	УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ПРИРОДНО МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ	

Бојана Јанковић

ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Мастер рад

Нови Сад, 2012. године

САДРЖАЈ

Предговор

Рад садржи теоријски приступ Диофантовим једначинама и већи број урађених задатака. Већина урађених задатака је са математичких такмичења, те сматрам да овај рад може бити од помоћи у припреми ученика за такмичење.

Мастер рад се бави Диофантовим једначинама, од математичких ребуса, који су по наставном плану предвиђени да се обрађују у четрвртом разреду основне школе, па све до Пелове једначине, као најсложеније Диофантове једначине у програмској настави, која се по наставном плану ради у другом разреду математичке гимназије.

Рад садржи три основне тематске целине. Прва представља историјски осврт на Диофанта и његову аритметику. Друга се бави методама за решавање Диофантових једначина, а трећа целина представља различите типове Диофантових једначина.

Уводни део садржи разлоге за одабир теме овог рада и указивање на делове наставног плана и програма за основне и средње школе који се односе на Диофантове проблеме и једначине. У првом делу дата је биографија Диофанта и приказано је његово бављење аритметиком кроз историју. Други део садржи више метода за решавање Диофантових једначина: разликовање случајева, производа, количника, збира, неједнакости, парности, дељивости, дискриминанте, Ојлера и Диофанта. Трећи део садржи неке типове Диофантових једначина: математички ребуси, магичне фигуре, једначине једне променљиве, линеарне једначине, једначине степена већег од 1, ирационалне једначине, експоненцијалне једначине и Пелова једначина.

Моје образовање, као и овај рад, није плод само мог труда већ и залагања других људи, па је ред да се овом приликом захвалим. Кроз школовање помогли су ми у мом математичком образовању наставници: Желимир Станојевић, Анђелија Чугуровић и Душан Томић. У стицању нових знања током основних и мастер студија ми је пуно помогао ментор овог мастер рада професор др Драгослав Херцег, на чему му захваљујем. Такође захвалност и професорима др Ђури Паунић и др Ђурђици Такачи, који су прихватили да буду чланови комисије у оцени мог мастер рада и помогли својим сугестијама.

Посебну захвалност дугујем мојој породици: брату Немањи, мајци Гордани и оцу Велемиру, који су много помогли да истрајем, завршим студије и стекнем звање дипломирани професор математике-мастер.

Хвала свима!

Нови Сад, септембар 2012. Бојана Јанковић

1. Увод

1.1 Зашто Диофантове једначине

Од више, веома битних разлога, за избор Диофантових једначина у основној и средњој школи, за тему овог мастер рада, издвајам следеће:

- Програмски садржаји кроз основно и средњошколско образовање

Диофантове једначине нису експлицитно садржане у програмима редовне наставе математике у основној и средњој школи. Међутим, појављују се често у задацима и проблемима који се решавају, а посебно на такмичењима вишег нивоа из математике. Скоро на сваком такмичењу појављују се задаци из алгебре који су везани за проблематику Диофантових једначина.

- Историјски

Допринос Диофанта математици, а пре свега аритметици, је значајан. Њега зову „оцем" аритметике, и сматрам да заслужује да се његов допринос више изучава и публикује, и да би наставници математике требало да ученицима приближе Диофантове једначине.

- Значај Диофантових једначина

Диофантове једначине су значајне јер представљају синтезу скоро свих садржаја теорије бројева (дељивост бројева, прости бројеви, конгруенција ...), теорије једначина, полинома, неједнакости, математичке логике...

- Методички

Ово је можда и најважнији разлог. Замисао ми је била да на једном месту обрадим важније Диофантове једначине и да се на основу мог рада може овладати методама за решавање Диофантових једначина, развити способност за уочавање, формулисање, анализирање и решавање проблема који се своде на Диофантове једначине.

Појам Диофантове једначине уводим кроз примере, водећи рачуна о њиховој разноврсности (по типу, по броју променљивих, по степену...) и указујући на постојање Диофантских проблема које треба описати помоћу Диофантове једначине. Диофантове једначине не обрађујем као наставну јединицу, већ их представљам као широку лепезу алгебарских проблема који имају своју методологију решавања. За решавање ових проблема потребно је познавање Диофантових једначина и начина њиховог решавања.

1.2 Диофантове једначине у основној и средњој школи

Као наставни садржаји, Диофантове једначине нису експлицитно присутне у наставним програмима редовне наставе математике у основној школи. Међутим, то не значи да проблеми, који се своде на Диофантове једначине, нису заступљени у настави. Оне су присутне у настави и користе се као погодан материјал за увежбавања наставних садржаја у скоро свим разредима. Нигде се не истиче да је дата Диофантова једначина и не објашњава се њен појам.

Већ од четвртог разреда основне школе Диофантове једначине су присутне кроз разне математичке ребусе и проблеме везане за дељивост бројева, просте бројеве, принцип парности, растављање полинома на чиниоце... У програмима додатне наставе математике у основној школи Диофантове једначине су практично присутне већ од самог почетка њене реализације. У оквиру наставне теме „Математички ребуси и магичне фигуре“, за четврти разред, почиње се са изучавањем Диофантових једначина, наравно, не помињући сам назив једначина. У петом разреду основне школе се реализација наставног садржаја из области дељивости и простих бројева, такође одвија преко Диофантових једначина. Диофантове једначине су присутне и у шестом разреду, кроз обраду разломака и целих бројева. У седмом разреду садржаји о Диофантовим једначинама се реализују кроз проблеме везане за степеновање (коришћење последње цифре), али и у реализацији растављања полинома (коришћење производа) као и реализација „дељивости“. Диофантове једначине се први пут експлицитно, као наставна тема додатне наставе, помињу тек у програмима наставе математике за осми разред. Ту се обрађују линеарне Диофантове једначине, једноставнији системи линеарних Диофантових једначина и њихова примена. Затим се решавају Дифантове једначине коришћењем количника, збира, неједнакости, дељивости... Друштво математичара Србије, за такмичење ученика осмог разреда, већ на окружном нивоу, ставља Диофантове једначине у план и програм. Скоро увек су осмацима на такмичењима задаване Диофантове једначине.

У програмима додатне наставе математике за гимназије и средње стручне школе Диофантове једначине су заступљене у првом и другом разреду. У првом разреду се обрађују сложеније линеарне Диофантове једначине, јер се подразумева да су елементрна знања ученици донели из основне школе. Такође се обрађује и примена алгебарских трансформација на решавање сложенијих нелинеарних Диофантових једначина. У другом разреду средње школе програм додатне наставе предвиђа реализацију садржаја о нелинеарним Диофантовим једначинама. Такође се обрађују неелементарне квадратне Диофантове једначине, једначине које се на њих своде, као и експоненцијалне Диофантове једначине. Програми за трећи и четврти разред средње школе не садрже Диофантове једначине. Математичке гимназије у свом редовном наставном плану и програму имају у другом разреду средње школе превиђену обраду Диофантових једначина. Такође се посебно обрађује Пелова једначина.

2. Историјски осврт на Диофанта и његову аритметику

2.1 Увод

У другој половини 20. века Диофантова анализа постала је модерна због близине са алгебарском геометријом. Изненађујуће, практично ништа није било записано о Диофанту, чије име је везано за неодређену анализу и који је један од најинтересантнијих научника антике. Чак и историчари математике понекад имају погрешан поглед на његов рад. Већина њих мисли да је он решио специфичан проблем, еквивалентан неодређеној једначини, неким специфичним методама.

Чак и једноставни Диофантови проблеми из анализе показују да он није само поставио проблем налажења рационалних решења у неодређеним једначинама, него је дао и неке генералне методе за њихово добијање. Треба имати на уму да у античкој математици генереалне методе нису представљане у „чистој форми”, поред општих проблема. Нпр. када је Архимед израчунао површину елипсе и запремину сфере, користио је метод интегралних сума и пут до лимеса без икаквог генералног давања, апстрактног описа овог проблема. У 17. и 18. веку научници су пажљиво морали да проучавају његове радове и да их интерпретирају у циљу изучавања генералног метода. Исто важи и за Диофанта. Његове методе су разумели и претворили у решење новог проблема Вијет и Ферма.

Док нису откривени диференцијални и интегрални рачун од стране Њутна и Лајбница, еволуција Диофантових метода продужена је за неколико векова и преплитала се са теоријом алгебарских функција и са алгебарском геометријом. Еволуција Диофантових идеја може се пратити све до рада Поенкареа и Вијета. Ово чини историју Диофантове анализе занимљивом.

Многи историчари науке мисле да се Диофант ограничио на позитивне рационалне бројеве и да није знао за негативне бројеве. Покушаћемо да покажемо да то није случај, да је у његовој „Аритметици” продужио домен на поље рационалних бројева.

Диофант отвара пред нама једнако богат и леп свет аритметике и алгебре.

Базираћемо се на подручје познато као артиметика алгебарских кривих. Ова област се бави проналажењем рационалних тачака на таквим кривама и изучавањем њихове структуре.

2.2 Диофант

Диофант представља једну од највећих загонетки у историји науке. Не знамо када је живео и не знамо његове претходнике који су можда радили у истој области.

Могао је да живи у било које доба током 500 година! Његову доњу границу лако је одредити. У његовој књизи о полиномима Диофант често помиње математичара Хипсиклеса из Александрије који је живео у 2. веку пне. Са друге стране, Теон Александријски је у коментарима Птоломејевог "Алмагеста" наводи изводе из Диофантовог рада. Теон је живео средином 4. века не. Отуда 500 годишњи период.

Француски историчар математике Пол Танери, уредник многих текстова о Диофанту, покушао је да сузи овај интервал. У Escurial библиотеци он је пронашао изводе рукописа Михаела Пселуса, византијског учењака 11. века, који сведочи да " најчитанији Анадоли, који сакупља многе есенцијалне делове ове науке посвећен је пријатељу Диофанту". Анадоли Александријски је заправо писао "Увод у аритметику" и изводи из овог рада су наведени из сачуваних дела од Iamblichus и Eusebius. Анадоли је живео у Александрији средином 3. века нове ере, прецизније до 270. године, када је постао бискуп од Лоадицеје. То значи да његово пријатељство са Диофантом мора претходити овом датуму. Тако, ако су познати Александријски математичар и Анадолијев пријатељ Диофант исте особе, онда је Диофант морао живети средином 3. века нове ере.

Диофантова "Аритметика" је посвећена "свештенику Дионису" који је био заинтересован за аритметику и који ју је проучавао. Док је употреба Диофантовог имена била релативно честа временом, Танери претпоставља да је "свештеник Дионис" морао да се тражи међу добро познатим људима тог периода који су заузимали високе позиције. Испоставило се да је извесан Дионис, који је од 231. био директор Александријске Хришћанске средње школе, постао градски епископ 247. Због тога је Танери идентификовао овог Диониса са оним којем се Диофант посветио у свом раду, и тако се долази до закључка да је Диофант живео средином 3. века не. Али место где је Диофант живео добро је познато. То је позната Александрија, центар науке за време Хеленског периода.

После распада велике империје Александра Македонског, Египтом је владао Птоломеј, један од Александријских генерала, који је „створио” нови град Александрију као главни град. Овај мултијезички комерцијални центар је ускоро постао један од најлепших градова антике. Кроз много векова, град је био научни и културни центар старог света, зато што је Птоломеј основао

Музеј, неку врсту Академије Наука, који је привлачио водеће учењаке. Овим учењацима исплаћиване су плате и њихова дужност је била да медитирају и учествују у дискусијама са њиховим студентима. То је укључивало сјајну библиотеку која је у једном тренутку имала 700 000 рукописа. Мало је чудно што су се научници и млади људи жедни знања сјатили у Александрију да слушају различите филозофе, да уче астрономију и математику и задубљују се у студирање различитих рукописа у хладним собама библиотеке.

На прелазу из 3. у 2. век пне. Музеј је сијао са именима Еуклида, Аполонија, Ератостена и Хипарха. У раним вековима пне. претрпео је привремени пад, због пада Птоломеја и Римских освајања (Александрија је освојена 31. године нове ере), али у раним вековима нове ере била је регенерисана због подршке Римских императора. Од 1. до 3. века научници као што су Херон, Птоломеј, Диофант радили су овде. Александрија је наставила да буде центар научног света. У том погледу Рим никада није био ривал. Једноставно није било таквих ствари у Римској науци.

Како би искористили сво знање о личности Дофанта, цитирамо следећи чланак: „Путниче! Овде је сахрањен Диофант. Бројеви говоре колико је био дуг његов живот. Шестину његовог живота чини прекрасно детињство. Дванаестину чини његова младост. Седмину свог живота Диофант је провео у браку без деце. Прошло је још пет година док му Химен, бог брака и свадбе, није подарио сина. Судбина је хтела да син поживи два пута мање од свог оца. Још четири године поживео је старац у дубоком болу за изгубљеним сином. Колико је живео Диофант?"

Ако текст преведемо на језик алгебре то би значило следеће:

Бројеви говоре колико је дуг био његов живот	X
Шестину његовог живота чини прекрасно детињство	$\frac{X}{6}$
Дванаестину чини његова младост	$\frac{X}{12}$
Седмину свог живота Диофант је провео у браку без деце	$\frac{X}{7}$
Прошло је још пет година док му Химен није подарио сина	5
Судбина је хтела да син поживи два пута мање од свог оца	$\frac{X}{2}$
Још четири године поживео је старац у дубоком болу за изгубљеним сином	4

Ако ово преведемо у алгебарску једначину:

$$\frac{X}{6} + \frac{X}{12} + \frac{X}{7} + 5 + \frac{X}{2} + 4 = X$$

Из овога је лако закључити да је Диофант живео 84 године. Да би се ово савладало није потребно познавати Диофантову уметност. Довољно је знати да решиш једначину првог реда са једном непознатом, нешто што су египатски писари знали да ураде 2000 године пне.

Најмистичнији део је Диофантов рад. Од 13 књига "Аритметике" до нас је стигло десет[1]. Њихов стил и садржај радикално се разликују од класичних античких дела теорије бројева и алгебре чији модел смо упознали у Еуклидовим "Елементима" и у његовој "Дати" и из лема Архимеда и Аполонија. "Аритметика" је несумљиво резултат бројних истраживања који су нама непознати. Једино можемо да погађамо њихове корене, дивно богатство и лепоту његових резултата.

Диофантова "Аритметика" је колекција проблема (њих 290) од којих је сваки са једним или више решења и потребним објашњењем. Отуда, први утисак је да ово није само теоретски рад. Али темељан преглед показује да су проблеми посебно селектовани и служе да илуструју одређену методу. Пратећи правила антике, методе нису наведене у општем облику него се појављују решења проблема истог типа.

Али првој књизи претходи ауторево "генерално објашњење", на којем ћу се задржати неко време.

2.3 Бројеви и симболи

Диофант је почео са фундаменталним дефиницијама и са дословним описом симбола које је користио.

У класичној Грчкој математици, чије је достигнуће комплетирано Еуклидовим "Елементима", бројеви ($`\alpha\rho\iota\upsilon\mu o'\varsigma$, од ове речи је име добила "аритметика" као наука о бројевима) су значили колекције јединица, то су били цели бројеви. Разломљене и ирационалне величине нису звали бројевима. Стриктно говорећи, није било разломака у "Елементима". Јединицу су гледали као недељиву. Ирационалне величине имају облик односа несамерљивих величина. Тако, за Грке класичног периода, број који се сада означава са $\sqrt{2}$ био је дијагонала квадрата странице један. Тамо није било негативних бројева. Нити је било еквивалената за негативне бројеве. У Диофантовом случају слика је радикално различита.

Диофант је дао традиционалну дефиницују бројева као колекције јединица, али када је дошао до свог проблема он је тражио позитивна рационална решења и сваки од њих је звао бројевима.

[1] У уводу Диофант је изнео да је „Аритметика" подељена на 13 књига. Шест од 10 књига које су дошле до нас су на грчком, а 1973. су пронађене 4 на арапском преводу.

Али то није све. Диофант је увео и негативне бројеве: за њих користи посебан израз $\lambda\varepsilon\tau\psi\iota\varsigma$, изведен од речи $\lambda\varepsilon\tau\pi\omega$ што значи недостаје, недовољно - тако да термин може бити преведен као "недостатак". Диофант је позитивне бројеве звао $\ddot{\vartheta}\pi\alpha\varrho\xi\iota\varsigma$, што значи постојање. Множина ове речи означава прави (истинит). Тако, Диофантови термини за знак бројева слични су онима који су коришћени за време средњег века на Истоку и у Европи. Највероватније су ови термини врло једноставно преведени са грчког на арапски, латински, а затим и на различите европске језике.

Многи преводи Диофантовог $\lambda\varepsilon\tau\psi\iota\varsigma$ су одузимање. Ово је погрешно. Заправо, за индикацију операције одузимање Диофант је користио термине $`\alpha\varphi\varepsilon\lambda\varepsilon\tau\nu$ или $`\alpha\varphi\alpha\iota\varrho\varepsilon\tau\nu$, изведен од речи $`\alpha\varphi\alpha\iota\varrho\varepsilon'\omega$, за одузимање. Када је трансформисао једначине Диофант је често користио стандардан израз "са обе стране ћемо додати $\lambda\varepsilon\tau\psi\iota\varsigma$ ".

Диофант је формулисао однос бројева следећим правилом за знакове: негативан помножен са негативним даје позитиван, а негативан поможен са позитивним даје негативан, а карактеристичан знак зе негативно је обрнуто и скраћено слово ψ, тј. ⋔.

Он наставља: „Сада када сам вам објаснио множење степена подела таквих израза је јаснија. То ће сада бити добра ствар за почетника да ради примере који укључују сабирање, одузимање и множење алгебарских израза. Он мора знати како да дода позитиван или негативан израз са различитим коефицијентима другом изразу, који може бити позитиван или, једнако, негативан, и одузет од израза који може бити сума или разлика других величина које саме могу бити суме или разлике.”

Имајте на уму да, иако је Диофант гледао само позитивна рационална решења, он је лако користио и негативне бројеве у помоћним израчунавањима. Тако, сигурно је рећи да је Диофант продужио домен бројева на поље рационалних, где је једноставно спроводити све четири алгебарске операције. У "Аритметици" ми се први пут срећемо са буквалним симболизмом. Диофант је увео нотацију за шест степена $x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$ непознате x:

први степен – ς

други степен - $\Delta^{\overline{\upsilon}}$, од Δύναμις, снага

трећи степен – $K^{\overline{\upsilon}}$, од $K\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, куб

четврти степен - $\Delta^{\overline{\upsilon}}\Delta$, од $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, квадрат квадрата

пети степен - $\Delta K^{\overline{\upsilon}}$, од $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu o\chi\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, квадрат куба

шести степен - $K^{\overline{\upsilon}}K$, од $K\acute{\upsilon}\beta o\chi\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, куб куба

Диофант означава константан израз, то је x^0, симболом M^0, то је од прва два слова речи $\mu o \nu \acute{\alpha} \varsigma$. Увео је специјалан термин χ за негативне експоненте. Тако да је могао да означи првих шест негативних степена. Нпр. x^{-2} означавао је са $\Delta^{\overline{\upsilon}\chi}$, x^{-3} са $\mathrm{K}^{\overline{\upsilon}\chi}$.

Тако Диофант има симболизам за означавање позитивних и негативних степена једне непознате, укључујући шест степена. Он није увео симболе за другу променљиву, што у великој мери компликује проблем. Понекад, у оквиру једног проблема ς означава више од једног непознатог броја. У додатку ових симбола, Диофант користи симбол □ за неодређене квадрате. Нпр. ако је сума производа два броја и једног од њих квадрат онда се словима означава са □.

Затим је Диофант дао правило за множење x^m са x^n за позитивно и негативно m и n ($|m| \leq 6, |n| \leq 6$).

За једнаке знаке Диофант користи симбол $`\acute{\iota}\sigma$ прва два слова речи $`\acute{\iota}\sigma o \varsigma$, што значи једнако. Све ово му омогућава да једначину напише у словној форми. Нпр. он је писао једначину $202x^2 + 13 - 10x = 13$, прецизније $x^2 \cdot 202 + x^0 \cdot 13 - x \cdot 10 = x^0 \cdot 13$ као $\Delta^{\overline{\upsilon}}\overline{\sigma\beta}^{\circ}\overline{\iota\gamma}$ ⫛ $\varsigma\vec{\iota}\,\acute{\iota}\sigma M^0\overline{\iota\gamma}$.

Грци су користили слова алфабета са цртама да означе бројеве. Првих девет слова $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots, \bar{\vartheta}$ означавају бројеве од 1 до 9. Следећих девет представљају бројеве од 10 до 90, а последњих девет представљају хиљаде (Грчки алфабет има 24 слова, али су за означавање бројева увели и три стара слова). Тако нпр. $\bar{\beta} = 2$, $\bar{\sigma} = 200$, $\overline{\sigma\beta} = 202$, $\bar{\gamma} = 3$, $\bar{\iota} = 10$, $\overline{\iota\gamma} = 13$.

У Уводу Диофант је формулисао правило за трансформацију једначина које имају једнаке изразе са обе стране једнакости и редукцију на њима еквивалентне. Касније, ова два правила су постала позната под арабијским именима *al-jabr* и *al-muqabala*.

Видимо да када је у питању именовање и означавање степена непознате Диофант, као и ми, користи геометријске изразе „квадрат" и „куб". Када решава једначину он мирно са обе стране једнакости додаје квадрат или куб, тј. он их разматра као бројеве не као геметријске слике. Такође, пронашао је да је могуће увести „квадрат квадрата", „квадрат куба", итд. без било какве помисли да их везује за вишедимензионе просторе.

Тако се ми овде сусрећемо са комплетно новом конструкцијом алгебре, базиране на аритметици, а не на геометрији као у случају Еуклида. Ово је почетак конструкције словне алгебре која је пронашла сопствени језик у раду Диофанта.

2.4 Диофантове једначине

Оно што највише изненађује у вези са Диофантовом „Аритметиком” није само то што Диофант користи сасвим нов језик и његово смело проширење домена бројева већ и проблеми које је постављао и решавао.

Да бисмо разумели суштину проблема и истражили Диофантове методе морамо почети пружањем неких информација из алгебарске геометрије и теорије неодређених једначина. У садашњости, проблем решења неодређених једначина формулисан је на следећи начин: имамо m полинома са n непознатих, $m < n$,
$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$
чији су коефицијенти из неког поља k, наћи скуп $\mathrm{M}(k)$ свих рационалних решења система

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

$$\dots$$

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

и одредити њихову алгебарску структуру. Решење $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ зове се рационалан ако су сви $x_i^{(0)} \in k$.

Наравно, скуп $\mathrm{M}(k)$ зависи од поља k. Најважнији случај за теорију бројева је када је $k = \mathbb{Q}$ и случај када је k поље остатака по модулу p, p је прост број. Диофант је први размотрио овај случај.

Ограничићемо се на разматрање Диофантовог проблема који може бити редукован на једну једначину са две непознате, то је случај m=1, $n = 2$:

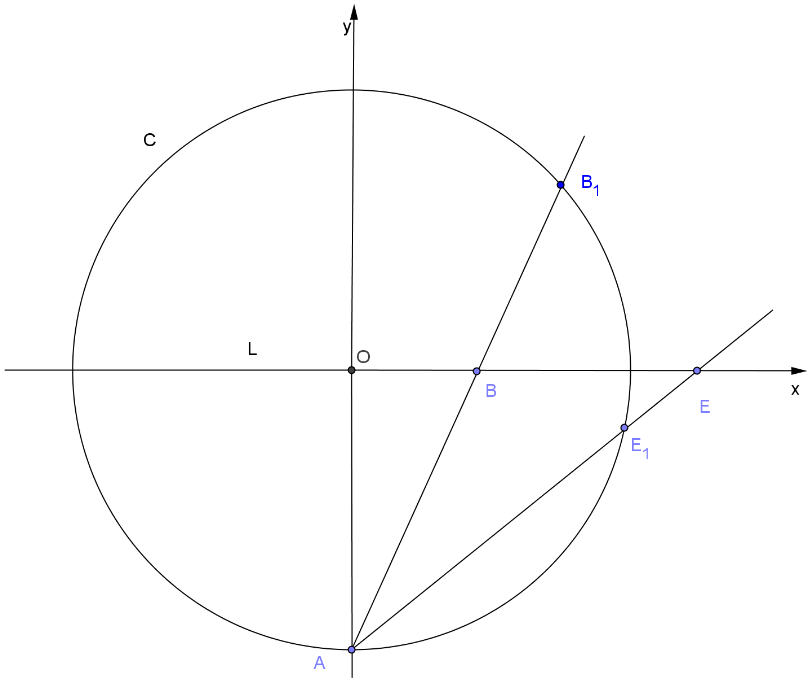
$$f(x, y) = 0 \quad (2)$$

Ова једначина одређује алгебарску криву Γ у равни $\mathbb{R}^2$. Ми ћемо рационално решење (2) звати рационална тачка на Γ.

Прво, неопходно је дати неку класификацију једначина облика (2). Најприродније, и историјски најраније, је класификација на основу степена. Међутим, са гледишта Диофантове анализе[2] класификација по степенима се испоставила као прилично груба (сирова). Пример ће разјаснити ову тврдњу. Размотримо круг $C: x^2 + y^2 = 1$ и произвољну праву са рационалним коефицијентима, рецимо $L: y = 0$. Показаћемо да постоји „1-1”

[2] Ово је име гране математике која је настала из проблема решења неодређене једначине

кореспонденција између рационалних тачака ове две криве. Један начин да се ово покаже је следећи: фиксирамо тачку $A(0,-1)$ на C и придружимо свакој рационалној тачки B на L тачку B_1 на C у којој права AB сече C (слика 1). Координате тачке B_1 су такође рационалне. Очигледно, могуће је овакву кореспонденцију између рационалних тачака успоставити са било којим конусним пресеком са рационалном тачком на било којој правој. Ово показује да се са гледишта Диофантове анализе круг C и права L не разликују. Њихови одговарајући скупови рационалних тачака су еквивалентни без обзира што су њихови степени различити.



Слика 1

Лепша класфикација алгебарских кривих је на основу рода. Ова класификација је настала у 19. веку од стране Римана и Абела и узима у обзир појединачне тачке на кривој Γ.

Претпоставићемо да је полином у једначини (2), односно крива Γ, несводљив у пољу рационалних бројева, тј. не може бити написан као производ полинома са рационалним коефицијентима. Тангента на Γ у тачки $P(x_0,y_0)$ је дата са $y-y_0=k(x-x_0)$ где је $k=-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$. Ако су f_x или f_y различити од нуле у P, онда је коефицијент k тангенте коначна вредност (ако су $f_y(x_0,y_0)=0$ и $f_x(x_0,y_0)\neq 0$, онда је $k=\infty$ и тангента у P је вертикална). Ако су оба парцијална извода једнака 0, онда је тачка сингуларна тачка. Најједноставније сингуларне тачке су двојне тачке, у којој барем један парцијални извод није 0. Постоје двојне тачке у којима крива има две различите тангенте, али и много комплексније сингуларне тачке .

Алгебарске криве могу имати највише коначно много сингуларних тачака. Заиста, нека је $f(x,y) = 0$ једначина криве, где је дати полином несводљив над пољем рационалних бројева. Координате сингуларних тачака морају задовољавати дату једначину, као и $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$. Али систем ове три алгебарске једначине може имати само коначно много рационалних решења.

Сада ћемо дефинисати род раванских кривих чије су једине сингуларне тачке двојне тачке. Нека је Γ просторна крива са d двојних тачака ($d \geq 0$). Тада је род g од Γ дефинисан следећом формулом

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

где је n степен криве Γ. Могуће је показати да је $g \geq 0$.

Ако је Γ права или крива другог реда, онда је $g = 0$, тј. криве су истог рода. Криве трећег реда имају род 1 ако немају двојну тачку, и род 0 ако имају једну двојну тачку.

Класификација по роду не узима у обзир аритметичка својства криве. Нпр. криве $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$ имају род 0, али прва има коначно много рационалних тачака, а друга нема. Да бисмо пронашли класификацију кривих која је адекватна гледишту Диофантове анализе када решавамо једначину (2) ми често уводимо смену променљивих

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v) \qquad (3)$$

где су φ и ψ рационалне функције, тј. количници полинома. Заменом (3) у (2) добијамо

$$G(u,v) = 0 \quad (4)$$

Ове једначине детерминишу неку криву Γ\`. Да би се успоставила кореспонденција између рационалних тачака на кривама Γ и Γ\` потребно и довољно је да функције φ и ψ имају рационалне коефицијенте и да једначина (3) буде инвертибилна, то значи да је могуће да нађемо рационалне функције φ_1 и ψ_1 са рационалним коефицијентима такве да важи

$$u = \varphi_1(x,y) \text{ и } v = \psi_1(x,y) \; (3`)$$

Ако је могуће успоставити кореспонденцију између кривих Γ и Γ\` помоћу формула (3) и (3\`) са рационалним коефицијентима, тада кажемо да су те две криве бирационално еквивалентне.

Са гледишта Диофантове анализе еквивалентне криве имају „исти положај”. Њихови степени не морају бити исти. Али могуће је показати да две бирационално еквивалентне криве имају исти род. Обрнута тврдња је погрешна, тј. криве са истим родом не морају бити бирационално еквивалентне. (Пример $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$)

Тако су криве истог рода подељене у класе еквиваленције бирационалних кривих. Пун значај овог концепта долази на свет у раду Поенкареа који је направио класу бирационалних трансформација засновану на класификацији и истраживању проблема Диофантове анализе.

Приметићемо чињеницу која ће нам бити важна убудуће: ако је Γ кубна крива са бар једном рационалном тачком, тада је могуће редуковати њену једначину бирационалном трансформацијом у једначину облика

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b,$$

где су a и b рационални бројеви. Надаље претпоставићемо да је Γ дата у овом трансформисаном облику.

2.4.1 Неодређене квадратне једначине

Пре Диофанта разматрала су се два типа квадратних једначина, наиме: $x^2 + y^2 = z^2$ и $x^2 - ay^2 = 1$. Првом од ових су се бавили Вавилонци. Формула за њено решење је $x = k^2 - 1,\ y = 2k,\ z = k^2 + 1$ које су пронашли питагорејци. За $a = 2$ сва цела решења друге од ових једначина су пронађена у Еуклидовим „Елементима”. Архимед, који поставља пре Ератостена добро познат „проблем говеда”, је вероватно знао њено решење за произвољно неквадратно a.

У II књизи Диофантове „Аритметике” он посматра различите неодређене једначине другог реда и основни пратећи резултат: неодређене једначне другог реда са две непознате са или без рационалних решења или бесконачно много. У каснијим случајевима сва решења су представљена као рационалне функције једног параметра $x = \varphi(k),\ y = \psi(k)$, где су φ и ψ рационалне функције.

Да бисмо ово показали прво ћемо навести 8. проблем II књиге:

„Поделити дати квадрат на суму два квадрата. ”

Конкретно Диофант је рекао: „Поделити 16 на суму два квадрата.”

Нека је прва сума x^2 , а друга $16 - x^2$. Друга треба да буде квадрат, нека је то квадрат броја $2x - 4$. То је $4x^2 + 16 - 16x$, ставио сам да је овај израз једнак $16 - x^2$. Обема странама сам додао $x^2 + 16$ и -16. На овај начин сам добио $5x^2 = 16x$, дакле $x = \frac{16}{5}$. Тако је један број $\frac{256}{25}$, а други $\frac{144}{25}$. Сума ових бројева је 16 и сваки суманд је квадрат.

Сада ћемо покушати да изложимо Диофантов метод у „чистој форми”. Тако разматрамо једначину

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (4)$$

која представља круг са центром у нули. Једно од њених решења је $(0, -a)$. Диофант је направио смену:

$$x = x \ , \ y = kx - a. \qquad (5)$$

Како он није имао симбол за произвољно k, ставио је да је 2, али напомиње да би требало да је облика „квадрат из неког умношка броја x умањеног за корен из 16", а то је у нашим симболима квадрат од $kx - 4$.

У општем смислу, замена за (5) је цртање праве $y = kx - a$ кроз $(0, -a)$. Ова права сече круг (4) у другој тачки чије координате су рационалне функције од k. Заиста,

$$x^2 + (kx - a)^2 = a^2$$

и

$$x = \frac{2ak}{k^2+1}, \ y = kx - a = a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Тако свакој рационалној вредности k одговара само једна рационална тачка криве (4). Једноставно је видети да, обрнуто, ако спојимо било коју рационалну тачку на кривој (4) са $(0, -a)$ добијамо праву са рационалним нагибом.

Решење деветог проблема у II књизи чине Диофантов метод још једноставнијим. Формулисао је проблем на следећи начин: „Поделити дати број који је сума два квадрата у суму друга два квадрата. "

Диофант је дао број 13 који је једнак суми бројева 4 и 9. Тако је једно решење већ познато то је (2,-3). Да би нашао друго решење, Диофант је ставио за први број $x = t + 2$, а за други $y = 2t - 3$. Другим речима, повукао је праву кроз тачку (2,-3) и забележио, као и раније, да се уместо множитеља 2 може узети било који други број.

Вреди напоменути да Диофант даје као познату тачку, не тачку са позитивним координатама, већ тачку са негативним координатама. То одговара негативном решењу. Дакле, у помоћним прорачунима Диофант је радио са негативним бројевима, иако је свако коначно решење увек било рационално и позитивно.

Диофант даје сличну процедуру у проблемима 16, 17 и осталим проблемима из II књиге.

Лако је видети да је Диофантов метод доста уопштен и да даје могућност проналажења свих рационалних тачака на квадратној кривој са најмање једном рационалном тачком. Заиста, посматрањем квадратне криве

$f_2(x,y)=0$ са две променљиве са рационалном тачком (a,b) пратећи Диофанта уводимо смену

$$x=a+t,\ y=b+kt$$

и добијамо

$$f_2(a+t,b+kt)=f_2(a,b)+tA(a,b)+ktB(a,b)+t^2C(a,b,k)=0.$$

Како је $f_2(a,b)=0$ следи да је

$$t=-\frac{A(a,b)+kB(a,b)}{C(a,b,k)}.$$

Тако за свако рационално k добијамо само једно рационално решење.

Ако је дата једначина облика

$$y^2=a^2x^2+bx+c \qquad (6)$$

тада је Диофант благо мењао свој метод и стављао $y=ax+m$. Па је тада $x=\frac{c-m^2}{2am-b}$.

Покушаћемо да објаснимо геометријски смисао ове смене. Да бисмо то урадили пребацићемо се на хомогене координате, тј. уводимо смену $x=\frac{u}{z}$, $y=\frac{v}{z}$ па једначина

$$f(x,y)=0 \text{ постаје } \Phi(u,v,z)=0,$$

где је $\Phi(u,v,z)$ полином по u,v,z. Тако, користећи хомогене коориднате једначина (6) прелази у једначину

$$v^2=a^2u^2+buz+cz^2.$$

Његове рационалне тачке у бесконачности су $(1,a,0)$ и $(1,-a,0)$. Повућићемо праву кроз прву тачку. Уопштена једначина праве у хомогеним координатама је

$$Au+Bv+Cz=0.$$

$(1,a,0)$ је на правој

$$A\cdot 1+B\cdot a+C\cdot 0=0.$$

Стога можемо ставити

$$A=ka, B=-k, C=km \text{ , где је } m \text{ произвољно.}$$

Дакле, једначина праве је $au - v + mz = 0$ или у терминима афиних координата $y = ax + m$. Ову смену је Диофант користио. Таква смена еквивалентна је цртању праве кроз рационалне тачке у бесконачности на кривој (6).

Не може се тврдити да је Диофант знао тачке у бесконачности, али је свакако користио еквивалентне аргументе. У историји математике има пуно примера када су основне чињенице теорије откривене пре теорије и њених фундаменталних концепата. Тако је било и са Диофантовом Аритметиком. Овде су нека разматрања алгебарске геометрије развијена и истражена у оквиру чисте алгебре и теорије бројева, без икакве геометријске интерпретације.

Питамо се да ли је Диофант био свестан да његов проблем има бесконачно много решења или је он у ствари био задовољан налажењем једног рационалног решења? У другој књизи Диофант ништа не каже о овом питању. Али у 19. проблему III књиге он је написао „и ми смо сада научили како можемо репрезентовати квадрат као суму квадрата на бесконачно много начина".

Коначно, у две леме повезане са проблемом у VI књизи Диофант је доказао следеће: Ако неодређена једначина $ax^2 + b = y^2$ има рационално решење (x_0, y_0), онда она има и бесконачно много решења. Прва лема се односи на 12. проблем и наводи да: „Када су дата два броја чија је сума квадрат, онда су квадрати нађени на бесконачно много начина такви да сваки од њих, када га помножимо са једним од датих бројева и додамо другом, даје квадрат."

Другим речима, ако је у горњој једначини b позитивно и $a + b$ је квадрат, онда једначина има бесконачно много решења.

Али који је значај услова да је $a + b$ квадрат? То није тешко видети. Ако је $a + b = m^2$, онда наша једначина има рационално решење $(1, m)$. Да би доказао тврдњу Диофант је ставио

$$x = t + 1, \ y = y$$

и добио једначину

$$at^2 + 2at + m^2 = y^2,$$

чији је константни терм квадрат. Тако је он могао да нађе преостала рационална решења користећи уобичајени метод, тј. стављајући $y = kt - m$. Онда добија $t = 2\frac{a+km}{k^2-a}$. Сада непознате x и y могу бити изражене као рационалне функције једног параметра. Током својих дискусија Диофант је користио вредности $a = 3, b = 6$, па је $m^2 = 9$, али његов метод доказивања је генералан (општи).

Друга лема се односи на 15. проблем VI књиге и има много општији карактер: „Дата су два броја. Ако одузмемо један од њих од производа квадрата неког броја и другог од њих, онда је могуће наћи други квадрат, већи од првог, који даје сличан исход.”

Другим речима, ако једначина

$$ax^2 - b = y^2 \ \ (b > 0)$$

има рационално решење (p, q), онда има и веће решење (p_1, q_1). Почевши са (p_1, q_1), може се добити веће решење (p_2, q_2). Овде веће значи да је

$p < p_1 < p_2 < \cdots$ и $q < q_1 < q_2 < \cdots$.

Диофант врши доказ за $a = 3,\ b = 11$. Његово прво решење је (5,8). Користећи замену $x = t + p\ (p = 5)$, добија једначину

$$at^2 + 2apt + q^2 = y^2,$$

коју решава методом из претходне леме.

У обе леме Диофантов метод доказивања, иако је илустрован примерима, је потпуно генералан.

Видимо да Диофант није само открио теорему са почетка поглавља него је и доказао у пуној општости.

Напомињемо да се Диофантов метод за решавање неодређене једначине облика $y^2 = ax^2 + bx + c$ поклапа са такозваном „Ојлеровомременом”.

2.4.2 Неодређене кубне једначине

У четвртој књизи Диофант је разматрао неодређене кубне и квадратне једначине. Овде су ствари далеко више обухваћене (уплетене). Чак иако кубна крива има рационалне тачке њене координате, у општем случају, не могу бити изражене као рационалне функције једног параметра. Међутим, ако знамо једну од две рационалне тачке на кубној кривој, онда можемо наћи додатну рационалну тачку на њој. Заиста, на произвољној правој која сече кубну криву у три тачке чије координате могу бити одређене из кубне једначине тако што елиминишемо y из једначине криве Γ, $f_3(x, y) = 0$ и праве. Ако су два корена резултујуће једначине рационална, онда је и трећи. Ово запажање повлачи следеће две процедуре:

Ако је P рационалана тачка на кривој Γ, онда у P цртамо тангенту на криву Γ са рационалним нагибом k која ће сећи Γ у додатној рационалној тачки. (Заиста, решавајући једначину криве и тангенте добијамо кубну једначину са дуплим рационалним кореном. Ово значи да је и трећи корен такође рационалан.)

Ако су P_1, P_2 рационалне тачке на Γ, онда права P_1P_2 сече Γ у додатној рационалној тачки.

Ове две процедуре представљају Диофантове методе тангенте и методе сечице. Да бисмо оправдали име вратићемо се на његов проблем.

Проблем 24. у IV књизи: „Поделити дати број на два броја таква да њихов производ представља куб минус његов корен."

Дат је број 6. Стављам да је први број x. Онда је други $6 - x$. Услов који треба да буде задовољен је

$$x_1x_2 = y^3 - y.$$

Али $x_1x_2 = 6x - x^2$. Овај израз треба да буде једнак са $y^3 - y$. Тако, ставим да је $y = ax - 1$, a је произвољно, нпр. $a = 2$. Сада имам

$$(2x - 1)^3 - (2x - 1) = 8x^3 - 12x^2 + 4x.$$

Сада овај израз треба да буде једнак са $6x - x^2$. Ако су коефицијенти уз x у оба израза једнаки, x ће бити рационалан. 4 настаје од $3 \cdot 2 - 2$, али 6 долази из података. Морам детерминисати a тако да је $3a – a = 6$. Ставим

$$y = 3x - 1$$

и добијам

$$y^3 - y = 27x^3 - 27x^2 + 6x.$$

Овај израз мора бити једнак са $6x - x^2$. Одатле следи да је $x = \frac{26}{27}$. Па је $x_1 = \frac{26}{27}$, $x_2 = \frac{136}{27}$.

Сада ћу покушати да прикажем Диофантов метод у „чистој форми". Нека са a означимо дати број и x и $a - x$ потребне бројеве. Знамо да је

$$x(a - x) = y^3 - y \quad (7)$$

Једно од рационалних решења је (0,-1). Пратећи Диофанта, кроз ову тачку прођемо са правом $y = kx - 1$ (*) (Диофант је ставио $k = 2$) и тражимо њен пресек са кривом (7): $ax - x^2 = k^3x^3 - 3k^2x^2 + 2kx$. За x, да би био рационалан, довољно је ставити $2k = a$ (**) што је чинио и Диофант. Тада добијамо $x = \frac{3k^2-1}{k^3} = 2\frac{3a^2-4}{a^3}$.

Да бисмо објаснили значај услова (**) за праву (*) применићемо Диофантов метод на произвољну кубну једначину са две непознате $f_3(x, y) = 0$ са рационалним решењем (a, b): $f_3(a, b) = 0$. Кроз $P(a, b)$ цртамо праву

$$y - b = k(x - a) \quad (8)$$

или

$x = a + t,\ \ y = b + kt$ (9)

Тада

$$f_3(a+t, b+kt) = f_3(a,b) + tA(a,b) + ktB(a,b) + t^2C(a,b,k) + t^3D(a,b,k) = 0.$$

Али $f_3(a,b) = 0$ и ако ставимо $A(a,b) + kB(a,b) = 0$ добијамо $k = -\frac{A(a,b)}{B(a,b)} = -\left(\frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}\right)(P)$, тј. нагиб праве (8) мора бити изабран да је тангента криве $f_3(x,y) = 0$ у тачки $P(a,b)$. Тако овде Диофант користи метод тангенте.

Диофант је користио исти метод да реши 18. проблем у VI књизи, као и, врло вероватно проблем $x^3 + y^3 = a^3 - b^3$.

У 26. проблему у IV књизи користи се метод сечице. Проблем гласи: „Наћи два броја чији производ увећан за неки од њих даје куб."

Ставим $x_1 = a^3x$, где је $a = 2$, па је $x_1 = 8x$. Ставим $x_2 = x^2 - 1$. Онда је један услов задовољен, за $x_1x_2 + x_1$ је куб. Остаје да се испуни услов да је $x_1x_2 + x_2$ такође куб. Али $x_1x_2 + x_2 = 8x^3 + x^2 - 8x - 1$. Ставим да је овај израз једнак са $(2x-1)^3$, тј. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. Тада је $x = \frac{14}{13}$. Али тада је $x_1 = \frac{112}{13},\ x_2 = \frac{27}{169}$.

Пратећи Диофанта, прву непознату означимо са a^3x, а другу са $x^2 - 1$. Онда је први услов проблема задовољен, а за други добијамо

$a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1 = y^3$ (10)

Диофант је ставио замену $y = ax - 1$ и добио $x = \frac{a^3+3a}{1+3a^2}$.

Размотрићемо неке детаље методе које је Диофант користио у овом случају. Једно од рационалних решења (10) је (0,-1). Цртамо праву $y = kx - 1$ кроз ову тачку и нађемо тачку пресека са (10):

$$(a^3 - k^3)x^3 + (1 + 3k^2)x^2 - (a^3 + 3k)x = 0.$$

У претходном случају Диофант је ставио да је коефицијент уз x нула. Овде је ставио да је коефицијент уз x^3 нула и добио $a^3 - k^3 = 0,\ k = a$.

Шта је геометријско значење овог корака? Да бисмо одговорили на ово питање написаћемо (10) у хомогеним координатама. Стављајући $x = \frac{u}{z},\ y = \frac{v}{z}$ добијамо

$$a^3u^3 + u^2z - a^3uz^2 - z^3 = v^3 \qquad (10`)$$

Видимо да ова крива има рационалне тачке $P_1(0,-1,1)$ и $P_2(1,a,0)$ које детерминишу праву $v = au - z$. Пресек (10`) и ове праве даје трећу рационалну тачку. Тако, у овом случају, Диофант користи метод сечице када је једно рационално решење коначно, а друго је тачка у бесконачности.

Диофант је методе сечице и тангенте користио и у другим проблемима у четвртој и шестој књизи.

2.5 Диофант и теорија бројева

„Аритметика" која је дошла до нас не садржи истраживања из теорије бројева у строгом смислу те речи. Ипак, када наводи проблем или га решава, Диофант понекад укључује услове под којима је она решива или нерешива или примећује да број решења добијен у процесу не може бити представљен као сума два квадрата. Овако је теорија бројева откривена у „Аритметици". Судећи по Диофантовим опажањима он је разматрао ове и сличне проблеме у специјалној књизи названој „Поризми", која није стигла до нас. Тако, најбоље што можемо да учинимо да се формира мишљење о Диофантовом знању о теорији бројева се ослања на опажањима и ограничењима пронађеним у „Аритметици". Почињемо са 19. проблемом у трећој књизи: „Наћи четири броја таква да квадрат њихове суме $\pm$ неки од њих даје квадрат."

„Како у сваком правоуглом троуглу, ако додамо или одузмемо на квадрат хипотенузе дупли производ страна добијамо квадрат, прво сам посматрао четири правоугла троугла са истом хипотенузом. Ово је исто као подела квадрата на суму два квадрата на четири начина, а знамо бесконачно много начина да поделимо квадрат на суму два квадрата."

Узмимо два правоугла троугла са страницама 3, 4 и 5 и 5, 12 и 13. Помножите први са хипотенузом другог и обрнуто. Тада ће први правоугли троугао бити са страницама 39, 52 и 65, а други 25, 60 и 65. Ово су два троугла са једнаким хипотенузама.

65 може бити представљен као сума два квадрата на два начина, 16+49 и 1+64. То је зато јер је $65 = 13 \cdot 5$, а сваки од ових бројева је сума два квдрата (13=4+9, а 5=1+4).

Сада корени из 49 и 16 су 7 и 4 и формирам од два броја 7 и 4 правоугли троугао са страницама 33, 56 и 65.

Слично, корени из 64 и 1 су 8 и 1 и формирамо други правоугли троугао са страницама 16, 63 и 65. Тако смо добили четири правоугла троугла са истим хипотенузама. Сада се враћамо на првобитан проблем. Ставим да је сума четири броја једнака $65x$, они формирају четири површине сваког од троуглова, помножим са x^2 и у овом случају добијем $x_1 = 4056x^2, x_2 =$

$3000x^2, x_3 = 3696x^2, x_4 = 2016x^2$. Збир ова четири броја је $12768x^2$ и то је једнако $65x$. Ово даје да је $x = \frac{65}{12768}$. Па је

$$x_1 = 17136600 \cdot \frac{1}{n},$$

$$x_2 = 12675000 \cdot \frac{1}{n},$$

$$x_3 = 15615600 \cdot \frac{1}{n},$$

$$x_4 = 85176 \cdot \frac{1}{n}$$

са $n = 163021824$.

Овај проблем је вредан пажње у многим погледима. Овде Диофант први пут прича о троугловима „у најмањим бројевима" и формирању сваког троугла из „два броја". Наравно, овде је проблем наћи рационално решење неодређене једначине $x^2 + y^2 = z^2$, о којој смо дискутовали. Најопштија формулација овог решења дата је у Еуклидовим „Елементима". Те формуле су

$$z = p^2 + q^2,\ x = 2pq,\ y = p^2 - q^2.$$

Оне дају сва примитивна решења једначина, за узајамно просте p и q. Ова решења се могу добити из истог метода које је Диофант користио у 8. Проблему II књиге да подели дати квадрат на суму два квадрата.

Штавише, овај проблем садржи тврдњу да је производ два цела броја, где је сваки од њих сума два квадрата, представљив као сума два квадрата у најмање два начина. Уопштено, ако је

$$p = a^2 + b^2 \text{ и } q = c^2 + d^2,$$

онда је

$$pq = (ac + bd)^2 + ad - bc^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

То је било у напоменама у вези са овим проблемом где је Ферма рекао своју чувену тврдњу да се прост број облика $4n + 1$ може представити као сума два квадрата у само два начина. На том месту он је дао и метод за детерминисање у колико начина се дати број може представити као збир два квадрата.

Да ли је Диофант знао ову пропозицију? Да бисмо одговорили на ово питање размотрићемо други проблем, опремљен са ограничењем који даје репрезентацију броја као суме два квадрата. Ово је 9. проблем у V књизи:

„Поделити јединицу на два дела тако да, ако се исти број дода сваком делу резултат ће бити квадрат."

Изјава је праћена ограничењем које мора бити наметнуто од датог броја за проблем да би био решен. На срећу, текст прате речи: „Дати број не сме бити непаран и удвостручен број плус један,...". Текст проблема је био: „Додати на сваки део 6 тако да резултат буде квадрат."

Како желимо да поделимо јединицу тако да након додавања 6 сваком делу добијемо квадрат, сума квадрата ће бити 13. Како 13 мора бити подељен на два квадрата где је сваки већи од 6.

Ако раставим 13 на два квадрата чија је разлика мања од 1, проблем је решен. Поделим 13 на два дела и добијем $6\frac{1}{2}$, и питам се који разломак повећан за $6\frac{1}{2}$ је квадрат. Помножим са 4. Тако, тражим квадрат разломка који када му додам 26 даје квадрат. Тако $26+\frac{1}{x^2}$ је квадрат, отуда је такође $26x^2+1$ квадрат. Ставим $26x^2+1=(5x+1)^2$ и добијем $x=10$. Тако је $x^2=100, \frac{1}{x^2}=\frac{1}{100}$. Ово значи да 26 додам $\frac{1}{100}$, тј. да $6\frac{1}{2}$ додам $\frac{1}{400}$, што је $(\frac{51}{20})^2$.

Па ако је неопходно извадити корен из сваког од квадрата, чија је сума 13, а блиска $\frac{51}{20}$. И питам који број одузети од 3 и додат 2 ће дати толико, наиме $\frac{51}{20}$.

Тако формирам квадрате од $11x+2$ и $3-9x$. Њихова сума треба да буде 13. Отуда $202x^2-10x+13=13$.

Ово значи да је корен једног квадрата $\frac{257}{101}$, а другог $\frac{258}{101}$. И ако од сваког квадрата одузмем 6, тада добијам делове јединице $\frac{5358}{10201}$ и $\frac{4843}{10201}$, и јасно је да сваки заједно са 6 даје квадрате.

Диофант је када је решавао овај проблем користио нове интересантне методе на које су историчари математике скренули мало пажњу. Једначина $ax^2+1=y^2$ $(a=26)$ коју је он посматрао је данас позната као Фермаова једначина. Она је била јако интересантна у 17. и 18. веку. У каснијим проблемима Диофант се бавио процедуром проналажења квадрата дате суме од којих свака мора да задовољава неједнакост апроксимационе процедуре. У основи, проблем се бави представљањем подела са апроксимацијом $\sqrt{26}$. Нећемо истраживати многе проблеме те области које су повезане са овим проблемом и фокусираћемо се на Диофантова ограничења. Услове проблема можемо написати као систем једначина:

$$x+y=1,$$

$$x+a=u^2,$$

$$y + a = v^2.$$

Сабирањем друге две једначине добијамо $2a + 1 = u^2 + v^2$. Па a мора бити изабран тако да $2a + 1$ буде сума два квадрата.

Може се показати да се број може репрезентовати као сума два квадрата ако и само ако слободан део квадрата није дељив са простим бројем облика $4n - 1$. Колико близу је Диофантово ограничење било овом услову? Како ми имамо само искривљену верзију, одговор на ово питање ће бити базиран на реконструкцији текста.

Један од најпознатијих математичара 19. века Карл Густав Јакоб Јакоби (1804-1851) посебно се посветио истрази овог проблема. Он спроводи детаљну психолошку анализу Диофантовог текста и предлаже следећу реконструкцију: „Дати број (то је a) не сме бити непаран и удвостручен број плус јединица, не сме бити дељив било којим бројем који је повећан за 1 дељив са 4.”

Сличну реконструкцију овог текста је затим дао Танери.

Овај услов је неопходан само ако му додамо услов „после дељења већим кореном у томе.” Изгледа да је Диофант то претпоставио.

Јакоби је претпоставио да је Диофант имао доказ да је услов потребан, да би могао да оправда своје ограничење. У свом раду је дао реконструкцију доказа користећи методе које је Еуклид користио као и Диофант у свом раду.

Јакоби је био сигуран да је Диофант знао да је услов такође и довољан али није могао да докаже јер је то доказ који захтева средства изван оних из античке математике.

Показаћемо да је после Диофанта једино Ферма дао општи услов за бројеве који се не могу представити као сума два квадрата целих или рационалних бројева. Ово је Фермаова формулација: „Ако цео број има прост делитељ облика $4n - 1$ и нема квадратни делитељ, онда он не може бити приказан као сума два квадрата.”

Овај „негативан” критеријум је еквивалентан „позитивном” критеријуму за репрезентацију бројева као суме два квадрата. Оба могу бити изведена из изванредне теореме коју је Ферма формулисао и доказао Ојлер. Она каже да прости бројеви представљени као сума два квадрата су управо облика $4n + 1$.

У 14. проблему V књиге Диофант даје потребан услов за бројеве да би били представљени као суме три квадрата. Ограничење је да број не сме бити облика $8n + 7$ да би се представио као сума три квадрата.

Имајући у виду принцип античких математичара да се једино наведене пропозиције могу доказати, сигурно је тврдити да је Диофант знао да докаже сва своја ограничења. Али онда он није био само бриљантан алгебриста, није само проналазач Диофантове анализе, него и изванредан познавалац теорије бројева.

2.6 Процена Диофантових метода кроз историју науке

Многи историчари науке су потценили Диофантов рад. Многи од њих су мислили да је Диофант ограничио свој рад на проналажење једног решења. Нпр. Hankel је написао: „...ако се савлада 100 Диофантових решења, модеран математичар ће наићи на проблем при решавању 101. проблема...”

Могло би се рећи да је таква процена произашла из чињенице да је Хенкелова књига публикована пре појављивања Поенкареових белешки који су указали на проблеме Диофантових једначина. Али то је једва уверљиво обзиром да у *History of Mathematics* (O. Becker, J. Hoffman, Geschichte der Matehematik, Bonn) налазимо: „Диофант нам је дао општи метод али изгледа да применом на сваки нови проблем добијамо нову неочекивану варку која подсећа на Исток.”

Van der Waerden је направио сличне напомене у својој „Science Awakening”: „Диофант је обично задовољан када нађе једно решење; за њега нема разлике да ли је решење целобројно или рационално. Његови методи варирају од случаја до случаја.”

Издање „Mathematisches Woerterbuch” 1961. (у поглављу Диофант из Александрије) износи: „Решење неодређене једначине другог или већег степена је постигнуто ... путем коришћења вештина које варирају од случаја до случаја.”

Zeuthen процењује да је Диофантово размишљање више складно: „Уопште, Диофант покушава да нађе неко једно решење проблема, без тражења уопштеног решења који укључује сва могућа појединачна решења. Али ако неко жели да разуме Диофантов резултат, он не мора придавати посебну важност овој чињеници, јер је важно то што он у том решењу одмах додељује специфичну вредност за величине које служе за решавање проблема.”

На другом месту он пише: „У случају када је дат произвољан број, Диофант увек бира одређене (конкретне) бројеве и са њима рачуна. Али његова израчунавања су тако јасна да она дају генералан метод.”

Zauthen наставља анализу Диофантових метода за решавање неодређене квадратне једначине, али не успева да завири у Диофантов рад на методама за проналажење решења неодређене кубне једначине.

2.7 Диофант у радовима других математичара

2.7.1 Диофант и математичари 15. и 16. века

Било је коментара Диофантовог рада и у антици. Радови познате Хипатије, ћерке научника Теона Александријског, посвећени су анализи Диофантових књига. Хипатија је живела крајем 4. и почетком 5. века нове ере. Стекла је славу као брилијантан говорник и експерт Платонове филозофије. Нажалост, њени радови нису дошли до нас.

Не знамо за Александријске математичаре после Хипатије. Последњи грчки научници су Проклус, Исидорус и Симпликус, који су радили у Атини. Али и овде су се научне мисли угасиле почетком 7. века. Античка наука је пропала заједно са античким друштвом. Између 9. и 13. века отворен је нов научни центар у Константинопољу, Багдаду, и другим градовима Арапског Истока. Почетком 12. века научне мисли су одатле премештене у Европске центре. Две струје носе идеје Диофанта. Могле би се назвати алгебарске и бројевне (теоретске) и аритметичке. Европски научници се упознају са Диофантовим алгебарским идејама 300 година пре учења његових аритметичких идеја. Ово није изненађујуће. Нова алгебра узета је од Диофантовог византијског коментатора (Пландуса који је живео у 13. веку) као и од арапских математичара посебно Абу`л Вафе и његове школе (10. век). Арабијски математичари су користили речи уместо ознака за означавање степена непознатих. Штавише, у раду са степенима непознатих они су користили чудан мултипликативни принцип уместо погодан адитивни принцип који је користио Диофант. Нпр. x^6 су звали „квадрат-куб", а не као Диофант „куб-куб". У случају x^5 нису могли да дају име базирано на нижем степену, јер је 5 прост број и не може бити написан као производ његових фактора. Отуда име „нем (глуп, мутав)" или „први неизрециви". Слична тешкоћа је настала у вези са свим простим степенима непознате. Овај нотациони принцип су преузели европски математичари од арабијских. Посебно, то је било коришћено у Италији током ренесансе и касније код Немачких алгебриста. Један изузетак је био у 13. веку матемаричар Леонардо Пизано. У његовој познатој „Liber abaci" није само користио адитиван принцип за степене непознате него је он и први европљанин који је размотрио проблем који се своди на неодређене једначине.

Диофантова правила за рад са полиномима и једначинама су коришћена у средњем веку практично од стране свих алгебриста.

Негативни бројеви су прихваћени далеко мање спремно. Арабијски математичари нису их уопште користили и европљани су их прихватили са великом дозом скептицизма. Дуго су их звали „лажним" бројевима и покушали су да раде без њих.

Диофантова Аритметика садржи други, далеко дубљи, круг идеја, наиме Диофантову анализу. Дуго времена ове идеје су биле потпуно непознате. Парадоксалана ситуација која је превладала у Европи у 15. и 16.

веку је та да су научници истраживали алгебру изведену од Диофанта али нису знали ништа о његовом раду.

Изгледа да је први који је читао Диофантове радове био у 15. веку астроном Јохан Милер. Боравећи у Италији Милер је открио Диофантове рукописе у Венецији и о њима је писао пријатељу. Садржај рукописа био је невероватно богат. Милер је одлучио да га преведе, али је прво покушао да пронађе свих 13 књига Диофантовог рукописа које Диофант помиње у уводу. Само 6 књига, оних које су познате данас, је пронашао али превод није био урађен.

Прошло је 100 година. За све то време ни један од истакнутих алгебриста, као што су Кардано и Тартаља, нису знали ништа о Диофанту. Али 1572. у „Алгебри" Рафаела Бомбелија (професора на Универзитету у Болоњи) се појавило 143 проблема из Диофантове „Аритметике". У уводу овог рада Бомбели је написао: „материјал за последњи део књиге је пронађен у библиотеци нашег Господа у Ватикану, написаног од одређеног Диофанта, Грчког аутора који је живео у време Antonius Pius". Pius је био римски император који је живео у 2. веку нове ере. Мистерија је Бомбелијев извор који се ослања на информације о датуму Диофантовог живота. Након читања рукописа, Бомбели је закључио да је његов аутор био „велики познавалац теорије бројева". Бомбели и Pacci, каснији Римски математичар који је пронашао рукопис, одлучили су да преведу пронађени рукопис. Бомбели је изнео: „Како би се обогатио свет са тако важним радом ми смо превели пет од седам књига, али нисмо могли да преведемо преостале због других обавеза." Референца седме књиге збуњује. Ватикански рукопис се састоји од само 6 књига. Разумљиво је да је седма књига изгубљена. Ако су преводи Бомбелија и Пацција дошли до нас, онда ми не можемо да упоредима то са књигама у нашем поседу и проверимо да ли се наши проблеми слажу са дотичним у Бомбелијевим књигама. На несрећу, превод је нестао без трага.

Бомбелијева Алгебра је изванредна у многим погледима. Садржи побољшану алгебарску нотацију за степене променљиве. Комплексни бројеви $a + bi,\ i^2 = -1$ се овде први пут појављују, укључујући и прецизна правила за операције са њима. Комплексни бројеви су у овом раду коришћени да би се истражио случај такозване несводљиве кубне једначине. За нас Бомбелијева књига је важна јер је у њој први пут укључен Диофантов проблем, додуше без контекста.

Диофантова „Аритметика" је утицала на целу Бомбелијеву књигу. У оригиналном рукопису његови проблеми су представљени у псеудо-практичној форми, али у крајњој верзији књиге апстрактно су формулисани, на начин као код Диофанта. Бомбели је променио неке теореме и дао их ближе онима које је нашао код Диофанта.

Први Латински превод „Аритметике" појавио се само 3 године после публикације Бомбелијеве „Алгебре". Била је припремљена од стране познатог филозофа и филолога Ксиландера (право име му је Holzmann). Његов превод је у целости био добар, али једно сазнање је да њен аутор није имао присности са математиком.

1585. проблеми из прве четири Диофантове књиге су се појавили у књизи добро познатог математичара и механичара Симона Стевина. Друго издање ове књиге, припремљено од надареног алгебристе Алберта Жирара, укључује проблеме и из преостале две књиге. Али Диофантове методе су потпуно оживеле у књигама два највећа француска математичара у 16. и 17. веку Франсоа Вијета и Пјер Ферма.

2.7.2 Диофантове методе у радовима Вијета и Ферма

После Диофанта, Вијет је био тај који је створио нове кораке у изградњи словне алгебре. Па је са правом назван оцем словног рачуна. Вијет је увео симболе за произвољне константне параметре у проблемима. Тада су се први пут појавиле формуле и било је могуће заменити неке умне операције са једним словом.

У 16. проблему V књиге Диофант је написао: „И знамо из „Поризама”: Разлика два куба може бити представљена као сума два куба”. Очигледно, проблем је био да се реши једначина $x^3 + y^3 = a^3 - b^3$, (*) за $a > b > 0$ и произвољне x и y. Решење овог проблема не постоји у „Аритметици”.

Бомбели је доказао овај поризам у својој „Алгебри”. Он није обраћао пажњу на саму методу. У сваком случају, он није навео ни један други проблем који може бити решен средствима овог метода. У својој књизи са сличним називом „Zetetics” Вијет је такође доказао ову Диофантову поризму и поставио два адициона аналогна проблема:

$$x^3 - y^3 = a^3 + b^3 \ \ (x > y > 0,\ a > 0,\ b > 0)$$

$$x^3 - y^3 = a^3 - b^3 \ \ (x > y > 0,\ a > b > 0).$$

Он је решио сва три проблема средствима Диофантове методе тангенти. Нпр. да би решио проблем (*) Вијет је ставио

$$x = t - b,\ y = a - kt$$

и после замене добио

$$t^3(1 - k^3) + 3t^2(ak^2 - b) + 3t(b^2 - a^2k) = 0.$$

Затим је ставио $b^2 - a^2k = 0$, што је еквивалентно услову да је права $y = a - k(x + b)$ тангента криве (*) у тачки $(-b, a)$, и нашао да је $t = \frac{3a^3b}{a^3+b^3}$. За x и y добијамо:

$$x = b \cdot \frac{2a^3 - b^3}{a^3 + b^3},\ \ y = a \cdot \frac{a^3 - 2b^3}{a^3 + b^3},$$

што даје да ће решење бити позитивно само ако је $a^3 > 2b^3$. Ово иде против Диофантове тврдње повезане са једначином (*), да „Разлика два куба може бити представљена као сума два куба”. Ферма је успео да реши ову загонетку и савлада сличну тешкоћу везану за једначину $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$, коју је он додао на једначине Диофанта и Вијета. Ако је овај проблем решив средствима методе тангенте, тешкоћа може настати када или x или y буду негативни, тада је сума два куба представљена као разлика, а не као збир два нова куба.

Фермаова идеја за превазилажење ових тешкоћа је да понови метод тангенте. У једном од његових коментара проблема у „Аритметици” он разматра једначину

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = z^3$$

и каже да после „прве операције” добија $x = -\frac{9}{22}$. Заиста, ово је вредност добијена применом Диофантове методе тангенти, то је ако је $z = \frac{4}{3}x + 1$.

Како је x негативно, Ферма примењује „помоћ” стављајући $x = t - \frac{9}{22}$ и поново примењује метод тангенте. Тада добијамо једначину облика

$$4t^3 + At^2 + Bt + z_1^3 = z^3.$$

Ако у њу ставимо смену $z = \left(\frac{B}{3z_1^2}\right)t + z_1$, тада добијамо позитивно решење.

Овај Фермаов метод је детаљно описан у Билијевом „Inventum Novum”, где аутор наглашава да метод даје бесконачно много решења у случају да је једначина облика:

$$y^2 = f_3(x), \quad y^3 = f_3(x) \text{ и } y^2 = f_4(x),$$

где је $f_4(x)$ полином степена n са рационалним коефицијентима.

Вратимо се на Диофантову тврдњу. Можемо ли претпоставити да је он понављао метод тангенте много пре Ферма?

1621. Баше де Мезирјак издао је нов превод Диофантове „Аритметике”. Нови превод је био јачи од Ксиландеровог превода и садржи грчки текст као и латински превод. Ово издање је постало познато не само због квалитета превода и Бачетових детаљних коментара него и зато што је Ферма забележио у својој копији ове књиге мисли и резултате који се односе на теорију бројева. На маргини после 8. проблема II књиге, у којем Диофант дели квадрат на суму два квадрата, Ферма је написао: „Са друге стране, није могуће куб разложити на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, или, уопштено, било који степен већи од квадрата, на два степена, са истим таквим изложиоцем. Ја сам за то открио изванредан доказ, но за њега су маргине ове књиге заиста мале”. Ово је чувена последња Фермаова теорема, која је свом аутору донела славу далеко изван граница математике. Ова теорема је одиграла изузетно важну улогу у историји математике. Она је била субјекат истраживања Ојлера, Лежандра, Кумера и других сјајних математичара који је стимулисао за изградњу нове области математике познате као виша аритметика или аритметика поља алгебарских бројева.

Шта знамо о аутору последње теореме? Ферма је несумњиво био водећи математичар свог времена. Волео је теорију бројева и у овој области му није било равног. Био је способан да изабере нека од многих занимљивих питања и специјалних проблема, оних фундаменталних проблема чија су истраживања створила теорију бројева као науку. Фермаови проблеми су проучавани од стране најбољих математичара 18. и 19. века почињући са Ојлером и завршавајући са Хилбертом. Многе од Фермаових тврдњи су до нас дошле без доказа. Оне су наведене на маргини његове копије Диофантове „Аритметике" или у писмима у којима пита колеге научнике да их докажу. Једини изузетак је последња теорема за биквадрате, чији доказ је приложио. Оно што Ферма није описао био је његов нов метод за доказивање пропозиција у теорији бројева који је он назвао „метод бесконачности" или „метод бесконачног спуштања". Цитираћемо део писма у којем је он описао овај метод:

„..Како слични методи презентовани у овој књизи нису довољни да се докаже тешка пропозиција (у теорији бројева), ја сам нашао потпуно нов начин да би се ово постигло.

Назвао сам га метод бесконачности, у почетку сам користио то само да бих доказао негативне пропозиције као што су следеће: Да не постоји број за један мањи од умношка тројке који је састављен од квадрата и три пута квадрата. Да не постоји правоугли троугао са датом целобројном страницом чија је површина квадрат неког броја. Доказ се изводи свођењем на противречност. Ако постоји правоугли троугао са целобројном страницом чија је површина квадрат неког броја, онда постоји и други такав троугао, мањи од првог, са истом особином. Тада, сличним аргументом, постоји и трећи са истом особином који је мањи од другог итд. Силазећи до бесконачности. Али дат је цео број, па не постоји бесконачан силазак у мање бројеве (увек су му у мислима цели бројеви). Отуда закључак да не постоји такав троугао."

Напомињемо да је пропозиција о површини троугла чија је страна дати цео број, коју је Ферма користио да демонстрира свој метод, еквивалентна са пропозицијом да не постоје два биквадрата чија је разлика биквадрат. Али ово је последња теорема за биквадрате. Њен доказ методом бесконачности, Фермаов једини доказ у теорији бројева, стигао је до нас. Касније Ојлер је користио ову методу да докаже последњу теорему за $n = 3$ и $n = 4$.

Данас је Фермаов метод бесконачности незаменљив алат у проучавању проблема Диофантове анализе.

Све што можемо рећи о Фермаовом третману квадратних и кубних неодређених једначина облика $f(x, y) = 0$ је да је он разумео Диофантове идеје и вешто применио његов метод. Проблем који је редукован на тражење рационалног решења кубне једначине пронађен је на маргини Фермаове копије „Аритметике" као и у Билијевом раду писаном после Фермаове смрти са циљем да се разјасни његов метод. У његовом раду Диофантове методе су примењене у детаљном и методичком начину, али ништа ново није додато у њих.

2.7.3 Диофантове једначине у радовима Ојлера и Јакобија

Истраживање квадратних и кубних неодређених једначина почело је од Диофанта. Прва фаза овог истраживања завршена је од стране Леонарда Ојлера (1707-1783).

Ојлер, највећи математичар 18. века, заузима водећу позицију у математици где буквално не постоји подручје у којем он није допринео фундаменталан резултат, дубоке идеје или јаке опште методе. Ово је посебно тачно за Диофантову анализу.

У његовој „Алгебри" Ојлер је систематски анализирао питање рационалних решења једначине облика

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + c \quad (11)$$

и облика

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (12)$$

и дао прецизну формулацију разлике између ова два случаја. Показао је како добити нова решења средствима Диофантове методе тангенти. Његови аргументи су чисто аналитички, без икакве геометријске терминологије. Ојлер је, такође, приметио да се одређене кубне криве понашају као квадратне, тако да се непознате x и y могу изразити као рационалне функције једног параметра и навео услов када је ово могуће. Касније је Поенкаре показао да Ојлеров услов није само потребан већ и довољан. Последњих година свог живота Ојлер се вратио Диофантовој анализи. Он је усавршио његов метод и по први пут употребио Диофантов метод сечице за две дате рационалне тачке на кривој (12). Ојлер је био аутор извесних других истраживања, на први поглед неповезаних са Диофантовим проблемима, који су допринели комплетно новом гледишту на ове проблеме.

Нека је

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d\,, \quad (13)$$

дата крива, звана Γ, и нека је $A(x,y)$ тачка на Γ. Ставимо $\prod(A) = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{y}$.
<u>Ојлерова прва теорема</u>: За произвољне тачке $A(x,y)$ и $B(x_1,y_1)$ на Γ постоји тачка $C(x_2,y_2)$ на Γ таква да је $\prod(A) + \prod(B) = \prod(C)$, и таква да су координате од C рационалан израз од координата тачака A и B (тј.

рационална функција са рационалним коефицијентима). Ојлерова друга теорема: Ако су тачке A и D на Г и $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$ такве да је $\prod(D) = n \prod(A)$, онда су координате од D рационални изрази координата од A. Специјално, за $n = 2$ имамо $\prod(D) = 2 \prod(A)$.

Ако су A и B рационалне тачке, онда су то и C и D. Ово значи да нам Ојлерова теорема омогућава добијање нове рационалне тачке на Г од једне или две познате рационалне тачке на Г.

Први који је приметио везу између Ојлерове адиционе теореме и Диофантове анализе био је познати немачки математичар Карл Густав Јакоб Јакоби. Дао је ово у свом раду „Употреба елиптичних и абелових интеграла на Диофантову анализу”, публикован 1834. године. Изгледа да су Јакобијеви савременци игнорисали овај рад упркос његовом дубоком и интересантном садржају.

На почетку свог рада Јакоби је изразио изненађење да је један „учен човек” (Ојлер) превидео везу коју је он, Јакоби, разматрао и сматрао очигледном. Формулисао је Ојлерову адициону теорему и приметио да се из датог коначног броја рационалних тачака на кривој Г може добити бесконачан број нових рационалних тачака на Г. На крају свог рада он указује како проширити ове резултате на алгебарске криве већег степена заменом Ојлерове адиционе теореме са општијом теоремом Абела.

Јакоби је у том раду био близу откривања структуре скупа рационалних тачака на елиптичној кривој. Да би ово открио нису му недостајала техничка средства, у којима је био вешт, него нова тачка гледишта, она која је постепено и са тешкоћама правила свој пут у прошлом веку. Потребна му је била операција сабирања тачака као и концепт групе и Абелове групе.

Математичари прве половине 19. века нису размишљали о проширивању аритметичких операција на тачке или друге објекте јако различите од бројева. Тако да је Јакоби баратао са интегралима, а није сабирао тачке.

Да ли су Ојлер и Јакоби били свесни да сабирање тачака на елиптичним кривама може бити базирано на Диофантовим процедурама? Ни Ојлер ни Јакоби нису ово поменули. Са друге стране, обојица су формулисали теореме за криве $y^2 = ax^4 + bx^4 + cx^2 + dx + e$ без узнемиравања са кубним кривама. За ове криве са рационалним тачкама адициона теорема нема једноставан и јединствен геометријски смисао. Штавише, ни Ојлер ни Јакоби нису придавали значај геометријској интерпретацији аналитичких израза.

Упркос једноставности основног резоновања сабирања тачака на елиптичним кривама, прошло је око 70 година пре него што је ово резоновање постало база системског проучавања структуре скупа њених рационалних тачака. Ово је урађено почетком 20. века од стране француског математичара Хенрија Поенкареа.

Јакобијев рад је остао непримећен и први који је осмислио идеју изградње аритметике на елиптичним кривама био је Поенкаре. Па ипак, велики део посла је урађен између 1834. и краја 19. века у студијама о геометрији алгебарских кривих. Концепт рода алгебарских кривих први пут се појавио у радовима водећег норвешког математичара Нилса Абела (1802-1829). Почињући са различитим разматрањима Риман (1826-1866), водећи немачки математичар, дошао је до истог концепта. У свом раду „Теорија Абелових функција" Риман се базирао на класификацији једначина облика $F(s,z) = 0$ на бирационалне трансформације и показао да је род криве под дејством таквих трансформација инваријантан.

У следећем раду Клебш и други немачки математичари положили су основе теорије алгебарских кривих.

Поенкаре почиње своју књигу „Аритметичке особине алгебарских кривих" са важним запажањем да су аритметичке особине многих објеката врло блиско повезане са њиховим трансформацијама. Поенкаре је почео да размишља о начину повезивања и систематизовања овог проблема и Диофантове анализе. У том циљу одлучио је да обави нову класификацију полинома са две непознате са рационалним коефицијентима. Потпуно је базирао ову класификацију на бирационалним трансформацијама са рационалним коефицијентима. Поенкаре је објаснио Диофантов метод тангенте и сечице (без, наравно, помињања њиховог имена) за проналажење нових рационалних тачки на кривој Г ако су дате једна или две рационалне тачке криве Г. Прво је формулисао обе методе геометријски, а затим их повезао са Ојлеровом адиционом теоремом. Поенкаре је дао експлицитну дефиницију сабирања рационалних тачака на елиптичној кривој Г и показао да скуп ових тачака заједно са операцијом сабирања тачака чини комутативну групу.

Поенкареова књига је посвећена истраживању кривих рода 1. Почиње разматрањем најједноставнијих кривих рода 1, тј. кубних кривих. Након разматрања кубних кривих Поенкаре је размотрио друге криве рода 1. Доказао је следећи резултат: Нека је $f(x,y) = 0$ крива рода 1 и степена m. Ако постоји бар једна рационална тачка ове криве, онда је она бирационално еквивалентна са кубном кривом.

Овај резултат решава комплетно питање кривих рода 1: тако крива или нема рационалних тачака или је она кубна крива.

Чини се да је Поенкаре био потпуно несвестан рада својих претходника на аритметици алгебарских кривих. Знамо за Диофантове процедуре и њихове повезаности са Ојлеровом адиционом теоремом из опште теорије алгебарских кривих. Али идеја коришћења познатих чињеница и метода за израчунавање аритметичких особина кривих је замишљена од Поенкареа независно од осталих. Тако је ова идеја настала најмање три пута: средином 3. века нове ере у раду Диофанта, 1830. у раду Јакобија и почетком 20. века у раду Поенкареа. Ово није јединствена појава у историји математике. И пројективна геометрија је откривена три пута (први пут у антици, други пут у 17. веку од Дезарга и Паскала и почетком 19. века од Понселеа и осталих).

2.8 Улога конкретних бројева у Диофантовој „Аритметици"

Већ у математици античког Вавилона решења алгебарских проблема са конкретним нумеричким вредностима служило је за две различите намене. Један је био да добију нумеричко решење проблема, а други да илуструје алгоритам за проналажење решења класе проблема истог типа.

У Диофантовој Аритметици улога нумеричких параметара је повећана на фундаменталан начин. По правилу, у циљу решавања проблема Диофант представља потребан број као рационалану функцију једне непознате и од параметара. Он параметрима додељује конкретне нумеричке вредности, али је предвиђао да они могу бити замењени другим произвољним рационалним бројем или произвољним бројем који задовољава одређене услове. Као илустрацију размотрићемо 8. проблем у II књизи, који се бави репрезентацијом датог квадрата као суме два квадрата, тј. решење једначине $X^2 + Y^2 = a^2$.

Диофант је ставио $a^2 = 16$. Он узима базу једног од квадрата као непознату $X = t$ и базу другог квадрата линерану функцију од t: $Y = kt - 4$. Овде је 4 корен из 16, k може бити произвољан рационалан број. Диофант пише да је неопходно да се узме „нека вредност t ... нека је то 2". Решење проблема је дато са:

$$X = t = \frac{2ak}{1+k^2}, \ \ Y = kt - a = a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

У Диофантовом случају је $X = \frac{16}{5}$ и $Y = \frac{12}{5}$. Али он је савршено добро разумео да се за произвољно k добија одговарајуће рационално решење. Нпр. у 19. проблему треће књиге он пише да „знамо да сваки квадрат може да се растави на два квадрата на бесконачно много начина".

Тако, у 8. проблему у II књизи број 2 обавља две функције, конкретног броја 2 и симбол за било који произвољан рационалан број. Али то није увек могуће да параметру доделимо произвољну вредност. Нпр. у 8. проблему IV књиге који је еквивалентан систему једначина

$$X_1^3 + X_2 = Y^3, \ \ X_1 + X_2 = Y .$$

Диофант је ставио почетне $X_2 = t, \ X_1 = kt$, где је $t = 2$. Тада је

$$Y = (k+1)t \ \text{ и } \ t^2 = \frac{1}{(k+1)^3 - k^3}.$$

За $k = 2$ ово даје $t^2 = \frac{1}{19}$, тј. t није рационалан број. Да бисмо добили рационално решење морају се наћи два броја различита од 1 тако да је разлика њихових кубова квадрат:

$$(\tau + 1)^3 - \tau^3 = \square \text{ или } 3\tau^2 + 3\tau + 1 = \square \,.$$

Диофант је ставио $\square = (1 - \lambda\tau)^2$ и добио $\tau = \frac{3+2\lambda}{\lambda^2-3}$. Бирајући $\lambda = 2$ добио је да је $\tau = 7$. Отуда вредност параметара може бити изабрана из класе $\left\{\frac{3+2\lambda}{\lambda^2-3}\right\}$.

Видели смо да у Диофантовом алгебарском формализму, поред симбола за непознате и њихове степене, главну улогу играју конкретни нумерички симболи који служе и као параметри. У каснијим случајевима они могу играти улоге слободних параметара или неслободних параметара задовољавајући дати почетни услов.

Диофантов алгебарски формализам представља специјалну фазу у еволуцији алгебре која почиње са „Аритметиком". Ова фаза је трајала у европској алгебри до друге половине 16. века. То је било дотле док Бомбели и Стевин нису увели симболе за друге, треће и остале непознате и док Вијет није увео симболизам за параметре као систем словног рачуна.

3. Методе решавања Диофантових једначина

3.1 Увод

Алгебарска једначина или систем алгебарских једначина са реалним коефицијентима чије решење припада скупу целих (или рационалних) бројева, или неком скупу од његових подскупова називају се алгебарским Диофантовим једначинама.

Из саме дефиниције Диофантове једначине се може закључити да захтеви, кроз задатке, могу бити веома различити и разноврсни. Одговори на постављена питања су често веома тешки, што теорији Диофантових једначина даје прилично велики значај и чини је једном од најинтересантнији области у елементарној математици. Ова чињеница изискује препознавање одговарајуће методе за решавање. Строга систематизација метода за решавање Диофантових једначина сигурно не би била потпуна, јер се општи поступак може дефинисати само за неке класе једначина. У раду ћу презентовати најчешће коришћене методе: разликовање случајева, производа, количника, збира, неједнакости, парности, дискриминанте, Ојлера и Диофанта.

3.2 Метод разликовања случајева

Овај метод је један од најкоришћенијих за решавање Диофантових једначина и уопште у аритметици. У теорији Диофантових једначина он није свемогућ. Може се користити самостално, а може и у комбинацији са другим методама.

Овај метод се најчешће користи у основној школи при решавању Диофантових једначина, и заснован је на коришћењу неколико идеја: парност-непарност, дељивост и последња цифра.

Метод раздвајања промењљивих, као и други методи, садржи извесну произвољност. Конкретно: Како раздвојити случајеве? Искуствено се могу формулисати методолошки принципи за Диофантове једначине са две и више промењљивих.

Суштина овог метода, код Диофантових једначина са две променљиве, је да се директно или погодном трансформацијом, претпостави решење једне променљиве које је могуће, па се онда израчунава вредност друге променљиве.

У случају да се ради о Диофантовим једначинама са више од две променљиве раздвајање случајева се врши по једној променљивој, која је за то најподеснија, а онда се у оквиру сваког случаја разматрају нови случајеви, и онда се у оквиру сваког случаја разматрају нови случајеви, и све тако док се Диофантова једначина не сведе на решавање низа једначина са једном непознатом.

Код решавања Диофантових једначина методом разликовања случајева најважније питање је како раздвојити случајеве? Решавање проблема било којом методом, па и методом раздвајања случајева, је пре свега, ипак ствар математичке интуиције, искуства, дара, талента и осећања за проблем. Због тога интелигенција, таленат и рад представљају три равноправна фактора без којих је врхунски резултат у математици немогућ.

Кроз следеће примере решених задатака, ћу покушати да презентујем најчешће методе разликовања случајева.

Пример 1. *Одредити све уређене парове* (x, y) *природних бројева* x *и* y *тако да важи једнакост* $xy^2 + 4 = 2000\,y^2$.

Решење. Разликујемо два случаја:

1) Ако је $y = 0$, тада је $4 = 0$, па $y = 0$ није решење дате једначине;

2) Ако је $y \neq 0$, погодном трансформацијом, добијамо $\frac{4}{y^2} = 2000 - x$. Како је $2000 - x$ природан број, то је и $\frac{4}{y^2}$ природан број. Закључујемо да y мора бити делилац броја 4 и зато су могући случајеви:

а) Ако је $y = 1$, онда је $x = 1996$.

б) Ако је $y = 2$, онда је $x = 1999$.

Коначно, долазимо до закључка да је скуп решења дате једначине: $(x, y) \in \{(1996,1), (1999,2)\}$.

Пример 2. *Одредити све природне бројеве x и све просте бројеве p тако да је* $x! + 2 = p^2$.

Решење. Разликујемо следеће случајеве:

1) $x = 1$,

2) $x = 2$,

3) $x > 2$.

У првом случају нема решења јер је $p^2 = 3$, а то не може бити ни за једно p.

У другом случају је $p = 2$.

У трећем случају је број $x!$ увек паран, па је и број $x! + 2$ такође паран. Како је за $p > 2$, сваки прост број непаран и p^2 је непаран број, па једнакост очигледно не постоји. Закључујемо да је једино решење $(x, p) = (2,2)$.

Пример 3. *У скупу целих бројева решити једначину* $x! + 2y = 5555$.

Решење. Ако је $x = 1$, онда је $x! = 1$, па је $2y = 5554$, тј. $y = 2777$.

Ако је $x \geq 2$, тада је $x!$ паран број, па је $x! + 2y$ такође паран број, што не може бити. Значи полазна једначина има само једно решење

$(x, y) = (1,2777)$.

3.3 Метод производа

Овај метод се често користи при решавању нелинеарних Диофантових једначина. Састоји се из низа трансформација и факторизација Диофантове једначине у производ два или више чинилаца. Најповољнија ситуација је уколико се на једној страни једнакости израз који садржи промењљиве факторизује на чиниоце, а на другој страни факторизује константа. Након тога се овај метод своди на метод разликовања случајева. Примери, који следе, најбоље илуструју коришћење производа ради лакшег раздвајања случајева.

Пример 4. *У скупу целих бројева решити једначину* $xy + 2\,x = 7$.

Решење. Факторизацијом полазне једначине добијамо $x(y + 2) = 7$. Како је десна страна једначине цео број, то мора бити и лева страна једначине. Сада разликујемо четири случаја:

1) $(x = 1 \wedge y + 2 = 7) \Rightarrow (x, y) \in \{(1,5)\}$;

2) $(x = -1 \wedge y + 2 = -7) \Rightarrow (x, y) \in \{(-1, -9)\}$;

3) $(x = 7 \wedge y + 2 = 1) \Rightarrow (x, y) \in \{(\mathbf{7}, -\mathbf{1})\}$**;**

4) $(x = -7 \wedge y + 2 = -1) \Rightarrow (x, y) \in \{(-\mathbf{7}, -\mathbf{3})\}$.

Дата једначина има четири решења
$(x, y) \in \{(1,5), (-1, -9), (7, -1), (-7, -3)\}$.

Пример 5. *Одредити све парове* (x, y) *целих бројева за које је* $2x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$. *(Општинско такмичење-Република Српска 2001. године)*

Решење. Трансформацијом добијамо

$$2x(x+y)+y(x+y)=-1,$$

односно

$$(x+y)(2x+y)=-1.$$

Одавде је $(x+y=1$ и $2x+y=-1)$ или $(x+y=-1$ и $2x+y=1)$. Први случај даје решење $(x=-2, y=3)$, а други $(y=-3, x=2)$.

Пример 6. *Наћи сва решења једначине* $y^2-x^2=4x+11$ *у скупу целих бројева.(Федерално такмичење-БиХ, 2002. године)*

Решење. Трансформацијом добијамо

$$y^2-x^2-4x-4=7,$$

односно

$$y^2-(x+2)^2=7.$$

Сада је

$$(y-x-2)(y+x+2)=7.$$

Ова једнакост је могућа у скупу целих бројева ако је:

$$(y-x-2=1, y+x+2=7)$$

или

$$(y-x-2=-1, y+x+2=-7)$$

или

$$(y-x-2=7, y+x+2=1)$$

или

$$(y-x-2=-7, y+x+2=-1).$$

Одавде имамо четири решења $(x,y)\in\{(1,4)(-5,4)(1,-4)(-5,-4)\}$.

3.4 Метод количника

Овај метод се користи када је дата Диофантова једначина која се, погодном трансформацијом, може прилагодити тако да из ње можемо изразити зависност једне променљиве у зависности од друге променљиве.

Идеја је да се једначина облика $A = B$, низом трансформација, преведе у облик $M = N + \frac{P}{Q}$. Ако су M и N цели бројеви, онда то мора бити и број $\frac{P}{Q}$. То значи да се број Q мора садржати у броју P.

Пример 7. *У скупу целих бројева решити једначину* $xy + 7x - 3y = 23$.

Решење. Трансформацијом полазне једначине добија се

$$x\,(y+7) = 3y + 23,$$

односно

$$x = \frac{3y+23}{y+7} = \frac{3y+21+2}{y+7} = \frac{3\,(y+7)+2}{y+7} = 3 + \frac{2}{y+7}.$$

Сада разликујемо два случаја:

1) Ако је $y = -7$, дата једначина нема решења, јер именилац разломка несме бити једнак нули;

2) Ако је $y \neq -7$, онда је $x = 3 + \frac{2}{y+7}$. По услову задатка, лева страна задње једначине мора бити цео број, па онда мора бити и десна страна. На основу тога могући случајеви су:

а) $y + 7 = -1 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow x = 1$;
б) $y + 7 = 1 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow x = 5$;
в) $y + 7 = -2 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow x = 2$;
д) $y + 7 = 2 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow x = 4$.

Коначно, могућа решења полазне једначине су: $(x, y) \in \{(1, -8), (5, -6), (2, -9), (4, -5)\}$.

Пример 8. *Одредити све целе бројеве који се могу приказати у облику* $\frac{a^3+2}{a-1}$, *где је a цео број различит од 1.*

Решење. Из услова задатка можемо писати

$$x = \frac{a^3-1+3}{a-1} = a^2 + a + 1 + \frac{3}{a-1}.$$

Како је $a \neq 1$, то ће x бити цео број само ако се $a - 1$ садржи у 3, односно $(a-1) \in \{1, -1, 3, -3\}$. Одавде $a \in \{2, 0, 4, -2\}$. Коначно $x \in \{10, -2, 22, 2\}$.

Пример 9. *Одредити целе бројеве x и y тако да је* $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.

Решење. Раздвајајући променљиве добијамо

$$x^2 + 2x - 6 = xy + 3y = y(x+3).$$

Како за $x = -3$ задња једначина нема решења, то мора бити

$$y = \frac{x^2+2x-6}{x+3} = \frac{x^2+3x-x-3-3}{x+3} = x - 1 - \frac{3}{x+3}.$$

За $(x+3) \in \{1,-1,3,-3\}$, односно $x \in \{-2,-4,0,-6\}$ добијамо одговарајуће вредности за $y \in \{-6,-2,-2,-6\}$, па је скуп решења

$(x,y) \in \{(-2,-6),(-4,-2),(0,-2),(-6,-6)\}$.

3.5 Метод збира

Идеја ове методе је да се једначина трансформише у суму одређеног броја сабирака, а затим се своди на метод разликовања случајева. Један од најпогоднијих облика је збир квадрата, или још општије, збир ненегативних сабирака.

Пример 10. *У скупу целих бројева решити једначину:* $4x^2+y^2=12x+4y-12$.

Решење. Трансформишимо једначину у збир квадрата

$$(2x-3)^2+(y-2)^2=1.$$

Сада, због почетног услова, разликујемо два случаја:

1) $2x-3=1 \wedge y-2=0$;
2) $2x-3=-1 \wedge y-2=0$.

Сада су решења дате једначине $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \{(\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{2},\mathbf{2})\}$.

Пример 11. *У скупу целих бројева решити једначину* $x^2+5y^2+5z^2-4xz-2y-4yz+1=0$. *(Регионално такмичење-Република Српска 2001. године)*

Решење. Трансформишимо једначину на следећи начин

$$(x^2-4xz+4z^2)+(z^2-4yz+4y^2)+(y^2-2y+1)=0.$$

Одавде је

$$(x-2z)^2+(z-2y)^2+(y-1)^2=0.$$

Одавде следи да је:

$$x-2z=0, z-2y=0 \text{ и } y-1=0,$$

па је

$$y=1, z=2y=2 \text{ и } x=2z=4.$$

Пример 12. *Постоје ли цели бројеви x и y такви да је* $x^2+y^4=2x-1$?

Решење. Како је $x^2-2x+1+y^4=0$, то је $(x-1)^2+y^4=0$. Одавде је $x-1=0$ и $y=0$, па је једино решење $(x,y)=(1,0)$.

Пример 13. *Колико решења у скупу целих бројева има једначина* $x^4 + y^2 + 2y = 1$*?*

Решење. По сличној аналогији имамо да је

$$(y+1)^2 + x^4 = 2.$$

Одавде су могући следећи случајеви: или оба сабирка по 1, или један 0 а други 2. Очигледно друга могућност отпада, јер не постоји цео број чији је квадрат једнак 2, па је једина могућност $x^4 = 1$ и $(y+1)^2 = 1$, односно $(x = 1 \text{ или } x = -1\ )$ или $(y = 0 \text{ или } y = -2)$. Сада су коначна решења $(x, y) \in \{(1,0), (1,-2), (-1,0), (-1,-2)\}$, и има их четири.

3.6 Метод неједнакости

Овај метод се користи да би се смањила област вредности променљивих, а затим се користи неки од претходних метода. Уствари, неједнакост се користи да се из области дефинисаности једначине издвоје скупови у којима једначина нема решења. Потом се јеначина решава у преосталој области дефинисаности.

Пример 14. *Ако су* x, y, z *различити природни бројеви, решити једначину* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Решење. Обзиром да је једначина симетрична функција променљивих, не умањујући општост, можемо предпоставити де је $x > y > z$. Тада је

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$$

и тада је

$$\frac{3}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 < \frac{3}{z}.$$

Сада је

$$\frac{3}{x} < 1 \ \wedge \frac{3}{z} > 1,$$

што даје

$$x > 3 \ \wedge z < 3.$$

Како су x, y, z различити од 1 и како је $z < 3$, то је једино $z = 2$.

Сада је $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. По истој логици имамо да је

$$\frac{2}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} < \frac{2}{y} \ \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{y} \ \Rightarrow y < 4.$$

Како је $y > z \Rightarrow y = 3$, односно $x = 6$. Како је једначина симетрична функција променљивих, коначна решења су:
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \{(\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{2}), (\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{6}), (\mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{6}), (\mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{2})\}$.

Пример 15. *Одредити природне бројеве a,b,c,d тако да је* $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$.

Решење. Очигледно је да ниједан од бројева није 1, јер тада једначина нема решења у скупу природних бројева. Како је

$$a > 1,\ b > 1,\ c > 1,\ d > 1,$$

претпоставима да је

$$a = b = c = d = 2.$$

То је очигледно једно решење полазне једнакости.

Претпоставимо сада да је

$$a \geq 2,\ b \geq 2,\ c \geq 2,\ d > 2.$$

Тада је

$$a^2 \geq 4, b^2 \geq 4, c^2 \geq 4, d^2 > 4.$$

Сада је

$$\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{d^2} < \frac{1}{4},$$

па је

$$\frac{1}{\mathrm{a}^2} + \frac{1}{\mathrm{b}^2} + \frac{1}{\mathrm{c}^2} + \frac{1}{\mathrm{d}^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

што значи да једначина нема решења. Како због симетричности то важи и за друге променљиве, то је једино решење $a = b = c = d = 2$.

Пример 16. *У скупу целих бројева решити једначину* $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.*(Савезно такмичење, Југославија 1988. године)*

Решење. Множећи почетну једнакост са 4 и додајући на обе стране 1, добијамо

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2.$$

Сада је

$$(2y + 1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2x^2 + x)^2 + (3x + 1)(x + 1),$$

одакле закључујемо да је

$$(2y + 1)^2 > (2x^2 + x)^2,$$

уколико је

$$(3x + 1)(x + 1) > 0,$$

а то је за $x > 0$ или $x < -1$. С друге стране

$$(2y+1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x^2 + 4x + 1 + 2x - 2x - x^2 = (2x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x),$$

па је

$$(2y+1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2$$

уколико је $x^2 - 2x > 0$, а то је за $x < 0$ или $x > 2$.

Закључујемо да је за $x < -1$ или $x > 2$,

$$(2x^2 + x)^2 < (2y+1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2.$$

Како су $2x^2 + x$ и $2x^2 + x + 1$ узастопни цели бројеви то се између њих не налази нити један цео број па за $x < 0$ или $x > 2$ једначина нема целобројних решења. Тако смо област могућих решења смањили на интервал $-1 \leq x \leq 2$. Замењујући вредности добијамо коначно решење

$(x, y) \in \{(-1,0),\ (-1,-1),\ (0,0),\ (0,-1),\ (2,5),\ (2,-6)\}$.

Пример 17. *Одредити природне бројеве* $x_1, x_2, \dots, x_{1984}$ *тако да је* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1984}^2 = 2006$.

Решење. Нека је

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1 \text{ и } x_{k+1} \geq 2, \dots, x_{1984} \geq 2.$$

Тада је

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1984}^2 = 2006 = k + x_{k+1}^2 + \cdots + x_{1984}^2 \geq k + (1984 - k)4.$$

Из неједначине

$$2006 \geq k + 7936 - 4k = 7936 - 3k$$

добијамо

$$3k \geq 7936 - 2006 = 5930,$$

односно $k \geq 1976$. Дакле, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{1976} = 1$. Одавде закључујемо да је збир квадрата преосталих 8 бројева

$$x_{1977}^2 + x_{1978}^2 + \cdots + x_{1984}^2 = 2006 - 1976 = 30.$$

Очигледно да вредност ових осам бројева мора бити мања од 6, чак и од 5, јер би тада збир премашивао 30. Нека међу осам бројева a има вредност 1, b има вредност 2, c има вредност 3 и d има вредност 4. Тада је

$$a+b+c+d=8 \text{ и } a+4b+9c+16d=30,$$

односно

$$3b+8c+15d=22.$$

Како је $3b+15d=22-8c$, то $22-8c$ мора бити дељиво са 3, а то је само за $c=2$. Тада је $b=2$ и $d=0$, односно $a=4$. Поред већ уочених 1976 јединица, међу осам преосталих бројева, има још четири, па је

$$x_1=x_2=\cdots=x_{1976}=x_{1977}=x_{1980}=1,$$

$$x_{1981}=x_{1982}=2,$$

$$x_{1983}=x_{1984}=3.$$

Дакле решење дате једначине је ма која пермутација скупа $\{1,1,1,\dots,1,1,1,2,2,3,3\}$.

3.7 Метод парности

Овај метод користи особину бројева да су парни, односно непарни, што доводи до елиминације великог броја случајева и сужења опсега, тј. области вредности промењљивих. Применом метода парности се елиминише читав један подскуп потенцијалних решења. Овај метод решавања Диофантових једначина користи се већ од 5. разреда Основне школе.

Пример 18. *Постоје ли природни бројеви* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *такви да је* $x^2+4y=555\dots555$ *(декадни запис броја* $555\dots555$ *садржи тачно* n *петица)?*

Решење. Разликујемо следеће случајеве:

1) Ако је $n=1$, онда је $x^2+4y=5$, па је $x=1 \wedge y=1$;
2) Ако је $n\geq 2$, онда x може бити паран или непаран број:
   а) Ако је $x=2k, (k\in\mathbb{N})$, онда је
   $$x^2+4y=4k^2+4y=4\,(k^2+y)=555\dots555.$$

Очигледно задња једнакост нема решења.

   б) Ако је $x=2k+1, (k\in\mathbb{N})$, онда је
   $$x^2+4y=4k^2+4k+1+4y=555\dots555,$$

односно

$$x^2+4y=4k^2+4k+1+4y=4\,(k^2+k+y)=555\dots555$$

или

$$4\,(k^2+k+y)=555\dots554, \text{ тј.}$$
$$2\,(k^2+k+y)=277\dots7777.$$

Задња једначина нема решења јер је лева страна једнакости паран број а десна непаран број, што је немогуће.

Једино решење је када је $n=1$ и оно је $(x,y)\in\{(1,1)\}$.

Пример 19. *Одредити све просте бројеве* p, q *и* r *такве да је* $2p + 3q + 4r = 2006$.*(Окружно такмичење, 5.разред, 2007. године)*

Решење. Бројеви $2p, 4r, 2006$ су парни, па је паран и број $3q$. Онда је и q паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q = 2$. Сада је

$$2p + 4r = 2000,$$

односно

$$p + 2r = 1000.$$

Како су $2r$ и 1000 парни бројеви, то је и p паран број, тј. $p = 2$. Сада је $r = 499$. Како је 499 прост број, закључујемо да је јединствено решење задатка: $p = q = 2$ и $r = 499$.

Пример 20. *Постоје ли цели бројеви x и y такви да је* $x^2 + 4y = 22223$*?*

Решење. Како је $4y$ увек паран број, а 22223 непаран број то је x^2 мора бити непаран број, а то значи да је и x непаран број. Нака је $x = 2k + 1$ (k цео број), тада је једначина еквивалентна једначини

$$(2k + 1)^2 + 4y = 22223,$$

односно

$$4(k^2 + k + y) = 22222.$$

Како је лева страна једнакости дељива са 4 а десна страна при дељењу са 4 даје остатак 2, то дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

3.8 Метод дељивости

Ова метода се заснива на једноставној чињеници да ако је $A = B$, онда су и својства израза A и B у погледу дељивости идентична. Овај метод користимо када је у питању дељење без остатка. Уколико имамо дељење са остатком погодније је користити метод конгруенције (овде га нећу посебно обрађивати).

Пример 21. *Одредити све двоцифрене природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.*

Решење. Нека је тражени број облика $\overline{ab}$. Тада је, по услову задатка,

$$10a + b = 9\,(a + b).$$

Како је десна страна једнакости дељива са 9, то је и лева страна једнакости дељива са 9, а то значи да је и збир цифара траженог броја дељив са 9. То значи да је тада $a + b$ једнако 9 или 18, односно $10a + b$ једнако $9 \cdot 9 = 81$ или $9 \cdot 18 = 162$. Како је 162 троцифрен број, једино решење је
$81 = 9\,(8 + 1)$, тј. $\overline{ab} = 81$.

Пример 22. *Одредирти све троцифрене бројеве* $\overline{abc}$ *који су пет пута већи од производа својих цифара.(Републичко такмичење 7. разред – Република Српска, 2002. године)*

Решење. Према услову задатка је

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 5abc.$$

Одавде је

$$c = 5(abc - 20a - 2b),$$

што значи да је цифра c дељива са 5. За $c = 0$ имамо да је $5 \cdot a \cdot b \cdot 0 = 0$, па број $\overline{abc}$ није троцифрен. Дакле, $c = 5$, па је

$$100a + 10b + 5 = 25ab.$$

Сада је

$$2b + 1 = 5a(b - 4).$$

Број $2b + 1$ је непаран, мањи од 20 и дељив са 5, односно једнак је 5 или 15. При том је $b - 4 > 0$. Ако је $2b + 1 = 5$, следи $b = 2 < 4$, што је немогуће. Из $2b + 1 = 15$, следи $b = 7 > 4$, а из $2 \cdot 7 + 1 = 5a(7 - 4)$ добијамо $a = 1$. Коначно, тражени број је 175 и једини је.

Пример 23. *Збир цифара једног четвороцифреног броја је 27. Доказати да је збир тог броја и броја записаног истим цифрама, али у обрнутом поретку, такође дељив са 27. (Републичко такмичење, 8. разред- Македонија 2001. године)*

Решење. Нека је $\overline{abcd}$ број такав да је $a + b + c + d = 27$. Тражени збир је

$$S = \overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001(a + b + c + d) + 891(a + d) = 110 \cdot 27 + 27 \cdot 33(a + d) = 27\big(110 + 3(a + d)\big),$$

што очигледно представља његову дељивост са 27.

3.9 Метод дискриминанте

Метод дискриминанте представља метод помоћу којег је могуће некада веома квалитетно и елегантно решити Диофантову једначину. Овај метод се користи онда када би решавање Диофантове једначине на други начин било немогуће или крајње нерационално.

Пример 24. *Одредити све целе бројеве* x *и* y *такве да је* $2\,x^2 + 5x + y^2 = 19$.

Решење. Дату једначину можемо посматрати као квадратну једначину по x, тј.

$$2\,x^2 + 5x + (y^2 - 19) = 0.$$

Њена решења су

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8\,(y^2 - 19)}}{4}.$$

Очигледно је да x може (али не мора) бити целобројно само ако је дискриминанта ове квадратне једначине потпун квадрат. Другим речима мора бити

$$25 - 8\,(y^2 - 19) = a^2,$$

где је a неки цео број, који такође треба одредити. Дакле,

$$25 - 8\,y^2 + 152 = a^2,$$

па је

$$a^2 + 8\,y^2 = 177.$$

Како је $8\,y^2 \leq 177$, то је $y \leq 4$, па $|y| \in \{0,1,2,3,4\}$. Број a је цео број ако је $|y| \in \{1,4\}$. Тада је $|a| \in \{13,7\}$. Тада се лако дабијају сва решења (која испуњавају почетне услове да су цели бројеви) дате једначине: $(x,y) \in \{(1,13), (-1,13), (4,7), (-4,7)\}$.

Пример 25. *Колико природних бројева n има особину да је* $n^2 + 3n + 24$ *потпун квадрат неког целог броја?(Републичко такмичење 7. разред – Република Српска, 2002. године)*

Решење. Нека је $n^2 + 3n + 24 = m^2$.

Тада је

$$n^2 + 3n + 24 - m^2 = 0.$$

Решавајући добијену једначину као квадратну једначину по *n* добијамо да је

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(24 - m^2)}}{2}.$$

Да би *n* био цео број мора и дискриминанта бити потпун квадрат, па је

$$9 - 96 + 4m^2 = k^2, \text{ тј. } 4m^2 - k^2 = 87.$$

Одавде је

$$4m^2 - k^2 = (2m - k)(2m + k) = 87.$$

Сада разликујемо случајеве:

$$(2m - k) \in (1,3,29,87,-1,-3,-29,-87)$$

и

$$(2m + k) \in (87,29,3,1,-87,-29,-3,-1)\ .$$

Сабирајући добијамо $4m \in (88,32,-88,-32)$, па је $m \in (22,8,-22,-8)$. Сада је $n \in (5,-8,20,-23)$. Услове задатка испуњавају само $n \in (5,20)$.

3.10 Метод Ојлера

Метод Ојлера[3] се примењује код решавања линеарне Диофантове једначине, тј. једначине облика $ax + by = c$ и при томе су бројеви a и b узајамно прости. Овај метод није често функционалан, јер се до коначног решења долази преко неколико итерација. Међутим сама методологија је прилично јасна и овај метод се најчешће користи у Основној школи. Метод Ојлера је најбоље објаснити кроз примере.

Пример 26. *Одредити сва решења једначине* $40\,y - 63\,x = 521$*, ако су* x *и* y *цели бројеви.*

Решење. Како су 40 и 63 узајамно прости бројеви једначина има решења. Из дате једначине је

$$40\,y = 63\,x + 521,$$

односно

$$y = \frac{80x+520+1-17x}{40} = 2x + 13 - \frac{17x-1}{40}.$$

Како је $y \in \mathbb{Z}$, то мора бити десна страна једнакости цео број, тј. $\frac{17x-1}{40} = m$, где је $m \in \mathbb{Z}$. Сада је

$$17x - 1 = 40m,$$

односно

$$x = \frac{40m+1}{17} = \frac{34m+6m+1}{17} = 2m + \frac{6m+1}{17}.$$

Из услова задатка је

$$\frac{6m+1}{17} = n,$$

односно

$$6m + 1 = 17n.$$

Коначно

---

[3] Ојлер је у 5. делу ”Алгебре” из 1770. године описао своју методу за решавање линеарне Диофантове једначине

$$m = \frac{17n-1}{6} = \frac{18n-n+1}{6} = 3n - \frac{n+1}{6}.$$

Како су m и n цели бројеви, мора бити $\frac{n+1}{6} = p$ такође цео број. Одавде је

$n + 1 = 6p$, тј. $n = 6p - 1$.

Заменом добијамо:

$$m = 3\,(6p - 1) - p = 17p - 3,$$

$$x = 2\,(17p - 3) + 6p - 1 = 40p - 7$$

и

$$y = 2\,(40p - 7) + 13 - 17p + 3 = 63p + 2.$$

Коначно, опште решење полазне једначине је

$$x = 40p - 7 \text{ и } y = 63p + 2, \text{ где } p \in \mathbb{Z}.$$

Пример 27. *Решити Диофантову једначину* $39x - 22y = 10$.

Решења: Како су 39 и 22 узајамно прости бројеви једначина има решења. Трансформацијом добијамо

$$y = \frac{39x-10}{22} = \frac{22x+17x-10}{22} = x + \frac{17x-10}{22}.$$

Ово ће бити цео број ако је $\frac{17x-10}{22} = z$ цео број. Одавде је, поступајући на исти начин,

$$x = \frac{22z+10}{17} = z + \frac{5z+10}{17} = z + m.$$

Следећи исту аналогију добијамо

$$z = \frac{17m-10}{5} = 3m - 2 + \frac{2m}{5}.$$

Коначно је $m = 5n$, где је *n* такође цео број. Сада је

$$z = 3m - 2 + \frac{2m}{5} = 15n - 2 + 2n = 17n - 2,$$

$$x = z + m = 17n - 2 + 5n = 22n - 2$$

и

$$y = x + z = 22n - 2 + 17n - 2 = 39n - 4.$$

Дакле, сва целобројна решења дате једначине су $(x, y) \in (22n - 2{,}39n - 4)$, где је n цео број.

3.11 Метод Диофанта

У другој књизи ”Аритметике” Диофант даје општи метод за одређивање рационалних решења алгебарске квадратне једначине са две променљиве. Диофантов метод се састоји у следећем. Посматра се квадратна једначина са две променњиве $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, где су A, B, C, D, E, F цели бројеви. Посматрана једначина у равни xOy представља неку криву другог реда (или једну, односно две праве). Ако је (x_0, y_0) једно целобројно решење дате једначине, онда се кроз тачку (x_0, y_0) поставља прамен правих $y - y_0 = k\,(x - x_0)$, где је k рационалан број различит од нуле. За разне вредности параметра k, добија се бесконачно много тачака пресека правих и криве. Те тачке су рационалне.

Пример 28. *Решити једначину* $x^2 - 2\,y^2 + 3xy - 4x - 5y + 3 = 0$ *у скупу рационалних бројева.*

Решење. Једно решење дате једначине је $(x_0, y_0) = (1{,}0)$. Сада

$x = 1 + t$ и $y - 0 = k[(1 + t) - 1]$, тј. $y = kt$.

Заменом, у почетну једначину, добијамо нову једначину

$$(1 + t)^2 - 2\,(kt)^2 + 3\,(1 + t)kt - 4\,(1 + t) + 5kt + 3 = 0.$$

После трансформације последње једначине добија се

$$t\,[t\,(1 - 2k^2 + 3k) + 8k - 2] = 0.$$

Одавде је

$$t = 0 \ \text{ или } \ t = \frac{8k-2}{2\,k^2-3k-1}.$$

Ако је $t = 0$, тада су решења једначине почетна решења $(x_0, y_0) = (1{,}0)$.

Уколико је $t = \frac{8k-2}{2\,k^2-3k-1}$, тада су решења почетне једначине

$$x = \frac{2\,k^2+5k-3}{2\,k^2-3k-1} \ \text{ и } \ y = \frac{8\,k^2-2k}{2\,k^2-3k-1}.$$

За $k \neq 0$ добијамо бесконачно много рационалних решења.

Много више, о методу Диофанта, је објашњено у историјском делу рада.

4. Типови Диофантових једначина

4.1 Увод

Обрађене методе у претходном поглављу су предуслов за успешну обраду типова Диофантових једначина. У овом поглављу ћу обрадити најчешће коришћене Диофантове једначине у додатној и редовној настави основне и средње школе. Садржи мноштво материјала за рад са обдареним ученицима а систематски је изложено кроз дефиниције, теореме, примере и решења.

4.2 Математички ребуси

Ово су најједноставније Диофантове једначине. Математичке ребусе срећемо већ у четвртом разреду Основне школе. Наравно, тад и незнамо да се ради о Диофантовим једначинама.

Основни принцип на коме почивају многе идеје и методе које се користе при решавању Диофантових једначина је садржан у једноставној чињеници да све што важи за једну страну једнакости, због особине рефлексивности једнакости $(a = a)$, важи у идентичкој форми и за другу страну једнакости. Ако је лева страна једнакости увек паран број, онда то мора бити и десна; ако је лева страна потпун квадрат, онда је то и десна; ако је лева страна мања од неке вреднсоти, онда је то и десна...

Метод разликовања случајева, код математичких ребуса, се показао веома плодоносним, пошто су цифре елементи скупа $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. У најгорем случају можемо посматрати проблем кроз разликовање десет случајева. Обично имамо још нека ограничења, па се проблем сведе на мање могућности. При решању ребуса се мора водити рачина о томе да бројеви не могу почињати цифром 0.

Пример 29. *Да ли ребус* $*** + *** = ***$ *има решења, ако се свака од цифара* $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ *може употребити само једнаном?*

Решење. Овај ребус могу решавати ученици који су савладали сабирање до хиљаду. У том узрасту не постоји прецизан метод за решавање ребуса, али се тад тек почиње са стицањем навика да неки задатак нема само једно решење и да се може решити на само један начин. Прво што треба видети у овом задатку је да збир два троцифрена броја такође троцифрен број. Логика налаже да први сабирак треба да је што мањи број. Ако почнемо са 123, видећемо да се нека цифра мора поновити. Покушајмо са 124. Сада цифра јединица у другом сабирку може бити $3, 5, 9$. Ако покушамо са цифрама $3, 5$ видимо да се цифре понављају. Ако ставимо цифру 9 тада имао $124 +** 9 =** 3$. Одавде није тешко закључити да је $124 + 549 = 673$.▲

Пример 30. *Дат је разломак* $\frac{A \cdot R \cdot H \cdot I \cdot M \cdot E \cdot D}{E \cdot U \cdot K \cdot L \cdot I \cdot D}$. *Израчунати вредност разломака ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.(Србија, 1990. године)*

Решење. Ово је задатак који могу решавати ученици петог разреда. Приметимо да имамо десет различитих слова, што занчи да морамо имати и десет цифара. Како цифра 0 не сме бити у имениоцу (тада не постоји разломак), она је она у бројиоцу. Значи вредност разломка је 0.▲

Пример 31. *Разломци* $\frac{3*5*}{36}$ *и* $\frac{4*7*}{45}$ *су природни бројеви. Упоредити их по величини. (Србија, 1995. године)*

Решење. Како је број $3*5*$ је дељив са 4 и 9 то му је двоцифрени завршетак дељив са 4 и збир цифара му је дељив са 9. Задња цифра може били 2 или 6. Ако му је задња цифра 2, добије се број 3852. Ако му је задња цифра 6, добије се број 3456. Како је број $4*7*$ дељив са 5 и 9, то му једња цифра 0 или 5. Ако му је задња цифра 0, добија се број 4770. Ако је задња цифра 5, добија се број 4275. Према томе следи да је

$$\frac{4275}{45} = 95 < \frac{3456}{36} = 96 < \frac{4770}{45} = 106 < \frac{3852}{36} = 107.▲$$

Пример 32. *Дешифровати множење* $*2* \cdot 45 = (**)^2$. *(Србија, 1998. године)*

Решење. Лева страна једнакости је дељива са 5 и 9, па мора бити и десна. Како је десна страна и потпун квадрат мора бити дељив и са 25. Због тога је број $*2*$ дељив са 5, па је облика $*20$ или $*25$. Како је $*2*$ мање од $10000:45$, дакле од 222, $*2*$ може бити $120, 125$ и 220. Провером утврђујемо да је једино решење $125 \cdot 45 = 75^2$.▲

Пример 33. *Дешифровати сабирање* $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2002$. *(Србија, 2002. године)*

Решење. Јасно је да је цифра $A = 1$. Значи

$$1 + \overline{1B} + \overline{1BC} + \overline{1BCD} = 2002.$$

Цифра B мора бити $B = 8$, па се добија коначно $1 + 18 + 180 + 1803 = 2002$. ▲

4.3 Магичне фигуре

Интересантан спој фигура и бројева који припада занимљивом делу математике (математичким играма) јесу магичне фигуре.

Од магичних фигура, прво се у настави срећемо са магичним квадратима. Магични квадрати се, најчешће, решавају на основу маштовитости ученика. Потребно је урадити што више примера и што више различитих типова. У овом раду ћу навести само неке примере и даћу једну методологију за решавање једног типа магичних квадрата.

Када је потребно цифре 1,2,3,4,5,6,7,8,9 распоредити у таблицу 3×3 тако да у свакој врсти, колони или дијагонали буде исти збир, онда се постојећа таблица проширује за четири поља. По дијагонали напишемо у поретку дате цифре. Цифре у поља дописана са леве и десне стране замене места, а то исто ураде горње и доње цифре. Добили смо један поредак цифара. Таквих могућности имамо четири.

		1		
	2		4	
3		5		7
	6		8	
		9		

		1		
	2	9	4	
3	7	5	3	7
	6	1	8	
		9		

	2	9	4	15
	7	5	3	15
	6	1	8	15
15	15	15	15	15

		3		
	2		6	
1		5		9
	4		8	
		7		

		3		
	2	7	6	
1	9	5	1	9
	4	3	8	
		7		

	2	7	6	15
	9	5	1	15
	4	3	8	15
15	15	15	15	15

		9		
	8		6	
7		5		3
	4		2	
		1		

		9		
	8	1	6	
7	3	5	7	3
	4	9	2	
		1		

	8	1	6	15
	3	5	7	15
	4	9	2	15
15	15	15	15	15

		7		
	8		4	
9		5		1
	6		2	
		3		

		7		
	8	3	4	
9	1	5	9	1
	6	7	2	
		3		

	8	3	4	15
	1	5	9	15
	6	7	2	15
15	15	15	15	15

Укупан збир цифара је 45, а како имамо три збира, то је тражени збир 15. ▲

Пример 34. *Цифре* 1,2,3,4,5,6,7,8,9 *распоредити у таблицу* 3×3 *тако да у свакој врсти, колони или дијагонали буде исти збир.*

		6
3		

Решење. Проширимо таблицу.

			6	
	3			

		9		
	8		6	
7		5		3
	4		2	
		1		

		9		
	8	1	6	
7	3	5	7	3
	4	9	2	
		1		

▲

4.4 Диофантове једначине једне променљиве

Дефиниција 1. *Једначина која садржи једну променљиву и која има за услов да је она целобројна, представља Диофантову једначину једне променљиве.*

Проблем Диофантових једначина једне променљиве може се уопштити на проблеме полинома. Следеће две теореме су веома битне за такво разматрање.

Теорема 1. *Ако је $\frac{p}{q}$ (p и q су узајамно прости цели бројеви и $q \neq 0$) рационална нула полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ са целобројним коефицијентима ($a_n \neq 0$), онда је p делилац броја a_0 а q делилац броја a_n.*

Доказ: Ако је $\frac{p}{q}$ рационална нула полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, онда је

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Како је $q \neq 0$, после множења са $q^{\mathrm{n}-1}$ добија се једнакост

$$a_n \frac{p^n}{q} + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0.$$

Пошто је десна страна једнакости једнака нули, то мора бити и лева страна, односно сабирци на левој страни морају бити цели бројеви. На основу тога и сабирак $a_n \frac{p^n}{q}$ мора бити цео број. То значи да мора бити a_n дељиво са целим бројем (јер су p и q су узајамно прости цели бројеви и $q \neq 0$).

Ако сада почетну једнакост помножимо са $\frac{q}{p}$ добијамо нову једнакост

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_0 \frac{q^n}{p} = 0.$$

Одавде се добија, на основу исте аналогије, да је p целобројни делилац броја a_0.■

Теорема 2. *Ако x_0 представља целобројну нулу следећег полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ са целобројним коефицијентима ($a_n \neq 0$), онда је x_0 један од целобројних делилаца броја a_0.*

Доказ: Како је x_0 цео број, то је онда $q = 1$, па је $\mathrm{x}_0 = p$ и на основу теореме Т1. следи да је x_0 целобројни делилаца броја a_0.■

Пример 35. *Одредити четири узастопна цела броја тако да је збир кубова прва три броја једнак кубу четвртог броја.*

Решење. Нека је први тражени број k. Тада је, по услову заадатка,

$$k^3 + (k-1)^3 + (k+2)^3 = (k+3)^3.$$

Сређивањем ове једнакости добијамо

$$k^3 - 6k - 9 = 0.$$

Могуће целобројне нуле полинома су из скупа бројева који су делиоци броја -9, тј. $k \in \{1, -1, 3, -1, 9, -9\}$. Провером се добија да је $k = 3$, па су тражени бројеви $3,\ 4,\ 5,\ 6$.▲

Пример 36. *Постоји ли пет узастопних целих бројева таквих да је збир кубова прва четири броја једнак кубу петог броја?*

Решење. Нека је први тражени број k. Тада је, по услову заадатка,
$$k^3 + (k-1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+4)^3.$$
Сређивањем ове једнакости добијамо
$$3k^3 + 6k^2 - 6k - 28 = 0.$$
Одавде су потенцијална решења из следећег скупа
$$k \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 7, -7, 14, -14, 28, -28\}.$$
Провером се утврђује да ниједно k није решење. Значи, непостоје такви бројеви.

Ово је тежи начин за решавање овог задатка, јер је тешка провера за дате бројеве (има пуно рачунања). Једноставније је задњу једнакост трансформисати на следећи начин $3k^3 + 6k^2 - 6k = 28$. Сада видимо да је лева страна једнакости дељива са 3 а десна није дељива истим тим бројем, па закључујемо да дата једнакост не може бити испуњена ни за једно k, тј. нема решења.▲

4.5 Линеарне Диофантове једначине облика $ax + by = c$

Дефиниција 2. *Ако су* a, b, c *цели бројеви и* $ab \neq 0$ *линеарна једначина облика* $ax + by = c$, *при чему су вредности* x *и* y *из скупа целих бројева, назива се линеарна Диофантова једначина.*

Ако је $c = 0$, тј. $ax + by = 0$, онда је то хомогена линеарна Диофантова једначина.

Дефиниција 3. *Полиномна једначина по промењивим* $x, y, z, \ldots$, *са целобројним коефицијентима, назива се Диофантова једначина ако промењиве узимају вредност из скупа целих бројева.*

Свака линеарна једначина са две промењиве и целобројним коефицијентима може се свести на једначину облика $ax + by = c$.

При решавању Диофантових једначина, увек треба одговорити на основна питања везана за сваку Диофантову једначину:

а) Доказати (не)постојање егзистенције решења,

б) Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много),

в) Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења,

г) Ако једначина има бесконачно много решења одредити општу формулу која даје сва решења,

д) Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

Када је реч о линеарним Диофантовим једначинама са две промењљиве, одговор на претходна питања, даће следеће теореме и одговарајући примери.

Теорема 3. *Линеарна Диофантова једначина облика* $ax + by = c$ *(a, b, c цели бројеви) има решења ако и само ако је* $d|c$, *где је* $d = NZD(a, b)$.

Доказ: Нека је $d = NZD(a, b)$. Претпоставимо да је (x_0, y_0) решење једначине. Тада је $ax_0 + by_0 = c$. Како је $d|a$ и $d|b$, онда и $d|c$.

Претпоставимо обрнуто, $d|c$. Тада постоји цео број k такав да је $c = kd$. Са друге стране d се може представити као линеарна функција од a и b, тј. постоје цели бројеви x' и y' такви да је

$$ax' + by' = d.$$

Множећи последњу једнакост са k, добијамо

$$akx' + bky' = dk, \text{ односно } a(kx') + b(ky') = c.$$

Дакле добијамо једно решење $(x_0, y_0) = (kx', ky')$ Диофантове једначине $ax + by = c$. То решење (x_0, y_0), линеарне Диофантове једначине, зовемо партикуларно решење.

Уколико је $c = 0$, онда кажемо да се ради о хомогеној линеарној Диофантовој једначини. Тада је $ax + by = 0$, односно $x = -\frac{b}{a}y$. Како су x и y цели бројеви, то је $y = at$ и $x = -bt$.■

Теорема 4. *Линеарна Диофантова једначина облика* $ax + by = c$ *(a, b, c цели бројеви) има увек решења ако је* $1 = NZD(a, b)$.

Теорема 5. *Ако је* $d = NZD(a, b)$, $d|c$ *и* (x_0, y_0) *једно решење Диофантове једначине* $ax + by = c$, *тада су сва решења* (x, y) *дата формулама:* $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ *и* $y = y_0 - \frac{a}{d}t$.

Доказ: Заменом једног решења у почетну једначину добијамо

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) = ax_0 + by_0 = c.$$

Нека је (x, y) произвољно решење једначине $ax + by = c$. Тада добијамо

$$ax + by = ax_0 + by_0$$
$$ax - ax_0 = by_0 - by$$
$$a(x - x_0) = b(y_0 - y)$$
$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y)$$

Како је $d = \mathrm{NZD}(a, b)$, добијамо $NZD\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. Дакле, $\frac{b}{d}|(x - x_0)$ и $\frac{a}{d}|(y_0 - y)$, одакле је:

$$x - x_0 = \frac{b}{d}t \text{ и } y_0 - y = \frac{a}{d}t,$$

где је t цео број. Коначно добијамо да је опште решење линеарне Диофантове једначине

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \text{ и } y = y_0 - \frac{a}{d}t.$$

Оно у ствари представља збир партикуларних решења.■

Пример 37. *Доказати да Диофантова једначина* $28x + 70y = 39$ *нема решења у скупу целих бројева.*

Решење. Како је $NZD(28{,}70) = 14$ и како 14 није делитељ броја 39, дата Диофантова једначина нема решења у скупу целих бројева.▲

Пример 38. *Одредити сва целобројна решења једначине* $13x + 32y = 5$.

Решење. Како је $NZD(13{,}32) = 1$ и како је 1 делитељ броја 5, дата Диофантова једначина има решења у скупу целих бројева.

Користећи Еуклидов алгоритам добијамо

$$32 = 2 \cdot 13 + 6$$
$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$
$$6 = 6 \cdot 1$$

Бројеви 32 и 13 су узајамно прости, па број 1 можемо представити као линеарну функцију бројева 32 и 13:

$$1 = 13 + (-2) \cdot 6 = 5 \cdot 13 + (-2) \cdot 32.$$

Коначно добијамо да је $13 \cdot 25 + 32 \cdot (-10) = 5$. Дакле, једно решење линеарне Диофантове једначине $13x + 32y = 5$ је $(25, -10)$. На основу претходних теорема имамо да је $a = 32$, $b = 13$, $c = 5$ и $d = 1$, $x_0 = 25$, $y_0 = -10$. Сходно томе, добијамо и друга решења дате Диофантове једначине: $x = x_0 + \frac{b}{d} t = 25 + 32t$ и $y = y_0 - \frac{a}{d} t = -10 - 13t$, где је t цео број.▲

Пример 39. *Одредити сва целобројна решења једначине* $27x + 59y = 20$.

Решење. Како је $NZD(27{,}59) = 1$ и како је 1 делитељ броја 20, дата Диофантова једначина има решења у скупу целих бројева. Овде је $a = 58$, $b = 27$, $c = 20$, $d = 1$. Користећи Еуклидов алгоритам, добијамо:

$$59 = 2 \cdot 27 + 5$$
$$27 = 5 \cdot 5 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$

Бројеви 27 и 59 су узајамно прости, па број 1 можемо представити као линеарну функцију бројева 27 и 59.

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(27 - 5 \cdot 5) = 11 \cdot 5 - 2 \cdot 27 = 11(59 - 2 \cdot 27) - 2 \cdot 27$$
$$= 11 \cdot 59 - 24 \cdot 27.$$

Коначно добијамо да је $(-480) \cdot 27 + 220 \cdot 59 = 20$. Дакле, једно решење линеарне Диофантове једначине $27x + 59y = 20$ је $(-480{,}220)$, тј. $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = (-480{,}220)$. Па је, по теореми 5, опште решење дате једначине:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} t = -480 + 59t \text{ и } y = y_0 - \frac{a}{d} t = 220 - 27t,$$

где је t цео број. Може се изабрати и мање (по апсулутној вредности) почетно решење. На пример, за $t = 8$ се добија $x_1 = -8$ и $y_1 = 4$, па је опште решење $x = -8 + 59u$ и $y = 4 - 27u$, где је $u \in \mathbb{Z}$.▲

Пример 40. *Одредити сва целобројна решења једначине* $3x+5y=8$.

Решење. Како је $NZD(3,5)=1$ и како је 1 делитељ броја 8, дата Диофантова једначина има решења у скупу целих бројева. Партикуларно решење је овде очигледно и оно је $(x_0,y_0)=(1,1)$. Сада је опште решење дате једначине: $x=x_0+\frac{b}{d}t=1+5t$ и $y=y_0-\frac{a}{d}t=1-3t$, где је t цео број.▲

Пример 41. *Решити Диофантову једначину* $1000x-123y=5$.

Решење. Како је $NZD(1000,123)=1$ и како је 1 делитељ броја 5, дата Диофантова једначина има решења у скупу целих бројева. Како није потпуно очигледно партикуларно решење, морамо се послужити Еуклидовим алгоритмом. Извршавањем узастопних дељења добијамо следећи низ једнакости:

$$1000=8\cdot 123+16$$
$$123=7\cdot 16+11$$
$$16=1\cdot 11+5$$
$$11=2\cdot 5+1.$$

Када је остатак једнак 1 поступак дељења се завршава. Из претходних једнакости изражавамо остатке:

$$16=1000-8\cdot 123$$
$$11=123-7\cdot 16$$
$$5=16-1\cdot 11$$
$$1=11-2\cdot 5.$$

Уврстимо у последњу једнакост израз за број 5 из претпоследње једнакости и тд:

$$1=11-2\cdot c=11-2(16-1\cdot 11)=3\cdot 11-2\cdot 16$$
$$=3\cdot(123-7\cdot 16)-2\cdot 16=3\cdot 123-23\cdot 16$$
$$1=3\cdot 123-23\cdot(1000-8\cdot 123)=-23\cdot 1000+187\cdot 123$$

Када помножимо са 5 леву и десну страну добијамо:

$$5=-115\cdot 1000+935\cdot 123.$$

Одавде је партикуларно решење $x_0=-115$ и $y_0=-935$. Решење хомогене једначине $1000x-123y=0$ је $x=123t$ и $y=1000t$, где је $t\in\mathbb{Z}$. Сада је решење дате Диофантове једначине

$$x=x_0+\frac{b}{d}t=-115+123t \text{ и } y=y_0-\frac{a}{d}t=-935+1000t.▲$$

На следећем примеру ћу показати како се може једна иста Диофантова једначина решавати у зависности да ли се ради са шестацима, осмацима или средњошколцима.

Пример 42. *За превоз неке робе располажемо врећама од* $40kg$ *и* $60kg$*. Колико треба узети једних, а колико других да се пренесе* $500kg$ *робе?*

Решење : Означимо са x број врећа од $40kg$, а са y број врећа од $60kg$. Из услова задатка добијамо Диофантову једначину

$$40x+60y=500,$$

односно, после скраћивања са 20, добијамо

$$2x + 3y = 25.$$

Овде имамо услов $0 \leq x \leq 11$, $0 \leq y \leq 8$ и $x,\ y \in \mathbb{Z}$.

Шестаци: Из услова видимо да x и y има коначно много. С тога ћемо их све исписати. Ако је $y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (јер за $y = 9$ је $x < 0$). Сада је $x = \frac{25-3y}{2}$. Како $x \in \mathbb{Z}$, то мора $25 - 3y$ бити паран број, тј.

$y \in \{1,3,5,7\}$.

Из овога је

$x \in \{11,8,5,2\}$.

Коначна решења су $(x, y) \in \{(2,7), (5,5), (8,3), (11,1)\}$.

Осмаци: На сличан начин добијамо да је

$$x = \frac{25-3y}{2} = 12 - y + \frac{1-y}{2}.$$

Будући да $x \in \mathbb{Z}$, то мора и $\frac{1-y}{2} \in \mathbb{Z}$.

Ако сада уведемо нову смену $\frac{1-y}{2} = u$, добијамо да је

$$2u + y = 1, \text{ тј. } y = 1 - 2u.$$

Сада је

$$x = 12 - (1 - 2u) + u = 11 + 3u \ \text{ и } \ y = 1 - 2u.$$

Одавде је $u = \frac{x-11}{3} \geq -\frac{11}{3}$ и $u = \frac{1-y}{2} \leq \frac{1}{2}$, тј. $u \in \{-3, -2, -1, 0\}$. За те вредности u, добијамо коначна решења $(x, y) \in \{(2,7), (5,5), (8,3), (11,1)\}$.

Начина на који је решен овај задатак, често се зове Ојлеров метод за решавање линеарне Диофантове једначине. Он је обрађен у другом поглављу овог рада.

Средњошколци: Како је $NZD(2,3) = 1$ и како је 1 делитељ броја 25, дата Диофантова једначина има решења у скупу целих бројева. Партикуларно решење се лако налази, јер је за $y_0 = 1$ вредност $x_0 = 11$. Опште решење полазне једначине је

$$x = 11 + 3t \text{ и } y = 1 - 2t.$$

Из услова $0 \leq x \leq 12$ и $0 \leq y \leq 8$ мора бити $t \in \{-3, -2, -1, 0\}$. Заменом добијамо коначно решење $(x, y) \in \{(2,7), (5,5), (8,3), (11,1)\}$.▲

Пример 42 нам илуструје једну практичну примену линеарних Диофантових једначина. Следећи примери ће показати колико су линеарне Диофантове једначине моћно средство за решавање разних проблема, како теоријске тако и практичне природе.

Пример 43. *Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је $4x + 7y = 2005$?*

Решење : Имајући у виду да је $NZD(4,7) = 1$ полазна једначина има решења. Ако је

$$x = \frac{2005-7y}{4},$$

није тешко утврдити да је једно (партикуларно) решење полазне једначине $(x_0, y_0) = (496,3)$. Опште решење је

$$x = 496 + 7t \text{ и } y = 3 - 4t.$$

Како је по услову задатка $x \geq 0$ и $y \geq 0$, мора бити

$$496 + 7t \geq 0 \text{ и } 3 - 4t \geq 0.$$

На остову тога је

$$t \geq -\frac{496}{7} \geq -70 \text{ и } t \leq \frac{3}{4} \leq 0.$$

Како је $-70 \leq t \leq 0$, то имамо укупно 71 пар бројева (x, y) који испуњавају услове задатка.▲

Пример 44. *У једној књижари оловка кошта пола динара, свеска један динар, а књига пет динара. На колико начина, за тачно сто динара, може се купити тачно сто предмета (оловака, свески или књига)? Колико од сто купљених предмета су оловке, свеске и књиге?*

Решење : Нека је број купљених оловки x, број свески y и број књига z. На основу услова задатка је:

$$x + y + z = 100 \text{ и } \frac{1}{2}x + y + 5z = 100.$$

Ово су две Диофантове једначине са три непознате. Такође је, по услову задатка, су $x,\ y,\ z$ природни бројеви. Ако се од прве једначине одузме друга, добија се

$$x = 8z.$$

После замене у било коју једначину, имамо да је

$$y = 100 - 9z.$$

Према томе опште решење добијеног система једначина је:

$$x = 8t, y = 100 - 9t \text{ и } y = t.$$

С обзиром да је $0 \leq x = 8t \leq 100$ то је $0 \leq t \leq 12$. А како је и

$$y = 100 - 9t \geq 0,$$

то је и $t \leq \frac{100-y}{9} \leq 11$. Коначно $0 \leq t \leq 11$. Значи, одговор на прво питање је 12 начина. Одговор на друго питање је најбоље представити табеларно.▲

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
y	100	91	82	73	64	55	46	37	28	19	10	1
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

4.6 Диофантове једначине степена већег од 1

4.6.1 Питагорине тројке

Дефиниција 4. *Уређену тројку природних бројева* (x, y, z) *зовемо Питагорина тројка ако су* x, y *катете, а* z *хипотенуза неког правоуглог троугла, тј. ако важи* $x^2 + y^2 = z^2$. *Ако су* x, y, z *узајамно прости, онда кажемо да је* (x, y, z) *примитивна Питагорина тројка. (Такав троугао зовемо примитивни Питагорин троугао).*

Уочимо најпре да је у свакој примитивној Питагориној тројки тачно један од бројева x, y непаран. Заиста, ако би x и y били парни, онда тројка не би била примитивна, а ако би x и y били непарни, онда би из $x^2 + y^2 \equiv 2(mod\ 4)$ и $z^2 \equiv 0(mod\ 4)$ добили контрадикцију.

Теорема 6. *Све примитивне Питагорине тројке* (x, y, z) *у којима је* y *паран, дате су формулама:* $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ *и* $z = m^2 + n^2$, *где је* $m > n$ *и* m, n *су узајамно прости природни бројеви различите парности. Такође важи и* $y = m^2 - n^2$, $x = 2mn$ *и* $z = m^2 + n^2$.

Диофантов доказ: Када једначину $x^2 + y^2 = z^2$ поделимо са z^2 добијамо

$$(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1.$$

Ако сада уведемо смену

$$b = \frac{y}{z} \text{ и } a = \frac{x}{z},$$

једначина постаје

$$b^2 + a^2 = 1.$$

Применимо Диофантов метод. Како је $(-1,0)$ једно решење добијене једначине следи да је:

$$b = -1 + mt \text{ и } a = nt \ (m \text{ и } n \text{ су неки природни бројеви}).$$

Тада је $(mt-1)^2 + (nt)^2 = 1$, па је

$$1 - 2mt + n^2t^2 = 1, \text{ тј. } t = \frac{2m}{m^2+n^2}.$$

Заменом сада добијамо

$$b = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} \text{ и } a = \frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

Када a и b вратимо у смене $b = \frac{y}{z}$ и $a = \frac{x}{z}$, добијамо

$$y = 2kmn, x = k(m^2 - n^2) \text{ и } z = k(m^2 + n^2).$$

За $k = 1$ добија се тражена формула

$$y = 2mn, x = m^2 - n^2 \text{ и } z = m^2 + n^2.$$

Ако би смо увели смену $a = \frac{y}{z}$ и $b = \frac{x}{z}$, добили би смо $y = m^2 - n^2$, $x = 2mn$ и $z = m^2 + n^2$.■

Алгебарски доказ: Једначину $x^2 + y^2 = z^2$ можемо писати у облику$y^2 = (z+x)(z-x)$.

Нека је $y = 2c$. Бројеви $z + x$ и $z - x$ су парни, па постоје природни бројеви a и b такви да је

$$z + x = 2a \text{ и } z - x = 2b.$$

Сада је

$$c^2 = ab.$$

Из $z = a + b$, $x = a - b$ закључујемо да је $NZD(a, b) = 1$ па постоје $m, n \in \mathbb{N}$, $NZD(m, n) = 1$, такви да је

$$a = m^2, b = n^2.$$

Одавде је

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn \text{ и } z = m^2 + n^2.$$

Бројеви m и n морају бити различите парности јер је број $x = m^2 - n^2$ непаран. Овако дефинисани бројеви (x, y, z) задовољавају једначину $x^2 + y^2 = z^2$, јер је

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Треба још проверити да су бројеви узајамно прости. Претпоставимо да је $NZD(x, z) = d > 1$. Тада је d непаран,

$$d|(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2$$

и још мора бити

$$d|(m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2.$$

Но, ово је у контрадикцији са претпоставком да су m и n, па стога и m^2 и n^2, узајамно прости.■

Последица Т 6. Опште решење једначине $x^2 + y^2 = z^2$, дато је у облику $x = k(m^2 - n^2)$, $y = 2kmn$ и $z = k(m^2 + n^2)$, где су $k,\ m,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пример 45. *Одредити све правоугле троуглове код којих је једна страница једнака* 12 *мерних јединица.*

Решење. Разликујемо три случаја:

1) Ако је $x = 2mn = 12$, онда је:

а) $m = 6,\ n = 1$ и $x = 12,\ y = 35,\ z = 37$;

б) $m = 3,\ n = 2$ и $x = 12,\ y = 5,\ z = 13$;

2) Ако је $y = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = 12$, онда је $m + n = 6$ а $m - n = 2$. Тада је $m = 4$ и $n = 2$, односно $x = 16,\ y = 12,\ z = 20$.

3) Ако је $z = m^2 + n^2 = 12$, тада нема решења јер не постоје природни бројеви m и n чији је збир квадрата 12.

Једина решења су $(x, y, z) \in \{(12,35,37), (12,5,13), (6,12,20)\}$.

▲

4.6.2 Диофантове једначине типа $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$

Позитивна решења (x, y, z, t) једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ представљају димензије и дужине дијагонала правоуглог паралелопипеда. Ми желимо да нађемо сва целобројна решења.

Теорема 7. *Сва решења једначине* $x^2+y^2+z^2=t^2$*, где су* $x,\ y,\ z,\ t\in\mathbb{N}$*,* $y,\ z$ *парни, дата су у облику* $x=\frac{l^2+m^2-n^2}{n}$*,* $y=2l$*,* $z=2m$*,* $t=\frac{l^2+m^2+n^2}{n}$*, где су* $l,\ m$ *произвољни природни бројеви и* n *било који делитељ од* l^2+m^2 *мањи од* $\sqrt{l^2+m^2}$*. На овај начин, свако решење добијамо тачно једном.*

Доказ: Приметимо да најмање два од бројева x,y,z морају бити парна, у противном би било $t^2\equiv 2{,}3(mod\ 4)$, а то је немогуће. Претпоставимо да је $y=2l$ и $z=2m$ за неке $l,m\in\mathbb{N}$. Ставимо да је $t-x=u$ и добијамо

$$x^2+4l^2+4m^2=(x+u)^2$$

или

$$u^2=4(l^2+m^2)-2ux.$$

Према томе , u^2 је парно, дакле $u=2n$ за неки $n\in\mathbb{N}$. Следи,

$$x=\frac{l^2+m^2-n^2}{n}\ \text{ и }\ t=x+u=x+2n=\frac{l^2+m^2+n^2}{n}$$

где су $l,m,n\in\mathbb{N}$ и n делитељ од l^2+m^2 мањи од $\sqrt{l^2+m^2}$.

Није тешко показати да свако решење (x,y,z,t) једначине

$$x^2+y^2+z^2=t^2,$$

$y,\ z$ парни, је добијено тачно једном из формула

$$x=\frac{l^2+m^2-n^2}{n}, y=2l, z=2m, t=\frac{l^2+m^2+n^2}{n}.$$

Лако добијамо $l=\frac{y}{2}$, $m=\frac{z}{2}$, $n=\frac{t-x}{2}$, па према томе, $l,m,n\in\mathbb{Z}$ су јединствено одређени са (x,y,z,t).■

4.6.3 Квадратне Диофантове једначине

Дефиниција 5. *Једначина облика* $x^2+axy+y^2=z^2$*, где је* a *дати цео број, представља квадратну Диофантову једначину.*

За $a=0$, квадратна Диофантова једначина представља Питагорину једначину.

Теорема 8. *Сва целобројна решења једначине* $x^2+axy+y^2=z^2$ *дата су у облику:*

$$x=k(an^2-2mn),\ y=k(m^2-n^2)\ и\ z=k(amn-m^2-n^2),\ k,m,n\mathbb{Z}.$$

Доказ: Како се ради о симетричној једначини, решења могу бити и $x=k(m^2-n^2)$, $y=k(an^2-2mn)$ и $z=k(amn-m^2-n^2)$. Трансформишимо једначину $x^2+axy+y^2=z^2$ у следећи облик$x(x+ay)=(z-y)(z+y)$. У случају $y=z$, добијамо да је $x=0$ или $x+ay=0$, и резултат следи.

У свим другим случајевима је $\frac{x}{z-y}=\frac{z+y}{z-y}=\frac{n}{m}$, за неко $m,n\in\mathbb{Z}$ и $m,n\neq 0$. Из последње релације добијамо хомогени систем:

$$mx+ny-nz=0\ \text{ и }\ nx+(n-am)y-mz=0.$$

Решења овог система су

$$x = \frac{an^2 - 2mn}{amn - m^2 - n^2} \cdot z$$

и

$$y = \frac{m^2 - n^2}{amn - m^2 - n^2} \cdot z.$$

Ако је $z = amn - m^2 - n^2$, онда добијамо тражена решења.■

Теорема 9. *Сва природна решења једначине* $x^2 + axy + y^2 = z^2$ *дата су у облику:*

$$x = k(2mn + an^2),\ y = k(m^2 - n^2) \text{ и } z = k|amn + m^2 + n^2|,$$

$$k, m, n \in \mathbb{Z}^+,\ 2m + an > 0,\ m > n.$$

Како се ради о симетричној једначини, решења могу бити и

$$x = k(m^2 - n^2),\ y = k(an^2 - 2mn) \text{ и } z = k|amn + m^2 + n^2|,$$

$k, m, n \in \mathbb{Z}^+, 2m + an > 0,\ m > n.$

Доказ ове теореме сличан је доказу претходне теореме.

Теорема 10. *Сва целобројна решења једначине* $x^2 + axy + бy^2 = z^2$ *дата су у облику:*

$$x = k(m^2 - bn^2),\ y = k(an^2 - 2mn) \text{ и } z = k(amn - m^2 - bn^2),$$

$$k, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Доказ ове теореме је скоро идентичан доказу теореме Т 9.

За школску праксу је интересантно посматрати три случаја квадратне Диофантове једначине $x^2 + axy + y^2 = z^2$:

1. $a = 0$;

Дата квадратна Диофантова једначина постаје $x^2 + y^2 = z^2$. Јасно је да је то Питагорина једначина и да се ради о правоуглом троуглу, чије су катете $x,\ y$, а z хипотенуза. Значи ради се о троуглу чији је угао, наспрам странице z једнак 90°.

2. $a = 1$;

Дата квадратна Диофантова једначина постаје $x^2 + xy + y^2 = z^2$. На основу претходних теорема, решења ове једначине су

$$x = k(2mn - n^2),\ y = k(m^2 - n^2) \text{ и } z = k(m^2 + mn + n^2).$$

Због симетричности, решења могу бити и

$$x = k(m^2 - n^2),\ y = k(2mn - n^2) \text{ и } z = k(m^2 + mn + n^2).$$

Наравно, важи и $k, m, n \in \mathbb{Z}^+, m > n$.

Претходна решења, дају нам све тројке (x, y, z), које представљају странице троугла, код којег је угао наспрам странице z једнак 120°.

3. $a = -1$;

Дата квадратна Диофантова једначина постаје $x^2 - xy + y^2 = z^2$. На основу претходних теорема, решења ове једначине су

$$x = k(2mn - n^2),\ y = k(m^2 - n^2) \text{ и } z = k(m^2 - mn + n^2).$$

Због симетричности, решења могу бити и

$$x = k(m^2 - n^2),\ y = k(2mn - n^2) \text{ и } z = k(m^2 - mn + n^2).$$

Наравно, важи и $k, m, n \in \mathbb{Z}^+, m > n$.

Претходна решења, дају нам све тројке (x, y, z), које представљају странице троугла, код којег је угао наспрам странице z једнак $60°$.

Пример 46. *У скупу* $\mathbb{N}$ *наћи све тројке* (x, y, z) *које задовољавају једначину* $x^2 + xy + y^2 = 49^2$.

Решење. Овде је $a = 1$. На основу

$$x = k(2mn + n^2), y = k(m^2 - n^2) \text{ и } z = k(m^2 + mn + n^2),$$

проблем се своди на налажење $k, m, n \in \mathbb{N}$, таквих да је $m > n$. Овде је $z = 49$, па мора бити испуњена једнакост $k(m^2 + mn + n^2) = 49$. Како је

$$m^2 + mn + n^2 > 1,$$

то је $k = 1$ или $k = 7$.

Најлакше је направити табелу за $k = 1$ и $m > n$.

	n	$m^2 + mn + n^2$
2	1	7
3	1	13
4	1	21
5	1	31
6	1	43
3	2	19
4	2	28
5	2	39
4	3	37
5	3	49

Из табеле се види да је $m = 5$ и $n = 3$. У овом случају добијамо решења:

$$(x, y) = (39,16) \text{ и } (x, y) = (16,39).$$

За $k = 7$, једнакост $m^2 + mn + n^2 = 7$, важи за $m = 2$ и $n = 1$. Сада је $(x, y) = (35,21)$, односно $(x, y) = (21,35)$. Коначна решења почетне једначине су $(x, y) \in \{(39,16), (16,39), (35,21), (21,35)\}$.▲

4.6.4 Диофантове једначине облика $x^4 \pm ax^2y^2 + y^4 = z^2$

Теорема 11. *Ненегативна целобројна решења једначине* $x^4 + x^2y^2 + y^4 = z^2$ *су* $(x, y, z) = (k, 0, k^2)$ *или* $(x, y, z) = (0, k, k^2)$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Доказ: Можемо претпоставити да је $NZD(x, y) = 1$. Тада су x и y различите парности, јер у противном, $z^2 \equiv 3 (mod\ 4)$. Претпоставимо да је y непаран и минималан. Када почетну једначину помножимо са 4 и мало трансформишемо, добијамо

$$4z^2 - (2x^2 + y^2)^2 = 3y^4,$$

односно на основу разлике квадрата је

$$(2z + 2x^2 + y^2)(2z - 2x^2 - y^2) = 3y^4.$$

Ако је $NZD(2z+2x^2+y^2, 2z-2x^2-y^2)=d$, тада је d непаран, $d|z$ и $d|2x^2+y^2$. Из једнакости

$$4z^2-(2x^2+y^2)^2=3y^4$$

се види да $d|3y$.
Ако је $d>3$, тада $d|y$ и $d|2x^2$, тј. $NZD(x,y)\geq d$, а то је контрадикција.
Ако је $d=3$, следи да $3|z$ и, на основу полазне једначине, добијамо $3|2x^2+y^2$, тј. $3|y$. Према томе, $3|x$ и $NZD(x,y)\geq 3$, а и то је контрадикција.

Према томе је:

$$2z+2x^2+y^2=a^4,\, 2z-2x^2-y^2=3b^4,\, y=ab$$

или

$$2z+2x^2+y^2=3a^4,\, 2z-2x^2-y^2=b^4,\, y=ab,$$

где су a и b природни бројеви.
У првом случају је

$$4x^2=a^4-2a^2b^2-3b^4\equiv -4(mod\ 16),$$

а то је контрадикција.
У другом случају је

$$4x^2=3a^4-2a^2b^2-b^4=(a^2-b^2)(3a^2+b^2).$$

Пошто су a и b оба непарна, следи да је $a^2-b^2=c^2$ и $3a^2+b^2=4d^2$, за неке $c,d\in\mathbb{N}$. Тада је

$$a=p^2+q^2,\, b=p^2-q^2,\, p,q\in\mathbb{Z}^+$$

и

$$p^4+p^2q^2+q^4=d^4,$$

што је у контрадикцији да је y минималан.

Према томе, y= 1, $a=b=1$ и $x=0$, па за $z=k^2$ добијамо решења $(x,y,z)=(k,0,k^2)$, односно $(x,y,z)=(0,k,k^2)$.■

Пример 47. *Решити у скупу* $\mathbb{N}$ *следећи систем једначина:* $3u^2+v^2=4s^2$ *и* $u^2+3v^2=4t^2$.

Решење. Уведимо смену $u=x+y$ и $v=x-y$. Сада добијамо еквивалентни систем једначина:

$$x^2+xy+y^2=s^2$$
$$x^2-xy+y^2=t^2$$

Множећи ове две једнакости добијамо

$$x^4+x^2y^2+y^4=(st)^2$$

Сада је, на основу претходне теореме, $(x,y,st)=(k,0,k^2)$ или $(x,y,st)=(0,k,k^2)$. Одавде следе решења $(u,v,s,t)=(k,k,k,k)$, $k\in\mathbb{Z}$.▲

Без извођења доказа, даћу још једну теорему.

Теорема 12. *Ненегативна целобројна решења једначине* $x^4-x^2y^2+y^4=z^2$ *су* $(x,y,z)=\{(k,0,k^2),(0,k,k^2),(k,k,k^2)\}$, $k\in\mathbb{Z}^+$.

4.6.5 Диофантове једначине облика $x^4+y^4=z^2$

Теорема 13. *Диофантова једначина* $x^4+y^4=z^2$ *није решива за целе бројеве различите од нуле.*

Доказ: Претпоставимо супротно, да је једначина решива и нека су њена решења (x_1, y_1, z_1) и при томе је z_1 минимално. Можемо претпоставити да је $NZD(x_1, y_1, z_1) = 1$ и узимајући да је (x_1^2, y_1^2, z_1^2) примитивна Питагорина тројка, следи да је

$$NZD(x_1, y_1) = NZD(y_1, z_1) = NZD(x_1, z_1) = 1,$$

и да су x_1 и y_1 различите парности. Претпоставимо да је x_1 непаран, а y_1 паран. Приметимо да је

$$NZD(z_1 - x_1^2, z_1 + x_1^2) = 2.$$

Заиста, ако $d|(z_1 - x_1^2)$ и $d|(z_1 + x_1^2)$, тада $d|2z_1$ и $d|2x_1^2$. Али, $NZD(x_1, z_1) = 1$ и z_1 је непаран, па следи да је $d = 2$.

Из $y_1^4 = (z_1 - x_1^2)(z_1 + x_1^2)$, следи да је један од бројева $z_1 - x_1^2$, $z_1 + x_1^2$ дељив са 2, и не са 4, а да је други дељив са 8. Према томе, $y = 2ab$ и имамо два случаја:

а) $z_1 - x_1^2 = 2a^4$, $z_1 + x_1^2 = 8b^4$,

б) $z_1 - x_1^2 = 8b^4$, $z_1 + x_1^2 = 2a^4$, где је у оба случаја a непаран и $NZD(a, b) = 1$.

Случај под а) није могућ, јер би из $z_1 = 2a^4 + x_1^2 = 8b^4 - x_1^2$ било $x_1^2 = -a^4 + 4b^4$. Из тога следи да је $1 \equiv -1 (mod\ 4)$ а то је немогуће.

Случај под б) нам даје $z_1 = a^4 + 4b^4$, $0 < a < z_1$ и $4b^4 = (a^2 - x_1)(a^2 + x_1)$. Из $NZD(a, b) = 1$, следи $NZD(a, x_1) = 1$. Као у претходном доказу, добијамо $NZD(a^2 - x_1, a^2 + x_1) = 2$. Дакле,

$$a^2 - x_1 = 2x_2^4 \text{ и } a^2 - x_1 = 2y_2^4.$$

Одавде је $x_2 y_2 = b$. Стављајући да је $a = z_2$, добијамо

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^4,$$

где је $0 < z_2 < z_1$, а то је контрадикција са чињеницом да је z_1 минимално.■

Последица претходне теореме је да Диофантова једначина $x^4 + y^4 = z^4$ није решива за целе бројеве, различите од нуле.

4.6.6 Диофантове једначине облика $x^3 + y^3 = z^3$

Ова Диофантова једначина је много компликованија за разматрање од претходних једначина. Стога, наводим само Ојлерово размишљање и његово готово решење.

Нека су $a, m \in \mathbb{Z}$ такви да је $m \neq 0$ и $NZD(a, m) = 1$. Кажемо да је a квадратни остатак модула m ако је конгруенција $x^2 \equiv a (mod\ m)$ решива.

Ако је $p > 2$, p прост број и $NZD(a, p) = 1$, уводимо Лагранжов симбол $\left(\frac{a}{p}\right)$ на следећи начин:

$\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ ако је a квадратни остатак и

$\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ у супротном.

Ојлер је дошао до закључка: ако је $p > 2$, p прост број и $NZD(a, m) = 1$, тада је $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (mod\ p)$.

4.6.7 Диофантова једначина облика $x^2 + 3y^2 = n$

Теорема 14. *Нека је* $n \in \mathbb{N}$. *Диофантова једначина* $x^2 + 3y^2 = n$ *је решива ако и само ако сви прости фактори од* n, *облика* $3k - 1$, *имају парне експоненте.*

Доказ: Користимо Ојлерово размишљање. Приметимо да p можемо писати у облику

$$p = x^2 + 3y^2 \text{ акко је } p = 3 \text{ или } p = 3k + 1, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}^+.$$

Заиста, имамо $3 = 0^2 + 3 \cdot 1^2$. Претпоставимо да је $p > 3$ и $p = x^2 + 3y^2$. Тада $NZD(x, p) = 1$ и $NZD(y, p) = 1$. Према томе, постоји $y' \in \mathbb{Z}$ такав да је

$$yy' \equiv 1(mod\, p).$$

Из конгруенције

$$x^2 \equiv -3y^2(mod\, p)$$

следи

$$(xy')^2 \equiv -3(mod\, p).$$

Али, $NZD(xy', 3) = 1$ повлачи $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$, а то је еквивалентно са

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right) = 1, \text{ тј. } \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

На основу квадратног узајамног закона, имамо

$$\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Из $\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, имамо, $\left(\frac{p}{3}\right) = 1$, тј. $p \equiv 1(mod\, 3)$.

Обрнуто, нека је p прост број облика $p = 3k + 1$. Тада, постоји $a \in \mathbb{Z}$ такав да је

$$a^2 \equiv -3(mod\, p).$$

Осим тога, постоје $x, y \in \mathbb{Z}$, такви да је

$$0 < x, y < \sqrt{p} \text{ и } p|(a^2x^2 - y^2).$$

Јасно је да је $NZD(a, p) = 1$, и ако обележимо $b = \lfloor\sqrt{p}\rfloor$, тада $(b + 1)^2 > p$. Постоје $(b + 1)^2 > p$ парови $(u, v) \in \{0,1,2, \dots, b\} \times \{0,1,2, \dots, b\}$ и $(b + 1)^2 > p$ цели бројеви облика $au + v$, где су $u, v \in \{0,1,2, \dots, b\}$. Тада следи, да постоје парови $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ такви да важи

$$au_1 + v_1 \equiv (au_2 + v_2)(mod\, p).$$

Претпоставимо да је $u_1 \geq u_2$ и означимо са

$$x = u_1 - u_2, y = |v_1 - v_2|.$$

Према томе,

$$0 < x, y < \sqrt{p} \text{ и } ax + y \equiv 0(mod\, p), \text{ тј. } a^2x^2 - y^2 \equiv 0(mod\, p).$$

Добили смо

$$p|\left((a^2 + 3)x^2 - (3x^2 + y^2)\right)$$

а то је $3x^2 + y^2 = lp$, где је $l \in \mathbb{Z}^+$. Из неједнакости $0 < x^2 < p$, $0 < y^2 < p$ следи $l \in \{1,2,3\}$.

Ако је $l = 1$, имамо $p = 3x^2 + y^2$.

Ако је $l = 2$, једнакост $2p = 3x^2 + y^2$ је немогућа, јер у овом случају цели бројеви x, y су исте парности и имамо $2p \equiv 0(mod\, 4)$, а то је контрадикција.

Ако је $l = 3$, имамо $3p = 3x^2 + y^2$, па према томе

$$y = 3y_1 \text{ и } p = x^2 + 3y_1^2.$$

Сада закључујемо, да ако је p прост број, $p \geq 3$, облика $p = 3k - 1$ и $p(x^2 + 3y^2)$, тада $p|x$ и $p|y$. У противном, ако p не дели x, имамо $NZD(p, x) = 1$, тј. постоји $y' \in \mathbb{Z}$, са особином

$$yy' \equiv 1(mod\ p).$$

Из

$$x^2 \equiv -3y^2(mod\ p)$$

следи

$$(xy')^2 \equiv -3(mod\ p) \text{ тј. } \left(\frac{-3}{p}\right) = 1,$$

Односно

$$p \equiv 1(mod\ 3)$$

а то је контрадикција.

За доказ резултата ове теореме, разматрамо

$$n = a^2 b,$$

где је b цео број који није квадрат неког броја. Следи,

$$b = \prod p_i,$$

где је $p_i = 3$ или $p_i \equiv 1(mod\ 3)$.
Тада,

$$p_i = x_i^2 + 3y_i^2 \text{ и } b = p_1 p_2 \dots p_m = x^2 + 3y^2,$$

јер се лако види да је

$$n_1 = x_1^2 + 3y_1^2, n_2 = x_2^2 + 3y_2^2\ ,$$

па према томе

$$n_1 n_2 = (x_1 x_2 + 3y_1 y_2)^2 + 3(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Коначно, $n = a^2 b = (ax)^2 + 3(ay)^2$.■

4.6.8 Диофантова једначина облика $x^n + y^n = z^n$

1637. године, француски правник, судија Пјер де Ферма , вероватно највећи математичар-аматер свих времена, написао је на маргини свог примерка Диофантове Аритметике (латинско издање из 1621. године) следећу опаску: *"Збир два цела куба никада није куб, збир два четврта степена никада није четврти степен. Имам чудесан доказ за ову тврдњу, али је ова маргина нажалост сувише мала да га овде изложим."* Више од три и по века математичари целог света-што професионалци, што аматери-безуспешно су покушавали да открију Фермаов "чудесни доказ" да Диофантова једначина $x^n + y^n = z^n$ нема решења ни за једно $n > 2$.

У претходном делу рада сам обрадила неке типове Диофантових једначина везане за Фермаову теорију, као што су $x^3 + y^3 = z^3$ и $x^4 + y^4 = z^4$.

У овом делу сам планирала да изложим кратак историјски осврт на Фермаову теорију.

Пошто из претпоставке да једначина $x^k + y^k = z^k$ нема решења следи да ни једначина $x^{kt} + y^{kt} = z^{kt}$ нема решења ни за једно $t \geq 1$, довољно је ограничити се на случајеве када је $n = 4$, односно када је n непаран прост број. Доказ за случај $n = 4$ је дао сам Ферма, а цео век касније

Ојлер је решио случај $n = 3$. У XIX веку нерешивост једначине $x^n + y^n = z^n$ је доказана за још неке непарне (просте бројеве) вредности n, а у XX веку је потрага за доказима тог типа настављена и уз помоћ рачунара. Ипак такав приступ је разрешио само коначно много експонената n. 1983. године немачки математичар Фалтингс изазвао је сеназацију са својим доказом да за свако $n > 2$ постоји само коначно много примитивних решења (код којих је $x = y = z = 1$). Међутим, испоставило се да је то био само увод у праву ”математичку драму” која је уследила. 23. јуна 1993. године, након готово седам година тајног рада у поткровљу своје куће и три дана узастопних предавања на семинару Универзитета у Кембриџу, британски математичар Ендрју Вајлс обзнанио је свету да је у потпуности доказао велику Фермаову теорему. Али, већ те јесени постало је јасно да Вајлсов доказ садржи озбиљан, суштински недостатак. Након неколико покушаја да се настали проблем брзо реши, Вајлс је 4. децембра, у и-мејлу упућеном математичкој јавности признао грешку, уз најаву да ће још неко време посветити покушајима да поправи доказ. Те зиме, позвао је свог бившег ученика Ричарда Тејлора да му помогне у томе. Наредне јесени, Вајлс је био спреман да одустане. А онда, када је у понедељак ујутро 19. септембра 1994. Вајлс одлучио да још једном, вероватно по последњи пут погледа свеје белешке, у тренутку надахнућа дошао је до чудесног увида: све ”коцкице” су се коначно склопиле. Тако је, после 357 година покушаја од стране најбриљантнијих математичара свог времена, велика Ферматова теорема коначно доказана. Комплетан доказ изложен је на 129 страна, у склопу два рада у часопису *Annals of Mathematics*. За овај резултат, Вајлс је добио многобројна вредна признања. 1999. године један астероид је назван по њему, а 2000. године британска краљица Елизабета II прогласила је Сер Вајлса за Командујућег Витеза Британске Империје.

Кључна примедба, која је довела до коначног решења овог епског проблема, потиче од Фреја: наиме, полазећи од претпоставке да је за неки прост број $p > 2$ постоје природни бројеви a, b, c тако да је $a^p + b^p = c^p$, Фреј је предложио да се посматра крива у равни дефинисана једначином $y^2 = x(x - a^p)(x + a^p)$. Ова крива припада класи тзв. семистабилних елиптичких кривих. С друге старне, 1990. године Кен Рибет је показао да ова крива није модуларна. Вајлсов доказ се заправо састоји од доказа хипотезе (сада теореме) Танијаме и Шимуре, која тврди да криве са тим својствима не постоје. Због тога, ни хипотетичко решење једначине $x^n + y^n = z^n$ не може да постоји.

4.7 Ирационалне Диофантове једначине

Једначине са целобројним променљивима могу бити и ирационалне, јер се непознате величине налазе под коренима парног степена. Зато са неколико примера илуструјем карактеристичне проблемске ситуације везане за решавање ирационалних Диофантових једначина. Овде треба напоменути да посебну пажњу треба обратити на домен дефинисаности корена.

Пример 48. *Одредити сва целобројна решења дате једначине* $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.

Решење. Из услова дефинисаности квадратног корена добијамо да важи

$$x-\frac{1}{5}\geq 0 \text{ и } y-\frac{1}{5}\geq 0, \text{ тј. } x\geq\frac{1}{5} \text{ и } y\geq\frac{1}{5}.$$

Када дату једначину помножимо са $\sqrt{5}$, добијамо

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}=5.$$

Одавде је јасно да важи

$$0\leq 5x-1\leq 25 \text{ и } 0\leq 5y-1\leq 25,$$

Односно

$$1\leq x\leq 5 \text{ и } 1\leq y\leq 5.$$

Како је

$$5x-1=a^2 \text{ и } 5y-1=b^2,$$

то мора бити $a+b=5$, односно

$$x=\frac{a^2+1}{5} \text{ или } y=\frac{b^2+1}{5}.$$

Како вредности x и y морају бити целобројне, онда a и b узимају узајамне вредности 2 и 3, па су једина решења дате једначине $(x,y)\in\{(1,2),(2,1)\}$. ▲

Пример 49. *Решити једначину* $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{1996}$ *у скупу ненегативних целих бројева. (СРЈ 1996)*

Решење. Дата једначина је еквивалентна са једначином

$$x=y+z+1996+2\sqrt{yz}-4\sqrt{499y}-4\sqrt{499z}.$$

Бројеви x,y,z су ненегативни цели бројеви, ако је

$$0\leq y=499a^2\leq 1996 \text{ и } 0\leq z=499b^2\leq 1996,$$

па је

$$0\leq a\leq 2, 0\leq b\leq 2 \text{ и } a+b\leq 2 .$$

Разматрањем случајева добија се шест решења:
$(0,0,1996), (0,1996,0), (1996,0,0), (0,499,499), (499,0,499), (499,499,0)$. ▲

Пример 50. *Одредити све целе бројеве* x *и* y *такве да је* $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1976}$. *(Московска Олимпијада 1976)*

Решење. Очигледна решења су $(x,y)=(0,1976)$ или $(x,y)=(1976,0)$. Ако су сада x и y природни бројеви, онда је

$$\sqrt{x}=\sqrt{1976}-\sqrt{y},$$

па се квадрирањем једначине добија

$$x=1976-2\sqrt{1976y}+y.$$

Задња једначина има решења у скупу природних бројева ако је

$$1976y=2^3\cdot 247\cdot y=k^2\ (k\in\mathbb{N}).$$

Како је 247 прост број то је

$$y=2\cdot 247=494.$$

Следи да је и $x=494$. Значи треће решење дате једначине је
$(x,y)=(494,494)$. ▲

4.8 Експоненцијалне Диофантове једначине

Експоненцијалне Диофантове једначине заузимају важно место међу свим Диофантовим једначинама, јер је њихово решавање у суштини синтеза свих досадашњих реализованих метода. У решавању експоненцијалних Диофантових једначина користе се основне теореме теорије бројева, али и најважније особине експоненцијалних функција. Дајем неколико занимљивих примера, јер они ће најбоље илустровати могуће методе за решавање експоненцијалних Диофантових једначина.

Пример 51. *Постоје ли природни бројеви* x *и* y *такви да важи једнакост* $2^x + 1 = y^2$*? (Републичко такмичење, Србија 2002. године)*

Решење. Из дате једнакости је $2^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$. Изрази $y-1$ и $y+1$ су исте парности, а како је њихов производ 2^x, они су парни, па је

$$y - 1 = 2^a \text{ и } y + 1 = 2^b, (a + b = x,\ a < b).$$

Одузимањем друге од прве једнакости добија се да је

$$2^b - 2^a = 2.$$

Следи да је

$$2^a(2^{b-a} - 1) = 2.$$

Сада је

$$2^a = 2 \text{ и } 2^{b-a} - 1 = 1,$$

па је

$$a = 1 \text{ и } b = 2.$$

Дакле,

$$x = a + b = 3.$$

Коначно, једино решење дате једначине је $(x, y) = (3,3)$.▲

Пример 52. *Одредити целе бројеве* x *и* y *тако да је* $3^x - 2^y = 5$.

Решење. Како је $2^y = 3^x - 5 > 0$,

то је

$$3^x > 5,$$

па је

$$x > 1, \text{ тј. } x \geq 2.$$

Тада је

$$2^y = 3^x - 5 \geq 9 - 5 = 4,$$

односно $y \geq 2$. Ако је $x \geq 2$, онда је

$$3^x = 2^y + 5 \equiv 0(\text{mod } 3).$$

Како је

$$2 \equiv (-1)(mod\ 3)$$

то је

$$(-1)^y + 5 \equiv 0(mod\ 3),$$

па закључујемо да је y паран број. Слично је за $y \geq 2$ број

$$2^y = 3^x - 5 \equiv 0(\text{mod } 4).$$

Како је

$$3^x \equiv (-1)(mod\ 4),$$

добија се

$$(-1)^x - 5 \equiv 1(mod\ 4),$$

па је x паран број. Дакле, $x = 2a$ и $y = 2b$, $(a, b \in \mathbb{N})$. Тада дата једначина постаје

$$3^{2a} - 2^{2b} = (3^a - 2^b)(3^a + 2^b) = 5.$$

Како је 5 прост број и како је $3^a - 2^b < 3^a + 2^b$,
то је

$$3^a - 2^b = 1 \text{ и } 3^a + 2^b = 5.$$

Следи да је $2 \cdot 3^a = 6$ и $2 \cdot 2^b = 4$. Тада је $a = b = 1$, тј. $(x, y) = (2,2)$ једино решење дате једначине.▲

Пример 53. *Одредити целобројна решења једначине* $x^2 = 3^y + 7$. *(Србија, 1983. године)*

Решење. Ако је $y \leq 0$, онда је $0 < 3^y \leq 1$, па је $7 < 3^y + 7 = x^2 \leq 8$, па дата једначина нема целобројних решења.

Ако је y природан број, онда је $3^y + 7$ паран број, па је и x паран број. Како је

$$x^2 \equiv 0(mod\ 4),$$

то је и

$$3^y + 7 \equiv (-1)^y + 3 \equiv 0(mod\ 4).$$

Дакле, y је паран број, јер је $(-1)^{2k} = 1$, па је $y = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ и добија се

$$x^2 - 3^{2k} = (x + 3^k)(x - 3^k) = 7.$$

Следи да је $x + 3^k = 7$ и $x - 3^k = 1$. Тада је $x = 4$, а из $3^k = 3$, следи да је $k = 1$. Сада је $y = 2k = 2$, па је једино решење дате једначине $(x, y) = (4,2)$.▲

Пример 54. *У скупу природних бројева решити једначину* $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$. *(Србија, 1996. године)*

Решење. Ако је $y = 1$, онда је $7^x = 7$, па је $x = 1$.

Ако је $y \geq 2$, онда је $7^x = 3 \cdot 2^y + 1 \equiv 1(mod\ 4)$. Како је

$$7^x \equiv (-1)^x \equiv 1(mod\ 4),$$

то је очигледно x паран број. Нека је $x = 2k$. Тада је

$$7^{2k} - 1 = (7^k - 1)(7^k + 1) = 3 \cdot 2^y.$$

Како је $7^k + 1 \equiv 2(mod\ 3)$, то једначина има решења само ако је

$$7^k + 1 = 2^a \text{ и } 7^x - 1 = 3 \cdot 2^b.$$

Тада је

$$2^a - 3 \cdot 2^b = 2,$$

па је

$$2^b(2^{a-b} - 3) = 2.$$

Следи да је $b = 1$, и како је $2^{a-b} - 3 = 1$, то је $a = 3$. Тада је $y = 4$ и $x = 2$. Дакле, сва решења дате једначине су $(x, y) \in \{(1,1), (2,4)\}$.▲

4.9 Пелова једначина

Нека је m позитиван цео број који није потпун квадрат (заправо, не представља ограничење општости да се представи да је m квадратно слободан, тј. да је производ различитих простих бројева). Тада једначину облика $x^2 - my^2 = 1$ зовемо Пелова једначина. Наравно, $x = \pm 1,\ y = 0$ су решења сваке Пелове једначине. Ова решења су тривијална, док су сва друга нетривијална.

Приметимо да се лева страна Пелове једначине може факторисати на следећи начин $\left(x + \sqrt{m}y\right)\left(x - \sqrt{m}y\right) = 1$. Због тога, ако је (x, y) једно нетривијално решење Пелове једначине и ако са $x_n,\ y_n$ означимо целе бројеве дефинисане са $x_n + y_n\sqrt{m} = \left(x + \sqrt{m}y\right)^n$ за $n \geq 1$, тада и (x_n, y_n) представља решење. Сва уочена решења (x_n, y_n) су различита, па тако долазимо до закључка: ако једначина $x^2 - my^2 = 1$ има бар једно нетривијално решење, има их бесконачно много. Међутим, нетривијална решења увек постоје; ово тврђење (које се заснива на неким основним резултатима из области Диофантових апроксимација) дајем без доказа.

Теорема 15. *Нека је m позитиван цео број који није потпун квадрат. Тада једначина $x^2 - my^2 = 1$ има бесконачно много решења.*

Теорема 16. *Нека је m позитиван цео број који није потпун квадрат и нека је (x_0, y_0) оно позитивно решење $(x_0 > 0,\ y_0 > 0)$ једначине $x^2 - my^2 = 1$ за које је $x_0 + y_0\sqrt{m}$ минимално. Тада су сва решења (x, y) једначине $x^2 - my^2 = 1$ одређена са $x + y\sqrt{m} = \pm\left(x_0 + y_0\sqrt{m}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказ: По претходним примедбама, ако је (x_0, y_0) основно решење једначине $x^2 - my^2 = 1$, онда је и сваки пар (x, y) одређен условом из формулације теореме такође решење те једначине. Доказаћемо да других решења нема. Претпоставићемо супротно: да постоји неко решење (x, y) које није задатог облика. При томе, не представља никакво умањење општости ако претпоставимо да је $x + y\sqrt{m} > 0$. Пошто је

$$lim_{n\to\infty}(x + y\sqrt{m})^n = 0 \text{ и } lim_{n\to\infty}(x + y\sqrt{m})^n = +\infty,$$

следи да постоји $k \in \mathbb{Z}$ тако да је

$$(x + y\sqrt{m})^k < x + y\sqrt{m} < (x + y\sqrt{m})^{k+1}.$$

Множећи ову двоструку неједнакост са $(x - y\sqrt{m})^k > 0$ и имајући у виду да је $x_0^2 - my_0^2 = 1$, добијамо

$$1 < (x + y\sqrt{m})(x - y\sqrt{m})^k < x_0 + y_0\sqrt{m}\,.$$

Ако сада дефинишемо $x', y' \in \mathbb{Z}$ са

$$x' + y'\sqrt{m} = (x + y\sqrt{m})\,(x - y\sqrt{m})^k,$$

следи да важи

$$(x')^2 - m(y')^2 = \left(x' + y'\sqrt{m}\right)\left(x' - y'\sqrt{m}\right)$$
$$= \left(x + y\sqrt{m}\right)\left(x_0 - y_0\sqrt{m}\right)^k(x - y\sqrt{m})(x_0 + y_0\sqrt{m})^k$$
$$(x')^2 - m(y')^2 = (x^2 - my^2)(x_0^2 - my_0^2)^k = 1,$$

па и (x', y') представљају решења једначине $x^2 - my^2 = 1$. Неједнакост

$$1 < \left(x + y\sqrt{m}\right)\left(x_0 - y_0\sqrt{m}\right)^k < x_0 + y_0\sqrt{m}$$
можемо сада написати у облику
$$1 < x' + y'\sqrt{m} < x_0 + y_0\sqrt{m},$$
одакле је
$$0 < x' - y'\sqrt{m} < 1.$$
Због последње неједнакости немогући су случајеви $y' = 0$, затим $x' > 0,\ y' < 0$, као и $x' < 0,\ y' > 0$, док због неједнакости
$$1 < x' + y'\sqrt{m} < x_0 + y_0\sqrt{m},$$
не може бити $x', y' < 0$. Према томе, важи $x', y' > 0$. Али, сада друга неједнакост из неједнакости
$$1 < x' + y'\sqrt{m} < x_0 + y_0\sqrt{m}$$
чини контрадикцију са претпостављеним минималним својствима решења (x_0, y_0).■

Овај доказ илуструје оно што се у теорији Диофантових једначина зове *Фермаов метод бесконачног спуштања*: под претпоставком да посматрана једначина има решења (одређеног типа), уочи се решење које је у извесном смислу ”минимално”. С друге стране, својства једначине омогућавају да се, полазећи од минималног решења, конструише ”мање”, што даје контрадикцију и показује да дотична решења заправо не постоје.

Када је основно решење (x_0, y_0) познато могу се, формирањем рекурентне везе између два узастопна решења, одредити остала решења (x_n, y_n).

Како је $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{m} = \left(x_n + y_n\sqrt{m}\right)(x_0 + y_0\sqrt{m})$, следи
$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{m} = x_n x_0 + m y_n y_0 + \sqrt{m}(x_n y_0 + y_n x_0).$$
Изједначавањем рационалних и ирационалних делова једнакости добијамо
$$x_{n+1} = x_n x_0 + m y_n y_0 \text{ и } y_{n+1} = x_n y_0 + y_n x_0.$$
Формуле за директно одређивање низова
$$x_n = \frac{1}{2}\left[(x_0 + y_0\sqrt{m})^n + (x_0 - y_0\sqrt{m})^n\right]$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left[(x_0 + y_0\sqrt{m})^n - (x_0 - y_0\sqrt{m})^n\right]$$
Овде је основни проблем: Како одредити основно решење (x_0, y_0)? У неким ситуацијама, то може бити и једноставно:

- ✓ Ако је $m = a^2 - 1$, онда је $x^2 - my^2 = x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$. Одавде је $x^2 - 1 = (a^2 - 1)y^2$, па је основно решење $(x_0, y_0) = (a, 1)$.
- ✓ Ако је $m = a^2 + 1$, $x^2 - my^2 = x^2 - (a^2 + 1)y^2 = 1$. Тада је $x^2 = a^2y^2 + y^2 + 1$. А да би $a^2y^2 + y^2 + 1$ био потпун квадрат треба да је $y^2 = 2ay$, па је $y = 2a$, а $x = ay + 1 = 2a^2 + 1$. Значи $(x_0, y_0) = (2a^2 + 1, 2a)$.
- ✓ Ако Пелова једначина облика $x^2 - my^2 = 1$ има решења, онда једначина $x^2 - q^2 \cdot my^2 = 1$, има основно решење $(x_0, y_0) = (x_0, \frac{y_0}{q})$. Овде m одређујемо на основу случаја под 1 или 2. На пример, основно решење за Пелову једначину $x^2 - 5y^2 = 1$ је $(9,4)$, а на основу тога је основно решење за једначину $x^2 -$

$20y^2 = 1$, тј. $x^2 - 2^2 \cdot 5y^2 = 1$ износи $(x_0, y_0) = \left(9, \frac{4}{2}\right) = (9,2)$. Слично је и за једначину $x^2 - 63y^2 = 1$, тј. $x^2 - 3^2 \cdot 7y^2 = 1$ основно решење $(x_0, y_0) = \left(8, \frac{3}{3}\right) = (8,1)$.

На основу ових олакшица, може се формирати таблица основних решења.

Пример 55. *Одредити опште решење једначине* $x^2 - 3y^2 = 1$.

Решење. Минимално решење ове једначине је $(x_0, y_0) = (2,1)$. Опште решење ове једначине је

$$x_{n+1} = 2x_n + 3 \cdot 1 \cdot y_n = 2x_n + 3y_n$$
$$y_{n+1} = x_n + 2y_n,$$

односно представљено општом формулом је $x + y\sqrt{3} = \pm(2 + \sqrt{3})^n$.▲

Често срећемо једначине облика $x^2 - my^2 = a$, где је m природан број који није потпун квадрат и a цео број различит од нуле. Такве једначине зовемо једначинама Пеловог типа.

Нека је (x_{10}, y_{10}) једно, а (x_n, y_n) опште решење једначине $x^2 - my^2 = a$ у скупу природних бројева и нека је (x_0, y_0) основно решење Пелове једначине $x^2 - my^2 = 1$.

Тада важе релације:

$$x^2 - my^2 = \left(x + y\sqrt{m}\right)\left(x - y\sqrt{m}\right) = 0,$$
$$x_n^2 - my_n^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{m}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{m}\right) = \left(x_{10} + y_{10}\sqrt{m}\right)\left(x_{10} - y_{10}\sqrt{m}\right) = a,$$
$$x_0^2 - my_0^2 = (x_0 + y_0\sqrt{m})^n(x_0 - y_0\sqrt{m})^n = 1.$$

Из датих релација је

$$\begin{aligned}\left(x_n + y_n\sqrt{m}\right)&\left(x_n - y_n\sqrt{m}\right) \\ &= \left(x_{10} + y_{10}\sqrt{m}\right)\left(x_{10} - y_{10}\sqrt{m}\right) \cdot (x_0 + y_0\sqrt{m})^n(x_0 - y_0\sqrt{m})^n \\ &= a.\end{aligned}$$

Сада је очигледно $x_n + y_n\sqrt{m} = (x_{10} + y_{10}\sqrt{m})(x_0 + y_0\sqrt{m})^n$, што даје могућност за одређивање свих решења (x_n, y_n) једначине $x^2 - my^2 = a$, а ако су позната основна решења (x_0, y_0) једначине $x^2 - my^2 = 1$ и (x_{10}, y_{10}) једначине $x^2 - my^2 = a$.

И овде је проблем како одредити тривијална решења (x_{10}, y_{10}) једначине $x^2 - my^2 = a$. Овде ћу дати једну теорему без доказа.

Теорема 17. *Ако једначина* $x^2 - my^2 = a$ *има бар једно решење, онда постоје цео број* n *и решење* (x_{10}, y_{10}) *дате једначине, за које важи* $y_{10}^2 \leq \frac{ay_0^2}{2(x_0+1)}$ *ако је* $a > 0$ *и* $y_{10}^2 \leq \frac{-ay_0^2}{2(x_0+1)}$ *ако је* $a < 0$, *такви да је* $x_n + y_n\sqrt{m} = \pm(x_{10} + y_{10}\sqrt{m})(x_0 + y_0\sqrt{m})^n$.

Пример 56. *Одредити опште решење једначине* $x^2 - 5y^2 = 44$.

Решење. Овде је $m = 5$, $a = 44 > 0$, па је основно решење Пелове једначине $(x_0, y_0) = (9,4)$ и $y_{10}^2 \leq \frac{ay_0^2}{2(x_0+1)} = \frac{44 \cdot 4^2}{2(9+1)} = 35{,}2$. То значи да је потенцијално $y_{10} \in \{1,2,3,4,5\}$. Условима задатка одговарају решења

$(x_0, y_0) = \{(\pm 7, \pm 1), (\pm 8, \pm 2), (\pm 13, \pm 5)\}$. Тада су сва решења дата једначином у скупу природних бројева дефинисана формулама:

$$x_n + y_n\sqrt{m} = \pm(7 \pm \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n,$$

$$x_n + y_n\sqrt{m} = \pm(8 \pm 2\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \text{ или}$$

$$x_n + y_n\sqrt{m} = \pm\left(13 \pm 5\sqrt{5}\right)\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n. \blacktriangle$$

Закључак

Рад представља једно од могућих виђења садржаја о Диофантовим једначинама у основној и средњој школи. Може, у методичком и дидактичком смислу, послужити ученицима, наставницима и професорима. Ученицима може послужити јер се постепено уводе у теорију Диофантових једначина. Рад није скуп готових наставних рецепата, већ садржи мноштво детаљно обрађених задатака и метода згодних за директну или аналогну примену, из проблематике која је ретко присутна у нашој литератури. Наставници и професори могу овај рад користити као добар подсетник из Диофантових једначина за своје припреме у току редовне и додатне наставе. Такође професори и наставници из овог рада могу одбрати мноштво задатака за ученике, посебно оне надарене за математику.

Сам рад даје историјске, методичке, теоретске и практичне основе за реализацију садржаја о Диофантовим једначинама у настави математике у основној и средњој школи, али потпуно је јасно да и отвара многобројне могућности његове примене. Наравно, може даровитом ученику и наставнику бити препорука и подстицај за оригинална методичка решења, даље експериментисање и изналажење још ефикаснијих и квалитетнијих методичких приступа.

Нови Сад, септембар 2012. Аутор

Литература

[1] Андрић, В., МЕТОДИЧКА ТРАНСФОРМАЦИЈА САДРЖАЈА О ДИОФАНТОВИМ ЈЕДНАЧИНАМА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ, докторска дисертација, Нови Сад, 2006.

[2] Bashmakova,G., I., DIOPHANTUS AND DIOFANTINE EQUATIONS, 1997.

[3] Каделбург, З., Мићић, В., Огњановић, С., АНАЛИЗА СА АЛГЕБРОМ 2, уџбеник са збирком задатака за 2. разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2005.

[4] Долинка, И., ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРИЈА БРОЈЕВА, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.

[5] Драговић, В., Младеновић, П., Огњановић, С., ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА (СА РЕШЕЊИМА), Друштво математичара Србије, Београд, 1999.

[6] Драговић, В., Дугошија, Ђ., Младеновић, П., РЕПУБЛИЧКА И САВЕЗНА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1990-2001, Друштво математичара Србије, Београд, 2002.

[7] Андрић, В., ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ, Круг, Београд, 2006.

[8] Стојановић, В., Золић, А., САВЕЗНА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ, Друштво математичара Србије, Београд, 1991.

[9] Стојановић, В., ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА, Друштво математичара Србије, Београд, 1984.

[10] Андрић, В., Ђорић, М., Јовчић, М., Љубић, Д., Петковић, Љ., Стојановић, В., 1000 ЗАДАТАКА ЗА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ, Друштво математичара Србије, Београд, 1999.

[11] МАТЕМАТИСКОП, И.П. Математископ, Београд, 1998-1999, број 1-5

[12] МАТЕМАТИСКОП, И.П. Математископ, Београд, 2001-2002, број 1-5

[13] МАТЕМАТИСКОП, И.П. Математископ, Београд, 2002-2003, број 1-5

[14] МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ, Друштво математичара Србије, Београд, 2008, XLII

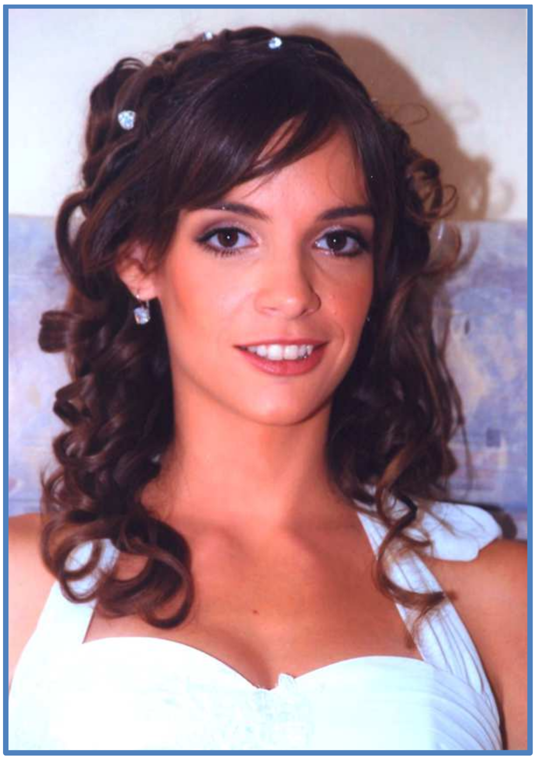
[15] МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ, Друштво математичара Србије, Београд, 2010, XV

[16] ТАНГЕНТА, Друштво математичара Србије, Београд, 2010, број 62

[17] www.diofant.org

[18] Вуловић, Н., Јовановић, Марина., Николић, А., ИГРА БРОЈЕВА И ОБЛИКА, математика за 4. разред основне школе 1. део, Klett, 2006.
[19] Марјановић, М., Латковић, М., МАТЕМАТИКА ЗБИРКА ЗАДАТАКА СА РЕШЕЊИМА ЗА 4. РЕЗРЕД ОСНОВНЕ ШКОЛЕ; приручник за додатни рад, слободне активности и математичка такмичења, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2000.

Биографија



Рођена сам 7. 3. 1988. године у Лозници. Основну школу сам завршила у школи ”Јован Цвијић” у Лозници као ђак генерације. Гимназију ”Вук Караџић” у Лозници сам завршила са одличним успехом. Основне студије на Природно – математички факултет у Новом Саду, смер–професор математике, сам завршила 2011. године са просеком 9,53 и стекла звање *дипломирани професор математике*. Исте године сам уписала мастер студије на Природно – математичком факултету, смер-професор математике.

Бојана Јанковић

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР
Идентификациони број:
ИБР
Тип документације: Монографска документација
ТД
Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ
Врста рада: Мастер рад
ВР
Аутор: Бојана Јанковић
АУ
Ментор: др Драгослав Херцег
МН
Наслов рада: Диофантове једначине у основној и средњој школи
МР
Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП
Језик извода: српски и енглески
ЈИ
Земља публиковања: Србија
ЗП
Уже географско подручје: Војводина
УГП
Година: 2012.
ГО
Издавач: Ауторски репринт
ИЗ
Место и адреса: Нови Сад, Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 3
МА
Физички опис рада: 3/88/0/2/1/0/0
(број поглавља/ број страна/ број лит. цитата/ број табела/ број слика/ број графика/ број прилога)
ФО
Научна област: Математика
НО
Научна дисциплина: Методика наставе математике
НД
Кључне речи: Диофантове једначине
ПО
УДК:
Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику
ЧУ
Важна напомена:
ВН
Извод: Мастер рад приказује историјске, методичке, теоретске и практичне основе за реализацију садржаја о Диофантовим једначинама у настави математике у основној и средњој школи.
ИЗ
Датум прихватања теме од стране НН већа: 17.1.2012.
ДП

Датум одбране: септембар 2012.
ДО
Чланови комисије:
КО

Председник:	др, Ђуро Паунић редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Члан:	др, Ђурђица Такачи редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду
Ментор:	др Драгослав Херцег, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master`s thesis
CC
Author: Bojana Janković
Mentor: dr. Dragoslav Herceg
MN
Title: Diofantine equations in Primary and High school
XI
Language of text: Serbian (Cyrillic)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2012.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description 3/88/0/2/1/0/0
(chapters/ pages/ references/ tables/ pictures/ charts/ supplements)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Teaching methods of mathematics
SD
Key words: Diofantine equations
SKW UC:
Holding data: Library of Department of Mathematics and Informatics
HD

Note:

N

Abstract: The master thesis shows historical, methodical, theoretical and practical basis for the implementation of the contents of the Diophantine`s equations in mathematics in primary and secondary school.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 17.1.2012.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr Đuro Paunić,Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Đurđica Takači , Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad