



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Dragana Čurović

NEKE POZNATE RAVANSKE KRIVE

- master rad -

Mentor:

Dr Sanja Konjik, vanr. prof.

Novi Sad, 2015.

Predgovor

Iako apstraktna, matematika je nauka koja ispituje pojave i objekte koje nas okružuju, između ostalih i krive. Krive su tvorevine prirode i kao takve sveprisutne oduvek u ljudskim životima intrigirale su hiljadama godina. Prvi dokumentovan interes za krive javio se kod Menehma oko 350 godine pne. Naime, on je proučavao konusne preseke, a istom problematikom bavili su se i Euklid, Arhimed i Apolonije. Diokle je izveo jednačinu cisoide pokušavajući da reši problem duplikacije kocke, a Arhimed je proučavao spiralu pomoću aksiomatskog metoda sintetičke geometrije, koji je upotrebljavan i od strane Menehma, pa sve do početka XVII. U XVII veku Rene Dekart ustanovljava Dekartov koordinatni sistem, čime je omogućen razvoj analitičke geometrije i revolucija u proučavanju krivih. Sa otkrićem infinitezimalnog računa, matematički aparat za ispitivanje krivih postaje još moćniji.

S obzirom na to da je tema ovog rada ispitivanje i prezentacija osobina nekih poznatih ravanskih krivih u Euklidskom vektorskom prostoru, uvodni deo rada biće posvećen upravo ovom prostoru i nekim standardnim operacijama vezanim za njega. Drugo poglavlje je posvećeno lokalnoj i globalnoj teoriji ravanskih krivih i u njemu su obrađeni osnovni pojmovi u vezi sa krivama, neophodni za analizu 15 krivih u završnom delu rada. U trećem delu rada osobine svake od 15 krivih biće detaljno obrađene, a krive prezentovane u Mathematica-i.

Temu rada zanimljivijom čini i činjenica da su algebarske krive upotrebljene u dokazu Fermaove poslednje teoreme kao i to da su između ostalog, upravo algebarske krive neophodne za razumevanje teorije struna. S druge strane, transcendentne krive svoju primenu našle su u kinematici. Činjenica da je razvoj diferencijalne geometrije započeo proučavanjem parametrizovanih ravanskih krivih dodatno veliča značaj ravanskih krivih. O univerzalnosti teme rada govori činjenica da se ravanske krive osim u različitim oblastima matematike - teorija brojeva, kompleksna analiza, diferencijalne jednačine, primenjuju i u kriptografiji, geometrijskoj optici, dizajnu (CAD) i robotici.

Neizmernu zahvalnost dugujem mentorki Sanji Konjik za konstruktivne savete i korisne sugestije u vezi sa ovim radom, kao i za preneto znanje i ukazano strpljenje i razumevanje. Na kraju moram da istaknem da mi je posebna čast bila imati za profesora Stevana Pilipovića i ovom prilikom želim i da mu se zahvalim, kao i profesorici Pušić, na stečenom znanju.

Sadržaj

Predgovor	i
1 Uvod	1
2 Lokalna i globalna teorija krivih	4
3 Neke poznate ravanske krive	22
3.1 Polukubna parabola	22
3.2 Dioklova cisoida	25
3.3 Dekartov list	28
3.4 Paskalov Puž	30
3.5 Kardioda	32
3.6 Figura osam	34
3.7 Bernulijeva lemniskata	36
3.8 Đavolja kriva	38
3.9 Epicikloida i Hipocikloida	39
3.10 Cikloida	42
3.11 Logaritamska spirala	45
3.12 Klotoida (Ojlerova spirala)	49

<i>SADRŽAJ</i>	iii
3.13 Katemptota	51
3.14 Traktrisa	53
Literatura	57
Biografija	58

Glava 1

Uvod

Euklidski n -dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$ je skup svih uređenih n -torki realnih brojeva

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, \dots, p_n), p_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}.$$

Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je vektorski prostor jer su njegovi elementi istovremeno tačke u n -dimenzionalnom prostoru i vektori položaja tih tačaka, u kojem su operacije sabiranja i skalarnog proizvoda vektora dobro definisane, odnosno važi:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n)$$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \sum_{j=1}^n p_j q_j$$

gde su $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ i $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ vektori. Skalarni proizvod je komutativan i važi distributivnost skalarnog množenja prema sabiranju. Pošto je množenje vektora skalarom definisano na sledeći način:

$$\lambda \mathbf{p} = (\lambda p_1, \dots, \lambda p_n)$$

važi

$$\langle (\lambda \mathbf{p}), \mathbf{q} \rangle = \lambda \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, (\lambda \mathbf{q}) \rangle.$$

Pomoću navedenih operacija lako se definišu funkcije norma i rastojanje u $\mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}, \quad \mathbf{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|.$$

Norma ima sledeće svojstvo:

$$\|\lambda \mathbf{p}\| = |\lambda| \|\mathbf{p}\|$$

gde je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Važe još i nejednakost trougla, kao i Koši-Švarcova nejednakost:

$$|\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle| \leq \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|, \quad \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\|.$$

Jasno, položaj dva vektora u Euklidskom prostoru određen je uglom između njih:

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|}.$$

Zbog Koši-Švarcove nejednakosti važi:

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|} \leq 1$$

za nenula vektore $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$.

Za diferencijalnu geometriju ravanskih krivih od velikog značaja je linearno preslikavanje $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisano kao

$$J(p_1, p_2) = (-p_2, p_1).$$

Posmatrano sa geometrijskog aspekta, radi se o rotaciji za ugao $\frac{\pi}{2}$ u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Preslikavanje J ima sledeće osobine:

$$J^2 = -Id$$

$$\langle (J\mathbf{p}), (J\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

$$\langle (J\mathbf{p}), \mathbf{p} \rangle = 0$$

za $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$.

Tačku u $\mathbb{R}^2$ možemo posmatrati kao kompleksan broj zbog kanoničkog izomorfizma

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) \longleftrightarrow p_1 + ip_2 = \operatorname{Re} \mathbf{p} + i \operatorname{Im} \mathbf{p}$$

gde je $\operatorname{Re} \mathbf{p}$ realni deo, a $\operatorname{Im} \mathbf{p}$ imaginarni deo kompleksnog broja $\mathbf{p}$. Konjugovano kompleksni broj $\bar{\mathbf{p}}$ definiše se kao

$$\bar{\mathbf{p}} = \operatorname{Re} \mathbf{p} - i \operatorname{Im} \mathbf{p},$$

moduo kompleksnog broja $\mathbf{p}$ je

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}}.$$

Lema 1.1. *Neka je $\mathbb{R}^2$ skup kompleksnih brojeva i $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Tada važi*

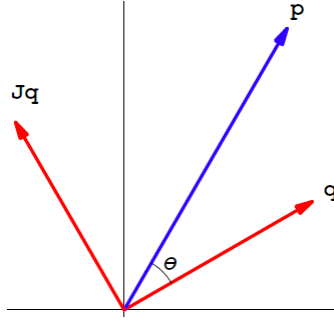
$$J\mathbf{p} = i\mathbf{p} \quad |\mathbf{p}| = \|\mathbf{p}\|, \quad \mathbf{p}\bar{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + i\langle \mathbf{p}, (J\mathbf{q}) \rangle. \quad (1.1)$$

Dokaz. Sledi iz definicija norme, modula kompleksnog broja i preslikavanja J . $\square$

Lema 1.2. *Neka su $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ nenula vektori u $\mathbb{R}^2$. Tada postoji jedinstven broj θ za koji važi*

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|}, \quad \sin \theta = \frac{\langle \mathbf{p}, J\mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{p}\|}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (1.2)$$

θ je orijentisani ugao od $\mathbf{q}$ ka $\mathbf{p}$.

Slika 1.1: Orijentisani ugao θ

Dokaz. Pošto je $|\frac{\langle p, \bar{q} \rangle}{|p||q|}| = 1$, kompleksni broj $\frac{\langle p, \bar{q} \rangle}{|p||q|}$ će ležati na jediničnoj kružnici u $\mathbb{C}$, pa postoji jedinstveno θ , $0 \leq \theta < 2\pi$ i važi:

$$\frac{p\bar{q}}{|p||q|} = e^{i\theta}. \quad (1.3)$$

Kombinujući (1.1) i (1.3) izvodi se:

$$\langle p, q \rangle + i\langle p, Jq \rangle = e^{i\theta}|p||q| = |p||q| \cos \theta + i|p||q| \sin \theta. \quad (1.4)$$

Realni i imaginarni deo izraza (1.4) odgovaraju (1.2). $\square$

Nakon podsećanja na neke algebarske karakteristike prostora $\mathbb{R}^n$, o čemu se više može pronaći u [5], moramo se prisetiti i pojma diferencijabilnosti kao centralnog pojma diferencijalne geometrije, jer tema rada upravo pripada ovoj grani matematike. Konkretno, govorićemo o diferencijabilnosti realnih funkcija definisanih na nekom otvorenom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.3. Funkcija $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencijabilna u tački $x \in U$ ako postoji linearno preslikavanje $A_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takvo da u ε -okolini tačke x važi:

$$F(x + \xi) = F(x) + A_x(\xi) + o(\|\xi\|).$$

A_x je linearno preslikavanje koje se opisuje Jakobijanom od F :

$$J_x F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_x \right)_{i,j}.$$

Rang preslikavanja F u tački x jednak je rang u matrice Jakobijana od F . Za potrebe ovog rada od najvećeg značaja je slučaj kada je funkcija F diferencijabilna u svakoj tački $x \in U$, odnosno kada je rang Jakobijana svuda maksimalan. U ovom slučaju preslikavanje F je imerzija kada je $n \leq m$, odnosno submerzija kada je $n \geq m$. Realna funkcija F je klase $\mathcal{C}^\infty$, ako postoje svi njeni parcijalni izvodi i ako su neprekidni.

Glava 2

Lokalna i globalna teorija krivih

Ova glava je posvećena lokalnoj i globalnoj teoriji krivih u ravni. Na prvi pogled, kriva bi najjednostavnije mogla biti definisana kao neprekidno preslikavanje iz intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$. Međutim, pretpostavka o neprekidnosti je suviše slaba, pa krive definisane na ovaj način mogu imati patološke karakteristike - neprekidna ravanska kriva koja prekriva ceo kvadrat. Prvu ovakvu, beskonačno gustu krivu, opisao je Peano¹. Naime, radi se o krivoj koja je surjektivno, neprekidno preslikavanje $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$. S obzirom na to da se radi o geometrijskom fraktalu, kriva se konstruiše iterativno tako što se u i -toj iteraciji svaki kvadrat iz prethodne iteracije deli na 9 manjih kvadrata i njegov centar zamenjuje se centrima novo dobijenih kvadrata pri čemu je korišćen jedan od četiri načina na koji se kvadrati mogu poredati. Peanova kriva kao graničan slučaj predstavlja krivu koja prolazi kroz centre svih kvadrata kada broj iteracija teži beskonačno (videti sliku 2.1).

Prema tome, osim pretpostavke o neprekidnosti, mora biti ispunjena i pretpostavka o diferencijabilnosti pri definisanju neke funkcije kao krive.

Definicija 2.1. *Parametrizovana kriva u $\mathbb{R}^2$ je diferencijabilno preslikavanje $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, gde je I proizvoljan interval u $\mathbb{R}$.*

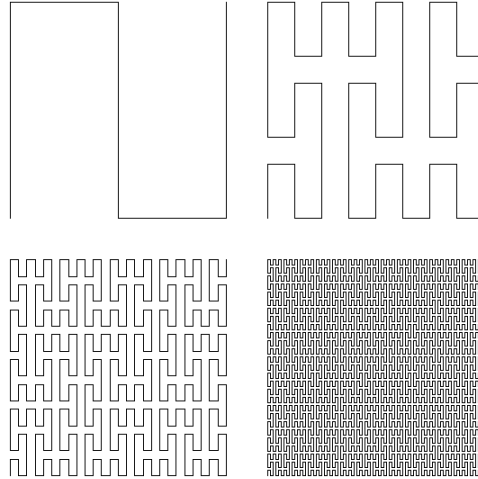
Najjednostavniju parametrizaciju u $\mathbb{R}^2$ ima prava. Ako su $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ dve tačke neke prave $\beta(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, njena parametrizacija data je sa

$$\beta(t) = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}.$$

Jednostavan primer parametrizovane krive u $\mathbb{R}^2$ je i kružnica sa centrom u $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ poluprečnika r

$$\gamma(t) = (p_1 + r \cos t, p_2 + r \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

¹Giuseppe Peano (1858-1932)



Slika 2.1: Prve četiri iteracije u konstrukciji Peanove krive

Kod parametarske reprezentacije krivih pojavljuju se dve jednačine na osnovu kojih možemo odrediti da li se radi o algebarskoj ili transcendentnoj krivoj. Treba napomenuti još i to da se mogu upotrebljavati različiti koordinatni sistemi kod parametarskog predstavljanja krivih - Dekartov, polarni, bipolarni, pedalni i unutrašnji, a najčešće upotrebljavani su Dekartov i polarni koordinatni sistem. Naravno, krive mogu biti zadate i neparametarski

$$F(p, q) = 0,$$

gde je $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Jasno, ovo je ujedno i implicitna reprezentacija krivih. U ovom radu ćemo se zadržati na parametarskoj reprezentaciji krivih.

Jedna kriva može imati različite parametrizacije koje naizgled predstavljaju različite krive, odnosno možemo vršiti reparametrizaciju krive.

Definicija 2.2. *Neka su $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $g : (d, e) \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferencijabilne krive. Kriva g je pozitivna reparametrizacija krive c ako postoji diferencijabilna funkcija $\varphi : (d, e) \rightarrow (a, b)$ takva da je $\varphi'(u) > 0$, $d < u < e$, i $g = c \circ \varphi$.*

Kriva g je negativna reparametrizacija krive c ako postoji diferencijabilna funkcija $\varphi : (d, e) \rightarrow (a, b)$ takva da je $\varphi'(u) < 0$, $d < u < e$, i $g = c \circ \varphi$. Kriva g je reparametrizacija krive c bez obzira na to da li je pozitivna ili negativna.

Reparametrizacija je dopustiva ako očuvava izgled i orijentaciju krive. Uslov $\varphi' > 0$ obezbeđuje da se pri reparametrizaciji očuvava orijentacija. Pozitivna reparametrizacija je dopustiva. Regularna kriva je klasa ekvivalencije regularnih parametrizovanih krivih u odnosu na pozitivnu reparametrizaciju.

Regularnost krive može biti razmatrana i na drugi način. Naime, može se desiti da kriva

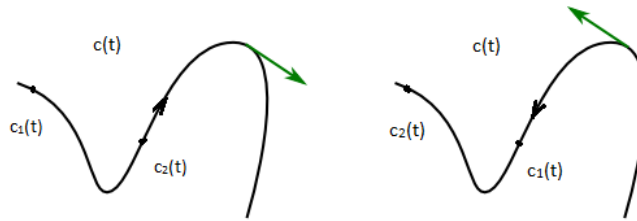
ne bude regularna u nekoj tački i njenoj okolini, međutim, ako izvršimo reparametrizaciju krive, ona postaje regularna u datoj tački. Najočigledniji primer je primer horizontalne prave koja je neregularna u tački $t = 0$ kada je parametrizovana sa $t \rightarrow (t^3, 0)$. Od većeg značaja je slučaj kada neregularnost u okolini tačke ne može biti otklonjena reparametrizacijom.

Definicija 2.3. Kriva $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ je regularna u tački t_0 , $a < t_0 < b$ ako se funkcija $t \mapsto \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ može dodefinisati da bude diferencijabilna u tački t_0 . U suprotnom kriva ima singularitet u tački t_0 .

Singulariteti mogu da se klasifikuju na one koji nastaju kada kriva seče samu sebe i singularitete koji su zbog svog oblika nazvani - špic (eng. cusp). Obe klase singulariteta su takve da se reparametrizacijom singulariteti ne mogu otkloniti. Prethodna definicija regularne krive, izbacuje mogućnost postojanja singulariteta zbog zahteva o diferencijabilnosti, odnosno $c' \neq 0$ na celom domenu.

Pre nego što uspostavimo vezu između brzine parametrizovane krive c i brzine krive koja predstavlja reparametrizaciju krive c , definisaćemo orijentaciju parametrizovane krive.

Orijentacija ravanske parametrizovane krive c (kao i smer tangentnog vektora) prirodno je indukovana porastom parametra t . Orijentacija krive i odgovarajući smer tangentnog vektora za dve krive istog oblika, ali suprotne orijentacije dati su na slici (2.2).



Slika 2.2: Orijentacija ravanske krive

Lema 2.4. Neka je g reparametrizacija krive c i neka za diferencijabilno preslikavanje $\varphi : (d, e) \rightarrow (a, b)$ važi $g = c \circ \varphi$. Tada

$$g'(u) = \varphi'(u)c'(\varphi(u)), \quad d < u < e.$$

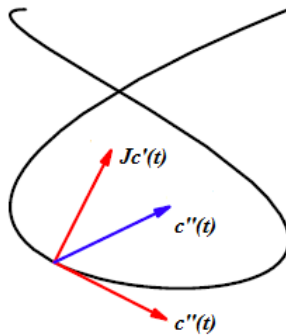
Dokaz. Kako za c i g važi $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ i $g(u) = (g_1(u), \dots, g_n(u))$ onda je $g_j(u) = c_j(\varphi(u))$, $j = 1, \dots, n$, pa primenjujući izvod složene funkcije dobija se $g'_j(u) = c'_j(\varphi(u))\varphi'(u)$, $j = 1, \dots, n$, što daje upravo $g'(u) = \varphi'(u)c'(\varphi(u))$. $\square$

Definicija 2.5. *Regularna parametrizovana kriva je neprekidno diferencijabilno preslikavanje, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, I je interval u $\mathbb{R}$, za koje važi*

$$c'(t) = \frac{dc}{dt} \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Fizička interpretacija: Ako je sa t označeno vreme, c opisuje kretanje čestice u $\mathbb{R}^2$, $c(t)$ je položaj čestice, a $c'(t)$ je vektor brzine kretanja čestice, tada uslov regularnosti znači da je brzina kretanja čestice različita od 0 svuda, odnosno čestica se stalno kreće, ne zaustavlja se. Vektor ubrzanja čestice je $c''(t)$.

Geometrijska interpretacija: Vektor c' je tangentni vektor na krivu c u $c(t)$. Uslov regularnosti znači da u svakoj tački krive postoji nenula tangentni vektor. Jednačina tangente na krivu c u $c(t_0)$ data je sa $t \mapsto c(t_0) + tc'(t_0)$.



Slika 2.3: Brzina i ubrzanje ravanske krive (J je preslikavanje definisano u uvodu)

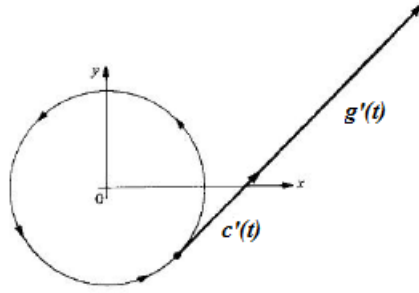
Nakon što je uveden pojam tangentnog vektora, može biti dat interesantan primer koji ilustruje da dve različite parametrizovane krive mogu imati istu sliku (slika 2.4). Razlika se ispoljava u različitom intenzitetu tangentnog vektora. Posmatraćemo krive $c(t) = (\cos t, \sin t)$ i $g(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in (0, 2\pi)$, slika obe je jedinična kružnica sa centrom u koordinatnom početku.

Sada je moguće definisati neke od karakteristika krivih u ravni, pa ćemo početi od najjednostavnije, a to je dužina krive. Više o dužini krive videti u [5].

Definicija 2.6. *Neka je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva, tada se dužina luka krive c definiše kao:*

$$L_a^b(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt,$$

gde je $\|\cdot\|$ euklidska norma ($\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$).



Slika 2.4: Slika dve različite parametrizovane ravanske krive

Intuitivno je jasno da dužina luka krive ne zavisi od parametrizacije, što ćemo i dokazati u narednoj teoremi.

Teorema 2.7. *Neka je kriva g reparametrizacija krive c . Tada je*

$$L_a^b(c) = L_d^e(g).$$

Dokaz. Treba dokazati dva slučaja. Prvo ćemo pokazati da teorema važi u slučaju pozitivne reparametrizacije. Neka je $g = c \circ \varphi$, gde je $\varphi : (d, e) \rightarrow (a, b)$ i $\varphi'(u)$ za $d < u < e$. Onda na osnovu leme (1.3) imamo

$$\|g'(t)\| = \|c'(\varphi(u))\varphi'(u)\| = \|c'(\varphi(u))\|\varphi'(u).$$

Računajući dužinu krive po definiciji imamo

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_d^e \|c'(\varphi(u))\|\varphi'(u) du = \int_d^e \|g'(u)\| du = L(g).$$

Posmatramo sada slučaj negativne reparametrizacije:

$$\lim_{u \rightarrow d^-} \varphi(u) = b, \quad \lim_{u \rightarrow e^+} \varphi(u) = a,$$

pa pošto važi

$$\|g'(t)\| = \|c'(\varphi(u))\varphi'(u)\| = -\|c'(\varphi(u))\|\varphi'(u)$$

analogno prvom delu dokaza dobijamo

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_e^d \|c'(\varphi(u))\|\varphi'(u) du = \int_d^e \|g'(u)\| du = L(g).$$

□

Definicija 2.8. Kriva $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je parametrizovana dužinom luka odnosno prirodno parametrizovana, ako je $\|c'(t)\| = 1, \forall t \in I$.

U fizičkoj interpretaciji to znači da je brzina kretanja čestice konstantna i jednaka 1. Takođe, za prirodno parametrizovanu krivu $g : (d, e) \rightarrow \mathbb{R}^n$ važi : $s_g(t) = t - d$ što je upravo i razlog zbog kog se prirodna parametrizacija naziva i parametrizacija dužinom luka.

Teorema 2.9. Svaka regularna kriva može se prirodno parametrizovati. Svake dve prirodne parametrizacije su ekvivalentne do na translaciju.

Dokaz. Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $l := L_a^b(c)$. Definišemo:

$$s(t) := L_a^t(c) := \int_a^t \|c'(\tau)\| d\tau.$$

Tada $s : [a, b] \rightarrow [0, l]$ i $s'(t) = \|c'(t)\| > 0$. Sledi da je s C^1 -difeomorfizam i odgovarajuća reparametrizacija je:

$$\bar{c} = c \circ s^{-1}$$

i važi da je:

$$\|(\bar{c})'(u)\| = \|(c \circ s^{-1})(u)\| = \|c'(s^{-1}(u))\| \frac{1}{s'(s^{-1}(u))} = \frac{\|c'\|}{\|c'\|}(s^{-1}(u)) = 1.$$

Dalje, ako su c i $c \circ \varphi$ dve prirodne parametrizacije tada je $1 = \|(c \circ \varphi)'\| = \|c'\| \varphi' = \varphi'$, pa sledi da je $\varphi(t) = t + a, a \in \mathbb{R}^n$, odnosno φ je translacija. $\square$

Lema 2.10. Ako je c regularna kriva parametrizovana dužinom luka, tada je $c'(s) \perp c''(s), \forall s \in I$.

Dokaz. Pošto važi $1 = \|c'(s)\|^2 = \langle c'(s), c'(s) \rangle, \forall s \in I$, diferenciranjem obe strane dobija se

$$0 = 2\langle c''(s), c'(s) \rangle \Rightarrow c'(s) \perp c''(s).$$

$\square$

Sada ćemo posmatrati Tejlorovu aproksimaciju prirodno parametrizovane krive c u okolini tačke s_0 :

$$c(s_0 + s) = c(s_0) + sc'(s_0) + \frac{s^2}{2}c''(s_0) + o(s^2).$$

Jasno, ekspanzija do prvog reda je tangenta na krivu c u tački s_0

$$s \mapsto c(s_0) + sc'(s_0),$$

dok ekspanzija do drugog reda predstavlja oskulatorni konus

$$s \mapsto c(s_0) + sc'(s_0) + \frac{s^2}{2}c''(s_0)$$

koji sa krivom c ima kontakt drugog reda u tački s_0 . Dve prirodno parametrizovane krive c_1 i c_2 imaju kontakt k -tog reda u tački s_0 ako važi $c_1(s_0) = c_2(s_0)$, $c'_1(s_0) = c'_2(s_0)$, ..., $c_1^{(k)}(s_0) = c_2^{(k)}(s_0)$. Sada je jasno koliko je važna uloga izvoda krive u opisivanju karakteristika krive. Ako su $c', c'', c''', \dots, c^{(n)}$ linearno nezavisni vektori u svakoj tački krive c , onda oni formiraju ortonormiran sistem koji se zove n -okvir.

Definicija 2.11. *Prirodno parametrizovana, regularna kriva c klase $\mathcal{C}^n$ naziva se Freneova² kriva ako su vektori $c', c'', c''', \dots, c^{(n-1)}$ linearno nezavisni u svakoj tački krive. Odgovarajući Freneov okvir je tada jedinstveno određen sledećim uslovima:*

- (i) *Sistem $e_1(s), \dots, e_n(s)$ je pozitivno orijentisan ortonormiran sistem vektora u $\mathbb{R}^n$,*
- (ii) *$\mathcal{L}(e_1(s), \dots, e_k(s)) = \mathcal{L}(c'(s), \dots, c^{(k)}(s))$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, $\forall s$,*
- (iii) *$\langle c^{(k)}(s), e_k(s) \rangle > 0$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, $\forall s$,*

gde je $\mathcal{L}$ lineal³ nad skupom $\{e_1, \dots, e_n\}$, odnosno skupom $\{c'(s), \dots, c^{(n-1)}(s)\}$.

Za konstrukciju Freneovog okvira koristi se Gram-Šmitov postupak:

$$\begin{aligned} e_1 &= c'(s) \\ e_2 &= \frac{c''}{\|c''\|} \\ e_3 &= \frac{c''' - \langle c''', e_1 \rangle e_1 - \langle c''', e_2 \rangle e_2}{\|c''' - \langle c''', e_1 \rangle e_1 - \langle c''', e_2 \rangle e_2\|} \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= \frac{c^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-2} \langle c^{(n-1)}, e_j \rangle e_j}{\|c^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-2} \langle c^{(n-1)}, e_j \rangle e_j\|} \end{aligned}$$

Poslednji vektor e_n tada je jedinstveno određen, u skladu sa definicijom. Sada se lako zaključuje da je svaka regularna ravanska kriva Freneova kriva.

²Jean Frédéric Frenet (1816-1900)

³Neka je M neprazan skup vektora vektorskog prostora $\mathbb{V}$. Skup $\mathcal{L}_{\mathbb{V}}(M) = \mathcal{L}(M) := \{v \in \mathbb{V} : v \text{ je linearna kombinacija vektora skupa } M\}$ naziva se lineal nad skupom M .

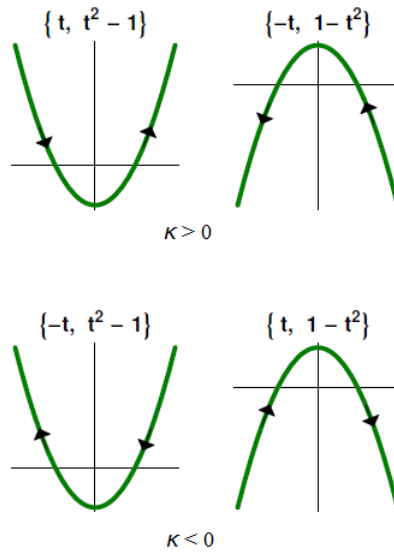
U nastavku ćemo se pozabaviti još jednom od bitnih karakteristika krive - krivinom krive. Prvi matematičar u čijem se radu pojavljuje pojam krivine krive bio je Apolonije, a prvi koji pojam krivine krive izučava formalno matematički bio je Njutn⁴. Intuitivno, krivina meri koliko "kriva krivi", odnosno koliko odstupa od prave.

Definicija 2.12. Neka je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva. Krivina κ definiše se kao

$$\kappa[c](t) = \frac{\langle c''(t), Jc'(t) \rangle}{\|c'(t)\|^3} \quad (2.1)$$

Pozitivna funkcija $\frac{1}{|\kappa[c](t)|}$ zove se radijus krivine krive c .

Jasno, funkcija κ može imati i pozitivnu i negativnu vrednost. Tako postoje četiri mogućnosti koje će biti ilustrovane pomoću parabole na slici 2.5. Sa slika je jasno da u slučaju pozitivne krivine imamo savijanje ulevo, a u suprotnom se kriva savija udesno.



Slika 2.5: Pozitivna i negativna krivina krive

U narednoj lemi biće izvedena formula za krivinu κ krive c koju je dao Njutn i koja se koristi u većini knjiga o infinitezimalnom računu, a biće data i njena ekvivalentna forma kada je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$.

Lema 2.13. Neka je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna ravanska kriva parametrizovana sa $c(t) = (x(t), y(t))$. Tada se krivina κ krive c definiše na jedan od dva ekvivalentna načina

$$\kappa[c](t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

⁴Newton (1642-1727)

$$\kappa[c](t) = \operatorname{Im} \frac{c''(t)\overline{c'(t)}}{\|c'(t)\|^3}, \quad c : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dokaz. Kako je $c''(t) = (x''(t), y''(t))$, a $Jc'(t) = (-y'(t), x'(t))$ onda važi

$$\kappa[c](t) = \frac{(x''(t), y''(t))(-y'(t), x'(t))}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Na osnovu leme 1.1 imamo da važi $c''(t)\overline{c'(t)} = c''c' + ic''(Jc')$, pa primenjujući to na $\frac{c''(t)\overline{c'(t)}}{\|c'(t)\|^3}$ dobijamo

$$\frac{c''(t)c'(t) + ic''(Jc')}{\|c'(t)\|^3},$$

a kada uzmemo imaginarni deo dobijemo baš (2.1). $\square$

S obzirom na to da je i krivina, kao i dužina krive, karakteristika krive koja određuje njenu geometrijsku reprezentaciju, za očekivati je da ne zavisi od parametrizacije krive. Međutim, ovo je samo delimično tačno.

Teorema 2.14. *Neka je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva i $g : (d, e) \rightarrow \mathbb{R}^2$ reparametrizacija krive c i važi $g = c \circ h$, a je $h : (d, e) \rightarrow (a, b)$ diferencijabilna funkcija. Tada*

$$\kappa[g](u) = (\operatorname{sgn}(h'(u)))\kappa(c(h(u))), \quad (2.2)$$

$h'(u) \neq 0$. Dakle, krivina ravanske krive je nezavisna od parametrizacije do na znak.

Dokaz. Iz $g' = (c' \circ h)h'$ sledi $Jg' = J(c' \circ h)h'$ i važi $g'' = (c'' \circ h)h'^2 + (c' \circ h)h''$, pa se dobija

$$\kappa[g] = \frac{((c'' \circ h)h'^2 + (c' \circ h)h'')J(c' \circ h)h'}{\|(c' \circ h)h'\|^3} = \frac{h'^3}{|h'^3|} \frac{(c'' \circ h)J(c' \circ h)}{\|c' \circ h\|^3},$$

odakle dobijamo (2.2) $\square$

Lema 2.15. *Neka je g prirodno parametrizovana ravanska kriva. Tada važi*

$$g'' = \kappa[g]Jg'.$$

Dokaz. Kada diferenciramo obe strane izraza $\langle g', g' \rangle = 1$ dobija se $g''g' = 0$. Dakle, g'' je umnožak Jg' . Iz Njutnove formule za krivinu krive dolazi se do zaključka da je taj umnožak baš jednak $\kappa[g]$. $\square$

U uvodu je definisan orijentisan ugao između dva vektora u $\mathbb{R}^2$, analogno tome, sada će biti definisan ugao između dve ravanske krive, odnosno njihovih tangentnih vektora.

Lema 2.16. Neka su $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dve diferencijabilne funkcije za koje važi $f^2 + g^2 = 1$. Odaberemo t_0 , $a < t_0 < b$ i neka za θ_0 važi $f(t_0) = \cos \theta_0$, $g(t_0) = \sin \theta_0$. Tada postoji jedinstvena, neprekidna funkcija $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ za koju važi:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad f(t) = \cos \theta(t), \quad g(t) = \sin \theta(t), \quad a < t < b. \quad (2.3)$$

Dokaz. Neka je $h = f + ig$, pa je $h\bar{h} = 1$. Definišemo:

$$\theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t h'(s) \bar{h}(s) ds.$$

Tada je:

$$\frac{d}{dt}(he^{-i\theta}) = e^{-i\theta}(h' - ih\theta') = e^{-i\theta}(h' - hh'\bar{h}) = 0,$$

pa je $he^{-i\theta} = c$, $c = \text{const}$. Pošto je $h(t_0) = e^{i\theta_0}$ onda je

$$c = h(t_0)e^{-i\theta(t_0)} = 1.$$

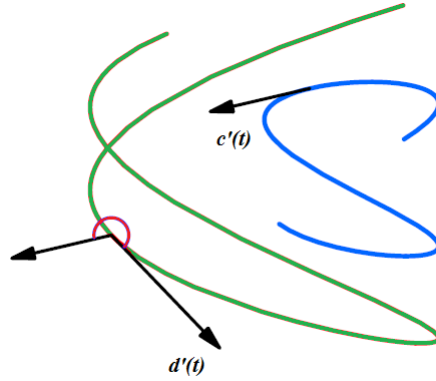
Dakle, $h(t) = e^{i\theta(t)}$, odakle dobijamo (2.3). Neka je $\hat{\theta}$ neprekidna funkcija za koju važi:

$$\hat{\theta}(t_0) = \theta_0, \quad f(t) = \cos \hat{\theta}(t), \quad g(t) = \sin \hat{\theta}(t), \quad a < t < b.$$

Tada $e^{i\theta(t)} = e^{i\hat{\theta}(t)}$, $a < t < b$. Pošto su θ i $\hat{\theta}$ neprekidne funkcije, postoji $n \in \mathbb{Z}$ tako da je:

$$\theta(t) - \hat{\theta}(t) = 2\pi n, \quad a < t < b.$$

Ali pošto je $\theta(t_0) = \hat{\theta}(t_0)$, onda je $n = 0$, odnosno $\theta = \hat{\theta}$. □



Slika 2.6: Funkcija ugla između ravanskih krivih c i d

Posledica 2.16.1. Neka su c i d regularne ravanske krive definisane na istom intervalu (a, b) i neka za t_0 važi $a < t_0 < b$. Odaberemo θ_0 tako da važi:

$$\frac{\langle c'(t_0), d'(t_0) \rangle}{\|c'(t_0)\| \|d'(t_0)\|} = \cos \theta_0 \quad \frac{\langle c'(t_0), Jd'(t_0) \rangle}{\|c'(t_0)\| \|d'(t_0)\|} = \sin \theta_0.$$

Tada postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ za koju važi:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \frac{\langle c'(t), d'(t) \rangle}{\|c'(t)\| \|d'(t)\|} = \cos \theta(t), \quad \frac{\langle c'(t), Jd'(t) \rangle}{\|c'(t)\| \|d'(t)\|} = \sin \theta(t), \quad a < t < b.$$

θ je funkcija ugla između krivih d i c određena sa θ_0 .

Dokaz. Dokaz se dobija direktno iz leme 2.15 kada za f i g uzmemo $f(t) = \frac{\langle c'(t), d'(t) \rangle}{\|c'(t)\| \|d'(t)\|}$ i $g(t) = \frac{\langle c'(t), Jd'(t) \rangle}{\|c'(t)\| \|d'(t)\|}$. $\square$

Lema 2.17. Neka je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva i t_0 fiksirana tačka $a < t_0 < b$. Neka je θ_0 broj takav da:

$$\frac{c'(t_0)}{\|c'(t_0)\|} = (\cos \theta_0, \sin \theta_0).$$

Tada postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija $\theta = \theta[c] : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ takva da važi:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad a < t < b. \quad (2.4)$$

$\theta[c]$ je ugao skretanja (eng. turning angle) određen sa θ_0 .

Dokaz. Neka je $d(t) = (t, 0)$, tada je d parametrizacija prave i $d'(t) = (1, 0)$, $\forall t$. Za $c(t) = (a_1(t), a_2(t))$ važi:

$$\langle c'(t), d'(t) \rangle = a_1'(t) \quad \langle c'(t), Jd'(t) \rangle = a_2'(t).$$

Zbog posledice 2.15.1 postoji jedinstvena funkcija $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $\theta(t_0) = \theta_0$ i važi:

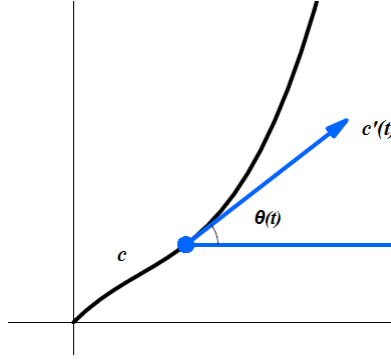
$$\cos \theta(t) = \frac{\langle c'(t), d'(t) \rangle}{\|c'(t)\| \|d'(t)\|} = \frac{a_1'(t)}{\|c'(t)\|} \quad \sin \theta(t) = \frac{\langle c'(t), Jd'(t) \rangle}{\|c'(t)\| \|d'(t)\|} = \frac{a_2'(t)}{\|c'(t)\|} \quad (2.5)$$

Jasno, (2.5) je ekvivalentno sa (2.4). $\square$

Geometrijski, ugao skretanja $\theta[c](t)$ je ugao između x -ose i tangentnog vektora $c'(t)$. Usledеćој lеmі izvešćemo vezu između ugla skretanja i krivine ravanske krive.

Lema 2.18. Veza između ugla skretanja i krivine ravanske krive data je sa:

$$\theta[c]'(t) = \|c'(t)\| \kappa[c](t). \quad (2.6)$$

Slika 2.7: Ugao skretanja ravanske krive c

Dokaz. Prvi izvod leve strane jednakosti (2.6) je:

$$\frac{c''(t)}{\|c'(t)\|} + c'(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|c'(t)\|} \right). \quad (2.7)$$

Izvod desne strane jednakosti (2.4) je:

$$\theta'(t)(-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) = \theta'(t) \frac{Jc'(t)}{\|Jc'(t)\|}. \quad (2.8)$$

Izjednačavanjem (2.7) i (2.8) dobijamo:

$$\theta'(t)\|c'(t)\| = \frac{\langle c''(t), Jc'(t) \rangle}{\|c'(t)\|} = \|c'(t)\|^2 \kappa[c](t).$$

□

Posledica 2.18.1. *Veza između ugla skretanja i krivine prirodno parametrizovane ravanske krive c data je sa:*

$$\kappa[c](s) = \frac{d\theta[c](s)}{ds}.$$

Iz posledice (2.17.1) jasno je da krivina meri brzinu promene ugla skretanja s obzirom na dužinu luka.

Pre nego što pređemo na globalnu teoriju krivih, biće dat još jedan pristup u definisanju krivine ravanske krive (koji se može uopštiti za krive proizvoljnog reda) kao i fundamentalna teorema lokalne teorije ravanskih krivih. Više o ovome videti u [1], [2], [3], [4], [11], [12].

c je regularna, ravanska kriva, pa je i Freneova, pa važi da je tangentni vektor $e_1(s) = c'(s)$, a normalan vektor e_2 dobija se rotacijom⁵ e_1 u levo za ugao $\frac{\pi}{2}$ što zapisujemo kao $e_2(s) = Je_1$.

⁵Rotacija vektora $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ za ugao α dobija se na sledeći način: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

S obzirom na to da važi $1 = \langle c', c' \rangle$, dobija se $0 = 2\langle c', c'' \rangle = 2\langle e_1, c'' \rangle$. Jasno, vektor e_1 je ortogonalan na vektor c'' , a e_2 i c'' su linearno zavisni, pa postoji neka funkcija $\kappa = \kappa(s)$ tako da važi $c'' = \kappa e_2$. Funkcija κ naziva se krivina krive c . Znak krivine govori o intenzitetu promene pravca tangentnog vektora. Ravan određena vektorima e_1 i e_2 zove se oskulatorna ravan.

Sada izvodimo Freneove jednačine:

$$e_1'(s) = (c'(s))' = \kappa(s)e_2(s)$$

$$e_2'(s) = \langle e_2', e_1 \rangle e_1 + \langle e_2', e_2 \rangle e_2 = -\kappa e_1,$$

jer $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$, pa se dobija $2\langle e_2', e_2 \rangle = 0$ i zbog $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ sledi $\langle e_2', e_1 \rangle = -\langle e_1', e_2 \rangle = -\kappa \langle e_2, e_2 \rangle = -\kappa$. U matricnom obliku imamo:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.19. *Regularna kriva u $\mathbb{R}^2$ ima konstantnu krivinu akko je deo prave ($\kappa = 0$) ili deo kružnice poluprečnika $\frac{1}{|\kappa|}$ ($\kappa \neq 0$)*

Dokaz. Dokaz videti u [6]. □

Za svaku regularnu ravansku krivu c čija krivina je uvek različita od nule, kružnica sa centrom u $c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}e_2(s_0)$ i poluprečnikom $|\frac{1}{\kappa(s_0)}|$ je oskulatorna kružnica krive c u tački $c(s_0)$ i ima kontakt drugog reda sa krivom c . Kriva koja prolazi kroz sve centre svih oskulatornih kružnica jedinstveno je određena i naziva se evoluta krive c i parametrizovana je sa $s \mapsto c(s) + \frac{e_2(s)}{\kappa(s)}$. Evoluta ne mora biti regularna kriva. Osim evolute, za svaku regularnu parametrizovanu krivu vezuje se još 8 krivih.

Krivina κ se koristi i za opisivanje krivih višeg reda, pa i prostornih krivih, s tom razlikom da je uvek pozitivna u $\mathbb{R}^3$. Kada se definiše za Freneove krive, krivina κ se naziva Freneova krivina. Freneove jednačine proširuju se dodatnom jednačinom koja predstavlja prvi izvod vektora binormale e_3 , pa su definisane i dve dodatne ravni - normalna (e_2 i e_3) i reftikaciona (e_1 i e_3). Osim toga u $\mathbb{R}^3$ definiše se i torzija krive kao mera brzine odstupanja od oskulatorne ravni, pa je jasno da je u $\mathbb{R}^2$ ona uvek jednaka nuli.

Teorema 2.20. *(Fundamentalna teorema lokalne teorije ravanskih krivih). Neka je $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivna neprekidna funkcija, $s_0 \in (a, b)$, $q_0 \in \mathbb{R}^2$ i $e_1^{(0)}, e_2^{(0)}$ pozitivno orijentisani ortonormirani vektori. Tada postoji jedinstvena, Freneova kriva $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ koja zadovoljava sledeće uslove:*

- $c(s_0) = q_0$,

- $e_1^{(0)}, e_2^{(0)}$ je Freneov 2-okvir u tački q_0 ,
- κ je Freneova krivina krive c .

Dokaz. Dokaz videti u [6]. □

Fundamentalna teorema lokalne teorije ravanskih krivih može se uopštiti, odnosno ona se upravo u tom obliku i koristi, tj za krive u $\mathbb{R}^n$.

Nakon što su definisani pojmovi neophodni za donošenje zaključaka u vezi sa krivama, vezani za lokalnu teoriju krivih, možemo preći sa bavljenja tačkom krive i njenom okolinom na proučavanje krive u celosti - globalnu teoriju krivih.

Definicija 2.21. Regularna kriva $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ naziva se zatvorena kriva ako postoji regularna kriva $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tako da važi $\tilde{c}|_{[a,b]} = c$, $\tilde{c}(t + b - a) = \tilde{c}(t)$, $c(a) = c(b)$ i $c'(a) = c'(b)$. Kriva $\tilde{c}$ naziva se periodična kriva. Zatvorena kriva c je prosta, ako je $c|_{[a,b]}$ injektivno preslikavanje, tj. za svako $a \leq t_1 < t_2 < b$ važi $c(t_1) \neq c(t_2)$.

Definicija 2.22. Totalna krivina zatvorene krive c definiše se kao

$$\int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| dt = \int_0^l \kappa(s) ds,$$

gde je l dužina luka krive c .

Primetimo da u $\mathbb{R}^2$ funkcija κ može da uzme sve vrednosti iz $\mathbb{R}$, pa i totalna krivina može da uzme sve vrednosti iz $\mathbb{R}$, dok u $\mathbb{R}^3$ $\kappa > 0$, pa je i totalna krivina uvek pozitivna.

Lema 2.23. (Krivina u polarnim koordinatama) Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Freneova kriva sa Freneovim 2-okvirom e_1 i e_2 . Neka je $e_1(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$, $t \in [a, b]$, reprezentacija e_1 u polarnim koordinatama. Tada je

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\varphi'(t)}{\|c'(t)\|}.$$

Dokaz. Iz reprezentacije e_1 u polarnim koordinatama nalazimo da je $e_2(t) = (-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t))$. Odavde dalje imamo

$$\kappa e_2 = \frac{de_1}{ds} = \frac{de_1}{dt} \frac{dt}{ds} = \varphi'(t) \underbrace{(-\sin \varphi(t), \cos \varphi(t))}_{e_2} \frac{1}{\|c'(t)\|}.$$

□

Posledica 2.23.1. *Kada je funkcija $\varphi(t)$ diferencijabilna važi:*

$$\int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| dt = \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

S obzirom na to da funkcija $\varphi(t)$ nije jedinstveno određena i ne važi $c(a) = c(b) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$, navedena jednakost se mora proveriti za konkretan slučaj. Isti problem javlja se kod funkcija kompleksne promenljive zbog činjenice da logaritam izraza $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ može biti bilo koji broj oblika $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ova posledica je motiv za uvođenje pojma indeksa rotacije.

Teorema 2.24. *(Funkcija polarnog ugla i broj obrtaja) Neka je $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ neprekidna kriva. Tada postoji neprekidna funkcija $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $\gamma(t) = \|\gamma(t)\|(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$. Razlika $\varphi(b) - \varphi(a)$ ne zavisi od izbora funkcije φ . Funkcija φ se naziva funkcija polarnog ugla. Ako je γ diferencijabilna funkcija, tada je to i φ , jer je prelaz iz Dekartovih u polarne koordinate diferencijabilno preslikavanje u svakoj tački sem tačke $(0, 0)$.*

Ako je γ zatvorena kriva tada je vrednost

$$W_\gamma = \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a))$$

celobrojna. Broj W_γ naziva se broj obrtaja krive γ .

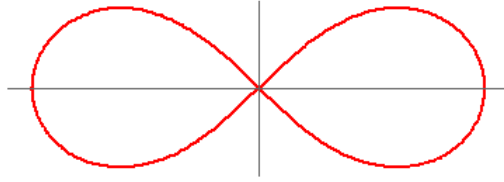
Dokaz. Prvo treba primetiti da ako je funkcija φ fiksirana u nekoj tački poluravni $H = \{x \in \mathbb{R}^2 | \langle x, x_0 \rangle > 0\}$, tada je ona definisana u celoj poluravni H . γ je neprekidna funkcija na $[a, b]$, pa je i uniformno neprekidna na tom intervalu i otuda postoji podela intervala $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, takva da slika svakog podintervala $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ leži u istoj poluravni. Ako se zada početna vrednost $\varphi(a)$ tada je funkcija $\varphi(t)$ jedinstveno određena i neprekidna na čitavom intervalu $[t_0, t_1]$. Dalje, ako je $\varphi(t)$ neprekidna i jedinstveno određena na intervalu $[t_0, t_i]$ biće neprekidna i jedinstveno određena i na intervalu $[t_i, t_{i+1}]$, pa i na intervalu $[t_0, t_{i+1}]$. Dakle, matematičkom indukcijom (po širini intervala) zaključujemo da je funkcija φ neprekidna i jedinstveno određena na celom intervalu $[a, b]$ zadavanjem početne vrednosti $\varphi(a)$. Izbor početne vrednosti $\varphi(a)$ je proizvoljan. Ako bi postojale takve dve funkcije φ i $\tilde{\varphi}$ njihova razlika bila bi jednaka celobrojnom umnošku 2π , odnosno bila bi konstantna, pa bi važilo: $\varphi(b) - \tilde{\varphi}(a) = \varphi(a) - \varphi(b)$. $\square$

Pre nego što definišemo pojam indeksa rotacije, moramo definisati tangentnu indikatrixu.

Definicija 2.25. *Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna zatvorena kriva. Ako se svakoj tački krive c pridruži jedinični tangentni vektor $\dot{c}(t)$, a zatim i translira tako da mu se početak poklapa sa koordinatnim početkom, dobija se neprekidno preslikavanje $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Preslikavanje*

$$T(t) = \frac{c'}{\|c'\|}$$

opisuje krivu koja leži na jediničnoj kružnici i koja se naziva tangentna indikatrisa krive c .



Slika 2.8: Ravanska kriva sa indeksom rotacije $U_c = 0$

Definicija 2.26. Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna zatvorena kriva. Indeks rotacije U_c je broj obrtaja tangentne indikatriše:

$$U_c = W_{c'}.$$

Posledica 2.26.1. Indeks rotacije regularne ravanske zatvorene krive jednak je njenoj totalnoj krivini podeljenoj sa 2π :

$$2\pi U_c = 2\pi W_{c'} = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) = \int_a^b \kappa \|c'(t)\| dt,$$

gde je $c' = \|c'(t)\|(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$.

Zanimljiva karakteristika broja obrtaja jeste homotopna⁶ invarijantnost, odnosno svake dve zatvorene homotopne krive imaju isti broj obrtaja. Kao posledicu imamo da je indeks rotacije regularne zatvorene krive regularno homotopno invarijantan, tj. svake dve regularno homotopne zatvorene krive imaju isti indeks rotacije. Teorema Whitney-Graustein daje i obrnuto tvrđenje - svake dve regularne zatvorene krive sa istim indeksom rotacije su regularno homotopne.

Lema 2.27. Neka je $c : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ neprekidna funkcija, gde je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ zvezdast skup u odnosu na tačku x_0 , tj. duž xx_0 leži u A , $\forall x \in A$. Tada postoji neprekidna funkcija polarnog ugla $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $c(x) = \|c(x)\|(\cos \varphi(x), \sin \varphi(x))$.

Teorema 2.28. (Hopf⁷, 1935) Neka je $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ prosta zatvorena regularna kriva klase C^2 . Tada važi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| dt = U_c = \pm 1.$$

⁶Dve krive su homotopne ako se mogu dobiti jedna iz druge neprekidnom deformacijom, odnosno

$$(\forall x \in X) H(x, 0) = f(x)$$

$$(\forall x \in X) H(x, 1) = g(x)$$

gde su $f, g : X \rightarrow Y$ neprekidne funkcije i $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ takođe neprekidna funkcija, a X i Y topološki prostori.

⁷Heinz Hopf(1894-1971)

Dokaz. Dokaz videti u [6]. □

Posledica 2.28.1. Totalna apsolutna krivina $\int |\kappa| ds$ proste zatvorene regularne ravanske krive zadovoljava nejednakost

$$\int_a^b |\kappa(t)| \|c'(t)\| dt \geq 2\pi,$$

pri čemu jednakost važi ako krivina ne menja znak.

Postavlja se pitanje koje je geometrijsko značenje uslova $\kappa \geq 0$ i $\kappa \leq 0$ za zatvorenu krivu.

Definicija 2.29. Skup $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je konveksan ako za svake dve tačke iz C i cela duž određena njima leži u C . Prosta zatvorena ravanska kriva je konveksna ako je ona rub konveksnog skupa u $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.30. Za prostu zatvorenu regularnu ravansku krivu c koja je rub kompaktnog, povezanog skupa $C \subseteq \mathbb{R}^2$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

- c je konveksna, tj. skup C je konveksan.
- Svaka prava koja ima presek sa c seče je ili duž intervala (koji može da degeneriše u tačku) ili tačno u dve tačke.
- Za svaku tangentu krive c važi da kriva u celosti leži sa jedne strane tangente (tj. skup C u celosti leži sa jedne strane tangente).
- Krivina κ ne menja znak.

Dokaz. Dokaz videti u [6]. □

Sada posledicu (2.14.1) možemo dati i ovako: totalna apsolutna krivina $\int |\kappa| ds$ proste zatvorene regularne ravanske krive zadovoljava nejednakost

$$\int_a^b |\kappa(t)| \|c'(t)\| dt \geq 2\pi,$$

pri čemu jednakost važi ako je kriva dodatno i konveksna.

Teorema 2.31. (Four vertex teorema). Prosta zatvorena regularna konveksna ravanska kriva klase C^3 ima najmanje četiri lokalna ekstrema svoje krivine κ .

Dokaz. Ako je $\kappa \equiv \text{const}$, tvrđenje trivijalno važi. Zato pretpostavimo da κ nije konstantna funkcija. Lokalni ekstrem funkcije κ je tačka u kojoj je $\kappa' = 0$ i κ' menja znak. Može da se

desi da je u okolini ekstrema funkcija κ konstantna, ali tada tvrđenje takođe trivijalno važi. Funkcija κ dostižeće svoju svoju apsolutnu minimalnu i maksimalnu vrednost na intervalu $[a, b]$. Pretpostavimo da je $\kappa(0)$ minimum, a sa $\kappa(s_0)$ označimo maksimum. Pretpostavimo da je kriva c parametrizovana dužinom luka $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, gde je L dužina luka i $c(0) = c(L)$. Koordinatni sistem (x, y) može da se izabere tako da x -osa sadrži tačke $c(0)$ i $c(s_0)$ što dalje implicira da je $c(s) = (x(s), y(s))$ i $y(0) = y(s_0) = 0$, a drugih preseka x -ose sa krivom c nema (jer je c konveksna i $\kappa \neq \text{const}$). Prema tome $y(s)$ menja znak u tačkama $y(0)$ i $y(s_0)$. Dalje dokaz izvodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da su $c(0)$ i $c(s_0)$ jedini ekstremi funkcije κ . To znači da κ' menja znak samo u $s = 0$ i $s = s_0$, pa $y(s)\kappa'(s)$ ne menja znak. Iz Freneovih jednačina imamo:

$$e_1 = c' = (x'(s), y'(s))$$

$$e_2 = Je_1 = (-y'(s), x'(s))$$

$$e_1'(x''(s), y''(s)) = \kappa(-y'(s), x'(s)),$$

tj. $x''(s) = -\kappa(s)y'(s)$. Imamo da je:

$$\int_0^L \kappa'(s)y(s)ds = \kappa y|_0^L - \int_0^L \kappa(s)y'(s)ds = 0 + \int_0^L x''(s)ds = x'(L) - x'(0) \stackrel{\kappa \text{ zatvorena kriva}}{=} 0.$$

Odavde dobijamo da je $\kappa'(s)y(s) = 0$, $s \in [0, L]$, tj. $\kappa'(s) = 0$, pa je $\kappa \equiv \text{const}$, kontradikcija. Prema tome postoji i treća lokalna ekstremna vrednost funkcije κ . Iz periodičnosti funkcije κ' sledi da broj promena znaka ove funkcije ne može biti neparan, odnosno broj lokalnih ekstrema mora biti paran, što implicira da postoji bar još jedan lokalni ekstrem funkcije κ . $\square$

Pre nego što pređemo na treće poglavlje i bavljenje konkretnim krivama, moramo spomenuti i pojam obvojnice. Naime, obvojnica familije ravanskih krivih je kriva koja predstavlja granicu van koje nema krivih te familije, a ujedno je i tangentna na svaku krivu iz familije u nekoj tački. Obvojnica obično ne pripada familiji krivih čija je obvojnica. Osim opisa obvojnice, pre prelaska na treću glavu neophodno je dati jednu napomenu - većina navedenih definicija, lema i teorema može da se uopšti i primenjuje na krive u $\mathbb{R}^n$.

Glava 3

Neke poznate ravanske krive

Ovo poglavlje koncipirano je tako da prvo prikaže algebarske krive - reda tri, pa četiri i višeg reda, a zatim i transcendentne krive. Algebarske krive reda dva - konusni presezi, biće izostavljene s obzirom na to da se radi o često upotrebljavanim krivama o kojima i učenici srednje škole dosta znaju. Ukratko, svi konusni presezi u Dekartovim koordinatama mogu biti predstavljeni implicitno jednačinom:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3.1)$$

gde se za različite vrednosti diskriminante $D_s = B^2 - 4AC$ jednačine (3.1) dobijaju redom:

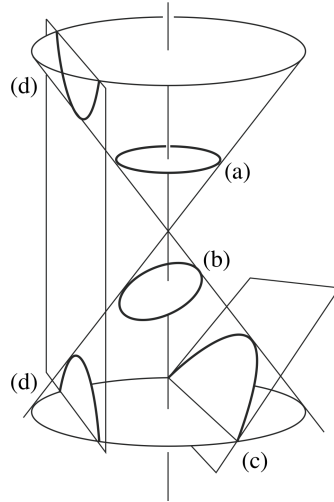
- (i) $D_s < 0$ elipsa,
- (ii) $D_s = 0$ parabola,
- (iii) $D_s > 0$ hiperbola.

Na slici 3.1 prikazani su konusni presezi.

3.1 Polukubna parabola

Polukubna parabola ima značajno mesto u istoriji ravanskih krivih zato što je prva algebarska kriva, čiju je dužinu luka 1657. godine postupkom rektifikacije odredio Vilijam Nil¹,

¹William Neile (1637-1670)



Slika 3.1: (a) krug, (b) elipsa, (c) parabola, (d) hiperbola

pa se ova kriva još naziva i Nilova parabola. Pre polukubne parabole postupak rektifikacije bio je primenjivan samo na transcendentne krive (za određivanje dužine luka cikloide i logaritamske spirale).

S obzirom na to da se polukubna parabola implicitno zadaje kao: $x^3 - ay^2 = 0$, odgovarajuća parametrizacija je :

$$c(t) = (t^2, at^3).$$

Vrlo jednostavno, posmatrajući slučaj $a = 1$ dobijamo:

$$c'(t) = (2t, 3t^2), \quad Jc'(t) = (-3t^2, 2t), \quad c''(t) = (2, 6t),$$

pa je dužina krive na intervalu: $[0, t]$

$$L_0^t[c] = \int_0^t \|c'(u)\| du = \int_0^t u \sqrt{4 + 9u^2} du = \frac{1}{27} (4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27},$$

a njena krivina je data sa:

$$\kappa[c](t) = \frac{(2, 6t)(-3t^2, 2t)}{\|(2t, 3t^2)\|^3} = \frac{6}{|t|(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Polukubna parabola je simetrična u odnosu na y -osu.

Dodatan razlog zbog kog je polukubna parabola odabrana da bude obrađena u ovom poglavlju je taj što je kao algebarska kriva trećeg reda sa jednostavnom parametrizacijom,

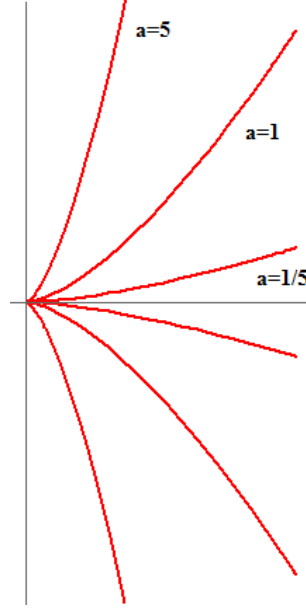
reprezentativan primer za dokazivanje regularnosti na osnovu (2.4). Sada će biti proverena regularnost Nilove parabole:

$$\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \frac{(2t, 3t^2)}{\sqrt{t^2(4 + 9t^2)}}.$$

zbog

$$(-1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(2t, 3t^2)}{\sqrt{t^2(4 + 9t^2)}} \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2t, 3t^2)}{\sqrt{t^2(4 + 9t^2)}} = (1, 0).$$

U tački $t = 0$ postoji singularitet i to špic. Treba primetiti da u toj tački ne postoji tangenta na krivu c . Jasno, polukubna parabola nije Freneova kriva.



Slika 3.2: Polukubna parabola za različite vrednosti parametra a , $t \in [-1, 1]$

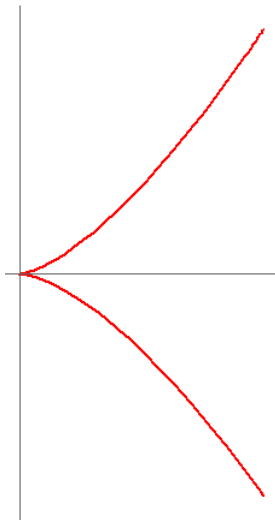
Interesantna karakteristika Nilove parabole, koju je prvi opisao Jakob Bernuli, je izohronost, odnosno svojstvo da kada se niz nju kreću tela istih masa u krajnju (najnižu) tačku stižu istovremeno, nezavisno od startne tačke njihove putanje (trenje se zanemaruje, a početna brzina je nula). 1659. godine Hajgens² je pokazao da je Nilova parabola evoluta parabole.

²Christiaan Huygens, (1629-1695)

3.2 Dioklova cisoida

Naziv cisoida potiče od biljke bršljen na koju je ova kriva podsetila matematičare. S obzirom na to da se o Dioklu vrlo malo zna (čak se ne zna ni tačno razdoblje u kom je živio 250-100 pne), naziv Dioklova cisoida poznat je na osnovu Arhimedovih³ komentara o sferi i cilindru, a pronađen je i u radovima Geminusa⁴. Arhimed navodi da je Diokle rešavajući problem duplikacije kocke opisao cisoidu - Dioklova cisoida. Roberval⁵ i Pjer del Ferma⁶ su 1634. godine konstruisali tangentu na cisoidu, a Hajgens i Valis⁷ su pronašli površinu između Dioklove cisoide i njene asimptote. Stari Grci su cisoidu koristili i u pokušajima da reše problem trisekcije ugla.

Dioklova cisoida je specijalan slučaj cisoide koja ima špic u koordinatnom početku. Naime, radi se o cisoidi kruga i tangente na krug, a u odnosu na tačku koja je centralno simetrična (u odnosu na centar kruga) tački u kojoj tangenta dodiruje kružnicu. U slučaju kada tačka u odnosu na koju konstruišemo cisoidu nije centralno simetrična tački u kojoj tangenta dodiruje kružnicu, a nalazi se na kružnici, radi se o kosoj cisoidi čiji je špic izmešten iz koordinatnog početka.



Slika 3.3: Dioklova cisoida za $a = 10$, $t \in [-1, 1]$

U cilju detaljnijeg opisa Dioklove cisoide neophodno je opisati i postupak konstrukcije cisoide u opštem slučaju. Posmatramo dve krive c i c' i fiksnu tačku A . Povlačimo pravu p

³Archimedes (287-212 p.n.e)

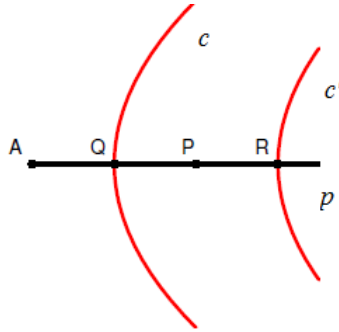
⁴Gemnius (I vek p.n.e)

⁵Gilles de Roberval (1602-1675)

⁶Pierre de Fermat (1601-1665)

⁷John Wallis (1616-1703)

kroz tačku A tako da seče obe krive redom u tačkama Q i R , a zatim na pravoj p nalazimo tačku P tako da je $AP = QR$. Geometrijsko mesto tačaka (dobija se povlačenjem svih pravih kroz tačku A) P biće cisoida krivih c i c' u odnosu na tačku A (slika 3.4). Najjednostavniji primer koji bi sada trebao biti jasan jeste cisoida dva koncentrična kruga poluprečnika r_1 i r_2 u odnosu na njihov zajednički centar. U pitanju je krug sa istim centrom i poluprečnikom $r_1 - r_2$. Jasno, na osnovu konstrukcije možemo razlikovati mnogo cisoida. Već je navedena kosa cisoida. Cisoida kruga i prave linije koja nije tangenta na taj krug ni u jednoj tački kruga u odnosu na tačku na kružnici je desni strofoid. Osim toga može se posmatrati konstrukcija cisoide krive sa samom sobom u odnosu na neku tačku, pa u je tom smislu, cisoida parabole u odnosu na tačku koja joj ne pripada dupla S-kriva, a cisoida kardioide u odnosu na tačku na njenoj osi je figura osam sa dva šiljka. Dakle, mnoge ravanske krive mogu se klasifikovati i kao cisoide. No, tema ovog poglavlja je Dioklova cisoida, te se vraćamo opisivanju iste.



Slika 3.4: Metod crtanja cisoide

Neparametarska, implicitna reprezentacija cisoide data je sa:

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0, \quad (3.2)$$

što se na osnovu konstrukcije Dioklove cisoide jednostavno može i izvesti. Posmataramo krug sa centrom u $(a, 0)$, poluprečnika a . Neka je prava p tangenta na krug u tački S . Na osnovu opisanog postupka konstrukcije imamo tačke P sa koordinatama (x, y) , Q , R , što je prikazano na slici 3.5.

Sa slike je jasno da se na $\triangle ASQ$ može primeniti Pitagorina teorema i dobija se:

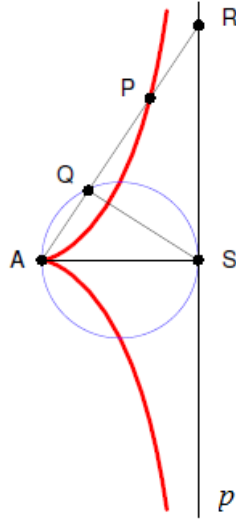
$$QS^2 = 4a^2 - (AR - QR)^2, \quad (3.3)$$

jer je $AS = 2a$. Po definiciji cisoide važi:

$$QR = AP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Na osnovu sličnosti trouglova važi $\frac{AR}{2a} = \frac{AP}{x}$, pa za (3.3) imamo:

$$QS^2 = 4a^2 - \left(\frac{2a}{x} - 1\right)^2(x^2 + y^2). \quad (3.4)$$



Slika 3.5: Izvođenje jednačine Dioklove cisoide

Iz $\triangle QSR$ dobijamo:

$$QS^2 = RS^2 - QR^2 = RS^2 - AP^2 = \left(\frac{2ay}{x}\right)^2 - (x^2 + y^2), \quad (3.5)$$

jer zbog sličnosti imamo $\frac{RS}{2a} = \frac{y}{x}$. Izjednačavanjem (3.4) i (3.5) dobija se baš (3.2).

Kako bi parametrizacija Dioklove cisoide bila izvršena, u (3.2) uvrstićemo $y = xt$ i dobijamo:

$$c(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}\right). \quad (3.6)$$

U polarnim koordinatama Dioklova cisoida se zadaje jednačinom:

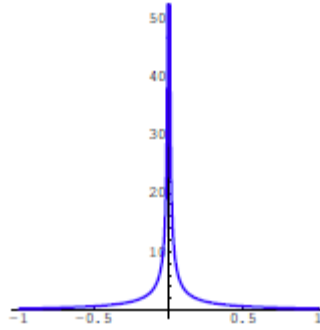
$$r = \frac{2a}{\sec \theta - \cos \theta} = \frac{2a \sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Asimptota Dioklove cisoide je prava $x = 2a$. Površina između Dioklove cisoide i njene asimptote iznosi

$$A = 2 \int_0^{2a} \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} dx = 3\pi a^2.$$

Napomena, radi se o Dioklovoj cisoidi kruga poluprečnika a . Krivina Dioklove cisoide uvek je pozitivna i data je jednačinom:

$$\kappa[c](t) = \frac{3}{a|t|(4+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



Slika 3.6: Krivina Dioklove cisoide

S obzirom na to da Dioklova cisoida ima špic, ne može biti Freneova kriva i ne može biti prirodno parametrizovana. Inverzna kriva Dioklove cisoide u odnosu na špic je parabola. Više o Dioklovoj cisoidi videti u [13].

3.3 Dekartov list

Poslednja algebarska kriva stepena tri koja će biti obrađena u radu je Dekartov list. 1638. godine Dekart je prvi put u svom radu opisao ovu krivu, odnosno ispravno je opisao samo njen deo u prvom kvadrantu. Naime, Dekart je verovao da se oblik krive iz prvog kvadranta ponavlja u ostalim kvadrantima i da kriva izgleda kao cvet sa četiri identične latice. Isto, pogrešno, mišljenje delio je i Roberval i nazvao je krivu "fleur de jasmin" (cvet jasmina). Naziv je odbačen sa otkrićem pravog oblika Dekartovog lista, a danas se kriva ponekad naziva i "neud de ruban" (eng. ribbon knot). S obzirom na to da je Pjer del Ferma u to vreme bio otkrio metod za pronalaženje tangenti na krivu, Dekart ga je izazvao da pronađe tangente na njegovu krivu, što je Ferma uspešno rešio.

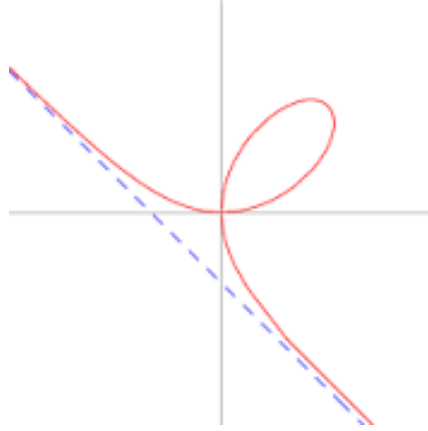
Neparametrizovana, implicitna jednačina Dekartovog lista je:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (3.7)$$

Parametrizovana reprezentacija Dekartovog lista dobija se kada se u (3.7) ubaci $y = xt$:

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Jasno, kriva ima singularitet u $t = -1$. Deo krive u drugom kvadrantu nastaje za vrednosti parametra: $-1 < t < 0$ ($x > 0$, $y < 0$), petlja (deo krive u drugom kvadrantu) nastaje za

Slika 3.7: Dekartov list za $a = 1$, $t \in [-20, 20]$

$0 \leq t < \infty$ ($x < 0$, $y > 0$), a deo krive u četvrtom kvadrantu nastaje za $-\infty < t < -1$ ($x > 0$, $y > 0$). Jednačina asimptote je:

$$x + y + a = 0.$$

U polarnim koordinatama jednačina Dekartovog lista je:

$$r = \frac{3a \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}.$$

Površina između Dekartovog lista i njegove asimptote, odnosno površina petlje je:

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta} d\theta = \frac{3}{2} a^2.$$

Krivina Dekartovog lista data je sa:

$$\kappa[c](t) = \frac{2(1 + t^3)^4}{3a(1 + 4t^2 - 4t^3 - 4t^5 + 4t^6 + t^8)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dužina luka petlje Dekartovog lista je:

$$l = 3a \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1 + t^2}(4 - 4t - 4t^3 + 4t^4 + t^6)}{(1 + t^3)^2} dt = 4.917488...a.$$

Simetričan je u odnosu na pravu $x = y$. Dekartov list je kriva koja ima singularitet, pa ni ova kriva nije Freneova. Više o Dekartovom listu videti u [7].

3.4 Paskalov Puž

Obradu algebarskih krivih četvrtog stepena započinjemo Paskalovim pužem (fr. limaçon) Iako E. Paskal⁸, otac Blez Paskala⁹ nije prvi koji je opisao puža, on ipak nosi njegovo ime. Durer¹⁰ u svom delu iz 1525. godine. "Instrukcije u vezi sa merenjem" opisuje konstrukciju puža. Proučavanjem puža bavio se i Roberval, upotrebio ga je 1650. kao primer za prezentaciju svog metoda određivanja tangenti.

Puž je putanja tačke koja se nalazi u unutrašnjosti kruga, koji se bez klizanja kotrlja po krugu istog poluprečnika, pa puž pripada istoj grupi krivih kao i epicikolida. Puž se može nacrtati tako što se prvo nacrtava krug i zada tačka P , a zatim se crta niz krugova čiji su centri na kružnici datog kruga i svi prolaze kroz tačku P . Obvojnica ovih krugova je puž. Specijalan slučaj puža dobija se kada fiksiramo tačku na kružnici i to je kardioda, o kojoj će biti reči u narednom odeljku. Alternativna definicija puža kaže da je on konhoida kruga u odnosu na tačku na njegovoj kružnici.

Puža crtamo na sledeći način: nacrtamo krug i označimo mu prečnik $AB = 2a$ (slučaj konveksnog puža). Izaberemo tačku Q na kružnici kruga, lenjir postavimo tako da je Q na sredini skale, a zatim lenjir rotiramo tako da možemo povući pravu kroz tačke A i Q . Sa obe strane tačke Q označimo tačke P i P' , tako da su na istom rastojanju, većem od $2a$ od Q . Postupak ponovimo više puta, dobijene tačke biće tačke puža.

U polarnim koordinatama puž se zadaje kao:

$$r = b + a \cos \theta. \quad (3.8)$$

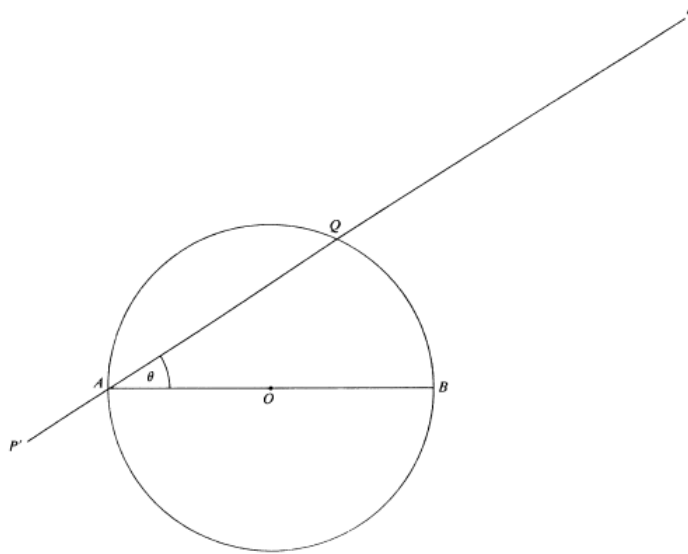
Za razne vrednosti konstanti a i b dobijaju se različite varijante puža, što je prikazano na slici 3.9:

- (i) $b \geq 2a$ puž je konveksan,
- (ii) $2a > b > a$ puž ima "rupu",
- (iii) $b = a$ puž je kardioda (biće obrađena u sledećem odeljku),
- (iv) $b < a$ puž ima unutrašnju petlju,
- (v) $b = \frac{a}{2}$ puž degeneriše u trisektrisu,
- (vi) $a = 0$ puž je krug.

⁸Étienne Pascal (1588-1651)

⁹Blaise Pascal (1623-1662)

¹⁰Albrecht Dürer (1471-1528)



Slika 3.8: Metod crtanja puža

Trisektrisa je kriva koja se može upotrebiti za podelu ugla na tri jednaka dela, na sledeći način - konstruiše se ugao $\angle BAR$ koji je jednak uglu koji treba da podelimo na tri dela, tako da je $AR = a$ (slika 3.10). Povučemo pravu koja spaja tačke R i O (centar kruga), prava će seći unutrašnju petlju puža (trisektrise) u tački P' . Duž AP' formira $\angle BAP' = \frac{1}{3}\angle BAR$ i trisekcija ugla pomoću puža uspešno je izvršena.

Parametarske jednačine dobijaju se iz (3.8) kada je $x = r \cos \theta$ i $y = r \sin \theta$. Dobija se:

$$x = \cos t(a \cos t + b), \quad y = \sin t(a \cos t + b), \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

S obzirom na datu parametrizaciju možemo izračunati dužinu luka

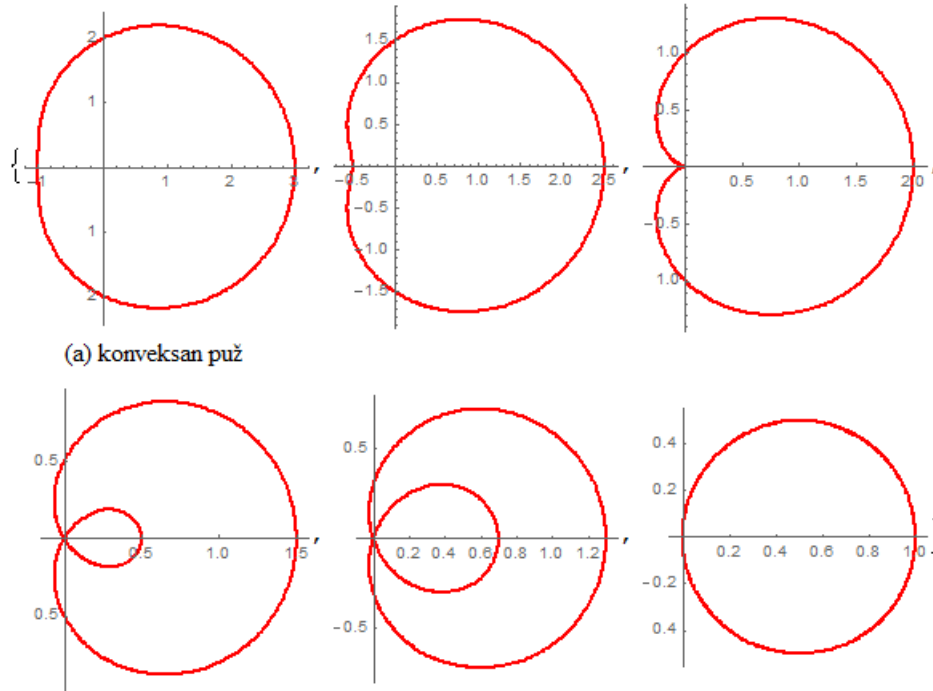
$$s(t) = 2(a+b)E\left(\frac{t}{2}, \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right),$$

gde je $E(z, k)$ eliptični integral druge vrste. Za $t = 2\pi$ dobija se

$$s = 2(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Neparametarska reprezentacija data je sa: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$, odakle je jasno da je puž algebarska kriva reda četiri.

Puž je inverzna kriva za konusne preseke - za različite vrednosti konstanti a i b biće inverzna kriva za različite konusne preseke. Puž je simetričan u odnosu na x -osu, poseban

Slika 3.9: Paskalov puž za različit odnos konstanti a i b

je slučaj Dekartovog ovala. U slučaju $b = 2a$ puž je konveksana zatvorena kriva, bez petlji i špica, pa zadovoljava four vertex teorem.

3.5 Kardioida

Implicitna, neparametarska reprezentacija data je sa:

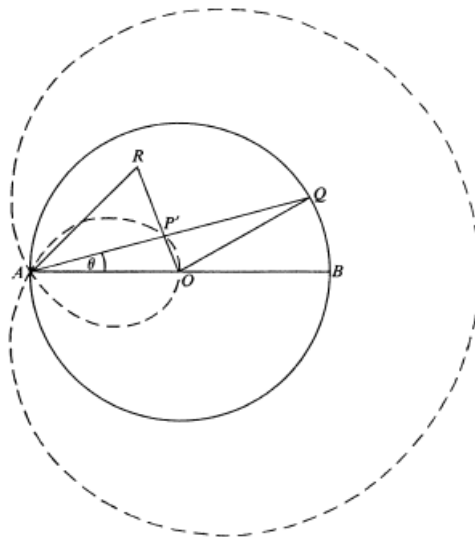
$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

odakle je jasno da se radi o algebarskoj krivoj četvrtog reda. Iako je Romer¹¹ bio prvi koji je 1674. godine proučavao kardioidu u sklopu ispitivanja cikloidnih krivih neophodnih za konstrukciju zupčanika, naziv kardioida (srcolika) prvi je upotrebio Castillion¹² u svom delu "Philosophical Transactions of the Royal Society", 1741.godine. Dužinu luka kardioida prvi je izračunao la Hire¹³ 1708. godine.

¹¹Ole Rømer (1644-1710)

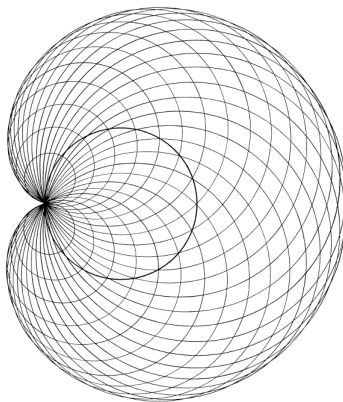
¹²Giovanni Francesco Mauro Melchiorre Salvemini di Castiglione (1708-1791)

¹³Philippe de La Hire (1640-1718)



Slika 3.10: puž kao trisektrisa

Kardioidu crtamo tako što prvo nacrtamo krug - osnovni krug i na njegovoj kružnici označimo proizvoljnu tačku A . Zatim nacrtamo još jedan krug sa centrom u tački Q koja leži na kružnici osnovnog kruga, poluprečnika AQ . Krugove, na opisani način, nastavimo da crtamo za različite položaje tačke Q tako da budu uniformno raspoređeni u odnosu na osnovni krug. Obvojnica, odnosno kriva koju svi krugovi dodiruju je upravo kardioida.



Slika 3.11: Metod crtanja kardioide

Kao što je i pomenuto u prethodnom odeljku, kardioida je specijalan slučaj Paskalovog

puža kada je $b = a$, te važi da je parametrizacija kardioide u polarnim koordinatama:

$$r = a(1 + \cos \theta),$$

a u Dekartovim:

$$x(t) = a \cos t(1 - \cos t), \quad y(t) = a \sin t(1 - \cos t),$$

pa se lako određuju njene metričke karakteristike:

- (i) dužina kardioide $L = 8a$,
- (ii) površina koju obuhvata kardioda $A = \frac{3}{2}\pi a^2$,
- (iii) krivina $\kappa(t) = \frac{3}{4|a \cos(\frac{t}{2})|}$,
- (iv) dužina luka $s(t) = 8a \sin^2\left(\frac{t}{4}\right)$.

Osim navedenog, određeno je i da je dužina svih tangenti koje prolaze kroz špic $(\pm\pi, 0)$ jednaka i iznosi $4a$, kao i da sredine tih tangenti leže na krugu. Takođe je poznato da u svakom pravcu postoje tri paralelne tangente na kardiodu, a vrednosti parametra θ u dodirnim tačkama sa kružnicom razlikuju se za $\frac{2\pi}{3}$.

Kardioda je epicikloida - putanja tačke kruga sa njegove kružnice dok se on kotrlja po drugom krugu istog prečnika sa spoljašnje strane. Kardioda je i hipocikloida - putanja tačke kruga sa njegove kružnice dok se on kotrlja po kružnici drugog kruga duplo dužeg prečnika sa unutrašnje strane. Kardioda je inverzna kriva za parabolu u odnosu na njen vrh. Kardioda nije konveksna kriva, pa ne zadovoljava *four vertex* teorem, a zbog šiljka nije ni Freneova. Više o kardiodi videti u [9].

3.6 Figura osam

Figura osam još se naziva i Geronova lemniskata¹⁴. Figura osam nastaje na sledeći način: posmatramo krug poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku. P je tačka na kružnici ovog kruga. Tačka M dobija se u preseku prave $x = 1$ i prave paralelne x -osi koja prolazi kroz tačku P . Tačka Q se nalazi u preseku OM i prave paralelne y -osi koja prolazi kroz tačku P . Putanja tačke Q koju ona prelazi dok se tačka P kreće po kružnici predstavlja đavolju krivu (slika 3.12). Figura osam se definiše jednačinom:

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2).$$

U polarnim koordinatama figura osam zadaje se kao:

$$r^2 = a^2 \sec^4 \theta \cos(2\theta).$$

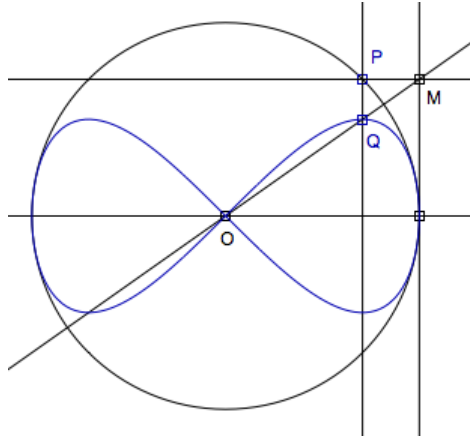
¹⁴Camille-Christophe Geron (1799-1891)

Parametrizacija figure osam data je sa:

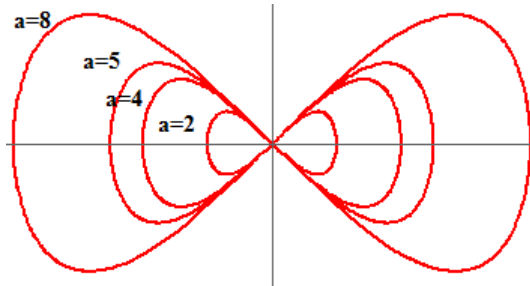
$$c(t) = (a \cos t, a \sin t \cos t), \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

pa lako možemo odrediti njene metričke karakteristike:

1. površina koju obuhvata figura osam, odnosno površina obe petlje $A = \frac{4}{3}a^2$,
2. krivina figure osam $\kappa(t) = -\frac{2\sqrt{2}[2+\cos(2t)] \sin t}{a[2+\cos(2t)+\cos(4t)]^{\frac{3}{2}}}$,
3. dužina luka figure osam $s(t) = 2a\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos(2t) + \cos(4t)} dt = 6.09722...a$



Slika 3.12: Konstrukcija figure osam



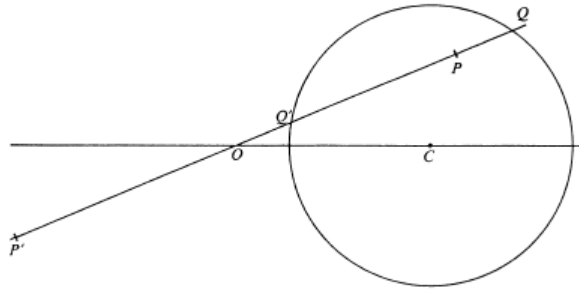
Slika 3.13: Oblik figure osam za razne vrednosti konstante a

Kada su u pitanju geometrijska svojstva figure osam, ista ima dve vertikalne i dve horizontalne tangente redom u $(\pm a, 0)$ i $(\pm \frac{1}{2}a\sqrt{2}, \pm \frac{1}{2}a)$. Osim toga kriva je simetrična u odnosu na x i y ose, ima dve petlje, a indeks rotacije figure osam je $U_c = 0$.

3.7 Bernulijeva lemniskata

1694. godine Jakob Bernuli¹⁵ je objavio članak "Acta Eruditorum" o krivoj oblika figure osam, koju je označio latinskom reči "lemniscus" (ukrasna traka). U članku Bernuli nije ispitivao geometrijske karakteristike lemniskate, već se bavio krivom sa analitičkog aspekta a proučavanja u vezi sa dužinom luka lemniskate postavila su temelj za kasnije ispitivanje eliptičkih funkcija. Makloren¹⁶ se takođe bavio lemniskatom. Vat¹⁷ je kod svog poboljšanja parne mašine koristio mašinu koja je radeći opisivala upravo Bernulijevu lemniskatu. Osim toga lemniskata je našla svoju primenu kod kvazi jedno-dimenzionalnih modela (Q1D).

Bernulijevu lemniskatu crtamo tako što nacrtamo krug sa centrom u C , a zatim označimo tačku O čije je rastojanje od centra $\sqrt{2}$ puta veće od poluprečnika. Kroz tačku O povučemo proizvoljnu pravu koja seče krug u Q , Q' i na toj pravoj označimo tačke P i P' koje su na rastojanju QQ' od O . Postupak ponavljamo za različite položaje prave kroz tačku O i sve tako dobijene tačke su tačke Bernulijeve lemniskate. Lemniskatu možemo dobiti kao obvojnici krugova sa centrima na pravougaonoj hiperboli koji prolaze kroz centar hiperbole.



Slika 3.14: Metod crtanja Bernulijeve lemniskate

Bernulijeva lemniskata je geometrijsko mesto tačaka P takvih da je proizvod rastojanja od fiksnih tačaka F_1 i F_2 (žiže, koje su na međusobnom rastojanju $2a$) konstantan i iznosi a^2 , čime je obezbeđeno da je središnja tačka duži koja spaja žiže takođe na lemniskati. Osim toga, lemniskata je cisoida kruga poluprečnika $\frac{a}{2}$ u odnosu na tačku koja je na rastojanju $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ od centra. Neparametarska reprezentacija lemniskate je:

$$(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2),$$

dok je u polarnim koordinatama lemniskata zadata sa:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad y = x \sin t, \quad a = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

¹⁵Jacques Bernoulli (1655-1705)

¹⁶Colin Maclurin (1698-1746)

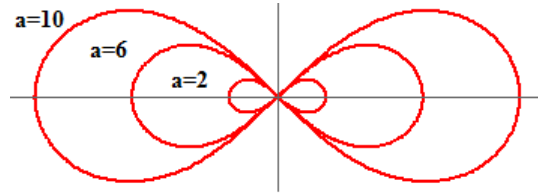
¹⁷James Watt (1736-1819)

U Dekartovim koordinatama lemniskati odgovaraju jednačine:

$$x(t) = \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y(t) = \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Sada, kada su nam poznate jednačine Bernulijeve lemniskate, možemo odrediti neke metričke karakteristike lemniskate.

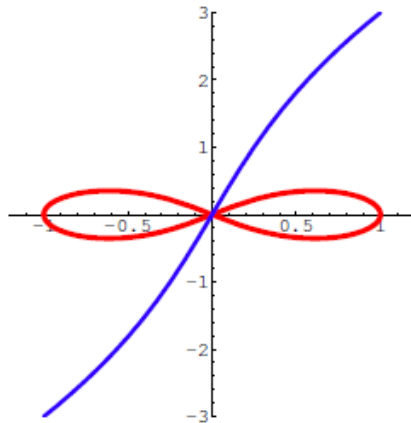
1. površina lemniskate $A = a^2$,
2. dužina luka lemniskate $s(t) = \frac{a}{2\pi} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 = 5.2441151086...a$,
3. krivina lemniskate $\kappa(t) = \frac{3\sqrt{2} \cos t}{a\sqrt{3 - \cos 2t}}$,
4. dužina lemniskate $L = 4a(1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \dots)$



Slika 3.15: Bernulijeva lemniskata za razne vrednosti konstante a

Interesantna je činjenica da je vrednost koja se javlja kod dužine luka lemniskate konstantna koja je ekvivalent konstanti π kod kruga. Za pomenutu konstantu dokazano je da se radi o transcendentnom broju 1937. godine. Osim toga, kada se konstanta lemniskate podeli sa dva dobija se vrednost koja se često naziva i prva konstanta lemniskate, dok je kao druga konstanta lemniskate poznata vrednost $\frac{1}{2}M$, gde je M recipročna vrednost Gausove konstante.

Lemniskata je inverzna kriva za hiperbolu u odnosu na centar hiperbole. Lemniska se može još kategorisati i kao sinusoidalna spirala oblika $r^n = a^n \cos n\theta$ za $n = 2$, ali i kao cisoida kruga poluprečnika a u odnosu na tačku koja je od centra kruga udaljena $\sqrt{2}a$. lemniskata ima dve petlje i jedan singularitet u tački $(\pm\pi, 0)$, pa nije Freneova, a simetrična je u odnosu na x i y ose. Indeks rotacije Bernulijeve lemniskate $U_c = 0$. Zanimljivo je napraviti poređenje Bernulijeve i Geronove lemniskate (figure osam), s obzirom na veliku sličnost između ovih figura. Poredeći njihove krivine slika 3.16 uočavamo da krivina Bernulijeve lemniskate ima samo jedan maksimum, jedan minimum i jednu prevojnu tačku za $0 \leq t < 2\pi$, dok za isto t krivina Geronove lemniskate ima tri maksimuma i tri minimuma kao i dve prevojne tačke.



Slika 3.16: Krivine Bernulijeve (plava) i Geronove (crvena) lemniskate

3.8 Đavolja kriva

Đavolja kriva je poslednja algebarska kriva četvrtog reda koja će biti obrađena u ovom radu. Đavolju krivu je prvi opisao Kramer¹⁸ 1750. godine, a 1810. godine Đavolju krivu proučavao je i Lacroix¹⁹. Poreklo imena ove krive godinama je izazivalo nesuglasice među matematičarima, jedno od mišljenja je da ono potiče od igre *diabolo*, što u prevodu na srpski znači đavo. Naime, kriva oblikom podseća na rekvizite za pomenutu igru. Više o poreklu imena videti u [10].

Đavolja kriva definisana je jednačinom:

$$y^2(y^2 - a^2) = x^2(x^2 - b^2).$$

U polarnim koordinatama jednačina đavolje krive je:

$$r^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta},$$

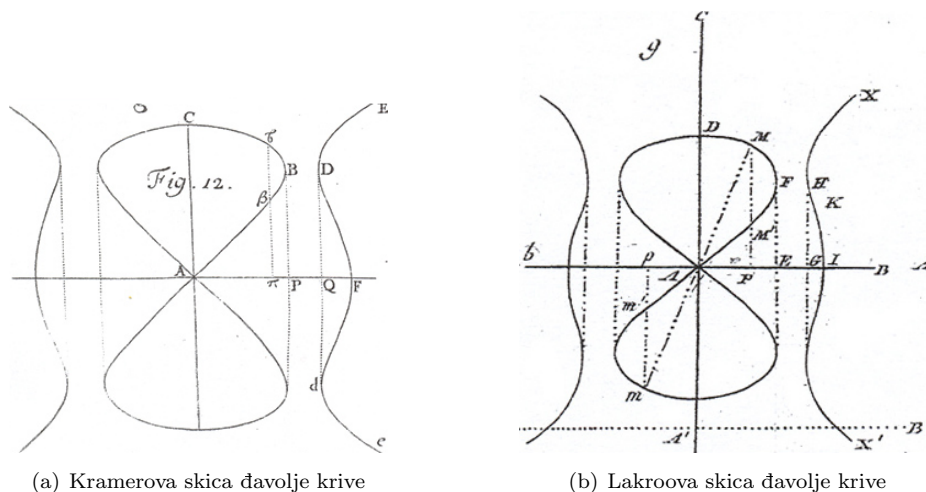
dok je parametrizovana sa:

$$c(t) = \left(\cos t \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}}, \sin t \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}} \right).$$

U koordinatnom početku kriva ima singularitet - seče samu sebe, a tangentni vektori na dve različite grane krive se ne poklapaju. Kriva ima i dve asimptote: $y = \pm x$. Za različit odnos

¹⁸Gabriel Cramer (1704-1752)

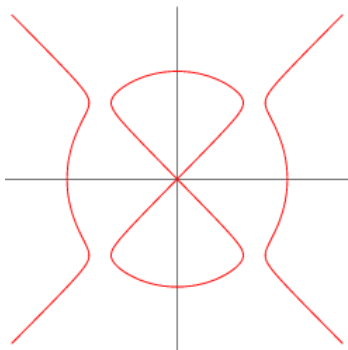
¹⁹Sylvestre François Lacroix (1765-1843)



vrednosti parametara a i b položaj krive se menja. Ako je $\frac{a}{b} < 1$ kriva je u horizontalnom položaju i simetrična u odnosu na x -osu, slika 3.18 (levo), a kada je $\frac{a}{b} > 1$ kriva je rotirana za $\frac{\pi}{2}$, odnosno u vertikalnom je položaju i simetrična je u odnosu na y -osu slika 3.18 (desno). Za $\frac{a}{b} = 1$, odnosno $a = b$ đavolja kriva postaje krug. Poseban slučaj đavolje krive dobija se za $a^2 = 96$ i $b^2 = 100$, i ova kriva se naziva kriva električnog motora (slika 3.19).

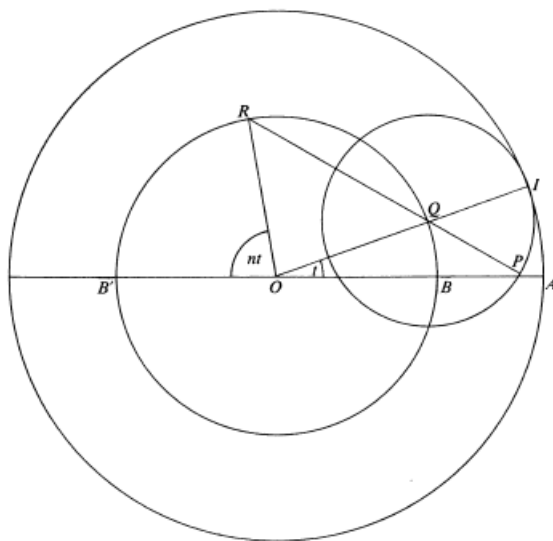
3.9 Epicikloida i Hipocikloida

Epicikloida i hipocikloida spadaju u algebarske krive višeg reda. Nastaju kotrljanjem kruga po kružnici drugog kruga sa spoljašnje, odnosno unutrašnje strane. Predstavljaju



Slika 3.19: Đavolja kriva električog motora

slučajeve epitrohoide, tj. hipotrohoide kada je tačka koja generiše krive na kružnici kruga koji se kotrlja. Prvi koji ih je proučavao bio je Direr (1525), a njima su se bavili i Dezarg (1640), Romer (1647), Hajgens (1679), Njutn i Lajbnić (1686), Lopital²⁰, Jakob Bernuli (1690), 1725. godine Danijel Bernuli opisao je način generisanja ovih krivih, a njima se bavio i Ojler²¹ (1745, 1784).

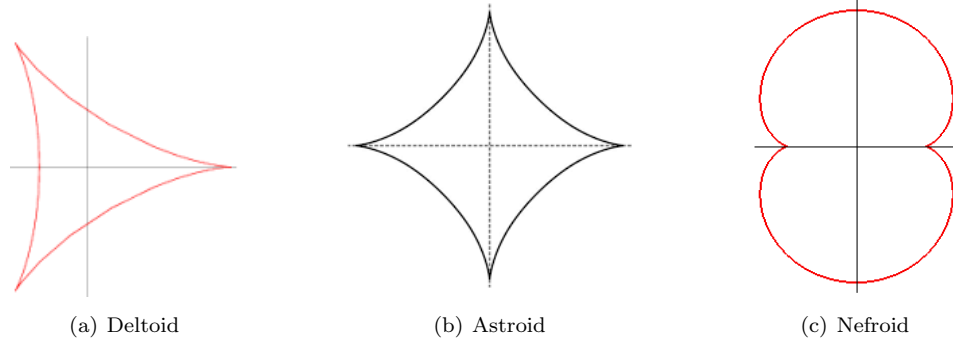


Slika 3.20: Metod crtanja hipocikloide

Kako bismo nacrtali hipocikloidu sa $n + 1$ šiljkom prvo crtamo krug sa centrom u O i

²⁰Guillaume de l'Hôpital (1661-1704)

²¹Leonhard Euler (1707-1783)



Slika 3.22: Specijalni slučajevi hipocikloide i epicikloide

2. $n = 3$ astroid

i epicikloide:

1. $m = 2$ kardioida,

2. $m = 3$ nefroid.

S obzirom na to da nam je poznata parametrizacija ovih krivih možemo odrediti njihove metričke karakteristike:

1. dužina krive $L = 8na$, odnosno $L = 8ma$,

2. Površina koju obuhvata kriva $A = \pi a^2(n^2 - n)$, tj. $A = \pi a^2(m^2 + m)$.

Evoluta hipocikloide kao i epicikloide je hipocikloida, odnosno epicikloida. Epicikloida je tautohrona (kriva). Više o epi i hipocikloidi videti u [13].

3.10 Cikloida

Cikloida je prva transcendentna kriva koja će biti obrađena. Istorijske činjenice u vezi sa cikloidom vrlo su interesantne, a započinju 1599. godine sa Galilejevim²² pokušajem da odredi površinu cikloide. Naime, Galileo je merio metalne komadiće oblika cikloide očekujući da će odnos težina tako oblikovanog komadića i komadića oblika kruga biti $\pi : 1$.

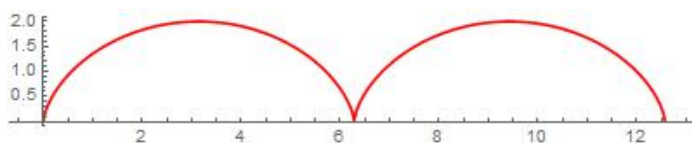
²²Galileo Galilei (1564-1642)

Tačnu površinu cikloide odredio je Galilejev učenik Toričeli²³, ali i Dekart, Roberval (1628) i Ferma, pre njih u rešavanju istog problema nije imao uspeha Marsen²⁴. Slična situacija se dogodila i kod rešavanja problema konstrukcije tangente na cikloidu, odnosno više matematičara u kratkom vremenskom intervalu došlo je do istih zaključaka, pa je bilo optužbi za plagiranje. Roberval je 1634. odredio dužinu luka cikloide. Isto je 1658. godine uradio i Kristofer Vren²⁵, a iste godine Paskal nudi nagradu onome ko reši niz problema u vezi sa "la Roulette" (pretpostavlja se da je Paskal prvi koji je upotrebio naziv cikloida). Iako su dva kandidata imala rešenja problema koje je zadao Paskal, nikada nisu dobili nagradu. Džon Bernuli je 1696. u svom delu "Acta eruditorum" (skripta namenjena studentima) postavio novi izazov, znajući rešenje istog (cikloida), svojim savremeniciima. U pitanju je takozvani problem brahistrohrona. Izazovu su se uspešno odazvali: Lajbnic²⁶, Njutn, Jakob Bernuli. Cikloida je rešenje i problema tautohronosti, što je pokazao Hajgens još 1659. godine. Hajgens je izumitelj prvog sata sa klatnom. Sat je sadržao uređaj koji je u toku rada opisivao luk cikloide. Dezarg je predložio da zupci na zupčaniku imaju oblik cikloide. S obzirom na sve nabrojano u vezi sa cikloidom, s pravom je nazvana "Helen of Geometers".

Navodimo jedan način na koji može biti nacrtana cikloida: nacrtamo dve horizontalne prave na rastojanju a . Povlačimo 19 vertikalnih pravih na rastojanju $\frac{2\pi a}{18} \approx 0.35a$, obeležimo ih sa $0, 1, 18, \dots$ na prvoj (višoj) horizontalnoj pravu i u tim tačkama kao centrima crtamo krugove poluprečnika a . Time smo predstavili pozicije kruga koji se kotrlja po nižoj horizontalnoj pravu, svaki krug predstavlja rotaciju za $\frac{\pi}{9}$. U svakoj od tačaka $0, 1, 2, \dots$ nacrtamo poluprečnik kruga redom pod uglom od $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \dots$ u odnosu na vertikalnu liniju. Poluprečnici predstavljaju uzastopne položaje fiksnog prečnika kruga koji se kotrlja. Krajnje tačke prečnika, odnosno one koje leže na kružnici biće tačke cikloide. Jasno je da je cikloida putanja jedne fiksirane tačke na obodu kruga koji se kotrlja bez klizanja po pravu. parametarske reprezentacija cikloide data je sa:

$$x(t) = at - b \sin t, \quad y(t) = a - b \cos t, \quad -\infty \leq t \leq \infty.$$

S obzirom na položaj tačke, odnosno odnos a i b razlikuju se tri tipa cikloide:



Slika 3.23: Cikloida za $a = b$

1. ako je tačka čiju putanju posmatramo na kružnici ($a = b$) radi se o tipičnoj cikloidi koja ima špic u koordinatnom početku,

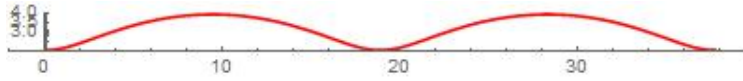
²³Evangelista Torricelli (1608-1647)

²⁴Marin Mersenne (1588-1648)

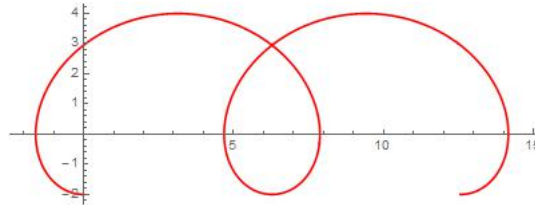
²⁵Christopher Wren (1632-1723)

²⁶Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

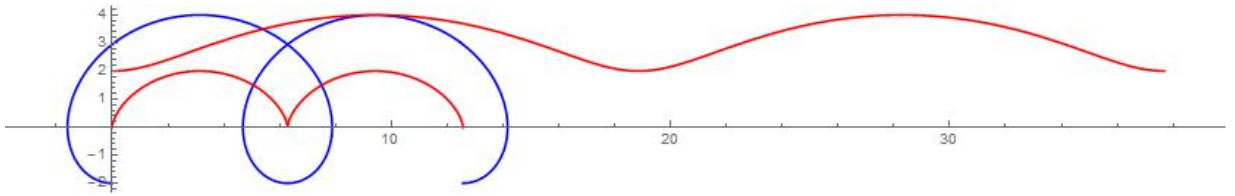
2. ako je tačka čiju putanju posmatramo u unutrašnjosti kruga ($b < a$) radi se o skraćenoj cikloidi,
3. ako je tačka čiju putanju posmatramo fiksirana sa spoljašnje strane kruga ($a < b$) radi se o produženoj cikloidi.



Slika 3.24: Skraćena cikloida



Slika 3.25: Produžena cikloida



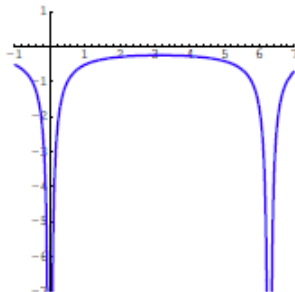
Slika 3.26: Uporedan prikaz sve tri cikloide

Sada možemo navesti i neka metrička svojstva tipične cikloide ($a = b$):

1. dužina jednog luka $L = 8a$,
2. površina ispod jednog luka $A = 3\pi a^2$,
3. dužina luka cikloide za prvi luk $s(t) = 8a \sin^2\left(\frac{1}{4}t\right)$,
4. krivina cikloide $\kappa(t) = -\frac{|\csc(\frac{1}{2}t)|}{4a}$,
5. dužina prave po kojoj se kotrlja krug od šiljka do šiljka je $2\pi a$.

Hajgens je 1673. godine pokazao da je evoluta cikloide ista takva cikloida.

Kao što je i rečeno, cikloida je brahistohrona (najkraće vreme) kriva, odnosno predstavlja putanju kojom telo koje kreće iz stanja mirovanja najbrže stigne do zadate krajnje tačke (na

Slika 3.27: Krivina cikloide $a = b$

cikloidi), kretanje je bez trenja, pod dejstvom gravitacije. Cikloida je i tautohrona, odnosno izohrona (isto vreme) ako ima osobinu da je vreme potrebno telu da stigne do najniže tačke krive nezavisno od početnog položaja. Rešavajući ova dva problema matematičari su razvili metode koje su kasnije upotrebljavane u infinitezimalnom i varijacionom računu. Više o cikloidi videti u [9].

3.11 Logaritamska spirala

Sve spirale su transcendentne krive, a razlikujemo:

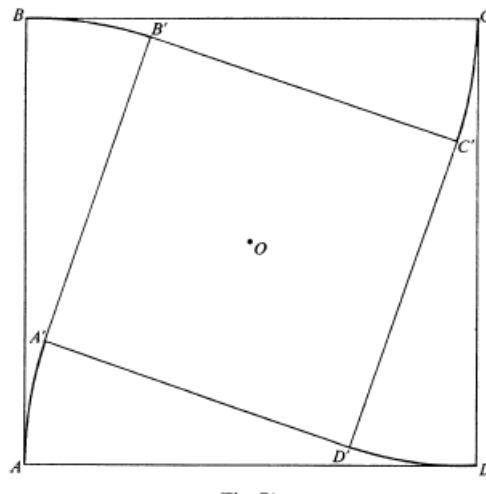
1. logaritamsku spiralu,
2. aritmetičke spirale koje obuhvataju
 - (a) hiperboličnu spiralu,
 - (b) Arhimedovu spiralu,
 - (c) Fermaovu spiralu,
 - (d) krivu po imenu litus - pastirski štap,
3. sinusoidalne spirale,
4. Ojlerovu spiralu (polinomijalne spirale),
5. Koteove spirale.

U ovom radu biće obrađene logaritamska i Ojlerova spirala.

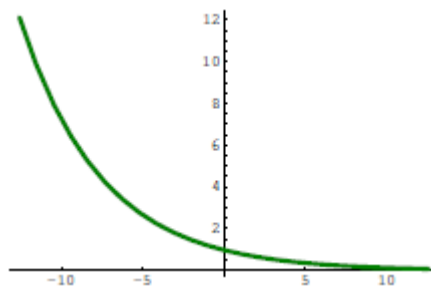
Logaritamska spirala je kriva koja se često javlja u prirodi - puževa kućica, nervi rožnjače, neke galaksije kao i cikloni imaju oblik logaritamske spirale. Prvi matematičar koji se bavio

proučavanjem logaritamske spirale bio je Dekart. On je 1638. godine opisao logaritamsku spiralu proučavajući problem iz dinamike. Želeo je da opiše sve ravanske krive koje imaju osobinu da je ugao između krive i tangentskog vektora isti u svakoj tački, što će u nastavku i biti dokazano da je osobina logaritamske spirale.

Problem "četiri psa" je interesantan primer koji generiše logaritamsku spiralu. Četiri psa nalaze se u uglovima dvorišta oblika kvadrata i počinju istovremeno kretanje tako da se pas iz ugla A kreće ka psu iz ugla B , a pas iz ugla B ka psu iz ugla C i tako redom. Psi se kreću ravnomerno istom brzinom. Sledeći položaj pasa prikazan je na slici 3.28. Jasno, novonastali položaj odgovara kvadratu rotiranom za neki ugao u odnosu na početni kvadrat, a putanja svakog psa je prava koja je pod određenim (konstantnim) uglom u odnosu na pravu koja spaja centar kruga sa stranicom iz čijeg temena je krenuo pas. Putanja svakog psa je logaritamska spirala - tangenta u svakoj tački na putanju gradi konstantan ugao sa pravom kroz tačku dodira i fiksiranu tačku (centar kvadrata).



Slika 3.28: Problem "četiri psa"



Slika 3.29: Krivina logaritamske spirale

Parametrizacija logaritamske spirale data je sa:

$$c(t) = a(e^{bt} \cos t, e^{bt} \sin t), \quad t \in [a, b].$$

Sa promenom znaka b , menja se i smer uvijanja spirale. Primetimo da za $b = 0$ parametrizacija odgovara kružnici. Jasno, za $b > 0$ krivina se smanjuje sa povećanjem parametra t , što će biti ilustrovano na slici 3.29, na kojoj je prikazan grafik funkcije krivine ove krive:

$$\kappa(t) = \frac{1}{ae^{bt}\sqrt{1+b^2}}, \quad t \in [a, b].$$

U slučaju $b \rightarrow \infty$ spirala će imati infinitezimalnu vrednost krivine i praktično će težiti ka pravoj.

Neka je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva koja ne prolazi kroz koordinatni početak. Ugao između krive i tangentskog vektora definisan je kao funkcija $\phi = \phi[c] : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ i važi:

$$\frac{c'(t)c(t)}{\|c'(t)\|\|c(t)\|} = \cos \phi(t) \quad i \quad \frac{c'(t)Jc(t)}{\|c'(t)\|\|c(t)\|} = \sin \phi(t)$$

za $a < t < b$.

Lema 3.1. Neka je $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ kriva koja ne prolazi kroz koordinatni početak. Sledeća dva tvrđenja su ekvivalentna:

- (i) Ugao između tangente i krive $\phi[c]$ je konstantan.
- (ii) c je reparametrizacija logaritamske spirale.

Dokaz. Zapišaćemo c kao $c(t) = re^{i\theta}$, gde su $r = r(t)$ i $\theta = \theta(t)$ funkcije od t . Tada je $c'(t) = e^{i\theta}(r' + ir\theta')$ i važi:

$$|c(t)| = r, \quad |c'(t)| = \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2}, \quad \overline{c(t)}c'(t) = r(r' + ir\theta').$$

Pretpostavimo da važi tvrđenje (i), odnosno da je $\phi[c] = \text{const} = \gamma$, treba pokazati da onda važi tvrđenje (ii). Na osnovu (1.3) imamo:

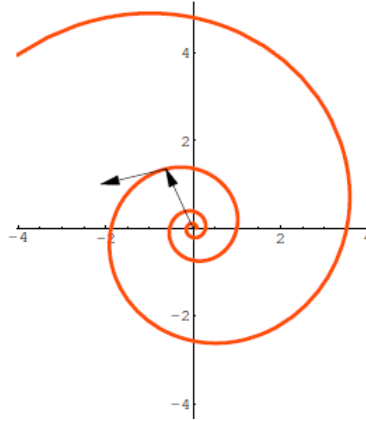
$$e^{i\gamma} = \frac{c'(t)\overline{c(t)}}{|c'(t)|\|c(t)\|} = \frac{r' + ir\theta'}{\sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2}}. \quad (3.9)$$

Iz (3.1) dobija se

$$\cos \gamma = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2}} \quad \sin \gamma = \frac{r\theta'}{\sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2}},$$

pa je

$$\frac{r'}{r} = \theta' \cot \gamma.$$



Slika 3.30: Ugao između tangente i krive je konstantan

Rešenje ove diferencijalne jednačine je:

$$r = a \exp(\theta \cot \gamma),$$

gde je a neka konstanta. I na kraju za c dobijamo:

$$c(t) = a \exp((i + \cot \gamma)\theta(t)),$$

što je baš parametrizacija logaritamske spirale, čime je dokazano da važi tvrđenje (ii). Suprotan smer dokaza je trivijalan, jer će pri svakoj reparametrizaciji ugao $\phi[c]$ imati konstantnu vrednost neko $\pm\gamma$. $\square$

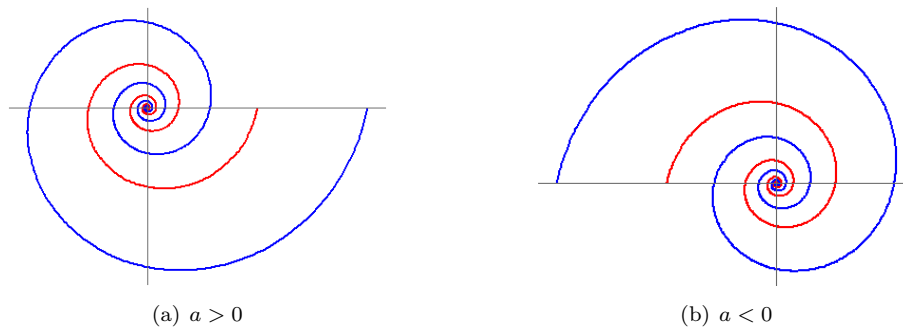
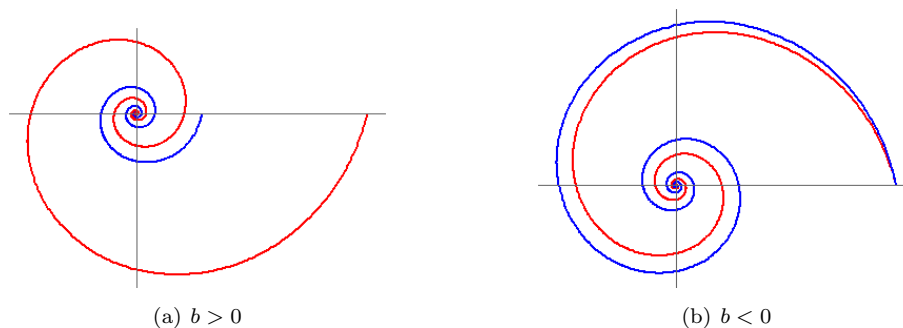
Nakon Dekarta, proučavanjem logaritamske spirale bavio se i Jakob Bernuli. On je logaritamsku spiralu još nazivao i čudesna spirala (*Spira Mirabilis*) zbog osobine da njen oblik ostaje isti bez obzira na to koliko zavoja spirala ima (eng. self-similarity) i upravo zbog te karakteristike se često javlja u prirodi jer omogućava rast bez promene oblika. O Bernulijevoj fascinaciji logaritamskom spiralom govori i činjenica da je zahtevao da mu je na spomenik uklešu (greškom je uklesana Arhimedova spirala, a uz nju stoji natpis *eadem mutata resurgo* u prevodu - iako promenjena, ostala je ista).

U polarnim koordinatama (r, θ) jednačina logaritamske spirale data je sa :

$$r = ae^{b\theta}, \quad \theta = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{r}{a} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Tvrđenje leme 3.1. u slučaju kada je kriva zadata u polarnim koordinatama pokazuje se na sledeći način:

$$\arccos \frac{\langle r(\theta), r'(\theta) \rangle}{\|r(\theta)\| \|r'(\theta)\|} = \arctan \frac{1}{b} = \phi.$$

Slika 3.31: Uticaj promene konstante a na oblik logaritamske spirale ($b = 0.2$)Slika 3.32: Uticaj promene konstante b na oblik logaritamske spirale ($a = 1$)

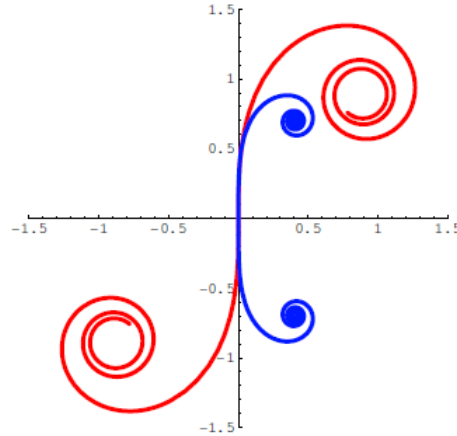
Iz ove jednakosti je jasno da je za $b = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$, odnosno spirala postaje kružnica, dok u slučaju $b \rightarrow \infty, \phi = 0$, odnosno spirala teži pravoj. Ako je baš $\phi = 1.6180339887\dots$, odnosno ϕ ima vrednost zlatnog preseka, dobija se specijalan slučaj logaritamske spirale - zlatna spirala.

3.12 Klotoida (Ojlerova spirala)

Ojlerova spirala je kriva koja ima najveću praktičnu primenu od svih krivih navedenih u ovom radu, pa s obzirom na to ima i veoma interesantnu istoriju. Ojlerovu spiralu prvi je koristio Džejms (Jakob) Bernuli 1694. godine rešavajući problem elastičnosti. Rešenje ovog problema dao je Ojler 1744. godine kada je i opisao krivu - dao njenu jednačinu i opisao neke njene metričke i geometrijske karakteristike. Nakon toga, proučavajući difrakciju svetlosti, spiralom se bavio i Kornu²⁷, pa se ova spirala ponekad naziva i Kornoova spirala.

²⁷Marie Alfred Cornu

Interesantno je još pomenuti i Talbota²⁸ koji je Ojlerovu spiralu koristio pri projektovanju drumskih i železničkih puteva, kako bi izbegao oštre krivine. Naime, Ojlerova spirala sa krivinom koja je linearno zavisna od dužine luka predstavlja idealn model za postepen prelazak sa puta (pruge) jednog pravca na put drugog pravca. U upotrebi je i naziv klotoida od grčke reči *kloth* što znači uvijati se okretanjem. Više o istorijatu ove krive videti u [8].



Slika 3.33: Ojlerove spirale za $a = n = 1$ (crvena) i $n = 2, a = \frac{1}{2}$ (plava)

Parametrizacija klotoida data je sa:

$$c(t) = a \left(\int_0^t \sin \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} \right) du, \int_0^t \cos \left(\frac{u^{n+1}}{n+1} \right) du \right).$$

Standardna klotoida je klotoida za $n = 1$ i prikazana je na slici 3.33 crvenom bojom. Parametrizacija standardne klotoida može biti izražena pomoću Frenelovih²⁹ integrala:

$$\int_0^t \sin \left(\frac{\pi u^2}{2} \right) du, \quad \int_0^t \cos \left(\frac{\pi u^2}{2} \right) du.$$

Pošto važi:

$$\int_0^{\pm\infty} \sin \left(\frac{u^2}{2} \right) du = \int_0^{\pm\infty} \cos \left(\frac{u^2}{2} \right) du = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

krajevi standardne klotoida se uvijaju oko tačke $\pm a\sqrt{\pi}(1, 1)$. Za n neparno klotoida imaju oblik kao standardna i simetrične su u odnosu na koordinatni početak, dok za n parno

²⁸Arthur Newell Talbot (1857-1942)

²⁹Augustin-Jean Fresnel (1788-1827)

klotoide imaju oblika kao plava klotoida ($n = 2$) sa slike 3.33 i simetrične su u odnosu na x -osu. Iako komplikovana za definisanje, kao transcendentna kriva, njena krivina kao i dužina luka se vrlo jednostavno opisuju:

$$\kappa(t) = -\frac{t^n}{a},$$

$$s(t) = at.$$

1990. godine Dilen je ³⁰ izvršio generalizaciju, odnosno definisao je klasu polinomijalnih spirala - spirale kod kojih je krivina spirale polinomijalna funkcija dužine luka iste. Ovo je slučaj kod klotoide, ali i kod duple klotoide, kao i kod još nekih krivih.

3.13 Katemptota

Katemptota, kao i spirale spada u transcendentne krive. Naziv katemptota je izveden iz latinske reči *catena* što u prevodu na srpski jezik znači lanac. Za njeno otkriće zaslužnim se smatra Jungius³¹ koji je 1669. godine opovrgnuo Galileevu tvrdnju da neistegljiv kanap (lanac) koji visi okačen o dve svoje tačke (na različitim vertikalnim linijama) ima oblik parabole. Međutim, parametrizaciju katemptote tek su dali Hajgens, Lajbnić, Jakob i Džon Bernuli 1690/91. Opširan rad o katemptoti je 1697. godine napisao Džordži³², profesor Oksfordskog univerziteta. Naziv katemptota se prvi put pojavljuje 1690. godine u Hajgensovom pismu Lajbniću. 1744. godine Ojler je dokazao da rotacijom katemptote oko njene ose simetrije nastaje telo minimalne površine - katenoid (za krug iz baze nastale figure).

Jednačine katemptote dobijaju se iz diferencijalne jednačine:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3.10)$$

Jednačinu (3.10) izvodimo na sledeći način: posmatramo deo katemptote (kanap koji visi pričvršćen za dve svoje tačke) $\mathbf{pq}$ između najniže tačke katemptote $\mathbf{p}$ i proizvoljne tačke $\mathbf{q}$ na njoj. Na okačen kanap deluju tri sile: težina dela $\mathbf{pq}$ katemptote i sile istezanja $\mathbf{T}$ i $\mathbf{U}$ redom u tačkama p i q . Neka je w linearna gustina, a s dužina $\mathbf{pq}$, tada je težina $\mathbf{pq}$ jednaka ws . Neka su $|\mathbf{T}|$ i $|\mathbf{U}|$ intenziteti redom sila $\mathbf{T}$ i $\mathbf{U}$, tada važi:

$$\mathbf{U} = (|\mathbf{U}| \cos \theta, |\mathbf{U}| \sin \theta),$$

ugao θ označen je na slici 3.34. Zbog ravnoteže koja vlada važi:

$$|\mathbf{T}| = |\mathbf{U}| \cos \theta, \quad ws = |\mathbf{U}| \sin \theta. \quad (3.11)$$

³⁰Franki Dillen (1963-2013)

³¹Joachim Jungius (1587-1657)

³²David Grerogy (1659-1708)

Neka je $\mathbf{q} = (x, y)$, gde su x i y funkcije s . Iz (3.11) dobijamo:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{ws}{|\mathbf{T}|}. \quad (3.12)$$

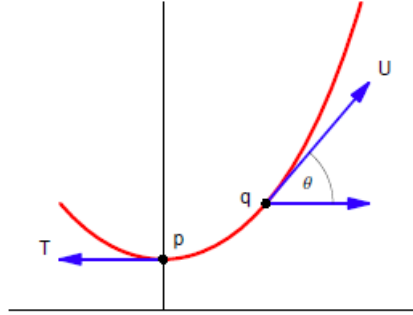
S obzirom na to da je dužina $\mathbf{pq}$ jednaka:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

važi:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (3.13)$$

Kada diferenciramo (3.12) i upotrebimo (3.13) dobijamo (3.10), gde je $a = \frac{w}{|\mathbf{T}|}$.



Slika 3.34: Izvođenje jednačine katemptote

Rešenje jednačine (3.10) je

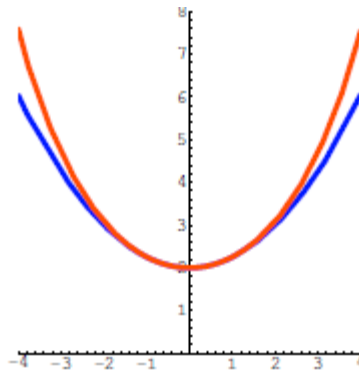
$$y = a \cosh \frac{x}{a},$$

a rotacijom grafika dobijenog na osnovu ove jednačine izvodimo parametarsku reprezentaciju katemptote:

$$c(t) = (a \cosh \frac{t}{a}, t).$$

S obzirom na to da imamo jednačine krive možemo definisati metričke karakteristike katemptote:

1. dužina luka $s(t) = a \sinh(\frac{t}{a})$
2. krivina katemptote $\kappa(t) = \frac{1}{a} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{a}\right)$



Slika 3.35: Katemptota i parabola

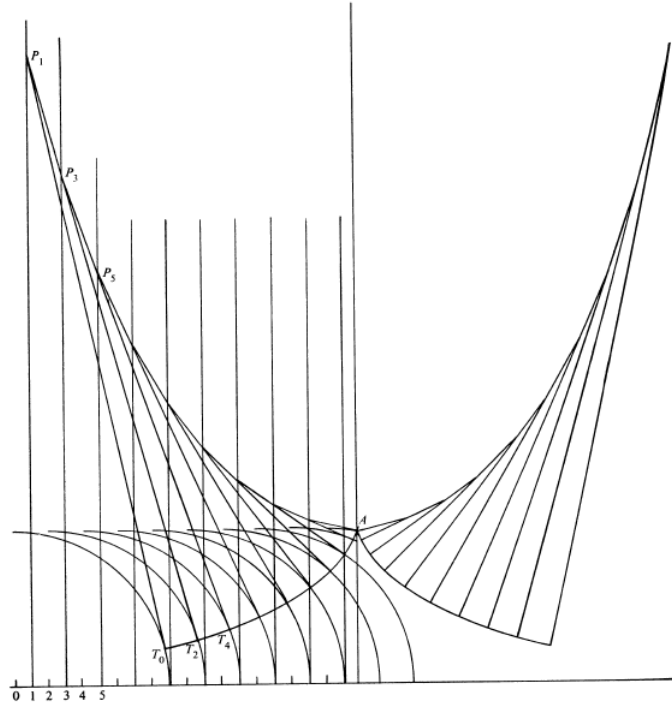
Katemptotu možemo videti u sastavu brojnih arhitektonskih dela, ali u vidu luka koji predstavlja obrnutu (rotiranu za π) katemptotu. Veliki je broj mostova oblika katemptote, a često se i velike peći konstruišu u obliku obrnute katemptote. Opis metode crtanja katemptote biće dat u odeljku o traktrisi, zajedno sa metodom crtanja traktrise. Katemptota je evoluta traktrise.

3.14 Traktrisa

Problem koji je za rešenje imao traktrisu postavio je Lajbnicu jedan francuski lekar. Naime, tražila se putanja objekta koji vuče i vučen je po horizontalnoj ravni pomoću neistegljivog užeta čiji se drugi kraj kreće po horizontalnoj pravci. Opisano kretanje podseća na kretanje psa kog na povodcu vodi vlasnik, pa otuda i naziv "hundekurve". Problem je 1692. rešio Hajgens, ali je dodatno izvršio i njegovu generalizaciju - traktrisa se dobija kao putanja tačke koja je vučena neistegljivim užetom, čiji se drugi kraj kreće po proizvoljnoj poznatoj krivoj. U ovom odeljku biće obrađen slučaj kada se drugi kraj krive kreće po pravci. Jasno, asimptota traktrise je x -osa za koju se vezuje sledeće svojstvo. Dužina segmenta tangente od dodirne tačke na traktrisi do asimptote je konstantna.

Metod crtanja traktrise i katemptote (slika 3.36): prvo povučemo (osnovnu) horizontalnu pravu pri dnu papira i označimo tačke na istim rastojanjima (npr. 0.5cm) polazeći od leve margine završno sa sredinom papira 0, 1, 2, ... (s leva na desno). Kroz tačke 1, 3, 5, ... povučemo prave normalno na osnovnu pravu koje ćemo nazvati vertikalne linije 1, 3, 5, U tačkama 0, 2, 4, ..., kao centrima, crtamo četvrtine krugova polumerika c koje ćemo nazvati četvrtinama kruga 0, 2, 4, Na vertikalnoj pravci 1, biramo tačku P_1 i iz nje povlačimo tangente P_1T_0 i P_1T_2 redom na četvrtine krugova 0 i 2. Zatim sa centrom u tački P_1 crtamo luk od T_0 do T_2 . Nacrtamo duž P_1T_2 koja seče vertikalnu pravu 3 u tački P_3 . Crtamo luk

od T_2 do T_4 (na četvrtini kruga 4) i nastavljamo opisani postupak (u preseku duži P_3T_4 i vertikalne prave 5 dobijamo tačku P_5). Lukovi koji spajaju tačke $T_0, T_2, T_4, \dots$ formiraju traktrisu, dok tačke $P_1, P_3, P_5, \dots$ leže na katemptoti.



Slika 3.36: Metod crtanja katemptote i traktrise

Jedna parametrizacija traktrise data je sa:

$$c(t) = a \left(\sin t, \cos t + \log\left(\tan \frac{t}{2}\right) \right). \quad (3.14)$$

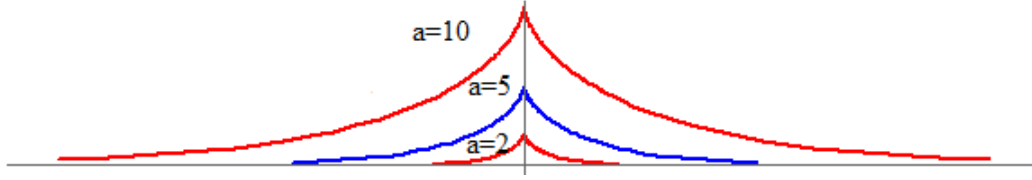
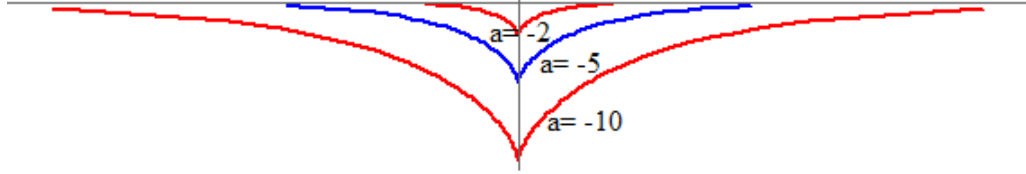
Iz jednačina se vidi da se za $t \rightarrow 0$ i $t \rightarrow \pi$ traktrisa asimptotski približava x -osi i da u $t = \frac{\pi}{2}$ ima špic. Traktrisa je simetrična u odnosu na y -osu.

Diferencijalna jednačina traktrise je:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Sada mogu biti ispitane i metričke karakteristike traktrise:

Krivina traktrise $\kappa(t) = -\frac{|\tan t|}{a}$, koja je uvek negativna, a u špicu teži ka $-\infty$, prikazana je na slici 3.

Slika 3.37: Traktisa za različite vrednosti konstante $a > 0$ Slika 3.38: Traktisa za različite vrednosti konstante $a < 0$

Lema 3.2. Prirodna parametrizacija traktise data je sa:

$$c(t) = \begin{cases} \left(ae^{-\frac{s}{a}}, \int_0^s \sqrt{1 - e^{-\frac{2t}{a}}} dt \right), & \text{za } 0 \leq s \leq \infty, \\ \left(ae^{\frac{s}{a}}, \int_0^s \sqrt{1 - e^{\frac{2t}{a}}} dt \right), & \text{za } -\infty < s \leq 0. \end{cases}$$

Važi:

$$\int_0^s \sqrt{1 - e^{-\frac{2t}{a}}} dt = a \left(\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}} \right) \right) - a \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}.$$

Dokaz. Prvo računamo:

$$c'(\phi) = a \left(\cos \phi, -\sin \phi + \frac{1}{\sin \phi} \right). \quad (3.15)$$

$\phi(s) := \pi - \arcsin(e^{-\frac{s}{a}})$ za $s \geq 0$, pa je $\sin \phi(s) = e^{-\frac{s}{a}}$ i važi $\frac{\pi}{2} \leq \phi(s) < \pi$ za $s \geq 0$ i $\cos \phi(s) = -\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}$. Na osnovu navedenog dobijamo:

$$\phi'(s) = \frac{e^{-\frac{s}{a}}}{a \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}} = -\frac{\sin \phi(s)}{a \cos \phi(s)}. \quad (3.16)$$

Ako definišemo krivu g kao $g(s) = c(\phi(s))$ iz (3.15) i (3.16) imamo:

$$g'(s) = c'(\phi(s))\phi'(s) = a \left(\cos \phi(s), -\sin \phi(s) + \frac{1}{\sin \phi(s)} \right) \left(-\frac{\sin \phi(s)}{a \cos \phi(s)} \right)$$

$$= (-\sin \phi(s), -\cos \phi(s)) = (-e^{-\frac{s}{a}}, \sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}) = c'(s).$$

Osim toga važi i: $g(0) = (a, 0) = c(0)$, pa se krive c i g podudaraju za $0 \leq s < \infty$, prema tome g je reparametrizacija traktrise na tom intervalu. Analogno se pokazuje da je i c reparametrizacija traktrise na intervalu $-\infty < s \leq 0$. Jednostavno se pokazuje da važi $|c'(s)| = 1$. $\square$

Još jedna parametrizacija traktrise data je sa:

$$c(t) = a(t - \tanh t, \operatorname{sech} t)$$

. Odgovarajuća krivina je data sa: $\kappa(t) = \frac{\operatorname{csch} t}{a}$, a odgovarajuća dužina luka je: $s(t) = a \ln(\cosh t)$. Površina između traktrise i njene asimptote je $A = \frac{1}{2}\pi a^2$. Traktrisa je involuta katemptote.

Bibliografija

- [1] Banchoff, T., Lovett, S., *Differential Geometry of Curves and Surfaces* , A K Peters, Ltd., Natick, 2010.
- [2] Blažić, N., Bokan N., *Uvod u diferencijalnu geometriju* , Vesta, Matematički fakultet, Beograd, 2003.
- [3] Do Carmo, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces* , Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1976.
- [4] Dragović, V., Milinković, D., *Analiza na mnogostrukostima* , Matematički fakultet, Beograd, 2003.
- [5] Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, prvo i drugo poglavlje. Chapman and Hall, 2006.
- [6] Kühnel, W., *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds* , preveo Bruce Hunt, prvo i drugo poglavlje, American Mathematical Society, 2006.
- [7] Lawrence, D., *A Catalogue of Special Plane Curves* , Dover Publications Inc, New York, 1972.
- [8] Levien, R., The Euler spiral: a mathematical history <http://levien.com/>, 2008.
- [9] Lockwood, E. H., *A Book of Curves* , Cambridge University press, 1961.
- [10] Nieman, H.S., The Devil's Curve *s0512478*, <http://wwwmath.uni-muenster.de/>, 2009.
- [11] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry* , Revised 2nd, Elsevier Inc., Usa, 2006.
- [12] Pressley, A., *Elementary Differential Geometry* , 2nd edition Springer, London, 2010.
- [13] Yates, R. C., *Curves and their properties* , The National Council of Teachers in Mathematics, 1974.

Biografija

Dragana Čurović rođena je 03.08.1988. u Vrbasu, gde završava osnovnu i srednju školu. 2007. godine upisuje Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, odsek elektrotehnika, smer telekomunikacije. Osnovne studije u trajanju od četiri godine završava 2011, sa prosečnom ocenom 9.87. Master studije - nastava matematike na Prirodno matematičkom fakultetu u Novom Sadu u trajanju od dve godine upisuje 2013.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Dragana Čurović

AU

Mentor: Dr Sanja Konjik, vanr. prof.

MN

Naslov rada: Neke poznate ravanske krive

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2015.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: (3, 58, 3, 0, 47, 0, 0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Matematička analiza/Diferencijalna geometrija

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: ravanska kriva, parametrizacija, dužina luka krive, krivina krive

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Ovaj rad se sastoji od tri dela. Uvodni deo rada posvećen je Euklidskom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ i standardnim operacijama vezanim za isti. U drugom delu rada obrađene su lokalna i globalna teorija krivih, te uvedeni svi pojmovi, neophodni za ispitivanje karakteristika krivih iz trećeg dela. U trećem delu rada 15 krivih je prikazano u Mathematica-i, a osim toga detaljno su opisane njihove metričke i geometrijske karakteristike.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 07.05.2015.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	dr Nevena Pušić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monographic type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master thesis

CC

Author: Dragana Čurović

AU

Mentor: Sanja Konjik, PhD

MN

Title: Some famous plane curves

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2015.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg
Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: (3, 58, 13, 0, 47, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical analysis/Differential geometry

SD

Subject/Key words: plane curve, parametrization, arc length, curvature of a curve

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University
of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

The paper consists of three parts. Firstly, in the Introduction some standard operations related to Euclidean vector space $\mathbb{R}^2$ are described. Furthermore, Local and Global Theory of curves is the title of the second chapter and important definitions and lemmas, mostly together with proof are given in that chapter. Finally, the third chapter is about 15 plane curves. Particularly, all 15 plane curves are presented by means of Mathematica. Moreover, their metrical properties and geometry are described in detail.

Accepted by the Scientific Board on: 05.07.2015.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President:	Dr. Nevena Pušić, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Stevan Pilipović, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Member:	Dr. Sanja Konjik, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad