УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

Данијела Митровић

Туе–Морсова реч и неке њене примене

-Мастер рад-

Ментор:
др Бојан Башић

Нови Сад, 2016

Предговор

Комбинаторика на речима је млада област математике. Норвешки математичар Аксел Туе[1] сматра се зачетником те области са својим радовима [23] и [22], који су објављени 1906. и 1912. године. У њима се бавио карактеризацијом речи које не садрже квадрате и кубове, и Туе–Морсова реч је произашла као резултат његовог истраживања у тој области, где је она први пут експлицитно дефинисана. Међутим, Езхен Пруе[2] се њоме индиректно бавио 60-ак година раније, у свом раду [19] из 1851. године, изучавајући одређени проблем из теорије бројева. Трећи научник који је, изучавајући проблеме из диференцијалне геометрије, дочшао до спознаје о Туе–Морсовој речи јесте Марстон Морс[3] у раду [18] из 1921. године. Затим је 1929. године и шаховски велемајстор Макс Еве[4] у [11], решавајући проблем у шаху, открио исту реч. Интересантно је што су сви независно дошли до исте речи и у потпуно различитим областима. Реч је, очигледно, добила име по Туеу и Морсу, али се често у литератури у њеном имену помиње и Пруе, тј. назива се Пруе–Туе–Морсова реч. Појава да се Туе–Морсова реч јавља у различитим областима се наставила, те се она испоставила као природан одговор на потпуно међусобно неповезана питања у областима теорије аутомата, реалне анализе, теорије група, теорије полугрупа, физике, фрактала, музике, економије, итд. Из свега управо реченог, видимо да је ова реч свеприсутна и крајње интересантна, не само у математици, него и шире, што је аутору и била мотивација за овај рад. Као што и сам наслов каже, бавићемо се већ поменутом речи, показаћемо неке њене лепе особине и применити је за решавање одређених проблема у теорији бројева, али и у областима ван математике.

Прва глава овог рада је уводног карактера и посвећена основним дефиницијама из области комбинаторике на речима које ће нам бити

[1]Axel Thue (1863–1922), норвешки математичар, познат по својим радовима из области диофантових апроксимација и комбинаторике.

[2]Eugène Prouhet (1817–1867), француски математичар који је први дао решење Пруе–Тари–Ескотовог проблема.

[3]Marston Morse (1892–1977), амерички математичар који се углавном бавио математичком анализом, познат је по својим радовима из области диференцијалне топологије, у којој се данас једна техника назива по њему.

[4]Machgielis (Max) Euwe (1901–1981), холандски математичар и пети по реду светски шампион у шаху (од 1935. до 1937. године).

корисне кроз цео рад.

У другој глави дефинишемо Туе–Морсову реч. Природна последица великог броја различитих примена ове речи је више њених дефиниција. У овој глави наводимо и показујемо еквиваленцију између њених различитих дефиниција. Такође, наводимо и њено природно уопштење.

У трећој глави се бавимо комбинаторним особинама Туе–Морсове речи. Овде ћемо доказати њену најважнију особину, а то је да не садржи преклапања, штавише помоћу ње пронаћи ћемо лексикографски најмању и највећу бинарну реч без преклапања. Још један битан резултат ове главе је, користећи Туе–Морсову реч, конструкција бесконачне квадратно слободне речи над троелементним алфабетом.

Четврта глава посвећена је примени Туе–Морсове речи у теорији бројева. Први резултат је решење, у специјалним случајевима, једног старог проблема, тзв. Пруе–Тари–Ескотовог проблема. Затим ћемо помоћу Туе–Морсове речи пронаћи граничну вредност једног интересантног низа рационалних бројева. У трећем делу ове главе бавићемо се q-развојима, односно развојима у нецелобројним базама. Показаћемо да Туе–Морсова реч индукује најмање q за које је развој броја 1 јединствен.

Пету, последњу главу, резервисали смо за три куриозитетне примене разматране Туе–Морсове речи. Бавићемо се њеном повезаношћу са шахом, музиком и економијом.

⋆ ⋆ ⋆

Велику захвалност дугујем мом ментору др Бојану Башићу, како за несебичну помоћ при избору теме и писању рада, тако и за све пренето знање, искуство и подршку током мог студирања. Такође, захваљујем се и члановима комисије, др Игору Долинки и др Борису Шоботу, на драгоценим предавањима и учешћу у изради рада. Захваљујем се и свим наставницима и професорима који су ми током школовања откривали свет математике.
Највише желим да се захвалим мојим родитељима, Драгу и Биљани, као и сестри Славици и тетки Живки, што су ме подржавали и веровали у мене свих ових година. Велико хвала и мом Владану и свим мојим пријатељима, на подршци и разумевању, без њих студентски дани не би били толико срећни.

Нови Сад, септембар 2016.

Данијела Митровић

Садржај

Глава 1

Увод

Сам назив рада указује на то да се бавимо речима и њиховим особинама. Стога, у овом делу ћемо дефинисати и увести основне појмове којима ћемо се користити у даљем раду. Наведене дефиниције могу се пронаћи у свакој књизи која се бави комбинаториком на речима, а ми смо се овде користили изворима [2], [21] и [17].

1.1. Дефиниција. *Нека је Σ непразан скуп симбола, називамо га још и азбука. Елементе скупа Σ зовемо слова, а за коначнан или бесконачан низ слова кажемо да је реч над азбуком Σ.*

Слова алфабелта ћемо углавном означавати малим латиничним словима $a, b, c \ldots$, док ћемо речи означавати великим латиничним словима $A, B, C \ldots$ Скуп свих речи над алфабетом Σ (коначних и бесконачних), означаваћемо са Σ^∞, док ћемо скуп свих коначних речи означавати са Σ^*. Знак ε користићемо да окарактеришемо празну реч, односно реч без слова.

1.2. Примери.

1. Нека је алфабет $\Sigma = \{a, b, c\}$. Следећи низови су коначне речи над Σ:

   $$a,\ aba,\ ccc,$$

   док је једна бесконачна реч, на пример:

   $$abababababab\ldots$$

2. Ми ћемо у раду углавном користити алфабет $\{0, 1\}$ и примери речи над њим су:

   $$0,\ 01,\ 000,\ 010101\ldots$$

   Сваки природан број се може посматрати као реч над алфабетом $\{0, 1\}$, тако што за реч која одговара броју $n \in \mathbb{N}$ узимамо развој броја n у бази 2.

1.3. Дефиниција. *Нека су* $X, Y \in \Sigma^*$ *две речи и*

$$X = x_1 x_2 \dots x_k,\ Y = y_1 y_2 \dots y_r,$$

где су $x_i, y_j \in \Sigma$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le r$ *нека слова алфабета (не обавезно различита). Дефинишемо операцију конкатенације (надовезивања) са*

$$X \cdot Y = Z,$$

где је

$$Z = x_1 x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_r.$$

Најчешће се у претходној дефиницији изоставља знак $\cdot$ између речи, и једноставно се пише XY.

1.4. Напомене.

1. Приметимо да је операција конкатенације дефинисана за коначне речи. Штавише, та операција је и асоцијативна и скуп свих коначних речи над било којим алфабетом чини моноид, тзв. моноид речи (неутрални елемент је празна реч). Дефиниција је добра и ако узмемо да је X коначна, а Y коначна или бесконачна.

2. За произвољну коначну реч X и $n \in \mathbb{N}$ означимо са

$$X^n = XX \dots X,$$

где је реч X надовезана n пута. Слично означимо са

$$X^\infty = XXX \dots$$

бесконачну реч добијену надовезивањем речи X бесконачно много пута.

1.5. Пример. Један погодан начин за генерисање бесконачних речи је од низова. Узмимо да је азбука $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$ и $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ природних бројева. Кажемо да је бесконачна реч X добијена од низа $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако је

$$X = s_1 s_2 s_3 \dots,$$

где природан број s_i посматрамо као реч над алфабетом Σ.

1.6. Дефиниција. *За произвољан алфабет* Σ *можемо дефинисати функцију*

$$|\cdot| : \Sigma^\infty \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\},$$

где је за $X \in \Sigma^\infty$

$$|X| = \text{ дужина (број слова) речи } X.$$

1.7. Напомена. За реч $X \in \Sigma^*$ дужине $|X| = k \geq 0$ ћемо са X_i означавати i-то слово речи X, за $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Дакле, прво слово означавамо са X_0, друго са X_1, итд. Оваква нумерација је мотивисана претходним примером, и касније у раду ће нам бити корисна. Напоменимо да не треба мешати управо дефинисану ознаку X_i за i-то слово у речи X, и X_i као члан неког низа речи $(X_i)_{i \geq 0}$. Увек ћемо наглашавати када се ради о низу речи.

1.8. Дефиниција. *Нека су $X, Y \in \Sigma^\infty$, при чему је X коначна реч. Кажемо да је реч X:*

1. *префикс речи Y, ако постоји реч $Z \in \Sigma^\infty$ таква да је $Y = XZ$;*
2. *фактор речи Y, ако постоје речи $Z, T \in \Sigma^\infty$, при чему је Z коначна, такве да је $Y = ZXT$.*

1.9. Пример. Илуструјмо претходне две дефиниције на примеру речи $X = 01101001$ над алфабетом $\{0, 1\}$. Реч X је дужине $|X| = 8$. Затим неки њени префикси су речи $\varepsilon, 0, 01, 01101$. Сви њени префикси су тривијално и њене подречи (за реч Z бирамо празну реч ε), али то су и $1, 010, 00$, итд.

1.10. Дефиниција. *За бесконачну реч $X \in \Sigma^\infty$ кажемо да је:*

1. *периодична, ако постоји коначна реч Y таква да је*
$$X = Y^\infty;$$
2. *евентуално периодична, ако постоје коначне речи Z и Y такве да је*
$$X = ZY^\infty;$$
3. *апериодична, ако није евентуално периодична.*

1.11. Дефиниција. *Нека је $X \in \Sigma^*$ коначна реч.*

1. *Квадрат је реч облика XX. Реч коју не садржи квадрат као фактор називамо квадратно слободна.*
2. *Куб је реч облика XXX, а реч коју не садржи куб као фактор називамо кубно слободна.*
3. *Преклапање је реч облика $aXaXa$ где је $a \in \Sigma$ и реч X може бити и празна реч. Реч без преклапања је она која не садржи фактор који је преклапање.*

1.12. Лема. *Нека реч $X \in \Sigma^*$ има фактор облика $YZYZY$, за неке $Y, Z \in \Sigma^*$, при чему $Y \neq \varepsilon$. Тада реч X има преклапање.*

Доказ. Пошто је Y коначна непразна реч, постоји $k \geq 1$, такво да је $|Y| = k$. Онда се Y може записати у облику

$$Y = a_0 a_1 \dots a_{k-1},$$

где су a_i, за $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, нека слоба алфабета. Нека је

$$T = a_1 \dots a_{k-1} Z.$$

Сада је $YZYZY = a_0 T a_0 T a_0 a_1 \dots a_{k-1}$, па реч X има фактор $a_0 T a_0 T a_0$, односно има преклапање. □

1.13. Примери.

1. Једна периодична реч над алфабетом $\{0, 1\}$ је

$$X = 010101 \dots = (01)^\infty.$$

2. Једна апериодична реч над алфабетом $\{0, 1, \dots, 9\}$ је низ децимала броја π, или броја e (ако би биле периодичне или евентуално периодичне, то не би били трансцендентни бројеви).

3. Посматрајмо речи над азбуком Σ ={А,Б,В,...,Ш}, тј. над ћириличним словима. На пример реч *ЛАЛА* је квадрат, а реч *РУЖА* није. Куб би била реч *ЛААЛААЛАА*, док је једно преклапање реч *ЛАЛАЛ*, или *АЛАЛА*. Приметимо да је сваки куб уједно и преклапање (за слово a узимамо прво слово речи X), а да је свако преклапање уједно и квадрат (понавља се $aXaX$). Пример речи која није квадратно слободна је реч *КООРДИНАТА*, јер има подреч *ОО*, али реч *МАТЕМАТИКА* јесте квадратно слободна. Реч *МАТЕМАТИКА* је уједно и без преклапања.

4. Туе–Морсова реч, која је предмет овог рада, јесте пример апериодичне речи која је кубно слободна и не садржи преклапања. Над двоелементним алфабетом не постоји бесконачна реч која је квадратно-слободна, али видећемо да над троелементним постоји.

1.14. Дефиниција. *Ако је $X \in \Sigma^*$ и $X = a_1 a_2 \dots a_k$, тада реч*

$$\widetilde{X} = a_k \dots a_2 a_1,$$

називамо преокретање речи X. Ако је $X = \widetilde{X}$, онда за реч X кажемо да је палиндром.

1.15. Пример. Над азбуком ћириличних слова Σ ={А,Б,В,...,Ш}, један од најпознатијих палиндрома је *АНАВОЛИМИЛОВАНА* или речи *РАДАР*, *ДОВОД*, и сличне.
Један пример палиндрома над азбуком $\{0, 1\}$ је

$$0110100110010110$$

који и сам у себи садржи неке друге палиндроме.

1.16. Дефиниција. *За реч X над двоелементним (бинарним) алфабетом $\{0,1\}$ дефинишемо комплемент речи X, у ознаци $\overline{X}$, као реч која се од X добија заменом свих појављивања слова 0 словом 1, и обратно, свих појављивања слова 1 словом 0.*

1.17. Пример. Илуструјмо претходну дефиницију на примеру речи $X = 01101001$. За њу је комплемент $\overline{X} = 10010110$. Такође, за сваку реч над бинарним алфабетом је

$$\overline{\overline{X}} = X.$$

1.18. Дефиниција. *За низ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ речи над алфабетом Σ кажемо да конвергира ако свака наредна реч садржи претходну као префикс, тачније, за свако $n \in \mathbb{N}$ је X_n префикс речи X_{n+1}.*

У наставку уводимо један од основних појмова у комбинаторици на речима. То је појам морфизма. Они се користе за генерисање бројних и јако битних речи, међу њима и Туе–Морсове речи.

1.19. Дефиниција. *Нека су Σ и Ω два алфабета. Функција $\alpha : \Sigma^* \to \Omega^*$ назива се морфизам ако је за све коначне речи $X, Y \in \Sigma^\infty$ испуњено*

$$\alpha(XY) = \alpha(X)\alpha(Y).$$

1.20. Напомене.

1. Морфизам је потпуно окарактерисан сликама свих слова из Σ, и стога ћемо морфизме увек тако и одређивати. Из наведеног разлога, није грешка писати $\alpha : \Sigma \to \Omega^*$.

2. Уколико је морфизам $\alpha : \Sigma \to \Sigma^*$, онда можемо α примењивати више пута, и зато дефинишемо за $k \in \mathbb{N}$ и $X \in \Sigma^*$

   $$\alpha^0(X) = X \text{ и } \alpha^k(X) = \alpha(\alpha^{k-1}(X)).$$

3. Уколико за морфизам $\alpha : \Sigma \to \Sigma^*$ и неко слово $a \in \Sigma$ важи да је a префикс речи $\alpha(a)$, односно постоји реч $X \in \Sigma^\infty$ таква да је $\alpha(a) = aX$, онда је добро дефинисана реч

   $$\alpha^\infty(a) = \lim_{k\to\infty} \alpha^k(a).$$

   Наиме, тада је за све $k \in \mathbb{N}$

   $$\alpha^{k+1}(a) = \alpha^k(\alpha(a)) = \alpha^k(aX) = \alpha^k(a)\alpha^k(X),$$

   тј. $\alpha^k(a)$ је префикс речи $\alpha^{k+1}(a)$ за све $k \in \mathbb{N}$. Ово значи да је лимес низа $(\alpha^k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ добро дефинисан. Тада је и реч $\alpha^\infty(a)$ фиксна тачка морфизма α.

1.21. Примери.

1. Посматрајмо морфизам $\varphi : \{0,1\} \to \{0,1\}^*$ дефинисан са
$$\varphi(0) = 01,\ \varphi(1) = 10.$$
На пример, за реч $X = 0100$ је $\varphi(X) = 01100101$.
Пошто је за $a \in \{0,1\}$ слово a префикс речи $\varphi(a)$, можемо пронаћи реч $\varphi^\infty(a)$, као што смо у напомени изнад објаснили. Узмимо за $a = 0$, тада је $\varphi(0) = 01$, затим је $\varphi^2(0) = \varphi(\varphi(0)) = \varphi(01) = 0110$. Настављајући овако добијамо реч
$$\varphi^\infty(0) = 0110100110010110\dots$$
а то је управо Туе–Морсова реч. Наведени морфизам је Туе–Морсов морфизам и ово је једна од еквивалентних дефиниција Туе–Морсове речи. О томе ће више бити говора у наредној глави.

2. Још један пример познатог морфизма је $\alpha : \{0,1\} \to \{0,1\}^*$ дефинисан са
$$\alpha(0) = 01,\ \alpha(1) = 0.$$
Овај морфизам назива се Фибоначијев морфизам и реч
$$\alpha^\infty(0) = 010010100100101001\dots$$
назива се Фибоначијева реч. Веза са Фибоначијевим низом је
$$\alpha^{n+2}(0) = \alpha^{n+1}(0)\alpha^n(0),$$
за све $n \in \mathbb{N}$. Ово се лако показује индукцијом.

1.22. Дефиниција. *Нека је дефинисано неко строго тотално уређење $\prec$ над словима аузбуке Σ. Лексикографски поредак на речима (у односу на то уређење из Σ) дефинишемо са: за речи $X, Y \in \Sigma^\infty$ је $X < Y$ акко је X префикс речи Y и $X \neq Y$, или се оне могу записати у облику $X = ZaX'$, $Y = ZbY'$ такво да је $a \prec b$.*

1.23. Примери.

1. Ако међу ћириличним словима $\Sigma =${А,Б,В,...,Ш} кажемо да је уређење у ствари редослед слова у азбуци, онда је у лексикографском поретку најмања реч празна реч, затим реч *А*, затим реч *АА*, итд. На пример, за речи *МАТЕМАТИКА* и *МАТРИЦА* важи
$$\textit{МАТЕМАТИКА} < \textit{МАТРИЦА},$$
јер су им прва три слова једнака, затим је слово *Е* у првој речи мање од слова *Р* у другој (знамо да је *Е* шесто слово азбуке, а *Р* седамнаесто).

2. Ми ћемо у раду користити бинарне речи, тј. алфабет $\{0, 1\}$ и ту је поредак јасан $(0 < 1)$. На пример,

$$00100110 < 00101110,$$

јер су исте до петог слова, а онда је у првој слово 0, а у другој 1. Приметимо још, уколико имамо реч $X \in \{0, 1\}^\infty$ која почиње словом 0, онда је сигурно

$$X < \overline{X},$$

јер ће реч $\overline{X}$ почињати словом 1 и ту ће већ бити осигурана неједнакост.

Глава 2

Дефиниција Туе–Морсове речи

У овом делу рада ћемо на неколико различитих начина дефинисати Туе–Морсову реч и показати да су све те дефиниције еквивалентне. Осим тога приказаћемо и једноставан алгоритам за њено генерисање. Ослањаћемо се на радове [1] и [24].

2.1. Дефиниција. *Нека је* $(t_n)_{n\geq 0}$ *низ над скупом* $\{0,1\}$ *дефинисан рекурзивно са*

$$t_0 = 0,\ t_{2n} = t_n,\ t_{2n+1} = \overline{t_n},\ n \geq 0,$$

где је за $t \in \{0,1\}$, $\overline{t} = 1 - t$. *Овако дефинисан низ називамо Туе–Морсов низ, а реч коју тај низ генерише Туе–Морсова реч и означавамо је са* TM *или* T.

На основу дефиниције је почетак Туе–Морсове речи

$$TM = 0110100110010110100101 10...$$

2.2. Напомена. У раду ћемо Туе–Морсову реч увек означавати са TM, а овде уводимо још две ознаке везане за њу које ћемо користити. За слово на i-тој позицији, за $i \geq 0$ ћемо користити ознаку T_i. Дакле, $T_i = t_i$, где је $(t_i)_{i\geq 0}$ Туе–Морсов низ из претходне дефиниције. Друга ознака која ће нам бити потребна је TM_i, за $i \geq 1$. Са TM_i ћемо означавати префикс Туе–Морсове речи дужине i. На пример, $TM_5 = 01101$. (Приметимо да се ова ознака, специјална за случај Туе–Морсове речи, разликује од опште ознаке из напомене 1.7.)

2.3. Теорема. *Низ* $(k_n)_{n\geq 0}$ *над скупом* $\{0,1\}$ *дефинисан са*

$$k_n \equiv s_2(n) \pmod 2,\ n \geq 0,$$

је Туе–Морсов низ, где је $s_2(n)$ *збир цифара броја* n *записаног у бази 2.*

Доказ. Приметимо да је k_n број јединица које се налазе у запису броја n у бази 2, по модулу 2. Јасно, $k_0 = t_0$. Множење броја n са 2 посматрано у бази 2 само додаје једну нулу као последњу цифру, а број јединица остаје исти, па је стога $k_n = k_{2n}$ за све природне бројеве. Број $2n+1$ има једну јединицу више у свом бинарном запису у односу на бинарни запис броја n (јер $2n$ има исти број јединица као и n и нулу као последњу цифру, а сабирање са 1 у бинарном запису са бројем који се завршава са нулом резултује променом само последње цифре са 0 на 1). Зато су бројеви $s_2(n)$ и $s_2(2n+1)$ различите парности, па је $k_{2n+1} = 1 - k_n = \overline{k_n}$. Дакле, k_n је Туе–Морсов низ. □

2.4. Теорема. *Нека је* $(X_{2^i})_{i\geq 0}$ *низ речи дефинисан са:*

$$X_{2^0} = X_1 = 0 \text{ и } X_{2^n} = X_{2^{n-1}}\overline{X_{2^{n-1}}}, \text{ за } n \geq 1.$$

Онда је $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_{2^n}$ *Туе–Морсова реч.*

Доказ. Наведени лимес је добро дефинисан јер је за сваку реч $X_{2^{n+1}}$ реч X_{2^n} њен префикс. Јасно, $TM_1 = X_1$. За све $n < 2^{k-1}$ се додавањем броја 2^k на n у бинарном запису на њега само дописује јединица са леве стране, затим евентуално неке нуле, и преписује запис броја n на крају. Зато им се број јединица разликује за тачно један, па су $s_2(n)$ и $s_2(n+2^k)$ различите парности, што имплицира $t_{n+2^k} = \overline{t_n}$. Одатле следи да је $TM_{2^k} = TM_{2^{k-1}}\overline{TM_{2^{k-1}}}$, што је и требало доказати. □

Претходна теорема нам даје једноставан алгоритам за генерисање Туе–Морсове речи. Наиме, почињемо од речи 0, затим у сваком кораку на претходну реч дописујемо њен комплемент. Првих пет корака алгоритма су:

$$0$$

$$01$$

$$0110$$

$$01101001$$

$$0110100110010110.$$

2.5. Теорема. *Нека је низ* $(k_n)_{n\geq 0}$ *над скупом* $\{0,1\}$ *такав да важи*

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1 - x^{2^i}) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{k_j}x^j,$$

за x *такво да сума и производ конвергирају. Тада је* $(k_n)_{n\geq 0}$ *Туе–Морсов низ.*

Доказ. Пошто је

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-x^{2^i}) = (1-x)(1-x^2)(1-x^4)...$$

множењем би се могли добити сви степени x^n, $n \geq 0$. Наиме, сваки број има јединствен бинарни запис $n = (a_k a_{k-1}...a_1 a_0)_2$, $a_i \in \{0,1\}$, па ће се за x^n из производа искористити баш они x^i за које је $a_i = 1$. На пример, за $n = 5$ је $n = (101)_2$ и стога је $x^5 = x^4 x$. Тиме смо показали да је низ $(k_n)_{n\geq 0}$ добро дефинисан. Сада покажимо да су коефицијенти баш чланови Туе–Морсовог низа. Пошто се x^n добија као производ онолико чланова колико има јединица у његовом бинарном запису, а сви чланови су са предзнаком $-$, онда ће коефицијент уз x^n бити -1, ако n у бинарном запису има непарно много јединица, или коефицијент 1, ако n у бинарном запису има парно много јединица. Одатле је

$$k_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n \text{ у бинарном запису има паран број јединица;} \\ 1, & \text{ако } n \text{ у бинарном запису има непаран број јединица.} \end{cases}$$

Сада је по теореми 2.3 ово заиста Туе–Морсов низ. □

2.1 Туе–Морсов морфизам

У овом делу дефинишемо Туе–Морсов морфизам и преко њега показујемо још једну еквивалентну дефиницију Туе–Морсове речи. Тврђења се углавном односе на поглавље о Туе–Морсовим речима у [7].

2.6. Дефиниција. *Туе–Морсов морфизам је пресликавање $\varphi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ дефинисано са*

$$\varphi(0) = 01,\ \varphi(1) = 10.$$

За Туе–Морсов морфизам и било коју реч $S \in \{0,1\}^*$ важи да је

$$\varphi(\overline{S}) = \overline{\varphi(S)}.$$

2.7. Теорема. *Туе–Морсова реч је фиксна тачка Туе–Морсовог морфизма φ, тј. важи*

$$\varphi(TM) = TM.$$

Штавише, TM и $\overline{TM}$ су једине фиксне тачке морфизма φ.

Доказ. Нека је S реч над алфабетом $\{0,1\}$ и S_n, $n \geq 0$, је n-то слово речи S. Пошто је

$$\varphi(a) = a\overline{a},\ \forall a \in \{0,1\} \text{ и}$$

$$\varphi(S_n) = \varphi(S)_{2n}\varphi(S)_{2n+1},$$

онда је
$$S_n = \varphi(S)_{2n} \text{ и } \varphi(S)_{2n+1} = \overline{S_n}.$$
Ако је S још фиксна тачка морфизма φ онда је $\varphi(S) = S$, па је из једнакости изнад
$$S_n = S_{2n} \text{ и } S_{2n+1} = \overline{S_n}.$$
Ако је $S_0 = 0$ онда је по дефиницији $S = TM$, а ако је $S_0 = 1$ онда је $S = \overline{TM}$. □

2.8. Теорема. *Нека је φ Туе–Морсов морфизам. Тада је*
$$\varphi^\infty(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(0) = TM.$$
Такође је $\varphi^\infty(1) = \overline{TM}$.

Доказ. Прво покажимо да је лимес $\varphi^\infty(0)$ добро дефинисан. За Туе–Морсов морфизам φ је $\varphi(a) = a\overline{a}$, $\forall a \in \{0,1\}$ па су стога, имајући у виду напомену 1.20, $\varphi^\infty(0)$ и $\varphi^\infty(1)$ добро дефинисани. Сада покажимо да је $\varphi^\infty(0)$ баш Туе–Морсова реч. Пошто $\varphi^\infty(0)$ конвергира, важи да је
$$\varphi(\varphi^\infty(0)) = \varphi^\infty(0),$$
одакле је $\varphi^\infty(0)$ фиксна тачка Туе–Морсовог морфизма, а онда је по претходној теореми то ТМ, јер $\varphi^\infty(0)$ почиње са 0. Аналогно је и $\varphi^\infty(1) = \overline{TM}$. □

Посматрајући $\varphi^n(0)$ и $\varphi^n(1)$ за $n \geq 0$ можемо дати још једну дефиницију Туе–Морсове речи, која ће нам касније бити корисна. Идеја је слична, и у ствари у себи садржи алгоритам дат теоремом 2.4.

2.9. Пропозиција. *Дефинишимо низове речи $(U_n)_{n\geq 0}$, $(V_n)_{n\geq 0}$ над азбуком $\{0,1\}$ са*
$$U_0 = 0,\ V_0 = 1;$$
$$U_{n+1} = U_nV_n,\ V_{n+1} = V_nU_n,\ \text{за } n \geq 0.$$
Речи U_n и V_n за $n \geq 0$ називају се Морсови блокови и за њих важи:

1. $U_n = \varphi^n(0),\ V_n = \varphi^n(1)$;
2. $U_n = \overline{V_n},\ V_n = \overline{U_n}$;
3. U_{2n} *и* V_{2n} *су палиндроми;*
4. $U_{2n+1} = \widetilde{V_{2n+1}}$;
5. $TM = \lim_{n\to\infty}(U_n)$.

Пре него што пређемо на доказ, испишимо неколико итерација дефинисаних низова.

$$U_0 = 0, V_0 = 1;$$
$$U_1 = 01, V_1 = 10;$$
$$U_2 = 0110, V_0 = 1001;$$
$$U_3 = 01101001, V_3 = 10010110;$$
$$U_4 = 0110100110010110, V_4 = 1001011001101001, \text{ итд.}$$

Доказ. Сва тврђења се доказују индукцијом.

1. Јасно је $U_0 = \varphi^0(0) = 0$ и $V_0 = \varphi^0(1) = 1$. Претпоставимо да је $U_{n-1} = \varphi^{n-1}(0)$ и $V_{n-1} = \varphi^{n-1}(1)$. Тада је
$$U_n = U_{n-1}V_{n-1} = \varphi^{n-1}(0)\varphi^{n-1}(1) = \varphi^{n-1}(01) = \varphi^{n-1}(\varphi(0)) = \varphi^n(0),$$
$$V_n = V_{n-1}U_{n-1} = \varphi^{n-1}(1)\varphi^{n-1}(0) = \varphi^{n-1}(10) = \varphi^{n-1}(\varphi(1)) = \varphi^n(1).$$
Наравно, користили смо чињеницу да је φ морфизам.

2. Важи да је $U_0 = 0 = \overline{1} = \overline{V_0}$ и $V_0 = 1 = \overline{0} = \overline{U_0}$, чиме је показана база индукције. Претпоставимо да је $U_{n-1} = \overline{V_{n-1}}$ и $V_{n-1} = \overline{U_{n-1}}$, и покажимо да тврђење важи и за n:
$$U_n = U_{n-1}V_{n-1} = \overline{V_{n-1}U_{n-1}} = \overline{V_n},$$
$$V_n = V_{n-1}U_{n-1} = \overline{U_{n-1}V_{n-1}} = \overline{U_n}.$$

3. За $n = 0$ је $U_0 = 0$ и $V_0 = 1$, што су очигледно палиндроми. Претпоставимо да су $U_{2(n-1)}$ и $V_{2(n-1)}$ палиндроми. Тада је
$$\begin{aligned} U_{2n} &= U_{2n-1}V_{2n-1} = U_{2n-2}V_{2n-2}V_{2n-2}U_{2n-2} \\ &= U_{2(n-1)}V_{2(n-1)}V_{2(n-1)}U_{2(n-1)}, \\ V_{2n} &= V_{2n-1}U_{2n-1} = V_{2n-2}U_{2n-2}U_{2n-2}V_{2n-2} \\ &= V_{2(n-1)}U_{2(n-1)}U_{2(n-1)}V_{2(n-1)}. \end{aligned}$$
По индукцијској хипотези, имајући у виду једнакости изнад, онда су и U_{2n} и V_{2n} такође палиндроми.

4. Ово може и директно да се докаже користећи 3. Наиме, пошто су за све $n \geq 0$ речи U_{2n} и V_{2n} палиндроми, важи
$$U_{2n} = \widetilde{U_{2n}} \text{ и } V_{2n} = \widetilde{V_{2n}}.$$
Стога је за све $n \geq 0$
$$U_{2n+1} = U_{2n}V_{2n} = \widetilde{U_{2n}}\widetilde{V_{2n}} = \widetilde{V_{2n}U_{2n}} = \widetilde{V_{2n+1}}.$$

5. Користећи 1. и теорему 2.8 имамо
$$TM = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n(0)) = \lim_{n\to\infty}(U_n).$$

□

2.2 Уопштена Туе–Морсова реч

У овом делу, мотивисани дефиницијама Туе–Морсове речи, на сличан начин конструишемо и уопштену Туе–Морсову реч. Њу је дефинисао још Пруе у [19], а ми овде користимо изворе [1] и [21]. Покушавамо да направимо аналогон дефиниције Туе–Морсове речи из теореме 2.3.

2.10. Дефиниција. *Нека су $k \geq 2$ и $m \geq 2$ природни бројеви и $s_k(n)$ је сума цифара броја n записаног у бази k. Дефинишемо уопштени Туе–Морсов низ $(t_n^{k,m})_{n\geq 0}$ са*

$$t_n^{k,m} \equiv s_k(n) \pmod{m},\ n \geq 0.$$

Бесконачну реч генерисану тим низом називамо уопштена Туе–Морсова реч и означавамо је са $TM^{k,m}$.

2.11. Примери.

1. За $k = 3$ и $n = 4$ је јасно
$$t_0^{3,4} = 0,$$
$$t_1^{3,4} = 1,$$
$$t_2^{3,4} = 2,$$
$$t_3^{3,4} = 1,\ \text{јер је } 3_3 = 10 \text{ и } s_3(3) = 1,$$
$$t_4^{3,4} = 2,\ \text{јер је } 4_3 = 11 \text{ и } s_3(4) = 2,$$
$$t_5^{3,4} = 3,\ \text{јер је } 5_3 = 12 \text{ и } s_3(5) = 3,$$
$$t_6^{3,4} = 2,\ \text{јер је } 6_3 = 20 \text{ и } s_3(6) = 2,$$
и тако даље. Настављајући овај поступак следи
$$TM^{3,4} = 012123230123\ldots$$

2. За $k = n = 2$ је $t_n^{2,2} \equiv s_2(n) \pmod 2$ за $n \geq 0$, што по теореми 2.3 значи да је
$$TM^{2,2} = TM.$$

3. За $k = n = 3$ је
$$TM^{3,3} = 012120201120201\ldots$$

Аналогон дефиницији Туе–Морсовог морфизма би био уопштени Туе–Морсов морфизам и њега дефинишемо на следећи начин:

2.12. Дефиниција. *Нека су дати природни бројеви $k \geq 2$ и $m \geq 2$. Дефинишемо уопштени Туе–Морсов морфизам $\varphi^{k,m} : \{0,\ldots,m-1\}^* \to \{0,\ldots,m-1\}^*$ са*

$$\varphi^{k,m}(a) = aa_1a_2\ldots a_{k-1},\ \text{где је } a_i \equiv a + i \pmod{m},\ \text{за } a \in \{0,\ldots,m-1\}.$$

2.13. Дефиниција. *Уопштена Туе–Морсова реч $TM^{k,m}$ је фиксна тачка Туе–Морсовог морфизма $\varphi^{k,m}$ и важи да је*

$$TM^{k,m} = (\varphi^{k,m})^{\infty}(0).$$

2.14. Пример. Ради илустрације претходне две дефиниције размотримо шта је $\varphi^{3,4}$. Дакле, $k = 3$ и $m = 4$ и $\varphi^{3,4} : \{0, 1, 2, 3\}^* \to \{0, 1, 2, 3\}^*$. Треба одредити слике елемената $0, 1, 2, 3$. Пратимо дефиницију 2.12:

$$\varphi^{3,4}(0) = 012,$$

$$\varphi^{3,4}(1) = 123,$$

$$\varphi^{3,4}(2) = 230,$$

$$\varphi^{3,4}(3) = 301.$$

Стога, ако почнемо да генеришемо $(\varphi^{k,m})^{\infty}(0)$, имамо

$$TM^{k,m} = 012123230123230301\ldots$$

Глава 3

Особине Туе–Морсове речи

3.1 Преклапање и Туе–Морсова реч

У овом делу показујемо да Туе–Морсова реч не садржи преклапања, а затим као последицу изводимо да је она кубно слободна и апериодична. Штавише, испоставља се да је она такорећи „канонички“ пример речи без преклапања. Као битан резултат показаћемо да је то лексикографски највећа бесконачна реч над двоелементним алфабетом која почиње са 0 и не садржи преклапања. Користећи ово својство непреклапања конструисаћемо квадратно слободну реч над троелементним алфабетом.

У дефиницији 1.11 смо рекли да је реч без преклапања таква да не садржи фактор облика $aXaXa$, где је $|a| = 1$ и $|X| \geq 0$. Наредну теорему је показао још Туе у [22], а ми наводимо доказ који се може пронаћи у [2].

3.1. Теорема. *Туе–Морсова реч не садржи преклапања.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да Туе–Морсова реч садржи преклапање. То значи да се може записати у облику

$$TM = UaXaXaV,$$

где је U коначан префикс, а V бесконачан суфикс речи TM. Означимо још са $k = |U|$ и $m = |aX| \geq 1$, и претпоставимо да је m најмање могуће, тј. да смо узели најкраће преклапање. Тада, за све $0 \leq i \leq m$ важи следеће

$$T_{k+i} = T_{k+m+i}. \tag{3.1}$$

Разматрамо два случаја, и у њима три, односно два, подслучаја.

1. m је паран број, тј. $m = 2m'$. Разликујемо две могућности:

- k је паран број, $k = 2k'$. Тада (3.1) постаје

  $$T_{2k'+i} = T_{2k'+2m'+i},\ 0 \le i \le 2m',$$

  па ако уместо i ставимо $2i'$, добијамо

  $$T_{2k'+2i'} = T_{2k'+2m'+2i'},\ 0 \le i' \le m'.$$

  Како за TM важи да је $T_n = T_{2n},\ n \ge 0$, из претходне једнакости је

  $$T_{k'+i'} = T_{k'+m'+i'},\ 0 \le i' \le m'. \tag{3.2}$$

  Међутим, једначина (3.2) имплицира да постоји преклапање мање дужине ($m' \ge 1$), што је контрадикција са тим да смо узели најкраће преклапање.

- k је непаран број, $k = 2k' + 1$. Тада једначина (3.1) постаје

  $$T_{2k'+1+i} = T_{2k'+1+2m'+i},\ 0 \le i \le 2m',$$

  па ако уместо i ставимо $2i'$, добијамо

  $$T_{2k'+2i'+1} = T_{2k'+2m'+2i'+1},\ 0 \le i' \le m'. \tag{3.3}$$

  По дефиницији TM је $T_{2n+1} = \overline{T_n},\ n \ge 0$, па је

  $$T_{2k'+2i'+1} = \overline{T_{k'+i'}}, \tag{3.4}$$

  $$T_{2k'+2m'+2i'+1} = \overline{T_{k'+m'+i'}}. \tag{3.5}$$

  Сада користећи једнакости (3.3), (3.4), (3.5) следи да је

  $$\overline{T_{k'+i'}} = \overline{T_{k'+m'+i'}},\ \text{тј.}$$

  $$T_{k'+i'} = T_{k'+m'+i'}, 0 \le i' \le m'.$$

  Последња једнакост је поново контрадикција са избором најмањег m.

2. m је непаран број. У овом случају прво дефинишемо помоћну реч са

   $$S_n \equiv T_n + T_{n-1} \pmod 2,\ n \ge 1.$$

   Посматрамо $S_{4n+2},\ n \ge 1$. По дефиницији је

   $$S_{4n+2} \equiv T_{4n+2} + T_{4n+1} \pmod 2.$$

   Бројеви $4n + 2$ и $4n + 1$ имају исти број јединица у бинарном запису (множењем са 4 дописујемо 00 на крај бинарног записа за n, а сабирањем са 2 те две нуле постају 10, док сабирањем са 1 постају 01), што значи да је по теореми 2.3, $T_{4n+2} = T_{4n+1}$, па је њихов збир 0 или 2, што је по модулу 2 увек 0. Дакле

$$S_{4n+2} = 0, \ n \geq 1. \tag{3.6}$$

Сада посматрамо $S_{2n+1}, \ n \geq 1$. По дефиницији је

$$S_{2n+1} \equiv T_{2n+1} + T_{2n} \pmod 2.$$

Дефиниција ТМ каже да је $T_{2n} = T_n = \overline{T_{2n+1}}$, што имплицира да је $T_{2n+1} + T_{2n} = 0 + 1$ или $T_{2n+1} + T_{2n} = 1 + 0$, али у оба случаја је закључак

$$S_{2n+1} = 1, \ n \geq 1. \tag{3.7}$$

Размотримо однос S_{k+i} и S_{k+m+i} за $1 \leq i \leq m$. По дефиницији је

$$S_{k+i} \equiv T_{k+i} + T_{k+i-1} \pmod 2,$$

$$S_{k+m+i} \equiv T_{k+m+i} + T_{k+m+i-1} \pmod 2.$$

По једнакости (3.1) су десне стране горњих конгруенција једнаке, па је

$$S_{k+i} = S_{k+m+i}, \ 1 \leq i \leq m. \tag{3.8}$$

Размотримо случајеве:

- $m \geq 5$: Тада, пошто је $1 \leq i \leq m$, можемо изабрати i такво да даје произвољан остатак по модулу 4, па можемо изабрати и i такво да је
$$k + i \equiv 2 \pmod 4.$$
За тако изабрано i је $k + i = 4s + 2$, а по (3.6) је $S_{k+i} = 0$. Пошто је $k+i$ парно, и m непарно, $k+i+m$ је непарно, што по (3.7) значи да је $S_{k+i+m} = 1$. Тиме добијамо контрадикцију са једнакошћу (3.8).

- $m = 3$: Тада једнакост (3.8) важи за $1 \leq i \leq 3$, па i даје три од могућа четири остатка по модулу 4 (остатке 1, 2 и 3). Зато избором i такође и $k + i$ даје три од четири могућа остатка по модулу 4 (не обавезно 1, 2 и 3). То нам гарантује да $k + i$ сигурно даје остатак 2 или 3 по модулу 4 (можда и оба). Ако $k + i$ даје остатак 2, контрадикција следи као у случају за $m \geq 5$. У супротном, ако $k + i$ даје остатак 3, тада је $k + i$ непарно и по (3.7) је $S_{k+i} = 1$, а
$$k + m + i = k + i + 3 \equiv 3 + 3 \equiv 2 \pmod 4,$$
па по (3.6) следи $S_{k+m+i} = 0$. Ово је поново контрадикција са једнакошћу (3.8).

- $m = 1$, тј. $|aX| = 1$: То значи да је X празна реч и преклапање је облика aaa. Одатле следи да је за неко $n \geq 0$

  $$T_n = T_{n+1} = T_{n+2}. \tag{3.9}$$

  Ако је n парно и $n = 2n'$, онда је из прве једнакости у (3.9)

  $$T_{2n'} = T_{2n'+1},$$

  а из дефиниције Туе–Морсове речи је

  $$T_{n'} = T_{2n'} = \overline{T_{2n'+1}}.$$

  Последње две једнакости дају контрадикцију.
  Ако је n непарно и $n = 2n' + 1$, онда је из друге једнакости у (3.9)

  $$T_{2(n'+1)} = T_{2(n'+1)+1},$$

  па контрадикција следи као када је n било парно.

Након разматрања свих случајева, уочавамо да су сви одвели у контрадикцију, те је претпоставка била погрешна. Дакле, Туе–Морсова реч не садржи преклапања. □

3.2. Последица. *Туе–Морсова реч је кубно слободна.*

Доказ. Ако би ТМ имала подреч облика XXX, $|X| \geq 1$ онда би то уједно било и преклапање. Наиме, реч X је облика $X = aY$, $|Y| \geq 0$, за неко слово $a \in \{0, 1\}$, па онда ТМ има подреч $aYaYa$ што је преклапање. То је контрадикција са теоремом 3.1. □

3.3. Последица. *Туе–Морсова реч је апериодична.*

Доказ. Ако би ТМ била периодична онда би имала фактор XXX, где је X период, што је контрадикција са последицом 3.2. □

Још Туе је трагао за комплетним описом речи без преклапања, али није успео, али је Фифе у [12] дао први потпун опис скупа бесконачних речи без преклапања. Користио је аутомате, и тај доказ није једноставан, али као последицу је показао да је Туе–Морсова реч лексикографски највећа бесконачна бинарна реч без преклапања која почиње са нулом. Доказ исте теореме може се наћи и у [6], где је показана и Лема прогресије коју ћемо овде изложити и помоћу ње директно показати да је Туе–Морсова реч лексикографски највећа бесконачна бинарна реч која не садржи преклапања.

3.4. Теорема. *(***Лема прогресије***) Нека је $n \geq 0$ и $X = UVWc$ реч над алфабетом $\{0, 1\}$ која не садржи преклапања, таква да $|U| = |V| = |W| = 2^n$ и $c \in \{0, 1\}$. Тада, ако су U и V Морсови блокови, онда је и W Морсов блок.*

Доказ. Показујемо индукцијом по n. За $n = 0$ је X дужине 4, и W мора бити само једно слово, па је то сигурно Морсов блок. Претпоставимо да тврђење важи за $n - 1$ и показујемо да важи и за n. Нека је $X = UVWc$ где је c слово, U и V Морсови блокови дужине 2^n и W реч дужине 2^n. Хоћемо да покажемо да је W Морсов блок. Генерално, сваки Морсов блок је облика $U'V'$ или $V'U'$, где су U' и V' различити краћи Морсови блокови. Зато је UV облика $U'V'U'V'$ или $U'V'V'U'$ у зависности од тога да ли су U и V исти или различити Морсови блокови. Такође, реч W можемо поделити на две речи ду-жине 2^{n-1}, означимо их са A и B, и нека је d прво слово речи B. Сада је X облика

$$X = U'V'U'V'ABc \text{ или } X = U'V'V'U'ABc.$$

Посматрамо подречи $U'V'Ad$ и $V'U'Ad$ из првог, односно другог облика речи X. Оне су без преклапања, дужине $1 + 3 \cdot 2^{n-1}$, U', V' су Морсови блокови дужине 2^{n-1} и $|A| = 2^{n-1}$ па по индукцијској хипотези је A Морсов блок. Аналогно сада посматрајући подречи $V'ABc$ и $U'ABc$ из првог, односно другог облика речи X, по индукцијској хипотези је у B Морсов блок. Још нам преостаје показати да је AB Морсов блок, што ће важити ако су A и B различити Морсови блокови, тј. ако је

$$AB \neq U'U' \text{ и } AB \neq V'V'.$$

- Ако је $X = U'V'U'V'ABc$, за $AB = U'U'$ је $X = U'V'U'V'U'U'c$, а за $AB = V'V'$ је $X = U'V'U'V'V'V'c$, па у оба случаја по леми 1.12 имамо преклапање, контрадикција.
- Ако је $X = U'V'V'U'ABc$, за $AB = U'U'$ је $X = U'V'V'U'U'U'c$ па имамо преклапање и контрадикцију. Ако је $AB = V'V'$ онда је $X = U'V'V'U'V'V'c = (U'V'V')^2c$, па да бисмо избегли преклапање, c не сме бити прво слово ни од U' ни од V', а како су U' и V' различити Морсови блокови, један мора почињати са 0 а други са 1, па нема избора за c, што је контрадикција. □

3.5. Теорема. *Туе–Морсова реч је лексикографски највећа бинарна бесконачна реч без преклапања која почиње са* 0*.*

Доказ. Из теореме 3.1 је TM реч без преклапања. Нека је S лексикографски највећа бинарна бесконачна реч без преклапања која почиње са 0. Тада због тога што она почиње са 0 и лексикографски је највећа, прва три слова морају бити 011, а пошто не садржи преклапања четврто слово мора бити 0, тј. реч S почиње са 0110. Индукцијом ћемо показати да су за свако $n \geq 0$ првих $1 + 3 \cdot 2^n$ слова речи S иста као првих $1 + 3 \cdot 2^n$ слова Туе–Морсове речи. Онда, ће то важити и за граничне вредности када n тежи у ∞, тј. биће $S = TM$. База индукције је практично већ показана, јер су првих $1 + 3 \cdot 2^0 = 4$ слова и у S и у TM управо 0110. Претпоставимо да то важи за n, да се у TM и S поклапају првих $1+3\cdot 2^n$ слова. Знамо из теореме 3.1 да је TM без преклапања, а из пропозиције 2.9 да је она састављена од Морсових блокова, па је зато по претпоставци у S, и у TM почетак дужине $1+3\cdot 2^n$ облика

$$U_nV_nV_n0.$$

Сада S можемо записати као

$$S = U_nV_nV_nXYZWN,$$

где су X, Y, Z, W речи дужине 2^n, прво слово у X је 0 и N је бесконачни суфикс речи S. Реч S је без преклапања, па ако Лему прогресије применимо на део V_nV_nXa, где је a прво слово речи Y, следи да је X Морсов блок ду-жине 2^n који почиње са 0, а то мора бити U_n. Дакле $X = U_n$ и реч S је облика

$$S = U_nV_nV_nU_nYZWN = U_{n+1}V_{n+1}YZWN = U_{n+2}YZWN.$$

Знамо да и реч TM такође почиње са U_{n+2} и наставља се са V_{n+2}, а прво слово речи V_{n+2} је 1, па због тога што је S лексикографски највећа, да не би била TM већа од ње, мора прво слово речи Y такође бити 1. Примењујући Лему прогресије на подреч V_nU_nYb где је b прво слово речи Z, следи да је Y Морсов блок. Знајући још и да Y почиње са 1 следи да је $Y = V_n$. Сада реч S можемо записати као

$$S = U_nV_nV_nU_nV_nZWN.$$

Ако још два пута применимо Лему прогресије, аналогно добијамо да су Z и W такође Морсови блокови дужине 2^n. Претпоставимо $Z = V_n$. Тада је

$$S = U_nV_nV_nU_nV_nV_nWN,$$

што имплицира (да бисмо избегли преклапање) да је $W = U_n$ и

$$S = \underbrace{U_n}\overbrace{V_nV_n}\underbrace{U_n}\overbrace{V_nV_n}\underbrace{U_n}N,$$

али онда очигледно имамо преклапање на означеном делу, што је контрадикција. Због тога мора $Z = U_n$ и

$$S = U_nV_nV_nU_nV_nU_nWN.$$

Како је W Морсов блок, у случају $W = V_n$ имали бисмо преклапање на подвученом делу:

$$S = U_nV_n\underline{V_nU_nV_nU_nV_n}N.$$

Закључујемо да је $W = U_n$ и коначно је S облика

$$S = U_nV_nV_nU_nV_nU_nU_nN = U_{n+1}V_{n+1}U_{n+1}U_nN,$$

што значи да је у S почетак од $1 + 3 \cdot 2^{n+1}$ облика $U_{n+1}V_{n+1}U_{n+1}0$, што је исто као и у TM. Овим смо показали индукцијски корак и комплетирали доказ. □

3.6. Лема. *Нека су* $X,\ Y \in \{0,1\}^\infty$*, при чему је* Y *коначна и* X *бесконачна реч. Тада је* X *лексикографски најмања реч која почиње са* Y *акко је* $\overline{X}$ *лексикографски највећа реч која почиње са* $\overline{Y}$*.*

Доказ. Нека је X лексикографски најмања реч која почиње са Y и претпоставимо супротно, да постоји реч Z лексикографски већа од $\overline{X}$ која почиње са $\overline{Y}$. Тада је

$$\overline{X} = \overline{Y}U0V \text{ и } Z = \overline{Y}U1V',$$

за неке речи $U,\ V,\ V'$. Међутим, тада је

$$X = Y\overline{U}1\overline{V} \text{ и } \overline{Z} = Y\overline{U}0\overline{V'},$$

одакле X и $\overline{Z}$ обе почињу са Y, али је $\overline{Z}$ лексикографски мања од X што је контрадикција са избором X. Обратан смер се доказује слично. □

3.7. Последица. $\overline{TM}$ *је лексикографски најмања бинарна реч без преклапања која почиње са* 1*.*

Доказ. Из теореме 3.5 је TM лексикографски највећа бинарна реч без преклапања која почиње са 0, па по леми 3.6 је $\overline{TM}$ лексикографски најмања бинарна реч без преклапања која почиње са 1. □

Наредни циљ нам је да пронађемо лексикографски највећу бесконачну бинарну реч без преклапања. Прво наводимо две леме које је показао још Туе у [22], а ми овде изводимо доказе који се могу пронаћи у [8]. Затим још две леме и теорему које су преузете из [3]. Напослетку, као последицу теореме налазимо тражену реч.

3.8. Лема. *Нека је* $\Gamma = \{01, 10\}$*. За сваку реч* $X \in \Gamma^*$ *је* $aXa \notin \Gamma^*$ *за* $a \in \{0,1\}$*.*

Доказ. Свака реч $X \in \Gamma^*$ има једнак број нула и јединица. Реч aXa онда сигурно нема ту особину и самим тим не може бити у Γ^*. □

3.9. Лема. *Нека је* X *бесконачна реч над алфабетом* $\{0,1\}$ *и* φ *Туе–Морсов морфизам. Онда је реч* X *без преклапања акко је* $\varphi(X)$ *реч без преклапања.*

Доказ. ($\Longrightarrow$) Претпоставимо супротно, да реч $\varphi(X)$ има преклапање, тј. да је облика

$$\varphi(X) = UaYaYaV.$$

Изаберимо реч V' такву да је $|UaYaYaV'|$ паран број и $V = V'Z$. Наравно, V и Z су бесконачне речи, а све остале су коначне. Број $|aYaYa| = 2 \cdot |aY| + 1$ је непаран и $|UaYaYaV'|$ је паран па су бројеви $|U|$ и $|V'|$ различите парности. Размотримо случајеве:

- $|U|$ је непаран и $|V'|$ је паран. Нека је $\Gamma = \{01, 10\}$. Пошто је $|Ua|$ паран број и $\varphi(X) = UaYaYaV'Z$, мора $\varphi(R) = Ua \in \Gamma^*$ за неку реч R која је префикс речи X. Даље је $|YaYa|$ паран број, па и $YaYa \in \Gamma^*$. Ако би $|Y|$ био паран број, онда $Y,\ aYa \in \Gamma^*$, што је контрадикција са лемом 3.8. Зато мора $|Y|$ бити непаран број и $|Ya|$ паран, што онда значи, имајући у виду да је $|Ua|$ паран, да је $\varphi(S) = Ua$ за неку реч S која је подреч од X и RSS је префикс речи X. Аналогним резоновањем, пошто је $|V'|$ паран, и за њега је $\varphi(T) = V' \in \Gamma^*$ за неку реч T такву да је $RSST$ префикс речи X. Сада, реч X је облика

  $$X = RSSTN,$$

  али последње слово речи R и S је исто (то је слово $\overline{a}$ јер $\varphi(\overline{a}) = \overline{a}a$). Одатле реч X има преклапање, што је контрадикција.

- $|U|$ је паран и $|V'|$ је непаран. Слично као у претходном случају, постоје речи R, S и T описане у наставку. Важи $\varphi(R) = U \in \Gamma^*$. Број $|aYaY|$ је паран и ако би $|Y|$ био паран, онда $aYa,\ Y \in \Gamma^*$, што је контрадикција са лемом 3.8, па је онда $|Y|$ непаран и $\varphi(S) = aY \in \Gamma^*$. На крају је и $\varphi(T) = aV' \in \Gamma^*$ и

  $$X = RSSTN.$$

  Тада је прво слово речи S и T слово a (јер је $\varphi(a) = a\overline{a}$) и X има преклапање, контрадикција.

Дакле, претпоставка је била погрешна, и реч $\varphi(X)$ је без преклапања. ($\Longleftarrow$) Ово је лакши смер. Ако претпоставимо супротно, да X садржи преклапање $aYaYa$, онда је

$$\varphi(aYaYa) = a\overline{a}\varphi(Y)a\overline{a}\varphi(y)a\overline{a}$$

подреч од $\varphi(X)$, па она садржи преклапање, контрадикција. □

3.10. Лема. *Нека је φ Туе–Морсов морфизам.*

1. *Ако $X,\ Y \in \{0,1\}^*$ и постоје $a,\ b \in \{0,1\}$ таква да је*

   $$U = a\varphi(X) = \varphi(Y)b,$$

   онда је $U = a(\overline{a}a)^{|X|}$.

2. *Ако за $X,\ Y \in \{0,1\}^*$ важи да је $XX = \varphi(Y)$, онда постоји реч $U \in \{0,1\}^*$ таква да је $\varphi(U) = X$.*

Доказ.

1. Важи да је $|\varphi(X)| = |\varphi(Y)| = |U| - 1$, па онда и $|X| = |Y| = k$. Зато можемо записати за слова $x_i,\ y_i \in \{0,1\},\ i \in \{0,1,\ldots,k\}$,

$$X = x_0x_1\ldots x_k,\ \text{ и } Y = y_0y_1\ldots y_k.$$

   То даље, када применимо морфизам, имплицира да је

$$U = ax_0\overline{x_0}x_1\overline{x_1}\ldots x_k\overline{x_k} = y_0\overline{y_0}y_1\overline{y_1}\ldots y_k\overline{y_k}b.$$

   Изједначавајући одговарајућа слова добијамо

$$a = y_0,\ x_0 = \overline{y_0} = \overline{a},\ \overline{x_0} = y_1 = a,\ x_1 = \overline{y_1} = \overline{a},\ldots$$

$$\ldots, x_k = \overline{y_k} = \overline{a},\ \overline{x_k} = b = a,$$

   одакле је јасно $U = a(\overline{a}a)^k = a(\overline{a}a)^{|X|}$, што је и требало показати.

2. Нека је $XX = \varphi(Y)$. Раздвајамо случајеве:

   - $|X|$ је паран број. Тада је X слика половине речи Y, тј.

$$X = \varphi(U),\ \text{ где је } Y = UU.$$

   - $|X|$ је непаран број. Тада се реч X може записати као $X = aA = Bb$, где су a и b из $\{0,1\}$. Речи A и B су сигурно парне дужине, па су слике неких подречи од Y, тј.

$$A = \varphi(R) \text{ и } B = \varphi(S),$$

     што даље даје

$$X = a\varphi(R) = \varphi(S)b.$$

     По 1. је $X = a(\overline{a}a)^{|R|}$, и

$$\varphi(Y) = XX = BbaA = a(\overline{a}a)^{|R|}a(\overline{a}a)^{|R|}.$$

     Речи B и A су слике делова из Y, па због морфизма то мора бити и ba и онда слова a и b морају бити различита. Међутим, то даје контрадикцију у средини прошле формуле, јер ту стоји aa. Дакле, случај $2 \nmid |X|$ се не може ни десити. □

3.11. Лема. *Нека је $X \in \{0,1\}^*$ бесконачна реч, φ Туе–Морсов морфизам и T Туе–Морсова реч. Тада*

1. *$0\varphi(X)$ је без преклапања акко је $1X$ без преклапања;*
2. *$00\varphi(X)$ је без преклапања акко је $1X$ без преклапања и X почиње са 101;*

3. *Речи* $0T,\ 1T,\ 0\overline{T},\ 1\overline{T}$ *су без преклапања;*

4. *Речи* $01\overline{T},\ 10\overline{T},\ 110\overline{T},\ 001001\overline{T}$ *су све без преклапања.*

Доказ.

1. Оба смера радимо контрапозицијом.
   ($\Longrightarrow$) Претпоставимо да реч $1X$ садржи преклапање. Разликујемо два случаја:

   - Преклапање је на почетку, тј. облика $1Y1Y1$, где је $Y1Y1$ префикс речи X. Стога, пошто је φ морфизам, онда је
   $$0\varphi(X) = 0\varphi(Y)10\varphi(Y)10,$$
   па $0\varphi(X)$ садржи преклапање.
   - Преклапање је унутар речи X. Онда по леми 3.9 и $\varphi(X)$ има преклапање, па и $0\varphi(X)$ има такође.

   ($\Longleftarrow$) Нека сада реч $0\varphi(X)$ садржи преклапање. Онда и реч
   $$10\varphi(X) = \varphi(1X)$$
   такође садржи преклапање. По леми 3.9 и реч $1X$ садржи преклапање.

2. ($\Longrightarrow$) Нека је $00\varphi(X)$ без преклапања. Тада је и $0\varphi(X)$ такође без преклапања, па је по 1. и реч $1X$ без преклапања. Нека реч X почиње словима $a,\ b,\ c \in \{0,1\}$. Тада је
   $$1X = 1abcX' \text{ и } 00\varphi(X) = 00a\overline{a}b\overline{b}c\overline{c}\varphi(X'),$$
   и пошто друга реч не садржи преклапање мора $a = 1$, а онда пошто прва не садржи преклапање следи да је $b = 0$. Сада је друга реч облика $001001c\overline{c}\varphi(X')$ и да бисмо избегли преклапање мора бити $c = 1$. Тиме смо доказали да реч X почиње са 101.
   ($\Longleftarrow$) Претпоставимо супротно, да $00\varphi(X)$ садржи преклапање. Пошто је $1X$ без преклапања, по 1. је и $0\varphi(X)$ без преклапања. То онда значи да се у $00\varphi(X)$ преклапање дешава на почетку и да је облика $0Y0Y0$. Претпоставка је и да $X = 101X'$, па је
   $$00\varphi(X) = 00100110\varphi(X'). \tag{3.10}$$
   Посматрајући горњи израз, закључујемо да је дужина речи $|0Y|$ бар 7 (нпр. ако би било $|0Y| = 4$ онда би реч морала да буде са почетком 001000100 што очигледно није, и слично за остале могућности). Зато реч $10\varphi(X')$ мора сигурно као подреч да има 0010011. Али $10\varphi(X')$ је без преклапања јер је по једнакости (3.10)

подреч од $0\varphi(X)$, која је без преклапања. Сада, може се писати да је

$$10\varphi(X') = A0010011B,$$

за неке непразне речи A и B. Али које год да је последње слово речи A у $10\varphi(X')$, мораће да постоји преклапање, а то је контрадикција.

3. Знамо по теореми 3.1 да су T и $\overline{T}$ без преклапања. Стога би преклапање у речима $0T$, $1T$, $0\overline{T}$, $1\overline{T}$ морало да се деси на самом почетку. То би онда значило да T, односно $\overline{T}$ имају префикс облика $YaYa$. Претпоставимо нпр. да T има префикс $YaYa$ и да је изабрано најкраће могуће Y. Пошто је из теореме 2.7 $\varphi(T) = T$ и $|YaYa|$ је паран број, онда је $YaYa$ слика неког префикса речи T, тј.

$$YaYa = \varphi(Z).$$

По 2. из леме 3.10 мора и $Ya = \varphi(U)$ где је $Z = UU$ и важи $U = V\overline{a}$. То даје да је префикс речи T облика $Z = V\overline{a}V\overline{a}$ и он је краћи од $YaYa$, а то је контрадикција са избором Y.

4. Из $01\overline{T} = \varphi(0\overline{T})$, леме 3.9 и чињенице да је из 3. $0\overline{T}$ без преклапања, следи да је и $01\overline{T}$ без преклапања. Аналогно је и $10\overline{T} = \varphi(1\overline{T})$ без преклапања. Реч $110\overline{T}$ можемо записати као део речи

$$0110\overline{T} = \varphi(01\overline{T}) = \varphi(\varphi(0\overline{T})).$$

По 3. је $0\overline{T}$ без преклапања, па су по леми 3.9 речи $\varphi(0\overline{T})$ и $\varphi(\varphi(0\overline{T}))$ без преклапања. То онда даје да је и $110\overline{T}$ као подреч речи без преклапања и сама таква. Последњи циљ је показати да је $001001\overline{T}$ без преклапања. Њу можемо записати као

$$001001\overline{T} = 00\varphi(10\overline{T}).$$

По 2. је она без преклапања акко је $110\overline{T}$ без преклапања (управо показано) и $10\overline{T}$ почиње са 101 (што је тачно). Дакле $001001\overline{T}$ је без преклапања. □

3.12. Теорема. *Нека је за* $X \in \{0,1\}^*$, $\alpha(X) \in \{0,1\}^*$ *лексикографски најмања бесконачна реч без преклапања (ако таква постоји) којој је* X *префикс. Нека је* T *Туе–Морсова реч.*

1. *Ако* $\alpha(X)$ *постоји и* Y *је коначна реч таква да је* $Y\alpha(X)$ *без преклапања, онда је* $\alpha(YX) = Y\alpha(X)$.

2. $\alpha(0) = 001001\overline{T}$.

Доказ.

1. Нека $\alpha(X)$ постоји и $Y\alpha(X)$ је без преклапања. Пошто је за $\alpha(X)$ по дефиницији X префикс, онда је за $Y\alpha(X)$ реч YX префикс. Претпоставимо да је реч YXA бесконачна, без преклапања и
$$YXA \leq Y\alpha(X)$$
(наравно, у лексикографском поретку). Пошто су им префикси Y исти, онда је $XA \leq \alpha(X)$. По дефиницији, $\alpha(X)$ је лексикографски најмања без преклапања којој је X префикс, па је $XA = \alpha(X)$, односно $YXA = Y\alpha(X)$, и $Y\alpha(X) = \alpha(YX)$.

2. Конструишимо почетак речи $\alpha(0)$, водимо рачуна да тражимо лексикографски најмању, без преклапања:
$$0 \mapsto 00 \mapsto 001 \mapsto 0010 \mapsto 00100 \mapsto 001001 \mapsto 0010011 \mapsto \ldots$$
Дакле, њен префикс мора да буде 0010011, па ми у ствари тражимо $\alpha(0010011)$. По 4. из леме 3.11 је $001001\overline{T}$ без преклапања. По последици 3.7 је $\overline{T} = \alpha(1)$. Сада искористимо 1. и имамо да је
$$\alpha(0) = \alpha(0010011) = 001001\overline{T},$$
што је и требало показати. □

3.13. Последица. *Лексикографски највећа бесконачна бинарна реч без преклапања је* $110110TM$.

Доказ. Нека је S тражена реч, пошто је лексикографски највећа, она мора да почиње са 1. По леми 3.6 је онда $\overline{S}$ лексикографски најмања бесконачна бинарна реч без преклапања која почиње са 0. По 2. из теореме 3.12 је $\overline{S} = 001001\overline{TM}$, па је
$$S = 110110TM.$$
□

3.1.1 Конструкција квадратно слободне речи над троелементним алфабетом

У дефиницији 1.11 смо навели да су квадратно слободне речи оне које не садрже факторе облика XX за $|X| \geq 1$. Разматрамо проблем које најмање кардиналности мора бити алфабет да би постојала бесконачна квадратно слободна реч. Ако је алфабет једноелементан $\{0\}$, једине квадратно слободне речи су ε и 0. Видећемо да је над двоелементним такође немогућа конструкција бесконачне квадратно слободне речи, али над троелементним је могућа уз помоћ Туе–Морсове речи и битну улогу ће одиграти чињеница да она не садржи преклапања. У овој секцији се углавном користе извори [24], [2] и [7].

3.14. Теорема. *Не постоји бесконачна квадратно слободна реч над двоелементним алфабетом.*

Доказ. Нека је алфабет $\{0,1\}$. Покушајмо да конструишемо такву реч почевши од 0:

$$0 \mapsto 01 \mapsto 010 \mapsto$$

и даље не можемо наставити. Друго слово је морало бити 1 да бисмо избегли квадрат 00, затим да бисмо избегли квадрат 11 морали смо изабрати 0 за треће, а онда за четврто слово немамо избор, 0 би направила квадрат 00, а 1 би направила квадрат 0101. Слично, ако за прво слово ставимо 1:

$$1 \mapsto 10 \mapsto 101 \mapsto$$

и поново се низ не може наставити даље. Дакле, над двоелементним алфабетом је најдужа квадратно слободна реч дужине три, а бесконачна не постоји. □

3.15. Теорема. *Постоји бесконачна квадратно слободна реч над троелементним алфабетом.*

Доказ. Конструисаћемо бесконачну квадратно слободну реч над алфабетом $\{0,1,2\}$. За Туе–Морсову реч TM је t_n n-то слово у њој, за све $n \geq 0$. Реч C дефинишемо са: c_n је број јединица у TM који се појављује између n-те и $(n+1)$-е нуле, за $n \geq 0$. Јасно, пошто је TM бесконачна, и C је. Треба показати две ствари, да је C заиста реч над алфабетом $\{0,1,2\}$ и да је квадратно слободна. Прво, ако би за неко n било $c_n \geq 3$ то би значило да се негде у TM појављују бар три јединице заредом, а то би имплицирало да TM има преклапање, што је контрадикција са теоремом 3.1. Дакле, C је добро дефинисана. Следеће, ако претпоставимо супротно, да C није квадратно слободна, односно има фактор XX за $X = x_0x_1\ldots x_k \in \{0,1,2\}^*$. То значи да у TM постоји фактор облика

$$\underbrace{0}\underbrace{1^{x_0}01^{x_1}0\ldots01^{x_k}}\underbrace{0}\underbrace{1^{x_0}01^{x_1}0\ldots01^{x_k}}\underbrace{0}$$

јер од C добијамо TM тако што стављамо 0, па онолико јединица колико износи члан C, па опет 0, итд. Онда у TM имамо преклапање означено на формули изнад, а то је контрадикција. Дакле, C је бесконачна квадратно слободна реч над троелементним алфабетом. □

Конструкцију исте бесконачне квадратно слободне речи над троелементним алфабетом из претходне теореме дао је још Туе у [23] на следећи начин. Посматрамо морфизам $\tau : \{0,1,2\}^* \to \{0,01,011\}^*$ дефинисан са:

$$0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 01,\ 2 \mapsto 011.$$

Пошто TM не садржи преклапања, а тиме ни фактор 111 онда се може показати да је

$$\tau(C) = TM.$$

Тако се реч C може конструисати као инверзна слика TM дефинисаним морфизмом τ. Још једна интересантна конструкција речи C може се пронаћи у [7].

Глава 4

Примена у теорији бројева

4.1 Пруе–Тари–Ескотов проблем

У овом поглављу бавимо се везом између Туе–Морсове речи и познатог проблема из теорије бројева, тзв. Пруе–Тари–Ескотовог проблема. Проблем је добио име по тројици познатих математичара. Прво се њиме бавио Ежен Пруе у [19] и дао једно опште решење засновано на примени Туе–Морсове речи још давне 1851. године. Друга два научника су Гастон Тари[1] и Едвард Ескот[2], који су се овим проблемом бавили око 1910. године. Ми ћемо дефинисати проблем, дати решење у неким специјалним случајевима, а затим ћемо посматрати и општији проблем и његова решења. Ослањамо се углавном на резутате из [7] и [24].

4.1. Дефиниција. *(***Пруе–Тари–Ескотов проблем***) За природне бројеве n и k треба пронаћи дисјунктне скупове целих бројева $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ такве да важи:*

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \\
a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2, \\
a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 &= b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3, \\
&\vdots \\
a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k &= b_1^k + b_2^k + \cdots + b_n^k.
\end{aligned}$$

[1]Gaston Tarry (1843–1913), француски математичар-аматер, познат по томе што је потврдио Ојлерову хипотезу да је могуће конструисати грчко-латински квадрат димензија 6×6.

[2]Edward Brind Escott, амерички математичар, дипломирао на универзитету у Мичигену.

Тада скупове $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *и* $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ *називамо решење Пруе–Тари–Ескотовог проблема и пишемо*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \stackrel{k}{=} (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Број n *називамо величина решења, а број* k *је степен решења. Ако је* $n = k + 1$*, таква решења називамо идеална.*

4.2. Пример. Једно решење величине 4 и степена 3 је

$$(0, 4, 7, 11) = (1, 2, 9, 10).$$

Заиста, важе следеће једнакости:

$$0 + 4 + 7 + 11 = 22 = 1 + 2 + 9 + 10,$$

$$0^2 + 4^2 + 7^2 + 11^2 = 186 = 1^2 + 2^2 + 9^2 + 10^2,$$

$$0^3 + 4^3 + 7^3 + 11^3 = 1738 = 1^3 + 2^3 + 9^3 + 10^3.$$

Ово је уједно и пример идеалног решења. Наравно, нису сва решења идеална, нпр. видећемо да је решење и $(0, 3, 5, 6) \stackrel{2}{=} (1, 2, 4, 7)$, а оно је величине 4 и степена 2, па није идеално.

Наредну теорему је показао Хонсбергер у [13], а затим као њен специјални случај добијамо резултат Пруа из [19].

4.3. Теорема. *Нека је* $(t_n)_{n \geq 0}$ *Туе–Морсов низ. За* $k \geq 0$ *дефинишимо скупове:*

$$X_k = \{i < 2^{k+1} : t_i = 0\},$$

$$Y_k = \{i < 2^{k+1} : t_i = 1\}.$$

За сваки полином f *са целобројним коефицијентима и* $deg(f) \leq k$ *важи*

$$\sum_{i \in X_k} f(i) = \sum_{i \in Y_k} f(i).$$

Доказ. Приметимо прво да скупови X_k и Y_k имају исти број елемената. То се лако показује индукцијом по k. За $k = 0$ је $X_0 = \{0\}$ а $Y_0 = \{1\}$ јер је $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$. Ако претпоставимо да то важи за произвољно k, онда за $k+1$ су чланови Туе–Морсовог низа од 2^{k+1} до 2^{k+2} по теореми 2.4 добијени једноставно заменом 0 са 1, и обратно у првих 2^{k+1} чланова. То онда директно даје, да ако смо имали исти број 0 и 1 у првих 2^{k+1}, онда је исти број и у првих 2^{k+2}, што онда значи да X_{k+1} и Y_{k+1} имају исти број елемената. И тврђење теореме доказује се индукцијом по k. Ако је $k = 0$, тј. степен полинома је 0 онда је $f = C = const.$ и сума се своди на

$$\sum_{i \in X_k} C = \sum_{i \in Y_k} C,$$

односно
$$|X_k| \cdot C = |Y_k| \cdot C,$$
што је тачно јер смо изнад показали да је $|X_k| = |Y_k|$. Сада претпоставимо да тврђење важи за све полиноме степена мањег или једнаког k и покажимо да важи и за све полиноме степена мањег или једнаког $k+1$. Нека је g произвољан полином са целобројним коефицијентима такав да је $deg(g) \leq k+1$. Дефинишимо помоћни полином h са
$$h(x) = g(x + 2^{k+1}) - g(x),\ x \geq 0.$$
Приметимо да из $deg(g) \leq k+1$ следи $deg(h) \leq k$ (чланови степена $k+1$ се потиру). За полином h важи индукцијска хипотеза:
$$\sum_{i \in X_k} h(i) = \sum_{i \in Y_k} h(i),$$
односно
$$\sum_{i \in X_k} (g(i + 2^{k+1}) - g(i)) = \sum_{i \in Y_k} (g(i + 2^{k+1}) - g(i)),$$
$$\sum_{i \in X_k} g(i + 2^{k+1}) - \sum_{i \in X_k} g(i) = \sum_{i \in Y_k} g(i + 2^{k+1}) - \sum_{i \in Y_k} g(i),$$
$$\sum_{i \in X_k} g(i + 2^{k+1}) + \sum_{i \in Y_k} g(i) = \sum_{i \in Y_k} g(i + 2^{k+1}) + \sum_{i \in X_k} g(i). \tag{4.1}$$
Из теореме 2.4, пошто је $T_{2^{k+2}} = T_{2^{k+1}}\overline{T_{2^{k+1}}}$, следи да је $t_{i+2^{k+1}} = \overline{t_i}$, за $i < 2^{k+1}$. Одатле онда можемо закључити да
$$i \in X_k \text{ акко } i + 2^{k+1} \in Y_{k+1} \setminus Y_k,$$
јер $i < 2^{k+1}$ и $t_i = 0$ акко $2^{k+1} \leq i + 2^{k+1} < 2^{k+2}$ и $t_{i+2^{k+1}} = 1$. Аналогно се може закључити да
$$i \in Y_k \text{ акко } i + 2^{k+1} \in X_{k+1} \setminus X_k.$$
Сада једначина (4.1) постаје
$$\sum_{i+2^{k+1} \in Y_{k+1} \setminus Y_k} g(i + 2^{k+1}) + \sum_{i \in Y_k} g(i) = \sum_{i+2^{k+1} \in X_{k+1} \setminus X_k} g(i + 2^{k+1}) + \sum_{i \in X_k} g(i),$$
$$\sum_{j \in Y_{k+1} \setminus Y_k} g(j) + \sum_{i \in Y_k} g(i) = \sum_{j \in X_{k+1} \setminus X_k} g(j) + \sum_{i \in X_k} g(i),$$
одакле коначно добијамо
$$\sum_{i \in Y_{k+1}} g(i) = \sum_{i \in X_{k+1}} g(i),$$
чиме смо доказали индукцијски корак, а тиме и целу теорему. □

4.4. Последица. *За свако $k \geq 1$ постоји решење Пруе–Тари–Ескотовог проблема које је величине 2^k и степена k.*

Доказ. Нека је дато $k \geq 1$ и нека су скупови X_k и Y_k дефинисани као у теореми 4.3. Онда они, као што смо већ показали, имају исти број елемената и укупно 2^{k+1} елемената, па су оба кардиналности 2^k. Дефинишимо полиноме $f_j(x) = x^j$, за $1 \leq j \leq k$. Сви они су степена мањег или једнаког k, па је по теореми 4.3

$$\sum_{i \in X_k} f_j(i) = \sum_{i \in Y_k} f_j(i), \text{ за } 1 \leq j \leq k,$$

$$\sum_{i \in X_k} i^j = \sum_{i \in Y_k} i^j, \text{ за } 1 \leq j \leq k,$$

што по дефиницији значи да је $X_k \stackrel{k}{=} Y_k$, односно то је решење Пруе–Тари–Ескотовог проблема величине 2^k и степена k. □

4.5. Пример. За $n = 8 = 2^{2+1}$ и $k = 2$ можемо користећи теорему 4.3 наћи једно решење Пруе–Тари–Ескотовог проблема. Одредимо скупове X_2 и Y_2, то су индекси чланова Туе–Морсовог низа до 7-ог, једнаких 0 и 1, респективно. Почетак Туе–Морсове речи је

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 & \dots \end{array}$$

Стога је $X_2 = \{0, 3, 5, 6\}$ и $Y_2 = \{1, 2, 4, 7\}$ и по теореми 4.3 за полиноме $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = x^2$ важи

$$\sum_{i \in X_2} f_j(i) = \sum_{i \in Y_2} f_j(i), \text{ за } j = 1, 2,$$

односно

$$0 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 7,$$

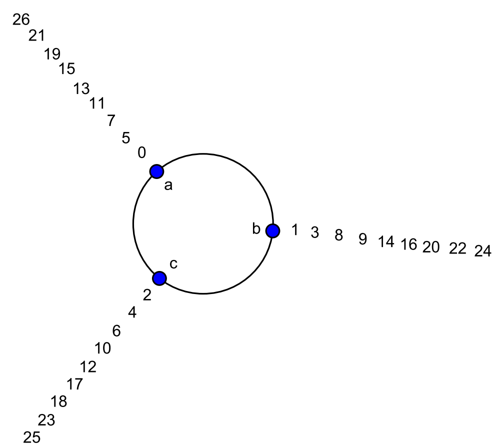
$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2,$$

и ово је једно решење $(0, 3, 5, 6) \stackrel{2}{=} (1, 2, 4, 7)$.

4.6. Напомена. Пруе се бавио и општијим проблемом, како пронаћи m дисјунктних скупова, тако да су свака два решења Пруе–Тари–Ескотовог проблема степена k. У решавању тог проблема може се искористити уопштена Туе–Морсова реч. Имајући у виду последицу 4.4 сада разматрамо како скуп $X = \{0, 1, \dots, n^{k+1} - 1\}$ да раздвојимо на n дисјунктних скупова таквих да свака два скупа образују решење Пруе–Тари–Ескотовог проблема степена k. Распоређујемо елементе скупа X на следећи начин. Направимо круг и на њему нумеришемо редом

n различитих тачака које ће представљати тражене скупове. Затим кренувши од 0, коју ставимо поред прве тачке, остале бројеве распоређујемо редом по тачкама, с тим што прескачемо једну тачку за сваки умножак броја n, прескачемо две тачке за сваки умножак n^2, итд. за сваки умножак n^t прескачемо t тачака. Радимо све док не потрошимо све бројеве из скупа X. Тиме добијамо поделу која је решење општег Пруе–Тари–Ескотовог проблема. Наиме, овакво распоређивање бројева из скупа X је еквивалентно томе да напишемо реч $TM^{n,n}$ и у зависности од вредности $t_s^{n,n}$ одређујемо у који од скупова стављамо s, за $s \geq 0$. Доказ да је ово заиста добро решење може се пронаћи у [16]. Илустрацију овог поступка ћемо видети на следећем примеру:

4.7. Пример. Посматрамо проблем за $n = 3$ и $k = 2$. Хоћемо скуп $\{0, 1, \ldots, 26\}$ да поделимо у три дисјунктна скупа A, B, C таква да је $A \stackrel{2}{=} B \stackrel{2}{=} C \stackrel{2}{=} A$. Описани алгоритам поделе по скуповима је да на-



Слика 4.1: Подела скупа $\{0, 1, \ldots, 26\}$

правимо круг и на њему три тачке a, b, c и бројеви које запишемо поред њих ће бити елементи скупова A, B, C, редом. 0 запишемо поред слова a, затим бројеве пишемо редом поред слова, с тим што за бројеве $3, 6, 12, 15, 21, 24$ прескачемо по једну тачку, а за бројеве 9 и 18 прескачемо по две тачке. Визуелно је ово представљено на слици 4.1. Исту поделу могли смо да направимо посматрајући уопштену Туе–Морсову реч

$$TM^{3,3} = 012120201120201012201012120\ldots$$

и распоређујући бројеве из $\{0,1,\ldots,26\}$ у скупове A,B,C тако што i иде у скуп A ако је $t_i^{n,n}=0$, у скуп B ако је $t_i^{n,n}=1$ и у скуп C ако је $t_i^{n,n}=2$. Пратећи $TM^{3,3}$ горе написану, видимо да ово распоређивање одговара оном са слике 4.1. Поделом смо добили скупове

$$\begin{aligned} A &= \{0,5,7,11,13,15,19,21,26\},\\ B &= \{1,3,8,9,14,16,20,22,24\},\\ C &= \{2,4,6,10,12,17,18,23,25\}. \end{aligned}$$

Непосредном провером утврђујемо да су тачне једнакости:

$$\begin{aligned} & 0+5+7+11+13+15+19+21+26\\ &= 1+3+8+9+14+16+20+22+24\\ &= 2+4+6+10+12+17+18+23+25 = 117, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0^2+5^2+7^2+11^2+13^2+15^2+19^2+21^2+26^2\\ &= 1^2+3^2+8^2+9^2+14^2+16^2+20^2+22^2+24^2\\ &= 2^2+4^2+6^2+10^2+12^2+17^2+18^2+23^2+25^2 = 2067, \end{aligned}$$

и ово је тражено решење.

4.2 Израчунавање граничне вредности одређеног низа

Проблем граничне вредности низа

$$\frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}},\ \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}},\ \frac{\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}}}{\frac{\frac{\frac{9}{10}}{\frac{11}{12}}}{\frac{\frac{13}{14}}{\frac{15}{16}}}},\ \ldots$$

поставио је Вудс у [25], и испоставило се да посматрани низ има тесну везу са Туе–Морсовом речи. У овом поглављу бавићемо се решавањем наведеног проблема. Ослањамо се на радове [1] и [24].

Прво покушајмо математички прецизније да запишемо дати низ. Означимо посматрани низ са $(s_n)_{n\geq 0}$. Онда је његов општи члан облика

$$s_n = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{1}{2}}{\vdots}}{2^n}}{\cfrac{\cfrac{\cfrac{2^n+1}{2^n+2}}{\vdots}}{2^{n+1}}}.$$

Запишимо чланове низа у једноставнијем облику:

$$\frac{1}{2}, \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}, \frac{1\cdot 4\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 8}, \frac{1\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 14\cdot 16}, \dots$$

Сада можемо закључити да се 1 и 2 увек јављају са супротних страна разломачке црте, затим се 3 и 4 јављају у обрнутом распореду у односу на њих. Наредна четири броја су распоређена обрнуто од $1, 2, 3, 4$, итд. Дакле, ако знамо где у односу на разломачку црту стоје бројеви $1, 2, \dots, 2^n$, онда $2^n + 1$ иде са супротне стране у односу на 1, $2^n + 2$ иде са супротне стране у односу на 2, и тако до краја, 2^{n+1} иде са супротне стране у односу на 2^n. Направимо низ над $\{0, 1\}$ такав да је k-ти члан 0 ако је k изнад разломачке црте, а 1 ако је k испод разломачке црте у запису низа $(s_n)_{n\geq 0}$, за $k \in \mathbb{N}$, онда тај низ почиње са

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$$

што је управо Туе–Морсов низ. Из дефиниције Туе–Морсовог низа из теореме 2.4 и из закључка који смо извели о томе како се бројеви постављају у односу на разломачку црту следи следећа, формалнија дефиниција низа.

4.8. Дефиниција. *Општи члан низа* $(s_n)_{n\geq 0}$ *је облика*

$$s_n = \prod_{k=0}^{2^{n+1}} (k+1)^{(-1)^{t_k}},$$

где је $(t_k)_{k\geq 0}$ *Туе–Морсов низ.*

Да бисмо израчунали граничну вредност низа, биће нам потребан још један облик општег члана низа. Наиме, ако чланове низа посматрано у следећем облику:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{15}{16}, \dots$$

и имајући у виду претходне закључке јасно је да се сваки разломак у члановима низа јавља у облику $\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}$, за све $k \geq 0$. Стога, јасно је следеће тврђење.

4.9. Лема. *Општи члан низа* $(s_n)_{n\geq 0}$ *је облика*

$$s_n = \prod_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}},$$

где је $(t_k)_{k\geq 0}$ *Туе–Морсов низ.*

4.10. Теорема. *Гранична вредност низа* $(s_n)_{n\geq 0}$ *је*

$$\prod_{k=0}^{\infty}(k+1)^{(-1)^{t_k}} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказ. Означино границу низа са

$$S = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}.$$

Прво покажимо да наведени производ постоји, тј. да низ парцијалних производа $(S_n)_{n\geq 0}$ конвергира. Ако на њега применимо логаритам, производ ће прећи у суму

$$\begin{aligned}
\log(S_n) &= \log\left(\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \log\left(\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{t_k} \log\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{t_k} \log\left(\frac{2k+2-1}{2k+2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{t_k} \log\left(1-\frac{1}{2k+2}\right) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{t_k}\left(-\log\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Сада по Дирихлеовом критеријуму, пошто је низ парцијалних сума $|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{t_k}|$ ограничен и низ $-\log\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)$ конвергира ка 0 (јер опада и низ $1-\frac{1}{2k+2}$ конвергира ка 1), следи да је посматрани логаритмовани низ парцијалних производа конвергентан. Тиме смо показали да постоји и бесконачни производ S. Уведимо помоћни производ

$$R = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}.$$

Слично као и за S и он постоји, тј. његов низ парцијалних производа $(R_n)_{n\geq 0}$ конвергира, јер када га логаритмујемо имамо

$$\begin{aligned}\log(R_n) &= \log\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{t_k}\log\left(\frac{2k}{2k+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{t_k}\log\left(1-\frac{1}{2k+1}\right) = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{t_k}\left(-\log\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\right),\end{aligned}$$

а овај низ конвергира по Дирихлеовом критеријуму. Сада, направимо производ

$$\begin{aligned}R\cdot S &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}\cdot\prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}} = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}.\end{aligned}$$

У наставку, производ $R\cdot S$ можемо да раздвојимо на парне и непарне чланове и имамо

$$R\cdot S = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{(-1)^{t_k}} = \frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_{2k}}}\cdot\prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_{2k+1}}}.$$

Користећи из дефиниције 2.1 да је $t_{2k}=t_k$ и $t_{2k+1}=\overline{t_k}$ следи да је

$$\begin{aligned}R\cdot S &= \frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}\cdot\prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k+1}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}\cdot\prod_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{(-1)^{t_k}}\cdot\left(\prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{(-1)^{t_k}}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\cdot R\cdot S^{-1}.\end{aligned}$$

Из једнакости $R\cdot S = \frac{1}{2}\cdot R\cdot S^{-1}$, пошто је $R\neq 0$, следи да је

$$S^2 = \frac{1}{2},$$

одакле је, пошто је S позитивно, коначно

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

што је и требало показати. $\square$

4.3 q-развоји

У овом поглављу бавимо се тзв. q-развојима (често се користи и термин β-развоји), односно представљањем реалних бројева у нецелобројним базама. Битна разлика између оваквих и класичних целобројних развоја је што број не мора имати јединствен q-развој. Да бисмо показали везу са Туе–Морсовом речи, биће потребно прво показати четири помоћне леме и једну теорему као њихову последицу. Ту користимо извор [9]. Затим користимо [15] и показујемо још три леме, као и теорему која одатле следи. Након тога изводимо одређени закључак о траженој вези између β-развоја и Туе–Морсове речи. Користимо и извор [1].

4.11. Дефиниција. *Нека је дат реалан број $q \in (1, 2]$. q-развојем броја x зовемо свако представљање x облика*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i}, \ \varepsilon_i \in \{0, 1\}. \tag{4.2}$$

Овај развој краће записујемо са $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$.

4.12. Напомене.

1. Када кажемо q-развој и не нагласимо ког броја x, онда се подразумева да је то развој броја 1, тј. q-развој је
$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i}, \ \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

2. Формула за суму геометријског реда је
$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}.$$
Стога је
$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} (q^{-1})^i = \frac{1}{1-q^{-1}} = \frac{1}{\frac{q-1}{q}} = \frac{q}{q-1},$$
одакле је
$$\sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} = \frac{q}{q-1} - 1 = \frac{1}{q-1}.$$
Имајући у виду једначину (4.2), следи да је q-развој могућ за бројеве $x \in \left[0, \dfrac{1}{q-1}\right]$.

4.13. Примери.

1. За произвољно $q \in (1,2]$ и $x = 0$ је увек јединствен q-развој, сви $\varepsilon_i = 0$:
$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 \cdot q^{-i}.$$

2. За $q = 2$ и $x = 1$ је
$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 \cdot 2^{-i},$$
односно $\varepsilon_i = 1$ за све i, и ово је очигледно једини 2-развој броја 1.

4.14. Напомена. Видели смо у претходном примеру да за $q = 2$ постоји само један 2-развој броја 1, али природно је очекивати да се за све остале $q \in (1,2)$ може наћи више различитих q-развоја броја 1 јер можемо да искључимо бесконачно много фактора q^{-i} а да остатак опет буде већи од 1. Показано је да за скоро све $q \in (1,2)$ постоји $2^{\aleph_0}$ различитих q-развоја броја 1, али у раду [10] показано је да постоји и $2^{\aleph_0}$ оних за које постоји јединствен q-развој. Ми ћемо се у овом поглављу бавити баш таквим. Одредићемо најмање q такво да је q-развој броја 1 јединствен.

4.15. Дефиниција. *За $q \in (1,2]$ и $x \in \left[0, \frac{1}{q-1}\right]$ развој*
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i},\ \varepsilon_i \in \{0,1\}$$
називамо

1. *јаки q-развој броја x ако за све $n \in \mathbb{N}$ важи*
$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + q^{-n} \le x, \\ 0, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + q^{-n} > x; \end{cases}$$

2. *слаби q-развој броја x ако за све $n \in \mathbb{N}$ важи*
$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + \sum_{i>n} q^{-i} \ge x, \\ 1, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + \sum_{i>n} q^{-i} < x. \end{cases}$$

4.16. Напомене.

1. Из дефиниције 1.22 знамо лексикографски поредак на речима, а развој $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ се може гледати и као реч над азбуком $\{0,1\}$. Стога, за фиксирано q, може се увести лексикографски поредак међу различитим q-развојима броја x са
$$(\varepsilon_i)_{i\geq 1} < (\varepsilon'_i)_{i\geq 1} \text{ акко } (\exists m \in \mathbb{N})(\forall i < m)(\varepsilon_i = \varepsilon'_i \wedge \varepsilon_m < \varepsilon'_m),$$
где су $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ и $(\varepsilon'_i)_{i\geq 1}$ два q-развоја броја x.
2. Из дефиниција се лако види да се код јаког развоја бира $\varepsilon_i = 1$ кад год је то могуће, а код слабог се бира $\varepsilon_i = 1$ само кад је то неопходно. Из тог разлога, када посматрамо све q-развоје броја x за фиксиране q и x следи да су јаки и слаби развој највећи и најмањи развој, редом у лесикографском поретку. Одатле можемо закључити да је q-развој броја x јединствен акко се јаки и слаби развој поклапају.

4.17. Лема. *Нека су* $q \in (1,2)$, $x \in \left[0, \dfrac{1}{q-1}\right]$ *и*
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i},\ \varepsilon_i \in \{0,1\}, \tag{4.3}$$
произвољан q-развој броја x.

1. *(4.3) је јаки развој акко*
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\varepsilon_n = 0 \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n+i} q^{-i} < 1). \tag{4.4}$$
2. *(4.3) је слаби развој акко*
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\varepsilon_n = 1 \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n+i}) q^{-i} < 1). \tag{4.5}$$

Доказ.

1. Оба смера показујемо контрапозицијом.

   ($\Longrightarrow$) Нека постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да услов (4.4) не важи. Онда је
$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} = \varepsilon_{n_0+1} q^{-1} + \varepsilon_{n_0+2} q^{-2} + \cdots \geq 1, \text{ и}$$
$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i} &= \varepsilon_1 q^{-1} + \varepsilon_2 q^{-2} + \ldots \\ &= \varepsilon_1 q^{-1} + \varepsilon_2 q^{-2} + \cdots + \varepsilon_{n_0} q^{-n_0} + \varepsilon_{n_0+1} q^{-(n_0+1)} + \varepsilon_{n_0+2} q^{-(n_0+2)} + \ldots \\ &= \varepsilon_1 q^{-1} + \varepsilon_2 q^{-2} + \cdots + 0 \cdot q^{-n_0} + q^{-n_0} \underbrace{(\varepsilon_{n_0+1} q^{-1} + \varepsilon_{n_0+2} q^{-2} + \ldots)} \end{aligned}$$

Затим, пошто је означени део већи или једнак од 1, постоји нови развој такав да је $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ за $i \in \{1, \dots, n_0-1\}$ и $\varepsilon'_{n_0} = 1$, који је онда по дефинисаном лексикографском поретку из претходне напомене већи од $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$. Самим тим не може бити јаки развој, јер од њега постоји већи.

($\Longleftarrow$) Сада претпоставимо да $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ није јаки развој. Онда постоји развој $(\varepsilon'_i)_{i\geq 1}$ који је већи од њега, односно по дефиницији постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i, \text{ за } i < n_0, \ \varepsilon_{n_0} = 0, \ \varepsilon'_{n_0} = 1.$$

Тада је

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i} = \varepsilon_1 q^{-1} + \dots + \varepsilon_{n_0-1} q^{-(n_0-1)} + 0 \cdot q^{-n_0} + \varepsilon_{n_0+1} q^{-(n_0+1)} + \dots$$
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon'_i q^{-i} = \varepsilon'_1 q^{-1} + \dots + \varepsilon'_{n_0-1} q^{-(n_0-1)} + 1 \cdot q^{-n_0} + \varepsilon'_{n_0+1} q^{-(n_0+1)} + \dots$$

Пошто су првих $n_0 - 1$ коефицијената једнаки, следи да је

$$0 \cdot q^{-n_0} + \varepsilon_{n_0+1} q^{-(n_0+1)} + \dots = 1 \cdot q^{-n_0} + \varepsilon'_{n_0+1} q^{-(n_0+1)} + \dots$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-(n_0+i)} = q^{-n_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon'_{n_0+i} q^{-(n_0+i)},$$
$$q^{-n_0} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} = q^{-n_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon'_{n_0+i} q^{-(n_0+i)}.$$

Из последње једнакости следи

$$q^{-n_0} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} \geq q^{-n_0},$$

одакле, множећи неједнакост са $q^{n_0} > 0$, следи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} \geq 1,$$

а већ знамо да је $\varepsilon_{n_0} = 0$, па имамо негацију услова (4.4).

2. Показаћемо да је (4.3) слаби развој броја x акко је

$$\frac{1}{q-1} - x = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_i) q^{-i}$$

јаки развој броја $\dfrac{1}{q-1} - x$. $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ је слаби развој броја x акко

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + \sum_{i>n} q^{-i} \geq x, \\ 1, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + \sum_{i>n} q^{-i} < x. \end{cases}$$

Ово је еквивалентно са

$$1-\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + \sum_{i>n} q^{-i} \geq x, \\ 0, & \text{ако } \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} + \sum_{i>n} q^{-i} < x. \end{cases} \tag{4.6}$$

Даље разложимо услов

$$\sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} - \sum_{i>n} q^{-i} \geq x \; \Big/ \cdot (-1);$$

$$-\sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} - \sum_{i>n} q^{-i} \leq -x;$$

$$\frac{1}{1-q} - \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} - \sum_{i>n} q^{-i} \leq \frac{1}{1-q} - x;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} - \sum_{i<n} \varepsilon_i q^{-i} - \sum_{i>n} q^{-i} \leq \frac{1}{1-q} - x;$$

$$\sum_{i<n} (1-\varepsilon_i) q^{-i} + q^{-n} \leq \frac{1}{1-q} - x.$$

Даље можемо закључити да је (4.6) еквивалентно са

$$1-\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } \sum_{i<n} (1-\varepsilon_i) q^{-i} + q^{-n} \leq \dfrac{1}{1-q} - x, \\ 0, & \text{ако } \sum_{i<n} (1-\varepsilon_i) q^{-i} + q^{-n} > \dfrac{1}{1-q} - x. \end{cases} \tag{4.7}$$

Сада по дефиницији јаког развоја и из еквиваленције (4.7) је $(1-\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ јаки развој за $\frac{1}{1-q} - x$, чиме смо показали еквиваленцију коју смо тражили. Дакле, $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ је слаби развој за x акко је $(1-\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ јаки развој за $\frac{1}{1-q} - x$, што је по 1. еквивалентно са

$$(\forall n \in \mathbb{N})(1-\varepsilon_n = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n+i}) q^{-i} < 1),$$

што је даље еквивалентно са

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\varepsilon_n = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n+i}) q^{-i} < 1),$$

а то је и требало показати. □

4.18. Лема. *Нека су* $q \in (1,2)$, $x \in \left[1, \dfrac{1}{q-1}\right]$ *и*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i}, \;\; \varepsilon_i \in \{0,1\}, \tag{4.8}$$

произвољан q-развој броја x.

1. *Ако је (4.8) јаки развој, онда*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\varepsilon_n = 0 \ \Rightarrow \ (\varepsilon_{n+i})_{i\geq 1} < (\varepsilon_i)_{i\geq 1}). \tag{4.9}$$

2. *Ако је (4.8) јединствен развој, онда важе услов (4.9) и*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\varepsilon_n = 1 \ \Rightarrow \ (1-\varepsilon_{n+i})_{i\geq 1} < (\varepsilon_i)_{i\geq 1}). \tag{4.10}$$

Доказ. Пре свега, нагласимо да $(\varepsilon_{n+i})_{i\geq 1}$ не мора бити q-развој броја x. Овде се неједнакости односе на уобичајени лексикографски поредак на речима над азбуком $\{0,1\}$.

1. Претпоставимо супротно, да услов (4.9) није испуњен за неко n_0. Тада је $\varepsilon_{n_0} = 0$ и $(\varepsilon_{n_0+i})_{i\geq 1} \geq (\varepsilon_i)_{i\geq 1}$. Из леме 4.17 следи да је

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} < 1.$$

   Разликујемо два случаја:

   - $(\varepsilon_{n_0+i})_{i\geq 1} = (\varepsilon_i)_{i\geq 1}$: Тада је

   $$1 \leq x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} < 1,$$

     што је очигледно контрадикција.

   - $(\varepsilon_{n_0+i})_{i\geq 1} > (\varepsilon_i)_{i\geq 1}$: Тада по дефиницији лексикографског поретка имамо

   $$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i < k)(\varepsilon_{n_0+i} = \varepsilon_i \wedge \varepsilon_{n_0+k} = 1 \wedge \varepsilon_k = 0).$$

     Зато важи следеће

   $$\sum_{i<k} \varepsilon_i q^{-i} + q^{-k} = \sum_{i<k} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} + \varepsilon_{n_0+k} q^{-k} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{n_0+i} q^{-i} < 1 \leq x,$$

     што по дефиницији јаког развоја имплицира да је $\varepsilon_k = 1$, а то је контрадикција са претпоставком.

2. Пошто је развој јединствен, он мора бити једнак јаком и слабом развоју, па по 1. важи услов (4.9). Претпоставимо да не важи услов (4.10), односно да за неко $n_0 \in \mathbb{N}$ је $\varepsilon_{n_0} = 1$ и $(1-\varepsilon_{n_0+i})_{i\geq 1} \geq (\varepsilon_i)_{i\geq 1}$. Рекли смо већ да је $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ и слаби развој, па по леми 4.17 је

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n_0+i}) q^{-i} < 1.$$

   Поново разликујемо два случаја:

- $(1-\varepsilon_{n_0+i})_{i\geq 1} = (\varepsilon_i)_{i\geq 1}$: Тада
$$1 \leq x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i q^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n_0+i}) q^{-i} < 1,$$
што је контрадикција.
- $(1-\varepsilon_{n_0+i})_{i\geq 1} > (\varepsilon_i)_{i\geq 1}$: Онда по дефиницији имамо
$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall i < k)(1-\varepsilon_{n_0+i} = \varepsilon_i \wedge 1-\varepsilon_{n_0+k} = 1 \wedge \varepsilon_k = 0).$$
Сада можемо извести следећи низ неједнакости
$$\sum_{i<k} \varepsilon_i q^{-i} + q^{-k} = \sum_{i<k} (1-\varepsilon_{n_0+i}) q^{-i} + (1-\varepsilon_{n_0+k}) q^{-k}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} (1-\varepsilon_{n_0+i}) q^{-i} < 1 \leq x,$$
које по дефиницији јаког развоја имплицирају $\varepsilon_k = 1$ што је контрадикција јер већ имамо $\varepsilon_k = 0$. □

4.19. Лема. *Нека су* $q \in (1,2)$, $x \in [0,1]$, $y \in \left[0, \dfrac{1}{q-1}\right]$ *и* $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$, $(\delta_i)_{i\geq 1}$ *q-развоји за* x *и* y*, редом, такви да је*
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\delta_n = 0 \ \Rightarrow \ (\delta_{n+i})_{i\geq 1} < (\varepsilon_i))_{i\geq 1}. \tag{4.11}$$
Тада ако је развој за x *бесконачан (има бесконачно много јединица), или ако је развој за* y *коначан (има коначно много јединица), онда је* $(\delta_i)_{i\geq 1}$ *јаки развој за* y.

Доказ. По леми 4.17 довољно је да проверимо еквивалентан услов (4.4). Одаберимо произвољно $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $\delta_{n_0} = 0$. Треба показати да је
$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_0+i} q^{-i} < 1. \tag{4.12}$$
Дефинишемо помоћни низ $(n_k)_{k\geq 0}$: n_0 већ имамо одабрано, а остале чланове дефинишемо индуктивно: ако је познато n_k и $\delta_{n_k} = 0$, по услову (4.11) је $(\delta_{n_k+i})_{i\geq 1} < (\varepsilon_i)_{i\geq 1}$, што значи да постоји природан број m такав да је
$$\delta_{n_k+i} = \varepsilon_i, \ \text{за } i < m \text{ и } \delta_{n_k+m} = 0, \ \varepsilon_m = 1,$$
и тада за n_{k+1} бирамо
$$n_{k+1} = n_k + m.$$

За овако изабрану итерацију низа имамо

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1+n_k}^{n_{k+1}} \delta_j q^{-j} &= q^{-n_k} \sum_{t=1}^{m} \delta_{n_k+t} q^{-t} = q^{-n_k} (\sum_{t=1}^{m-1} \delta_{n_k+t} q^{-t} + 0 \cdot q^{-m}) \\
&= q^{-n_k} (\sum_{t=1}^{m-1} \varepsilon_t q^{-t} + q^{-m} - q^{-m}) \\
&= q^{-n_k} (\sum_{t=1}^{m} \varepsilon_t q^{-t} - q^{-m}) \\
&\leq q^{-n_k} (x - q^{-m}) \\
&\leq q^{-n_k} (1 - q^{-m}) \\
&= q^{-n_k} - q^{-(n_k+m)} \\
&= q^{-n_k} - q^{-n_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Ако је развој за x бесконачан, онда је претходна неједнакост стриктна, јер је прва неједнакост у низу изнад стриктна. Покажимо сада неједнакост (4.12). Раздвојићемо случајеве.

- Ако је развој за x бесконачан, онда је

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_0+i} q^{-i} &= q^{n_0} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{n_0+i} q^{-(n_0+i)} \\
&= q^{n_0} \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \delta_i q^{-i} \\
&= q^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1+n_k}^{n_{k+1}} \delta_j q^{-j} \\
&< q^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} (q^{-n_k} - q^{-n_{k+1}}) \\
&= q^{n_0} q^{-n_0} = 1.
\end{aligned}$$

- Ако је развој за y коначан, онда у конструисаном низу постоји члан n_s такав да је за све $i > n_s$ сигурно $\delta_i = 0$. Сада је, слично претходном случају,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{n_0+i}q^{-i} &= q^{n_0}\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\delta_i q^{-i}\\ &= q^{n_0}\sum_{i=n_0+1}^{n_s}\delta_i q^{-i}\\ &= q^{n_0}\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{j=1+n_k}^{n_{k+1}}\delta_j q^{-j}\\ &\le q^{n_0}\sum_{k=0}^{s-1}(q^{-n_k}-q^{-n_{k+1}})\\ &= q^{n_0}(q^{-n_0}-q^{-n_s})\\ &= 1-q^{n_0-n_s}<1.\end{aligned}$$

Овим смо показали еквивалентан услов за јаки развој броја y. □

4.20. Лема. *Нека су $q \in (1,2)$, $x \in [0,1]$, и $(\varepsilon_i)_{i\ge1}$ q-развој за x.*

1. *Ако је испуњен услов (4.9), онда је $(\varepsilon_i)_{i\ge1}$ јаки развој.*
2. *Ако је испуњен услов (4.10), онда је $(\varepsilon_i)_{i\ge1}$ слаби развој.*

Доказ.

1. Дефинишимо $y := x$ и $\delta_i = \varepsilon_i$ за $i \in \mathbb{N}$. Онда су оба развоја истовремено или коначна, или бесконачна, а услов (4.9) је управо даје услов из леме 4.19, па по њој следи да је $(\delta_i)_{i\ge1} = (\varepsilon_i)_{i\ge1}$ јаки развој.

2. Ако је $x = 0$, развој је јединствен, а самим тим и једнак слабом развоју. Ако је $x \in (0,1]$, онда развој $(\varepsilon_i)_{i\ge1}$ мора бити бесконачан. Ако претпоставимо супротно, да је коначан, тј. да постоји $j \in \mathbb{N}$ такво да су сви $\varepsilon_{i+j} = 0$ и $\varepsilon_j = 1$ (не могу сви бити 0 јер је $x > 0$), онда би по услову (4.10) морало

$$(1-\varepsilon_{j+i})_{i\ge1} < (\varepsilon_i)_{i\ge1},$$

али $(1-\varepsilon_{j+i})_{i\ge1}$ је низ у коме је сваки члан једнак 1, па је неједнакост изнад контрадикција. Дакле развој за x је бесконачан. Изаберимо развој $(\delta_i)_{i\ge1} = (1-\varepsilon_i)_{i\ge1}$ за

$$y = \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i q^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty}(1-\varepsilon_i)q^{-i} = \frac{1}{q-1} - x.$$

Јасно, тада, пошто $x \in (0,1]$,

$$y \in \left[\frac{1}{q-1} - 1, \frac{1}{q-1}\right) = \left[\frac{2-q}{q-1}, \frac{1}{q-1}\right) \subseteq \left[0, \frac{1}{q-1}\right],$$

па је све добро дефинисано. Сада из услова (4.10) и дефиниције $(\delta_i)_{i\geq 1}$ следи да су испуњени услови леме 4.19 и по њој је $(\delta_i)_{i\geq 1}$ јаки развој за y. У доказу другог дела леме 4.17 показали смо да је онда то еквивалентно с тим да је $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ слаби развој за x. □

4.21. Теорема. *Нека је $q \in (1,2)$ произвољно и $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ q-развој броја 1.*

1. *$(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ је јаки развој броја 1 акко важи услов (4.9).*
2. *$(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ је јединствен развој броја 1 акко важе услови (4.9) и (4.10).*

Доказ.

1. ($\Longrightarrow$) Следи из првог дела леме 4.18 за $x = 1$.
   ($\Longleftarrow$) Следи из првог дела леме 4.20 за $x = 1$.
2. ($\Longrightarrow$) То је други део леме 4.18 за $x = 1$.
   ($\Longleftarrow$) По првом делу леме 4.20 је $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ јаки развој, а по другом делу исте је то слаби развој. Онда се јаки и слаби развој поклапају, па је развој јединствен. □

4.22. Дефиниција. *Низ $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ називамо прихватљив низ ако важе следећа два услова:*

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(\varepsilon_n = 0 \implies \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\dots < \varepsilon_1\varepsilon_2\dots)$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\varepsilon_n = 1 \implies \overline{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}\dots < \varepsilon_1\varepsilon_2\dots)$,

где се поредак односи на лексикографски поредак.

Приметимо да су услови за прихватљив низ управо услови (4.9) и (4.10) за q-развоје.

4.23. Последица. *Ако се за q-развој броја 1 узима јаки развој, онда постоји строго растућа бијекција између бројева $q \in (1,2)$ за које постоји јединствен q-развој и прихватљивих низова.*

Доказ. Бијекција је јасна из теореме 4.21. Још треба показати да је и строго растућа. Нека је $q_1 < q_2$ за неке $q_1, q_2 \in (1,2)$, и нека су њихови јединствени развоји броја 1 низови $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ и $(\varepsilon'_i)_{i\geq 1}$ (то су уједно и јаки развоји и важе услови (4.9) и (4.10)). Тада ако претпоставимо супротно, да је $(\varepsilon_i)_{i\geq 1} > (\varepsilon'_i)_{i\geq 1}$ (нису једнаки јер би онда $q_1 = q_2$), онда постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је

$$(\forall i \in \mathbb{N})(i < n \implies \varepsilon_i = \varepsilon'_i) \wedge (\varepsilon_n = 1 \wedge \varepsilon'_n = 0).$$

По дефиницији јаког развоја је онда

$$\varepsilon_n = 1 \iff \sum_{i<n} \varepsilon_i q_1^{-i} + q_1^{-n} \leq 1,$$

$$\varepsilon_n' = 0 \iff \sum_{i<n} \varepsilon_i' q_2^{-i} + q_2^{-n} > 1.$$

Дакле,

$$\sum_{i<n} \varepsilon_i q_1^{-i} + q_1^{-n} \leq 1 < \sum_{i<n} \varepsilon_i' q_2^{-i} + q_2^{-n},$$

и пошто је $\sum_{i<n} \varepsilon_i q_1^{-i} = \sum_{i<n} \varepsilon_i' q_2^{-i}$ (исти су коефицијенти), следи да је

$$q_1^{-n} < q_2^{-n},$$

што је контрадикција са $q_1 < q_2$. $\square$

4.24. Лема. *Дефинишимо низ $(\delta_i)_{i\geq 1}$ над скупом $\{0,1\}$ рекурзивно са: $\delta_1 = 1$ и за $n \geq 0$ и већ дефинисане $\delta_1, \dots, \delta_{2^n}$ је*

$$\delta_{2^n+k} = 1 - \delta_k, \text{ за } 1 \leq k < 2^n,$$

$$\delta_{2^{n+1}} = 1.$$

Тада је $(\delta_i)_{i\geq 1} = (t_i)_{i\geq 1}$, где је $(t_i)_{i\geq 0}$ Туе–Морсов низ.

Доказ. Додефинишимо низ $(\delta_i)_{i\geq 1}$ са $\delta_0 = 0$ и покажимо да је то онда баш Туе–Морсов низ. Дефинишимо речи

$$\Delta_{2^k} = \delta_0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}, \text{ за } k \geq 0,$$

и $\Delta_0 = 0$. Користимо дефиницију Туе–Морсове речи из теореме 2.4. Важи да је $\Delta_0 = T_0 = 0$. Показујемо да је за све $k \geq 0$

$$\Delta_{2^{k+1}} = \Delta_{2^k}\overline{\Delta_{2^k}}.$$

Користећи дефиницију низа $(\delta_i)_{i\geq 0}$, важи

$$\begin{aligned}
\Delta_{2^{k+1}} &= \delta_0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}\delta_{2^k}\delta_{2^k+1}\delta_{2^k+2} \dots \delta_{2^{k+1}-1} \\
&= \delta_0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}\delta_{2^k}\delta_{2^k+1}\delta_{2^k+2} \dots \delta_{2^k+(2^k-1)} \\
&= 0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}1(1-\delta_1)(1-\delta_2)\dots(1-\delta_{2^k-1}) \\
&= 0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}\overline{0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}} \\
&= \delta_0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}\overline{\delta_0\delta_1 \dots \delta_{2^k-1}} \\
&= \Delta_{2^k}\overline{\Delta_{2^k}}.
\end{aligned}$$

Сада по теореми 2.4 је $(\delta_i)_{i\geq 1} = (t_i)_{i\geq 1}$. $\square$

4.25. Лема. *Низ* $(\delta_i)_{i\geq 1}$ *дефинисан у претходној леми је прихватљив низ.*

Доказ. У претходној леми смо показали да је то у ствари Туе–Морсов низ без првог члана. Стога, по теореми 2.3 следи, ако је број $k \geq 1$ записан у бази 2 са $k = \alpha_t 2^t + \cdots + \alpha_0$, онда је

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & \text{ако } s_2(k) = \alpha_t + \cdots + \alpha_0 \text{ паран број;} \\ 1, & \text{ако } s_2(k) = \alpha_t + \cdots + \alpha_0 \text{ непаран број.} \end{cases}$$

Показујемо по дефиницији да је низ $(\delta_i)_{i\geq 1}$ прихватљив. Треба показати оба услова из дефиниције 4.22.

1. Нека је $\delta_k = 0$ за неко $k \in \mathbb{N}$. По разматрању изнад се онда k разлаже у бази 2 као $k = \alpha_t 2^t + \cdots + \alpha_0$ и збир $s_2(k) = \alpha_t + \cdots + \alpha_0 \geq 2$ је паран број (не може бити 0 јер би онда морало $k = 0$, а $k \geq 1$). Зато су бар два коефицијента у развоју k једнака 1, и може се за неке $m > n \geq 0$ записати

   $$k = 2^m + 2^n + j,\ 0 \leq j < 2^n.$$

   Ако је $j \neq 0$, развој за број j у бази 2 такође има парно много јединица (за две мање од броја k), па је сигурно $\delta_j = 0$. Показаћемо да важи следећа неједнакост

   $$\delta_{k+1}\delta_{k+2}\cdots < \delta_{j+1}\delta_{j+2}\ldots \tag{4.13}$$

   Раздвојимо случајеве:

   - $m = n + 1$: Тада за $0 < i < 2^{n+1} - j$ важи

     $$j < j + i < 2^{n+1},$$

     па бројеви $s_2(j + i)$ и $s_2(2^{n+1} + 2^n + j + i)$ морају бити исте парности. То је зато што у развоју $j + i$ у бази 2 највећи фактор може бити 2^n. Ако он има тај фактор, онда $j+i = 2^n+t$ и

     $$s_2(2^{n+1}+2^n+j+i) = s_2(2^{n+1}+2^n+2^n+t) = s_2(2^{n+2}+t) = s_2(j+i),$$

     а ако он нема фактор 2^n, онда је

     $$s_2(2^{n+1} + 2^n + j + i) = s_2(j + i) + 2.$$

     Онда се лако закључује да је

     $$\delta_{k+i} = \delta_{2^{n+1}+2^n+j+i} = \delta_{j+i},$$

     за све $0 < i < 2^{n+1} - j$. За $i = 2^{n+1} - j$ је

     $$\delta_{k+i} = \delta_{2^{n+1}+2^n+j+2^{n+1}-j} = \delta_{2^{n+2}+2^n} = 0 < 1 = \delta_{2^{n+1}} = \delta_{j+2^{n+1}-j}.$$

     Дакле у неједнакости (4.13) првих $2^{n+1}-(j-1)$ слова су иста, па на следећем слову имамо $0 < 1$ и цела неједнакост важи.

- $m > n+1$: Онда слично за $0 < i < 2^n - j$ је

  $$j < j + i < 2^n$$

  и у развоју $j+i$ у бази 2 највећи фактор може бити 2^{n-1} па је

  $$s_2(2^m + 2^n + j + i) = s_2(j+i) + 2,$$

  тј. они су исте парности. Зато онда следи да је

  $$\delta_{k+i} = \delta_{2^m+2^n+j+i} = \delta_{j+i},$$

  за све $0 < i < 2^n - j$. Ако је $i = 2^n - j$ онда

  $$\delta_{k+i} = \delta_{2^m+2^n+j+2^n-j} = \delta_{2^m+2^{n+1}} = 0 < 1 = \delta_{2^n} = \delta_{j+2^n-j} = \delta_{j+i}.$$

  Гледамо неједнакост (4.13), првих $2^n - (j-1)$ слова су иста, а на следећем је $0 < 1$ и неједнакост поново важи.

Сада, све док је $j \neq 0$ знамо да је $\delta_j = 0$, па се исти овај поступак може поновити и извести неједнакост (4.13), узевши за ново k баш j. Тиме се неминовно мора доћи до $j = 0$ (у његовом развоју у бази 2 се сваки пут смањују по две јединице), а тиме и до низа неједнакости

$$\delta_{k+1}\delta_{k+2}\cdots < \delta_{j+1}\delta_{j+2}\cdots < \cdots < \delta_1\delta_2\ldots$$

што је управо оно што нам и треба.

2. Нека је сада $\delta_k = 1$. Онда је $s_2(k) \geq 1$ непаран број. Стога за неко $n \geq 0$ можемо записати

$$k = 2^n + j, \text{ где је } 0 \leq j < 2^n.$$

Ако је $j \neq 0$, онда је $s_2(j) = s_2(k) - 1$ и то је паран број, па је $\delta_j = 0$. Сада хоћемо да покажемо

$$\overline{\delta_{k+1}\delta_{k+2}}\cdots < \delta_{j+1}\delta_{j+2}\ldots \tag{4.14}$$

За $0 < i < 2^n - j$ је

$$j < j + i < 2^n,$$

и у развоју $j+i$ се јавља највише степен 2^{n-1} и важи

$$s_2(k+i) = s_2(2^n + j + i) = s_2(j+i) + 1,$$

што значи да су $s_2(k+i)$ и $s_2(j+i)$ различите парности. Стога закључујемо да за $0 < i < 2^n - j$ важи

$$\overline{\delta_{k+i}} = \delta_{j+i}.$$

За $i = 2^n - j$ је

$$\overline{\delta_{k+i}} = \overline{\delta_{2^n+j+2^n-j}} = \overline{\delta_{2^{n+1}}} = \overline{1} = 0 < 1 = \delta_{2^n} = \delta_{j+2^n-j} = \delta_{j+i}.$$

Сада су у неједнакости (4.14) првих $2^n - (j-1)$ слова једнака, а на наредном је $0 < 1$, па је неједнакост тачна. Ако је $j \neq 0$, онда је $\delta_j = 0$, па важи све изведено у 1. и

$$\delta_{j+1}\delta_{j+2}\cdots < \delta_1\delta_2\ldots$$

и онда комбинујући то са (4.14) имамо тражено. Уколико је већ $j = 0$, онда је (4.14) управо други услов за прихватљивост низа.□

4.26. Лема. *Реч добијена од прихватљивог низа $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ не може почињати блоком облика $X\overline{X}$ који се завршава са* 0.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји такав прихватљив низ и да је реч $X = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k$. Пошто се $\overline{X}$ завршава са 0, мора $\varepsilon_k = 1$ и $\varepsilon_{2k} = 0$. Показаћемо да је онда реч која се добија од низа $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ периодична и да јој је период $X\overline{X}$. Претпоставимо да та реч почиње са $n \geq 1$ блокова $X\overline{X}$ и означимо следећи блок дужине k са Y. Дакле, та реч је облика

$$X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}Y\ldots$$

Пошто је $\varepsilon_k = 1$ (крај првог блока X), можемо применити друго правило из дефиниције 4.22. Мора да важи

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}Y\ldots} < X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}Y\ldots \\ \iff &X\overline{X}X\ldots\overline{X}X\overline{Y}\ldots < X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}Y\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies \overline{Y} \leq \overline{X} \\ &\implies X \leq Y. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Сада применимо прво правило из дефиниције 4.22 за $\varepsilon_{2k} = 0$ (крај првог $\overline{X}$ блока). Важи

$$X\overline{X}\ldots X\overline{X}Y\cdots < X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}Y\ldots$$

Одатле следи да је

$$Y \leq X. \tag{4.16}$$

Сада из неједнакости (4.15) и (4.16) следи да је $Y = X$.

Претпоставимо сада да реч добијена од низа $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ почиње са $n \geq 1$ блокова $X\overline{X}$ и да је следећи блок XY где је Y дужине k. Дакле, реч је облика

$$X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}XY\ldots$$

Поново по другом услову дефиниције прихватљивог низа из $\varepsilon_k = 1$ следи да је

$$\overline{\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}XY\ldots} < X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}XY\ldots$$

Сређујући леву страну то је еквивалентно са

$$X\overline{X}X\ldots\overline{X}X\overline{XY}\cdots < X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}XY\ldots$$

и одатле можемо закључити да је $\overline{Y} \leq X$, па следи

$$\overline{X} \leq Y. \tag{4.17}$$

Слично, када применимо прво правило из дефиниције 4.22 за $\varepsilon_{2k} = 0$, следи

$$X\overline{X}\ldots X\overline{X}XY\cdots < X\overline{X}X\overline{X}\ldots X\overline{X}XY\ldots$$

што имплицира да је

$$Y \leq \overline{X}. \tag{4.18}$$

Из неједнакости (4.17) и (4.18) следи да је

$$Y = \overline{X}.$$

Горњом дискусијом смо показали да, ако реч почиње са $n \geq 1$ блокова $X\overline{X}$, онда је и наредни блок такав, односно та реч је периодична. Одатле следи да постоји прихватљив низ који даје периодичну реч облика $ZZZZZ\ldots$, где се реч Z завршава са $\varepsilon_m = 0$. Међутим, по првом услову за периодичан низ, онда је

$$ZZZZ\cdots < ZZZZZ\ldots,$$

што је очигледно немогуће. Дакле, такав прихватљив низ не постоји и почетна претпоставка је погрешна. □

4.27. Теорема. *Низ $(\delta_i)_{i\geq 1}$ је најмањи прихватљив низ у лексикографском поретку прихватљивих низова.*

Доказ. Из леме 4.25 имамо да је $(\delta_i)_{i\geq 1}$ прихватљив низ. Преостаје још показати да је за сваки прихватљив низ $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ испуњено

$$(\varepsilon_i)_{i\geq 1} \geq (\delta_i)_{i\geq 1}.$$

Нека је $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ произвољан прихватљив низ. Ако би било $\varepsilon_1 = 0$, онда по првом услову из дефиниције 4.22 било би

$$\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots < \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots, \tag{4.19}$$

што би значило да је $\varepsilon_2 = 0$. Индуктивно онда следи да су сви $\varepsilon_i = 0$, али тада не може бити испуњена строга неједнакост у (4.19), па имамо контрадикцију. Стога, мора $\varepsilon_1 = 1$. Претпоставимо супротно, да смо пронашли прихватљив низ $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ за који је

$$(\varepsilon_i)_{i\geq 1} < (\delta_i)_{i\geq 1}.$$

По дефиницији лексикографског поретка постоји $n \geq 1$ такво да је

$$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = \delta_1 \dots \delta_n \text{ и } \varepsilon_{n+1} = 0 < 1 = \delta_{n+1}.$$

Међутим, онда постоји $k \geq 0$ такво да је $2^k \leq n < 2^{k+1}$, па важи да је

$$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^k} = \delta_1 \dots \delta_{2^k} \tag{4.20}$$

и

$$\varepsilon_{2^k+1} \dots \varepsilon_{2^{k+1}} < \delta_{2^k+1} \dots \delta_{2^{k+1}}. \tag{4.21}$$

Пошто за све $k \geq 0$ имамо $\delta_{2^k} = 1$, из једнакости (4.20) следи да је $\varepsilon_{2^k} = 1$, а онда, пошто се ради о прихватљивом низу,

$$\overline{\varepsilon_{2^k+1} \dots \varepsilon_{2^{k+1}\dots}} < \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^n k} \dots,$$

што имплицира да је

$$\overline{\varepsilon_{2^k+1} \dots \varepsilon_{2^{k+1}}} \leq \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^k}. \tag{4.22}$$

Сада, користећи дефиницију низа $(\delta_i)_{i\geq 1}$ из леме 4.24 и једнакост (4.21), добијамо

$$\varepsilon_{2^k+1} \dots \varepsilon_{2^{k+1}\dots} < \overline{\delta_1} \dots \overline{\delta_{2^k-1}} 1 \tag{4.23}$$

А пошто је у (4.23) строга неједнакост, можемо на крају ставити 0 и добити неједнакост, а затим искористити једнакост (4.20):

$$\varepsilon_{2^k+1} \dots \varepsilon_{2^{k+1}\dots} \leq \overline{\delta_1} \dots \overline{\delta_{2^k-1}} 0 = \overline{\delta_1 \dots \delta_{2^k}} = \overline{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^k}}. \tag{4.24}$$

Сада из неједнакости (4.22) и (4.24) следи да је

$$\varepsilon_{2^k+1} \dots \varepsilon_{2^{k+1}} = \overline{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2^k}}$$

што значи да реч генерисана прихватљивим низом $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ почиње блоком облика $X\overline{X}$ који се завршава са $\varepsilon_{2^{k+1}} = \overline{\varepsilon_{2^k}} = 0$. Међутим, ово је контрадикција са лемом 4.26. □

Сада, користећи све већ доказано, изводимо коначан закључак.

4.28. Теорема. *Постоји најмање $q \in (1, 2)$ за које постоји јединствен q-развој броја 1, и оно је јединствено позитивно решење једначине*

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} t_i q^{-i},$$

при чему је низ $(t_i)_{i\geq 1}$ Туе–Морсов низ без првог члана $t_0 = 0$.

Доказ. Практично је све већ доказано. лема 4.24 каже да је низ $(\delta_i)_{i\geq 1}$ Туе–Морсов низ без првог члана. Затим је по теореми 4.27 то најмањи прихватљив низ, а по последици 4.23 постоји строго растућа бијекција између прихватљивих низова и бројева $q \in (1,2)$ за које је q-развој јединствен. Стога, q које задовољава једначину из теореме је оно које одговара прихватљивом низу $(\delta_i)_{i\geq 1}$, и као такво је најмање за које је q-развој јединствен. □

4.29. Напомена. Приближно је могуће израчунати q из претходне теореме, користећи Туе–Морсов низ и једнакост коју треба задовољити. Добија се процена

$$1.7872316501 < q < 1.7872316505.$$

Глава 5

Неке куриозитетне примене

У овом поглављу бавићемо се још неким, помало неочекиваним, применама Туе–Морсове речи. Показаћемо и објаснити како је она нашла своју примену у шаху, музици и економији. Користићемо изворе [1], [14], [2], [20].

5.1 Шах и Туе–Морсова реч

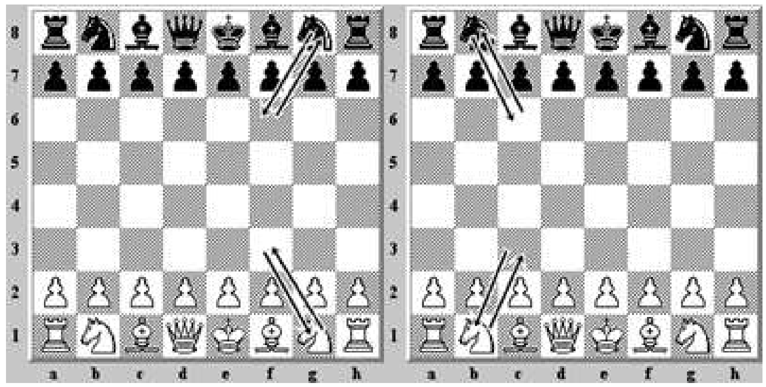
Током историје шаха, његова правила су се мењала у неколико наврата. С циљем избегавања бесконачно дугачких партија, једно време је важило тзв. „немачко правило", по ком се партија завршавала ремијем (нерешеним резултатом) уколико се исти низ потеза одигра три пута узастопно. Без тог правила би се лако могла замислити бесконачно дугачка партија: на пример, оба играча померају једног од својих скакача у првом потезу на једно од дозвољених поља, а у наредном потезу га враћају на почетну позицију, и то понављају бесконачно много пута. Веровало се да наведено правило искључује могућност бесконачно дугачке партије. Међутим, Макс Еве је у свом раду [11], користећи Туе–Морсову реч, показао да се и поред „немачког правила" може одиграти бесконачно дугачка партија шаха.

Словима 0 и 1 придружимо следеће низове потеза

$$1 \longmapsto \text{Сг1–ф3; Сг8–ф6; Сф3–г1; Сф6–г8,}$$
$$0 \longmapsto \text{Сб1–ц3; Сб8–ц6; Сц3–б1; Сц6–б8,}$$

тј. скакачи се померају „напред-назад" као на слици 5.1.

Последица 3.2 каже да је Туе–Морсова реч кубно слободна, па се пратећи њу и описане потезе никада не може десити исти низ потеза три пута заредом, и таква партија шаха је заиста без краја и поред Немачког правила.



Слика 5.1: Потези који одговарају словима 1 и 0, редом

Уместо „немачког правила", у данашњим правилима шаха следећа два правила обезбеђују коначност партије:

1. Партија је реми уколико у последњих 50 потеза није узета ниједна фигура, и није померен ниједан пешак.

2. Партија је реми уколико се у току партије три пута појави иста позиција на табли, а на потезу је исти играч.

Јасно је да свако од ових правила заиста спречава могућност бесконачно дугачке партије (заиста, прво од њих зато што постоји само коначан број могућих узимања као и потеза пешацима, а друго зато што постоји само коначан број могућих позиција). Међутим, формално гледано, бесконачно дугачка партија је ипак могућа, будући да правила предвиђају да се реми у горњим случајевима не проглашава аутоматски, већ само уколико један од играча то захтева; дакле, ипак се може одиграти бесконачно дугачка партија, уколико оба играча то желе.

5.2 Музика и Туе–Морсова реч

Композитор Том Џонсон[1] је у својим композицијама спојио математику и музику, тачније, користећи морфизме и речи које се добијају, написао је неке своје композиције. Он је 1997. године написао композицију под називом „Аутоматска музика" и један део је управо добијен од Туе–Морсове речи. Композиција је написана за шест бубњева, и сви имају по два тона (висок и низак). За реч је онда користио три симбола 1, 2 и 3, при чему 1 означава низак тон, 2 означава висок тон и 3 означава тишину. За део под називом „Хокет" је користио следећи

[1]Tom Johnson (1939–), амерички композитор који данас живи и ради у Паризу, познат по својим композицијама базираним на математичким формулама.

морфизам:

$$13 \longmapsto 1332,$$

$$32 \longmapsto 3213,$$

при чему се почиње од 13. Почетак те композиције је, гледајући математички

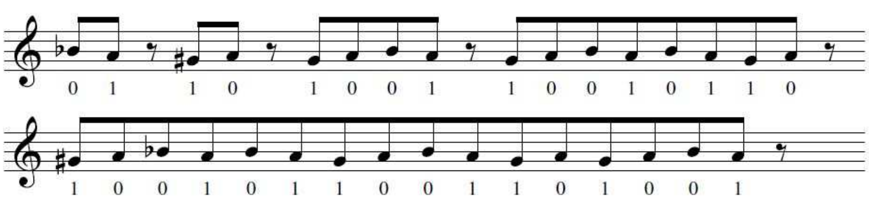
$$133232133213133232131332133232 13\ldots$$

Док је компоновао, није знао да се у ствари ради о Туе–Морсовој речи. Алуше му је указао на то, да ако означи да је

$$0 = 13, \; 1 = 32$$

горња реч у ствари постаје Туе–Морсова реч. Они су заједно написали и рад [5] који говори о коначним аутоматима и њиховој примени у музичким композицијама.

Друга интерпретација је да се у Туе–Морсовој речи 0 интерпретира као тон ниже, а 1 као тон више, тиме се добија композиција са нотним записом на слици 5.2.



Слика 5.2: Музички еквивалент Туе–Морсове речи

5.3 Економија и Туе–Морсова реч

Посматрајмо следећу ситуацију, Ана (A) и Бојана (B) треба да поделе гомилу колача тако што ће их узимати неким редоследом. Притом, има укупно осам колача који су тежине 10, 20, ..., 80 грама, редом. Већина би предложила да је најправеднији редослед да се баци новчић и тако одлучи ко први бира колач, а затим наизменично узимају колаче док их не нестане. Приметимо да имамо осам колача, и тим поступком ће свака добити по четири. Међутим, свака од њих ће евидентно са гомиле узети најтежи колач који може изабрати у том тренутку. Претпоставимо да је новчић одлучио да Ана прва бира, онда су колачи бирани редоследом

$$ABABABAB.$$

Ана ће након поделе имати укупно

$$A = 80 + 60 + 40 + 20 = 200 \text{ грама},$$

док ће Бојана имати

$$B = 70 + 50 + 30 + 10 = 160 \text{ грама.}$$

У чему је проблем, зашто на крају Ана има више него Бојана, ако је дељење било праведно?

Шта ако би редослед био следећи

$$ABBABAAB?$$

И даље радимо под претпоставком да је новчић рекао да Ана прва бира. Оваквом поделом би Ана добила

$$A = 80 + 50 + 30 + 20 = 180 \text{ грама,}$$

а Бојана

$$B = 70 + 60 + 40 + 10 = 180 \text{ грама.}$$

Испоставља се да су оваквом поделом добиле исту количину колача. Приметимо и још један куриозитет, да је распоред поделе баш почетак Туе–Морсове речи.

Наведени проблем праведне поделе се јавља у много озбиљнијим ситуацијама од поделе колача. То је у ствари проблем из економије, како утврдити распоред такмичења између две идентичне стране да би такмичење било што праведније? Тај проблем се јавља при лицитацијама, политичким изборима, свим видовима такмичења (распоред наступа на такмичењу, редослед шутирања пенала у фудбалу, избор боје фигура у шаховским мечевима). На пример, за играча који игра први можемо рећи да наступа растерећеније, па ако освоји поен, онај који игра после њега има већи притисак. У стандардној наизменичној игри, под претпоставком да први играч погађа, други је увек у лошијој позицији. Проблем је како направити распоред тако да ниједна страна нема никакву предност (стратешку, психолошку и сл). Распоред треба одредити унапред, не може се мењати у међувремену, у зависности од резултата било којег такмичара. Постоје два погледа на праведност редоследа. Први, унапред (ex ante), не знајући са каквом успешношћу ће стране играти, дати свима исту предност (на пример, ако бацамо новчић, обе стране имају исту шансу). Други аспект је ако посматрамо на крају (ex post), односно када је такмичење завршено, анализирајући да ли је неко у току такмичења имао било какву предност, требало би да она буде иста за обе стране. Управо овај други аспект се може поправити Туе–Морсовом речи.

Претпоставимо да су у такмичењу две стране, A и B. Бацањем новчића је одлучено да прва наступа страна A, а затим страна B, и то је прва рунда. Уколико је у првој рунди било која страна имала предност, то ћемо поправити тако што ћемо у другој рунди ставити да прво наступа B а затим A. Тиме на крају две рунде су обе стране имале једнаку предност. У наредне две рунде ће редослед бити $BAAB$

па ћемо тиме исправити све грешке у праведности из прве две рунде (ако их је било). Дакле, редослед наступања је био

$$ABBABAAB.$$

У наставку преокрећемо све поново, наступају у редоследу

$$BAABABBA.$$

Видимо да је распоред наступања управо Туе–Морсова реч за $A = 0$ и $B = 1$.

Лоша страна оваквог редоследа је што је увек потребно одиграти 2^k рунди да бисмо могли рећи да је такмичење било фер. Али и поред тога, овакав приступ заиста нуди добро решење постављеног проблема. У стварном свету, најближе овом принципу је распоред сервиса током тај-брејка у тенису. Ако је први сервирао такмичар A, а затим B, онда трећи сервира B, а након њега A, односно редослед је $ABBA$. Међутим, у наставку се такав редослед понавља, нема новог преокретања.

Литература

[1] Allouche, J.-P., Shallit, J. The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence. *Sequences and their applications.* Springer London, p. 1–16, 1999.

[2] Allouche, J.-P., Shallit, J. *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations.* Cambridge University Press, 2003.

[3] Allouche, J.,-P., Currie, J., Shallit, J. Extremal infinite overlap-free binary words. *JOURNAL OF COMBINATORICS*, 5:409–420, 1998.

[4] Allouche, J.-P., Shallit, J. Sums of digits, overlaps, and palindromes. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 4(1):1–10, 2000.

[5] Allouche, J.-P., Johnson, T. Finite automata and morphisms in assisted musical composition. *Journal of New Music Research*, 24(2):97–108, 1995.

[6] Berstel, J. A Rewriting Fife's Theorem about Overlap-free Words. *Results and Trends in Theoretical Computer Science.* Springer Berlin Heidelberg, p. 19–29, 1994.

[7] Berstel, J., Lauve, A., Reutenauer, C., Saliola, F. *Combinatorics on words: Christoffel Word and Repetitions in Words.* Université de Montréal and American Mathematical Society, 2008.

[8] Berstel, J. Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation. *Publication du LaCIM*, 19:1, 1994.

[9] Erdös, P., Joó, I., Komornik, V. Characterization of the unique expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ and related problems. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 118(3):377–390, 1990.

[10] Erdös, P.,Horváth, M., Joó, I. On the uniqueness of the expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$. *Acta Mathematica Hungarica*, 58(3-4): 333–342, 1991.

[11] Euwe, M. *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel.* 1929.

[12] Fife, E.,D. Binary sequences which contain no BBb. *Transactions of the American Mathematical Society*, 261(1):115–136, 1980.

[13] Honsberger, R. *Mathematical diamonds.* Cambridge University Press, 2003.

[14] Johnson, T. *Automatic Music.* http://kalvos.org/johness3.html

[15] Komornik, V., Loreti, P. Unique Developments in Non-Integer Bases. *The American mathematical monthly*, 105(7):636–639, 1998.

[16] Lehmer, D.,E. *The Tarry-Escott problem.* Scripta Mathematica, 1947.

[17] Lothaire, M. *Applied Combinatorics on Words.* Cambridge University Press, 2005.

[18] Morse, M. Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 22(1):84–100, 1921.

[19] Prouhet E. Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres. *CR Acad. Sci. Paris*, 33(225), 1851.

[20] Palacios-Huerta, I. Tournaments, Fairness and the Prouhet–Thue–Morse Sequence. *Economic inquiry*, 50(3):848–849, 2012.

[21] Rampersad, N. *Overlap-free words and Generalizations.* University of Waterloo, 2007.

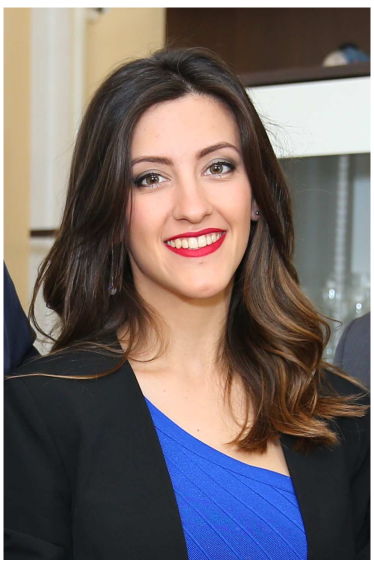
[22] Thue, A. *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen* na, 1912.

[23] Thue, A. Über unendliche zeichenreihen (1906). *Selected Mathematical Papers of Axel Thue.* Universitetsforlaget, 1977.

[24] Williamson, C. *An overwiew of the Thue–Morse Sequence.* Unpublished manuscript, 2012.

[25] Woods, D.,R. *Elementary problem proposal E 2692.* Amer. Math. Monthly, 85:48, 1978.

Биографија



Данијела Митровић рођена је 5. новембра 1993. године у Бијељини, Република Српска. Одрасла је у селу Велика Обарска, надомак Бијељине, где је завршила основну школу „Петар Петровић Његош“ као ученик генерације. Гимназију „Филип Вишњић“ у Бијељини уписала је 2007. године. По завршетку средње школе започела је основне академске студије на Природно-математичком факултету у Новом Саду, 2011. године. Дипломирала је у јуну 2015. године са просечном оценом 9,88 и стекла звање Дипломирани професор математике. Образовање је наставила уписавши јесени 2015. године мастер академске студије, модул Теоријска математика на истом факултету. Положила је све испите предвиђене планом и програмом са оценом 10 и тиме стекла услов за одбрану овог рада. Током студирања била је стипендиста Фонда др Милан Јелић и Фонда за младе таленте „Доситеја“.

Нови Сад, септембар 2016.

Данијела Митровић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Данијела Митровић
АУ

Ментор: Др Бојан Башић
МН

Наслов рада: Туе–Морсова реч и неке њене примене
НР

Језик публикације: српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: српски/енглески
ЈИ

Земља публиковања: Република Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2016.
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад
МА

Физички опис рада: (5, 65, 25, 0, 3, 0, 0)

ФО

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Комбинаторика
НД

Кључне речи: Комбинаторика на речима, Туе–Морсова реч, Туе–Морсов морфизам, преклапање, квадратно-слободна реч, Пруе–Тари–Ескотов проблем, q-развој
ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод: У овом мастер раду бавимо се Туе–Морсовом речи и њеним применама у комбинаторици и теорији бројева. Рад се састоји из пет глава. У првој глави су наведене основне дефиниције из области комбинаторике на речима. Друга глава бави се дефиницијама Туе–Морсове речи и њиховом еквиваленцијом. У трећој глави су изложене основне комбинаторне особине Туе–Морсове речи, између осталог, показано је да је она не садржи преклапања. Затим су помоћу ње утврђене и лексикографски најмања и највећа бинарна реч без преклапања. У овој глави је конструисана и квадратно слободна реч која не садржи преклапања. Наредна глава бави се применом Туе–Морсове речи у теорији бројева, прецизније у решавању Пруе–Тари–Ескотовог проблема, тражењу граничне вредности одређеног низа и q-развојима. У последњој глави је показана повезаност Туе–Морсове речи са шахом, музиком и економијом.
ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 24.06.2016.
ДП

Датум одбране:
ДО

Чланови комисије:
КО

Председник:	Др Игор Долинка, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Ментор:	Др Бојан Башић , доцент, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Члан:	Др Борис Шобот, доцент, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master thesis
CC

Author: Danijela Mitrović
AU

Mentor: Bojan Bašić, PhD
MN

Title: Thue–Morse word and some of its applications
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2016.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: (5, 65, 25, 0, 3, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Combinatorics
SD

Key words: Combinatorics on words, Thue–Morse word, Thue–Morse morphism, overlap, square-free word, Prouhet–Tarry–Escott problem
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This Master's Thesis examines the Thue–Morse sequence and the ways it can be applied in combinatorics and number theory. The thesis consists of five chapters. In the first chapter the basic definitions in combinatorics on words are introduced. The second chapter deals with a variety of definitions of the Thue–Morse sequence and its equivalents. In the third chapter the main combinatorical properties of the Thue–Morse sequence are exposed, among others, that it's an overlap-free word. Furthermore, its usage helps in determining the shortest, as well as the longest, overlap-free word in terms of lexicographic order. This chapter also contains the construction of a square-free word of a three-letter alphabet, with no overlapping. The next chapter deals with the application of the Thue–Morse sequence in number theory, more precisely with solving the Prouhet–Tarry–Escott problem, the search for the limiting value of a particular sequence and the q-extensions. The last chapter shows the connection between the Thue–Morse sequence, chess, music and economy.
AB

Accepted by the Scientific Board on: June 24, 2016.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Igor Dolinka, PhD, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Bojan Bašić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Boris Šobot, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad