UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Branko Radanović

O semi-Rimanovim mnogostrukostima

- master rad -

Mentor:
docent dr Sanja Konjik

Novi Sad, 2012

Sadržaj

1 Uvod **3**

2 Teorija mnogostrukosti **5**

2.1 Glatke mnogostrukosti 5

2.2 Glatka preslikavanja 8

2.3 Tangentni vektori 10

2.4 Diferencijalna preslikavanja 11

2.5 Krive 14

2.6 Vektorska polja 15

2.7 $1-$forme 17

2.8 Podmnogostrukosti 18

2.9 Neke specijalne mnogostrukosti 19

2.9.1 Proizvod mnogostrukosti 19

2.9.2 Vektorski prostori kao mnogostrukosti 23

2.9.3 Tangentno raslojenje 23

2.10 Integralne krive 25

3 Tenzori **27**

3.1 Osnovna algebra tenzora i tenzorska polja 27

3.2 Komponente tenzora i kontrakcije 29

3.3 Tenzorski izvodi 31

3.4 Simetrične bilinearne forme i 34

4 Semi-Rimanove mnogostrukosti **39**

4.1 Pojam semi-Rimanove mnogostrukosti 39
4.2 Levi-Čivita konekcija 43
4.3 Indukovani kovarijantni izvod 49
4.4 Geodezijske linije 53
4.5 Krivina 60
4.6 Sekciona krivina 63
4.7 Menjanje tipova tenzora 68
4.8 Okvirno polje 70
4.9 Operatori gradijenta, ... 72
4.10 Ricci-jeva i skalarna krivina 74
4.11 Proizvod semi-Rimanovih mnogostrukosti 78
4.12 Izometrije i lokalne izometrije 79

Literatura **87**

Glava 1

Uvod

Ova master teza je posvećena izučavanju Semi-Rimanovih mnogostrukosti. Organizovana je na sledeći način. Glava 1 je uvodna, dok je centralni deo rada izdeljen na 3 glave i 26 poglavlja.

U glavi 2 su izloženi neki od osnovnih pojmova i rezultata teorije mnogostrukosti. Mnoga tvđenja u 2 nisu dokazana, a više o njima, kao i osnovnim pojmovima u okviru teorije mnogostrukosti čitalac može naći u [1] i [2].

U glavi 3 prvo se uvode pojmovi tenzora i tenzorskih polja. Nakon toga, skupu svih $\binom{r}{s}$ tenzorskih polja na nekoj mnogostrukosti se dodaje struktura modula nad poljem. Na toj strukturi ćemo uvesti operaciju kontrakcije, a zatim ćemo se upoznati sa pojmom tenzorskog izvoda. Njih ćemo posmatrati i sa globalnog i sa lokalnog aspekta. Na kraju ćemo se upoznati sa simetričnim bilinearnim formama i skalarnim proizvodimana na vektorskim prostorima, a zatim i izneti neke osnovne rezultate o njima.

U glavi 4 se obrađuju neki od osnovnih rezultata semi-Rimanove geometrije. U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa Levi-Čivita konekcijom, geodezama na semi-Rimanovim mnogostrukostima itd. Na kraju ovog poglavlja ćemo se upoznati i sa pojmovima izometrije i lokalne izometrije među semi-Rimanovim mnogostrukostima, a zatim i videti koji od objekata semi-Rimanove geometrije ostaju očuvani pod njihovim dejstvom.

Karl Fridrih Gaus (1777-1855) je 1827. godine dokazao da lokalno izometrične površi imaju jednake krivine u korespondirajućim tačkama (videti glavu 3 u [2]). Ovaj rezultat je značajno uticao na dalji razvoj teorije površi. Bernard Riman (1826-1866) ga je uopštavao na proizvoljnu n-dimenzionalnu mnogostrukost. 1854. godine je zaključio da unutrašnji proizvod mora biti dat na svakom tangentnom prostoru kako bi se pomenuti rezultat od Gausa mogao uopštiti na proizvoljnu mnogostrukost.

Mislilo se, da se na ovaj način, pomoću karti, proizvoljna mnogostrukost može snabdeti sa infinitezimalnom merom rastojanja. Grubo govoreći, ako su tačke p i $p + dp$ međusobno blizu, onda kao rastojanje između njih uzimamo normu „tangentnog vektora“ dp. Pod uticajem Ajnštajnove generalne teorije relativnosti iz 1915. godine uslovi pozitivne definitnosti i nedegenerisanosti simetrične bilinearene forme (unutrašnjeg proizvoda) su zamenjeni samo sa uslovom nedegenerisanosti.

Na kraju glave 4 se dokazuje jednakost $dS = 2div(Ric)$, koja je značajna u teoriji relativnosti. Međutim, pored ovog veoma bitnog rezultata, u istom poglavlju se dokazuje i niz drugih, veoma značajnih tvrđenja.

Glava 2

Teorija mnogostrukosti

2.1 Glatke mnogostrukosti

Mnogostrukosti su, grubo rečeno, skupovi koji lokalno imaju osobine Euklidskog prostora. Pre nego što ih definišemo podsetimo se nekih poznatih pojmova.

Unutrašnji proizvod na $\boldsymbol{R^n}$ je $p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i$ za sve $p, q \in \boldsymbol{R^n}$, dok je odgovarajuća norma $\mid p \mid = \sqrt{p \cdot p}$.

Da bi smo mogli da definišemo pojam mnogostrukosti moramo prvo da znamo da je realna funkcija f definisana na otvorenom podskupu $\mathcal{U}$ od $\boldsymbol{R^n}$ glatka (Euklidski glatka) ako i samo ako ima sve parcijalne izvode (svakog reda $k \in \boldsymbol{N}$) koji su još i neprekidne funkcije. Takođe za $1 \leq i \leq n$ neka je $u^i : \boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R}$ i-ta projekcija prostora $\boldsymbol{R^n}$ koja šalje svaki njegov element u i-tu koordinatu tog elementa. Funkcija ϕ iz otvorenog podskupa $\mathcal{U}$ od $\boldsymbol{R^n}$ u $\boldsymbol{R^m}$ je glatka ako i samo ako je realna funkcija $u^i \circ \phi$ glatka, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definicija 2.1.1. *Neka je S topološki prostor. n-dimenzionalna karta topološkog prostora S je svaki homeomorfizam ξ iz otvorenog podskupa $\mathcal{U}$ od S na otvoren podskup $\xi(\mathcal{U})$ od $\boldsymbol{R^n}$. Dve n-dimenzionalne karte ξ i η su međusobno kompatibilne ako su funkcije $\xi \circ \eta^{-1}$ i $\eta \circ \xi^{-1}$ obe glatke.*

Ako su $\xi : \mathcal{U} \to \boldsymbol{R^n}$ i $\eta : \mathcal{V} \to \boldsymbol{R^n}$ dve međusobno kompatibilne karte, onda je preslikavanje $\xi \circ \eta^{-1}$ definisano na otvorenom podskupu $\eta(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ od $\boldsymbol{R^n}$ jer su funkcije ξ i η heomeomorfizmi po definiciji. Kodomen posmatrane funkcije je skup $\xi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ koji je takođe otvoren podskup od $\boldsymbol{R^n}$(opet, jer su funkcije ξ i η homeomorfizmi). Takođe, ovo preslikavanje je heomeomorfizam.

Definicija 2.1.2. *Atlas $\mathcal{A}$ dimenzije n na topološkom prostrou S je familija n-dimenzionalnih karata na S, za koju važi da je*

1. *svaka tačka od S je sadržana u domenu neke karte iz $\mathcal{A}$ i*
2. *svake dve karte iz $\mathcal{A}$ su međusobno kompatibilne.*

Atlas $\mathcal{C}$ na S se naziva kompletan ako $\mathcal{C}$ sadrži svaku kartu na S koja je kompatibilna sa svakom kartom iz $\mathcal{C}$.

Lema 2.1.1. *Svaki atlas $\mathcal{A}$ na topološkom prostoru S je sadržan u jedinstvenom kompletnom atlasu na S.* ■

Dokaz ove leme se može naći u [4, str. 2-3]. Zbog ove leme mi smo u prilici da na familiji svih atlasa na topološkom prostoru definišemo relaciju ekvivalencije tako što ćemo reći da su dva atlasa ekvivalentna ako su sadržani u istom kompletnom atlasu. Odatle slobodno možemo posmatrati topološki prostor sa nekim atlasom $\mathcal{A}$ kao topološki prostor sa kompletnim atlasom koji sadrži atlas $\mathcal{A}$.

Definicija 2.1.3. *Glatka mnogostrukost M je Hausdorfov prostor snabdeven sa kompletnim atlasom. Dimenzija $n = \dim M$ mnogostrukosti M je dimenzija njenog atlasa. Glatku mnogostrukost M dimenzije n označavamo sa M^n.*

Karta ξ glatke mnogostrukosti M je karta koja pripada kompletnom atlasu od M. Ako je $\mathcal{U}$ domen karte ξ koji sadrži tačku p iz M onda kažemo da je ξ karta od M oko p, a $\mathcal{U}$ koordinatna okolina od M oko p. Ako je ξ karta od M i ako je $\mathcal{V}$ otovren podskup od M koji je sadržan u domenu karte ξ, onda je i $\xi|\mathcal{V}$ opet karta od M.

Glatke mnogostrukosti su lokalno homeomorfne sa otvorenim podskupom od $\boldsymbol{R}^n$, pa lokalno nasleđuju mnoge topološke osobine od $\boldsymbol{R}^n$. Glatka mnogostrukost je povezana ako se ne može izraziti kao disjunktna unija dva otvorena neprazna podskupa od M. Glatka mnogostrukost zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti ako ima prebrojivu bazu topologije.

Definicija 2.1.4. *Pokrivač (otvoren pokrivač) $\mathcal{C}$ topološkog prostora S je familija podskupova (otvorneih podskupova) čija je unija S.*

Topološki prostor S koji zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti ima Lindelofovu osobinu (da svaki otvoren pokrivač $\mathcal{C}$ od S ima prebrojiv potpokrivač).

Definicija 2.1.5. *Glatka mnogostrukost M je orijentabilna ako postoji kolekcija $\mathcal{O}$ karata od M čiji domeni pokrivaju M i za svake dve karte $\xi, \eta \in \mathcal{O}$ je determinanta Jakobijeve matrice $J(\xi, \eta) = det(\partial y^i / \partial x^j)$ pozitivna. Kolekcija karata $\mathcal{O}$ se naziva orijentisani atlas od M.*

Za orijentisane atlase na nekoj glatkoj mnogostrukosti se definiše relacija ekvivalencije na isti način kao i za atlase na nekoj mnogostrukosti u opštem slučaju. Karte iz orijentisanog atlasa se nazivaju pozitivno orijentisane. Orijentiabilna glatka mnogostrukost M zajedno sa orijentisanim atlasom se naziva orijentisana mnogostrukost.

Sfera i torus su orijentabilni, dok Mebijusova traka nije orijentabilna. Standardna definicija mnogostrukosti počinje sa topološkim prostorom, ali u suštini atlas mnogostrukosti određuje topologiju tog topološkog prostora (videti poglvlje 2.3 u [2]).

Teorema 2.1.1. *Neka je Σ apstraktan skup i neka je za svako $\alpha \in A$ funkcija ξ_α bijektivno preslikavanje podskupa $\mathcal{U}_\alpha$ od Σ na otvoren podskup $\xi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ u $\boldsymbol{R^n}$. Pretpostavimo sledeće:*

1. *Domeni $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ pokrivaju Σ.*
2. *Za sve $\alpha, \beta \in A$ funkcija $\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1}$ je Euklidski glatka i njen domen $\xi(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ je otvoren skup u $\boldsymbol{R^n}$.*
3. *Ako su p i q tačke od Σ takve da je $p \neq q$, onda ili postoji $\mathcal{U}_\alpha$ kojem pripadaju obe tačke p i q ili postoje $\alpha, \beta \in A$ tako da je $p \in \mathcal{U}_\alpha$ i $q \in \mathcal{U}_\beta$, pri čemu su $\mathcal{U}_\alpha$ i $\mathcal{U}_\beta$ međusobno disjunktni skupovi.*

Tada postoji jedinstvena Hausdorfova topologija i kompletan atlas na Σ tako da je svako ξ_α karta na generisanoj mnogostrukosti. Ako prebrojivo mnogo $\mathcal{U}_\alpha$ pokriva Σ, onda mnogostrukost Σ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. ■

Dokaz ove teoreme se može naći u [4, str. 23]. Od sada pa na dalje ćemo pod pojmom mnogostrukosti podrazumevati glatku mnogostrukost čija topologija zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti. Primetimo da svaka karta neke mnogostrukosti jedinstveno određuje mnogostrukost na domenu te karte.

2.2 Glatka preslikavanja

Pošto smo definisali glatku mnogostrukost, sada ćemo posmatrati glatke funkcije na njoj.

Funkcija $f : M \to \boldsymbol{R}$ je **glatka** ako i samo ako je za svaku kartu ξ od M funkcija $f \circ \xi^{-1}$ glatka u uobičajenom Euklidskom smislu. Skup svih glatkih funkcija na glatkoj mnogostrukosti M ćemo označavati sa $\mathcal{C}^{\infty}(M)$. Ovaj skup zajedno sa operacijama sabiranja i množenja funkcija čini komutativan prsten.

Definicija 2.2.1. *Neka su M^m i N^n dve glatke mnogostrukosti. Preslikavanje $f : M \to N$ je* **glatko** *ako je za svaku kartu ξ od M i svaku kartu η od N kompozicija preslikavanja $\eta \circ f \circ \xi^{-1}$ glatka funkcija u Euklidskom smislu (i definisana na otvorenom podskupu od $\boldsymbol{R^n}$).*

Napomena:

1. Za dokaz glatkosti funkcije f je dovoljno dokazati uslov glatkosti za dovoljno mnogo karata koje pokrivaju M i N. Međusobna kompatibilnost obezbeđuje da uslov glatkosti važi u opštem slučaju.
2. Kako su karte od $\boldsymbol{R^n}$ identička preslikavanja na otovrenim podskupovima od $\boldsymbol{R^n}$, to je svaka glatka funkcija $\phi : \boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R^m}$ ujedno i glatka funkcija u gornjem smislu. Takođe i svaka glatka funkcija $f : M \to \boldsymbol{R}$ je glatka funkicja u gornjem smislu.
3. Identičko preslikavanje neke mnogostrukosti je glatko preslikavanje. Kompozicija glatkih preslikavanja na mnogostrukostima je takođe glatko preslikavanje.
4. Karta $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ je glatko preslikavanje na mnogostrukosti, kao i funkcije $x^1, x^2, \ldots, x^n$.
5. Glatkost je lokalna osobina. Reći ćemo da je preslikavanje $\phi : M \to N$ glatko u tački $p \in M$ ako i samo ako postoji restrikcija od ϕ na neku okolinu od p koja je glatka funkcija. Dakle, direktno se vidi da je funkcija ϕ glatka ako i samo ako je glatka u svakoj tački mnogostrukosti M.
6. Glatko preslikavanje je neprekidno.

Kao posledicu osobine 5. imamo sledeće:
Neka je za svaki indeks $\alpha \in A$ skup $\mathcal{U}_\alpha$ otovren podskup od M i neka je $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to N$ glatko preslikavanje. Ako je za sve $\alpha, \beta \in A$

$$\phi_\alpha = \phi_\beta \text{ na } \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta,$$

onda ova preslikavanja jedinstveno određuju presliavanje $\phi : \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \to N$ tako da je $\phi|_{\mathcal{U}_\alpha} = \phi_\alpha$. Kako je glatkost lokalna osobina imamo da je ϕ glatko preslikavnje.

Definicija 2.2.2. *Difeomorfizam $\phi : M \to N$ je bijektivno glatko preslikavanje čije je inverzno preslikavanje takođe glatko.*

Identičko preslikavanje na mnogostrukosti je difeomorfizam. Kompozicija difeomorfizama je ponovo difeomorfizam. Inverzno preslikavanje od difeomorfizma je ponovo difeomorfizam. Ako postoji difeomorfizam ϕ sa mnogostrukosti M na mnogostrukost N, onda kažemo da su mnogostrukosti M i N međusobno difeomorfne s obzirom na funkciju ϕ.

Svaki difeomorfizam je ujedno i homeomorfizam, jer je svaka glatka funkcija ujedno i neprekidna. Bitno je zapaziti da nije svaki glatki homeomorfizam ujedno i difeomorfizam (npr. funkcija $t \to t^3$).

Svaka karta na mnogostrukosti je difeomorfizam (direktno vidimo da je bijektivno preslikavanje, a glatkost se može proveriti na osnovu definicije glatkih preslikavanja). Ako je ϕ difeomorfizam (s obzirom na dati kompletan atlas) sa otvorenog podskupa $\mathcal{V}$ od M na otvoren podskup $\phi(\mathcal{V})$ od $\boldsymbol{R^n}$, onda je ono kao homeomorfizam karta od M. Ako je ξ proizvoljno odabrana karta iz datog kompletnog atlasa od M, onda su preslikavanja $\xi \circ \phi^{-1}$ i $\phi \circ \xi^{-1}$ difeomorfizmi, a samim tim i glatka preslikavanja. Dakle karte ϕ i ξ su međusobno kompatibilne, pa po definiciji kompletnog atlasa peslikavanje ϕ pripada datom kompletnom atlasu.

Odavde možemo da vidimo da je kompozicija karte na nekoj mnogostrukosti i odgovarajućeg difeomorfizma (čiji se domen poklapa sa kodomenom karte) u $\boldsymbol{R^n}$ ponovo karta na toj mnogostrukosti. Kako je translacija za bilo koji vektor primer takvog difeomorfizma, to za svaku tačku $p \in M$ postoji karta ξ od M oko p tako da je $\xi(p) = 0$.

Definicija 2.2.3. *Nosač* $\operatorname{supp} f$ *preslikavanja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ je zatvarenje skupa $\{p \in M | f(p) \neq 0\}$, tj.* $\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$.

Vidimo da je $M \setminus \operatorname{supp} f$ najveći otvoren skup na kojem je funkcija f identički jednaka nuli.

Lema 2.2.1. *Neka je data neka okolina $\mathcal{U}$ oko tačke p mnogostrukosti M. Tada postoji* **test funkcija** *f takva da je*

1. *$0 \leq f \leq 1$ na M*
2. *$f = 1$ na nekoj okolini oko p na M*

3. $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. ■

Dokaz ove leme se može naći u [4, str. 6].

Definicija 2.2.4. *Kolekcija podskupova $\mathcal{C}$ mnogostrukosti M se naziva* **lokalno konačna** *ako svako $p \in M$ ima okolinu koja seče najviše konačno mnogo podskupova iz $\mathcal{C}$.* **Glatka particija jedinice na mnogostrukosti** *M je kolekcija $\{f_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ funkcija $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M)$ takvih da je*

1. $0 \leq f_\alpha \leq 1$, *za sve $\alpha \in \lambda$.*
2. $\{\operatorname{supp} f_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ *je lokalno konačna.*
3. $\sum_{\alpha \in \lambda} f_\alpha = 1$.

Particija jedinice $\{f_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ odgovara pokrivaču $\mathcal{C}$ od M ako je $\operatorname{supp} f_\alpha$ sadržan u nekom elementu od $\mathcal{C}$, za sve $\alpha \in \lambda$.

Particija jedinice je koristan alat za sklapanje lokalnih objekata u globalne objekte.

2.3 Tangentni vektori

Nakon ovog kratkog osvrta na glatke funkcije na mnogostrukostima okrenućemo se sada traženju izvoda realnih glatkih funkcija na mnogostrukostima, a zatim ćemo videti da svi ti izvodi čine vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Za sve ovo će nam od velike važnosti biti pojam tangentnog vektora određenog u sledećoj definiciji.

Definicija 2.3.1. *Neka je p tačka mnogostrukosti M.* **Tangentni vektor na** *M* **u** *p je realna funkcija $v : \mathcal{C}^\infty(M) \to \boldsymbol{R}$ koja je*

1. *$\boldsymbol{R}$-linearna: $v(af + bg) = a\ v(f) + b\ v(g)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i*
2. *ima Lajbnicovu osobinu: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(f)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

Skup svih tangentnih vektora na M u p ćemo označavati sa $T_p(M)$. Skup svih tangentnih vektora na M u p s obzirom na uobičajene operacije sabiranja funkcija i množenja funkcije skalarom čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. $T_p(M)$ se naziva **tangentni prostor od** *M* **u** *p.*

Sada ćemo definisati posutpak nalaženja parcijalnih izvoda realnih gatkih funkcija na mnogostrukostima.

Definicija 2.3.2. *Neka je* $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *karta od* M *oko* p. *Ako je data funkcija* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, *onda neka je*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \quad (1 \leq i \leq n),$$

pri čemu je u^i *i-ta projekcija prostora* $\boldsymbol{R^n}$, $1 \leq i \leq n$. *Ovaj realan broj zovemo i-ti parcijalni izvod od* f *u* p.

Na osnovu definicije tangentnog vektora se direktno može proveriti da je funkcija

$$\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{C}^\infty(M) \to \boldsymbol{R},$$

koja šalje svaku funkciju $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ u $(\partial f / \partial x^i)(p)$, u stvari jedan tangentni vektor na M u p. Ovakav tangentni vektor se često naziva i-ti koordinatni vektor na M u p. Dokazi naredna dva tvrđenja se mogu naći u [4, str. 7-8].

Lema 2.3.1. *Neka je* $v \in T_p(M)$.

1. *Ako su funkcije* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *jednake na nekoj okolini od* p *u* M, *tada je*
$$v(f) = v(g).$$
2. *Ako je funkcija* $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *konstantna na nekoj okolini od* p *u* M, *tada je*
$$v(h) = 0. \ \blacksquare$$

Teorema 2.3.1. *Ako je* $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *karta od* M *oko* p, *tada koordinatni vektori* $\partial_1|_p$, $\partial_2|_p$, $\ldots$, $\partial_n|_p$ *formiraju bazu tangentnog prostora* $T_p(M)$ *i važi*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, \partial_i|_p, \ \textit{za sve} \ v \in T_pM. \ \blacksquare$$

2.4 Diferencijalna preslikavanja

Mnogostrukost M se može u svakoj svojoj tački p aproksimirati sa tangentnim prostorom $T_p(M)$, koji preko karti okolina od M oko p određuje pravce kretanja krivih (glatka preslikavanja iz nekog intervala u skupu realnih brojeva na mnogostrukost M) na M koje prolaze kroz p (videti poglavlje 2.4 u [2]). Ova aproksimacija nam omogućava da svaku glatku funkciju $\phi : M \to N$, između mnogostrukosti M i N, aproksimiramo u okolini svake tačke $p \in M$ uz pomoć linearne transformacije odgovarajućih tangentnih prostora.

Ako $v \in T_p(M)$ tada je funkcija $v_\phi : \mathcal{C}^\infty(N) \to \boldsymbol{R}$, koja šalje svaku funkciju $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ u $v(g \circ \phi)$, tangentni vektor od N u $\phi(p)$. $\boldsymbol{R}$-linearnost i Lajbnicova osobina se dokazuju direktno po definiciji.

Definicija 2.4.1. *Neka je $\phi : M \to N$ glatko preslikavanje. Za svako $p \in M$ funkcija*

$$d\phi_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$$

koja šalje $v \in T_p(M)$ u $v_\phi \in T_{\phi(p)}(N)$ se naziva diferencijalno preslikavanje od ϕ u p.

Vidimo da je $d\phi_p$ okarakterisano uz pomoć jednačine

$$d\phi_p(v)(g) = v(g \circ \phi), \text{ za sve } v \in T_p(M) \text{ i sve } g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

Iz poslednje jednakosti vidimo da su diferencijalna preslikavanja linearna.

Lema 2.4.1. *Neka je $\phi : M^m \to N^n$ glatko preslikavanje. Ako je $\xi = (x^1, \dots, x^m)$ karta od M oko p i $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ karta od N oko $\phi(p)$, tada je*

$$d\phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\phi(p)}, \ \textit{za sve } j \in \{1, 2, \dots, m\}. \ \blacksquare$$

Dokaz ove leme sledi na osnovu definicije diferencijalnog preslikavanja u tački primenjujući levu i desnu stranu jednakosti na proizvoljnu funkciju $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Matrica od $d\phi_p$ je s obzirom na koordinatne vektore baza prostora $T_p(M)$ i $T_{\phi(p)}(N)$ oblika

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j}(p) \right)_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m} = \left(\frac{\partial(y^i \circ \phi \circ \xi^{-1})}{\partial u^j} \ (\xi(p)) \right)_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$$

i naziva se **Jakobijeva matrica od ϕ u p s obzirom na karte ξ i η.**

Lema 2.4.2. *Ako su $\phi : M \to N$ i $\psi : N \to P$ glatka preslikavanja, tada za svako $p \in M$ važi*

$$d(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi(p)} \circ d\phi_p \, . \ \blacksquare$$

Dokaz ove leme sledi na osnovu definicije diferencijalnog preslikavanja u tački primenjujući levu i desnu stranu jednakosti na proizvoljno $v \in T_p(M)$, kao i na proizvoljnu funkciju $g \in \mathcal{C}^\infty(P)$. Sledeća teorema je poznata još i kao teorema o inverznoj funkciji.

Teorema 2.4.1. *Neka je $\phi : M^n \to N^n$ glatko preslikavanje. Diferencijalno preslikavajne $d\phi_p$ u tački $p \in M$ je linearni izomorfizam ako i samo ako postoji okolina $\mathcal{V}$ od M oko p tako da je $\phi|\mathcal{V}$ difeomorfizam iz $\mathcal{V}$ na okolinu $\phi(\mathcal{V})$ od $\phi(p)$ u N.*

Dokaz:

($\Longrightarrow$) Neka je ξ karta od M oko p i neka je η karta od N oko $\phi(p)$. Ako je diferencijalno preslikavnje $d\phi_p$ u tački $p \in M$ linearni izomorfizam, onda je determinanta Jakobijeve matrice od ϕ u p s obzirom na karte ξ i η različita od nule. Kako je ϕ glatko preslikavanje to je i $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ glatko preslikavanje na svom domenu. Dakle, $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ ima neprekidne prve parcijalne izvode na svom domenu.

Na osnovu prethodnog vidimo da su ispunjeni svi uslovi teoreme o inverznom preslikavanju [5, str. 66] za funkciju $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$. Otuda postoji otvoreni skup V oko $\xi(p)$ unutar domena od $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ i postoji otvoreni skup W oko $\eta(\phi(p))$ unutar kodomena od $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$, tako da preslikavanje $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1} : V \to W$ ima inverzno preslikavanje $\phi_1 : W \to V$ klase $\mathcal{C}^1$ (ima sve neprekidne parcijalne izvode prvog reda na svom domenu) i važi

$$[(\phi_1)'(y)] = [(\eta \circ \phi \circ \xi^{-1})'((\eta \circ \phi \circ \xi^{-1})^{-1}(y))]^{-1}, \text{ za sve } y \in W$$

(što podrazumeva da je $det(\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}) \neq 0$ na V).

$\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ je glatka funkcija na V. Otuda izjednačavanjem elemenata matrica sa leve i desne strane poslednje jednakosti (koristiti da je $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*$), a zatim i primenjivanjem osobina izvoda preslikavanja [5, str. 39] i teoreme o obliku parcijalnih izvoda složenih funkcija [5, str. 50] prilikom traženja parcijalnih izvoda višeg reda od ϕ_1 vidimo da je ϕ_1 glatka funkcija na svom domenu W.

Neka su $\mathcal{V}= \xi^{-1}(V)$ i $\mathcal{W}= \eta^{-1}(W)$. Kako je $\phi_1 : W \to V$ bijekcija to je $\phi_1^{-1} = \eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$, pa je $\phi_1^{-1} \circ \xi = \eta \circ \phi$, odnosno $\eta^{-1} \circ \phi_1^{-1} \circ \xi = \phi$. Otuda je $\phi^{-1} = \xi^{-1} \circ \phi_1 \circ \eta : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$. Iz poslednje jednakosti vidimo da je ϕ bijektivno preslikavanje na $\mathcal{V}$, kao i da je ϕ^{-1} glatko preslikavanje na $\mathcal{W}$. Dakle ϕ je difeomorfizam na $\mathcal{V}$.

($\Longleftarrow$) Neka je $\mathcal{V}$ okolina tačke $p \in M$ takva da je $\phi|\mathcal{V}$ difeomorfizam. Neka je ξ karta od M oko p čiji je domen sadržan u $\mathcal{V}$ i neka je η karta od N oko $\phi(p)$ čiji je domen sadržan u $\phi(\mathcal{V})$. Kompozicija difeomorfizama je difeomorfizam, pa je otuda preslikavanje $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ difeomorfizam. Dakle, preslikavanja $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ i $(\eta \circ \phi \circ \xi^{-1})^{-1}$ su glatka, dok je njihova kompozicija identičko preslikavanje. Na osnovu teoreme o obliku parcijalnih izvoda složene funkcije [5, str. 50] zaključujemo da je determinanta od Jakobijeve matrice od ϕ u p s obzirom na karte ξ i η različita od nule. Otuda je diferencijalno preslikavanje $d\phi_p$ linearni izomorfizam iz $T_p(M)$ na $T_{\phi(p)}N$. $\blacksquare$

2.5 Krive

Definicija 2.5.1. *Kriva (glatka kriva) na mnogostrukosti M je glatko preslikavanje $\alpha : I \to M$, gde je I otvoren interval (konačan ili beskonačan) u skupu realnih brojeva.* **Vektor brzine od** α *u* $t \in I$ *je*

$$\alpha'(t) = d\alpha\left(\frac{d}{du}\bigg|_t\right) \in T_{\alpha(t)}(M).$$

Vidimo (za sada intuitivno) da je svaka kriva na mnogostrukosti određena tangentnim prostorima mnogostrukosti u svakoj tački krive. Takođe, tangentni prostori na mnogostrukostima i krive na mnogostrukostima tesno i uzajamno povezani preko odgovarajućih karti [2].

Neke od osnovnih osobina vektora brzine su:

1. Tangentni vektor $\alpha'(t)$ primenjen na funkciju $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ daje
$$\alpha'(t)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{du}(t).$$

2. Neka je $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ karta od M oko $\alpha(t)$. Na osnovu teoreme 1.2. zaključujemo da je
$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(t)\ \partial_i|_{\alpha(t)}.$$

3. Ako je $\alpha : I \to M$ kriva, a $h : J \to I$ glatka funkcija na intervalu J, tada je $\beta = \alpha(h) : J \to M$ kriva koja se naziva reparametrizacija od α i za nju važi
$$\beta'(s) = h'(s)\ \alpha'(h(s)) \quad \text{za sve } s \in J\,.$$

4. Ako je $\alpha : I \to M$ kriva u M, onda glatko preslikavanje $\phi : M \to N$ prenosi krivu α sa M na krivu $\phi \circ \alpha : I \to N$ u N. Za diferencijalno preslikavanje od ϕ u $\alpha(t)$ važi
$$d\phi(\alpha'(t)) = (\phi \circ \alpha)'(t).$$

Na osnovu ovih osobina (pogotovo reparametrizacije) možemo često pretpostaviti, bez eksplicitnog navođenja, da domen krive sadrži 0.

Definicija 2.5.2. *Kriva $\alpha : I \to M$ naziva se* **regularna** *ako je $\alpha'(t) \neq 0$, za sve $t \in I$. Ako je $[a, b]$ zatvoren interval u skupu realnih brojeva, onda kažemo da je funkcija $\alpha : [a, b] \to M$* **segmentna kriva** *ako postoji njena* *glatka ekstenzija na otvoren interval u skupu realnih brojeva. Funkcija* $\beta : [a,b] \to M$ *je* **po delovima glatka segmentna kriva** *ako postoji particija* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = b$ *intervala* $[a,b]$ *tako da je* $\beta|[t_i, t_{i+1}]$ *segmentna kriva za sve* $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$*. Za otvoren interval* I*, preslikavanje* $\beta : I \to M$ *je* **po delovima glatka kriva** *ako je za sve* $a < b$ *u* I *restrikcija* $\beta|_{[a,b]}$ *po delovima glatka kriva.*

2.6 Vektorska polja

Pojam vektorskih polja na mnogostrukostima je neophodan za naš dalji rad sa mnogostrukostima.

Definicija 2.6.1. *Vektorsko polje* V *na mnogostrukosti* M *je svako ono preslikavanje koje pridružuje svakoj tački* $p \in M$ *vektor* V_p *iz* $T_p(M)$*. Ako je* V *vektorsko polje na* M *i* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$*, tada sa* Vf *označavamo realnu funkciju na* M *definisanu sa*

$$(Vf)(p) = V_p f \ \text{ za sve } p \in M.$$

Kažemo da je V *glatko ako je* Vf *glatko za sve* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$*. Prostor svih glatkih vektorskih polja na mnogostrukosti* M *ćemo označavati sa* $\mathcal{T}_0^1(M)$*.*

Sabiranje vektorskih polja i množenje vektorskog polja sa elementom iz $\mathcal{C}^\infty(M)$ se definiše na sledeći način:

$$(f\,V)_p = f(p) V_p\,,$$

$$(V + W)_p = V_p + W_p \ \text{ za sve } p \in M.$$

Kako je zbir svaka dva vektorska polja ponovo vektorsko polje i kako je proizvod svakog vektorskog polja sa elementom iz $\mathcal{C}^\infty(M)$ opet vektorsko polje, to skup svih glatkih vektorskih polja na mnogostrukosti M čini modul nad prstenom $\mathcal{C}^\infty(M)$. Ako je $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ karta na nekoj mnogostrukosti M, onda se vektorsko polje, koje šalje svaku tačku p iz domena karte ξ u vektor $\partial_i|_p$, naziva **i-to koordinatno vektorsko polje od** ξ (pri čemu $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Koristeći definiciju od ∂_i može se videti da su i-ta koordinatna vektorska polja od ξ glatka vektorska polja na domenu karte ξ.

Ako je $\mathcal{U}$ domen neke karte $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ mnogostrukosti M, onda se svako vektorsko polje V na mnogostrukosti M može prikazati u obliku

$$V = \sum_{i=1}^{n} V(x^i)\,\partial_i \ \text{ na } \mathcal{U}.$$

Definicija 2.6.2. *Izvod na* $\mathcal{C}^\infty(M)$ *je svaka funkcija* $\mathcal{D} : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *koja je*

1. $\boldsymbol{R}$*-linearna:* $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *i*
2. $\mathcal{D}(f\,g) = \mathcal{D}(f)g + \mathcal{D}(g)f$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Može se pokazati da je na bilo kojoj mnogostrukosti M svako glatko vektorsko polje ujedno i izvod na $\mathcal{C}^\infty(M)$. Obrnuto svaki izvod na $\mathcal{C}^\infty(M)$ se može prikazati kao dejstvo nekog glatkog vektorskog polja na mnogostrukosti M (videti poglavlje 2.5 u [2]). U tom smislu možemo poistovetiti prostor svih izvoda na $\mathcal{C}^\infty(M)$ sa prostorom svih glatkih vektorskih polja na M.

Definicija 2.6.3. *Neka su* V *i* W *glatka vektorska polja na mnogostrukosti* M*. Lijeva zagrada (zagrada)* $[\ ,\ ] : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *vektorskih polja* V *i* W *je definisana sa*

$$[V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f)), \text{ za sve } f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Lema 2.6.1. *Neka su* X, Y *i* Z *glatka vektorska polja na mnogostrukosti* M *i neka* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$*. Tada važi sledeće:*

1. $(X, Y) \to [X, Y]$ *je* $\boldsymbol{R}$*-bilinearno.*
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(antisimetričnost).*
3. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ *(Jakobijev identitet).*
4. $[fX, gY] = fg\,[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.
5. *Za svaku kartu* $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *od* M *je*

$$[\partial_i, \partial_j] = 0\,, \text{ za sve } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \blacksquare$$

Dokaz prva četiri dela ove leme sledi na osnovu same definicije zagrade (uz direktan račun). Peti deo sledi na osnovu definicije zagrade i Kleroove teoreme [5, str. 31] (uz direktan račun).

Definicija 2.6.4. *Neka je* $\phi : M \to N$ *glatko preslikavanje. Vektorska polja* X *na* M *i* Y *na* N *su* ϕ*-povezana ako je*

$$d\phi(X_p) = Y_{\phi(p)}, \text{ za sve } p \in M.$$

2.7 1−forme

Takođe ćemo videti da je pored pojma vektroskih polja za naš dalji rad na mnogostrukostima neophodan i pojam 1-formi na mnogostrukostima. Ako je V neki vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, onda sa V^* označavamo vektorski prostor (nad poljem ralnih brojeva) svih linearnih funkcionela iz vektorskog prostora V u skup realnih brojeva. Za prostor V^* kažemo da je dualni prostor vektorskog prostora V.

Definicija 2.7.1. *Neka M mnogostrukost i $p \in M$. Dualni prostor $T_p(M)^*$ vektorskog prostora $T_p(M)$ se naziva kotangentni prostor od M u p. Elementi vektorskog prostora $T_p(M)^*$ se nazivaju kovektori od M u p. Jedan forma (1-forma) θ na mnogostrukosti M je funkcija koja pridružuje svakoj tački $p \in M$ elemenat θ_p kotangentnog prostora $T_p(M)^*$. Jedan forma θ je glatka ako je*

$$\theta X \in \mathcal{C}^\infty(M)\,,\ \textit{za sve}\ X \in \mathcal{T}_0^1(M)\,,$$

pri čemu je funkcija $\theta X : M \to \boldsymbol{R}$ definisana sa $(\theta X)(p) = \theta_p(X_p)$ za sve tačke $p \in M$. Prostor svih glatkih jedan formi na mnogostrukosti M ćemo označavati sa $\Omega^1(M)$ ili sa $\mathcal{T}_1^0(M)$.

Sabiranje dve jedan forme na mnogostrukosti M i množenje jedan forme sa funkcijom iz $\mathcal{C}^\infty(M)$ se definiše na sledeći način:

$$(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p\,, \quad (f\theta)(p) = f(p)\theta_p\,,\ \text{za sve}\ p \in M.$$

Vidimo da skup svih jedan formi na mnogostrukosti M čini modul nad prstenom $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Definicija 2.7.2. *Diferencijal od $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ je jedan forma df takva da je $(df)(v) = v(f)$, za svaki tangentni vektor v od M.*

Na osnovu definicije jedan forme se može videti da je df jedan forma.

Ako je $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ karta mnogostrukosti M čiji je domen $\mathcal{U}$, onda na osnovu prethodne definicije sledi da imamo koordinatne jedan forme $dx^1, \ldots, dx^n$ na $\mathcal{U}$, koje u svakoj tački formiraju dualnu bazu od baze $\partial_1, \ldots, \partial_n$.

Za svaku 1-formu θ, na $\mathcal{U}$ imamo da je

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta(\partial_i) dx^i.$$

Ako $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, onda je $df(\partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Otuda je

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Lema 2.7.1. *Neka je data mnogostrukost M. Diferencijalno preslikavanje ima sledeće osobine:*

1. *Preslikavanje d je $\boldsymbol{R}$-linearno.*
2. *Ako $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, onda je $d(fg) = d(f)g + fd(g)$.*
3. *Ako $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i $h \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R^1})$, onda je $d(h(f)) = h'(f)df$.*

Dokaz:

1. Neka $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i neka su a i b dva realna broja. Tada za svaki tangentni vektor v mnogostrukosti M važi

$$d(af + bg)(v) = v(af + bg) = a\,v(f) + b\,v(g) = a\,df(v) + b\,dg(v) =$$

$= (a\,df + b\,dg)(v)$, odakle sledi $\boldsymbol{R}$-linearnost od d.

2. Za svaki tangentni vektor v važi

$$d(fg)(v) = v(fg) = v(f)g + fv(g) = g\,df(v) + f\,dg(v) = (g\,df + f\,dg)(v).$$

3. Neka je $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ proizvoljna karta mnogostrukosti M i neka je njen domen $\mathcal{U}$. Za svaku tačku $p \in \mathcal{U}$ važi

$$d(h(f))(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(h \circ f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))dx^i|_p =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h'(f(p))\frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))dx^i|_p = h'(f(p))\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))dx^i|_p =$$

$$= h'(f(p))\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p = \left(h'(f)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\right)(p).$$

Kako je ξ proizvoljno odabrana karta to tvrđenje sledi na osnovu prethodnog niza jednakosti. ■

2.8 Podmnogostrukosti

Definicija 2.8.1. *Mnogostrukost P je podmnogostrukost mnogostrukosti M ako je:*

1. *P je topološki potprostor od M.*

2. *Inkluzivno preslikavanje $j : P \subset M$ je glatko (s obzirom na mnogostrukosti) i diferencijalno preslikavanje dj je injektivno u svakoj tački mnogostrukosti.*

Ako je $\phi : M \to N$ glatko preslikavanje između mnogostrukosti M i N, P podmnogostrukost od M, onda je $\phi|_P$ glatko preslikavanje između mnogostrukosti P i N. To je zbog toga što je $\phi|_P = \phi \circ j$, a kao što znamo kompozicija glatkih presilkavanja je glatko preslikavanje.

Kako je u svakoj tački $p \in P$ preslikavanje $dj_p : T_p(P) \to T_p(M)$ injektivno to možemo posmatrati $T_p(P)$ kao potprostor prostora $T_p(M)$.

Može se dokazati da se od proizvoljnog podskupa neke mnogostrukosti M može načiniti podmnogostrukost na najviše jedan način (videti [4, str. 16-18]).

2.9 Neke specijalne mnogostrukosti

2.9.1 Proizvod mnogostrukosti

Neka su M i N mnogostrukosti i neka su $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^m) : \mathcal{U} \to \boldsymbol{R^m}$ i $\eta = (y^1, y^2, \ldots, y^n) : \mathcal{V} \to \boldsymbol{R^n}$ karte od M i N respektivno. Proizvod funkcija $\xi \times \eta : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \boldsymbol{R^{m+n}}$ je definisan na sledeći način

$$(\xi \times \eta)(p, q) = (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^m(p), y^1(q), \ldots, y^n(q)).$$

Direktno se vidi da je $\xi \times \eta$ karta od $M \times N$ baš kao što se vidi i činjenica da su svake dve takve karte međusobno kompatibilne. Ovakve karte još zovemo i proizvod karti.

Lema 2.9.1. *Ako su M i N mnogostrukosti, tada je skup svih proizvoda karata na $M \times N$ atlas na $M \times N$ koji jedinstveno određuje mnogostrukost na $M \times N$. Ta mnogostrukost se naziva proizvod mnogostrukosti M i N.* ∎

Dimenzija od $M \times N$ je $dim\ M + dim\ N$. Ova konstrukcija se može na očigledan način proširiti i na proizvod konačno mnogo mnogostrukosti.

Koristeći proizvod karti na mnogostrukostima može se dokazati sledeće:

1. Projekcija $\pi : M \times N \to M$, koja šalje (p, q) u p, kao i projekcija $\sigma : M \times N \to N$, koja šalje (p, q) u q, su glatke funkcije.

2. Preslikavanje $\phi : P \to M \times N$ je glatko ako i samo ako su $\pi \circ \phi$ i $\sigma \circ \phi$ glatke funkcije.

3. Za svako $(p,q) \in M \times N$ skupovi $M \times q = \{(r,q) \in M \times N : r \in M\}$ i $p \times N = \{(p,r) \in M \times N : r \in N\}$ su nosači podmnogostrukosti od $M \times N$.

4. Za svako $(p,q) \in M \times N$ je $\pi|_{M\times q}$ difeomorfizam iz $M \times q$ u M, a $\sigma|_{p\times N}$ je difeomorfizam iz $p \times N$ u N.

Označimo sa $T_{(p,q)}(M) = T_{(p,q)}(M \times q)$ i sa $T_{(p,q)}(N) = T_{(p,q)}(p \times N)$ potprostore vektorskog prostora $T_{(p,q)}(M \times N)$ (videti [4, str. 24]).

Lema 2.9.2. *$T_{(p,q)}(M\times N)$ je direktna suma potprostora $T_{(p,q)}M$ i $T_{(p,q)}N$.* ■

Za dokaz ove leme videti [4, str. 24].

Za povezivanje kalkulusa na $M\times N$ sa kalkulusima na njegovim faktorima je krucijalan pojam *podizanja*.

Ako $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, onda je podizanje od f na $M \times N$ funkcija $\tilde{f} = f \circ \pi \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$.

Ako $x \in T_p(M)$ i $q \in N$, onda je podizanje $\tilde{x}$ od x na (p,q) jedinstveni vektor u $T_{(p,q)}(M)$ takav da je $d\pi(\tilde{x}) = x$.

Ako $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$, onda je podizanje od X na $M \times N$ vektorsko polje $\tilde{X}$ čija je vrednost u (p,q) jednaka podizanju od X_p na (p,q) (tačnije važi $\tilde{X}_{(p,q)} = d(j\circ\pi^{-1})(X_p)$, pri čemu je $\pi : M\times q \to M$ gore dat difeomorfizam, a $j : M\times q \subset M\times N$ prirodna inkluzija). Na osnovu proizvoda karata može se dokazati da je $\tilde{X}$ glatko vektorsko polje na $M\times N$. Otuda je podizanje od $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ na $M\times N$ jedinstveni element od $\mathcal{T}^1_0(M\times N)$ koji je π-povezan sa X i σ-povezan sa nula vektorskim poljem na N.

Skup svih takvih horizontalnih podizanja $\tilde{X}$ se označava sa $\Omega(M)$.

Funkcije, tangentni vektori i vektorska polja na N se podižu na isti način koristeći projekciju σ. Primetimo da su $\Omega(M)$, kao i skup svih vertikalnih podizanja $\Omega(N)$ potprostori vektorskog prostora $\mathcal{T}^1_0(M \times N)$, ali može se dokazati da ni jedan od njih nije invarijantan s obzirom na množenje proizvoljnom funkcijom iz $f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$.

Na primer, na $\boldsymbol{R^2}$ prirodno koordinatno vektorsko polje $\partial_x = \partial/\partial x$ je horizontalno podizanje od vektorskog polja d/dx na $\boldsymbol{R^1}$ (kao x osa), ali $y\,\partial_x$ nije podizanje. Zaista, ako $(p,q) \in \boldsymbol{R^2}$, onda za $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R^2})$ imamo da je

$$\partial_x(p,q)f = \partial_x f(p,q),$$

dok sa druge strane imamo da je

$$\frac{d}{dx}(p)(f\circ j\circ\pi^{-1}) = \lim_{t\to 0}\frac{f\circ j\circ\pi^{-1}(p+t) - f\circ j\circ\pi^{-1}(p)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t,q)-f(p,q)}{t} = \partial_x f(p,q).$$

Za svaku tačku $p \in \boldsymbol{R^1}$ vektor $\frac{d}{dx}(p)$ je bazni vektor tangentnog prostora $T_p(\boldsymbol{R^1})$. Neka je $y\,\partial_x$ podizanje od nekog vektorskog polja X na $\boldsymbol{R^1}$, neka je $p \in \boldsymbol{R^1}$ i neka je $X(p) = c\frac{d}{dx}(p)$. U tački (p,q) za $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R^2})$ je $y\,\partial_x(p,q)(f) = q\,\partial_x f(p,q)$, dok sa druge strane podizanje od $X(p)$ na (p,q) u f ima vrednost $c\,\partial_x f(p,q)$. Otuda vidimo da $y\,\partial_x$ ne može biti podizanje nijednog vektorskog polja na $\boldsymbol{R^1}$.

Posledica 2.9.1. *1. Ako $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Omega(M)$, onda $[\tilde{X},\tilde{Y}] = [X,Y]\tilde{} \in \Omega(M)$. Analogno tvrđenje važi i za $\Omega(N)$.*

2. Ako $\tilde{X} \in \Omega(M)$ i $\tilde{Y} \in \Omega(N)$, onda je $[\tilde{X},\tilde{Y}] = 0$.

Dokaz:

1. Neka je $(p,q) \in M \times N$ i neka je $f \in \mathcal{C}^\infty(M\times N)$. Neka su $\pi : M \times q \to M$ i $\sigma : p \times N \to N$ projekcije. Tada je

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]_{(p,q)}(f) = \tilde{X}_{(p,q)}(\tilde{Y}(f)) - \tilde{Y}_{(p,q)}(\tilde{X}(f)) = X_p(\tilde{Y}(f)\circ j \circ \pi^{-1}) -$$

$$-Y_p(\tilde{X}(f)\circ j\circ \pi^{-1}) = X_p(p_1 \to \tilde{Y}(f)\circ j \circ \pi^{-1}(p_1)) -$$

$$-Y_p(p_1 \to \tilde{X}(f)\circ j\circ\pi^{-1}(p_1)) = X_p(p_1 \to \tilde{Y}(f)\circ j(p_1,q)) -$$

$$-Y_p(p_1 \to \tilde{X}(f)\circ j(p_1,q)) = X_p(p_1 \to \tilde{Y}_{(p_1,q)}(f)) - Y_p(p_1 \to \tilde{X}_{(p_1,q)}(f)) =$$

$$= X_p(p_1 \to Y_{p_1}(f\circ j\circ \pi^{-1})) - Y_p(p_1 \to X_{p_1}(f\circ j \circ \pi^{-1})),$$

a sa druge strane je

$$[X,Y]\tilde{}_{(p,q)}(f) = [X,Y]_p(f\circ j\circ\pi^{-1}) = X_p(p_1 \to Y_{p_1}(f\circ j\circ\pi^{-1})) -$$

$$-Y_p(p_1 \to X_{p_1}(f\circ j\circ \pi^{-1})).$$

Kako je $(p,q) \in M \times N$ proizvoljno odabrana tačka to na osnovu prethodna dva niza jednakosti zaključujemo da je $[\tilde{X},\tilde{Y}] = [X,Y]\tilde{} \in \Omega(M)$. Analogan dokaz ide i za $\Omega(N)$.

2. Neka je $(p,q) \in M \times N$ i neka je $f \in \mathcal{C}^\infty(M \times N)$. Neka je $\xi = (x^1,\ldots,x^n)$ karta od M oko p i neka je $\eta = (y^1,\ldots,y^m)$ karta od N oko q. Neka su $\pi_q : M \times q \to M$ i $\sigma_p : p \times N \to N$ projekcije. Neka su $j_1 : M\times q \subset M \times N$ i $j_2 : p \times N \subset M \times N$ prirodne inkluzije. Tada je

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]_{(p,q)}(f) = \tilde{X}_{(p,q)}(\tilde{Y}(f)) - \tilde{Y}_{(p,q)}(\tilde{X}(f)) =$$

$$= X_p(\tilde{Y}(f)\circ j_1\circ \pi_q^{-1}) - Y_q(\tilde{X}(f)\circ j_2 \circ \sigma_p^{-1}) =$$

$$= X_p(p_1 \to \tilde{Y}(f) \circ j_1 \circ \pi_q^{-1}(p_1)) - Y_q(q_1 \to \tilde{X}(f) \circ j_2 \circ \sigma_p^{-1}(q_1)) =$$

$$= X_p(p_1 \to \tilde{Y}_{(p_1,q)}(f)) - Y_q(q_1 \to \tilde{X}_{(p,q_1)}(f)) = X_p(p_1 \to Y_q(f \circ j_2 \circ \sigma_{p_1}^{-1})) -$$

$$-Y_q(q_1 \to X_p(f \circ j_1 \circ \pi_{q_1}^{-1})) = X_p(p_1 \to \sum_{i=1}^{m} Y_q(y^i) \frac{\partial (f \circ j_2 \circ \sigma_{p_1}^{-1} \circ \eta^{-1})}{\partial u^i}(\eta(q))) -$$

$$-Y_q(q_1 \to \sum_{j=1}^{n} X_p(x^j) \frac{\partial (f \circ j_1 \circ \pi_{q_1}^{-1} \circ \xi^{-1})}{\partial u^j}(\xi(p))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} Y_q(y^i) X_p(p_1 \to \frac{\partial (f \circ j_2 \circ \sigma_{p_1}^{-1} \circ \eta^{-1})}{\partial u^i}(\eta(q))) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} X_p(x^j) Y_q(q_1 \to \frac{\partial (f \circ j_1 \circ \pi_{q_1}^{-1} \circ \xi^{-1})}{\partial u^j}(\xi(p))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} Y_q(y^i) \sum_{j=1}^{n} X_p(x^j)\, \partial_j^{\xi}|_p (p_1 \to \frac{\partial (f \circ j_2 \circ \sigma_{p_1}^{-1} \circ \eta^{-1})}{\partial u^i}(\eta(q))) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} X_p(x^j) \sum_{i=1}^{m} Y_q(y^i) \partial_i^{\eta}|_q (q_1 \to \frac{\partial (f \circ j_1 \circ \pi_{q_1}^{-1} \circ \xi^{-1})}{\partial u^j}(\xi(p))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Y_q(y^i) X_p(x^j) \frac{\partial^2 (f \circ (\xi^{-1} \times \eta^{-1}))}{\partial u^j \partial u^{n+i}}(\xi(p), \eta(q)) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} X_p(x^j) Y_q(y^i) \frac{\partial^2 (f \circ (\xi^{-1} \times \eta^{-1}))}{\partial u^{n+i} \partial u^j}(\xi(p), \eta(q)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_p(x^j) Y_q(y^i) (\frac{\partial^2 (f \circ (\xi^{-1} \times \eta^{-1}))}{\partial u^j \partial u^{n+i}}(\xi(p), \eta(q)) -$$

$$- \frac{\partial^2 (f \circ (\xi^{-1} \times \eta^{-1}))}{\partial u^{n+i} \partial u^j}(\xi(p), \eta(q))) = 0.$$

Poslednja jednakost važi na osnovu Kleroove teoreme (videti [5, str. 31]) zato što je funkcija $f \circ (\xi^{-1} \times \eta^{-1})$ glatka na svom domenu (koji je otvoren podskup od $\boldsymbol{R}^{n+m}$). Kako je $(p,q) \in M \times N$ proizvoljna tačka to na osnovu poslednjeg niza jednakosti zaključujemo da je $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$.

■

2.9.2 Vektorski prostori kao mnogostrukosti

Posmatrajmo sada vektorske prostore kao mnogostrukosti. Neka je zato V n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\boldsymbol{R}$. Ako su ξ i η linearni izomorfizmi iz skupa V u skup $\boldsymbol{R^n}$, onda je $\xi \circ \eta^{-1}$ linearni izomorfizam iz $\boldsymbol{R^n}$ u $\boldsymbol{R^n}$, a time i difeomorfizam. Vidimo da vektorski prostor V određuje mnogostrukost čiji kompletan atlas sadrži sve linearne izomorfizme iz V u $\boldsymbol{R^n}$.

Definicija 2.9.1. *Ako $p, v \in V$, onda neka je $v_p \in T_p(V)$ početna brzina $\alpha'(0)$ krive $\alpha(t) = p + tv$.*

Lema 2.9.3. *Ako je $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$ linearna karta od V, onda je*

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} x^i(v)\, \partial_i|_p \, .$$

Dokaz: Kako su koordinatne funkcije $x^1, \ldots, x^n$ linearne, to je

$$x^i(\alpha(t)) = x^i(p) + tx^i(v), \text{ za sve } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Otuda je

$$v_p = \alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}(0)\, \partial_i|_p = \sum_{i=1}^{n} x^i(v)\, \partial_i|_p. \ \blacksquare$$

Dakle, vidimo da je v_p tangentni vektor u p sa istim koordinatama kao i $v \in V$. Otuda zaključujemo da je

1. za $p \in V$, funkcija $v \to v_p$ je linearni izomorfizam $V \approx T_p(V)$;
2. za $p, q \in V$, funkcija $v_p \to v_q$ je linearni izomorfizam $T_p(V) \approx T_q(V)$.

2.9.3 Tangentno raslojenje

Definicija 2.9.2. *Neka je M mnogostrukost. Familija svih tangentnih vektora na mnogostrukosti M se naziva tangentno raslojenje od M i označava se sa TM. Preslikavanje $\pi : TM \to M$ definisano sa $\pi(v) = p$, za sve vektore $v \in T_p(M)$, se naziva projekcija tangentnog raslojenja TM na mnogostrukost M.*

Neka je $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ proizvoljno odabrana karta mnogostrukosti M čiji je domen $\mathcal{U}$. Karte tangentnog raslojenja se definišu prirodno na sledeći način

$$\xi_1 : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \boldsymbol{R^{2n}} \, ,$$

$$\xi_1 = (x^1 \circ \pi, \ldots, x^n \circ \pi, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n),$$

pri čemu je $x_1^i(v) = v(x^i)$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Može se dokazati da su svake dve ovako definisane karte međusobno kompatibilne. Otuda je tangentno raslojenje opet mnogostrukost, samo što je njena dimenzija sada $2n$.

Definicija 2.9.3. *Vektorsko polje Z glatkog preslikavanja $\phi : P \to M$ je preslikavanje $Z : P \to TM$ tako da je $\pi \circ Z = \phi$, gde je π projekcija iz TM na M.*

Dokažimo da je Z glatko preslikavanje ako i samo ako za sve $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ je $Zf \in \mathcal{C}^\infty(P)$.

Neka su $p_1 \in P$ proizvoljno odabrana tačka, ξ' karta od P oko p_1, $p = \phi(p_1) \in M$, $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ karta od M oko p i ξ_1 karta tangentnog raslojenja TM oko $Z(p_1)$, određena sa ξ kao i gore. Tada je Z glatko preslikavanje ako i samo ako je lokalno glatko u svakoj tački $p_1 \in P$ tj. ako i samo ako je preslikavanje $\xi_1 \circ Z \circ \xi'^{-1}$ glatko na svom domenu $\mathcal{U}$.

Za proizvoljnu tačku $p_1{}' \in \mathcal{U}$ imamo da je

$$\xi_1 \circ Z \circ \xi'^{-1}(p_1{}') = (x^1(\phi(\xi'^{-1}(p_1{}'))), \ldots, x^n(\phi(\xi'^{-1}(p_1{}'))), Z(\xi'^{-1}(p_1{}'))(x^1),$$
$$\ldots, Z(\xi'^{-1}(p_1{}'))(x^n)).$$

Preslikavanje $\xi_1 \circ Z \circ \xi'^{-1}$ je glatko ako i samo ako je glatko po komponentama. Prvih n komponenata je glatko zato što je ϕ glatko preslikavanje. Dakle preslikavanje $\xi_1 \circ Z \circ \xi'^{-1}$ je glatko ako i samo ako je preslikavanje $p_1{}' \to Z(\xi'^{-1}(p_1{}'))(x^i)$ glatko za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Neka je funkcija $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ proizvoljno odabrana. Preslikavanje $Zf : p_1 \to Z_{p_1}(f)$ je glatko ako i samo ako je lokalno glatko u svakoj tački tj. ako i samo ako je preslikavanje $p_1{}' \to Z(\xi'^{-1}(p_1{}'))(f)$ glatko na svom domenu $\mathcal{U}_1$ (koji je u opštem slučaju širi od $\mathcal{U}$).

Ako za f odabiramo redom $x^1, \ldots, x^n$ (glatko proširene na M), onda zaključujemo da je preslikavanje Z lokalno glatko u tački p_1. Sa druge strane, ako je Z lokalno glatko u tački p_1, onda za proizvoljno $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ imamo da je

$$p_1{}' \to Z(\xi'^{-1}(p_1{}'))(f) = \sum_{i=1}^{n} Z(\xi'^{-1}(p_1{}'))(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi(\xi'^{-1}(p_1{}')))$$

na domenu $\mathcal{U}$. Ova funkcija je glatka na $\mathcal{U}$ jer je $p_1{}' \to Z(\xi'^{-1}(p_1{}'))(x^i)$ glatka funkcija, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (na $\mathcal{U}$). Otuda zaključujemo da je funkcija Zf lokalno glatka u tački p_1.

Na osnovu svega do sada zaključujemo da je Z lokalno glatko ako i samo ako je preslikavanje Zf lokalno glatko za sve $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Odatle sledi i tvrđenje.

2.10 Integralne krive

U ovom delu rada nećemo dokazivati ni jedno tvrđenje. Više o integralnim krivama, kao i dokaze tvrđenja čitalac može naći u [4, str. 27-30].

Sledeće što ćemo definisati je integralna kriva na nekoj mnogostrukosti s obzirom na neko glatko vektorsko polje. Podsetimo se na to da ako je $\alpha : I \to M$ glatka kriva na M, onda podrazumevamo da je I otvoren interval u $\boldsymbol{R}$.

Definicija 2.10.1. *Kriva $\alpha : I \to M$ je integralna kriva glatkog vektorskog polja V na mnogostrukosti M, ako je $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$, za sve $t \in I$.*

Lema 2.10.1. *Ako je V glatko vektorsko polje na mnogostrukosti M, onda za svaku tačku $p \in M$ postoji interval I oko 0 i jedinstvena integralna kriva $\alpha : I \to M$ od V tako da je $\alpha(0) = p$.* ■

Ako je α integralna kriva od glatkog vektorskog polja V, onda je preslikavanje $t \to \alpha(t + c)$ takođe integralna kriva, za sve $c \in \boldsymbol{R}$. Narednih nekoliko lema će nam biti od koristi za dalji rad na mnogostrukostima.

Lema 2.10.2. *Ako su $\alpha, \beta : I \to M$ integralne krive od vektorskog polja V na M takve da je $\alpha(a) = \beta(a)$ za neko $a \in I$, onda je $\alpha = \beta$.* ■

Posmatrajmo familiju svih integralnih krivih $\alpha : I_\alpha \to M$ od glatkog vektorskog V za koje je $\alpha(0) = p$, pri čemu $p \in M$. Na osnovu prethodne leme imamo da je $\alpha = \beta$ na $I_\alpha \cap I_\beta$. Sada sve ove krive definišu jedinstvenu integralnu krivu $\alpha_p : I_p \to M$ gde je $I_p = \bigcup I_\alpha$. α_p se naziva maksimalna integralna kriva od V koja prolazi kroz p.

Lema 2.10.3. *Neka je V glatko vektorsko polje na mnogostrukosti M i neka je $q = \alpha_p(s)$. Tada je $s + I_q = I_p$ i $\alpha_p(s + t) = \alpha_q(t)$, za sve $t \in I_q$.* ■

Definicija 2.10.2. *Neka je data mnogostrukost M i neka je dato glatko vektorsko polje V na mnogostrukosti M. Vektorsko polje V se naziva kompletno ako je svaka njegova maksimalna integralna kriva definisana na celom skupu realnih brojeva.*

Glava 3

Tenzori

3.1 Osnovna algebra tenzora i tenzorska polja

Sada ćemo videti i šta su to tenzori i tenzorska polja na mnogostrukostima.

Neka je V modul nad prstenom K i neka je V^* skup svih K-linearnih funkcija iz V u K. V^* zajedno sa operacijama sabiranja funkcija i množenja funkcije elementom iz K čini modul nad K (koji se naziva dualnim modulom od modula V).

Definicija 3.1.1. *Za cele brojeve $r, s \geq 0$ koji nisu oba jednaka nuli, K-multilinearna funkcija $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ se naziva* **tenzor tipa** $\binom{r}{s}$ **nad** V. **Tenzor tipa** $\binom{0}{0}$ **nad** V *je svaki elemenat od K. Za cele brojeve $r, s \geq 0$, skup svih tenzora tipa $\binom{r}{s}$ nad modulom V se označava sa $\mathcal{T}^r_s(V)$. Za tenzore $a \in \mathcal{T}^{r_1}_{s_1}(V)$ i $b \in \mathcal{T}^{r_2}_{s_2}(V)$ tenzorski proizvod $a \otimes b \in \mathcal{T}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$ je definisan sa*

$$a \otimes b(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, f_1, \ldots, f_{s_1}, g_1, \ldots, g_{s_2}) :=$$

$$a(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, f_1, \ldots, f_{s_1})\, b(\gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, g_1, \ldots, g_{s_2}),$$

pri čemu $\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2} \in V^*$, a $f_1, \ldots, f_{s_1}, g_1, \ldots, g_{s_2} \in V$.

Podsetimo se da prostor svih glatkih vektorskih polja na mnogostrukosti M označavamo sa $\mathcal{T}^1_0(M)$, dok prostor svih glatkih jedan formi na mnogostrukosti M označavamo sa $\Omega^1(M)$ ili sa $\mathcal{T}^0_1(M)$. Oba ova prostora su moduli nad $\mathcal{C}^\infty(M)$. Otuda smo u mogućnosti da damo sledeću definiciju.

Definicija 3.1.2. *Tenzorsko polje A na mnogostrukoski M je svaki tenzor nad $\mathcal{C}^\infty(M)$-modulom $\mathcal{T}^1_0(M)$. Skup svih tenzorskih polja tipa $\binom{r}{s}$ na mnogostrukosti M, kada nisu oba $r, s \geq 0$ jednaka nuli, se označava sa $\mathcal{T}^r_s(M)$. Ako je $r = s = 0$, onda je $\mathcal{T}^0_0(M)$=$\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Dakle, tenzorkso polje A je tipa $\binom{r}{s}$ ako je A $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinearno preslikavanje

$$A : \Omega^1(M)^r \times \mathcal{T}^1_0(M)^s \to \mathcal{C}^\infty(M)\,.$$

Definicija 3.1.3. *Neka je M data mnogostrukost. Tenzorski proizvod tenzorskih polja $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ i $B \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$ je preslikavanje*

$$A \otimes B : \Omega^1(M)^{r+r'} \times \mathcal{T}^1_0(M)^{s+s'} \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

definisano sa

$$(A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) =$$

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'})\,,$$

pri čemu $\theta^1, \dots, \theta^{r+r'} \in \Omega^1(M)$ i $X_1, \dots, X_{s+s'} \in \mathcal{T}^1_0(M)$. Ako imamo da je $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ i $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, onda je

$$A \otimes f = f \otimes A = fA\,.$$

Veoma su bitna sledeća pravila:

1. Svaka glatka jedan forma na mnogostrukosti M je $\binom{0}{1}$ tenzorsko polje na mnogostrukosti M, pa je zato $\Omega^1(M) = \mathcal{T}^0_1(M)$.

2. Ako je V glatko vektorsko polje na mnogostrukosti M, onda definišimo

   $$V(\theta) = \theta(V), \text{ za sve } \theta \in \Omega^1(M).$$

   Tada je funkcija $V : \Omega^1(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearna, pa je otuda i $\binom{1}{0}$ tenzorsko polje. Može se dokazati da se svako $\binom{1}{0}$ tenzorsko polje može prikazati na ovaj način (proučiti poglavlje 2.6 od [2], a posebno teoremu 2.6.19.). Odavde vidimo i razlog zbog kojeg smo sa $\mathcal{T}^1_0(M)$ označili skup svih glatkih vektorskih polja na mnogostrukosti M.

3. Ako je $A : \mathcal{T}^1_0(M)^s \to \mathcal{T}^1_0(M)$ preslikavanje koje je $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinearno, onda definišimo preslikavanje $\overline{A} : \Omega^1(M) \times \mathcal{T}^1_0(M)^s \to \mathcal{C}^\infty(M)$ na sledeći način

   $$\overline{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_s)),$$

   za sve $\theta \in \Omega^1(M)$ i sve $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{T}^1_0(M)$. Vidimo da je preslikavanje $\overline{A}$ $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinearno, pa je $\overline{A}$ $\binom{1}{s}$ tenzor.

Glavna osobina svakog tenzorksog polja na nekoj mnogostrukosti je da vrednost slike svakog elementa iz domena u nekoj tački mnogostrukosti zavisi samo od vrednosti koordinata tog elementa u toj tački. Tačnije važi sledeća teorema čiji dokaz čitalac može naći u [4, str. 37-38].

Teorema 3.1.1. *Neka je $p \in M$ i neka je $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Neka su $\{\overline{\theta}^1, \dots, \overline{\theta}^r\}$ i $\{\theta^1, \dots, \theta^r\}$ jedan forme takve da je $\overline{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$, za sve $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Neka su $\{\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_s\}$ i $\{X_1, \dots, X_s\}$ vektorska polja na mnogostrukosti M takva da je $\overline{X}_j|_p = X_j|_p$, za sve $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Tada je*

$$A(\overline{\theta}^1, \dots, \overline{\theta}^r, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_s)(p) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p). \ \blacksquare$$

Svaki tangentni vektor se može produžiti u glatko vektorsko polje korišćenjem particije jedinice. Svaki elemenat iz dualnog tangentnog prostora se može produžiti u glatku jedan formu. Odatle na osnovu ove teoreme za svako $p \in M$ i svako tenzorsko polje $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ možemo definisati preslikavanje

$$A_p : (T_p(M)^*)^r \times (T_p(M))^s \to \boldsymbol{R}$$

na sledeći način

$$A_p(\alpha_1, \dots, \alpha_r, x_1, \dots, x_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p)\,,$$

pri čemu $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in T_p(M)^*$ i $x_1, \dots, x_s \in T_p(M)$, a $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Omega^1(M)$ i $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{T}^1_0(M)$ su takvi da je $\theta^j|_p = \alpha^j$, za sve $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ i $X_i|_p = x_i$, za sve $i \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Vidimo da je ovako definisana funkcija $\binom{r}{s}$ tenzor na $T_p(M)$. Odatle tenzorsko polje A možemo posmatrati kao funkciju koja glatko pridružuje svakom $p \in M$ $\binom{r}{s}$ tenzor A_p na $T_p(M)$. Kao što smo ranije konstruisali tangentno raslojenje na mnogostrukosti M isto tako možemo da konstruišemo $\binom{r}{s}$ tenzorsko raslojenje na M kao skup svih $\binom{r}{s}$ tenzora na $T_p(M)$ od svih tačaka $p \in M$. Od takvog tenzorskog raslojenja se može napraviti mnogostrukost (videti poglavlje 2.6. u [2]).

Ako je $\mathcal{U}$ otvoren podskup mnogostrukosti M, tada je restrikcija $A|_{\mathcal{U}}$ od A na $\mathcal{U}$ dobro definisano tenzorsko polje na $\mathcal{U}$.

3.2 Komponente tenzora i kontrakcije

Definicija 3.2.1. *Neka je $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ karta čiji je domen $\mathcal{U} \subset M$. Ako je $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, onda su komponente od A, s obzirom na kartu ξ, realne funkcije na $\mathcal{U}$ definisane sa*

$$A^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} = A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}),$$

pri čemu $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$.

Za dokaz neredne leme videti poglavlje 2.6. u [2] (pogotovo propoziciju 2.6.3.).

Lema 3.2.1. *Neka je $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ karta na $\mathcal{U} \subset M$. Ako $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, onda je na $\mathcal{U}$*

$$A = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n} A^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s} \, \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \ldots \otimes dx^{j_s}. \ \blacksquare$$

Sada smo u prilici da uvedemo pojam kontraktivnog preslikavanja koji će nam trebati za rad na semi-Rimanovim mnogostrukostima. Razmotrimo prvo sledeću lemu.

Lema 3.2.2. *Postoji jedinstvena $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearna funkcija*

$$C : \mathcal{T}^1_1(M) \ \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

koja se naziva $(1,1)$ *kontrakcija tako da je* $C(X \otimes \ \theta) = \theta X$, *za sve* $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ *i sve* $\theta \in \Omega^1(M)$. $\blacksquare$

U dokazu (koji čitalac može naći u [4, str. 40-41]) ove leme se koristi činjenica da, sa jedne strane, za $A \in \mathcal{T}^1_1(M)$ imamo da je $A(dx^i, \partial_j) = A^i_j$, a sa druge strane je $C(\partial_j \otimes \ dx^i) = \delta_{ij}$, u nekoj karti $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ na $\mathcal{U} \subset M$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Otuda se na $\mathcal{U}$ kontrakcija C definiše na sledeći način

$$C(A) = \sum_{i=1}^n A^i_i = \sum_{i=1}^n A(dx^i, \partial_i).$$

Sada ćemo definisati kontrakciju u opštem slučaju.

Neka $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Fiksirajmo jedan forme $\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}$ i vektorska polja $X_1, \ldots, X_{s-1}$. Tada je funkcija

$$(\theta, X) \to A(\theta^1, \ldots, \theta^{i-1}, \theta, \theta^i, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{j-1}, X, X_j, \ldots, X_{s-1})$$

$\binom{1}{1}$ tenzorsko polje koji može da se zapiše na sledeći način

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^{i-1}, \cdot, \theta^i, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{j-1}, \cdot, X_j, \ldots, X_{s-1}).$$

Primenjujući $(1,1)$ kontrakciju na ovo tenzorsko polje dobija ce funkcija iz skupa $\mathcal{C}^\infty(M)$ koju ćemo označiti sa $C^i_j(A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1})$. Preslikavanje $C^i_j(A)$ je $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinearno po argumentima. Otuda je ono tenzorsko polje tipa $\binom{r-1}{s-1}$ koji ćemo zvati kontrakcija tenzorskog polja A po indeksima i i j.

Neka su $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ i $l \in \{1, \ldots, s\}$ fiksirani indeksi. Ako tenzorsko polje $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, s obzirom na neku kartu, ima komponente $A^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}$, onda $C^k_l(A)$ ima komponente

$$\sum_{m=1}^n A^{i_1, \ldots, i_{k-1}, m, i_k, \ldots, i_{r-1}}_{j_1, \ldots, j_{l-1}, m, j_l, \ldots, j_{s-1}}.$$

3.3 Tenzorski izvodi

Upoznajmo se sada sa pojmom tenzorskog izvoda na mnogostrukosti M.

Definicija 3.3.1. Tenzorski izvod *D na mnogostrukosti M je skup svih $\boldsymbol{R}$-linearnih funkcija*

$$D = D_s^r : \mathcal{T}_s^r(M) \to \mathcal{T}_s^r(M) \quad (r, s \geq 0)$$

takvih da je za svaka dva tenzora A i B:

1. $D(A \otimes B) = D\,A \otimes B + A \otimes D\,B\,,$
2. $D(C\,A) = C(D\,A)\,,$ *za svaku kontrakciju C.*

Neka je D tenzorski izvod. U specijalnom slučaju $r = s = 0$, D_0^0 je izvod na $\mathcal{C}^\infty(M)$. Otuda postoji jedinstveno glatko vektorsko polje V na mnogostrukosti M takvo da je $Vf = D_0^0(f)$, za sve $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Tenzorski izvodi nisu $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearni. Šema dokaza naredne propozicije je data u [4, str. 44].

Propozicija 3.3.1. *Ako je D tenzorski izvod na M i ako je $\mathcal{U}$ otvoren podskup od M, onda postoji jedinstveni tenzorski izvod na $D_{\mathcal{U}}$ na $\mathcal{U}$ tako da je*

$$D_{\mathcal{U}}(A|_{\mathcal{U}}) = (DA)|_{\mathcal{U}}\,,$$

za svako tenzorsko polje A na M. ■

Propozicija 3.3.2. *Neka je D tenzorski izvod na M. Ako je $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, onda je*

$$D(A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)) = (D\,A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, D\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, DX_j, \ldots, X_s).$$

Dokaz: Neka su $\theta^1, \ldots, \theta^r$ glatke jedan forme na M i neka su $X_1, \ldots, X_s$ glatka vektorska polja na M. Tada je

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) =$$

$$= C_1^1(\ldots(C_{s+1}^1(A\otimes\theta^1\otimes\ldots\otimes\theta^r\otimes X_1\otimes\ldots\otimes X_s))\ldots)$$

jer imaju iste komponente s obzirom na bilo koju kartu od M. Otuda je

$$D(A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)) = C_1^1(\ldots(C_{s+1}^1(D(A\otimes\theta^1\otimes\ldots\otimes\theta^r\otimes$$
$$\otimes X_1\otimes\ldots\otimes X_s))\ldots) = C_1^1(\ldots(C_{s+1}^1(DA\otimes\theta^1\otimes\ldots\otimes\theta^r\otimes$$
$$\otimes X_1\otimes\ldots\otimes X_s)\ldots) + C_1^1(\ldots(C_{s+1}^1(A\otimes D\theta^1\otimes\ldots\otimes\theta^r\otimes$$
$$\otimes X_1\otimes\ldots\otimes X_s)\ldots) + \ldots + C_1^1(\ldots(C_{s+1}^1(A\otimes\theta^1\otimes\ldots\otimes\theta^r\otimes$$
$$\otimes X_1\otimes\ldots\otimes DX_s)\ldots) = (DA)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)+$$
$$+A(D\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)+\ldots+A(\theta^1,\ldots,D\theta^r,X_1,\ldots,X_s)+$$
$$+A(\theta^1,\ldots,\theta^r,DX_1,\ldots,X_s)+\ldots+A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,DX_s). \ \blacksquare$$

Ako primenimo ovu propoziciju na jedan formu θ na nekoj mnogostrukosti M, onda imamo da je

$$(D\theta)(X) = D(\theta(X)) - \theta\,(DX)\,,$$

gde je X glatko vektorsko polje na M.

Posledica 3.3.1. *Ako se tenzorski izvodi D_1 i D_2 poklapaju na $\mathcal{C}^\infty(M)$ i ako se poklapaju na $\mathcal{T}_0^1(M)$, onda je $D_1 = D_2$.*

Teorema 3.3.1. *Neka je dato glatko vektorsko polje V na mnogostrukosti M i neka je $\boldsymbol{R}$-linearna funkcija δ na prostoru glatkih vektorskih polja takva da je*

$$\delta(fX) = Vf\,X + f\,\delta(X),$$

za sve $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ i sva glatka vektorska polja X na M. Tada postoji jedinstveni tenzorski izvod D na M takav da je $D_0^0 = V : \mathcal{C}^\infty(M)\to\mathcal{C}^\infty(M)$ i $D_0^1 = \delta$.

Dokaz: Konstruišimo D.

D_0^1 i D_0^0 su dati. D_1^0 se dobija na osnovu formule koja je prethodila posledici pre ove teoreme, odnosno

$$(D\,\theta)(X) = V(\theta X) - \theta(\delta X)\,,$$

za sve $\theta\in\mathcal{T}_1^0(M)$ i sve $X\in\mathcal{T}_0^1(M)$. Na osnovu ove formule vidimo da za sve $X\in\mathcal{T}_0^1(M)$ važi $(D\,\theta)(X)\in\mathcal{C}^\infty(M)$.

Na osnovu formule za δ direktno se izvodi da je $D\,\theta$ $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearno. Dakle $D\,\theta$ je glatka jedan forma. Na osnovu formule za δ može se izvesti da je D_1^0 $\boldsymbol{R}$-linearno.

Na osnovu prethodne propozicije možemo definisati D u opštem slučaju $(r+s\geq 2)$. Ako $A\in\mathcal{T}^r_s(M)$, onda neka je

$$(DA)(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)=D(A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s))-$$

$$-\sum_{i=1}^{r}A(\theta^1,\dots,D\,\theta^i,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)-$$

$$-\sum_{j=1}^{s}A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,\delta X_j,\dots,X_s).$$

Vidimo da je DA preslikavanje koje je $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinearno što znači da je iz $\mathcal{T}^r_s(M)$. Takođe vidimo da je D preslikavanje koje je $\boldsymbol{R}$-linearno.

Direktan račun pokazuje da za ovako definisano D i za svaka dva tenzorska polja A i B važi da je $D(A\otimes B)=D\,A\otimes B+A\otimes D\,B$. Ostaje još da dokažemo da D komutira sa kontrakcijom.

Neka je $C:\mathcal{T}^1_1(M)\ \to\mathcal{C}^\infty(M)$ kontrakcija. $CD=DC$ na $X\otimes\theta$, jer je sa jedne strane $DC(X\otimes\theta)=D(\theta(X))=(D\theta)(X)+\theta(DX)$, a sa druge strane je $C(D(X\otimes\theta))=C(DX\otimes\theta+X\otimes D\theta)=\theta(DX)+D\theta(X)$. Koristeći činjenicu da je C $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearna to za $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ imamo da je

$$CD(f\,X\otimes\theta)=C(D(f\otimes X\otimes\theta))=C(Df\otimes X\otimes\theta+f\otimes D(X\otimes\theta))=$$
$$=C(Df\,X\otimes\theta+f D(X\otimes\theta))=Df\,C(X\otimes\theta)+f\,CD(X\otimes\theta)=$$
$$=Df\,C(X\otimes\theta)+f\,DC(X\otimes\theta)=D(fC(X\otimes\theta))=DC(f\,X\otimes\theta).$$

Otuda kako su C i D lokalni i aditivni, to za $A\in\mathcal{T}^1_1(M)$ imamo da je $CD(A)=CD(\sum_{i,j=1}^n A^i_j\,\partial_i\otimes\,dx^j)=\sum_{i,j=1}^n CD(A^i_j\,\partial_i\otimes\,dx^j)=$
$=\sum_{i,j=1}^n DC(A^i_j\,\partial_i\otimes dx^j)=DC(A)$.

U opštem slučaju neka je npr. $A\in\mathcal{T}^1_2(M)$. Tada je

$$(D\,C^1_2A)(X)=D\left((C^1_2A)(X)\right)-(C^1_2A)(DX)=$$
$$=D(C\{A(\cdot,X,\cdot)\})-C\{A(\cdot,DX,\cdot)\}=C\{D(A(\cdot,X,\cdot))-A(\cdot,DX,\cdot)\}=$$
$$=C\{(DA)(\cdot,X,\cdot)\}=C^1_2(DA)(X).$$

Pretposlednja jednakost važi jer za proizvoljnu glatku jedan formu θ i proizvoljno glatko vektorsko polje V imamo da je

$$(D(A(\cdot,X,\cdot))-A(\cdot,DX,\cdot))(\theta,V)=D(A(\cdot,X,\cdot)(\theta,V))-A(\cdot,X,\cdot)(D\theta,V)-$$

$$-A(\cdot,X,\cdot)(\theta,DV)-A(\theta,DX,V)=D(A(\theta,X,V))-A(D\theta,X,V)-$$

$$-A(\theta,X,DV)-A(\theta,DX,V)=(DA)(\theta,X,V)=(DA)(\cdot,X,\cdot)(\theta,V).$$

Na osnovu poslednja dva niza jednakosti zaključujemo da je $D\,(C^1_2A)=C^1_2(DA)$. ■

3.4 Simetrične bilinearne forme i skalarni proizvodi

Kako bi smo se uopšte upoznali sa pojmom semi-Rimanove mnogostrukosti, neophodno je prvo da definišemo simetrične bilinearne forme.

Definicija 3.4.1. *Neka je V konačno dimenzionalan vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.* **Bilinearna forma** *na vektorskom prostoru V je R-bilinearna funkcija $b : V \times V \to R$. Bilinearna forma b se naziva* **simetrična** *ako je dodatno $b(v, w) = b(w, v)$, za sve $v, w \in V$.*

Definicija 3.4.2. *Simetrična bilinearna forma b na V se naziva*

1. **pozitivno (negativno) definitna** *ako $v \neq 0$ implicira da je*

$$b(v, v) > 0 \ (b(v, v) < 0),$$

2. **pozitivno (negativno) semidefinitna** *ako je*

$$b(v, v) \geq 0 \, (b(v, v) \leq 0), \ za \ sve \ v \in V,$$

3. **nedegenerisana** *ako iz $b(v, w) = 0$, za sve $w \in V$, sledi da je $v = 0$.*

b se naziva **definitna (semidefinitna)** *ako važi jedna od alternativa iz* (1) [(2)].

Može se dokazati da ako je simetrična bilinearna forma definitna, onda je ona semidefinitna i nedegenerisana.

Definicija 3.4.3. *Indeks ν simetrične bilinearne forme b na V je najveći prirodan broj u skupu svih dimenzija potprostora $W \subset V$ na kojima je b negativno definitna.*

Funkcija $q : V \to R$ definisana sa

$$q(v) = b(v, v), \ v \in V,$$

se naziva **asocirana kvadratna forma od** b. Primetimo da za svako $v, w \in V$ važi

$$b(v, w) = \frac{1}{2} [q(v + w) - q(v) - q(w)].$$

Ako je $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ baza vektorskog prostora V, onda se matrica čiji su elementi $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ zove **matrica od** b **s obzirom na bazu** $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ **od** V.

Lema 3.4.1. *Simetrična bilinearna forma b je nedegenerisana ako i samo ako je njena matrica s obzirom na proizvoljno odabranu bazu invertibilna.*

Dokaz: Neka je $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ proizvoljno odabrana baza od V. b je nedegenerisana ako i samo ako $b(v, e_i) = 0$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ implicira da je $v = 0$. Važi

$$b(v, e_i) = \sum_{j=1}^{n} v_j \, b(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} v_j \, b_{ij} \,,$$

za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vidimo da je b nedegenerisana ako i samo ako gornji sistem linaranih jednačina po promenljivama $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ima jedinstveno rešenje. Poslednje važi ako i samo ako determinanta sistema različita od nule tj. ako i samo ako je matrica od b, s obzirom na bazu $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, invertibilna. ■

Na ovu priču o simetričnim bilinearnim formama se prirodno nastavlja priča o skalarnom proizvodu na realnom vektorskom prostoru.

Definicija 3.4.4. *Skalarni proizvod g na vektorskom prostoru V je nedegenerisana simatrična bilinearna forma na V. Unutrašnji proizvod na V je pozitivno definitan skalarni proizvod na V.*

Klasičan primer unutrašnjeg proizvoda je unutrašnji proizvod na $\boldsymbol{R^n}$, definisan sa

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i \, w_i \,, \text{ za sve } \quad v, w \in \boldsymbol{R^n}.$$

Menjajući samo jedan znak ispred nekog člana sume u navedenom primeru dobijamo primer nedefinitnog skalarnog proizvoda.

Nadalje ćemo sa V označavati konačno dimenzionalni realni vektorski prostor koji je snabdeven sa skalarnim proizvodom g. Vektor $v \in V$ se naziva **nultim vektorom** ako je $q(v) = 0$, pri čemu je $v \neq 0$. Za vektore v i w iz V se kaže da su **međusobno ortogonalni** ako je $g(v, w) = 0$ i to označavamo sa $v \perp w$. Za podskupove A i B vektorskog prostora V kažemo da su međusobno ortogonalni ako je $v \perp w$, za sve $v \in A$ i sve $w \in B$. Sa $A \perp B$ označavamo da su skupovi A i B međusobno ortogonalni. Ako je W potprostor vektorskog prostora V, onda je $W^\perp = \{v \in V | v \perp W\}$ potprostor od V. Taj potprostor nazivamo W **ortogonalno**. Može se dokazati da je $dim\, W + dim\, W^\perp = dim\, V$, kao i da je $(W^\perp)^\perp = W$ (videti [4, str. 49]).

Potprostor W vektorskog prostora V se naziva nedegenerisan ako je $g|_W$ nedegenerisana. U narednoj lemi ćemo dati jednu karakterizaciju nedegenerativnog potprostora konačno dimenzionalnog vektorskog prostora.

Lema 3.4.2. *Potrostor W od V je nedegenerisan ako i samo ako je V direktna suma od W i $W^{\perp}$.*

Dokaz: Na osnovu standardnog identiteta iz teorije vektorskih prostora

$$dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = dim\, W + dim\, W^{\perp}(= dim\, V)\,,$$

vidimo da je $W + W^{\perp} = V$ ako i samo ako je $W \cap W^{\perp} = 0$. Posledenje je ekvivalentno sa tim da je

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Sa druge strane, kako je $W \cap W^{\perp} = \{w \in W : w \perp W\}$ zaključujemo da je potprostor W nedegenerisan ako i samo ako je $V = W \oplus W^{\perp}$. ■

Kako $q(v) = g(v, v)$ u opštem slučaju može biti negativna za neko $v \in V$, to je **norma** $|v|$ proizvoljnog vektora $v \in V$ definisana sa $|v| = |g(v, v)|^{\frac{1}{2}}$. Vektor $u \in V$ se naziva **jedinični vektor** ako je $|u| = 1$ tj. $g(u, u) = \pm 1$. Baza vektorskog prostora V se naziva **ortonormirana** ako je svaki vektor te baze jedinični vektor i ako su svaka dva vektora baze međusobno ortogonalna. Može se dokazati da svaki nenula vektorski prostor, koji je snabdeven sa skalarnim proizvodom, ima ortonormiranu bazu (videti [4, str. 50]).

Matrica od g s obzirom na ortonormiranu bazu $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ od V je dijagonalna. Tačnije važi

$$g(e_i, e_j) = \epsilon_j\, \delta_{ij}, \text{ za sve } \; i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

gde je $\epsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1$, za sve $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Od sada pa na dalje ćemo podrazumevati da su vektori ortonormirane baze poređani tako da oni sa negativnom asociranom kvadratnom formom q budu prvi. Ako je $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza od V i ako je pri tome $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, onda se može dokazati da se svako $v \in V$ može jedinstveno prikazati na sledeći način

$$v = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\, g(v, e_i)\, e_i.$$

Ortogonalna projekcija π od V na nedegenerativni potprostor W je linearna transformacija koja šalje $W^{\perp}$ u 0, dok svaki vektor iz W ostavlja fiksnim. Kako je potprostor W nedegenerisan to je na osnovu posledenje dokazane leme $W \oplus W^{\perp} = V$. Otuda, svaka ortonormirana baza $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ od W može da se dopuni do ortonormirane baze

$$(e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

od V, pri čemu je $(e_{k+1},\ldots,e_n)$ baza od $W^\perp$. Otuda za svako $v\in V$ važi

$$\pi(v)=\sum_{j=1}^{k}\epsilon_j\, g(v,e_j)e_j.$$

Indeks vektorskog prostora V je indeks skalarnog proizvoda g na tom vektorskom prostoru i njega označavamo sa *ind* V.

Lema 3.4.3. *Za svaku ortonormiranu bazu* $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ *od* V *je broj negativnih brojeva u* n*-torci* $(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n)$ *jednak indeksu ind* V.

Dokaz: Neka je prvih m brojeva u n-torci $(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n)$ negativno. Ako je g definitna, onda je lema jasna. Zato neka je $0<m<n$. Jasno je da je g negativno definitna na potprostoru generisanom sa vektorima $e_1,e_2,\ldots,e_m$. Odatle je $ind\ V\geq m$.

Neka je S potprostor od V generisan sa vektorima $e_1,e_2,\ldots,e_m$. Neka je W potprostor na kojem je g negativno definitna. Definišimo $\pi:W\to S$ sa

$$\pi(w)=\sum_{i=1}^{m}-g(w,e_i)e_i\,,\ w\in W.$$

Jasno je da je π linearno. Dokažimo da je π injektivno preslikavanje.

Ako je $\pi(w)=0$, tada je $w=\sum_{j=m+1}^{n}g(w,e_j)e_j$. Kako $w\in W$ to je $0\geq g(w,w)=\sum_{i=m+1}^{n}g(w,e_i)^2$, pa je $g(w,e_j)=0$, za sve $j>m$, a otuda je w=0.

π je injektivna pa je $dim\,W\leq dim\,S$. Kako je W proizvoljan potprostor na kojem je g negativno definitna to je $ind\ V\leq m$. ■

Za nedegenerisan potprostor W od V je $V=W\oplus W^\perp$, pa na osnovu poslednje leme zaključujemo da je

$$ind\,V=ind\ W+ind\ W^\perp.$$

Neka su vektorski prostori V i $\overline{V}$ snabdeveni redom sa skalarnim proizvodima g i $\overline{g}$. Za linearnu transformaciju $T:V\to\overline{V}$ kažemo da **očuvava skalarni proizvod** ako je

$$\overline{g}(Tv,Tw)=g(v,w),\ \text{za sve}\ \ v,w\in V.$$

Vidimo da je T injektivno preslikavanje jer iz $T(v)=0$ sledi da je $g(v,w)=0$, za sve $w\in V$, pa je $v=0$. Može se dokazati da T očuvava skalarni proizvod ako i samo ako očuvava asociranu kvadratnu formu (koristiti jednakost koja je data odmah posle definicije asocirane kvadratne forme).

Definicija 3.4.5. *Linearni izomorfizam $T : V \to W$ koji očuvava skalarni proizvod se naziva* **linearna izometrija**.

Na osnovu prethodnog vidimo da je linearna transformacija $T : V \to W$ linearna izometrija ako i samo ako T očuvava skalarni proizvod i važi $dim\ V = dim\ W$.

Lema 3.4.4. *Vektorski prostori V i W, snabdeveni sa skalarnim proizvodom, imaju jednake dimenzije i indekse ako i samo ako postoji linearna izometrija iz V u W.*

Dokaz: Neka V i W imaju jednake dimenzije i indekse. Neka je $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza od V i neka je $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ortonormirana baza od W. Na osnovu prethodne leme možemo pretpostaviti da je $\langle e_i, e_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle$, za sve prirodne brojeve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je $T : V \to W$ linearna transformacija takva da je $T(e_i) = f_i$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je $\langle Te_i, Te_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pa je T linearna izometrija.

Obrnuto, svaka linearna izometrija $T : V \to W$ slika ortonormiranu bazu na ortonormiranu bazu. Odavde zaključujemo da je $dim\, V = dim\, W$, a na osnovu prethodne leme i da je $ind\ V = ind\ W$. ■

Glava 4

Semi-Rimanove mnogostrukosti

4.1 Pojam semi-Rimanove mnogostrukosti

Definicija 4.1.1. **Metrički tenzor** *g na mnogostrukosti M je simetrično nedegenerisano $\binom{0}{2}$ tenzorsko polje konstantnog indeksa.*

Drugim rečima, $g \in \mathcal{T}^0_2(M)$ glatko pridružuje svakom $p \in M$ skalarni proizvod g_p na $T_p(M)$, pri čemu je indeks od g_p isti za sve $p \in M$.

Definicija 4.1.2. **Semi-Rimanova mnogostrukost** *je uređeni par čija je prva komponenta mnogostrukost M, a druga komponenta je metrički tenzor g na mnogostrukosti M.*

Jednostavnosti radi, umesto navedenog uređenog para, mi ćemo semi-Rimanovu mnogostrukost označavati samo sa oznakom mnogostrukosti koja je određuje.

Definicija 4.1.3. *Zajednički indeks od g_p na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M se naziva* **indeks od** *M i označavaćemo ga sa ν. Ako je $\nu = 0$, onda se M naziva* **Rimanova mnogostrukost**. *Ako je $\nu = 1$ i $n \geq 2$, onda se M naziva* **Lorencova mnogostrukost**.

Umesto $g(v, w)$, za tangentne vektore v i w, mi ćemo pisati samo $\langle v, w \rangle$. Za vektorska polja V i W ćemo pisati samo $\langle V, W \rangle$ umesto $g(V, W) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Neka je na dalje $\psi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ karta od M čiji je domen $\mathcal{U}$. Neka je $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada za vektorska polja $V =$

$\sum_{i=1}^n V^i \partial_i$ i $W = \sum_{i=1}^n W^i \partial_i$ imamo da je

$$g(V,W) = \langle V,W \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, V^i\, W^j.$$

Kako je g nedegenerisano preslikavanje, to na osnovu leme 3.4.1., str. 35, direktno imamo da je za svaku tačku $p \in \mathcal{U}$ matrica $[g_{ij}(p)]_{n\times n}$ invertibilna.

Inverznu matricu od $[g_{ij}(p)]_{n\times n}$ ćemo označavati sa $[g^{ij}(p)]_{n\times n}$ ili samo sa $[g^{ij}(p)]$. Na osnovu formule za inverznu matricu imamo da su na domenu $\mathcal{U}$ funkcije g^{ij} glatke. Takođe, matrica $[g_{ij}(p)]_{n\times n}$ je simetrična, odakle sledi da je i matrica $[g^{ij}(p)]$ simetrična. Vidimo, naravno, da se na $\mathcal{U}$, metrički tenzor g može napisati u obliku

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j.$$

Za svaku tačku $p \in \boldsymbol{R^n}$ postoji linearni izomorfizam iz $\boldsymbol{R^n}$ u $T_p(\boldsymbol{R^n})$ koji svako $v = \sum_{i=1}^n v^i\, e_i$ preslikava u tangentni vektor $v_p = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i|_p$. Otuda unutrašnji proizvod na $\boldsymbol{R^n}$ određuje metrički tenzor na $\boldsymbol{R^n}$ na sledeći način

$$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^n v^i\, w^i, \;\; p \in \boldsymbol{R^n}.$$

Sa $\boldsymbol{R^n}$ ćemo označavati ovako određenu Rimanovu mnogostrukost, koju ćemo zvati **Euklidski n-prostor**.

Neka je ν ceo broj takav da je $0 < \nu \leq n$. Menjajući znak ispred prvih ν članova gornje sume dobijamo metrički tenzor

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^i\, w^i + \sum_{i=\nu+1}^{n} v^i\, w^i, \; p \in M,$$

čiji je indeks ν. Ovaj metrički tenzor određuje semi-Rimanovu mnogostrukost na $\boldsymbol{R^n}$ koju ćemo zvati **semi-Euklidski prostor** i označavaćemo ga sa $\boldsymbol{R^n_\nu}$. Takođe, neka je nadalje

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{za} \quad 1 \leq i \leq \nu \\ 1, & \text{za} \quad \nu+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

Vidimo da se metrički tenzor na prostoru $\boldsymbol{R^n_\nu}$ može zapisati u obliku

$$g = \sum_{i=1}^n \epsilon_i\, du^i \otimes du^i.$$

Da bismo bolje shvatili geometrijski značaj indeksa ν biće nam neophodna sledeća definicija.

Definicija 4.1.4. *Tangentni vektor v na M je*

1. **prostorni** *ako je* $\langle v, v\rangle > 0$ *ili* $v = 0$,
2. **nulti** *ako je* $\langle v, v\rangle = 0$ *i* $v \neq 0$,
3. **vremenski** *ako je* $\langle v, v\rangle < 0$.

Skup svih nultih vektora u $T_p(M)$ *se naziva* **nulti konus u** $p \in M$. *Kategorija kojoj pripada proizvoljno zadat tangentni vektor se naziva kauzalni karakter.*

Neka je $q(v) = \langle v, v\rangle$, za svaki tangentni vektor v od M. Vidimo da je u svakoj tački $p \in M$ funkcija q asocirana kvadratna forma od skalarnog proizvoda g_p koja ujedno i određuje taj skalarni proizvod. Ako je V vektorsko polje na mnogostrukosti M i ako je $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, onda je $q(fV) = f^2\, q(V) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dakle, vidimo da q nije $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearna odakle sledi da nije tenzorsko polje na M. q se naziva **linijski element** na M i označava sa ds^2. U terminima karti je

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Norma $|v|$ tangentnog vektora v je definisana sa $|q(v)|^{1/2} = |\langle v, v\rangle|^{1/2}$. Jedinični vektor, ortogonalnost i ortonormiranost se definišu isto kao i za vektore u prethodnom poglavlju.

Razlog zbog kojeg smo sa ds^2 označili q leži u sledećoj priči. Jednostavnosti radi, pretpostavimo da je M Rimanova mnogostrukost. Neka su p i p' dve tačke koje su blizu jedna drugoj i čije su koordinate u nekoj karti redom $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ i $(x^1 + \Delta\, x^1, x^2 + \Delta\, x^2, \ldots, x^n + \Delta\, x^n)$. Za tangentni vektor $\Delta\, p = \sum_{i=1}^{n} \Delta x^i\, \partial_i|_p$ se smatra da služi za aproksimaciju tačke p'. Zato se kao aproksimacija kvadrata rastojanja $\Delta\, s$ između tačaka p i p' uzima vrednost

$$|\,\Delta p\,|^2 = \langle \Delta p, \Delta p\,\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\, \Delta x^i\, \Delta x^j.$$

Kako je $q = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i\, dx^j$, to su ove dve poslednje formule glavni motiv da se q označava sa ds^2.

Definicija 4.1.5. *Neka je $\phi : M \to N$ glatko preslikavanje između mnogostrukosti (generalno, a ne samo semi-Rimanovih). Ako $A \in \mathcal{T}^0_s(N)$, pri čemu je $s \geq 1$, onda neka je*

$$\phi^*(A)(v_1, \ldots, v_s) = A(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_s)),$$

pri čemu $v_1, \dots, v_s \in T_p(M)$*, dok* $p \in M$*. Tada se* $\phi^*(A)$ *naziva povlačenje (pullback) od* A *u nazad uz pomoć* ϕ*. Ako je* $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$*, onda je*

$$\phi^*(f) = f \circ \phi\,.$$

Neka je, na primer, P podmnogostrukost Rimanove mnogostrukosti M. Smatramo da je za svaku tačku $p \in P$ tangentni prostor $T_p(P)$ potprostor tangentnog prostora $T_p(M)$. Mi generišemo Rimanov metrički tenzor g_p na P tako što primenimo metrički tenzor g od M na odgrovarajuće parove tangentnih vektora od P. Formalno, g_p je pullback $j^*(g)$.

Definicija 4.1.6. *Neka je* P *podmnogostrukost semi-Rimanove mnogostrukosti* M*. Ako je pullback* $j^*(g)$ *metrički tenzor na* P*, tada se podmnogostrukost* P *zajedno sa* $j^*(g)$ *naziva semi-Rimanova podmnogostrukost od* M*.*

Razmotimo sada proizvod semi-Rimanovih mnogostrukosti.

Lema 4.1.1. *Neka su* M *i* N *semi-Rimanove mnogostrukosti sa metričkim tenzorima* g_M *i* g_N*. Ako su* π *i* σ *projekcije od* $M \times N$ *redom na* M *i* N*, onda neka je*

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N).$$

Preslikavanje g *je metrički tenzor na* $M \times N$ *i ono zajedno sa* $M \times N$ *određuje semi-Rimanovu mnogostrukost koja se naziva* **proizvod semi-Rimanovih mnogostrukosti** M **i** N*.*

Dokaz: g je tenzorsko polje (videti [2, str. 68]). Koristeći se pullback notacijom imamo sledeće: za date vektore $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$ imamo da je

$$g(v,w) = g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), d\sigma(w)).$$

Vidimo da je g simetrična. Dokažimo još da je g nedegenerisana.

Neka je $g(v,w) = 0$, za sve $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Tada za sve $w \in T_{(p,q)}M$ važi $g_M(d\pi(v), d\pi(w)) = 0$ s obzirom da je $d\sigma(w) = 0$. Ali kako $d\pi(w)$ popunjava $T_p(M)$ (jer je $\pi|M \times q$ difeomorfizam iz $M \times q$ u M) to iz nedegenerisanosti od g_M sledi da je $d\pi(v) = 0$. Analogno zaključujemo da je $d\sigma(v) = 0$, a odatle na osnovu leme 2.9.2., str. 20, zaključujemo da je $v = 0$.

Od ortonormiranih baza od $T_p(M)$ i $T_q(N)$ se dobija ortonormirana baza od $T_{(p,q)}(M \times N)$. Pri tome vidimo da je indeks od g ima konstantnu vrednost koja je jednaka $ind\, M + ind\, N$. ■

Prethodna lema se može uopštiti na bilo koji konačan proizvod semi-Rimanovih mnogostrukosti.

Osnovno u celoj matematici je skup sa nekom strukturom. Za svaki tip strukture postoji pojam izomorfizma tj. bijektivnog preslikavanja koje u određenom smislu očuvava strukturu. Svaki pojedinačni tip strukture definiše jednu granu matematike: studiju onih pojmova koji ostaju očuvani pod dejstvom izomorfizma. Na primer, grupa je skup koji je snabdeven sa strukturom grupovne operacije.

U slučaju semi-Rimanove geometrije postoji hijerarhija struktura:

Grana matematike	Skup sa strukturom	Struktura	Izomorfizam
Semi-Rimanova geometrija	Semi-Rimanova mnogostrukost	Metrički tenzor, atlas, topologija	Izometrija
Teorija mnogostrukosti	Mnogostrukost	Atlas, topologija	Difeomorfizam
Topologija	Topološki prostor	Topologija	Homeomorfizam
Teorija skupova	Skup	(Ništa)	Bijekcija

4.2 Levi-Čivita konekcija[1]

Neka su V i W glatka vektorska polja na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M. Sledeće što želimo da uradimo je da definišemo novo vektorsko polje $D_V W$ na mnogostrukosti M čija vrednost u svakoj tački $p \in M$ predstavlja brzinu promene vektorskog polja W u smeru V_p. Za početak posmatrajmo $\boldsymbol{R}^n_\nu$.

Definicija 4.2.1. *Neka su* $u_1, u_2, \ldots, u_n : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *projekcije od* $\boldsymbol{R}^n_\nu$*. Ako su* V *i* $W = \sum_{i=1}^n W^i \, \partial_i$ *vektorska polja na* $\boldsymbol{R}^n_\nu$*, tada se vektorsko polje*

$$D_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W^i) \, \partial_i$$

naziva **prirodni kovarijantan izvod od W s obzirom na V.**

Na osnovu ove definicije ne možemo tako jednostavno definisati $D_V W$ na proizvoljnoj semi-Rimanovoj mnogostrukosti M. Treba da uvedemo još novih pojmova kako bi smo bili u mogućnosti da ostvarimo ovo uopštenje.

[1] Umesto termina Levi-Čivita konekcija često se koristi i termin Levi-Čivita povezanost (npr. videti [7]).

Definicija 4.2.2. **Konekcija** *D na glatkoj mnogostrukosti M je funkcija $D : \mathcal{T}^1_0(M) \times \mathcal{T}^1_0(M) \to \mathcal{T}^1_0(M)$ sa osobinama*

(D1) *$D_V W$ je $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearno po V.*

(D2) *$D_V W$ je $\boldsymbol{R}$-linearno po W.*

(D3) *$D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$, za sve $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

$D_V W$ se naziva **kovarijantan izvod od W s obzirom na V za konekciju** *D.*

Vidimo da prvi uslov kaže da je $D_V W$ tenzor po V. Otuda za svaki tangentni vektor $v \in T_p(M)$ postoji jedinstveni tangentni vektor $D_v W \in T_p(M)$ koji je definisan sa $D_v W = (D_V W)_p$, pri čemu je V bilo koje glatko vektorsko polje za koje je $V_p = v$ (videti teoremu 3.1.1., str. 29). Sa druge strane treći uslov kaže da $D_V W$ nije tenzor po W.

Propozicija 4.2.1. *Neka je M semi-Rimanova mnogostrukost. Neka je dato vektorsko polje $V \in \mathcal{T}^1_0(M)$ i neka je V^* jedan forma na M definisana sa*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle, \text{ za sve } \; X \in \mathcal{T}^1_0(M).$$

Tada je funkcija $V \to V^*$ $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearni izomorfizam iz $\mathcal{T}^1_0(M)$ u $\mathcal{T}^0_1(M)$.

Dokaz: V^* je $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearno, pa odatle sledi da $V^* \in \mathcal{T}^0_1(M)$. Preslikavanje $V \to V^*$ je takođe $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearno. Ostaje još da se dokaže da je poslednje preslikavanje bijekcija.

Dokažimo prvo da ako je $\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle$, za sve $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$, onda je $V = W$.

Neka je $U = V - W$. Neka je $\langle U_p, X_p\rangle = 0$, za sve $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ i sve $p \in M$. Kako se svaki elemenat od $T_p(M)$ može produžiti u glatko vektorsko polje uz pomoć particje jedinice, to je otuda $U_p = 0$ zbog nedegenerisanosti metričkog tenzora.

Dokažimo da za svaku jedan formu $\theta \in \mathcal{T}^0_1(M)$ postoji jedinstveno vektorsko polje $V \in \mathcal{T}^1_0(M)$ takvo da je $\theta(X) = \langle V, X\rangle$, za sve $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$.

Na osnovu prethodno dokazanog imamo jedinstvenost takvog vektorskog polja. Za egzistenciju vektorskog polja je dovoljno dokazati egzistenciju takvog vektorskog polja na domenu $\mathcal{U}$ proizvoljne karte semi-Rimanove mnogostrukosti M (svi ovi lokalni V-ovi su međusobno poklapaju na presecima domena karti na osnovu prethodno dokazanog). Ako je $\theta = \sum_{i=1}^n \theta^i \, dx^i$ na

$\mathcal{U}$, onda neka je $V = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\theta^i\partial_j$. Kako su $[g_{ij}]_{n\times n}$ i $[g^{ij}]_{n\times n}$ međusobno inverzne matrice to je

$$\langle V, \partial_k\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\theta^i \langle\partial_j, \partial_k\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \theta^i g^{ij} g_{jk} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta^i \delta_{ik} = \theta^k = \theta(\partial_k).$$

Iz $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearnosti sledi da je $\langle V, X\rangle = \theta(X)$ za sve X na $\mathcal{U}$. ■

Ova propozicija nam dozvoljava da u semi-Rimanovoj geometriji slobodno transformišemo glatka vektorska polja u glatko jedan forme i obrnuto. Korespondirajući parovi $V \leftrightarrow \theta$ sadrže iste informacije, pa zato za njih kažemo da su **metrički ekvivalentni**.

Teorema 4.2.1. *Na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M postoji jedinstvena konekcija D tako da je*

(D4) $[V, W] = D_V W - D_W V$ *i*

(D5) $X\langle V, W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$ *(Kako $\langle V, W\rangle \in \mathcal{C}^\infty(M)$, to je odatle $X\langle V, W\rangle = X(\langle V, W\rangle)$.),*

za sve $X, V, W \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Konekcija D se naziva **Levi-Čivita konekcija na** *M i jedinstveno je određena uz pomoć Koszul-ove formule*

$$2\langle D_V W, X\rangle = V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle -$$

$$-\langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle.$$

Dokaz: Neka je D konekcija na M koja zadovoljava uslove (D4) i (D5). Ako na desnoj strani Koszul-ove formule primenimo (D5) na prva tri člana i (D4) na preostala tri člana, onda ćemo dobiti članove koji će se ispotirati u parovima, ostavljajući pri tome samo $2\langle D_V W, X\rangle$. Otuda D zadovoljava Koszul-ovu formulu, pa je na osnovu dokaza prethodne propozicije (deo o jedinstvenosti vektorskog polja V) konekcija D (za koju važe uslovi (D4) i (D5)) jedinstvena.

Da bi smo dokazali egzistenciju takve konekcije na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M definišimo prvo $F(V, W, X)$ tako da bude desna strana Koszul-ove formule. Za fiksirane $V, W \in \mathcal{T}_0^1(M)$ direktan račun pokazuje da je funkcija $X \to F(V, W, X)$ $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearna, a otuda i jedan forma. Na osnovu prethodne propozicije postoji jedinstveno vektorsko polje, koje ćemo označiti sa $D_V W$ takvo da je $2\langle D_V W, X\rangle = F(V, W, X)$, za sve $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$.

Za ovako definisano D važi Koszul-ova formula. Ostaje još da se dokaže da ovako definisano D zadovoljava uslove (D1)-(D5).

Dokažimo da za D važi osobina (D3). Za proizvoljno $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ važi

$$2\langle D_V(fW), X\rangle = V\langle fW, X\rangle + fW\langle X, V\rangle - X\langle V, fW\rangle -$$

$$-\langle V, [fW, X]\rangle + \langle fW, [X, V]\rangle + \langle X, [V, fW]\rangle.$$

Funkcija $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se može izvući ispred $\langle\,,\rangle$, a za operaciju zagrada imamo npr. da je $[fW, X] = -X(f)W + f[W, X]$. Otuda izraz od šest članova na desnoj strani posmatrane jednakosti postaje

$$Vf\langle W, X\rangle + Vf\langle X, W\rangle + Xf\langle V, W\rangle - Xf\langle V, W\rangle +$$

$$+fF(V, W, X) = 2\langle Vf\,W + fD_V W, X\rangle.$$

Na osnovu dokaza prethodne propozicije sledi da je $D_V fW = Vf\,W + fD_V W$.

Da bi smo dokazali (D4) trebalo bi prvo uočiti da važi

$$2\langle D_V W - D_W V, X\rangle = F(V, W, X) - F(W, V, X), \text{ za sve } V, W, X \in \mathcal{T}_0^1(M).$$

Na osnovu Koszul-ove formule desna strana se svodi na

$$\langle X, [V, W]\rangle - \langle X, [W, V]\rangle = 2\langle [V, W], X\rangle.$$

Opet na osnovu prethodne propozicije vidimo da za D važi uslov (D4). Preostali uslovi se slično dokazuju. ■

Definicija 4.2.3. *Neka je $\psi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ neka karta na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M čiji je domen $\mathcal{U}$.* **Kristofelov simbol** *za kartu ψ je realna funkcija Γ_{ij}^k na $\mathcal{U}$ takva da je*

$$D_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k\, \partial_k\,,$$

za sve $i, j \in \{1, 2\ldots, n\}$.

Kako je $[\partial_i, \partial_j] = 0$ (videti [2, str. 47]), za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to na osnovu osobine (D4) sledi da je $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Iz poslednje jednakosti vidimo da važi $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, za sve $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Propozicija 4.2.2. *Za kartu $\psi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ na $\mathcal{U}$ važi*

$$D_{\partial_i}(\sum_{j=1}^{n} W^j\partial_j) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k W^j \right\}\partial_k,$$

pri čemu su Kristofelovi simboli dati sa

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} g^{km}\left\{\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right\}.$$

Dokaz: Prvi deo ove propozicije je direktna posledica osobine (D3). Dokažimo drugi deo ove propozicije.

Ubacimo $V = \partial_i$, $W = \partial_j$ i $X = \partial_m$ u Koszul-ovu formulu, redom za sve $i, j, m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Zagrade tada postaju nule, pa otuda dobijamo da je

$$2\langle D_{\partial_i}(\partial_j), \partial_m\rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{im}) - \frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ij}).$$

Sa druge strane, na osnovu definicije Kristofelovog simbola imamo da je

$$2\langle D_{\partial_i}(\partial_j), \partial_m\rangle = 2\sum_{a=1}^{n} \Gamma_{ij}^a \, g_{am}.$$

Pomnožimo poslednje dve jednačine sa g^{mk}. Ako saberemo jednačine po m, onda dobijamo da važi drugi deo propozicije. ■

Koristeći osobinu (D1) i formulu iz prvog dela ove propozicije možemo predstaviti $D_V W$ u bilo kojoj karti semi-Rimanove mnogostrukosti. Formula iz drugog dela propozicije pokazuje kako metrički tenzori određuju Levi-Čivita konekciju.

Lema 4.2.1. *Prirodna konekcija D, koja je definisana na semi-Euklidskom prostoru $\boldsymbol{R}^n_\nu$, je Levi-Čivita konekcija za sve $\nu \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. S obzirom na projekcije $u^1, \dots, u^n : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ od $\boldsymbol{R}^n_\nu$ imamo da je*

1. $g_{ij} = \delta_{ij}\,\epsilon_j$, *gde je*

$$\epsilon_j = \begin{cases} -1, & za \quad 1 \le j \le \nu \\ 1, & za \quad \nu + 1 \le j \le n \end{cases}, \quad za\ sve\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

2. $\Gamma_{ij}^k = 0$, *za sve* $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dokaz: (1) sledi na osnovu same definicije metričkog tenzora na $\boldsymbol{R}^n_\nu$. Moramo dokazati da D zadovoljava osobine (D1)-(D5) kako bi D bila Levi-Čivita konekcija na $\boldsymbol{R}^n_\nu$. Dokažimo, na primer, da važi osobina (D5).

Kako je $\langle V, W\rangle = \sum_{i=1}^n \epsilon^i V^i W^i$, to je

$$X\langle V, W\rangle = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i X(V^i) W^i + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i V^i X(W^i) =$$

$$= \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle.$$

(2) sledi iz prethodne propozicije, s obzirom da su g_{ij}-evi konstantne funkcije na $\boldsymbol{R}^n_\nu$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. ■

Vektorsko polje V se naziva **paralelno** ako su za sve $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$ kovarijantni izvodi $D_X V$ jednaki nuli. Vidimo da anuliranje Kristofelovih simbola u prethodnoj lemi znači da su prirodna koordinatna vektorska polja na $\boldsymbol{R}^n_\nu$ paralelna.

Kovarijantan izvod D_V može biti proširen tako da deluje i na proizvoljno tenzorsko polje.

Definicija 4.2.4. *Neka je V vektorsko polje na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M.* **Levi-Čivita kovarijantan izvod** *D_V je jedinstveni tenzorski izvod na M takav da je*

$$D_V f = Vf, \text{ za sve } \ f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

i za sve $W \in \mathcal{T}^1_0(M)$ vektorsko polje $D_V W$ je kovarijantan izvod od W s obzirom na V za Levi-Čivita konekciju D.

Ako je $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, onda je $D_V A$ $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearno po $V \in \mathcal{T}^1_0(M)$. Za ovo tvrđenje je dovoljno dokazati da se tenzorski izvodi D_{fV+gW} i $fD_V + gD_W$ poklapaju na $\mathcal{C}^\infty(M)$ i $\mathcal{T}^1_0(M)$. D_{fV+gW} i $fD_V + gD_W$ se poklapaju na $\mathcal{C}^\infty(M)$ po definiciji, a zbog osobine (D1) se poklapaju i na $\mathcal{T}^1_0(M)$. Ova napomena je razlog zbog kojeg je sledeća definicija saglasna sa celom prethodnom teorijom.

Definicija 4.2.5. **Kovarijantni diferencijal** *$\binom{r}{s}$ tenzora A na M je $\binom{r}{s+1}$ tenzor DA takav da je*

$$(DA)(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)\,,$$

za sve $V, X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{T}^1_0(M)$ i $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \Omega^1(M)$. Ako je $r = s = 0$, onda je **kovarijantan diferencijal funkcije** *$f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definisan kao diferencijal $df \in \Omega^1(M)$.*

Kako je $(Df)(V) = D_V f = Vf = df(V)$, za sve $V \in \mathcal{T}^1_0(M)$, to je poslednji deo ove definicije saglasan sa prvim delom ove definicije.

Tenzorsko polje A se naziva **paralelno** ako je njegov kovarijantni diferencijal nula tj. $D_V A = 0$, za sve $V \in \mathcal{T}^1_0(M)$. Na primer, može se dokazati da je osobina (D5) ekvivalentna sa činjenicom da je metrički tenzor g paralelan.

Ako je $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, onda su komponente od DA s obzirom na neku kartu $\psi = (x^1, \dots, x^n)$ označene sa $A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s;\,k}$. Za $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\nu}}$ znamo da su koordinatna vektorska polja paralelna. Otuda sledi da su i diferencijali $du^1, \dots, du^n$ paralelni. Može se dokazati da je $A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s;\,k} = (\partial/\partial u^k)A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ u $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\nu}}$.

Zaista, na osnovu propozicije 3.3.2., str. 31, imamo da je

$$A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s;\,k} = D_{\partial_k}A(du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) =$$

$$= D_{\partial_k}(A(du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})) - A(D_{\partial_k}du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) -$$

$$- \dots - A(du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, D_{\partial_k}\partial_{j_s}) =$$

$$= D_{\partial_k}(A(du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})) = (\partial/\partial u^k)A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$$

4.3 Indukovani kovarijantni izvod

Najjednostavniji slučaj vektorskog polja na glatkom preslikavanju između mnogostrukosti je vektorsko polje Z na krivoj $\alpha : I \to M$. Z glatko pridružuje svakoj tački $t \in I$ tangentni vektor od M u $\alpha(t)$. Na primer, brzina $\alpha\,'$ je vektorsko polje na α, kao i restrikcija V_α bilo kojeg $V \in \mathcal{T}^1_0(M)$ na $\alpha(I)$. Skup $\mathcal{T}^1_0(\alpha)$ svih glatkih vektorskih polja na α zajedno sa operacijama sabiranja i množenja elementom iz $\mathcal{C}^\infty(I)$ čini modul nad $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Propozicija 4.3.1. *Neka je $\alpha : I \to M$ kriva na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M. Postoji jedinstvena funkcija $Z \to Z' = DZ/dt$ iz $\mathcal{T}^1_0(\alpha)$ u $\mathcal{T}^1_0(\alpha)$, koja se naziva* **indukovani kovarijantni izvod**, *takva da je*

1. $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$, *za sve* $a, b \in \boldsymbol{R}$,
2. $(hZ)' = (dh/dt)Z + hZ\,'$, *za sve* $h \in \mathcal{C}^\infty(I)$,
3. $(V_\alpha)'(t) = D_{\alpha\,'(t)}(V)$, *za sve* $t \in I$ *i sve* $V \in \mathcal{T}^1_0(M)$.

   Šta više, važi sledeće

4. $(d/dt)\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$.

Dokaz: *JEDINSTVENOST.* Pretpostavimo da postoji indukovani kovarijantni izvod za koji važe prve tri osobine. Možemo pretpostaviti da α leži u domenu karte $\psi = (x^1, \dots, x^n)$. Ako $Z \in \mathcal{T}^1_0(\alpha)$, onda u tački $\alpha(t)$ imamo da je

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} Z(t)x^i\,\partial_i = \sum_{i=1}^{n}(Zx^i)(t)\partial_i.$$

Označimo komponetne funkcije $Zx^1, \dots, Zx^n : I \to \boldsymbol{R}$ kao komponente Z^1, $\dots, Z^n$ od Z u karti ψ. Na osnovu osobina (1) i (2) je

$$Z' = \sum_{i=1}^{n} \frac{dZ^i}{dt} \partial_i|_\alpha + \sum_{i=1}^{n} Z^i (\partial_i|_\alpha)'.$$

Na osnovu osobine (3) je $(\partial_i|_\alpha)' = D_{\alpha'}(\partial_i)$ na domenu od α, pa je otuda

$$Z' = \sum_{i=1}^{n} \frac{dZ^i}{dt} \partial_i + \sum_{i=1}^{n} Z^i D_{\alpha'}(\partial_i).$$

Vidimo da je Z' kompletno određena uz pomoć Levi-Čivita konekcije D.

Inače, neka se proizvoljno odabrani $Z_1, Z_2 \in \mathcal{T}_0^1(\alpha)$ poklapaju na intervalu (otvorenom) I_1 takvom da je $\alpha(I_1)$ sadržan u domenu neke karte. Neka je $t_1 \in I_1$ proizvoljno odabrana tačka. Neka je h glatka funkcija na skupu I čiji je nosač sadržan u I_1 i koja je jednaka 1 na nekoj okolini od t_1. Tada je

$$0 = (h(Z_1 - Z_2))'(t_1) = h'(t_1)(Z_1 - Z_2)(t_1) + h(t_1)(Z_1 - Z_2)'(t_1) =$$

$$= (Z_1 - Z_2)'(t_1) = Z_1'(t_1) - Z_2'(t_1),$$

pa je $Z_1'(t_1) = Z_2'(t_1)$. Kako je t_1 proizvoljna tačka iz intervala I_1, to je $Z_1' = Z_2'$ na I_1. Ako pomoću particiju jedinice svedemo proizvoljno $Z \in \mathcal{T}_0^1(\alpha)$ tako da Z bude različito od 0 samo u nekoj karti, onda na osnovu svega prethodnog vidimo da Z' lokalno zavisi samo od vrednosti Z.

EGZISTENCIJA. Na nekom podintervalu J od I takvom da $\alpha(J)$ leži u domenu neke karte, definišimo Z' uz pomoć gornje formule. Direktnim računom se dokazuje da za takvo Z' važe sve četiri osobine. Dokažimo da ovako definisano Z' ne zavisi od izbora karti na preseku njihovih domena.

Neka je J_1 otvoren podinterval intervala I tako da je $\alpha(J_1)$ podskup domena karti $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ i $\eta = (y^1, \dots, y^n)$. Neka $t \in J_1$ i neka su $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ i $(\partial_1^1, \dots, \partial_n^1)$ baze od tnagentnog prostora $T_{\alpha(t)}(M)$ redom s obzirom na karte ξ i η. Tada je $\partial_i = \sum_{j=1}^n \partial_i(y^j)\partial_j^1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}\partial_j^1$ za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Takođe, sa jedne strane imamo da je $Z(t) = \sum_{j=1}^n Z(t)x^j\partial_j$, a sa druge strane imamo da je $Z(t) = \sum_{i=1}^n Z(t)y^i\,\partial_i^1 =$ $= \sum_{i=1}^n Z(t)y^i \sum_{j=1}^n \partial_i^1(x^j)\partial_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n Z(t)y^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}|_{\alpha(t)})\partial_j$, pa je $Z(t)x^j = \sum_{i=1}^n Z(t)y^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}|_{\alpha(t)}$, za sve $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Otuda imamo da je

$$Z'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{du}|_t (Zx^i)\,\partial_i|_{\alpha(t)} + \sum_{i=1}^n Z(t)x^i D_{\alpha'(t)}(\partial_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^n (\frac{d}{du}|_t \sum_{j=1}^n Zy^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_\alpha)(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}\partial_k^1) +$$
$$+ \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n Z(t)y^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}) D_{\alpha'(t)}(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\partial_k^1) =$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{d}{du}|_t (Zy^j) \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)} \frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}\partial_k^1 +$$

$+\sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j \frac{d}{du}|_t(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_\alpha)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}\partial_k^1 + \sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\alpha'(t)(\frac{\partial y^k}{\partial x^i})\partial_k^1 +$
$\sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)} D_{\alpha'(t)}(\partial_k^1)$.

Za prvu sumu imamo da je
$\sum_{i,j,k=1}^n \frac{d}{du}|_t(Zy^j)\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}\partial_k^1 = \sum_{j,k=1}^n \frac{d}{du}|_t(Zy^j)\sum_{i=1}^n(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)})\partial_k^1 =$
$\sum_{j,k=1}^n \frac{d}{du}|_t(Zy^j)\delta_{jk}|_{\alpha(t)}\partial_k^1 = \sum_{j=1}^n \frac{d}{du}|_t(Zy^j)\partial_j^1$. Za četvru sumu imamo da je $\sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}D_{\alpha'}(\partial_k^1) = \sum_{j,k=1}^n Z(t)y^j\,\delta_{jk}|_{\alpha(t)}D_{\alpha'}(\partial_k^1) =$
$= \sum_{j=1}^n Z(t)y^j D_{\alpha'}(\partial_j^1)$.

Za zbir druge i treće sume imamo da je
$\sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j \frac{d}{du}|_t(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_\alpha)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}\partial_k^1 + \sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\alpha'(t)(\frac{\partial y^k}{\partial x^i})\partial_k^1 =$
$= \sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j\,(\frac{d}{du}|_t(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_\alpha)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)} + \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\alpha'(t)(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}))\partial_k^1 =$
$= \sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j\,(\frac{d}{du}|_t(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_\alpha)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_{\alpha(t)} + \frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_{\alpha(t)}\frac{d}{du}|_t(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_\alpha))\partial_k^1 =$
$= \sum_{i,j,k=1}^n Z(t)y^j\,\frac{d}{du}|_t(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}|_\alpha\frac{\partial y^k}{\partial x^i}|_\alpha)\partial_k^1 = \sum_{j,k=1}^n Z(t)y^j\,\frac{d}{du}|_t(\delta_{jk}|_\alpha)\partial_k^1 = 0.$

Dakle, zbir sve četiri sume je jednak sa

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{du}\bigg|_t (Zy^j)\partial_j^1 + \sum_{j=1}^n Zy^j D_{\alpha'(t)}(\partial_j^1),$$

što je i ujedno $Z'(t)$ u karti η.

Zbog jedinstvenosti svi ovi lokalno definisani Z'-ovi konstituišu jedinstveno vektorsko polje iz $\mathcal{T}_0^1(\alpha)$. ■

U specijalnom slučaju kada je $Z = \alpha'$, indukovani kovarijantni izvod $Z' = \alpha''$ se naziva **ubrzanje krive** α. Za vektorsko polje Z na α je uobičajeno da se piše $Z' = D_{\alpha'}(Z)$, a otuda i $\alpha'' = D_{\alpha'}(\alpha')$.

Uvodeći Kristofelove simbole u gornju koordinatnu formulu, imamo da je

$$Z' = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right\} \partial_k.$$

Ako je $Z' = 0$, onda se vektorsko polje Z naziva **paralelno**. Vidimo da je jednačina $Z' = 0$ ekvivalentna sa sistemom običnih diferencijalnih jednačina.

Propozicija 4.3.2. *Za krivu $\alpha : I \to M$ neka $a \in I$ i $z \in T_{\alpha(a)}(M)$. Tada postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje Z na α takvo da je $Z(a) = z$.* ■

Ova propozicija se može dokazati uz pomoć fundamentalne teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja sistema običnih diferencijalnih jednačina.

S obzirom na notaciju iz ove propozicije, ako $b \in I$ i $\alpha(b) = q$, onda se funkcija

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \to T_q(M),$$

koja šalje z u $Z(b)$, naziva **paralelna translacija duž** α **iz** $p = \alpha(a)$ **u** $q = \alpha(b)$.

Lema 4.3.1. *Paralelna translacija je linearna izometrija.*

Dokaz: S obzirom na gornju notaciju, neka su $v, w \in T_p(M)$ vektori kojima odgovaraju redom paralelna vektorska polja V i W. Kako je $V + W$ takođe paralelno vektorsko polje, to je

$$P(v + w) = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P(v) + P(w).$$

Slično se dokazuje da važi $P(cv) = cP(v)$. Otuda je P linearno preslikavanje.

Ako je $P(v) = 0$, onda zbog jedinstvenosti iz prethodne propozicije imamo da V jedino može biti nula vektorsko polje na α. Odatle je $v = V(a) = 0$. Dakle, P je injektivno preslikavanje. Kako tangentni prostori na M imaju istu dimenziju, to je P linearni izomorfizam.

Konačno, za paralelna vektorska polja V i W važi

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0.$$

Otuda je $\langle V, W\rangle$ konstatno, pa odatle imamo da je

$$\langle P(v), P(w)\rangle = \langle V(b), W(b)\rangle = \langle V(a), W(a)\rangle = \langle v, w\rangle,$$

za sve $v, w \in T_p(M)$. ■

Generalno, paralelna translacija iz p u q zavisi od svake pojedinačne krive koja povezuje p i q. Na $\boldsymbol{R}^n_\nu$ koordinatna vektorska polja su paralelna. Zato su paralelne i restrikcije koordinatnih vektorskih polja na bilo koju krivu. Na osnovu prethodne propozicije i definicije paralelne translacije, bazni koordinatni vektori tangentnog prostora $T_p(\boldsymbol{R}^n_\nu)$ se paralelnom translacijom, duž bilo koje krive, preslikavaju u odgovarajuće bazne koordinatne vektore tangentnog prostora $T_q(\boldsymbol{R}^n_\nu)$. Otuda, na osnovu prethodne leme, paralelna translacija iz p u q duž bilo koje krive je u stvari samo kanonički izomorfizam $v_p \to v_q$.

4.4 Geodezijske linije

Generalizujmo sada Euklidov pojam prave linije.

Definicija 4.4.1. **Geodezijska linija** *na semi-Rimanovoj mnogostrukosti* M *je kriva* $\gamma : I \to M$ *čije vektorsko polje* $\gamma\,'$ *je paralelno.*

Ekvivalentno, geodezijske linije su krive čije ubrzanje je nula tj. $\gamma\,'' = 0$.

Posledica 4.4.1. *Neka je* $(\psi = (x^1, x^2, \dots, x^n), \mathcal{U})$ *karta semi-Rimanove mnogostrukosti* M. *Kriva* γ *na* $\mathcal{U}$ *je geodezijska linija ako i samo ako za koordinatne funkcije* $x^1 \circ \gamma, \dots, x^n \circ \gamma$ *važi*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0\,,$$

za sve $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. ■

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti za obične diferencijalne jednačine daje sledeći lokalni rezultat.

Lema 4.4.1. *Ako je* $v \in T_p(M)$, *onda postoji interval* I *oko* 0 *i jedinstvena geodezijska linija* $\gamma : I \to M$ *takva da je* $\gamma\,'(0) = v$. ■

Ako je $\gamma(0) = p$, onda kažemo da je γ **geodezijska linija koja počinje u** p **sa početnom brzinom** v.

Lema 4.4.2. *Neka su* $\alpha, \beta : I \to M$ *geodezijska linija. Ako postoji broj* $a \in I$ *tako da je* $\alpha\,'(a) = \beta\,'(a)$, *onda je* $\alpha = \beta$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno tj. da postoji broj $t_0 \in I$ tako da je $\alpha(t_0) \neq \beta(t_0)$. Neka je $t_0 > a$ (za $t_0 < a$ dokaz ide analogno). Otuda skup $\{t \in I : t > a \text{ i } \alpha(t) \neq \beta(t)\}$ ima najveće donje ograničenje b, za koje važi $b \geq a$. Tvrdimo da je $\alpha\,'(b) = \beta\,'(b)$.

Tvrđenje je tačno ako je $a = b$. Ako je $b > a$, onda se α i β poklapaju na intervalu (a, b). Neka je $\psi = (x^1, \dots, x^n)$ karta od M oko $\alpha(b)$. Neka je I_1 otvoreni podinterval od intervala I koji sadrži b i koji je takav da su $\alpha(I_1)$ i $\beta(I_1)$ sadžan u domenu karte ψ. Za svako $t \in I_1$ imamo da je $\alpha\,'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(t)\, \partial_i|_{\alpha(t)}$ i $\beta'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \beta)}{du}(t)\, \partial_i|_{\beta(t)}$. Funkcije

$t \to \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt}$ i $t \to \frac{d(x^i \circ \beta)}{dt}$ su glatke (a time i neprekidne) na I_1 za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Otuda imamo da je

$$\alpha'(b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(b)\, \partial_i|_{\alpha(b)} = \sum_{i=1}^{n} (\lim_{t \to b-0} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(t))\, \partial_i|_{\alpha(b)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lim_{t \to b-0} \frac{d(x^i \circ \beta)}{du}(t))\, \partial_i|_{\beta(b)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \beta)}{du}(b)\, \partial_i|_{\beta(b)} = \beta'(b)$$

Kako su $t \to \alpha(t+b)$ i $t \to \beta(t+b)$ geodezijske linije, to na osnovu prethodne leme imamo da je $\alpha = \beta$ na nekom intervalu oko b. Ali ovo je u suprotnosti sa definicijom od b. ■

Propozicija 4.4.1. *Za dati tangentni vektor $v \in T_p(M)$ postoji jedinstvena geodezijska linija γ_v u M za koju važi*

1. *Početna brzina od γ_v je v tj. ${\gamma_v}'(0) = v$.*
2. *Domen I_v od γ_v je najveći mogući. Otuda, ako je $\alpha : J \to M$ geodezijska linija koja počinje u p sa inicijalènim brzinom v, onda je $J \subset I$ i $\alpha = \gamma_v | J$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{G}$ kolekcija svih geodezijskih linija $\gamma : I_\gamma \to M$ koje počinju u p sa inicijalnom brzinom v. Na osnovu prethodnih lema vidimo da postoji bar jedna geodezijska linija. Prethodna lema pokazuje da se geodezijske linije α i β iz $\mathcal{G}$ poklapaju na $I_\alpha \cap I_\beta$. Otuda kolekcija $\mathcal{G}$ definiše jedinstvenu krivu γ_v na intervalu $I = \bigcup I_\gamma$. Očigledno γ_v ima osobine navedene u propoziciji. ■

Zbog (2) iz prethodne propozicije kažemo da je γ_v **maksimalna**. Semi-Rimanova mnogostrukost M za koju je svaka maksimalna geodezijska linija definisana na čitavoj realnoj liniji se naziva **kompletna**.

Primer: Geodezijske linije semi-Euklidskog prostora. Za i-te projekcije Kristofelovi simboli su 0 (lema 4.2.1., str. 47), pa su na osnovu posledice 4.4.1., str. 53, geodezijske jednačine date sa

$$\frac{d^2(u^i \circ \gamma)}{dt^2} = 0 \ \ (1 \leq i \leq n).$$

Otuda je $u^i(\gamma(t)) = p^i + tv^i$, za sve t, pri čemu su p^i i v^i proizvoljne konstante. U vektorskoj notaciji je $\gamma(t) = p + tv$. Otuda su geodeze u $\boldsymbol{R}^n_\nu$ prave linije. ■

Vektorsko polje brzine od svake geodezijske linije je paralelno. Svaka konstantna kriva na M (funkcija $\alpha : I \to M$ takva da je $\alpha = const$) je geodezijska linija. Ako za neko t važi $\gamma'(t) \neq 0$, onda je γ' različita od nule na celom svom domenu. Odatle vidimo da geodezijske linije ne mogu da uspore tako da se zaustave.

Definicija 4.4.2. *Neka je M semi-Rimanova mnogostrukost. Kriva $\alpha : I \to M$ se naziva* **prostorna** *ako su svi brzinski vektori $\alpha'(s)$ prostorni. Kriva $\alpha : I \to M$ se naziva* **nulta** *ako su svi brzinski vektori $\alpha'(s)$ nulti. Kriva $\alpha : I \to M$ se naziva* **vremenska** *ako su svi brzinski vektori $\alpha'(s)$ vremenski.*

Proizvoljna kriva semi-Rimanove mnogostrukosti ne mora imati ni jedan od ovih kauzalnih karaktera, ali geodezijske linije moraju jer je za svaku geodezijsku liniju γ brzinsko vektorsko polje γ' paralelno (paralelna translacija očuvava kauzalni karakter vektora). Dakle, sve geodezijske linije neke semi-Rimanove mnogostrukosti možemo podeliti u tri klase prema tome da li su prostorne, nulte ili vremenske.

Lema 4.4.3. *Neka je $\gamma : I \to M$ nekonstantna geodezijska linija. Reparametrizacija $\gamma \circ h : J \to M$ je geodezijska linija ako i samo ako je h oblika $h(t) = at + b$.*

Dokaz: Za bilo koju glatku krivu γ je $(\gamma \circ h)'(t) = (dh/du)(t)\,\gamma'(h(t))$. Može se dokazati da je

$$(\gamma \circ h)''(t) = \frac{d^2h}{dt^2}\,\gamma'(h(t)) + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \gamma''(h(t)).$$

Kako je γ geodezijska linija, to je $\gamma'' = 0$. Sa druge strane, kako je γ nekonstantna to γ' nikad nije nula. Otuda $\gamma \circ h$ je geodezijska linija ako i samo ako je $(\gamma \circ h)'' = 0$ tj. ako i samo ako je $d^2h/dt^2 = 0$ tj. ako i samo ako je $h(t) = at + b$ za neke konstante a i b. ∎

Uz pomoć gradiva iz parcijalnih diferencijalnih jednačina može se dokazati da važi sledeća lema.

Lema 4.4.4. *Neka je v tangentni vektor na M tj. element vektorskog raslojenja TM. Tada postoji okolina $\mathcal{N}$ od v u TM i interval I oko 0 tako da je $(w, s) \to \gamma_w(s)$ dobro definisana glatka funkcija iz $\mathcal{N} \times I$ u M.*

Propozicija 4.4.2. *Neka je M semi-Rimanova mnogostrukost. Postoji vektorsko polje G na TM tako da projekcija $\pi : TM \to M$ generiše jedan-jedan korespondenciju između (maksimalnih) integralnih krivih od G i (maksimalnih) geodezijskih linija na M.*

Dokaz: Ako $v \in TM$, onda neka je G_v inicijalna brzina krive $s \to \gamma_v{}'(s)$ u TM. Na osnovu prethodne leme zaključujemo da je G glatko vektorsko polje na TM.

a) *Ako je γ geodezijska linija od M, onda je γ' integralna kriva od G.*

Neka je $\alpha(s) = \gamma'(s)$, za sve s. Za proizvoljno fiksirano t, neka je $w = \gamma'(t)$ i $\beta(s) = \gamma_w{}'(s)$. Na osnovu leme 4.4.2., str. 53, zaključujemo da je $\gamma(t+s) = \gamma_w(s)$. Posmatranjem brzina na M dolazimo do zaključka da je $\alpha(t+s) = \gamma_w{}'(s) = \beta(s)$. Otuda, ako posmatramo brzine na TM, onda zaključujemo da je $\alpha'(t+s) = \beta'(s)$, za sve s. U suštini imamo da je

$$\alpha'(t) = \beta'(0) = G_w = G_{\alpha(t)}.$$

b) *Ako je α integralna kriva od G, onda je $\pi \circ \alpha$ geodezijska linija na M.*

Ako je $v = \alpha(0)$, onda na osnovu (a) zaključujemo da je $s \to \gamma_v{}'(s)$ integralna kriva od G. Kao i α ona počinje u v. Zbog jedinstvenosti integralnih krivih imamo da je $\pi \circ \alpha = \pi \circ \gamma_v{}' = \gamma_v$. Za proizvoljno t neka je δ integralna kriva og G koja počinje u $\alpha(t)$. Na osnovu prethodnog gradiva zaključujemo da je $\alpha(t+s) = \delta(s)$. Otuda je $\pi(\alpha(t+s)) = \pi(\delta(s)) = \gamma_{\delta(0)}(s)$, pa je $(\pi \circ \alpha)'(t) = \gamma_{\delta(0)}{}'(0) = \delta(0) = \alpha(t)$.

Dva identiteta $\pi \circ \gamma' = \gamma$ i $(\pi \circ \alpha)' = \alpha$ pokazuju da su preslikavanja $\alpha \to \pi \circ \alpha$ i $\gamma \to \gamma'$ inverzna, odakle vidimo i kraj dokaza ove propozicije. ■

U nastavku ćemo izložiti priču o eksponencijalnim preslikavanjima na semi-Rimanovim mnogostrukostima.

Definicija 4.4.3. *Neka $o \in M$. Neka je $\mathcal{D}_0$ skup svih vektora v iz $T_o(M)$ takvih da je maksimalna geodezijska linija γ_v definisane bar na $[0,1]$. Eksponencijalno preslikavanje od M u o je funkcija*

$$exp_o : \mathcal{D}_o \to M$$

takva da je $exp_o(v) = \gamma_v(1)$, za sve $v \in \mathcal{D}_o$.

Ako je semi-Rimanova mnogostrukost M kompletna, onda je $\mathcal{D}_o = T_o(M)$, za sve $o \in M$. Ako fiksiramo $v \in T_o(M)$ i $t \in \boldsymbol{R}$, onda geodezijska linija $s \to \gamma_v(ts)$ ima inicijalnu brzinu $t\gamma_v'(0) = tv$. Otuda je $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$, za sve t i s za koje su obe strane jednakosti dobro definisane. Dakle, možemo zaključiti da ako $v \in \mathcal{D}_o$, onda i $tv \in \mathcal{D}_o$, za sve $t \in [0,1]$. U suštini, ako $v \in \mathcal{D}_0$, onda je

$$exp_o(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Propozicija 4.4.3. *Za svaku tačku $o \in M$ postoji okolina $\mathcal{U}_1$ oko nule u $T_o(M)$ na kojoj je eksponencijalno preslikavanje exp_o difeomorfizam na neku okolinu $\mathcal{U}$ od o u M.*

Dokaz: Na osnovu leme 4.4.4., str. 55, sledi da je prelikavanje exp_o dobro definisano glatko preslikavanje na nekoj okolini od 0 u $T_o(M)$. Pokažimo da je diferencijalno preslikavnje

$$d\, exp_o : T_0(T_o(M)) \to T_o(M)$$

kanonički izomorfizam $v_0 \to v$. Po definiciji je $v_0 = \alpha'(0)$, gde je $\alpha(t) = tv$. Konstatovali smo da je $exp_o(tv) = \gamma_v(t)$. Otuda je

$$d\, exp_o(v_0) = d\, exp_o(\alpha'(0)) = (exp_o \circ \alpha)'(0) = \gamma_v{}'(0) = v.$$

Na kraju ostaje još da primenimo teoremu o inverznim funkcijama. ■

Za podskup S vektorskog prostora V kažemo da je **oblika zvezde** oko 0 ako za svako $v \in S$ važi $tv \in S$, za sve $t \in [0, 1]$. Ako su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}_1$ okoline iz prethodne propozicije i ako je $\mathcal{U}_1$ oblika zvezde oko 0, onda se $\mathcal{U}$ naziva **normalna okolina oko** o. Pokazaćemo da postoje opravdani razlozi da za $\mathcal{U}$ kažemo da je zvezdanog oblika oko tačke o.

Propozicija 4.4.4. *Ako je $\mathcal{U}$ normalna okolina od $o \in M$, onda za svaku tačku $p \in \mathcal{U}$ postoji jedinstvena geodezijska linija $\sigma : [0, 1] \to \mathcal{U}$ od o do p u $\mathcal{U}$. Šta više $\sigma'(0) = exp_o^{-1}(p) \in \mathcal{U}_1$.*

Dokaz: U skladu sa prethodnom propozicijom, neka je $\mathcal{U}_1$ je okolina od 0 u $T_o(M)$ koja je oblika zvezde tako da je $exp_o|\mathcal{U}_1$ difeomorfizam na $\mathcal{U}$. Za $p \in \mathcal{U}$ neka je $v = exp_o^{-1}(p)$ elemenat iz $\mathcal{U}_1$. Kako je $\mathcal{U}_1$ oblika zvezde, to $\rho(t) = tv \in \mathcal{U}_1$, za sve $t \in [0, 1]$. Geodezijski segment $\sigma = exp_o \circ \rho$ leži u $\mathcal{U}$, ide od o do p i poklapa se sa γ_v na $[0, 1]$. $d\, exp_o$ je kanonički izomorfizam $T_0(T_o(M)) \approx T_o(M)$. Kako je $\rho'(0) = v_0$, to je

$$\sigma'(0) = d\, exp_o(\rho'(0)) = d\, exp_o(v_0) = v.$$

Pretpostavimo da je $\tau : [0, 1] \to \mathcal{U}$ proizvoljna geodezijska linija u $\mathcal{U}$ od o do p. Ako je $w = \tau'(0)$, tada geodezijske linije $t \to exp_o(tw)$ i τ imaju iste početne brzine, odakle sledi da su te geodezijske linije iste na $[0, 1]$. Otuda $exp_o(tw) \in \mathcal{U}$ za sve $t \in [0, 1]$.

Radijalni segment $t \to tw$ $(0 \le t \le 1)$ ne napušta $\mathcal{U}_1$. Zaista, na osnovu prethodne propozicije imamo da je $exp_o|\mathcal{U}_1$ difeomorfizam iz $\mathcal{U}_1$ na $\mathcal{U}$. Otuda je $exp_o^{-1} \circ \tau : [0, 1] \to \mathcal{U}_1$ glatko preslikavanje, a samim tim i neprekidno. Sa druge strane, ako bi radijalni segment $t \to tw$ $(0 \le t \le 1)$ napustio $\mathcal{U}_1$, onda bi ili postojao $t_0 \in (0, 1)$, tako da $tw \in \mathcal{U}_1$ za $0 \le t < t_0$ i

$tw \notin \mathcal{U}_1$ za $t_0 \leq t \leq 1$ ili bi samo $w \notin \mathcal{U}_1$ ($\mathcal{U}_1$ je oblika zvezde). Odatle, sledi da je $exp_o^{-1} \circ \tau(t) = tw$, za sve $0 \leq t < t_0$ $(0 \leq t < 1)$. Na kraju vidimo da funkcija $exp_o^{-1} \circ \tau$ ima prekid u tački t_0, što je u suprotnosti sa tim da je $exp_o^{-1} \circ \tau$ neprekidna na $[0,1]$. Dakle, $w \in \mathcal{U}_1$.

Kako je $exp_o(w) = \tau(1) = p = exp_o(v)$ i exp_o je jedan-jedan na $\mathcal{U}_1$, to je $w = v$. Otuda zbog jedinstvenosti geodezijskih linija imamo da je $\tau = \sigma$. ■

Ovaj dokaz pokazuje kako normalna okolina $\mathcal{U}$ od o jedinstveno određuje okolinu $\mathcal{U}_1$ od 0 u $T_o(M)$. **Izlomljena geodezijska linija** je po delovima glatka segmentna kriva čiji su glatki podsegmenti geodezijske linije. Poligonalna linija u $\boldsymbol{R}^2$ je primer izlomljene geodezijske linije.

Lema 4.4.5. *Semi-Rimanova mnogostrukost M je povezana ako i samo ako za svake dve tačke od M postoji izlomljena geodezijska linija koja ih povezuje.*

Dokaz: Pretpostavimo da je semi-Rimanova mnogostrukost M povezana i fiksirajmo $p \in M$. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih tačaka od M koje mogu biti povezane sa p uz pomoć izlomljene geodezijske linije. Za $q \in M$ neka je $\mathcal{U}$ normalna okolina. Ako $q \in \mathcal{C}$, onda je $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$. Sa druge strane, ako $q \in M \backslash \mathcal{C}$, onda je $\mathcal{U} \subset M \backslash \mathcal{C}$. Otuda na osnovu povezanosti imamo da je $M = \mathcal{C}$. Suprotan smer se direktno dokazuje. ■

Na bilo kojoj normalnoj okolini $\mathcal{U}$ od $o \in M$ postoji specijalan tip karti. Neka je $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza od $T_o(M)$ i neka je pri tome $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\epsilon_j$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. **Normalna karta** $\xi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ koja je određena uz pomoć tangentnih vektora $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pridružuje svakoj tački $p \in \mathcal{U}$ vektorske koordinate od korespondirajuće tačke

$$exp_o^{-1}(p) \in \mathcal{U}_1 \subset T_o(M)$$

u bazi $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Dakle važi

$$exp_o^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)\, e_i \quad (p \in \mathcal{U}).$$

Otuda, ako je $f^1, \ldots, f^n$ dualna baza od $e_1, \ldots, e_n$, onda je $x^i \circ exp_o = f^i$ na $\mathcal{U}_1$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Propozicija 4.4.5. *Ako je $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ normalna karta oko $o \in M$, tada za sve $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi*

1. $g_{ij}(o) = \delta_{ij}\, \epsilon_j$
2. $\Gamma_{ij}^k(o) = 0.$

Dokaz: Ako je $v \in T_o(M)$, onda neka je u skladu sa gornjom notacijom $v = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$. Kako je $exp_o(tv) = \gamma_v(t)$, to je

$$x^i(\gamma_v(t)) = f^i(tv) = tf^i(v) = ta^i, \text{ za sve } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Otuda je $v = \gamma_v{}'(0) = \sum_{i=1}^{n} a^i \partial_i|_o$. Uzimajući da je $a^i = \delta_{ij}$ dobijamo da je $e_j = \partial_j|_o$, a otuda sledi da važi i (1).

Na osnovu gornjeg izraza za $x^i \circ \gamma_v$ imamo da se geodezijske diferencijalne jednačine za γ_v svode na

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t))\, a^i a^j = 0, \text{ za sve } k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Posebno važi $\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(o)\, a^i a^j = 0$, za sve $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \boldsymbol{R^n}$. Za fiksirano k, ovo izražava činjenicu da su određene kvadratne forme na $\boldsymbol{R^n}$ identički jednake nuli. Otuda je korespondirajući skalarni proizvod jednak nuli tj. $\Gamma_{ij}^k(o) = 0$. ∎

Poredeći ovaj rezultat sa lemom 4.2.1., str. 47, imamo da su u tački o metrički tenzori i Kristofelovi simboli od normalne karte semi-Euklidski (iako generalno, ne bilo gde). Ova činjenica je veoma korisna pri raznim računanjima. Na primer, posmatrajmo problem određivanja kovarijantnog diferencijala DA od $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Komponente od DA su u proizvoljnoj karti prilično nezgrapne, ali ako za svaku tačku $o \in M$ koristimo normalne koordinate, tada je

$$A_{jk;m}^i(o) = ((\partial/\partial x^m) A_{jk}^i)(o)$$

baš kao i u slučaju prirodnih koordinata u semi-Euklidskom prostoru.

Formule iz propozicije su u blizini tačke o aproksimativno tačne odnosno što se više približavamo tački o to M sve više liči na $T_o(M) \approx \boldsymbol{R_\nu^n}$.

Primer. Eksponencijalna preslikavanja na $\boldsymbol{R_\nu^n}$. Na osnovu prethodnog može se dokazati da je geodezijska linija sa inicijalnom brzinom $v_p \in T_p(\boldsymbol{R_\nu^n})$ prava linija $t \to p + tv$. Eksponencijalno preslikavanje u p šalje v_p u $p + v$ (vrh smera v_p). Otuda je $exp_p : T_p(\boldsymbol{R_\nu^n}) \to \boldsymbol{R_\nu^n}$ difeomorfizam, s obzirom da exp_p je kompozicija kanoničkog izomorfizma $T_p(\boldsymbol{R_\nu^n}) \approx \boldsymbol{R_\nu^n}$ i translacije $x \to p + x$. U suštini, ako je dat vektorski prostor $T_p(\boldsymbol{R_\nu^n})$ sa skalarnim proizvodom koji je određen uz pomoć uobičajenog metričkog tenzora, onda su oba ova preslikavanja izometrije, pa je i exp_p izometrija (videti poglavlje na kraju rada koje je posvećeno izometriji).

4.5 Krivina

Lema 4.5.1. *Neka je M semi-Rimanova mnogostrukost sa Levi-Civita konekcijom D. Funkcija $R : \mathcal{T}_0^1(M)^3 \to \mathcal{T}_0^1(M)$ data sa*

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z$$

je $\binom{1}{3}$ tenzorsko polje na M koje ćemo zvati **tenzor Rimanove krivine na** *M.*

Dokaz: R se može prikazati kao element od $\mathcal{T}_3^1(M)$ ako i samo ako je $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinearno. Kako je R-linearnost očigledna, to ostaje da dokažemo $\mathcal{C}^\infty(M)$-homogenost. Na primer, kako je $[X, fY] = Xf \cdot Y + f[X, Y]$, to je

$$R_{X,fY}Z = D_{[X,fY]}Z - D_X D_{fY}Z + D_{fY}D_X Z =$$

$$= Xf \cdot D_Y Z + fD_{[X,Y]}Z - D_X(fD_Y Z) + fD_Y D_X Z =$$

$$= Xf \cdot D_Y Z - Xf \cdot D_Y Z + fR_{XY}Z = fR_{XY}Z.$$

■

Operacija zagrada (Lijeva zagrada) na vektorskim poljima nije tenzorsko polje i kovarijantni izvod nije tenzorsko polje. Međutim, gornja kombinacija daje tenzor R. Alternativna notacija $R(X,Y)Z$ za $R_{XY}Z$ je mnogo pogodnija u slučaju kada X i Y predstavljaju mnogo komplikovanije izraze.

Tenzor R može biti posmatran i kao R-multilinearna funkcija na individualnim tangentnim vektorima. Ako $x, y \in T_p(M)$, onda se linearni operator

$$R_{xy} : T_p(M) \to T_p(M)$$

koji šalje z u $R_{xy}z$ naziva **operator krivine**. Sledeći identiteti su poznati kao **simetrije krivine**.

Propozicija 4.5.1. *Ako $x, y, z, v, w \in T_p(M)$, onda je*

1. $R_{xy} = -R_{yx}$,

2. $\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$,

3. $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$,

4. $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$.

(3) se naziva **prvi Bjankijev identitet**.

Dokaz: Kako su kovarijantni izvod D_X i operacija zagrada na vektorskim poljima lokalne operacije, to je dovoljno da radimo na bilo kojoj okolini od tačke p. Identiteti koje treba dokazati su tenzorske jednačine, jer tangentni vektori $x, y, \ldots$ mogu biti prošireni do vektorskih polja $X, Y, \ldots$ na neku okolinu od p i to preko particije jedinice. Izaberimo ekstenzije tako da su sve njihove zagrade jednake nuli (ovo je moguće ako ih odaberemo tako da imaju konstantne komponente s obzirom na neku kartu). Posebno, $R_{XY}Z$ se tada svodi na $D_Y(D_XZ) - D_X(D_YZ)$.

(1) Kad god je zagrada $[A, B] = AB - BA$ definisana, onda je ona antisimetrična po A i B. Otuda, (1) sledi direktno na osnovu definicije krivine.

(2) Dovoljno je dokazati da je $\langle R_{xy}v, v\rangle = 0$. Koristeći se poznatom osobinom $(D5)$ imamo da je

$$\langle R_{XY}V, V\rangle = \langle D_YD_XV, V\rangle - \langle D_XD_YV, V\rangle =$$
$$= Y\langle D_XV, V\rangle - \langle D_XV, D_YV\rangle - X\langle D_YV, V\rangle + \langle D_YV, D_XV\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}YX\langle V, V\rangle - \frac{1}{2}XY\langle V, V\rangle = 0,$$

s obzirom da je $[X, Y] = 0$.

(3) Pretpostavimo da je $F : \mathcal{T}^1_0(M)^3 \to \mathcal{T}^1_0(M)$ funkcija koja je samo R-multilinearna i neka je

$$\Sigma F(X, Y, Z) = F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y).$$

Vidimo da ciklične permutacije od X, Y, Z ostavljaju $\Sigma F(X, Y, Z)$ nepromenjenom. Otuda je

$$\Sigma R_{XY}Z = \Sigma D_YD_XZ - \Sigma D_XD_YZ =$$
$$= \Sigma D_XD_ZY - \Sigma D_XD_YZ = \Sigma D_X[Z, Y] = 0.$$

(4) Na osnovu (3) imamo da je $\langle \Sigma R_{YV}X, W\rangle = 0$, pri čemu Σ deluje na bilo koja tri vektorska polja koja su „zakačena" za R. Sumirajmo četiri ciklične permutacije od Y, V, X, W, a zatim razvijmo svako Σ. Dobijamo dvanaest sabiraka. Na osnovu (1) i (2) osam od njih će se poništiti po parovima pri čemu će ostati

$$2\langle R_{XY}V, W\rangle + 2\langle R_{WV}X, Y\rangle = 0.$$

Otuda je $\langle R_{XY}V, W\rangle = \langle R_{VW}X, Y\rangle$. ∎

Simetrije krivine tenzora R dovode do manje očigledne simetrije njenog kovarijantnog diferencijala DR, koja se još naziva i **drugi Bjankijev identitet**. DR je po definiciji $\binom{1}{4}$ tenzorsko polje koji interpretiramo kao pridruživanje uređenoj četrvorci vektorskih polja (V, X, Y, Z) vrednosti $(D_ZR)_{XY}V =$

$(D_Z R)(X,Y)V$. Kao i pre, ovo ima smisla za individualne tangentne vektore, odakle sledi da su članovi sume u narednoj propoziciji linearni operatori na $T_p(M)$.

Propozicija 4.5.2. *Ako $x, y, z \in T_p(M)$, onda je*

$$(D_z R)(x,y) + (D_x R)(y,z) + (D_y R)(z,x) = 0.$$

Dokaz: Kao i u prethodnom dokazu proširimo tengentne vektore x, y, z do vektorskih polja X, Y, Z na nekoj okolini od p. Međutim, neka za normalnu kartu od M oko p ekstenzije imaju konstantne komponente. Otuda sledi da ne samo što sve zagrade nestaju identički, nego u tački p (gde su Kristofelovi simboli nule) imamo da su na osnovu propozicije 4.2.2., str. 46-47, svi kovarijantni izvodi koji uključuju X, Y, Z svi jednaki nuli. Primenjujući $D_Z R(X,Y)$ na proizvoljno vektorsko polje V dobijamo izraz

$$D_Z(R(X,Y)V) - R(D_Z X, Y)V - R(X, D_Z Y)V - R(X,Y)(D_Z V).$$

U tački p su dva srednja terma jednaki nuli, pa ako „ispustimo" vektorsko polje V, onda imamo da je

$$(D_Z R)(X,Y) = [D_Z, R(X,Y)] = [D_Z, [D_X, D_Y]] \text{ u tački } p.$$

Međutim Jakobijev identitet (koji se može videti nakon raspisivanja) važi isto kao i za zagrade (Lijeve) vektorskih polja. Otuda sumiranjem gornjih formula po cikličnim permutacijama X, Y, Z daje traženi rezultat

$$\Sigma(D_Z R)(X,Y) = 0$$

u tački p. ■

Lema 4.5.2. *Na domenu karte $\psi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ imamo da je*

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jkl} \partial_i\,,$$

pri čemu su komponente od R date sa

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_{m=1}^{n} \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_{m=1}^{n} \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}.$$

Dokaz: Za koordinatna vektorska polja važi

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = D_{\partial_l}(D_{\partial_k}\partial_j) - D_{\partial_k}(D_{\partial_l}\partial_j).$$

Prvi član na desnoj strani je

$$D_{\partial_l}(\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{kj}^{m}\, \partial_m) = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^{m}\, \partial_m + \sum_{r=1}^{n} \Gamma_{kj}^{m}\, \Gamma_{lm}^{r}\, \partial_r \right).$$

Ako preimenujemo odgovarajuće indekse, onda je poslednji izraz jednak sa

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^{i} + \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{lm}^{i} \Gamma_{kj}^{m} \right\} \partial_i.$$

Na kraju, ako od ovog izraza oduzmemo korespondirajući izraz u kojem su međusobno zamenjeni k i l, onda dobijamo traženi rezultat. ∎

Zamenjivanjem formule iz drugog dela propozicije 4.2.2., str. 46-47, u gornju formulu dobijamo formulu za krivinu u zavisnosti od metričkog tenzora. Međutim, odgovarajuća računanja su čak i u jednostavnim slučajevima komplikovana, a pri tome dobijamo veoma malo informacija. Računanje krivine date mnogostrukosti M je praktičan način korišćenja teoretskih rezultata zarad otkrivanja različitih karakteristika mnogostrukosti M.

4.6 Sekciona krivina

Dakle, tenzor Rimanove krivine R je komplikovan. Naš cilj će biti da uvedemo realne funkcije koje potpuno određuju R.

Definicija 4.6.1. *Neka je M semi-Rimanova mnogostrukost i neka $p \in M$. Dvodimenzionalni potprostor Π od tangentnog prostora $T_p(M)$ se naziva* **tangentna ravan od M u p**.

Za tangentne vektore v i w iz $T_p(M)$ definišimo

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2.$$

Na osnovu leme 2.3 imamo da je ravan Π nedegenerisana ako i samo ako je $Q(v, w) \neq 0$ za bilo koju bazu (v, w) od Π.

Lema 4.6.1. *Neka je Π nedegenerisana tangentna ravan od M u p. Broj*

$$K(v, w) = \langle R_{vw}v, w\rangle / Q(v, w)$$

je nezavistan od izbora baze (v, w) od Π. Ovaj broj se naziva **sekciona krivina $K(\Pi)$ od Π**.

Dokaz: Bilo koje dve baze (v, w) i (x, y) od Π su povezane jednačinama

$$v = ax + by\,,$$

$$w = cx + dy\,,$$

pri čemu je determinanta koeficijenata $ad - bc$ različita od nule. Direktnim računom se dobija da je

$$\langle R_{vw}v, w\rangle = (ad - bc)^2\langle R_{xy}x, y\rangle,$$

kao i da je

$$Q(v, w) = (ad - bc)^2 Q(x, y). \ \blacksquare$$

Dakle, sekciona krivina je realna funkcija na skupu svih nedegenerisanih tangentnih ravni od M. Po definiciji R određuje K. Da bi smo dokazali da i K određuje R biće nam neophodna sledeća lema.

Lema 4.6.2. *Neka je dat realni vektorski prostor V dimenzije n koji je snabdeven sa skalarnim proizvodom. Za date vektore v i w prostora V postoje vektori v_1 i w_1 proizvoljno blizu vektorima v i w koji generišu nedegenerisanu ravan.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da su v i w linearno nezavisni jer se svaki par linearno zavisnih vektora može aproksimirati sa dva linearno nezavisna vektora koji su dovoljno blizu tom paru. Neka je ravan generisana sa v i w degenerisana. Tada je skalarni proizvod nedefinitan.

Ako je v nulti vektor, onda neka je x vektor takav da je $\langle v, x\rangle \neq 0$ (takav vektor x postoji na osnovu definicije skalarnog proizvoda). Tada je $Q(v, x) < 0$. Dovoljno je dokazati da za dovoljno malo $\delta \neq 0$ vektori v i $w + \delta x$ generišu nedegenerisanu ravan. Razvijanjem $Q(v, w + \delta x)$ dobijamo izraz oblika

$$Q(v, w) + 2\delta b + \delta^2 Q(v, x).$$

Međutim $Q(v, w) = 0$ jer vektori v i w generišu degenerisanu ravan. Ako je $b \neq 0$, onda će poslednji izraz biti različit od nule, s obzirom da δ^2 brže teži ka nuli od δ, kada δ teži nuli. Ako je $b = 0$, onda je poslednji izraz različit od nule jer je $Q(v, x) < 0$. Analogan dokaz važi i u slučaju kada je w nulti vektor.

Ako ni jedan od vektora v i w nije nulti vektor, onda u ravni određenoj sa vektorima v i w postoji nenula vektor x_1 (koji je različit od w bez umanjenja opštosti) koji je ortogonalan na sve vektore iz te ravni (a time i na samog sebe). Dalje, odaberimo dovoljno malu okolinu oko vektora v (njegovog vrha) koja nema zajedničkih tačaka sa pravcem na kojem leži vektor w. U toj okolini odaberimo n linearno nezavisnih vektora. Svaki od njih zajedno sa vektorom w čini jedan par linearno nezavisnih vektora. Ako neki od tih parova generiše nedegenerisanu ravan, onda je taj par vektora traženi par vektora.

Inače, ako je neki od tih n linearno nezavisnih vektora, označimo ga sa v_1, nulti vektor, onda postoji vektor x_2 takav da je $\langle v_1, x_2\rangle \neq 0$. Na osnovu prvog dela dokaza zaključujemo da za dovoljno malo $\delta \neq 0$ vektori v_1 i $w + \delta x_2$ generišu nedegenerisanu ravan.

Ako ni jedan od n linearno nezavisnih vektora nije nulti vektor, onda vektor x_1 nije ortogonalan bar na jedan od tih vektora. Označimo jedan takav sa v_2. Tada je $Q(x_1, v_2) < 0$. Analogno kao i u prvom delu dokaza zaključujemo da za dovoljno malo $\delta \neq 0$ vektori v_2 i $w + \delta x_1$ generišu nedegenerisanu ravan. ■

Propozicija 4.6.1. *Ako je $K = 0$ u $p \in M$, tada je $R = 0$ u p.*

Eksplicitno, ako je $K(\Pi) = 0$ za svaku nedegenerisanu ravan u $T_p(M)$, tada je $R_{xy}z = 0$ za sve x, y, z iz $T_p(M)$.

Dokaz: (1) $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$, za sve $v, w \in T_p(M)$.

Ako v i w generišu nedegenerisanu ravan, tada je $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$. Na osnovu prethodne leme, bilo koji par vektora je granica takvih vektora. $\langle R_{vw}x, y\rangle$ je multilinearno, pa je i neprekidno na $T_p(M)^4$, tako da (1) važi.

(2) $R_{vw}v = 0$, za sve $v, w \in T_p(M)$.

Za proizvoljno x imamo da je:

$$\langle R_{v,w+x}v, w + x\rangle = \langle R_{vw}v, w\rangle + \langle R_{vx}v, w\rangle + \langle R_{vw}v, x\rangle + \langle R_{vx}v, x\rangle.$$

Dva sabirka (prvi i četvrti) se odmah anuliraju na osnovu (1). Na osnovu simetrije po parovima imamo da su preostala dva člana jednaka, pa je $\langle R_{vw}v, x\rangle = 0$ za sve x.

(3) $R_{vw}x = R_{wx}v$, za sve $v, w, x \in T_p(M)$.

Imamo da je

$$R_{v+x,w}(v + x) = R_{vw}v + R_{xw}v + R_{vw}x + R_{xw}x.$$

Dva sabirka (prvi i četvrti) se anuliraju na osnovu (2). Otuda (3) sledi na osnovu antisimetričnosti od R po donjim indeksima.

Na osnovu (3), $R_{vw}x$ se ne menja pri cikličnoj permutaciji vektora v, w, x. Otuda na osnovu prvog Bjankijevog identiteta imamo da je $R_{vw}x = 0$, za sve $v, w, x \in T_p(M)$. Otuda je $R = 0$ u tački p . ■

Semi-Rimanova mnogostrukost M za koju je tenzor krivine R jednak nuli u svakoj tački se naziva **ravna**. Na osnovu ove propozicije imamo da je semi-Rimanova mnogostrukost M ravna ako i samo ako je funkcija sekcione krivine identički jednaka nuli. Na primer, svaki semi-Euklidski prostor $\boldsymbol{R}^n_\nu$ je ravan: za prirodne koordinate (određene i-tim projekcijama) Kristofelovi simboli se anuliraju, pa je $R = 0$ na osnovu leme 4.5.2., str. 62.

Za multilinearnu funkciju $F : T_p(M)^4 \to \boldsymbol{R}$ kažemo da je **kriva** ako i samo ako za F važe sve osobine iz propozicije 4.5.1., str. 60, koje važe za funkciju $(v, w, x, y) \to \langle R_{vw}x, y\rangle$. Prethodni dokaz koristi samo ove apstraktne osobine. Znači, ako je $F(v, w, v, w) = 0$ za sve $v, w \in T_p(M)$ koji generišu nedegenerisanu ravan, onda je $F = 0$.

Posledica 4.6.1. *Neka je F kriva funkcija na $T_p(M)$ takva da je*

$$K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}\,,$$

za sve v i w koji generišu nedegenerisanu ravan. Tada je

$$\langle R_{vw}x, y\rangle = F(v, w, x, y)\,,$$

za sve $v, w, x, y \in T_p(M)$.

Dokaz: Funkcija $\Delta(v, w, x, y) = F(v, w, x, y) - \langle R_{vw}x, y\rangle$ je takođe kriva. Po pretpostavci je $\Delta(v, w, v, w) = 0$, za sve v i w koji generišu nedegenerisanu ravan. Otuda na osnovu napomene koja prethodi ovoj posledici imamo da je $\Delta = 0$. ■

Za semi-Rimanovu mnogostrukost M kažemo da **ima konstantnu krivinu** ako je njena sekciona krivina konstantna.

Posledica 4.6.2. *Ako M ima konstantnu krivinu C, onda je*

$$R_{xy}z = C\{\langle z, x\rangle y - \langle z, y\rangle x\}.$$

Dokaz: Direktnim računanjem se može dokazati da formula

$$F(x, y, v, w) = C\{\langle v, x\rangle\langle y, w\rangle - \langle v, y\rangle\langle x, w\rangle\}$$

definiše krivu funkciju u svakoj tački, kao i da je $F(x, y, x, y) = CQ(x, y)$. Ako x i y generišu nedegenerisanu ravan, onda je

$$K(x, y) = C = \frac{F(x, y, x, y)}{Q(x, y)}\,,$$

pa tvrđenje sledi na osnovu prethodne posledice. ■

U Rimanovom slučaju, ova formula krivine ima svoje geometrijsko značenje: Ako je (x, y) ortonormirana baza ravni Π, tada je R_{xy} nula na $\Pi^\perp$, a na Π je rotacija koja šalje x u y i y u $-x$ u kombinaciji sa skalarnim proizvodom C.

Neka je M **semi-Rimanova površ** tj. semi-Rimanova mnogostrukost dimenzije 2. Za kartu $\psi = (u, v)$ na M komponente metričkog tenzora se tradicionalno označavaju sa

$$E = g_{11} = \langle \partial_u, \partial_u \rangle, \;\; F = g_{12} = g_{21} = \langle \partial_u, \partial_v \rangle \;\; G = g_{22} = \langle \partial_v, \partial_v \rangle.$$

Na dalje ćemo se služiti i oznakama $u_1 = u$ i $u_2 = v$. Za linijski element imamo da je

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

a zatim i da je $Q = Q(\partial_u, \partial_v) = EG - F^2$.

Na osnovu Koszul-ove formule i propozicije 4.2.2., str. 46-47, može se dokazati da za Kristofelove simbole važi sledeće:

$$Q\Gamma^1_{11} = \begin{vmatrix} E_u/2 & F \\ F_u - (E_v)/2 & G \end{vmatrix}, \;\; Q\Gamma^2_{11} = \begin{vmatrix} E & E_u/2 \\ F & F_u - (E_v/2) \end{vmatrix},$$

$$Q\Gamma^1_{12} = \begin{vmatrix} E_v/2 & F \\ G_u/2 & G \end{vmatrix}, \;\; Q\Gamma^2_{12} = \begin{vmatrix} E & E_v/2 \\ F & G_u/2 \end{vmatrix},$$

$$Q\Gamma^1_{22} = \begin{vmatrix} E_v - (G_u/2) & F \\ G_v/2 & G \end{vmatrix}, \;\; Q\Gamma^2_{22} = \begin{vmatrix} E & F_v - (G_u/2) \\ F & G_v/2 \end{vmatrix}.$$

Kako je M dvodimenzionalna semi-Rimanova mnogostrukost, to je $T_p(M)$ tangentna ravan u tački p. Otuda sekciona krivina postaje realna funkcija na M koja se naziva **Gausova krivina na M**. Opšta formula za K je komplikovana, pa ćemo zato razmatrati samo korisne specijalne slučajeve.

Propozicija 4.6.2. *Neka je $\psi = (u, v)$ ortonormirana karta semi-Rimanove površi M, tako da je $F = \langle \partial_u, \partial_v \rangle = 0$. Tada je*

1. $D_{\partial_u}\partial_u = \frac{E_u}{2E}\partial_u - \frac{E_v}{2G}\partial_v, \;\; D_{\partial_v}\partial_v = -\frac{G_u}{2E}\partial_u + \frac{G_v}{2G}\partial_v,$

$$D_{\partial_u}\partial_v = D_{\partial_v}\partial_u = \frac{E_v}{2E}\partial_u + \frac{G_u}{2G}\partial_v.$$

2. *Neka je $e = |E|^{\frac{1}{2}}$ i $g = |G|^{\frac{1}{2}}$. Neka je $\epsilon_1 = \pm 1$ znak od E i neka je ϵ_2 znak od G. Tada je*

$$K = -\frac{1}{eg}\left[\epsilon_1 \left(\frac{g_u}{e}\right)_u + \epsilon_2 \left(\frac{e_v}{g}\right)_v\right].$$

Dokaz: (1) Staviti $F = 0$ u formulama za Kristofelove simbole.

(2) Po definiciji je $K = \langle R_{\partial_u \partial_v}(\partial_u), \partial_v \rangle / EG$. Uočimo da važi

$$\langle D_{\partial_u} D_{\partial_v} \partial_u, \partial_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle D_{\partial_v} \partial_u, \partial_v \rangle - \langle D_{\partial_v} \partial_u, D_{\partial_u} \partial_v \rangle,$$

što na osnovu (1) postaje $G_{uu}/2 - (E_v)^2/4E - (G_u)^2/4G$. Analogna priča važi i za odgovarajući drugi term. Direktnim računom se na kraju dobija tražena formula. ■

4.7 Menjanje tipova tenzora i metrička kontrakcija

Posmatrano iz ugla tenzora, propozicija 4.2.1., str. 44, tvrdi da za semi-Rimanovu mnogostrukost M postoji $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearni izomorfizam iz $\mathcal{T}^1_0(M)$ na $\mathcal{T}^0_1(M)$. Ovaj izomorfizam se može uopštiti i na više tipove tenzora kao što ćemo i videti.

Fiksirajmo prirodne brojeve $1 \leq a \leq r$ i $1 \leq b \leq s$. Ako $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, tada je vrednost od $\downarrow^a_b A \in \mathcal{T}^{r-1}_{s+1}(M)$ na jedan formama $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{r-1}$ i vektorskim poljima $X_1, \dots, X_{s+1}$ definisana sa

$$(\downarrow^a_b A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) =$$
$$= A(\theta^1, \dots, \theta^{a-1}, X_b^*, \theta^a, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}),$$

pri čemu je X_b^* jedan forma koja je metrički ekvivalentna sa X_b (propozicija 2.1.).

Na primer, neka je A $\binom{2}{2}$ tenzorsko polje. Tada je $B = \downarrow^1_2 A$ zapravo $\binom{1}{3}$ tenzorsko polje tako da je $B(\theta, X, Y, Z) = A(Y^*, \theta, X, Z)$ za sve glatke jedan forme θ i sva glatka vektorska polja X, Y, Z. U terminima koordinata, jedan forma koja je dualna vektorskom polju ∂_i je $\partial_i^* = \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^j$. Otuda je

$$B^i_{jkl} = B(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = A\left(\sum_{m=1}^n g_{km} dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_l \right) =$$
$$= \sum_{m=1}^n g_{km} A^{mi}_{jl}.$$

Operacija $\downarrow^a_b \colon \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^{r-1}_{s+1}(M)$ je poznata još i kao **spuštanje indeksa**. Ova operacija je očigledno $\mathcal{C}^\infty(M)$-linearna. Sa druge strane ona je izomorfizam, jer za nju postoji inverzna operacija $\uparrow^a_b$ koja, uz notaciju koja je analogna gornjoj, izbacuje jedan formu sa a-tog mesta, pretvara u metrički ekvivalentno vektorsko polje (propozicija 4.2.1., str. 44) i na kraju smešta na b-to mesto među vektorskim poljima.

U terminima koordinata, vektorsko polje koje je metrički ekvivalentno sa dx^i je dato sa $\sum_{j=1}^n g^{ij}\partial_j$. Ako je B $\binom{1}{3}$ tenzorsko polje, onda je

$$(\uparrow_2^1 B)^{ij}_{kl} = \sum_{q=1}^n g^{iq} B^j_{kql}.$$

Operacija $\uparrow_b^a$ je poznata još i kao **podizanje indeksa**. Inverznu prirodu poslednje dve operacije vidimo kroz naredni niz jednakosti:

$$(\uparrow_2^1\downarrow_2^1 A)^{ij}_{kl} = \sum_{p=1}^n g^{ip}(\downarrow_2^1 A)^j_{kp\,l} = \sum_{p,m=1}^n g^{ip}g_{pm}A^{mj}_{kl} = \sum_{m=1}^n \delta_{im}A^{mj}_{kl} = A^{ij}_{kl}.$$

Posmatrajmo jedan specijalan slučaj $\binom{1}{s}$ tenzorskog polja A koji je dat preko $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinearne funkcije $A : \mathcal{T}^1_0(M)^s \to \mathcal{T}^1_0(M)$. Može se dokazati da je

$$(\downarrow_1^1 A)(V, X_1, X_2, \ldots, X_s) = \langle V, A(X_1, \ldots, X_s)\rangle.$$

U suštini, leva strana poslednje jednakosti je po definiciji $A(V^*, X_1, \ldots, X_s)$, jer je $V^*(A(X_1, \ldots, X_s)) = \langle V, A(X_1, \ldots, X_s)\rangle$.

Za sva ona tenzorska polja koja su dobijena od datog tenzorskog polja putem operacija podizanja i spuštanja indeksa se kaže da su **metrički ekvivalentni**. Svi oni sadrže istu informaciju, pa se otuda mogu posmatrati i kao različite manifestacije istog objekta.

Klasična koordinatizovana verzija multidimenzionalne diferencijalne geometrije je razvijena mnogo pre invarijantne geometrije. Ako se tenzor krivine $R : \mathcal{T}^1_0(M)^3 \to \mathcal{T}^1_0(M)$ predstavi na uobičajen način kao funkcija od tri vektorska polja, onda na osnovu leme 4.5.2., str. 62, moramo imati da je $R(Z, X, Y) = R_{XY}Z$. Komponente od $\binom{0}{4}$ tenzora $\downarrow_1^1 R$ su oblika

$$R_{ijkl} = (\downarrow_1^1 R)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \langle \partial_i, R_{\partial_k\partial_l}\partial_j\rangle = \sum_{m=1}^n g_{im}R^m_{jkl}.$$

Ovo je uobičajen način da se spusti kontravarijantni indeks od R.

Znamo da na mnogostrukosti operacija kontrakcije pridružuje svakom $\binom{r}{s}$ tenzorksom polju jedinstveno $\binom{r-1}{s-1}$ tenzorsko polje. Na semi-Rimanovoj mnogostrukosti mi možemo **metrički kontraktovati** dva kovarijantna indeksa, tako što ćemo podići jedan od njih, a zatim primeniti operaciju kontrakcije na uobičajeni način. Otuda je za $1 \leq a < b \leq s$ i proizvoljno r, metrička kontrakcija $C_{ab} : \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_{s-2}(M)$ data preko koordinata u obliku

$$(C_{ab}A)^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_{s-2}} = \sum_{p,q=1}^n g^{pq}A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_{a-1},p,j_a,\ldots,j_{b-2},q,j_{b-1},\ldots,j_{s-2}}.$$

Analogno, u kontravarijantnom slučaju, za $1 \leq a < b \leq r$ i proizvoljno s imamo da je metrička kontrakcija

$$C^{ab} : \mathcal{T}_s^r(M) \to \mathcal{T}_s^{r-2}(M),$$

određena sa koordinatnim formulama koje se razlikuju od gornjih po tome što kovarijantni i kontravarijantni indeksi menjaju uloge (tako na primer g^{ij} menja g_{ij}). Sve metričke kontrakcije (iz oba tipa) ćemo označavati sa C.

Lema 4.7.1. *Kovarijantni izvodi D_V i kovarijantni diferencijal D komutiraju sa operacijama podizanja i spuštanja indeksa, kao i sa metričkim kontrakcijama.*

Dokaz: Kako je operacija podizanja indeksa inverzna operaciji spuštanja indeksa, to je dovoljno da razmotrimo samo slučaj poslednje operacije. Zbog permutacija je dovoljno da razmotrimo samo slučaj $\downarrow_1^a$. Na osnovu koordinatnog izraza za $\downarrow_1^a A$ vidimo da je ovo tenzorkso polje obična kontrakcija C_1^a primenjena na $g \otimes A$. Kao tenzorski izvod, D_V komutira sa običnom kontrakcijom. Kako je metrički tenzor paralelan to je

$$D_V(\downarrow_1^a A) = D_V(C_1^a(g \otimes A)) = C_1^a(g \otimes D_V A) = \downarrow_1^a (D_V A).$$

Otuda D_V takođe komutira sa metričkom kontrakcijom.

Direktan račun daje korespondirajući rezultat za D. ∎

4.8 Okvirno polje

Definicija 4.8.1. *Neka je M semi-Rimanova mnogostrukost i neka je p tačka iz M. Ortonormirana baza od $T_p(M)$ se naziva* **okvir od M u tački p**. *Ako je $\dim M = n$, onda se skup $E_1, E_2, \ldots, E_n$ od n međusobno ortogonalnih jediničnih vektorskih polja se naziva* **okvirno polje**.

Okvirno polje pridružuje okvir svakoj tački semi-Rimanove mnogostrukosti M. Na primer, na $\boldsymbol{R}^n$ prirodna koordinatna vektorska polja (određena i-tim projekcijama) formiraju okvirno polje.

Generalno, ne mora uvek postojati okvirno polje na celoj semi-Rimanovoj mnogostrukosti M. Međutim, može se dokazati da ono uvek postoji lokalno. Na osnovu razmatranja pre leme 3.4.3., str. 37 (Ako je $e_1, \ldots, e_n$ ortonormirana baza od vektorskog prostora V, sa $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$, tada se može dokazati da se svako $v \in V$ može na jedinstveni način izraziti kao $v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(v, e_i) e_i$.), svako vektorsko polje V može biti izraženo u zavisnosti od elemenata okvirnog polja kao

$$V = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle V, E_i \rangle E_i,$$

pri čemu je $\epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Otuda je

$$\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle V, E_i \rangle \langle W, E_i \rangle.$$

U tački o, oko koje se generiše normalna karta, svi koordinatni vektori formiraju ortonormiranu bazu od $T_o(M)$. Otuda sledi da sve dok su uključene samo tačkaste operacije, formule okvirnih polja su posledice korespondirajućih koordinatnih formula (videti dokaz propozicije 3.9.). Na primer, razmotrimo metričku kontrakciju C_{ab} od $A \in \mathcal{T}_s^0(M)$. S obzirom na okvirno polje imamo da je

$$(C_{ab}A)(X_1, \ldots, X_{s-2}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m A(X_1, \ldots, X_{a-1}, E_m, X_a, \ldots, X_{b-2}, E_m, X_{b-1}, \ldots, X_{s-2}).$$

Da bi smo dokazali ovu tenzorsku jednačinu dovoljno će biti da radimo u samoj posmatranoj tački o koja generiše normalnu kartu i u kojoj je $\partial_i|_o = E_i|_o$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Na osnovu multilinearnosti je dovoljno dozvoliti da X_i-evi budu koordinatna vektorska polja ∂_i. Ali tada formula sledi na osnovu koordinatne formule za C_{ab}, jer u tački o oba g_{ij} i g^{ij} postaju $\delta_{ij}\epsilon_j$.

Slično, za $\binom{1}{s}$ tenzorsko polje $A : \mathcal{T}_0^1(M)^s \to \mathcal{T}_0^1(M)$ imamo da je

$$(C_b^1 A)(X_1, \ldots, X_{s-1}) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m \langle E_m, A(X_1, \ldots, X_{b-1}, E_m, X_b, \ldots, X_{s-1}) \rangle.$$

Okvirno polje na krivoj $\alpha : I \to M$ je skup svih međusobno ortogonalnih jediničnih vektorskih polja $E_1, \ldots, E_n$ na α. Ovakva vektorska polja ne samo što mogu biti definisana na celoj krivoj, nego možemo odabrati vektorska polja $E_i \in \mathcal{T}_0^1(\alpha)$ tako da budu paralelna.

Posledica 4.8.1. *Ako je $\alpha : I \to M$ glatka kriva i $e_1, \ldots, e_n$ okvir u $\alpha(0)$, onda postoji jedinstveno paralelno okvirno polje $E_1, \ldots, E_n$ na α takvo da je $E_i(0) = e_i$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Dokaz: Na osnovu propozicije 4.3.2., str. 51, postoji jedinstveno paralelno vektorsko polje E_i na α takvo da je $E_i(0) = e_i$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Kako je paralelna translacija u bilo koju tačku $\alpha(t) \in M$ linearna izometrija, to je $E_1, \ldots, E_n$ u suštini paralelno okvirno polje. ∎

Dakle, na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M okvirno polje postoji lokalno, jer ako je dat bilo koji okvir $e_1, \ldots, e_n$ u tangentnom prostoru $T_o(M)$, onda oko tačke o odaberimo normalnu okolinu $\mathcal{U}$ i proširimo okvir do okvirnog polja $E_1, \ldots, E_n$ na $\mathcal{U}$ uz pomoć paralelne translacije duž radijalnih geodezijskih linija. Teorija diferencijalnih jednačina garantuje da su vektorska polja E_i glatka.

Trostruka pogodnost koja se sastoji od ortonormiranosti, osobine paralelnosti i globalne definisanosti je razlog zbog kojeg korišćenje paralelnog okvirnog polja na krivoj ima prednost u odnosu na koordinatne metode.

4.9 Operatori gradijenta, divergencije, Hesijana i Laplasijana

Na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M postoji prirodna generalizacija nekih diferencijlnih operatora vektorskog kalkulusa na $\boldsymbol{R^3}$: gradienta, operatora divergencije i Laplasijana.

Definicija 4.9.1. Gradijent *$grad\, f$ funkcije $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ je vektorsko polje koje je metrički ekvivalentno sa diferencijalom $df \in \Omega^1(M)$.*

Na osnovu ove definicije vidimo da je $\langle grad\, f, X\rangle = df(X) = Xf$, za sve $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$. U nekoj karti $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$ od M imamo da je $df = \sum_{i=1}^n (\partial f/\partial x^i)dx^i$, a otuda imamo da je

$$grad\, f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j \,.$$

Posebno, za prirodne koordinate (određene i-tim projekcijama) na semi-Euklidskom prostoru imamo da je $grad\, f = \sum_{i=1}^n \epsilon_i(\partial f/\partial u^i)\partial_i$, što se svodi na uobičajenu formulu u $\boldsymbol{R^3}$.

Za tenzorsko polje A se kontrakcija preko novog kovarijantnog indeksa diferencijala DA i nekog od osnovnih indeksa naziva divergencija $div\, A$ od A. Od posebne važnosti su dva specijalna slučaja pri čemu u svakom od njih postoji jedinstvena divergencija:

1. Ako je V vektorsko polje, tada je $div\, V = C(DV) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Otuda s

obzirom na okvirno polje imamo da je

$$div\, V = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle D_{E_i} V, E_i \rangle,$$

a s obzirom na kartu $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$ imamo da je

$$div\, V = \sum_{i=1}^{n} \{ \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma^i_{ij} V^j \}.$$

Za prirodne koordinate (određene i-tim projekcijama) na $\boldsymbol{R^n_\nu}$ imamo da je $div\, V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^i}{\partial u^i}$, što se u $\boldsymbol{R^3}$ svodi na poznatu formulu.

2. Ako je A simetrično $\binom{0}{2}$ tenzorsko polje, onda je $div\, A = C_{13}(DA) = C_{23}(DA) \in \Omega^1(M)$. Za okvirno polje $E_1, E_2, \ldots, E_n$ imamo da je $(div\, A)(X) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (D_{E_i} A)(E_i, X)$, dok u karti $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$ imamo da je
$$(div\, A)_i = \sum_{r,s=1}^{n} g^{rs} A_{ri;s} = \sum_{s=1}^{n} A^s_{i;s}.$$

Definicija 4.9.2. Hesijan funkcije *$f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ je njen drugi kovarijantni diferencijal $H^f = D(Df)$.*

Lema 4.9.1. *Hesijan H^f od f je simetrično $\binom{0}{2}$ tenzorsko polje tako da je*

$$H^f(X, Y) = XYf - (D_X Y)f = \langle D_X(grad\, f), Y \rangle.$$

Dokaz: Kako je $Df = df$, to je

$$H^f(X, Y) = D(df)(X, Y) = D_Y(df)(X) = Y(df(X)) - df(D_Y X) =$$

$$= YXf - (D_Y X)f.$$

Kako je $XY - YX = [X, Y] = D_X Y - D_Y X$, to možemo međusobno zameniti X i Y u prethodnoj formuli. Dakle H^f je simetrična. Na kraju imamo da je

$$\langle D_X(grad\, f), Y \rangle = X \langle grad\, f, Y \rangle - \langle grad\, f, D_X Y \rangle = H^f(X, Y). \blacksquare$$

Definicija 4.9.3. *Laplasijan Δf funkcije $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ je divergencija od njenog gradijenta: $\Delta f = div(grad\, f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

Kako kovarijantni diferencijal komutira sa operacijama podizanja i spuštanja indeksa, to je Laplasijan od f kontrakcija od njenog Hesijana. U stvari imamo da je

$$\Delta f = div(grad\, f) = CD(grad\, f) = CD(\uparrow_1^1 df) =$$

$$= C \uparrow_1^1 Ddf = (C \uparrow_1^1) H^f = C_{12}(H^f).$$

Za proizvoljnu kartu $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$ komponente od Hesijana se mogu odrediti na osnovu gornje leme. Otuda je koordinatni izraz za Laplasijan od f oblika

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} H_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\}.$$

Za prirodne koordinate (određene i-tim projekcijama) od $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\nu}}$ komponente od H^f su baš drugi parcijalni izvodi $\partial^2 f / \partial u^i \partial u^j$ i važi $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \, \partial^2 f / \partial (u^i)^2$, što se svodi na standardnu formulu u $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}$.

4.10 Ricci-jeva i skalarna krivina

Definicija 4.10.1. *Neka je R tenzor Rimanove krivine od M.* **Tenzor Ricci-jeve krivine** *je kontrakcija $C_3^1(R) \in \mathcal{T}_2^0(M)$, čije su komponente s obzirom na proizvoljnu kartu oblika $R_{ij} = \sum_{m=1}^{n} R_{ijm}^m$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tenzor Ricci-jeve krivine od M se označava sa Ric.*

Lema 4.10.1. *Tenzor Ricci-jeve krivine Ric je simetričan i s obzirom na okvirno polje je dat formulom*

$$Ric(X, Y) = \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m \langle R_{X E_m} Y, E_m \rangle,$$

pri čemu je $\epsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$, za sve $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz: Kao i ranije, koristićemo jednostavniju notaciju $R(X, Y, E_m) = R_{Y E_m} X$. Otuda je

$$Ric(X, Y) = (C_3^1\, R)(X, Y) = \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m \langle E_m, R(X, Y, E_m) \rangle =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m \langle R_{Y E_m} X, E_m \rangle.$$

Na osnovu simetrije po parovima dobijamo traženu formulu i da je *Ric* simetričan. ■

Ako je Ricci-jev tenzor identički jednak nuli, onda za mnogostrukost M kažemo da je **Ricci ravna**. Svaka ravna mnogostrukost je i Ricci ravna, dok obrnuto ne mora da važi.

Kako sekciona krivina određuje tenzor krivine R, to ona takođe određuje Ric. Koristeći se pridruženom kvadratnom formom i osobinama skalarnog proizvoda, Ric može biti rekonstruisana u svakoj tački $p \in M$ na osnovu njegovih vrednosti $Ric(u,u)$ u jediničnim vektorima u tački p. Ako je $e_1, e_2 \ldots, e_n$ okvir od M u tački p tako da je $u = e_1$, tada je na osnovu prethodne leme

$$Ric(u,u) = \sum_{m=1}^{n} \epsilon_m \langle R_{ue_m}(u), e_m \rangle = \sum_{m=2}^{n} \epsilon_m \langle R_{ue_m}(u), e_m \rangle =$$

$$= \langle u,u \rangle \sum_{m=2}^{n} K(u, e_m).$$

Dakle, $Ric(u,u)$ je suma sekcionih krivina od $n-1$ ortogonalnih nedegenerisanih ravni kroz u pomnožena sa $\langle u,u \rangle = \pm 1$.

Definicija 4.10.2. *Skalarna krivina S od M je metrička kontrakcija $C(Ric) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ Ricci-jevog tenzora.*

Ako je $\psi = (x^1, \ldots, x^n)$ karta od M, onda je

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij} R^k_{ijk}.$$

Kontrakovanjem s obzirom na okvirno polje imamo da je

$$S = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} K(E_i, E_j) = 2 \sum_{1 \le i < j \le n} K(E_i, E_j).$$

Naredna posledica je posledica drugog Bjankijevog identiteta. Ona je ključna za otkrića u teoriji relativiteta.

Posledica 4.10.1. *$dS = 2\, div\, Ric$.*

Dokaz: Da bi izrazili drugi Bjankijev identitet $\Sigma(D_Z R)_{XY} = 0$ u terminima koordinata, primenimo ga prvo na

$$(D_{\partial_r} R)_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jkl;r}\, \partial_i$$

da bi smo dobili jednačinu

$$R^i_{jkl;r} + R^i_{jlr;k} + R^i_{jrk;\,l} = 0,$$

za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zamenimo međusobno indekse r i k u trećem sabirku poslednje jednačine (naravno uz promenu znaka), a zatim kontrakujmo jednačinu po indeksima i i r. Otuda je

$$\sum_{r=1}^{n} R^r_{jkl;r} + \sum_{r=1}^{n} R^r_{jlr;k} - \sum_{r=1}^{n} R^r_{jkr;l} = 0. \qquad (1)$$

Vidimo da je

$$\sum_{r=1}^{n} R^r_{jlr;k} = \sum_{r=1}^{n} DR(dx^r, \partial_j, \partial_l, \partial_r, \partial_k) = C^1_3 DR(\partial_j, \partial_l, \partial_k) =$$

$$= D(C^1_3 R)(\partial_j, \partial_l, \partial_k) = D(Ric)(\partial_j, \partial_l, \partial_k) = R_{jl;k}.$$

Analogno se može izvesti da je $\sum_{r=1}^{n} R^r_{jkr;\,l} = R_{jk;l}$, pa jednakost (1) postaje

$$\sum_{r=1}^{n} R^r_{jkl;r} + R_{jl;k} - R_{jk;l} = 0.$$

Pomnožimo poslednju jednakost sa g^{jk}, a zatim izvršimo sabiranje po indeksima j i k. Time dobijamo sledeću jednakost

$$\sum_{r,j,k=1}^{n} g^{jk} R^r_{jkl;r} + \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} R_{jl;k} - \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} R_{jk;l} = 0. \qquad (2)$$

Kako je

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} R_{jk;l} = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} D(Ric)(\partial_j, \partial_k, \partial_l) = \sum_{k=1}^{n} D(Ric)(\sum_{j=1}^{n} g^{jk}\partial_j, \partial_k, \partial_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \uparrow^1_1 D(Ric)(dx^k, \partial_k, \partial_l) = \sum_{k=1}^{n} D(\uparrow^1_1 Ric)(dx^k, \partial_k, \partial_l) = C^1_1 D(\uparrow^1_1 Ric)(\partial_l) =$$

$$= D(C^1_1 \uparrow^1_1 Ric)(\partial_l) = D(C_{12} Ric)(\partial_l) = DS(\partial_l) = S_{;l},$$

to jednakost (2) postaje

$$\sum_{r,j,k=1}^{n} g^{jk} R^r_{jkl;r} + \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} R_{jl;k} - S_{;\,l} = 0. \qquad (3)$$

Vidimo da je

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} R_{jl;k} = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} D(Ric)(\partial_j, \partial_l, \partial_k) = \sum_{k=1}^{n} D(Ric)(\sum_{j=1}^{n} g^{jk}\partial_j, \partial_l, \partial_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \uparrow_1^1 D(Ric)(dx^k, \partial_l, \partial_k) = \sum_{k=1}^{n} D(\uparrow_1^1 Ric)(dx^k, \partial_l, \partial_k) = \sum_{m=1}^{n} R_{l;m}^m.$$

Sa druge strane imamo da je

$$\sum_{r,j,k=1}^{n} g^{jk} R_{jkl;r}^r = \sum_{r,j,k=1}^{n} g^{jk} DR(dx^r, \partial_j, \partial_k, \partial_l, \partial_r) =$$

$$= \sum_{r,k=1}^{n} DR(dx^r, \sum_{j=1}^{n} g^{jk}\partial_j, \partial_k, \partial_l, \partial_r) = \sum_{r,k=1}^{n} \uparrow_1^2 DR(dx^r, dx^k, \partial_k, \partial_l, \partial_r) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_1^2 \uparrow_1^2 DR(dx^r, \partial_l, \partial_r) = \sum_{r=1}^{n} D(C_1^2 \uparrow_1^2 R)(dx^r, \partial_l, \partial_r).$$

Dokažimo da je $C_1^2 \uparrow_1^2 R = \uparrow_1^1 C_3^1 R$ $(= \uparrow_1^1 Ric)$.

Poslednja jednakost je tačna s obzirom da za proizvoljnu kartu $\psi = (x^1, \dots, x^n)$ i proizvoljne $r, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ imamo da je

$$C_1^2 \uparrow_1^2 R(dx^r, \partial_l) = \sum_{k=1}^{n} \uparrow_1^2 R(dx^r, dx^k, \partial_k, \partial_l) = \sum_{k=1}^{n} R(dx^r, \sum_{s=1}^{n} g^{sk}\partial_s, \partial_k, \partial_l) =$$

$$= \sum_{s,k=1}^{n} g^{sk} R(dx^r, \partial_s, \partial_k, \partial_l) = \sum_{s,k=1}^{n} g^{sk} dx^r(R(\partial_s, \partial_k, \partial_l)) =$$

$$= \sum_{s,k=1}^{n} g^{sk} (\sum_{t=1}^{n} g^{rt}\partial_t)^*(R(\partial_s, \partial_k, \partial_l)) = \sum_{k,t,s=1}^{n} g^{sk} g^{rt}\, \partial_t^*(R(\partial_s, \partial_k, \partial_l)) =$$

$$= \sum_{k,t,s=1}^{n} g^{sk} g^{rt} \langle R_{\partial_k \partial_l} \partial_s, \partial_t \rangle = \sum_{k,t,s=1}^{n} g^{sk} g^{rt} \langle R_{\partial_l \partial_k} \partial_t, \partial_s \rangle =$$

$$= \sum_{k,t,s=1}^{n} g^{sk} g^{rt}\, \partial_s^*(R(\partial_t, \partial_l, \partial_k)) = \sum_{k,t=1}^{n} g^{rt}\, (\sum_{s=1}^{n} g^{sk}\partial_s)^*(R(\partial_t, \partial_l, \partial_k)) =$$

$$= \sum_{k,t=1}^{n} g^{rt}\, dx^k(R(\partial_t, \partial_l, \partial_k)) = \sum_{k,t=1}^{n} g^{rt} R(dx^k, \partial_t, \partial_l, \partial_k) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} g^{rt} \sum_{k=1}^{n} R(dx^k, \partial_t, \partial_l, \partial_k) = \sum_{t=1}^{n} g^{rt} C_3^1 R(\partial_t, \partial_l) = C_3^1 R(\sum_{t=1}^{n} g^{rt}\partial_t, \partial_l) =$$

$$= \uparrow_1^1 C_3^1 R(dx^r, \partial_l).$$

Na osnovu poslednja dva niza jednakosti zaključujemo da je prvi član u jednakosti (3) jednak sa $\sum_{m=1}^{n} R^m_{l;m}$. Otuda imamo da jednakost (3) postaje

$$2\sum_{m=1}^{n} R^m_{l;m} = S_{;l}.$$

Za levu stranu poslednje jednakosti imamo da je

$$2\sum_{m=1}^{n} R^m_{l;m} = 2\sum_{m=1}^{n} D(\uparrow^1_1 Ric)(dx^m, \partial_l, \partial_m) = 2C^1_2 \uparrow^1_1 (D\,Ric)(\partial_l) = 2div(Ric)(\partial_l),$$

a za desnu stranu imamo da je $S_{;l} = DS(\partial_l) = dS(\partial_l)$. ■

4.11 Proizvod semi-Rimanovih mnogostrukosti

Da bismo videli kako geometrija semi-Rimanovog proizvoda $M \times N$ zavisi od onih na mnogostrukostima M i N biće nam neophodan pojam podizanja o kome je bilo reči u poglavlju 2.1.9. Ako je $X \in \mathcal{T}^1_0(M)$, onda ćemo koristiti istu notaciju za horizontalno podizanje $X \in \Omega(M) \subset \mathcal{T}^1_0(M \times N)$. Slično ćemo za vertikalno podizanje od $V \in \mathcal{T}^1_0(N)$ koristiti oznaku $V \in \Omega(N)$.

Propozicija 4.11.1. *Ako $X, Y \in \Omega(M)$ i $V, W \in \Omega(N)$, onda je*

1. *$D_X Y$ je podizanje od ${}^M D_X Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$.*
2. *$D_V W$ je podizanje od ${}^N D_V W \in \mathcal{T}^1_0(N)$.*
3. *$D_V X = 0 = D_X V$.* ■

Ovo tvrđenje se može dokazati korišćenjem Koszul-ove formule, teorije iz proizvoda mnogostrukosti i skalarnog proizvoda koji je određen lemom 4.1.1., str. 42.

Posledica 4.11.1.
1. *Kriva $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$ u $M \times N$ je geodezijska linija ako i samo ako su njene projekcije α u M i β u N obe geodezijske linije.*
2. *$M \times N$ je kompletna ako i samo ako su M i N kompletne.* ■

Dokaz prvog dela je posledica jedne opštije priče koju ovde nećemo razmotriti (videti [4, str. 89]). Drugi deo posledice je posledica prvog dela.

Primenjujući prethodnu propoziciju i posledicu 2.9.1., str. 21, na definiciju krivine imamo da važi sledeća propozicija.

Propozicija 4.11.2. *Ako su na $M \times N$ dati $X, Y, Z \in \Omega(M)$ i $U, V, W \in \Omega(N)$, onda važi sledeće:*

1. *$R_{XY}Z$ je podizanje od ${}^M R_{XY}Z$.*
2. *$R_{VW}U$ je podizanje od ${}^N R_{VW}U$.*
3. *R je nula za bilo koji drugi izbor $X, \dots, U$.* ■

Ovi tenzorski rezultati važe i za individualne tangentne vektore. Otuda sledi da je sekciona krivina od nedegenerisane horizontalne ravni ista kao i njena projekcija na M. Analogan rezultat važi i za vertikalnu ravan. Nedegenerisana ravan koja je generisana sa vertikalnim i horizontalnim vekotrom ima $K = 0$ jer je $R_{xv} = 0$. Otuda uvek postoji neka ravnina u proizvodu semi-Rimanovih mnogostrukosti.

4.12 Izometrije i lokalne izometrije

Pojam izometrije je od velikog značaja za teoriju semi-Rimanovih mnogostrukosti.

Definicija 4.12.1. *Neka su M i N semi-Rimanove mnogostrukosti sa metričkim tenzorima g_M i g_N. Difeomorfizam $\phi : M \to N$ se naziva* **izometrija iz** *M* **u** *N, ako očuvava metrički tenzor tj. $\phi^*(g_N) = g_M$.*

Eksplicitno, $\langle d\phi(v), d\phi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, za sve $v, w \in T_p(M)$ i sve $p \in M$. Kako je ϕ difeomorfizam to je za svako $p \in M$ diferencijalno preslikavanje $d\phi_p$ linearni izomorfizam (teorema 2.4.1. str. 12). Odatle, uz dati metrički uslov, zaključujemo da je $d\phi_p$ linearna izometrija, za svako $p \in M$.

Može se dokazati da važi sledeće:

1. Identičko preslikavaje na semi-Rimanovoj mnogostrukosti je izometrija.
2. Kompozocija izometrija je izometrija.
3. Inverzno preslikavanje od izometrije je izometrija.

Objekti koji ostaju očuvani (u odgovarajućem smislu) s obzirom na sve izometrije se nazivaju **izometrijske invarjante**. Glavni zadatak semi-Rimanove geometrije je da proučava te invarijante. Ako postoji izometrija iz M na N, onda kažemo da su semi-Rimanove mnogostrukosti M i N izometrične.

Neka je V konačno dimenzionalan realan vektorski prostor koji je snabdeven sa skalarnim proizvodom. Tada je V mnogostrukost i baš kao i u slučaju $V = \boldsymbol{R^n}$ formula

$$\langle v_p, w_p \rangle = \langle v, w \rangle, \; p \in V,$$

definiše metrički tenzor na V.

Lema 4.12.1. *Ako je $\psi : V \to W$ linearna izometrija vektorskih prostora koji su snabdeveni sa skalarnim proizvodom, onda je (za V i W koji su semi-Rimanovi kao i gore) $\psi : V \to W$ izometrija.*

Dokaz: Kako su linearna preslikavanja između vektorskih prostora glatka, to je linearni izomorfizam ψ difeomorfizam. Neka je $v \in V$ i neka je $\alpha(t) = p + t\,v$. Tada je $\psi \circ \alpha(t) = \psi(p) + t\,\psi(v)$, a po definiciji je $v_p = \alpha'(0)$. Odtle imamo da je $d\psi(v_p) = d\psi(\alpha'(0)) = d\psi(d\alpha(\frac{\partial}{\partial t}|_0)) = d(\psi \circ \alpha)(\frac{\partial}{\partial t}|_0)) = (\psi(v))_{\psi(p)}$.

Otuda ψ očuvava metrički tenzor s obzirom da je

$$\langle d\psi(v_p), d\psi(w_p) \rangle = \langle \psi(v)_{\psi(p)}, \psi(w)_{\psi(p)} \rangle = \langle \psi(v), \psi(w) \rangle = \langle v, w \rangle =$$
$$= \langle v_p, w_p \rangle. \; \blacksquare$$

Neka je V realan vektorski prostor koji je snabdeven sa standardnim skalarnim proizvodom i neka su dimenzija i indeks tog prostora redom prirodni brojevi n i ν. Na osnovu poslednje leme vidimo da je vektorski prostor V kao semi-Rimanova mnogostrukost izometričan sa $\boldsymbol{R^n_\nu}$ (videti i lemu 4.4., str. 38). Šta više, svaki koordinatni izomorfizam bilo koje ortonormirane baze od V je linearna izometrija.

Ako je M semi-Rimanova mnogostrukost, onda njen metrički tenzor „pretvara" svaki njen tangentni prostor u semi-Euklidski prostor koji ima istu dimenziju i indeks kao i semi-Rimanova mnogostrukost M.

Različite karakteristike semi-Rimanove geometrije koje su do sada definisane su izometrijske invarijantne tj. svaka od njih je, u određenom smislu, očuvana pri izometriji. Ovo je gotovo očigledno s obzirom na činjenicu da je svaka od njih konstruisana (uz pomoć alata iz teorije mnogostrukosti) od metričkih tenzora, dok sa druge strane izometrija očuvava metričke tenzore (kao i pomenute alate iz teorije mnogostrukosti). Na primer, Levi-Civita konekcije su očuvane u narednom smislu.

Propozicija 4.12.1. *Ako je $\phi : M \to N$ izometrija, onda je*

$$d\phi(D_X Y) = D_{d\phi(X)}(d\phi(Y)),$$

za sve $X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$.

Dokaz: Podsetimo se na to da je vrednost prenešenog vektorskog polja $d\phi(X)$ u tački $\phi(p)$ jednaka $d\phi(X_p)$.

Kako je ϕ difeomorfizam, to za svaku tačku $p \in M$ postoji karta $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ od M oko p i karta $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ od N oko $\phi(p)$ za koju važi $y^i(\phi(q)) = x^i(q)$, za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ i sve tačke q u okolini tačke p (kompozicija $(y^1 \circ \phi, \dots, y^n \circ \phi) = \eta \circ \phi$ difeomorfizama η i ϕ je difeomorfizam, a time i karta od M). Otuda se može dokazati da ϕ očuvava koordinatna vektorska polja i parcijalne izvode. Zaista, za proizvoljne $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, proizvoljno q iz domena karte ξ i proizvoljno $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ imamo da je

$$d\phi(\partial_i|_q)(y^j) = \partial_i|_q(y^j \circ \phi) = \partial_i|_q(x^j) = \delta_{ij},$$

kao i da je

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x^i}(q) = \frac{\partial(f \circ \phi \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(q)) = \frac{\partial(f \circ \eta^{-1})}{\partial u^i}(\eta(\phi(q))) = \frac{\partial f}{\partial y^i}(\phi(q)).$$

Tada su i komponente od X i $Y = d\phi(X)$ očuvane jer je

$$Y^i(\phi(q)) = Y_{\phi(q)}(y^i) = (d\phi(X_q))y^i = X_q(y^i \circ \phi) = X_q(x^i) = X^i(q).$$

Kako je ϕ izometrija to komponente metričkih tenzora ostaju očuvane tj. $g^N_{ij}(\phi(q)) = g^M_{ij}(q)$, za sve $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ i sve $q \in M$. Na osnovu formule iz drugog dela propozicije 4.2.2., str. 46, imamo da Kristofelovi simboli ostaju očuvani. Otuda na osnovu formule iz prvog dela propozicije 4.2.2., str. 46, sledi tvrđenje ove propozicije. ■

Lokalni karakter ovog dokaza sugeriše na to da ovakvi invarijanti rezultati mogu biti prošireni na šire klase preslikavanja.

Definicija 4.12.2. *Glatko preslikavanje $\phi : M \to N$ semi-Rimanovih mnogostrukosti se naziva* **lokalna izometrija** *ako je svako diferencijalno preslikavanje $d\phi|_p : T_p(M) \to T_{\phi(p)}(N)$ linearna izometrija.*

Sa stanovišta teoreme inverzne funkcije može se dati ekvivalentna formulacija termina lokalne izometrije: Svaka tačka $p \in M$ ima okolinu $\mathcal{U}$ tako da je $\phi|\mathcal{U}$ izometrija sa $\mathcal{U}$ na neku okolinu od N oko $\phi(p)$.

Primer: Neka je S^1 jedinična kružnica u $\boldsymbol{R^2}$. Eksponencijalno preslikavanje $exp : \boldsymbol{R^1} \to S^1$ zamotava liniju glatko oko kružnice pomoću preslikavanja $t \to (cos\, t, sin\, t)$. Ako S^1 posmatramo kao semi-Rimanovu podmnogostrukost od $\boldsymbol{R^2}$, onda je exp lokalna izometrija. (Dovljno je proveriti da, kao kriva u $\boldsymbol{R^2}$, exp ima jediničnu brzinu.)

Na osnovu gornjeg kriterijuma za lokalne izometrije, svaki objekat lokalnog (ili tačkastog) karaktera koji ostaje očuvan nakon dejstva izometrije će automatski biti očuvan i nakon dejstva lokalne izometrije $\phi : M \to N$. Evo nekih primera.

Primer:

1. *Indukovani kovarijantni izvod na krivoj.* Ako je Y vektorsko polje na krivoj α u M, onda je $(d\phi Y)' = d\phi(Y')$, pri čemu je $(d\phi Y)(s) = d\phi(Y(s))$, za sve s. (Dokaz ovoga tvrđenja se blago razlikuje od dokaza prethodne propozicije.) Otuda imamo sledeće:

2. *Paralelna translacija.* Neka je P paralelna translacija iz $\alpha(a)$ u $\alpha(b)$ duž krive α u M. Neka je $\overline{P}$ paralelna translacija iz $\phi(\alpha(a))$ u $\phi(\alpha(b))$ duž krive $\phi \circ \alpha$ u N. Tada je $d\phi_{\alpha(b)} \circ P = \overline{P} \circ d\phi_{\alpha(a)}$. Takođe imamo sledeće:

3. *Geodezijske linije.* Ako je γ geodezijska linija u M, tada je $\phi \circ \gamma$ geodezijska linija u N. Otuda je $\phi \circ \gamma_v = \gamma_{d\phi v}|I_v$, jer su obe strane geodezijske linije sa istom inicijalnom brzinom. (Domen od $\gamma_{d\phi v}$ može biti širi nego I_v. Primer za to je inkluzivno preslikavanje ϕ otvorenog diska u $\boldsymbol{R}^2$.) Otuda imamo sledeće:

4. *Eksponencijalno preslikavanje.* Važi $\phi \circ exp_p = exp_{\phi(p)} \circ d\phi_p$, kad god je leva (a otuda i desna strana) definisana.

5. *Tenzori Rimanove krivine.* $d\phi(R(x,y)z) = R(d\phi(x), d\phi(y))(d\phi(z))$. (Ovo sledi direktno na osnovu definicije od R, jer lokalna izometrija lokalno očuvava obe zagrade i kovarijantne izvode.) Otuda imamo sledeće:

6. *Sekciona krivina.* $K_N(d\phi\,\Pi) = K_M\Pi$ za sve nedegenerisane tangentne ravni na M. Ricci-jeva krivina: $\phi^*(Ric_N) = Ric_M$. Zaista, neka su $X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ proizvoljna vektorska polja, neka je $p \in M$ proizvoljna tačka i neka su $(\xi = (x^1, \ldots, x^n), \mathcal{U})$ i $(\eta = (y^1, \ldots, y^n), \mathcal{V})$ redom karte od M oko p i od N oko $\phi(p)$ takve da je $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ difeomorfizam i $\xi = \eta \circ \phi$. Tada, za tačku p imamo da je

$$\phi^*(Ric_N)(X,Y)(p) = Ric_N(d\phi(X), d\phi(Y))(\phi(p)) =$$

$$= Ric_N(\sum_{i=1}^{n} d\phi(X)(y^i)\,\partial_i^N, \sum_{j=1}^{n} d\phi(Y)(y^j)\,\partial_j^N)(\phi(p)) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} d\phi(X)(y^i)(\phi(p))\, d\phi(Y)(y^j)(\phi(p))\, Ric_N(\partial_i^N, \partial_j^N)(\phi(p)) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} X_p(y^i \circ \phi) Y_p(y^j \circ \phi)\, Ric_N(\partial_i^N, \partial_j^N)(\phi(p)) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} X_p(y^i \circ \phi) Y_p(y^j \circ \phi) \sum_{m=1}^{n} R_{\partial_j^N \partial_m^N} \partial_i^N(\phi(p))(y^m) =$$

$$= \sum_{i,j,m=1}^{n} X_p(y^i \circ \phi) Y_p(y^j \circ \phi) R_{d\phi(\partial_j^M) d\phi(\partial_m^M)} d\phi(\partial_i^M)(\phi(p))(y^m) =$$

$$= \sum_{i,j,m=1}^{n} X_p(y^i \circ \phi) Y_p(y^j \circ \phi) d\phi(R_{\partial_j^M \partial_m^M} \partial_i^M)(\phi(p))(y^m) =$$

$$= \sum_{i,j,m=1}^{n} X_p(y^i \circ \phi) Y_p(y^j \circ \phi) R_{\partial_j^M \partial_m^M} \partial_i^M(p)(y^m \circ \phi) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} X_p(x^i) Y_p(x^j) \sum_{m=1}^{n} R_{\partial_j^M \partial_m^M} \partial_i^M(p)(x^m) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} X_p(x^i) Y_p(x^j) Ric_M(\partial_i^M, \partial_j^M)(p) =$$

$$= Ric_M(\sum_{i=1}^{n} X(x^i)\partial_i^M, \sum_{j=1}^{n} Y(x^j)\partial_j^M)(p) = Ric_M(X,Y)(p).$$

Skalarna krivina: $S_N \circ \phi = S_M$. Zaista, neka je $p \in M$ proizvoljna tačka i neka su $(\xi = (x^1, \ldots, x^n), \mathcal{U})$ i $(\eta = (y^1, \ldots, y^n), \mathcal{V})$ redom karte okoline od M oko p i od N oko $\phi(p)$ tako da je $\xi = \eta \circ \phi$ i da je $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ difeomorfizam. Tada imamo da je

$$S_M(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g_p^{ij} Ric_M(\partial_i^M, \partial_j^M)(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g_p^{ij} \phi^*(Ric_N)(\partial_i^M, \partial_j^M)(p) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_p^{ij} Ric_N(d\phi(\partial_i^M), d\phi(\partial_j^M))(\phi(p)) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{\phi(p)}^{ij} Ric_N(\partial_i^N, \partial_j^N)(\phi(p)) =$$

$$= S_N(\phi(p)) = S_N \circ \phi(p).$$

Lokalna izometrija je jedinstveno određena diferencijalnim preslikavanjem u tački.

Propozicija 4.12.2. *Neka su $\phi, \psi : M \to N$ lokalne izometrije povezane semi-Rimanove mnogostrukosti M. Ako postoji tačka $p \in M$ takva da je $d\phi_p = d\psi_p$ (odakle je $\phi(p) = \psi(p)$), onda je $\phi = \psi$.*

Dokaz: Neka je $A = \{q \in M : d\phi_q = d\psi_q\}$. Ako je $M \backslash A = \{q \in M : d\phi_q \neq d\psi_q\}$ neprazan skup, onda je on otvoren zbog glatkosti preslikavanja $d\psi$ i $d\phi$. Dakle, vidimo da je A zatvoren skup. Kako je A neprazan skup to je dovoljno dokazati da je A otvoren. Dokažimo da ako $q \in A$, onda je neka normalna okolina $\mathcal{U}$ oko q sadržana u A. Ako $r \in \mathcal{U}$, onda postoji vektor $v \in T_q(M)$ tako da je $\gamma_v(1) = exp_q(v) = r$. Otuda je

$$\phi(r) = \phi(\gamma_v(1)) = \gamma_{d\phi v}(1) = \gamma_{d\psi v}(1) = \psi(\gamma_v(1)) = \psi(r).$$

Otuda je $\phi = \psi$ na $\mathcal{U}$, pa je odatle $d\phi_r = d\psi_r$, za sve $r \in \mathcal{U}$. ■

Glatko preslikavanje $\psi : M \to N$ semi-Rimanovih mnogostrukosti se naziva **konformno** ako je $\psi^*(g_N) = h \cdot g_M$ za neku funkciju $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ za koju je ili $h > 0$ ili $h < 0$.

Definicija 4.12.3. *Difeomorfizam $\psi : M \to N$ semi-Rimanovih mnogostrukosti takav da je $\psi^*(g_N) = cg_M$ za neku konstantu $c \neq 0$ se naziva* **homotetija sa koeficijentom** *c. Ako je $c > 0 (c < 0)$, onda se ψ naziva* **pozitivna(negativna) homotetija sa skalarnim faktorom** $|c|^{\frac{1}{2}}$.

Na primer, u $\boldsymbol{R^{n+1}}$ standardni skalarni proizvod pomnožen sa b/a je pozitivna homotetija iz $S^n(a)$ u $S^n(b)$ sa skalarnim faktorom b/a. Izometrija je homotetija sa $c = 1$. Ako je $c = -1$, onda se ψ naziva anti-izometrija.

Za homotetiju $\psi : M \to N$ sa skalarnim faktorom $|c|^{1/2}$ je

$$\langle d\psi(v), d\psi(w)\rangle = c\langle v, w\rangle, \text{ za sve } v, w \in T_p(M)$$

i sve $p \in M$. Vidimo da su svi skalarni proizvodi „rastegnuti" za istu konstantu c.

Lema 4.12.2. *Homotetije očuvavaju Levi-Čivita konekciju.*

Dokaz: Ako je $\psi : M \to N$ homotetija sa koeficijentom c, onda neka je N' glatka mnogostrukost N koja je snabdevena sa novim metričkim tenzorom cg_N. Tada je $\psi : M \to N'$ izometrija koja očuvava konekciju.

Ostaje još da dokažemo da cg_N i g_N određuju istu Levi-Čivita konekciju. Međutim, ovo sledi na osnovu Koszul-ove formule jer se metrički tenzor pojavljuje tačno po jednom u svakom članu, pa se otuda koeficijent c poništava. ■

Napomena. Efekti homotetije.

1. Kako homotetija očuvava Levi-Čivita konekciju to ona očuvava sve geometrijske pojmove koji se izvode od D, posebno indukovani kovarijantni izvod na krivi, paralelnu translaciju, geodezijske linije, Rimanovu krivinu R i Ricci-jevu krivinu (Ric je nemetrička kontrakcija od R.).

2. Sekciona i skalarna krivina nisu invarijantni pod dejstvom homotetije. U stvari, ako homotetija $\psi : M \to N$ ima koeficijent c, onda se može dokazati da je

$$K_N(d\psi\,\Pi) = \frac{1}{c} K_M \Pi \quad \text{i} \quad S_N \circ \psi = \frac{1}{c} S_M.$$

3. Homotetija sa koeficijentom $c > 0$ očuvava kauzalni karakter tangentnih vektora (otuda i od krivih). Homotetija sa koeficijentom $c < 0$ menja kauzalni karakter tangentnih vektora tj. ako je v vremenski onda je $d\psi(v)$ prostorni, a ako je v prostorni onda je $d\psi(v)$ vremenski, a ako je v nulti onda je $d\psi(v)$ nulti.

Operacija menjanja semi-Rimanove mnogostrukosti M sa metričkim tenzorom g u istu glatku mnogostrukost sa metričkim tenzorom $-g$ se naziva **preokretanje metrike od** M. Na osnovu gornje napomene efekat ove operacije na geometriju je očigledan.

Literatura

[1] Abraham, R., Marsden J.E., *Foundations of Mechanics*, second edition Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1978.

[2] Kunzinger, M., *Differential Geometry 1*, lecture notes, University of Vienna, Vienna, 2008.

[3] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, revised second edition Elsevier, USA, 2006.

[4] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[5] Perišić, D., Pilipović, S., Stojanović, M., *Funkcije više promenljivih; Diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1997.

[6] Sternberg, S., *Semi-Riemann Geometry and General Relativity*, e-book, Orange Grove Text Plus, 2006.

[7] Dragović, V., Milinković, D., *Analiza na mnogostrukostima. Primene u geometriji, mehanici, topologiji* , Matematički fakultet, Beograd, 2003.

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet

Ključna dokumentacijske informacije

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: VR	
Autor: AU	
Mentor: MN	
Naslov rada: NR	

Jezik publikacije: JP	
Jezik izvoda: JI	s/en
Zemlja publikovanja: ZP	
Uže geografsko područje: UGP	
Godina: GO	
Izdavač: IZ	autorski reprint
Mesto i adresa: MA	
Fizički opis rada: FO	(broj poglavlja / strana / lit. citata / tabela / slika / grafika / priloga)

Naučna oblast: NO	
Naučna disciplina: ND	
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	
UDK	
Čuva se: ČU	
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: DP	

Datum odbrane: DO	
Članovi komisije: (naučni stepen / ime i prezime / zvanje / fakultet) KO	predsednik: član: član:

University of Novi Sad
Faculty of Natural Sciences And Mathematics

Key word documentation

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Tekstual printed material
Contents code: CC	
Author: AU	
Mentor: MN	
Title: TI	

Language of text: LT	
Language of abstract: LA	en/s
Country of publication: CP	
Locality of publication: LP	
Publication year: PY	
Publisher: PU	
Publ. place: PP	
Physical decription: PD	

Scientific field: SF	
Scientific discipline: SD	
Subject Key words: SKW	
UC	
Holding data: HD	
Note: N	
Abstract: AB	
Accepted on Scientific Board on: AS	

Defended: DE	
Thesis Defend board: DB	president: member: member:

Biografija

Branko Radanović je rođen 17.10.1987. godine u Novom Sadu u Republici Srbiji. 2006. godine je počeo da studira na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planovima i programima sa prosečnom ocenom 9,89 na osnovnim studijama i prosečnom ocenom 9,85 na master studijama.

Novi Sad, 17. mart 2012. godine | Branko Radanović