$R(X,Y,Z,W) = (R(Z,W)X) \cdot Y, \tag{4.172}$$

gde je operacija $\cdot$ na desnoj strani definisana u Rimanovoj mnogostrukosti, formula (4.116). Iz **Teoreme 5.2.2.**, 4-linearna funkcija $R(X,Y,Z,W)$ ima sledeće osobine:

1) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) = -R(Y,X,Z,W)$;
2) $R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0$;
3) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$.

Definicija 4.4.21.
Neka je g metrički tenzor. Neka je G 4-linearna funkcija definisana na sledeći način:

$$G(X,Y,Z,W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z). \tag{4.173}$$

Napomena 4.4.22.

i) G je 4-linearna funkcija koja ima iste osobine kao funkcija $R(X,Y,Z,W)$, što sledi iz osobina metričkog tenzora i same definicije funkcije G.

ii) Ako su $X,Y \in T_pM$, tada je

$$G(X,Y,Z,W) = |X|^2 \cdot |Y|^2 - (X \cdot Y)^2 = |X|^2 \cdot |Y|^2 \cdot sin\sphericalangle(X,Y). \tag{4.174}$$

Stoga, ako su X i Y linearno nezavisni, $G(X,Y,X,Y)$ je kvadrat površine paralelograma, određene tangentnim vektorima X i Y. Zbog toga je $G(X,Y,X,Y) \neq 0$.

iii) Neka su X',Y' druga dva linearno nezavisna tangentna vektora u tački p, takvi da oni određuju isti dvodimenzioni tangentni potprostor E koji određuju i vektori X i Y. Tada se može pretpostaviti da važi $X' = aX + bY$, $Y' = cX + dY$, gde je $ad - bc = 0$. Iz osobina 1), 2) i 3) funkcije R, dobija se sledeće

$$R(X',Y',X',Y') = (ad-bc)^2 R(X,Y,X,Y),$$
$$G(X',Y',X',Y') = (ad-bc)^2 G(X,Y,X,Y).$$

Stoga važi $\dfrac{R(X',Y',X',Y')}{G(X',Y',X',Y')} = \dfrac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)}$.

Iz prethodnog izraza se vidi da je R funkcija od dvodimenzionog potprostora E od T_pM, i da ne zavisi od izbora vektora X i Y u E.

Definicija 4.4.22.
Neka je E dvodimenzioni potprostor od T_pM, i X,Y su dva linearno nezavisna vektora u E. Tada je

$$K(E) = -\frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)}, \tag{4.175}$$

funkcija od E koja ne zavisi od izbora X i Y u E.

Data funkcija se naziva segmentna krivina od M u (p,E).

Teorema 4.4.23.
Tenzor krivine Rimanove mnogostrukosti M u tački p je jedinstveno određen segmentnom krivinom svih dvodimenzionih tangentnih potprostora u p.

Dokaz
Neka je $\bar{R}(X,Y,Z,W)$ 4-linearna funkcija, koja zadovoljava osobine 1), 2) i 3) tenzora krivine $R(X,Y,Z,W)$, i da za bilo koja dva linearno nezavisna tangentna vektora X,Y u p važi:

$$\frac{\bar{R}(X',Y',X',Y')}{G(X',Y',X',Y')} = \frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)}. \tag{4.176}$$

U nastavku će biti pokazano da za bilo koje $X,Y,Z,W \in T_pM$, važi

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W). \tag{4.177}$$

Neka je S definisano sa

$$S(X,Y,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W) - R(X,Y,Z,W), \tag{4.178}$$

tada je S, takođe 4-linearna funkcija koja zadovoljava osobine 1), 2) i 3), jer R i $\bar{R}$ zadovoljavaju date osobine, zbog (4.176) važi da za bilo koje $X,Y \in T_pM$, važi

$$S(X,Y,X,Y) = 0. \tag{4.179}$$

Stoga je (4.177) ekvivalentno sa tvrđenjem da je S nula funkcija.

Iz (4.179) se dobija

$$\begin{gathered}
S(X+Z,Y,X+Z,Y) = 0 \\
S(X+Z,Y,X+Z,Y) = S(X,Y,X+Z,Y) + S(Z,Y,X+Z,Y) = \\
= S(X,Y,X,Y) + S(X,Y,Z,Y) + S(Z,Y,X+Z,Y) = \\
= S(X,Y,X,Y) + S(X,Y,Z,Y) + S(Z,Y,X,Y) + S(Z,Y,Z,Y) = \\
= S(X,Y,Z,Y) + S(Z,Y,X,Y) = \\
= S(X,Y,Z,Y) + S(X,Y,Z,Y) = 2S(X,Y,Z,Y)
\end{gathered}$$

Iz prethodnog se dobija da je

$$S(X,Y,Z,Y) = 0, \tag{4.180}$$

gde su X,Y,Z neka tri elementa iz T_pM. Stoga je $S(X,Y+W,Z,Y+W) = 0$, daljim sređivanjem se dobija

$$S(X,Y,Z,W) + S(X,W,Z,Y) = 0. \tag{4.181}$$

Iz osobine 1) važi da je

$$\begin{gathered}
S(X,Y,Z,W) = -S(X,W,Z,Y) = S(X,W,Y,Z) = \\
= -S(X,Z,Y,W) = S(X,Z,W,Y).
\end{gathered} \tag{4.182}$$

Sa druge strane, osobina 2) implicira da važi:

$$S(X,Y,Z,W) + S(X,Z,W,Y) + S(X,W,Y,Z) = 0.$$

Stoga je

$$3S(X,Y,Z,W) = 0, \tag{4.183}$$

što je i trebalo dokazati. ■

Napomena 4.4.24.

Ako je segmentna krivina $K(E)$ u tački p konstantna (tj. ne zavisi od E), tada se segmentna krivina od M u p označava sa $K(p)$.

Stoga, za bilo koje $X, Y \in T_pM$ važi da je

$$R(X,Y,X,Y) = -K(p)G(X,Y,X,Y). \tag{4.184}$$

Iz dokaza prethodne teoreme, za bilo koje $X, Y, Z, W \in T_pM$ važi

$$R(X,Y,Z,W) = -K(p)G(X,Y,Z,W). \tag{4.185}$$

Stoga je uslov za Rimanovu mnogostrukost da bude segmentna krivina u tački p konstantna dat sa

$$R_{ijkl}(p) = -K(p)\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right)(p),$$

ili u obliku

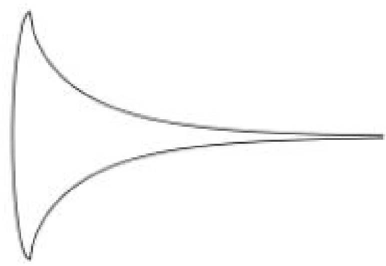
$$\Omega_{ij}(p) = \frac{1}{2}R_{ijkl}(p)dx^k \wedge dx^l = -K(p)\theta_i \wedge \theta_j(p), \tag{4.186}$$

gde je

$$\theta_i = g_{ij}dx^i. \tag{4.187}$$

Definicija 4.4.25.
Ako je M Rimanova mnogostrukost takva da je segmentna krivina konstantna funkcija na M, tada je M prostor konstantne krivine.

Napomena 4.4.26.
Sfere, ravni i pseudo-sfere (u svakoj tački proizvod dve krivine je -1 svuda, u određenom smislu su suprotne od uobičajene sfere) su sve površi u trodimenzionom Euklidovom prostoru, čija je potpuna krivina konstantna. Stoga su sve one dvodimenzioni Rimanovi prostori konstantne krivine.



Slika 4.1. Pseudo-sfera

Teorema 4.4.27. (Šurova teorema)
Neka je M povezana m-dimenziona Rimanova mnogostrukost koja u svakoj tački ima konstantnu segmentnu krivinu. Ako je $m \geq 3$, tada je M prostor konstantne krivine.

Dokaz
Pošto M ima u svakoj tački konstantnu segmentnu krivinu, iz formule (4.186) se dobija da je

$$\Omega_{ij} = -K\theta_i \wedge \theta_j, \tag{4.188}$$

gde je K glatka funkcija na M, a θ_i je data u (4.187). Spoljašnjim diferenciranjem formule (4.188) se dobija

$$d\Omega_{ij} = -dK\theta_i \wedge \theta_j - Kd\theta_i \wedge \theta_j + K\theta_i \wedge d\theta_j. \tag{4.189}$$

$$d\theta_i = dg_{ij} \wedge dx^j = \left(g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k\right) \wedge dx^j = \left(\omega_{ji} + \omega_{ij}\right) \wedge dx^j,$$

gde je $\omega_{ij} = g_{jk}\omega_i^k = \Gamma_{ik,j}dx^k$.

Pošto je Levi-Čivitina povezanost bez torzije, važi da je:

$$\omega_{ji} \wedge dx^j = \Gamma_{jk,i}dx^k \wedge dx^j.$$

Stoga je

$$d\theta_i = \omega_{ij} \wedge dx^j = \omega_i^j \wedge \theta_j. \tag{4.190}$$

Sa druge strane, iz Bjankijevog identiteta, se dobija

$$\begin{aligned} d\Omega_{ij} &= d\left(\Omega_i^l \cdot g_{lj}\right) = d\Omega_i^l \cdot g_{lj} + \Omega_i^l \wedge dg_{lj} = \\ &= \left(\omega_i^k \wedge \Omega_k^l - \Omega_i^k \wedge \omega_k^l\right) \cdot g_{lj} + \Omega_i^l \wedge \left(\omega_{lj} + \omega_{jl}\right) = \\ &= \omega_i^k \wedge \Omega_{kj} + \Omega_{ik} \wedge \omega_j^k. \end{aligned} \tag{4.191}$$

Dakle, važi da je

$$\begin{aligned} d\Omega_{ij} &= -K\omega_i^k \wedge \theta_k \wedge \theta_j - K\theta_i \wedge \theta_k \wedge \omega_j^k = \\ &= -Kd\theta_i \wedge \theta_j + K\theta_i \wedge d\theta_j. \end{aligned} \tag{4.192}$$

Upoređivanjem (4.192) i (4.189), dobija se:

$$dK \wedge \theta_i \wedge \theta_j = 0. \tag{4.193}$$

Pošto su $\{\theta_i\}$ i $\{dx^i\}$ su oba lokalna kookvira, može se pretpostaviti da je

$$dK = \sum_{i=0}^{m} a^i \theta_i.$$

Pošto je $m \geq 3$, za bilo koja tri indeksa $1 \leq i \leq j \leq k \leq m$, važi da je $dK \wedge \theta_i \wedge \theta_j = dK \wedge \theta_j \wedge \theta_k = dK \wedge \theta_i \wedge \theta_k = 0$. Stoga je $a^i = 0$ $(1 \leq i \leq m)$, tj.

$$dK = 0. \tag{4.194}$$

Kako je M povezana mnogostrukost, K je konstantna funkcija na M. ■

5. TENZOR RIMAN – KRISTOFELA

5.1. Promena redosleda kovarijantnog diferenciranja

Neka je V_μ dati kovarijantni vektor. Dva puta će biti kovarijantno diferenciran.

Postavlja se pitanje: da li se promenom redosleda kovarijantnog diferenciranja menja rezultat usled date promene redosleda?

Kao što je poznato u slučaju kod običnog diferenciranja funkcije, vrednost svih mešovitih parcijalnih izvoda n-tog reda funkcje u datoj tački ne zavisi od redosleda u kom se vrši uzastopno diferenciranje, ako je u toj tački posmatrana funkcija n-puta diferencijabilna. U nastavku će biti dokazana važna teorema o promeni redosleda kovarijantnog diferenciranja.

Teorema 5.1.1.
Mešoviti kovarijantni izvodi drugog reda, u opštem slučaju nisu komutativni, tj. ne može se menjati redosled u kom se vrši uzastopno kovarijantno diferenciranje.

Dokaz
Neka je sa $(V_\mu)_{\nu\sigma}$ označen drugi kovarijantni izvod od V_μ gde se prvo vrši diferenciranje po x^ν, a zatim po x^σ. Posmatra se razlika $(V_\mu)_{\nu\sigma} - (V_\mu)_{\sigma\nu}$, dobija se sledeće :

$$(V_\mu)_{\nu\sigma} - (V_\mu)_{\sigma\nu} = \left(\left(V_\mu\right)_\nu\right)_\sigma - \left(\left(V_\mu\right)_\sigma\right)_\nu =$$

$$= \frac{\partial (V_\mu)_\nu}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}(V_\alpha)_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}(V_\mu)_\alpha - \frac{\partial (V_\mu)_\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(V_\alpha)_\sigma + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}(V_\mu)_\alpha =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}V_\beta\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}V_\beta\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\beta_{\mu\sigma}V_\beta\right) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}V_\beta\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}V_\beta - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{\partial V_\beta}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}V_\beta - \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial \Gamma^\beta_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}V_\beta + \Gamma^\beta_{\mu\sigma}\frac{\partial V_\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\sigma}V_\beta =$$

$$= -\frac{\partial \Gamma^\beta_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}V_\beta - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\frac{\partial V_\beta}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}V_\beta + \frac{\partial \Gamma^\beta_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}V_\beta + \Gamma^\beta_{\mu\sigma}\frac{\partial V_\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\sigma}V_\beta =$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\beta_{\mu\sigma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}\right)V_\alpha.$$

U prethodnom delu dokaza je iskorišćeno da je $\frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}$. U pretposlednjem redu dokaza zamenjena su mesta indeksima α i β ($\alpha \leftrightarrow \beta$).

Sa početka na kraj se dobija:

$$(V_\mu)_{\nu\sigma} - (V_\mu)_{\sigma\nu} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\beta_{\mu\sigma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}\right)V_\alpha. \qquad (5.1)$$

5.2. Svojstva Riman – Kristofelovog tenzora[22]

Uvodi se oznaka

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}.$$

Tada (5.1) ima oblik

$$\left(V_{\mu}\right)_{\nu\sigma} - \left(V_{\mu}\right)_{\sigma\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}V_{\alpha}.$$

Pošto su kovarijantni izvodi vektora drugog reda tenzori trećeg ranga, na osnovu zakona količnika može se utvrditi da je $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ tenzor četvrtog ranga. Dati tenzor se naziva Riman – Kristofelov ili tenzor krivine, jer definiše svojstvo Rimanovog prostora analogno krivini dvodimenzione površi. Važnost datog tenzora se sastoji u tome što je on neposredno povezan sa metrikom Rimanovog prostora i jedan je od najsloženijih tenzora Rimanovog prostora.

Teorema 5.2.1.[23]
Da bi metrika prostora bila ravna potreban i dovoljan uslov je da je Riman – Kristofelov tenzor jednak nuli.

Dokaz (Potreban uslov)
Neka je metrika ravna, tj. metrika ravnog prostora. Tada se može izabrati takav koordinatni sistem u kom su svi Kristofelovi simboli u svim tačkama prostora indentički jednaki nuli. Tada su u svim tačkama prostora sve komponente Riman – Kristofelovog tenzora jednake nuli. Na ovaj način, ako je metrika ravna, tenzor $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ indentički je jednak nuli u svim tačkama prostora.

Dokaz (Dovoljan uslov)
Neka je u svim tačkama prostora, tenzor Riman – Kristofela indetički jednak nuli: $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} \equiv 0$. Neka u datom koordinatnom sistemu $\{S\}$ Kristofelovi simboli $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ nisu indentički jednaki nuli. U nastavku će biti pokazano da se pri $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} \equiv 0$ uvek može uvesti takav sistem koordinata $\{\tilde{S}\}$, u kome su u svim tačkama Kristofelovi simboli $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ indentički jednaki nuli. Iz prethodnih poglavlja je poznato da su formule transformisanja Kristofelovih simbola pri prelazu iz jednog sistema koordinata u drugi oblik

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\rho\nu}\frac{\partial \tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}. \qquad (5.2)$$

Pod pretpostavkom da je potreban sistem koordinata $\{\tilde{S}\}$ pronađen, dobija se

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}. \qquad (5.3)$$

[22] *Detaljnije o svojstvima Riman-Kristofelovog tenzora se može pogledati u [20],[3].*
[23] *Drugi dokaz za datu teoremu, koji je dat preko integraljenja po zatvorenoj konturi, zainteresovani čitalac može pogledati u [3].*

Potrebno je pronaći funkcije $\tilde{x}^{\epsilon} = \tilde{x}^{\epsilon}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ za koje su date diferencijalne jednačine (5.3). Date jednačine su iste za sve nepoznate funkcije $\tilde{x}^{\epsilon}$, kao što za koeficijente indeks ε nije uključen. U n-dimenzionom prostoru broj jednačina je $\frac{n(n+1)}{2}$, za $n = 4$ ima 10 jednačina, nepoznatih funkcija je 4. Broj jednačina je veći od broja nepoznatih, zato sistem može da bude neodređen. Zato je neophodno posebno razmotriti pitanje o konzistentnosti sistema diferencijalnih jednačina (5.3). Postavlja se pitanje: da li se funkcije $\tilde{x}^{\epsilon}$ koje zadovoljavaju sisteme jednačina (5.3) mogu posmatrati kao koordinate sistema u kojim su simboli Kristofela indentički jednaki nuli? Pretpostavlja se da funkcije $\tilde{x}^{\epsilon}$ zadovoljavaju uslove transformacija koordinata koji su predstavljeni u prvom poglavlju. Neka funkcije $\tilde{x}^{\epsilon}$ zadovoljavaju jednačine (5.3). Tada iz (5.2) sledi da je $\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\rho\nu}\frac{\partial \tilde{x}^{\rho}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial \tilde{x}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = 0$. Vršeći kontrakciju date jednačine sa $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\xi}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\eta}}$ dobija se $\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\rho\nu}\delta^{\rho}_{\xi}\delta^{\sigma}_{\eta} = 0$ ili $\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\rho\nu} = 0$ što je ekvivalentno sa $\tilde{g}_{\mu\nu} = const$. Na ovaj način funkcije $\tilde{x}^{\varepsilon}$ koje zadovoljavaju jednačine (5.3) mogu da se posmatraju kao koordinate sistema u kojima je $\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\rho\nu} = 0$.

Nepoznate funkcije $\tilde{x}^{\varepsilon}$ koje zadovoljavaju jednačine (5.3) su dovoljan uslov da bi date funkcije bile koordinate sistema u kome su Kristofelovi simboli indentički jednaki nuli u svim tačkama prostora.

U nastavku se razmatra pitanje o postojanju rešenja sistema jednačina (5.3). Određuju se uslovi saglasnosti (integrabilnosti) datog sistema koji proizilaze iz uslova poklapanja mešovitih parcijalnih izvoda funkcije $\tilde{x}^{\varepsilon}$. Difererencira se (5.3) po $\tilde{x}^{\sigma}$:

$$\frac{\partial^3 \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\alpha}}$$

Drugi izvod sa desne strane dobijene jednačine će biti zamenjen izrazom iz jednačine (5.3) i menja se indeks α sa β:

$$\frac{\partial^3 \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}$$

ili

$$\frac{\partial^3 \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\right).$$

Analogno se dobija:

$$\frac{\partial^3 \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\right).$$

Potrebna je nezavisnost mešovitih parcijalnih izvoda od redosleda u kom se vrši uzastopno diferenciranje. Kada se oduzmu dve poslednje jednakosti, dobija se :

$$0 = \frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\right)$$

ili

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = 0. \qquad (5.4)$$

Jednačine (5.4) predstavljaju uslove saglasnosti sistema (5.3). Pri indentičkoj jednakosti sa nulom tenzora krivine $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$, uslovi saglasnosti (5.4) su ispunjeni indentički, tj. za sve $\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}$ i $\tilde{x}^{\varepsilon}$.

U nastavku će biti razmotreno pitanje o postojanju funkcija $\tilde{x}^{\varepsilon}$ koje zadovoljavaju sisteme jednačina (5.3). Početni podaci ovde su vrednosti funkcija $\tilde{x}^{\varepsilon}$ i njihovi prvi izvodi $\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}$ u nekim određenim vrednostima x^{α}, jednakim sa x_0^{α}. Pretpostavlja se da su funkcije koje se javljaju u (5.3), analitičke u nekoj okolini sistema vrednosti svojih argumenata u početnoj tački x_0^{α}. Tada, saglasno sa teoremom Kovaljevske iz teorije diferencijalnih jednačina, sledi postojanje funkcije $\tilde{x}^{\varepsilon}$, koja je analitička u datoj okolini i zadovoljava sisteme jednačina (5.3) za sve početne uslove. Pošto funkcija $\tilde{x}^{\varepsilon}(x_0^{\alpha})$ predstavlja prelaz iz jednog sistema koordinata u drugi sistem koordinata, početni uslovi moraju biti tako zadati da bi jakobijan transformacije $det\left\|\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}\right\|$ u početnoj tački x_0^{α} bio različit od nule. Nepoznate funkcije $\tilde{x}^{\varepsilon}(x_0^{\alpha})$ se nalaze iz (5.3) pri zadatim početnim uslovima. Ovakav izbor početnih uslova je moguć jer rešenje sistema jednačina (5.3) postoji za bilo koji izbor početnih uslova. Na ovaj način, pri indentičkoj ispunjenosti jednakosti $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = 0$, uslovi saglasnosti sistema jednačina (5.3) ispunjeni su za sve vrednosti $\tilde{x}^{\varepsilon}$ i $\frac{\partial \tilde{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}$ i postoje funkcije $\tilde{x}^{\varepsilon}(x_0^{\alpha})$ koje zadovoljavaju (5.3) za sve početne uslove. Ove funkcije određuju prelaz iz datog sistema koordinata $\{S\}$ u sistem koordinata $\{\tilde{S}\}$ u kome su u svim tačkama posmatrane okoline tačke x_0^{α} simboli Kristofela jednaki nuli.

U zakrivljenom prostoru se uvek može birati sistem koordinata koji je lokalno-geodezijski u datoj tački. Ipak, tenzor krivie $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ u toj tački nije jednak nuli, kao što izvodi Kristofelovih simbola $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ nisu jednaki nuli u toj tački, iako su vrednosti veličina $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ u datoj tački jednake nuli.

Zajedno sa tenzorom $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ biće korišćen i njegov asocirani predstavnik $R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\sigma\rho}$.

Teorema 5.2.2.

Tenzor $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ ima sledeće osobine:

1. $R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}$

2. $R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\sigma\rho}$

3. $R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\sigma\rho\mu\nu}$

4. $R_{\mu\nu\sigma\rho} + R_{\mu\sigma\rho\nu} + R_{\mu\rho\nu\sigma} = 0$

Dokaz

1) $R^{\alpha}_{\nu\sigma\rho} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}$

$$R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}$$

Iz prethodne dve jednakosti se dobija:

$R^{\alpha}_{\nu\sigma\rho} = -R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma}$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\sigma\rho} = -g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

2) Za dokazivanje drugog svojstva je neophodno transformisati $R_{\mu\nu\sigma\rho}$.

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\sigma\rho} = g_{\mu\alpha}\left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\right) =$$

$$= g_{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - g_{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} + g_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho}\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} - g_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} \qquad (5.5)$$

Kada se transformišu prva dva člana u prethodnom izrazu,dobija se:

$$\Gamma_{\beta\sigma,\mu} = g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma},\ \Gamma_{\beta\rho,\mu} = g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}$$

Računajući parcijalne izvode po koordinatama, dobija se:

$$g_{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\rho,\mu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}$$

$$g_{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma,\mu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}$$

Parcijalni izvodi metričkog tenzora po koordinatama mogu se izraziti pomoću Kristofelovih simbola prve vrste.

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} = \Gamma_{\sigma\mu,\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma,\mu} \qquad (5.6)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\rho}} = \Gamma_{\rho\mu,\alpha} + \Gamma_{\alpha\rho,\mu}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} = \Gamma_{\nu\rho,\mu} + \Gamma_{\mu\rho,\nu}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \Gamma_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma_{\mu\sigma,\nu}$$

U nastavku će biti dokazan prvi i treći od prethodna četiri identiteta.

$$\Gamma_{\sigma\mu,\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma,\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}$$

$$\Gamma_{\nu\rho,\mu} + \Gamma_{\mu\rho,\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}}\right) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

Zato je

$$g_{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\rho,\mu}}{\partial x^{\sigma}} - \left(\Gamma_{\sigma\mu,\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma,\mu}\right)\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}$$

$$g_{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma,\mu}}{\partial x^{\rho}} - \left(\Gamma_{\rho\mu,\alpha} + \Gamma_{\alpha\rho,\mu}\right)\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}$$

Kada se zameni prethodno u (5.5), dobija se:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\rho,\mu}}{\partial x^{\sigma}} - \left(\Gamma_{\sigma\mu,\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma,\mu}\right)\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma,\mu}}{\partial x^{\rho}} + \left(\Gamma_{\rho\mu,\alpha} + \Gamma_{\alpha\rho,\mu}\right)\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} +$$

$$+\Gamma_{\beta\sigma,\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho} - \Gamma_{\beta\rho,\mu}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\rho,\mu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma,\mu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\sigma\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} + \Gamma_{\rho\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}. \qquad (5.7)$$

Iz jednakosti (5.6) se dobija:

$$\Gamma_{\nu\rho,\mu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\mu\rho,\nu}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{\nu\rho,\mu}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho,\nu}}{\partial x^{\sigma}}$$

$$\Gamma_{\nu\sigma,\mu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma,\mu}}{\partial x^{\rho}} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma,\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

$$\Gamma_{\sigma\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} = g^{\alpha\beta}\Gamma_{\sigma\mu,\alpha}\Gamma_{\nu\rho,\beta} = \Gamma^{\beta}_{\sigma\mu}\Gamma_{\nu\rho,\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma_{\nu\rho,\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma_{\rho\nu,\alpha}$$

$$\Gamma_{\rho\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} = g^{\alpha\beta}\Gamma_{\rho\mu,\alpha}\Gamma_{\nu\sigma,\beta} = \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\Gamma_{\nu\sigma,\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu}\Gamma_{\nu\sigma,\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma_{\sigma\nu,\alpha}$$

Zamenom prethodnog u (5.7), se dobija:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = -\left(\frac{\partial\Gamma_{\mu\rho,\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma,\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma_{\rho\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma_{\sigma\nu,\alpha}\right)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = -\left(\frac{\partial\Gamma_{\mu\rho,\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma,\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma_{\rho\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma_{\sigma\nu,\alpha}\right) = -R_{\nu\mu\sigma\rho}$$

3) Da bi bilo dokazano treće svojstvo, biće transformisana prva dva člana tenzora (5.7):

$$\frac{\partial\Gamma_{\nu\rho,\mu}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\sigma}}\right)$$

$$\frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma,\mu}}{\partial x^{\rho}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\rho}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}}\right)$$

Iz prethodnog se dobija da je:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\rho}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}}\right) -$$
$$-\Gamma_{\sigma\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} + \Gamma_{\rho\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}}\right) - \Gamma_{\sigma\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} + \Gamma_{\rho\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} \quad (5.8)$$

U nastavku će biti izvršena sledeća zamena indeksa:

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu & \sigma & \rho \\ \sigma & \rho & \mu & \nu \end{pmatrix}$$

Data zamena se primeni na (5.8) i dobija se:

$$R_{\sigma\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}}\right) - \Gamma_{\mu\sigma,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} + \Gamma_{\nu\sigma,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} \quad (5.9)$$

Prvi i drugi članovi tenzora (5.8) i (5.9) su jednaki, preostaje da se proveri jednakost trećih članova. Važi da je:

$$\Gamma_{\rho\mu,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} = \Gamma_{\rho\mu,\alpha}g^{\alpha\beta}\Gamma_{\nu\sigma,\beta} = \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\Gamma_{\nu\sigma,\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu}\Gamma_{\nu\sigma,\alpha}$$

Tenzori (5.8) i (5.9) su zaista jednaki, na ovaj način je dokazano treće svojstvo.

4) (Ričijev identitet)[24]

U proizvoljnoj tački je moguće uvesti lokalno–inercijalni sistem koordinata. U tom sistemu su vrednosti Kristofelovih simbola prve i druge vrste u datoj tački jednaki nuli, dok su

[24] *Detaljnije o Ričijevom identitetu se može pogledati u [20].*

njihovi izvodi različiti od nule. Ako se pokaže da je leva strana jednakosti u četvrtom svojstvu u lokalno – inercijalnom sistemu koordinata jednaka nuli, tada zbog tenzorskog karaktera veličine sa leve strane jednakosti u četvrtom svojstvu, ona će biti jednaka i u bilo kom drugom sistemu koordinata.
Iz (5.8) se dobija da važi:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}\right) + g^{\alpha\beta}\left(\Gamma_{\nu\sigma,\alpha}\Gamma_{\rho\mu,\beta} - \Gamma_{\mu\sigma,\alpha}\Gamma_{\rho\nu,\beta}\right)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} + R_{\mu\sigma\rho\nu} + R_{\mu\rho\nu\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} +$$

$$+ \frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} +$$

$$+ \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\Big) = 0.$$

U lokalno – inercijalnom sistemu koordinata, jednakost iz četvrtog svojstva je zadovoljena indentički. Zbog tenzorskog karaktera data jednakost važi i u bilo kom drugom sistemu koordinata. ■

5.3. Ričijev i Ajnštajnov tenzor[25]

Tenzor Ričija R_{ij} će biti određen pomoću formule $R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$, i predstavlja se u obliku determinante na sledeći način

$$R_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^i} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ \Gamma^{\alpha}_{ij} & \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{\beta j} & \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \\ \Gamma^{\beta}_{ij} & \Gamma^{\beta}_{i\alpha} \end{vmatrix}.$$

Pošto važi $\frac{\partial}{\partial x^i} ln\sqrt{g} = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}$, odatle se dobija

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 ln\sqrt{g}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha} - \Gamma^{\beta}_{ij}\frac{\partial ln\sqrt{g}}{\partial x^\beta}.$$

Iz prethodnog se zaključuje da je tenzor $R_{ij} = R_{ji}$ simetričan, broj različitih komponenata je $\frac{n(n+1)}{2}$. U četvorodimenzionoj mnogostrukosti, ako se uzme da je $R_{ij} = 0$, dobija se deset diferencijalnih jednačina po parcijalnim izvodima, koje je Albert Ajnštajn uzeo kao jednačine koje opisuju gravitaciono polje u slobodnom prostoru opšte teorije gravitacije. U razvoju date teorije, važnu ulogu je imao i drugi uvedeni Ajnštajnov tenzor. Na jednostavan način se dati tenzor može dobiti iz Bjankijeve jednakosti

$$R^{i}_{jkl,m} + R^{i}_{jlm,k} + R^{i}_{jmk,l} = 0. \tag{5.10}$$

[25] *O Ričijevom i Ajnštajnovom tenzoru se može pogledati detaljnije u [20].*

Pošto je kovarijantni izvod fudamentalnog tenzora g_{ij} jednak nuli, Bjankijev identitet se može zapisati u obliku

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0. \tag{5.11}$$

Ako se pomnoži jednačina (5.11) sa $g^{il}g^{jk}$ i iskoriste kososimetrična svojstva Rimanovog tenzora R_{ijkl}, dobija se

$$g^{jk}R_{jk,m} - g^{jk}R_{jm,k} - g^{il}R_{im,l} = 0.$$

Dati rezultat se može predstaviti u obliku $R_{,m} - 2R^k_{m,k} = 0$, gde je $R \equiv g^{ij}R_{ij}$ ili u obliku

$$\left(R^k_m - \frac{1}{2}\delta^k_m R\right)_{,k} = 0 \tag{5.12}$$

gde je $R^k_m = g^{jk}R_{jm}$. Tenzor $R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R \equiv G^i_j$ u zagradi jednačine (5.12) je poznat pod nazivom Ajnštajnov tenzor.

6. PRIMENA GAUSOVE TEOREME NA IZVOĐENJE AJNŠTAJNOVIH JEDNAČINA IZ VARIJACIONOG PRINCIPA

6.1. Integraljenje na mnogostrukostima

U 1.1 je data definicija PULL-BACK preslikavanja, u sledećoj teoremi su date neke osnovne osobine PULL-BACK preslikavanja.

Teorema 6.1.1.[26]

Neka je $\phi \in L(E,F), \psi \in L(F,G)$. Neka je:

1) $\phi^*: T_k^0(F) \to T_k^0(E)$ je linearno i $\phi^*(\Lambda^k F^*) \subseteq \Lambda^k E^*$.
2) $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$
3) Ako je $\phi = id_E$, tada je $\phi^* = id_{T_k^0(E)}$.
4) Ako je ϕ bijekcija, tada je, takođe, i ϕ^* bijekcija, važi da je $(\phi^*)^{-1} = (\phi^{-1})^*$.
5) Ako $\omega \in \Lambda^k F^*, \sigma \in \Lambda^l F^*$, tada je $\phi^*(\omega \wedge \sigma) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\sigma$
6) $\phi^* d\omega = d\phi^*\omega$.
7) $(\phi^* f) = f \circ \phi$.

Napomena 6.1.2.

Prve dve jednačine impliciraju da je ϕ^* potpuno određena time kako deluje na funkcije. Poslednja jednačina govori da je na funkciji f ϕ^* data "zamenom" funkcije ϕ u funkciju f. U lokalnim koordinatama na M i N, ϕ je dato sa $\phi(x^1, \dots, x^m) = (y^1, \dots, y^n)$

$$y^i = \phi^i(x^1, \dots, x^m), i = 1, \dots, n,$$

gde su ϕ^i glatke funkcije. Lokalni izraz za PULL-BACK od funkcije $f(y^1, \dots, y^n)$ služi da zameni ϕ^i sa y^i u izraz za f, da bi se dobila funkcija od x. PULL-BACK na diferencijalnim formama je definisan za bilo koje glatko preslikavanje, ne samo za difeomorfizme. Ovo je velika prednost kalkulusa diferencijalnih formi.

Definicija 6.1.3.

Neka je $\alpha = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ n - forma na otvorenom skupu $M \subset \mathbb{R}^n$. Definiše se:

$$\int_M \alpha = \int_M f(x) dx.$$

(Smene promenljivih) *Ako je ϕ difeomorfizam iz $A \subset \mathbb{R}^n$ u $\phi(A) \subset \mathbb{R}^n$. Tada je:*

$$\int_{\phi(A)} f(x) dx = \int_A f(\phi(x)) |det\, D\phi(x)| dx,$$

gde je $D\phi$ Jakobijan od ϕ.

[26] *Teorema je dokazana u [17].*

Definicija 6.1.4.
Skup $\Delta^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sum_{i=0}^{n+1} x^i = 1, x \geq 0\right\}$ *se naziva simpleks. Za* $n = 0$ *po konvenciji se uzima da je* $\Delta^0 = \{0\}$.

Primer 6.1.5.
Jednodimenzioni simpleks homeomorfan je sa zatvorenim intervalom. Dvodimenzioni simpleks je homeomorfan sa zatvorenim, popunjenim trouglom, trodimenzioni simpleks je homeomorfan sa zatvorenim, popunjenim tetraedrom.

Napomena 6.1.6.
Simpleks se takođe može definisati kao podskup od $\mathbb{R}^n$. *Prednost posmatranja simpleksa takođe kao podskupa od* $\mathbb{R}^{n+1}$ *je taj što ima više simetrije u koordinatama.*

Definicija 6.1.7.
Neka je M n*-dimenziona mnogostrukost. Singularni* p*-simpleks* σ *je preslikavanje* $\sigma: \Delta^p \to M$ *koje se proširuje na gladak difeomorfizam iz okoline od* $\Delta^p \subset \mathbb{R}^n$ *u* M. *0-simpleks je preslikavanje iz tačke* $\{0\}$ *u tačku iz* M.

Primer 6.1.8.
Smena promenljivih na početku ovog odeljka se može preformulisati kao:

$$\int_{\phi(A)} \omega = \int_A \phi^* \omega dx,$$

zbog n-forme ω, $\phi^*(\omega)(x) = \det\big(D\phi(x)\big)\,\omega\big(\phi(x)\big)$.

Definicija 6.1.9.
Neka je α p*-forma na* M *i* σ p*-simpleks. Integracija* p*-forme na* p*-simpleksu je data sa:*

$$\int_\sigma \alpha = \int_{\Delta^p} \sigma^* \alpha.$$

6.2. Lanci i granice

Definicija 6.2.1.
U M p*-lanac je konačna linearna kombinacija* $c = \sum_i c_i \sigma_i$, *gde su* σ_i p*-simpleksi, a* c_i *realni brojevi.*

Definicija 6.2.2.
Integral p*-forme* α

$$\int_\sigma \alpha = \int_{\Delta^p} \sigma^* \alpha$$

se može produžiti od simpleksa do lanca linearnošću:

$$\int_c \alpha = \int_{\sum_i c_i \sigma_i} \alpha = \sum_i c_i \int_{\sigma_i} \alpha.$$

Definicija 6.2.3.
Za $i = 0, \dots, p+1$ *definišu se preslikavanja* $k_i^p: \Delta^p \to \Delta^{p+1}$ *sa*

$$k_i^p(x) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^p), i \geq 1.$$

Skupovi $k_i^p(\Delta^p)$ se nazivaju strane (faces) simpleksa Δ^{p+1}.

Definicija 6.2.4.

Neka je M mnogostrukost i σ p-simpleks, definiše se da i-ta strana od σ da bude $(p-1)$-simpleks $\sigma^i = \sigma \circ k_i^{p-1}$. Granica od σ je definisana kao $(p-1)$-lanac $\delta\sigma = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sigma^i$. Granično preslikavanje (boundary map) se može linearno produžiti na sve p-lance na sledeći način:

$$\delta\left(\sum_j a_j \sigma_j\right) = \sum_{i=0}^{p} \sum_j a_j (-1)^i \sigma_i^j.$$

Lema 6.2.5.[27]

$\delta \circ \delta(C) = 0$ za sve lance c.

6.3. Teorema Stoksa za lance

Sledeća teorema je generalizacija fudamentalne teoreme kalkulusa, koja kaže da važi $\int_{\delta\sigma} f = \int_\sigma Df$ za funkciju na jednodimenzionoj mnogostrukosti. Takođe, generalizuje teoremu Grina u ravni i teoreme Stoksa i Gausa u trodimenzionalnom prostoru.

Teorema 6.3.1. (Teorema Stoksa za lance)

Neka je c p-lanac na mnogostrukosti M i neka je α $(p-1)$-forma na okolini od c u M. Tada je:

$$\int_c d\alpha = \int_{\delta c} \alpha.$$

Dokaz

Zbog linearnosti, dovoljno je da se posmatra slučaj gde se p-lanac sastoji od jednog p-simpleksa. Tvrđenje $\int_c d\alpha = \int_{\delta c} \alpha$ je po definiciji integrala ekvivalentan sa

$$\int_{\Delta^p} d(\sigma^* \alpha) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} (\sigma^i)^* \alpha. \tag{6.1}$$

Može se pretpostaviti da je $p \geq 2$, jer je za $p = 1$

$$\int_0^1 d\alpha(\sigma(t))(D\sigma(t))dt = \alpha(\sigma(1)) - \alpha(\sigma(0))$$

fudamentalna teorema kalkulusa.

Posmatraju se $x^1, \dots, x^{p-1}$ koji su koordinate od Δ^{p-1} zbog $x^0 = 1 - \sum_{i=1}^{p+1} x^i$. U ovim koordinatama preslikavanja $k_i^{p-1}: \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ su data sa:

[27] *Dokaz date teoreme se može pogledati u [16].*

$$k_0^{p-1}(x^1,\dots,x^{p-1}) = \left(1-\sum_{i=1}^{p-1} x^k, x^1,\dots,x^{p-1}\right), i = 0$$

$$k_i^{p-1}(x^1,\dots,x^{p-1}) = \left(x^1,\dots,x^{i-1},0,x^i,\dots,x^{p-1}\right), i \neq 0$$

Jedinstveno se može napisati $(p-1)$-forma $\beta = \sigma^*\alpha$, koja je definisana u okolini od Δ^p, u obliku $\beta = \sum_{j=1}^{p} \beta_j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dx^p$, gde dx^j znači da se ovaj faktor ne nalazi u odgovarajućem sabirku. Zbog linearnosti može se pretpostaviti da samo jedan β_j nije jednak nuli, tako da je $\beta = \beta_j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dx^p$.

Leva strana jednačine (6.1) je stoga

$$(-1)^{j-1} \int_{\Delta^p} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p.$$

Neka su $y^1,\dots,y^{p-1}$ koordinate u okolini Δ^{p-1}. *PULL-BACK*-ovi od β za granična preslikavanja k_i^{p-1} su dati sa :

$$\left(k_0^{p-1}\right)^* \beta(y) = \beta_j\left(1-\sum_{k=1}^{p-1} y^k, y^1,\dots,y^{p-1}\right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{p-1},$$

$$\left(k_i^{p-1}\right)^* \beta(y) = 0, i \neq j$$

$$\left(k_i^{p-1}\right)^* \beta(y) = \beta_j\left(y^1,\dots,y^{j-1},0,y^j,\dots,y^{p-1}\right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{p-1}, i = j.$$

Stoga treba dokazati da važi:

$$\int_{\Delta^p} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^j}(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p =$$

$$= (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{p-1}} \left(\beta_j\left(1-\sum_k y^k, y^1,\dots,y^{p-1}\right) - \beta_j\left(y^1,\dots,y^{j-1},0,y^{j+1},\dots,y^{p-1}\right)\right) dy^1 \dots dy^{p-1}.$$

Leva strana

$$\int_{\Delta^{p-1}} \left(\int_0^{1-\sum_{k\neq j} x^k} \frac{\partial \beta_j}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \dots d\hat{x}^j \dots dx^p$$

koja je posle računanja unutrašnjeg integrala jednaka

$$\int_{\Delta^{p-1}} \beta_j\left(x^1,\dots,x^{j-1},1-\sum_{k\neq j} x^k, x^{j+1},\dots,x^p\right) dx^1 \dots d\hat{x}^j \dots dx^p -$$

$$- \int_{\Delta^{p-1}} \beta_j\left(x^1,\dots,x^{j-1},0,x^{j+1},\dots,x^p\right) dx^1 \dots d\hat{x}^j \dots dx^p.$$

U datom izrazu u prvom integralu će biti izvršena smena promenljive

$$\left(x^1, \dots, \hat{x}^j, \dots, x^p\right) \longmapsto (y^1, \dots, y^{p-1}) = \left(x^2, \dots, x^{j-1}, 1 - \sum_{k \neq j} x^k, x^{j+1}, \dots, x^p\right), j \neq 2$$

$$\left(x^1, \dots, \hat{x}^j, \dots, x^p\right) \longmapsto (y^1, \dots, y^{p-1}) = \left(1 - \sum_{k \neq 2} x^k, x^3, \dots, x^p\right), j \neq 2$$

koja ima Jakobijevu determinantu $(-1)^{j-1}$, a u drugom integralu će biti izvršena smena promenljive

$$\left(x^1, \dots, \hat{x}^j, \dots, x^p\right) \longmapsto (y^1, \dots, y^{p-1}) = \left(x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^p\right)$$

čija je Jakobijeva determinanta jednaka 1.

Dobija se

$$\int_{\Delta^{p-1}} (-1)^{j-1} \beta_j \left(1 - \sum_{k=1}^{p-1} y^k, y^1, \dots, y^{p-1}\right) dy^1 \dots dy^{p-1} -$$

$$- \int_{\Delta^{p-1}} \beta_j\left(y^1, \dots, y^{j-1}, 0, y^{j+1}, \dots, y^{p-1}\right) dy^1 \dots dy^{p-1}$$

što predstavlja desnu stranu jednakosti koju je i trebalo dokazati. ■

6.4. Stoksova teorema za orijentisane mnogostrukosti

Definicija 6.4.1.
M, n-dimenziona mnogostrukost je orijentabilna, ako postoji n-forma na M koja nigde nije jednaka nuli.

Napomena 6.4.2.
Sa $\Phi_{ij}: x \longmapsto y = \Phi_{ij}(x)$ su označene transformacije koordinata iz dve karte (U_i, Φ_i) i (V_j, Φ_j) koje imaju neprazan presek. PULL-BACK od n-forme $\omega = dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$ je dat sa

$$\Phi_{ij}^* dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = det\left(D\Phi_{ij}\right) \omega.$$

Mnogostrukost je orijentabilna akko postoji atlas $\{U_i, \Phi_i\}$ od M za koji sve promene koordinata Φ_{ij} zadovoljavaju $det\left(D\Phi_{ij}\right) > 0$.

Definicija 6.4.3.
Podskup D od M je regularan domen ako za sve tačke $x \in \delta D \subset M$ postoji karta (U, Φ) sa $x \in U$ takva da $\Phi(U \cap D) = \Phi(U) \cap H^n$, gde je $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 > 0\}$ poluprostor u $\mathbb{R}^n$.

Napomena 6.4.4.
Regularni domen D je n-dimenzionalna mnogostrukost sa granicom unutar mnogostrukosti M.

Definicija 6.4.5.
Kompaktni nosač ima n-forma ω, ako je zatvorenje skupa kompaktno, gde je ω različito od nule.

Definicija 6.4.6.
Neka je ω n-forma sa kompaktnim nosačem, i neka je D regularni domen u orijentisanoj mnogostrukosti M. Definiše se $U_0 = M \setminus (supp(\omega) \cap D)$. Neka je kompaktni skup $supp(\omega) \cap D$ prepokriven sa konačno mnogo pokrivača $\{U_i\}_{i=1}^{k}$. Neka postoje simpleksi σ_i takvi da $U_i \subset \sigma_i(\Delta^n)$ ili $\sigma(\Delta^n) \subset int(D)$ ili $U_i = \sigma(V \cap \Delta^n)$, gde je $V \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i takav da je $\delta\Delta^n \cap V$ otvoren podskup od strane koja je preslikana pomoću σ_i u $U \cap \delta(D)$. Neka je $\{g_i\}_{i=0}^{n}$ particija jedinice koja odgovara pokrivaču $\{U_i\}_{i=0}^{n}$.

Definiše se

$$\int_D \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_i} g_i \omega.$$

Lema 6.4.7.
Integral $\int_D \omega$ ne zavisi od izabranog pokrivača niti od izabrane particije jedinice.

Dokaz
Neka je $\{V_i\}_{i=0}^{l}$ neki drugi pokrivač i $h_0, \dots, h_l$ neka druga particija jedinice i sa τ_i će biti označeni odgovarajući simpleksi. Važi da je $\sum_{j=1}^{l} h_j = 1$ na $supp(\omega) \cap D$ zbog $h_0 = 0$ na $supp(\omega) \cap D$. Dobija se

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\sigma_i} g_i \omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{\sigma_i} \sum_{j=1}^{l} h_j \, g_i \omega = \sum_{i,j} \int_{\sigma_i} h_j g_i \omega.$$

Pošto je $\sigma_i^{-1} \circ \tau_j$ difeomorfizam koji čuva orijentaciju na otvorenom, moguće praznom skupu, na kom je definisan, i pošto je $supp(h_j g_i \omega) \cap \sigma_i \Delta^{\mathrm{n}} = supp(h_j g_i \omega) \cap \tau_j \Delta^{\mathrm{n}}$, sledi da je:

$$\int_{\sigma_i} (h_j g_i \omega) = \int_{\Delta^{\mathrm{n}}} detD(\sigma_i) h_j g_i \omega(\sigma_i) = \int_{\Delta^{\mathrm{n}}} detD(\sigma_i) detD(\sigma_i{}^{-1}\tau_j) h_j g_i \omega(\tau_j) =$$

$$\int_{\Delta^{\mathrm{n}}} detD(\tau_j) \left(h_j g_i \omega(\tau_j)\right) = \int_{\tau_j} (h_j g_i \omega) \,. \blacksquare$$

Teorema 6.4.8. (Stoksova teorema za orijentisane mnogostrukosti)
Neka je D regularan domen u orijentisanoj n-dimenzionoj mnogostrukosti M i neka je ω $(n-1)$-forma sa kompaktnim nosačem. Tada je

$$\int_{\delta D} \omega = \int_D d\omega.$$

Dokaz
Neka su $g_1, \dots, g_k$ i $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ izabrani kao u definiciji integraljenja. Pošto je $\sum_{i=1}^{k} g_i = 1$ na okolini U od $supp(\omega) \cap D$, važi da je $d\left(\sum_{i=1}^{k} g_i\right) = 0$ na U i

$$\sum_{i=1}^{k} d(g_i \omega) = \sum_{i=1}^{k} d(g_i)\, \omega + \sum_{i=1}^{k} g_i \, d\omega = d\omega.$$

Ako je σ_i n-simpleks koji se preslikava u unutrašnjost od D, tada

$$\int_{\delta\sigma_i} g_i\omega = 0 = \int_{\delta D} g_i\omega,$$

jer $supp(g_i)\omega \subset intD$. Neka je sada, σ_i n-simpleks čija se slika preseca sa granicom od D. U ovom slučaju je $g_i\omega$ jednak nuli na granici od $\sigma_i(\Delta^{\mathrm{n}})$ osim ,možda, na n-toj strani σ_i^n. Sada je σ_i^n regularan $(n-1)$-simpleks u δD koji očuvava orijentaciju ako je n paran, menja orijentaciju ako je n neparan.

Sledi da je tada

$$\int_{\delta\sigma_i} g_i\omega = (-1)^n \int_{\sigma_i^n} g_i\omega = (-1)^n(-1)^n \int_{\delta D} g_i\omega = \int_{\delta D} g_i\omega.$$

Koristeći Stoksovu teoremu za lance, dobija se

$$\int_D d\omega = \sum_i \int_D d(g_i\omega) = \sum_i \int_{\sigma_i} d(g_i\omega) = \sum_i \int_{\delta\sigma_i} g_i\omega = \sum_i \int_{\delta D} g_i\omega = \int_{\delta D} \omega\,. \blacksquare$$

6.5. Operacija Hodžova zvezda (*Hodge star operation*)

U nastavku će se za

$$\alpha = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_q} \alpha_{i_1,\dots,i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}$$

koristiti kraća notacija $\alpha = \sum_{\mathrm{I}} \alpha_{\mathrm{I}} e^{\mathrm{I}}$, gde I prolazi kroz sve skupove indeksa $\{i_1, \dots, i_q\}$ sa $i_1 < i_2 < \cdots < i_q$.

Definicija 6.5.1.
Neka su dati $\alpha = \sum_I \alpha_I e^I, \beta = \sum_J \beta_J e^J \in \Lambda^q(E)$ gde je $\{e^i\}$ ortogonalna baza s obzirom na metrički tenzor $g \in T_2^0(E)$. Neka je $g_I = \prod_{i\in I} g(e_i, e_i) \in \{-1,1\}$. Definiše se takođe $g(\alpha, \beta) = \sum_I g_I \alpha_I \beta_I$.

Propozicija 6.5.2.
Metrički tenzor na E indukuje metrički tenzor na $\Lambda^q(E)$ pomoću $g(\alpha, \beta) = \sum_I g_I \alpha_I \beta_I$.

Dokaz
g je simetrični tenzor u $T_2^0(\Lambda^q(E))$. Nedegenerisanost sledi iz nedegenerisanosti tenzora g na E: neka je $g(\alpha, \beta) = 0$ za sve β. Tada $g(\alpha, dx^{\mathrm{I}}) = g_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ za sve I, tako da je $\alpha_{\mathrm{I}} = 0$ za sve I, pa je $\alpha = 0$. $\blacksquare$

Definicija 6.5.3.
Neka je g metrički tenzor na E i neka je h metrički tenzor na F. Formira se metrički tenzor gh na $\Lambda^q(E, F)$ na sledeći način: ako je $f_1, \dots, f_l$ ortogonalna baza u F, može se pisati $\alpha = \sum_i \alpha^i f^i$ i $\beta = \sum_j \beta^j f^j$ i $gh(\alpha, \beta) = \sum_{I,i} h_i g_I \alpha_I^i \beta_I^i$, gde su $h_i = h(f_i, f_i) \in \{-1,1\}$.

Ova definicija je nezavisna od baze odabrane u E i baze odabrane u F.

Propozicija 6.5.4. (Postojanje Hodžovog operatora)

Neka je E konačnodimenzioni vektorski prostor dimenzije n. Neka je g metrika na E i ω zapreminski element na E s obzirom na E. Postoji jedinstveni izomorfizam

$$*: \bigwedge^{q}(E) \to \bigwedge^{n-q}(E)$$

takav da važi $\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta)_\omega$, za sve $\alpha, \beta \in \wedge^q(E)$.

Dokaz

Za $\gamma \in \wedge^{n-q}(E)$ definiše se linearno preslikavanje $\Phi_\gamma(\alpha): \wedge^q(E) \to \mathbb{R}$

$$\Phi_\gamma(\alpha)_\omega = \alpha \wedge \gamma.$$

Ovo preslikavanje je injektivno. Komparacijom dimenzija dobija se da je izomorfizam. Stoga za sve $\beta \in \wedge^q(E)$, postoji jedinstveno $\gamma \in \wedge^{n-q}(E)$ takvo da je $\Phi_\gamma(\alpha) = g(\alpha, \beta)$. Definiše se da je $*\beta$ dato γ. Jedinstvenost kao i postojanje $*$ se dokazuje koristeći koordinate. Neka je dato $e^{\mathrm{I}} = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} \in \wedge^q(E)$. Sa $c_i = g(e_i, e_i)$ se dobija

$$* e^{\mathrm{I}} = \left(c_{i_1}, \dots, c_{i_q}\right)(-1)^{\sigma(\mathrm{I},\mathrm{I}')} e^{\mathrm{I}'}$$

gde je $\mathrm{I} \cup \mathrm{I}' = \{1, \dots, n\}$ i $\sigma(\mathrm{I}, \mathrm{I}')$ je permutacija koja preslikava $\mathrm{I} \cup \mathrm{I}'$ u $\{1, \dots, n\}$ sa $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_q\}$, $i_1 < \dots < i_q$ i $\mathrm{I}' = \{i'_1, \dots, i'_q\}$. ■

Propozicija 6.5.5. (Osobine operatora Hodžova zvezda)

1) Za $\alpha \in \wedge^q(E)$ važi $** \alpha = (-1)^g (-1)^{q(n-q)} \alpha$

2) $g(\alpha, \beta) = (-1)^g g(\alpha^*, \beta^*)$

3) $* 1 = \omega$, $* \omega = (-1)^g$

Dokaz

1) Neka je $\alpha = e^{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}$.

Važi da je $* \alpha = C e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(q)}$ za neku konstantu C.

Pošto je

$$\alpha \wedge * \alpha = (-1)^q \left(C_{\sigma(q+1)} \dots C_{\sigma(n)}\right)\omega$$

$$* e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(q)} = C_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(q)} (-1)^\sigma e^{\sigma(q+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}.$$

Stoga je

$$** e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(q)} = (-1)^{q(n-q)} \left(C_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(q)}\right)\left((-1)^\sigma\right)^2 e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(q)} =$$
$$= (-1)^{q(n-q)} (-1)^g e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(q)}.$$

2) Koristeći tvrđenje pod 1) dobija se

$$g(* \alpha, * \beta)\omega = * \alpha \wedge ** \beta = (-1)^g (-1)^{q(n-q)} * \alpha \wedge \beta =$$
$$(-1)^g \beta \wedge * \alpha = (-1)^g g(\alpha, \beta)\omega.$$

3) Sledi iz definicije i tvrđenja pod 2).

Primer 6.5.6.

Neka je $M = \mathbb{R}^4$ i g Lorencov unutrašnji proizvod, definisan sa $g_{11} = -1$, $g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$ i $g_{ij} = g(e_i, e_j) = 0$ za $i \neq j$. Operator Hodžova zvezda iz $\wedge^1(\mathbb{R}^4)$ u $\wedge^3(\mathbb{R}^2)$ je involucija data sa

$$
\begin{aligned}
* e^1 &= -e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \\
* e^2 &= -e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 \\
* e^3 &= e^1 \wedge e^2 \wedge e^4 \\
* e^4 &= -e^1 \wedge e^2 \wedge e^3
\end{aligned}
$$

Zbog

$$
\begin{aligned}
e^1 \wedge (* e^1) &= -e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = g_{11}\omega \\
e^2 \wedge (* e^2) &= -e^2 \wedge e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 = g_{22}\omega \\
e^3 \wedge (* e^3) &= e^3 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^4 = g_{33}\omega \\
e^4 \wedge (* e^4) &= -e^4 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = g_{44}\omega
\end{aligned}
$$

6.6. Stoksova teorema za Rimanove mnogostrukosti[28]

Definicija 6.6.1.
Neka je (M, g) orijentisana Rimanova mnogostrukost sa zapreminskim elementom ω. Tačkasti Hodžov operator $*: \wedge^k(T_x, M) \to \wedge^{n-k}(T_x, M)$ definiše preslikavanje $\wedge^k(M) \to \wedge^{n-k}(M)$ koje se naziva operator Hodžova zvezda na $\wedge(M)$.

Definicija 6.6.2.
Neka je M orijentisana Rimanova mnogostrukost sa zapreminskim elementom ω. Za neprekidnu funkciju f na M sa kompaktnim nosačem definiše se

$$\int_M f := \int_M * f = \int_M f\omega$$

Neka je M Rimanova mnogostrukost. Metrika g definiše izomorfizam iz $T_x M$ u $T_x^* M$. Oznake za dati izomorfizam su

$$
\begin{aligned}
\flat &: T_x M \to T_x^* M, \\
\sharp &: T_x^* M \to T_x M,
\end{aligned}
$$

One potiču iz činjenice da u muzici $\flat$ povećava indeks, a $\sharp$ snižava indeks.

Definicija 6.6.3.
Divergencija $div(v)$ vektorskog polja v je funkcija $div(v) = * d * v^\flat$.

Teorema 6.6.4. (Stoksova teorema za Rimanove mnogostrukosti)
Neka je dato $v \in \Gamma(TM)$ sa kompaktnim nosačem i neka je D regularni domen u M i n spoljašnje normalno vektorsko polje na granici δD. Tada je

$$\int_D div(v) = \int_{\delta D} g(v, n).$$

Dokaz
Koristeći Stoksovu teoremu za orijentisane mnogostrukosti i definiciju integrala da važi

[28] *O Stoksovoj teoremi za lance, orijentisane mnogostrukosti i Rimanove mnogostrukosti se može detaljnije pogledati u [16].*

$$\int_D div(v) = \int_D * d * v^\flat = \int_D d * v^\flat = \int_{\delta D} * v^\flat .$$

Na ovaj način se tvrđenje svodi na identitet

$$\int_{\delta D} * v^\flat = \int_{\delta D} g(v, n).$$

Bira se u proizvoljnoj tački u δD karta takva da je $n(x) = e_1$ spoljašnji jedinični normalni vektor. Neka je $e_1, \ldots, e_n$ ortogonalna baza i neka je $e^1, \ldots, e^n$ dualna baza. Koristeći odgovarajuću particiju jedinice, može se pretpostaviti da v ima svoj nosač u karti U koja je sadržana u simpleksu σ, tako da je σ_1 preslikan u δD. Sa $v^\flat = \sum_i v_i e^i$ gde je $v_i = g_{ii} v^i$, dobija se

$$* v^\flat = \sum_i v_{1,\ldots,\hat{\imath},\ldots,n} e^1 \wedge \ldots \wedge \hat{e}^i \wedge \ldots \wedge e^n = \sum_i g_{ii} (-1)^i v_i e^1 \wedge \ldots \wedge \hat{e}^i \wedge \ldots \wedge e^n$$

tako da je $\int_{\delta D} * v^\flat = \int_{\sigma_1} \det(D\sigma_1)\, g_{ii} v_{2,\ldots,n}$.

Pošto je $g(v, n) = v_1$, dobija se po definiciji integraljenja na δD takođe

$$\int_{\sigma_1} \det(D\sigma_1)\, v_1 = \int_{\sigma_1} \det(D\sigma_1)\, g_{ii} v_{2,\ldots,n} . \blacksquare$$

Primer 6.6.5.
Neka je α 1-forma data sa

$$\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 = ((x^1)^2 + 7x^2) dx^1 + (-x^1 + x^2 \sin((x^2)^5)) dx^2$$

na mnogostrukosti $M = \mathbb{R}^2$. Izračunati integral $\int_c \alpha$ nad 1-lancem $c = 2\sigma_1 + 3\sigma_2 - \sigma_3$, gde su simpleksi σ_i, $i = 1,2,3$ dati sa:

$$\sigma_1 \colon \Delta^1 = [0,1] \to M, \sigma_1(t) = (t, 0)$$
$$\sigma_2 \colon \Delta^1 = [0,1] \to M, \sigma_2(t) = (1 - t, t)$$
$$\sigma_3 \colon \Delta^1 = [0,1] \to M, \sigma_3(t) = (0, 1 - t)$$

Rešenje
Integraljenje 1-forme na 1-simpleksu $\sigma \colon \Delta \to M$ je definisano sa $\int_\sigma \alpha = \int_\Delta \sigma^* \alpha$, koji je integral 1-forme nad podskupom od $\mathbb{R}$, što je najčešće integraljenje nad $\Delta = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Neka je $\sigma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, tada je *PULL-BACK* $(\sigma^* \alpha)(t)(u)$ definisan sa $\alpha\big(\sigma(t)\big)(D\sigma(t)u)$ za bilo koje $u \in T_t\Delta$. $A(t) = D\sigma(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dat je sa 1×2 matricom $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$. Da bi se dobio *PULL-BACK* od $\alpha(x) = \alpha_1(x) dx^1 + \alpha_2(x) dx^2$ i $\sigma^* \alpha(t) = \beta(t) dt$ u koordinatama, koristi se $dx^1(e_2) = 0, dx^2(e_1) = 0, dx^1(e_1) = 1, dx^2(e_2) = 1$.

Dobija se sledeće:

$$\beta(t)(u) = \alpha\big(\sigma(t)\big)(A(t)u) = \alpha_1\big(\sigma(t)\big) dx^1(A(t)u) + \alpha_2\big(\sigma(t)\big) dx^2(A(t)u) =$$
$$= \alpha_1\big(\sigma(t)\big) dx^1((A(t)u)^1 e_1 + (A(t)u)^2 e_2) + \alpha_2\big(\sigma(t)\big) dx^2((A(t)u)^1 e_1 + (A(t)u)^2 e_2) =$$
$$= \alpha_1\big(\sigma(t)\big)((A(t)u)^1) + \alpha_2\big(\sigma(t)\big)((A(t)u)^2) =$$
$$= \big[\alpha_1\big(\sigma(t)\big)\dot{x}(t) + \alpha_2\big(\sigma(t)\big)\dot{y}(t)\big] u.$$

Stoga se integral

$$\int_\sigma \alpha = \int_0^1 \alpha_1(\sigma(t))\dot{x}(t) + \alpha_2(\sigma(t))\dot{y}(t)dt,$$

svodi na običan krivolinijski integral nad krivom $\sigma: \Delta = [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Dobija se

$$D\sigma_1(t) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, D\sigma_2(t) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, D\sigma_3(t) = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\int_{\sigma_1} \alpha = \int_0^1 \left(\alpha_1(\sigma(t)) \cdot 1 + \alpha_2(\sigma(t)) \cdot 0\right)dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\sigma_2} \alpha = \int_0^1 \left(\alpha_1(\sigma(t)) \cdot (-1) + \alpha_2(\sigma(t)) \cdot 1\right)dt =$$

$$= -\int_0^1 ((-t)^2 + 7t^2)dt + \int_0^1 \left((-t) + t\sin(t^5)\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{7}{3} - \frac{1}{2} + \int_0^1 t\sin(t^5)\,dt =$$

$$= -\frac{19}{6} + \int_0^1 t\sin(t^5)\,dt$$

$$\int_{\sigma_3} \alpha = \int_0^1 -\alpha_2(\sigma(t))dt = -\int_0^1 (1-t)\sin((1-t)^5)\,dt.$$

Integral $\int_0^1 t\sin(t^5)\,dt$ nema svoju primitivnu funkciju u skupu elementarnih funkcija.

Dati integral se može zapisati u obliku $\frac{1}{7} - \frac{1}{102} - \frac{1}{3240} - \frac{1}{186480}$ ... razvijanjem funkcije $\sin(t^4)$ u Tejlorov red i integraleći svaki član reda posebno.

$$\int_c \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3\left[-\frac{19}{6} + \int_0^1 t\sin(t^5)\,dt\right] - \int_0^1 (1-t)\sin((1-t)^5)\,dt =$$

$$= -\frac{53}{6} + 4\int_0^1 t\sin(t^5)\,dt$$

Definicija 6.6.6.

Zapreminski integral funkcionog polja f nad oblašću G u $\mathbb{R}^3$ je dat sa

$$\int_G f dV = \int_\sigma * f,$$

gde je σ simpleks povezan sa oblašću G. Desna strana jednakosti je integral 3*-forme nad trodimenzionim simpleksom.*

Primer 6.6.7.
Neka je σ 3-simpleks u $\mathbb{R}^3$ i α 2-forma u $\mathbb{R}^3$. Primenjuje se teorema Stoksa za dokaz teoreme divergencije (Gausove teoreme), $\int_{\delta\sigma} v = \int_{\sigma} div(v)$ (oblast G će se indentifikovati sa trodimenzionim simpleksom σ).

$$\int_G div(v)dV = \int_\sigma * \, div(v) = \int_\sigma ** \, d * v^\flat = \int_\sigma d * v^\flat = \int_{\delta\sigma} * \, v^\flat = \int_{\delta G} v dO\,.$$

6.7. Izvođenje Ajnštajnovih jednačina iz varijacionog principa[29]

U nastavku će biti dato izvođenje jednačina gravitacionog polja (Ajnštajnovih jednačina) uz korišćenje Hamiltonovog principa. Dakle, treba naći vezu između metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$, s jedne strane, i raspodele materije (mase), s druge strane. Za to je neophodno, najpre odrediti dejstvo S_g gravitacionog polja i dejstvo S_m koje potiče od materije. Tražene jednačine se tada dobijaju iz principa stacionarnosti dejstva putem variranja sume dejstava S_g i S_m, kao

$$\delta S = \delta\left(S_g + S_m\right) = \delta S_g + \delta S_m. \tag{6.2}$$

Simbol δ ovde označava varijaciju. Dejstvo S_g za gravitaciono polje treba da bude integral po 4-dimenzionom prostoru i ono je invarijantno u odnosu na ma kakve transformacije koordinata. Pošto je gravitaciono polje određeno metričkim tenzorom $g_{\mu\nu}$ to u varijacionom principu za gravitaciono polje komponente $g_{\mu\nu}$ se tretiraju kao nezavisno promenljive i po njima se varira.

Stoga se razmotra, najpre, dejstvo S_g gravitacionog polja. Uvodi se funkcija $\mathcal{L}_g$ –gustina lagranžijana gravitacionog polja. Dejstvo S_g ima oblik

$$S_g = \int \mathcal{L}_g d\mathcal{V}^* = \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g}\, d^4x \tag{6.3}$$

pri čemu se integracija vrši po nekoj oblasti 3-dimenzionog prostora x^1, x^2, x^3 i po vremenskoj koordinati x^0 između dva fiksirana trenutka. Veličina g u gornjoj jednačini predstavlja fundamentalnu determinantu, dok je

$$d\mathcal{V}^* = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g} d^4x$$

element zapremine 4-dimenzionog prostor-vremena.

Kao što je poznato, gustina lagranžijana odgovarajućeg fizičkog polja zavisi od potencijala polja $\left(g_{\mu\nu}\right)$ i njihovih izvoda. Pri izvođenju jednačina gravitacionog polja pretpostavlja se da te jednačine ne sadrže izvode metričkog tenzora (potencijala) $g_{\mu\nu}$ više od drugog reda. S obzirom da se jednačine dobijaju putem variranja dejstva, to za dobijanje tih jednačina, prirodno je zahtevati da podintegralni izraz u (6.3) (tj odgovarajući $\mathcal{L}_g$) treba da sadrži izvode od metrike $\left(g_{\mu\nu}\right)$ koji nisu viši od prvog reda. Drugim rečima, gustina

---

[29] *U [20] se može pogledati detaljnije o varijacionom principu.*

lagranžijana može zavisiti samo od $g_{\mu\nu}$ i $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \sim \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}}$. Međutim, iz samih veličina $g_{\mu\nu}$ i $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\delta}}$, nemoguće je sastaviti invarijantu, jer izborom sistema koordinata (iz lokalno-inercijalnog sistema koordinata) moguće je uvek udesiti da sve veličine $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ u datoj tački budu jednake nuli. Ipak, postoji skalar (invarijanta) R (R krivina 4-dimenzionalnog prostora), koji osim tenzora $g_{\mu\nu}$ i njegovih prvih izvoda, sadrži još i druge izvode od $g_{\mu\nu}$, koji ulaze samo linearno. Zahvaljujući toj linearnosti, kao što će biti pokazano u nastavku, integral $\int R\sqrt{-g}d^4x$ je moguće transformisati tako da

$$\delta \int R\sqrt{-g}d^4x = \delta \int Q\sqrt{-g}d^4x, \tag{6.4}$$

gde veličina Q sadrži samo tenzor $g_{\mu\nu}$ i njegove prve izvode. Izraz na levoj strani jednačine (6.4) je skalar, pa je prema tome i izraz na desnoj strani takođe skalar (dok sam integral $\int Q\sqrt{-g}d^4x$, naravno, nije skalar, ali njegova varijacija jeste).

Prema tome, zbog izbora gustine lagranžijana $\mathcal{L}_g$ gravitacionog polja, koji je jednak R (pri Λ = 0, Λ -kosmološka konstanata) ili $R - 2\Lambda$ (pri $\Lambda \neq 0$), to prilikom izvođenja jednačina gravitacionog polja, jasno je da će one biti diferencijalne jednačine koje sadrže izvode od $g_{\mu\nu}$ ne više od drugog reda.

Uvodi se dejstvo S_g na sledeći način:

$$\beta S_g = \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x \tag{6.5}$$

gde je $\beta = \frac{2k}{c} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}$, konstanta koja obezbeđuje dimenziju dejstava. Tada je varijacija jednačine (6.5) jednaka

$$\beta S_g = \delta \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x = \delta \int \left(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - 2\Lambda\right)\sqrt{-g}d^4x =$$

$$= \int \left[R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\left(\sqrt{-g}\right) - 2\Lambda\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right]d^4x + \int g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}d^4x.$$

Kako je :

$$\left.\begin{array}{c} \delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ \frac{\delta g}{g} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},\ \delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{array}\right\} \tag{6.6}$$

(pošto je $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ = 4, tada je $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$), to je

$$\beta\delta S_g = \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x. \tag{6.7}$$

Koristeći Gausovu teoremu, poslednji član u jednačini (6.7) može se transformisati u integral po hiperpovršini koja obuhvata 4-zapreminu po kojoj se vrši integracija u (6.7). U tom smislu, uvode se pomoćne veličine w^{ν}.

$$w^{\nu} = -g^{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \tag{6.8}$$

Očigledno je

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}w^\nu\right) = \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\nu} + w^\nu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\nu}}_{\Gamma^\beta_{\nu\beta}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right) + \left(-g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha} + g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\right)\Gamma^\beta_{\nu\beta} =$$

$$= -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\delta\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\frac{\partial\Gamma^\sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \left(-g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right)\Gamma^\beta_{\nu\beta}.$$

Kako je kovarijantni izvod metričkog tenzora jednak nuli, tj. $g^{\mu\alpha}_{\ ;\nu} = 0$, i s obzirom na već dokazane formule, važi da je

$$\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} = -g^{\beta\alpha}\Gamma^\mu_{\nu\beta} - g^{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\nu\beta},$$
$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\nu\beta} - g^{\beta\mu}\Gamma^\nu_{\nu\beta}.$$

Uzimajući u obzir ove jednakosti može se dalje pisati:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}w^\nu\right) = \underbrace{g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\nu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha}}_{\alpha\leftrightarrow\nu,\beta\leftrightarrow\mu} + \underbrace{g^{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha}}_{\beta\leftrightarrow\nu} - \underbrace{g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\nu\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}_{\beta\leftrightarrow\mu} - \underbrace{g^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\nu\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}_{\beta\leftrightarrow\nu} -$$

$$-\underbrace{g^{\mu\alpha}\delta\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}}_{\alpha\leftrightarrow\nu} + g^{\mu\nu}\delta\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \underbrace{g^{\mu\alpha}\Gamma^\beta_{\nu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha}}_{\alpha\leftrightarrow\nu,\beta\leftrightarrow\alpha} + g^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\nu\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} =$$

$$= g^{\mu\nu}\left(-\delta\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \delta\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\delta\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\beta_{\nu\mu}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\right) =$$

$$= g^{\mu\nu}\delta\left(-\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu}\right) = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.$$

Dakle,

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}w^\nu\right), \tag{6.9}$$

odnosno

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}w^\nu\right)d^4x. \tag{6.10}$$

Na osnovu Gausove teoreme, integral $\int\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}w^\nu\right)d^4x$ može biti transformisan u integral od w^ν po hiperpovršini Σ koja sadrži posmatranu 4-dimenzionu zapreminu, tj.

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}w^\nu\right)d^4x = \oint_\Sigma w^\nu d\sigma_\nu. \tag{6.11}$$

Kako su na granici oblasti integracije, varijacije polja jednake nuli, tj. na njoj je $\delta g_{\mu\nu} = 0$, odnosno $\delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) = 0$ onda je i vektor w^ν, definisan jednačinom (6.8), takođe jednak nuli (na granici oblasti integracije), tj. $w^\nu = 0$. Prema tome, $\oint_\Sigma w^\nu d\sigma_\nu = 0$, odnosno

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{6.12}$$

Konačno, iz jednačine (6.7) sledi da je

$$\beta\delta S_g = \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = 0. \tag{6.13}$$

U nastavku se pokazuje da se integral $\int R\sqrt{-g}d^4x$ može transformisati u odgovarajući integral $\int Q\sqrt{-g}d^4x$, tako da važi jednačina (6.4), i traži se čemu je jednako Q.

U tom smislu se polazi od sledeće poznate jednakosti

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\left(-g^{\mu\nu}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + g^{\mu\nu}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\right) \tag{6.14}$$

S obzirom da važi

$$-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right), \tag{6.14a}$$

kao i

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right), \tag{6.14b}$$

Jednačina (6.14) postaje

$$\sqrt{-g}R = -\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) -$$
$$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta},$$

tj.

$$\sqrt{-g}R = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\sqrt{-g}\left(-g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right)\right] + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) -$$
$$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\right) \tag{6.15}$$

Pošto je

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \sqrt{-g}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \sqrt{-g}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}g^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}g^{\beta\mu}\right), \tag{6.15a}$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{-g}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta}g^{\mu\nu} - \sqrt{-g}\left(\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}g^{\beta\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\beta}g^{\beta\mu}\right), \tag{6.15b}$$

Jednačina (6.15) prelazi u

$$\sqrt{-g}R = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}f^{\nu}\right)}{\partial x^{\nu}} + \sqrt{-g}\left(\underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}}_{\alpha\leftrightarrow\beta} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}g^{\beta\nu}}_{\beta\leftrightarrow\mu} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}g^{\beta\mu}}_{\beta\leftrightarrow\nu}\right) -$$
$$-\sqrt{-g}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta}g^{\mu\nu} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}g^{\beta\nu}}_{\beta\leftrightarrow\mu} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\beta}g^{\beta\mu}}_{\beta\leftrightarrow\nu}\right) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\right).$$

Nakon naznačenih prenumerisanja nemih indeksa, određeni članovi se skrate i konačno se dobija

$$\sqrt{-g}R = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}f^{\nu}\right)}{\partial x^{\nu}} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\right). \tag{6.16}$$

Ovde je uvedena sledeća oznaka

$$f^{\nu} = -g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}. \tag{6.16a}$$

Ako se integralno skrati jednačina (6.16) po celom prostor-vremenu dobija se

$$\int \sqrt{-g}Rd^4x = \int \sqrt{-g}Qd^4x + \int \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}f^{\nu}\right)d^4x, \tag{6.17}$$

gde je

$$Q = g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\right). \tag{6.18}$$

Koristeći Gausovu teoremu, drugi integral na desnoj strani jednačine (6.17) može se transformisati u integral od f^{ν} po hiperpovršini koja sadrži razmatranu 4-dimenzionalnu zapreminu.

Prema tome,

$$\int \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}f^{\nu}\right)d^4x = \oint_{\Sigma} f^{\nu}d\sigma_{\nu}, \tag{6.19}$$

pa jednačina (6.17) postaje:

$$\int \sqrt{-g}Rd^4x = \int \sqrt{-g}Qd^4x + \oint_{\Sigma} f^{\nu}d\sigma_{\nu}.$$

Ako se potraži varijacija ovog izraza, može se pisati

$$\delta\int \sqrt{-g}Rd^4x = \delta\int \sqrt{-g}Qd^4x + \delta\oint_{\Sigma} f^{\nu}d\sigma_{\nu} = \delta\int \sqrt{-g}Qd^4x + \oint_{\Sigma}(\delta f^{\nu})d\sigma_{\nu}. \tag{6.20}$$

Kako je varijacija polja $(g_{\mu\nu})$ na granici oblasti integracije jednaka nuli, tj. $\delta g_{\mu\nu} = 0$, kao i $\delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) = 0$, onda je $\delta f^{\nu} = 0$ pa je takođe $\oint_{\Sigma}(\delta f^{\nu})d\sigma_{\nu} = 0$. Na taj način, jednačina (6.20) konačno postaje

$$\delta\int R\sqrt{-g}d^4x = \delta\int Q\sqrt{-g}d^4x. \tag{6.21}$$

Treba primetiti da je dejstvo S_g za gravitaciono polje definisano pomoću jednačine (6.5)

$$\beta S_g = \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x.$$

Neki autori dejstvo S_g definišu jednačinom

$$\beta S_g = \int (Q - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x$$

odnosno, uzimaju da je gustina lagranžijana $L = (Q - 2\Lambda)$. Naravno, pri tome treba imati u vidu da veličina Q definisana jednačinom (6.18), nije invarijanta. Treba primetiti da je

$$\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x \neq \int (Q - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x$$

tj. da su odgovarajući integrali različiti. Međutim i pored toga važi jednakost njihovih varijacija, tj.

$$\delta \int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g} d^4x = \delta \int (Q - 2\Lambda)\sqrt{-g} d^4x. \tag{6.22}$$

Razmatra se sada dejstvo S_m koje odgovara materiji. Pretpostavlja se da se stanje materije karakteriše gustinom lagranžijana $\mathcal{L}_m$. Takođe, pretpostavlja se da $\mathcal{L}_m$ ne sadrži izvode od $g_{\mu\nu}$ više od prvog reda. Uvodi se dejstvo S_m pomoću jednakosti

$$\frac{1}{c} S_m = \int \mathcal{L}_m dV = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x. \tag{6.23}$$

Integracija u ovoj jednačini se vrši po istoj 4-dimenzionoj zapremini kao i u (6.2).

U nastavku se traži varijacija dejstava materije. Ako se pođe od toga da je

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g^{\mu\nu}, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right),$$

očigledno je

$$\frac{1}{c}\delta S_m = \delta \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x = \int \delta \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x =$$

$$= \int \left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)} \delta\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\right] d^4x. \tag{6.24}$$

Drugi član u ovoj jednačini može se transformisati koristeći sledeći identitet:

$$\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)} \delta\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)} \delta g^{\mu\nu}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right\} \delta g^{\mu\nu}. \tag{6.25}$$

Zamenom (6.25) u (6.24), nalazi se δS_m u obliku:

$$\frac{1}{c}\delta S_m = \int \left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right\}\right] \delta g^{\mu\nu} d^4x +$$

$$+ \int \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)} \delta g^{\mu\nu}\right\} d^4x. \tag{6.26}$$

Poslednji integral u gornjoj jednačini, može se pomoću Gausove teoreme, transformisati u površinski integral, koji je, zbog uslova $\delta g^{\mu\nu} = 0$, na granici oblasti integracije jednak nuli.

Na taj način, za varijacije dejstava materije može se pisati

$$\delta S_m = \frac{c}{2} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \tag{6.27}$$

gde je

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}\right\}\right] \tag{6.28}$$

Konačno, sabiranjem jednačina (6.13) i (6.27), i izjednačavanjem δS sa nulom, dobija se:

$$\delta S = \frac{c}{2\kappa}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \tag{6.29}$$

Zbog toga što su varijacije $\delta g^{\mu\nu}$ proizvoljne, očigledno je da izraz u zagradi mora biti jednak nuli, pa sledi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{6.30}$$

što predstavlja Ajnštajnove jednačine gravitacionog polja.

Simetrični tenzor $T_{\mu\nu}$ koji, između ostalih, ulazi u ove jednačine i koji je definisan jednačinom (6.28), očigledno zadovoljava jednakost:

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0. \tag{6.31}$$

Stoga tenzor $T_{\mu\nu}$ može biti identifikovan kao tenzor energije-impulsa i zbog toga se on naziva tenzorom energije-impulsa materije. Ovaj tenzor je različit za razne fizičke sisteme što, naravno, zavisi od njihovih struktura i interakcija. Koliko je značajan ovaj tenzor govori i činjenica da je Ajnštajn u svome radu o opštoj teoriji relativnosti, iz 1916. godine, posvetio posebnu pažnju upravo tenzoru energije-impulsa $T_{\mu\nu}$.

ZAKLJUČAK

Cilj ovog master rada je da sagleda kroz prizmu matematike (konkretno diferencijalne geometrije) opštu teoriju relativnosti. U samom radu je izložen matematički aparat, koji je iskorišćen za izvođenje Ajnštajnovih jednačina, na kraju šestog poglavlja. U većini modernih knjiga i udžbenika iz OTR se matematički pojmovi, tvrđenja, dakle matematički aparat neophodan za razumevanje OTR,se ne objašnjava ništa detaljnije ni u onoj meri koja je neophodna za bolje razumevanje OTR. Izuzetno je teško uspostaviti harmoniju u izlaganju matematičke materije neophodne za funkcionisanje OTR, i same OTR, predstavljene sa stanovišta fizike. Dosta je teško teoriju OTR predstaviti da ne bude ni čista matematička a ni čisto teorija iz fizike. OTR je izuzetno zanimljiva oblast fizike, jer je donela revoluciju, kako u fizici, tako i u geometriji, gde je poljuljala klasično razmišljanje o euklidskom prostoru, za koji se više od dve hiljade godina smatralo da je jedina večita istina, da je to jedini model prostora koji postoji, ne samo na Zemlji, već i u čitavom svemiru. Ajnštajnove teorije (specijalna teorija relativnosti, opšta teorija relativnosti) su otvorile vrata za nastajanje novih teorija, koje su aktuelne u današnje vreme, kao što je teorija struna, teorija multiverzuma, koje možda i ne bi nastale da istorijski sled događaja nije doveo do nastanka OTR. STR je pokazala da prostor i vreme nisu nezavisni i apsolutni, već povezani delovi celine: prostor-vremena. U OTR je pokazano da prostor-vreme koje sadrži materiju nije statično i ravno, već dinamično i zakrivljeno, ne samo da dati prostor deluje na materiju, već i materija deluje na prostor (prema jednačini polja). Posledica rezultata OTR-a je da se euklidska geometrija, koja se smatrala neprikosnovenom dvadeset vekova, ne može primeniti na gravitaciono polje. OTR je specifično naučno polje gde je nejasna granica između matematike i fizike, one se prožimaju međusobno, tu se može videti simbioza ove dve nauke.

Autor se nada da je ovom master radu uspeo, bar u određenoj meri, da izvrši sintezu znanja iz diferencijalne geometrije, neophodnih za dalje proučavanje teorije relativnosti, koja je aktuelna i danas. Što se tiče određenih pojmova i tvrđenja koja u ovom radu, iz tehničkih razloga, nisu dostupna, autor upućuje zainteresovanog čitaoca na navedenu literaturu na kraju rada.

LITERATURA

[1] Бергман, П. Г.: Введение в теорию относительности, Государственное издательство иностранной литературы, Москва, 1947.

[2] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.: Риманова геометрия в целом, „Мир“, Москва, 1971.

[3] Зельманов ,А. Л., Агаков, В. Г.: Элементы общей теории относительности, „Наука“, Москва,1989.

[4] Коренев, Г. В.: Тензорное исчисление, МФТИ, Москва 2000.

[5] Ландау ,Л. Д. И Лифшиц, Е. М.: Теоретическая физика, „Наука“, Москва, 1988.

[6] Мак-Витти, Г. К.: Общая теория относительности и космология, издательство иностранной литературы, Москва, 1961.

[7] Постников, М. М.: Риманова геометрия, „Факториал“, Москва, 1998.

[8] Рашевский, П. К.: Риманова геометрия и тензорный анализ, „Наука“, Москва, 1967.

[9] Сokольников, И. С.: Тензорный анализ, теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред, „Наука“, Москва, 1971.

[10] Хокинг, С., Эллис, Дж.: Крупномасштабная структура пространства-времени, Издательство, „Мир“, Москва 1977.

[11] Aldrovandi,R., Pereira, J.G. : An Introduction to General Relativity, IFT, March-April/2004.

[12] Bertschinger, Edmund: Introduction to Tensor Calculus for General Relativity, Massachusetts Institute of Technology Department of Physics, 2000.

[13] Chern, S. S., Chen, W. H., Lam, K. S.: Lectures on differential geometry, 2000

[14] Gudmundsson, Sigmundur: An Introduction to Riemannian Geometry, Lund University, 2011.

[15] Heinbockel, J.H.: Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics Old Dominion University, 1996.

[16] Knill, Oliver: Introduction to Geometry and geometric analysis, Caltech University, 1995.

[17] Kunzinger, M.: Differential Geometry 1, Lecture notes, University of Vienna, 2008.

[18] Lugo, Gabriel: Differential Geometry in Physics, Department of Mathematical Sciences and Statistics,University of North Carolina at Wilmington, 1992., 1998., 2006.

[19] Macdonald, Alan: Elementary general relativity, Luther College, Decorah, IA USA, 2010.

[20] Pantić, M.: Uvod u Ajnštajnovu teoriju gravitacije, Novi Sad, 2005.

[21] Sharan, Pankaj: Spacetime geometry, Geometry and gravitation, Hindustan Book Agency, 2009.

[22] Waner, Stefan: Introduction to Differential Geometry & General Relativity, Departments of Mathematics and Physics, Hofstra University, 2005.

BIOGRAFIJA

Danijela Popović je rođena 30.10.1987. godine u Šapcu. Završila je Osnovnu školu „Janko Veselinović“ u Cerovcu, sa prosekom ocena 5,00 u svim razredima. Upisala je smer mašinski tehničar za kompjutersko konstruisanje u „Posavotamnavskoj srednjoj školi“, u Vladimircima. Završila je srednjoškolsko obrazovanje kao nosilac Vukove diplome i đak generacije „Posavotamnavske srednje škole“.

Na Prirodno-matematički fakultet, odsek za matematiku, smer profesor matematike, se upisala 2006.godine i diplomirala 11.09.2012. sa prosečnom ocenom 9,43. Nakon završenih osnovnih studija, upisala je master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, smer diplomirani matematičar-nastava matematike. U septembru 2011. godine je položila sve ispite na master studijama, i time stekla pravo za odbranu master rada.

Danijela Popović

Novi Sad, 2012

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumenatcija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Danijela Popović
AU

Mentor: dr Nevena Pušić
MN

Naslov rada: Primena diferencijalne geometrije u teoriji relativnosti
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2012
GO

Izdavač:
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6, 115, 20, 0, 10, 0, 0)
(broj poglavlja, broj strana, broj literarnih citata, broj tabela, broj slika, broj grafika, broj priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Diferencijalna geometrija i teorija relativnosti
ND

Predmetna odrednica / Ključne reči: fundamentalna teorema Rimanove geometrije, Ajnštajnov tenzor, kovarijantno diferenciranje, geodezijske linije, Ajnštajnove jednačine, zakrivljeni prostor, Riman-Kristofelov tenzor, prostor Minkovskog, tenzor
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VU

Izvod: U radu je predstavljen matematički aparat, koji je neophodan za izvođenje Ajnštajnovih jednačina iz varijacionog principa. Date su i teoreme na kojima se temelji Rimanova geometrija, koja je neophodna za izvođenje zaključaka u Opštoj teoriji relativnosti, kao i osnovni pojmovi iz Diferencijalne geometrije (tenzori, geodezijske linije, kovarijantno diferenciranje). Cilj rada je sagledavanje Ajnštajnovih jednačina sa stanovišta fizike i matematike.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Sanja Konjik, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Nevena Pušić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Milan Pantić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Danijela Popović
AU

Mentor: Nevena Pušić, Ph.D.
MN

Title: Application of differential geometry in the theory of relativity
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2012
PY

Publisher:
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6, 115, 20, 0, 10, 0, 0)
(chapters, pages, references, tables, pictures, charts, supplements)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Differential Geometry and the theory of relativity

SD

Subject / Key words: fundamental theorem of Riemanian geometry,Einstein's tensor, covariant differentiation, geodesic lines, Einstein's equations, curved space, Riemann-Christoffel tensor, Minkowski space, tensor

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This paper presents a mathematical apparatus, which is necessary for the performance of Einstein's equations from the variational principle. There are also a theorems on which the Riemann geometry is based on, which is necessary for drawing conclusions in the general theory of relativity and the basic concepts from differential geometry (tensors, geodesics, covariant differentiation). Aim of this thesis is to see Einstein's equations from the standpoint of physics and mathematics.

AB

Accepted by Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Sanja Konjik, Ph.D, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Nevena Pušić, Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Milan Pantić, Ph.D, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad