УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА
МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

Биљана Павков

ЕЛЕМЕНТАРНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

- МАСТЕР РАД -

Ментор, др Синиша Црвенковић
Нови Сад, 2011.

САДРЖАЈ

УВОД.....2

1. УОПШТЕНО О НЕЈЕДНАКОСТИ.....4

1.1. Дефиниције, теореме и тврђења о неједнакости.....5

1.2. Неједнакости са апсолутним вредностима броја.....8

1.3. Примена једноставнијих неједнакости.....9

2. НЕЈЕДНАКОСТИ БРОЈЕВНИХ СРЕДИНА.....15

3. ПРИМЕНА НЕЈЕДНАКОСТИ БРОЈЕВНИХ СРЕДИНА.....21

4. ЛОГАРИТАМСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ.....28

5. КОШИ-ШВАРЦОВА НЕЈЕДНАКОСТ И ПРИМЕНА.....36

6. ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ.....45

6.1. Неједнакости за елементе троугла.....45

6.2. Примена неједнакости на правоугли троугао.....56

6.3. Примена неједнакости на неке многоуглове.....64

6.4. Стереометријске неједнакости.....76

7. ПРИМЕНА НЕЈЕДНАКОСТИ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ.....86

8. ЧЕБИШЕВЉЕВЕ НЕЈЕДНАКОСТИ И ПРИМЕНА.....96

9. ШУРОВА НЕЈЕДНАКОСТ И ЊЕНА ПРИМЕНА.....107

ЗАКЉУЧАК.....111

ЛИТЕРАТУРА.....112

БИОГРАФИЈА.....113

УВОД

Мастер рад је посвећен изучавању ***елементарних неједнакости*** које су основа истраживања других сложенијих неједнакости. Оне су садржај градива још у нижим разредима основне школе, знање се продубљује кроз средњошколско образовање, одлазак на такмичења, турнире како код нас тако и у свету. Неједнакости се могу користити као добар приручник математичарима, физичарима, инжењерима, механичарима, статистичарима, економистима. Примена неједнакости је заступљена у математичкој анализи, геометрији, теорији вероватноће, математичкој статистици, математичкој обради података, линеарног и динамичког програмирања као и у теоријској и примењеној математици.

Доказивање неједнакости у математици је корисна и креативна активност. Сама примена неједнакости захтева добро познавање математике, богатсво идеја и метода. Неопходна је упорност , стрпљивост и радозналост у решавању задатака. Интересантно је доказивање неједнакости, али нимало лако. Увек се може нешто ново, интересантно и неочекивано додати и закључити. У области неједнакости може се брзо доћи до решења анализирањем и истраживањем, а понекада је потребна дубља анализа. Докази могу бити кратки и сажети, али и дуги, компликовани. Идеја која води до решења се заснива на оштроумности, досетљивости и повезивању стечених знања. Главни циљ је је потврда конкретне тврдње, при чему се може занемарити методичка страна доказа. Постоје различити начини доказивања :

1. Ако је доказивање очигледно, природно се намеће одговор.
2. Ако се уочи примена познатих неједнакости, користе се у решењу.
3. Ако се препозна примена емпиријске и математичке индукција.
4. Неједнакост се трансформише у еквивалентну са којом се прихватљивије долази до решења.
5. Ако је неједнакост хомогена у односу на променљиве, изврши се њена нормализација.
6. Комбинација разних метода.

Циљ мастер рада је обрада и примена елементарних неједнакости у настави математике у основној и средњој школи, као и припреми за такмичења и полагање пријемних испита на факултете. Рад обухвата синтезу теорије са применом, што је стандард савремене литературе.

Тражена је корелација између теоријских поставки и практичне примене, детаљно је приказан процес долажења до решења. У раду је коришћена комбинована метода истраживања, проучавана је литература где је разноврсна примена неједнакости.

Рад је на око 111 страница, подељен на девет поглавља, укупан број слика 21. Прво поглавње обухвата садржај неопходан за разумевање неједнакости. Дефиниције, теореме, тврђења и примере са применом у основној школи, у раду са надареним ученицима. Друго поглавље чини теоријски део, особине и везе средине бројева (аритметичка, геометријска, хармонијска и квадратна). У трећем поглављу је примена бројевних неједнакости на бројним примерима, које могу да користе ученици основне и средње школе. Четврто поглавње су интересантне логаритамске неједнакости, у чијем доказивању се користе „неједнакости средина“. Пето поглавље је Коши- Шварцова неједнакост са применом на неједнакости средина, неједнакости из геометрије, као и у скупу реалних бројева. Коришћење ове неједнакости је често, ако се уочи и препозна њена примена. Најобимније поглавље је шесто где се обрађују геометријске неједнакости, за елементе троугла, примена на правоугли троугао, многоуглове као и стереометријске неједнакости. Материјал је интересантан за ученике виших разреда основне као и средње школе, као и за професоре који се баве тим градивом. Коришћене су познате геометријске и тригонометријске једнакости и трансформације. Поједини задаци су илустровани цртежима, укупно 19 цртежа у поглављу. Седмо поглавље обухвата неједнакости за одређивање екстрмних вредности што је садржај многих такмичења средњошколаца, као и љубитеља математичких задатака. Циљ је да се одреди минимална или максимална вредност израза или функције, често уз додатни услов на променљивим. Ови проблеми варирају од једноставнијих до јако тешких. Најчешће је потребно применити на прави начин неку од познатих неједнакости, искористити дати услов на променљивим. Код решавања задатака из овог дела потребно ја добро познавање полинома. У осмом поглављу је Чебишевљева неједнакост са применом на задацима из геометрије и скупу природних бројева. Завршно, девето поглавље је Шурова неједнакост са применом на скупу реалних бројева.

Желим да изразим дубоку захвалност свом ментору, професору др Синиши Црвенковићу на драгоценом стручном усмеравању приликом израде овог рада и укупној подршци коју сам имала. Такође се захваљујем професорима др Љиљани Гајић и др Загорки Црвенковић Лозанов које су прихватиле да буду председник и члан комисије у оцени овог рада.

1. УОПШТЕНО О НЕЈЕДНАКОСТИ

„Ако неједнакости додамо (или одузмемо) једнаке, остају неједнаке.“
(Еуклид, *Елементи; Особине неједнакости из Теореме* 5)

Неједнакости су стекле значајно место у математици у доба Гауса (*Gauss*, 1777-1855, немачки математичар, физичар, астроном), Кошија (*Couchy*, 1789-1857, француски математичар) и Чебишева (*Чебышёв*, 1821-1894, руски математичар). Већ тада је дат теоријски значај апроксимативним методама. Са упоређивањем две или више математичких величина стандардно образовање нас упознаје на самом почетку образовања. Постоје више типова неједнакости линеарне, квадратне, полиномне, логаритамске, геометријске, тригонометријске,.. Друга подела би била на:

1. Условне (неједнакост је дефинисана само за одређене вредности променљиве,под извесним ограничењима)
2. Безусловне (апсолутне, ако је неједнакост иста за све вредности променљиве за које су чланови неједнакости дефинисани).

Поред те поделе имамо бројевне неједнакости, оне не садрже променљиву и алгебарске неједнакости које садрже једну или више променљивих.

Два израза повезана једним од знакова $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ или $\neq$ чине неједнакост.

1.1. Дефиниције, теореме и тврђења о неједнакостима

Дефиниција 1.
Између два реална броја a и b важи само једна од релација $a < b$, $a = b$ или $a > b$.

Тврђење 1.1.
Ако је за два реална броја a и b, $a > b$, тада је $b < a$ и обратно, ако је $b < a$, тада је $a > b$.

Доказ.
а) Геометријски горње тврђење је очигледно, па неједнакости $a > b$ и $b < a$ имају исто значење. Тачка која одговара броју a налази се на бројевној прави десно од тачке која одговара броју b.
б) Алегебарски посматрано, неједнакост $a > b$ значи да је разлика $a-b > 0$, па је разлика $b-a = -(a-b) < 0$.
Обратно, ако је $b < a$, тада је разлика $b-a < 0$, па $a-b = -(b-a) > 0$, што значи да је $a > b$.

Тврђење 1.2.
Ако је за a, b, c реалне бројеве, $a > b$ и $b > c$, тада је $a > c$.

Доказ.
Из $a > b$ следи $a-b > 0$ и из $b > c$ следи $b-c > 0$. Збир неједнакости је $(a-b)+(b-c) > 0$, односно. $a-c > 0$, па је $a > c$.

Тврђење 1.3.
Ако је $a > b$, онда је $a+c > b+c$.

Доказ.
Из $a > b$ следи $a-b > 0$. Како је $a-b = (a+c)-(b+c)$ следи $(a+c)-(b+c) > 0$, односно $a+c > b+c$.

Тврђење 1.4.
а) Ако је $a > b$ и $c > 0$, онда је $ac > bc$.
б) Ако је $a > b$ и $c < 0$, онда је $ac < bc$.

Доказ.

а) Ако је $a > b$ $\Rightarrow a\text{-}b > 0$ и $c > 0$

$\Rightarrow (a\text{-}b)\cdot c > 0$

$\Rightarrow ac - bc > 0$

$\Rightarrow ac > bc.$

б) Ако је $a > b$ $\Rightarrow a\text{-}b > 0$ и $c < 0$

$\Rightarrow (a\text{-}b)\cdot c < 0$

$\Rightarrow ac - bc < 0$

$\Rightarrow ac < bc.$

Тврђење 1.5.

Ако је $a > b$ и $a\text{-}b > 0$, тада је $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Тврђење 1.6.

Ако је $a > b$ и $c > d$ где је $b > 0$ и $d > 0$ (а самим тим и $a > 0$, $c > 0$), тада је $ac > bd$. Ако је $a < b$, $c < d$, $a > 0$ и $c > 0$, тада је $ac < bd$.

Тврђење 1.7.

Ако су a, m, n природни бројеви, $a > 1$ и $m < n$, онда је $a^m < a^n$.

Тврђење 1.8.

Ако су a и b природни бројеви и $a > b$, онда је $a^2 > (a\text{-}b)\cdot(a+b)$.

Доказ. $a^2 > a^2\text{-}b^2 = (a\text{-}b)\cdot(a+b)$

Тврђење 1.9.

Ако су a и b природни бројеви и $a < b$, онда је $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$.

Доказ.

Ако је $a < b$, онда је разлика $\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{a(b+1) - b(a+1)}{b(b+1)} = \frac{a-b}{b(b+1)}$ негативна, чиме је доказано тврђење.

Тврђење 1.10.

За сваки природан број a је $\frac{a+1}{2a+1} > \frac{2a+1}{4a+1}$.

Доказ.

$$\frac{a+1}{2a+1}-\frac{2a+1}{4a+1}=\frac{(4a+1)(a+1)-(2a+1)^2}{(2a+1)(4a+1)}=\frac{a}{(2a+1)(4a+1)}.$$

Значи да је разлика већа од нуле. Тиме је тврђење доказано.

Тврђење 1.11.

Ако је $a > b$ и $a > 0$, $b > 0$, онда је $\frac{a}{a+1}<\frac{b}{b+1}$.

Доказ.

$\frac{a}{a+1}=\frac{a+1-1}{a+1}=1-\frac{1}{a+1}$, што значи да се разломак $\frac{a}{a+1}$

повећава са повећањем a.

Тврђење 1.12.

Ако је реалан број $a \neq 0$, онда је $a^2 > 0$.

Тврђење 1.13.

Ако су a и b позитивни бројеви, тада је $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Једнакост важи за $a = b$.

Доказ.

Ако неједнакост $(a-b)^2 \geq 0$, $a^2+b^2 \geq 2ab$ поделимо са ab, добијамо $\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}\geq 2$ и $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$. Једнакост важи за $a = b$.

Често се користи **Бернулијева** (*J. Bernoulli*) неједнакост, следећа теорема 1.1. је добила назив по имену швајцарског математичара холандског порекла (1654-1705).

Теорема 1.1.

За сваки реалан број $x > -2$ и природан број n важи $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$.

Доказ.

Разликоваћемо два случаја: $x > -1$ и $-2 \leq x \leq -1$.

а) Доказаћемо тачност неједнакости за $x > -1$ методом математичке индукције. За $n = 1$ неједнакост постаје идентитет. Претпоставићемо да неједнакост важи за произвољан природан број k, па је $(1+x)^k \geq 1+k\cdot x$. Множећи ову неједнакост са $1+x > 0$ добијамо
$(1+x)\cdot(1+x)^k \geq (1+k\cdot x)\cdot(1+x)$, из чега следи да је $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)\cdot x+kx^2$.
Пошто је $kx^2 > 0$, добијамо $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)\cdot x$.
Доказана је неједнакост за $x > -1$.

б) Ако је $-2 \leq x \leq -1$, тада је $(1+x)^n \geq -|1+x|^n \geq -|1+x| = 1+x \geq 1+n\cdot x$.

1.2. Неједнакости са апсолутним вредностима броја

За било која два реална броја x и y, важи да су они једнаки или је један од њих већи од другог. Закључујемо, ако је $x \leq y$, онда је $y = max\{x,y\}$.

Дефиниција 2.
Број $max\{x, -x\}$ назива се апсолутна вредност или модуо броја x у ознаци $|x|$.

Теорема 1.2.
За сваки реалан број x важи:

а) $|x| = \begin{cases} x \text{ ако је } x \geq 0 \\ -x \text{ ако је } x < 0 \end{cases}$

б) $|-x| = |x|$

в) $x \leq |x|$.

Неке важне особине апсолутне вредности броја повезане са неједнакостима имају велику примену. Следећа теорема је позната по називу “неједнакост троугла” и има значајну примену у решавању задатака.

Теорема 1.3.
За свака два реална броја x и y важи неједнакост $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Доказ. Ако је $x+y \geq 0$, тада је $|x+y| \leq x+y \leq |x|+|y|$.
Ако је $x+y < 0$, тада је $|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x|+|y|$.

Уопштењем Теореме 1.2. би се добила неједнакост $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Доказ. За n=1 неједнакост важи.

За $n \geq 2$, $\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |x_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$.

Теорема 1.4.
За реалне бројеве x и y важи: $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

Доказ. Нека је x-y = z, па је x = y+z. На основу претходне теореме је $|x|=|y+z| \leq |y|+|z|$, значи да је $|z| \geq |x|-|y|$ или $|x-y| \geq |x|-|y|$. Пошто је $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x|+|-y| = |x|+|y|$, тиме је десни део неједнакости доказан. Поред тога, тачна је и неједнакост $|y|-|x| \leq |x-y|$ јер је $|x-y| = |y-x|$. Вредност $||x|-|y||$ може бити једнака $|x|-|y|$ или $-(|x|-|y|)$, тако да је и $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

1.3. Примена једноставнијих неједнакости

1. Доказати неједнакост $2^n > n^2$, $n \geq 5$.

Решење:
За n = 1 добија се тачна неједнакост.
За n = 2 добија се нетачна неједнакост.
За n = 3 је 8 > 9 није тачна неједнакост.
Докажимо да је неједнакост тачна за $n > 5$, неједнакост постаје $2^5 > 5^2$, што је тачно.

Ако је $n \geq 5$, тада је $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{25}$, па је

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = (1+\frac{1}{n})^2 = 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2} \leq 1+\frac{2}{5}+\frac{1}{25} = \frac{36}{25} < 2.$$

Значи да је $2 > \frac{(n+1)^2}{n^2}$.

Множењем претходне неједнакости са $2^n > n^2$ добија се

$2^n \cdot 2 > n^2 \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}$, односно $2^{n+1} > (n+1)^2$, за $n \geq 5$.

Закључујемо тачност неједнакости за свако $n \geq 5$ из импликације $2^n < n^2 \Rightarrow 2^{n+1} < (n+1)^2$.

2. Шта је веће $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$?

Решење:

Ако је $x=\frac{5+2\sqrt{5}}{2}=\frac{5}{2}+\sqrt{5}$ и $y=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$, тада је

$x-y=\frac{5}{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{5}=\frac{5}{2}-\sqrt{6}>0$ јер је $\frac{5}{2}>\sqrt{6}$ због $\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^2>6$.

Значи да је $x > y$, па је $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}>\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

3. Доказати да је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}}>3$.

Решење:

Користећи неједнакост $\sqrt{17}>4$ и $\sqrt{37}>6$, њихов збир је $\sqrt{17}+\sqrt{37}>10$, из чега додавањем неједнакости $5+\sqrt{2}$ добијамо $5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}>5+\sqrt{10}+\sqrt{2}>5+3+1=9$, па је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}}>\sqrt{9}=3$.

4. Доказати да је 19^{91}-91^{19} > 0.

Решење:

Користећи неједнакост

$19^{91} > 16^{91} = (2^4)^{91} = 2^{364} = (2^7)^{52}=128^{52} > 91^{52} > 91^{19}$,

значи да је $19^{91}> 91^{19}$, па је и њихова разлика већа од нуле.

5. а) Доказати да за сваки природан број $n \geq 2$ важи $\frac{1}{n}<\frac{1}{n(n-1)}$.

б) Доказати да је $(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{3})^3+...+(\frac{1}{2010})^{2010}<1$.

Решење:

а) За $n \geq 2$ важи $n^2 > n\cdot(n-1)$, *а* из тога следи да је $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$.

б) Следећи низ неједнакости даје решење

$$(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{3})^3+...+(\frac{1}{2010})^{2010}<(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{3})^2+...+(\frac{1}{2010})^2<$$
$$<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2009\cdot 2010}<$$
$$<(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010})=1-\frac{1}{2010}<1.$$

6. Ако су *a* и *b* позитивни бројеви и *a* > *b*, доказати да је $(a+b)^{100} < 2^{100}\cdot(a^{100}+b^{100})$.

Решење:
Користећи да је $b < a$, добијамо да је $a+b < 2a$.
Одавде следи $(a+b)^{100} < 2^{100}\cdot a^{100} < 2^{100}\cdot a^{100}+2^{100}\cdot b^{100} = 2^{100}\cdot(a^{100}+b^{100})$.

7. Доказати неједнакости:

а) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}}>10$

б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{78}{79}\cdot\frac{80}{81}<\frac{1}{9}$.

Решење:

а) Очигледно је $\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{10}},..., \frac{1}{\sqrt{100}}\geq\frac{1}{10}$,

па је $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}}>100\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$.

б) Уочимо да је $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}, \frac{3}{4}<\frac{4}{5}, ..., \frac{78}{79}<\frac{79}{80}, \frac{80}{81}<\frac{81}{82}$.

Ако помножимо неједнакости, добијамо
$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{78}{79}\cdot\frac{80}{81}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{79}{80}\cdot\frac{81}{82}$.

Нека је $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{78}{79}\cdot\frac{80}{81}$ и уочимо да на десној страни неједнакости имамо број $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{82}$, па је $x<\frac{1}{82\cdot x}$, односно $x^2<\frac{1}{82}<\frac{1}{81}$, из чега следи да је $x<\frac{1}{9}$, што се и тврдило.

8. Доказати тачност неједнакости $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+...+\frac{1}{2008\cdot 2010}<\frac{1}{4}$**.**

Решење:
Дата неједнакост је еквивалентна неједнакостима

$$\frac{1}{2\cdot 2}\cdot(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1004\cdot 1005})<\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1004}-\frac{1}{1005})<\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{1005})<\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{4020}<\frac{1}{4}.$$

9. За четири броја *a, b, c, d* важи *d* > *c*, *a*+*b* = *c*+*d*, *a*+*d* < *b*+*c*. Упоредити та четири броја по величини.

Решење:
Из претпоставке $a+d < b+c$ следи $a+d+b < 2b+c$, па користећи $a+b = c+d$ добијамо $c+2d < 2b+c$, па је $d < b$.
Слично, $a+d < b+c$, следи $a+d+c < b+2c$.
Из $a+b = c+d$ добијамо $2a+b < b+2c$, па је $a < c$.
Користећи претпоставку $c < d$ следи $a < c < d < b$.

10. Доказати да је:
а) $a^3+b^3 > ab\cdot(a+b),\ a \neq b,\ a+b > 0$
б) $2\cdot(a^3+b^3) > (a+b)\cdot(a^2+b^2),\ a \neq b,\ a+b > 0.$

Решење:
а) Позната неједнакост је $(a-b)^2 > 0$
$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 > 0$
$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2 > ab \ \ / \ \cdot(a+b)$
$\Leftrightarrow a^3+b^3 > ab(a+b)$
б) Позната неједнакост је $(a-b)^2 > 0$
$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 > 0$
$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2-ab > 0 \ \ / \ \cdot(a+b)$
$\Leftrightarrow (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)-ab(a+b) > 0$
$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2 > 0$
$\Leftrightarrow 2a^3+2b^3-a^3-b^3-a^2b-ab^2 > 0$
$\Leftrightarrow 2\cdot(a^3+b^3) > (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)$
$\Leftrightarrow 2\cdot(a^3+b^3) > (a+b)\cdot(a^2+b^2).$

11. Доказати неједнакост $3(1+x^2+x^4) \geq (1+x+x^2)^2$, за сваки реалан број x.

Решење:
Дата неједнакост је еквивалентна неједнакости $3+3x^2+3x^4 \geq 1+2x+x^2+2x^2+2x^3+x^4$
$\Leftrightarrow 2x^4-2x^3-2x+2 \geq 0$
$\Leftrightarrow 2(x^3(x-1)-(x-1)) \geq 0$
$\Leftrightarrow 2(x-1)^2\cdot(x^2+x+1) \geq 0$
Добијена неједнакост је тачна за свако x.

12. Доказати да за свако реално x важи неједнакост $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)+1{,}0001 > 0$.

Решење:
Дата неједнакост је еквивалентна неједнакостима
$(x^2-5x+4)\cdot(x^2-5x+6)+1{,}001 > 0$
$\Leftrightarrow (x^2-5x+5 - 1)\cdot(x^2-5x+5 + 1)+1{,}001 > 0$
$\Leftrightarrow (x^2-5x+5)^2-1+1{,}001 > 0$
$\Leftrightarrow (x^2-5x+5)^2+0{,}001 > 0.$
Неједнакост је тачна за свако реално x.

13. Доказати да не постоје реални бројеви a, b, c, d такви да је $a-b^2 > \frac{1}{4}$, $b-c^2 > \frac{1}{4}$, $c-d^2 > \frac{1}{4}$, $d-a^2 > \frac{1}{4}$.

Решење:
Ако дате неједнакости важе, тада је $a+b+c+d-a^2-b^2-c^2-d^2 > 1$, односно $(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2+(d-\frac{1}{2})^2 < 0$, што није тачно.
Значи да не постоје реални бројеви a, b, c, d за које важе горње неједнакости.

14. Ако су a, b, p, q, r, s природни бројеви такви да је $q\cdot r-p\cdot s = 1$ и $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$, доказати да је $b \geq q+s$.

Решење:
Из $\frac{p}{q} < \frac{a}{b}$ добијамо $aq-bp > 0$, а из $\frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ следи $br-as > 0$. Пошто су a, b, p, q, r, s цели бројеви, из $aq-bp > 0$ следи $aq-bp > 1$ и слично $br-as \geq 1$.

Сада имамо
$b = b\cdot 1 = b\cdot(qr-ps) = bqr-bps = bqr-aqs+aqs-bps = q\cdot(br-as)+s(aq-bp) \geq q+s$,
што се и тврдило.

15. На путу је колона аутобуса. Аутобус сматрамо препуним ако је у њему више од 50 путника. Контролори Војко и Раде зауставили су колону. Војко је одредио проценат препуних аутобуса, а Раде проценат свих путника у препуним аутобусима у односу на укупан број путника. Чији је проценат већи?

Решење:
Нека је k препуних и l осталих аутобуса. Нека је у препуним аутобусима A путника, а у осталим B. Тада је $A > 50k$, $B \leq 50l$, следи $\frac{A}{k} > 50$, $\frac{B}{l} \leq 50$, па је $\frac{A}{k} > \frac{B}{l}$, а $\frac{B}{A} < \frac{l}{k}$, односно $\frac{B+A}{A} < \frac{l+k}{k}$, па је $\frac{A}{A+B} > \frac{k}{1+k}$. Закључујемо да је $\frac{A}{A+B}\cdot 100\% > \frac{k}{1+k}\cdot 100\%$.

Лева страна је проценат путника у препуном аутобусу, а десна проценат препуних аутобуса. Радетов проценат је већи.

16. Одредити троцифрени број abc ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) за које важи $a+b+c = 9$ и $9a^2+9b^2+9c^2-6abc \leq a^3+b^3+c^3$.

Решење:
Ако дату неједнакост напишемо у облику

$a^2(9-a)+b^2(9-b)+c^2(9-c) \leq 6abc$, јер је $a+b+c = 9$, па је

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \leq 6abc$.

Ако неједнакост поделимо са $ab > 0$, добијамо
$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}) \leq 6$.

Применом Тврђења 1.13. једнакост важи за $a = b = c$.

Тада је $a+b+c = 3a$, па је тражени троцифрени број 333.

2. НЕЈЕДНАКОСТИ БРОЈЕВНИХ СРЕДИНА

„Бројеви владају свемиром.“

(Питагорејци)

Неједнакости између аритметичке, геометријске и хармонијске средине позитивних бројева може се ефикасно искористити у формирању разних доказа неједнакости. Појам аритметичке средине два позитивна броја појавио се још у време Питагорејаца, братства које је основао Питагора (Πυθαγόρας, 580-500 пре нове ере, грчки математичар). Претпоставља се да су знали познату неједнакост између аритметичке и геометријске средине два позитивна броја, али ту неједнакост је доказао Еуклид (*Εὐκλείδης*, 365-300? пре нове ере, грчки математичар). У литератури се могу наћи на десетине различитих доказа те неједнакости. Следећа теорема даје везу између аритметичке и геометријске средине два позитивна броја. Велики значај неједнакости бројевних средина је што могу да се уопште и за n позитивних бројева.

Теорема 2.1.

Ако су a и b позитивни бројеви, тада је $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$, при чему једнакост важи само за $a=b$.

Доказ 1.

Пођимо од очигледне неједнакости $(a-b)^2 \geq 0$ која је еквивалентна следећем низу неједнакости:

$a^2+b^2 \geq 2ab$ (2) често се назива Кошијева неједнакост

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \geq 4ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$

$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$

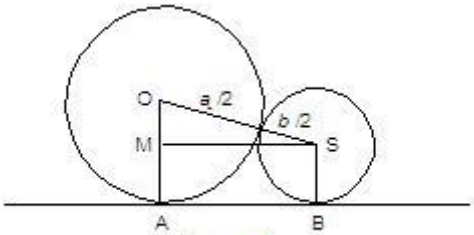
$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Једнакост се постиже само за $a = b$, $(a-b)^2 \geq 0$.

Доказ 2.
Нека су дате кружнице са центрима у тачкама O и S, полупречници су $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, где је $a \geq b$. Кружнице се додирују споља, тачке A и B одређују заједничку спољашњу тангенту тих кружница. Правоугли трапез $ABSO$ има два права угла код темена A и B. Нека је дуж MS паралелна AB.

Тада је у правоуглом троуглу OMS хипотенуза OS дужине $\frac{a+b}{2}$ и катета OM је $\frac{a-b}{2}$. Применом Питагорине теореме је

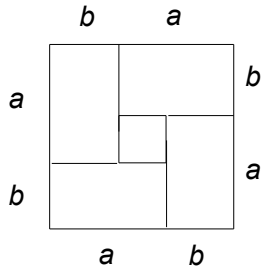
$$|SM| = \sqrt{(\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2} = \sqrt{ab}.$$



Слика 1.

Доказ 3.
Већи квадрат странице $a+b$ има површину $(a+b)^2$, његова површина је већа од површине четири правоугаоника страница a и b, што се може записати као

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$
$$\Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$



Слика 2.

Једнакост је постигнута ако и само ако је површина великог квадрата једнака збиру четири правоугаоника. То важи уколико нема квадрата у средини, односно када је a-b = 0, па је $a = b$.

У задацима примене неједнакости на средине указује се потреба коришћења више од два броја. Зато се уопштење своди на n позитивних бројева.

Дефиниција.
Ако је $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ низ позитивних реалних бројева, тада се:

- Аритметичка средина $A_n(a)$ дефинише се изразом:

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ ;$$

- Геометријска средина $G_n(a)$ дефинише се изразом:

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \ ;$$

- Хармонијска средина $H_n(a)$ дефинише се изразом:

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \ ;$$

- Квадратна средина $K_n(a)$ дефинише се изразом:

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \ .$$

Теорема 2.2. (неједнакост аритметичке и геометријске средине)
Нека је a дата n-торка позитивних бројева, тада је $A_n(a) \geq G_n(a)$, са једнакошћу ако и само ако је $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказ.
Доказаћемо теорему математичком индукцијом. За $n = 2$ неједнакост је облика $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$. Претпоставићемо тачност тврђења за $n = k\text{-}1 \geq 2$, и да је $A_{k\text{-}1}(a) \geq G_{k\text{-}1}(a)$ и докажимо да важи за $n = k$.
Можемо претпоставити да је $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k$. Тада је:

$$(1) \ a_1 = \frac{a_1 + a_1 + ... + a_1}{k} \leq A_\kappa(a) \leq \frac{a_\kappa + a_\kappa + ... + a_\kappa}{k} = a_\kappa$$

Закључујемо да је $a_k\text{-}A_k(a) \geq 0$, односно $a_{1+}a_k\text{-}A_k(a) \geq a_1 > 0$.

Посматрајмо k-1 позитивних бројева $a_2, a_3, ..., a_{k\text{-}1}, a_1 + a_k A_k(a)$ за које примењујемо индукцијску претпоставку $A_{k\text{-}1}(a) > G_{k\text{-}1}(a)$. Добијамо:

$$\frac{a_2 + a_3 + ... + a_{k-1} + a_k - A_k(a)}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{k-1}(a_1 + a_k - A_k(a))} \ .$$

Пошто је $a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k = k \cdot A_k(a)$, претходна неједнакост постаје

$$\frac{k \cdot A_k(a) - A_k(a)}{k-1} = A_k(a) \geq \sqrt[k-1]{a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{k-1}(a_1 + a_k - A_k(a))}\,.$$

Одавде следи да је

$A_k^{k-1}(a) \geq a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a))$, односно

$A_k^k(a) \geq A_k(a) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a))$.

Покажимо сада да је

(2) $A_k(a) \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{k-1} \cdot (a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{k-1} \cdot a_k = G_k^k(a)$.

Ако неједнакост поделимо са $a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{k-1} > 0$ добијамо еквивалентну неједнакост

$A_k(a) \cdot (a_1 + a_k - A_k(a)) \geq a_1 \cdot a_k$

$\Leftrightarrow A_k(a) \cdot (a_1) - a_1 \cdot a_k + A_k(a) \cdot (a_k - A_k(a)) \geq 0$

$\Leftrightarrow -a_1 \cdot (a_k - A_k(a)) \cdot (a_k - A_k(a)) \geq 0$

$\Leftrightarrow (A_k(a) - a_1) \cdot (a_k - A_k(a)) \geq 0$.

На основу (1) су $A_k(a)$-a_1 и a_k-$A_k(a)$ позитивни бројеви, као и њихов производ.

Претходна неједнакост је тачна, као и неједнакост (2).

Закључујемо да је $A_k^k(a) \geq G_k^k(a)$, односно $A_k(a) \geq G_k(a)$.

Једнакост $A_n(a) = G_n(a)$ важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ако би два броја из низа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ била различита, $a_1 \neq a_2$, тада је

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + ... + a_n}{n}$$

$$\geq \left(\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$\geq (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$ јер је $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Теорема 2.3. (неједнакост геометријске и хармонијске средине)

Ако су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви, тада је $G_n(a) \geq H_n(a)$, односно

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}\,.$$

Једнакост важи само за $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказ.

Неједнакост (GA) за бројеве $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$ гласи

$$(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{a_n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Према Теореми 2.1., једнакост важи само за $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = ... = \frac{1}{a_n}$,

односно $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Одатле је тражена неједнакост

$$G_n(a) = (a_1, a_2, ..., a_n) \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = H_n(a).$$

Теорема 2.4. (неједнакост аритметичке и квадратне средине, AK)
Ако су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви, тада је $A_n(a) \leq K_n(a)$, односно

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Једнакост важи само за $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказ.
Ако у идентитету

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_n + a_2a_3 + ... + a_2a_n + ... + a_{n-1}a_n)$$

применимо $a_1 \cdot a_2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$ на десној страни неједнакости,

за a_i, a_k где је $1 \leq i, k \leq n$, па је $2a_i \cdot a_k \leq a_i^2 + a_k^2$, добијамо неједнакост

$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$.

Како је $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, следи да је $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$

односно

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} = K_n(a).$$

Једнакост $K_n(a) = A_n(a)$ је испуњена за $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ако претпоставимо да су бар два броја из низа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различита, $a_1 \neq a_2$, тада је

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

$$\leq\sqrt{\frac{2(\frac{a_1+a_2}{2})+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}}<\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$ јер је

$$\frac{(a_1+a_2)^2}{2}<a_1^2+a_2^2.$$

На основу Теорема 2.2., 2.3. и 2.4. добијамо неједнакост

$$\boxed{H_n(a)\leq G_n(a)\leq A_n(a)\leq K_n(a).}$$

Теорема 2.5.
Ако је $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ низ реалних бројева, тада је
$min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq H_n(a)$.

Доказ.
Можемо претпоставити да је $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n$. (1)
Тада је $min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = a_1$.

На основу неједнакости (1) је $\frac{a_1}{a_2}\leq 1, \frac{a_1}{a_3}\leq 1, \ldots, \frac{a_1}{a_n}\leq 1$.

Следи $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\leq 1+1+\ldots+1=n$, па је

$a_1\cdot(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n})\leq n$, односно $a_1\leq\frac{n}{\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=H_n(a)$.

Теорема 2.6.
Ако је $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ низ реалних бројева, тада је
$K_n(a) \leq max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Доказ.
Претпоставимо да је $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n$, из чега следи
$a_1^2<a_2^2<\ldots<a_n^2$, односно $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\leq n\cdot a_n^2$, па је

$$K_n(a)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\leq a_n.$$

Закључујемо да је
$min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a) \leq max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

3. ПРИМЕНА НЕЈЕДНАКОСТИ БРОЈЕВНИХ СРЕДИНА

„ У математици треба памтити процес мишљења,а не формуле.“
(В. П. Ермаков)

При решавању математичких задатака могу се користити неједнакости средина. Заступљене су код једначина, неједначина, једнакости, неједнакости, одређивања минималних и максималних вредности величина (проблеми екстремних вредности). Применом неједнакости бројевних средина, могу да се избегну озбиљније теме као регресивна индукција или Јенсенова (*Jensen,* 1859-1925, дански математичар) неједнакост.

1.Доказати да за низ реалних бројева $a = (a_1, a_2,\ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2,\ldots, b_n)$ важи неједнакост

(1) $G_n(a)+G_n(b) \le G_n(a+b)$, односно
$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}+\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n)}\ .$$

Решење:

Нека је $x_k=\dfrac{a_к}{a_к+b_к}$, $y=\dfrac{b_к}{a_к+b_к}$ ($k = 1, 2,\ldots, n$).

Треба доказати $\sqrt[n]{x_1,\ldots, x_n}+\sqrt[n]{y_1,\ldots, y_n}\le 1$.

Из неједнакости између геометријске и аритметичке средине је

$$\sqrt[n]{x_1, x_2,\ldots, x_n}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\ \text{ и }\ \sqrt[n]{y_1, y_2,\ldots, y_n}\le\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\ .$$

Сабирањем ових неједнакости, узевши у обзир да је $x_k+y_k = 1$ ($k = 1,2,\ldots n$), добијамо да је

$$\sqrt[n]{x_1, x_2,\ldots, x_n}+\sqrt[n]{y_1, y_2,\ldots, y_n}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}=1,$$

па важи неједнакост (1).

2. Доказати да збир позитивног броја и његове реципрочне вредности никада није мањи од броја 2.
Други начин решавања задатка је показан у тврђењу 1.13.

Решење:

Неједнакост је облика $x+\frac{1}{x}\geq 2$. Према неједнакости која повезује аритметичку и геометријску средину за бројеве x и $\frac{1}{x}$ је $\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\geq\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$, односно $x+\frac{1}{x}\geq 2$. Једнакост важи само ако је $x=\frac{1}{x}$, а то је за $x = 1$.

3. Ако су *a, b, c* произвољни, међусобно различити бројеви, доказати да важе неједнакости:
а) $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c) > 8abc$
б) $\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\sqrt{2}$
в) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$.

Решење:
а) Применом неједнакости аритметичке и геометријске средине добијамо да је $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ и $a+c\geq 2\sqrt{ac}$.
Множењем тих неједнакости добијамо да је
$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c)\geq 8\sqrt{ab\cdot bc\cdot ac}=8abc$.

б) Применом неједнакости аритметичке и геометријске средине је

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\cdot(\sqrt{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b}})^{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\cdot(\frac{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c)}{abc})^{\frac{1}{6}}$$

Користећи неједнакост доказану у задатку 3. под а), добија се

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\cdot\sqrt[6]{8}=3\cdot(2^3)^{\frac{1}{6}}=3\cdot\sqrt{2}.$$

в) Применом неједнакости аритметичке и геометријске средине за бројеве $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ добија се $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3\sqrt[3]{1}=3$.

Знак неједнакости важи ако је $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$.

Из $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ добијамо $b^2=ac$, из $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$ је $a^2=bc$.

Ако поделимо ове две једнакости, добијамо да је $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a}{b}$,

односно $b^3 = a^3$, па је $a = b$. Слично се добија и за $a = c$.

4. Доказати неједнакост $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$, где су *a, b, c* реални позитивни бројеви.

Решење: Применом неједнакости аритметичке и хармонијске средине

за бројеве a, b и c, добијамо да је $\frac{a+b+c}{3}>\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Множењем неједнакости са $3\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{a+b+c}$ добија се тражена неједнакост.

Једнакост важи за $a = b = c$.

5. Доказати неједнакост $(\frac{n+1}{2})^2>n!$ ($n\geq 2$).

Решење:
Ако за позитивне бројеве 1, 2,…, n применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине, добијамо да је
$\frac{1+2+...+n}{n}>\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}=\sqrt[n]{n!}$.

Како је $1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, степеновањем са n добија се
$(\frac{n\cdot(n+1)}{2})^n>(\sqrt[n]{n!})^n$.

Закључујемо да је

$$\left(\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n}\right)^n > n!$$, на основу чега се добија тражена неједнакост.

6. Доказати неједнакост $3n\cdot(3n+1)^2 > 4\cdot\sqrt[n]{(3n)!}$**.**

Решење:

Применом познате једнакости $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$, као и везе неједнакости аритметичке и геометријске средине за бројеве 1^3, 2^3,…,n^3 добијамо $\frac{1^3+2^3+...+(3n)^3}{3n} > \sqrt[3n]{1^3\cdot 2^3\cdot...\cdot(3n)^3}$, па је

$\frac{1}{3n}\cdot\frac{(3n)^2\cdot(3n+1)^2}{4} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot...\cdot(3n)}$, односно

$3n\cdot(3n+1)^2 > 4\cdot\sqrt[n]{(3n)!}$.

7. Доказати тачност неједнакости
$(x+y+z)^2 \geq 3\cdot\sqrt{xyz}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$**, где је *x* > 0, *y* > 0 и *z* > 0.**

Решење:
Тачност неједнакости ћемо доказати користећи неједнакост аритметичке и геометријске средине:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$
$$=(x^2+y^2)+(y^2+xz)+(z^2+xy)+\frac{xy+yz}{2}+\frac{yz+zx}{2}+\frac{xz+xy}{2}$$
$$\geq 2\cdot\sqrt{x^2yz}+2\cdot\sqrt{y^2xz}+2\cdot\sqrt{z^2xy}+\sqrt{xy^2z}+\sqrt{yz^2x}+\sqrt{zx^2y}$$
$$=3\cdot(\sqrt{x^2yz}+\sqrt{xy^2z}+\sqrt{xyz^2})$$
$$=3\cdot\sqrt{xyz}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}).$$

Једнакост важи за $x = y = z$.

8. Доказати да за *x*, *y* и *z* реалне бројеве за које је *x* > 0, *y* > 0 и *z* > 0 важи неједнакост $\frac{3xy}{xy+x+y}+\frac{3yz}{yz+y+z}+\frac{3xz}{xz+x+z}\leq 2+\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$ **.**

Решење:
Из неједнакости аритметичке и хармонијске средине три позитивна броја је $\frac{3xy}{xy+x+y}=\frac{3}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\le\frac{1+x+y}{3}$,

$$\frac{3yz}{yz+y+z}=\frac{3}{1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\le\frac{1+y+z}{3},$$

$$\frac{3xz}{xz+x+z}=\frac{3}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}\le\frac{1+x+z}{3}.$$

Сабирањем те три неједнакости добијамо

(1) $$\frac{3xy}{xy+x+y}+\frac{3yz}{yz+y+z}+\frac{3xz}{xz+x+z}\le\frac{3+2\cdot(x+y+z)}{3}=1+\frac{2\cdot(x+y+z)}{3}.$$

Како је $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\ge 0$, после квадрирања добијамо
$2(x+y+z)\le 3+x^2+y^2+z^2$ (2)

На основу (1) и (2) неједнакост је тачна.

9. Доказати тачност неједнакости $x^4+y^4+z^4\ge xyz\cdot(x+y+z)$ за x, y и z позитивне реалне бројеве.

Решење:
Користећи неједнакост квадратне и аритметичке средине за x^2, y^2 и z^2 је
$\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$ квадрирањем неједнакост је

$$x^4+y^4+z^4\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3} \qquad (1)$$

Применом исте неједнакости, ако су чланови x, y и z, тада је
$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\ge\frac{x+y+z}{3}$, односно

$x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}$. Квадрирањем неједнакости добија се

$$(x^2+y^2+z^2)^2\ge\frac{(x+y+z)^4}{9} \qquad (2)$$

На основу неједнакости (1) и (2) је $x^4+y^4+z^4\ge\frac{(x+y+z)^4}{27}$ (3)

Применом неједнакости геометријске и аритметичке средине је $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$. Кубирањем неједнакости је $(x+y+z)^3 \ge 27 \cdot xyz$.
Ако се претходна неједнакост помножи са $x+y+z > 0$,
тада је $(x+y+z)^4 \ge 27 \cdot xyz \cdot (x+y+z)$.

Користећи неједнакост (3) добија се $x^4+y^4+z^4 \ge xyz \cdot (x+y+z)$.

10. Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви чији је збир 1, доказати да за сваки поститван број a важи неједнакост

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \ge \frac{n^2}{2}.$$

Решење:
Применом неједнакости аритметичке и геометријске средине добијамо да је

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \ge n\sqrt[n]{\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}\cdot\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}}$$

$$=\frac{n}{\sqrt[n]{(x_1+x_2)\cdot(x_2+x_3)\cdot\ldots\cdot(x_n+x_1)}}$$

$$\ge \frac{n}{\frac{(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+\ldots+(x_n+x_1)}{n}}$$

$$=\frac{n^2}{2\cdot(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n1})}$$

$$=\frac{n^2}{2}.$$

11. Доказати да за реалне позитивне бројеве x, y и z важи неједнакост $(x+y)^2+(x+y+4z)^2 \ge \frac{100xyz}{x+y+z}$.

Решење:
Користећи неједнакост аритметичке и геометријске средине добија се

$$(x+y)^2+(x+y+4z)^2=(x+y)^2+(x+2z+y+2z)^2$$

$$\ge (2\sqrt{xy})^2+(2\sqrt{2xz}+2\sqrt{2yz})^2=4xy+8xz+8yz+16z\sqrt{xy}.$$

Множењем претходне неједнакости са $\frac{x+y+z}{xyz}$ добија се

$$\frac{(x+y)^2+(x+y+4z)^2}{xyz}\cdot(x+y+z)\geq\frac{4xy+8xz+8yz+16z\sqrt{xy}}{xyz}\cdot(x+y+z)$$

$$=(\frac{4}{z}+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}+\frac{16}{\sqrt{xy}})\cdot(x+y+z)$$

$$=8\cdot(\frac{1}{2z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xy}})\cdot(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+z)$$

$$\geq 8\cdot 5\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{2x^2y^2z}}\cdot 5\cdot\sqrt[5]{\frac{x^2y^2z}{16}}=100.$$

Следи тражена неједнакост: $(x+y)^2+(x+y+4z)^2\geq\frac{100xyz}{x+y+z}$.

Једнакост важи када је аритметичка средина једнака геометријској, када је $x = y = 2z$.

12. Ако су *x*, *y* и *z* позитивни бројеви где је *xyz* = 1, доказати неједнакост

$$x^3+y^3+z^3\geq x^2y+y^2z+z^2x.$$

Решење:
Применом неједнакости аритметичке и геометријске средине добија се

$$3\cdot(x^3+y^3+z^3)=(x^3+x^3+y^3)+(y^3+y^3+z^3)+(z^3+z^3+x^3)$$
$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^6y^3}+3\cdot\sqrt[3]{y^6z^3}+3\cdot\sqrt[3]{z^6x^3}$$
$$=3\cdot(x^2y+y^2z+z^2x),\text{ односно, } x^3+y^3+z^3\geq x^2y+y^2z+z^2x.$$

Тиме је доказана тражена неједнакост.
Једнакост важи за $x = y = z$

4. ЛОГАРИТАМСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

„Задржи право да мислиш, јер и погрешно мислити је
боље него не мислити уопште.“
(Хепатија 355-415, грчка математичарка-филозоф)

Реч логаритам је настала од грчке речи *logos* = однос и *arithmos* = број. Са наглим развојем астрономије и морепловства логаритми су се почели примењивати током XV и XVI века у нумеричким прорачунима.

У примени логаритамских неједнакости мора се обратити пажња на област дефинисаности. Неједнакости се трансформишу у неки једноставнији облик користећи особине логаритама. Затим се искористе особине монотоности логаритамских функција, када функција расте и опада. Важи следеће:

1. Ако је $a > 1$, тада је

$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$.

2. Ако је $0 < a < 1$, тада је

$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$

1. Проверити тачност неједнакости

$$2^{\sqrt{\log_2 2011}} < 2011^{\sqrt{\log_{2011} 2}}.$$

Решење: Логаритмовањем леве и десне стране неједнакости, затим користећи особине логаритма,добија се низ еквивалентних неједнакости

$$\log 2^{\sqrt{\log_2 2011}} < \log 2011^{\sqrt{\log_{2011} 2}},$$

$$\sqrt{\log_2 2011} \cdot \log 2 < \sqrt{\log_{2011} 2} \cdot \log 2011,$$

$$\sqrt{\frac{\log 2011}{\log 2}} \cdot \log 2 < \sqrt{\frac{\log 2}{\log 2011}} \cdot \log 2011,$$

$$\sqrt{\log 2011 \cdot \log 2} < \sqrt{\log 2 \cdot \log 2011}.$$

Показана је нетачност бројевне неједнакости.

2. Доказати неједнакост

$$\left(\log_{2009} 2010\right)^{-1} + \left(\log_{2011} 2010\right)^{-1} < 2.$$

Решење:

Применом особина степеновања и логаритмовања лева страна неједнакости постаје

$$\frac{1}{\log_{2009} 2010} + \frac{1}{\log_{2011} 2010} = \log_{2010} 2009 + \log_{2010} 2011 =$$

$$= \log_{2010}(2009 \cdot 2011) = \log_{2010}\left(2010^2 - 1\right) < \log_{2010} 2010^2$$

$$= 2 \cdot \log_{2010} 2011 = 2.$$

3. Доказати да за све природне бројеве *n* важи

$$\log (n + 1) > \frac{\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n}{n}.$$

Решење:

Дата неједнакост је еквивалентна са низом следећих неједнакости.

$$\log(n+1) > \frac{1}{n}\cdot(\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n),$$

$$\log(n+1) > \log(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)^{\frac{1}{n}},$$

$$\log(n+1) > \log(n!)^{\frac{1}{n}},$$

$$(n+1)^n > n!.$$

Претходна неједнакост је последица неједнакости

$n+1>1,\ n+1>2,\ \ldots,\ n+1>n.$

4. Доказати да за све природне бројеве $n \geq 3$ важи

$$\log_{n-1}10 + \log_{n+1}10 > 2\cdot\log_n 10 \qquad (1)$$

Решење:

Применом особине леве стране неједнакости је

$$\log_{n-1}10 + \log_{n+1}10 = \frac{1}{\log_{10}(n-1)} + \frac{1}{\log_{10}(n+1)}.$$

Користећи хармонијску и геометријску средину за a, b > 0, a ≠ b је

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \frac{a+b}{2} \text{ односно } \frac{1}{a}+\frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}.$$

Уводећи смену $a = \log_{10}(n-1)$ и $b = \log_{10}(n+1)$ добија се низ еквивалентних неједнакости.

$$\frac{1}{\log_{10}(n-1)} + \frac{1}{\log_{10}(n+1)} > \frac{4}{\log_{10}(n-1)+\log_{10}(n+1)},$$

$$\frac{1}{\log_{10}(n-1)} + \frac{1}{\log_{10}(n+1)} > \frac{4}{\log_{10}(n-1)\cdot(n+1)},$$

$$\frac{1}{\log_{10}(n-1)} + \frac{1}{\log_{10}(n+1)} > \frac{4}{\log_{10}(n^2-1)},$$

$$\frac{1}{\log_{10}(n-1)}+\frac{1}{\log_{10}(n+1)}>\frac{4}{\log_{10}n^2},$$

$$\frac{1}{\log_{10}(n-1)}+\frac{1}{\log_{10}(n+1)}>\frac{4}{2\cdot\log_{10}n}$$

$$\frac{1}{\log_{10}(n-1)}+\frac{1}{\log_{10}(n+1)}>\frac{2}{\log_{10}n},$$

$$\frac{1}{\log_{10}(n-1)}+\frac{1}{\log_{10}(n+1)}>2\cdot\log_n 10.$$

5. Ако је a > 1, b > 1, c > 1 доказати неједнакост

$$\log_{abc}{}^3 a\cdot\log_{abc}b\cdot\log_{abc}c\le\frac{1}{27}.$$

Решење:

Користећи неједнакост између геометријске и аритметичке средине

$\sqrt[3]{xyz}<\frac{x+y+z}{3}$, $(x, y, z > 0, x\neq y\neq z)$, где је $x=\log_a a=1$,

$y=\log_a b$, $z=\log_a c$

добија се низ еквивалентних неједнакости.

$$\sqrt[3]{\log_a b\cdot\log_a c}<\frac{1}{3}\cdot\left(\log_a a+\log_a b+\log_a c\right),$$

$$\left(\log_a b\cdot\log_a c\right)^{\frac{1}{3}}<\frac{1}{3}\cdot\log_a abc,$$

$$\log_a b\cdot\log_a c<\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{\log^3_{abc}a},$$

$$\log^3_{abc}a\cdot\log_a b\cdot\log_a c<\frac{1}{27}.$$

6. Ако је a > 1, b ≥ 1, x > 0, доказати неједнакост

$$\left(1+\log_a b\right)\cdot\left(\log_{ab}x+1\right)\ge 2\cdot\log_a x. \qquad (1)$$

Решење:

Користећи особину да је $1 + \log_a b > 0$ и делењем неједнакости (1) са $1 + \log_a b$ добија се

$$\log_{ab}^2 x + 1 \geq \frac{2 \cdot \log_a x}{\log_a b + 1},$$

$$\log_{ab}^2 x + 1 \geq \frac{2 \cdot \log_a x}{\log_a b + \log_a a},$$

$$\log_{ab}^2 x + 1 \geq \frac{2 \cdot \log_a x}{\log_a (ab)},$$

$$\log_{ab}^2 x + 1 \geq 2 \cdot \log_{ab} x.$$

Једнакост важи за $ab = x$.

7. Доказати да за $a > 1$, $c > 1$ важи неједнакост

$$3 \cdot \log_c a + \log_a c + \log_{a^2} c > 4.$$

Решење:

Користећи неједнакост $x + \frac{1}{x} \geq 2$, која важи за сваки позитиван број x.

И уводећи смену $x = \log_a c$ добија се да је

$$\log_a c + \log_c a \geq 2,$$

$$2 \cdot \log_c a + \log_{a^2} c \geq 2.$$

Сабирањем претходне две неједнакости добија се тражена неједнакост. Једнакост не може да важи истовремено.

8. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

Решење:

Логаритмовањем неједнакости $10 > \pi^2$,

добија се низ еквивалентних неједнакости,

$\log_\pi 10 > 2 \cdot \log_\pi \pi$,

$\log_\pi 2 + \log_\pi 5 > 2$,

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

9. Доказати да за a > 1, b > 1, c > 1 важи неједнакост

$$\left(1 + \frac{1}{\log_a b \cdot \log_a c}\right) \cdot \log_a bc \geq 4.$$

Решење:

Користећи неједнакост $x + \frac{1}{x} \geq 2$ где је $x = \log_a b$ добија се

$$\log_a b + \frac{1}{\log_a b} \geq 2 \quad \text{и} \quad \log_a c + \frac{1}{\log_a c} \geq 2.$$

Сабирањем претходне две неједнакости је

$$\log_a(bc) + \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a c} \geq 4\ ,$$

$$\log_a(bc) + \frac{\log_a c + \log_a b}{\log_a b \cdot \log_a c} \geq 4\ ,$$

$$\log_a(bc) + \frac{\log_a(cb)}{\log_a b \cdot \log_a c} \geq 4\ ,$$

$$\log_a(bc) \cdot \left(1 + \frac{1}{\log_a b \cdot \log_a c}\right) \geq 4.$$

Једнакост се добија када је a = b = c.

10. Доказати да за $1 < a < b < c$ важи неједнакост

$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$

Решење:

Логаритмовањем неједнакости $b > a$, добија се да је $\log_a b > \log_a a$, односно $\log_a b > 1$. Како је $a < b$ следи да је $\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b)$. Слично је за $a < c$ је $\log_c a < \log_c c$, $\log_c a < 1$, $\log_c(\log_c a) > \log_b(\log_c a)$. Сабирањем добијених неједнакости је

$$\log_a(\log_a b) + \log_c(\log_c a) > \log_b(\log_a b) + \log_b(\log_c a).$$

Додавањем левој и десној страни $\log_b(\log_b c)$ где је $b < c$, добија се

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) >$$
$$> \log_b(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_b(\log_c a).$$

Десна страна неједнакости једнака је

$$\log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b\left(\frac{1}{\log_b a} \cdot \frac{\log_b c}{\log_b b} \cdot \frac{\log_b c}{\log_b c} \cdot \frac{\log_b a}{\log_b c}\right)$$
$$= \log_b 1 = 0.$$

Тиме се добила тражена неједнакост.

11. Доказати неједнакост

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_a b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c} \qquad (1)$$

ако је $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ или $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$.

Решење:

У оба случаја је $\log_b a > 0$, $\log_c b > 0$, $\log_a c > 0$. Користећи неједнакост геометријске и аритметичке средине

$$\sqrt[3]{\frac{xyz}{3}} \le \frac{x+y+z}{3}\ ,\ \text{где је } x = \frac{\log_b a}{a+b}\ ,\ y = \frac{\log_c b}{b+c}\ ,\ z = \frac{\log_a c}{c+a}\ ,$$

добија се неједнакост еквивалентна левој страни неједнакости (1).

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right) \ge 2\cdot\sqrt[3]{\frac{\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}},$$

$$2\cdot\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right) \ge 6\cdot\sqrt[3]{\frac{\log a}{\log b}\cdot\frac{\log b}{\log c}\cdot\frac{\log c}{\log a}\cdot\frac{1}{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}}$$

$$2\cdot\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right) \ge \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}}. \qquad (2)$$

Применом неједнакости геометријске и аритметичке средине за $x_1 = a + b$, $y_1 = b + c$, $z_1 = c + a$ добија се

$$\sqrt[3]{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)} \le \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}.$$

Реципрочна вредност претходне неједнакости је

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}} \ge \frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}.$$

Множењем неједнакости са бројем 6, добија се десна страна неједнакости (1)

$$\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)+(b+c)+(c+a)}} \ge \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}.$$

Односно

$$\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}} \ge \frac{9}{a+b+c}.$$

Користећи претходну неједнакост и неједнакост (2), добија се тражена неједнакост (1).

5. КОШИ-ШВАРЦОВА НЕЈЕДНАКОСТ И ПРИМЕНА

„Која наука може бити лепша, племенитија и за човечанство кориснија од математике.“ (Франклин)

У литератури неједнакост се назива Кошијева (*Cauchy, 1789-1857, француски математичар*) и Коши-Шварцова (*Schwarz, 1843-1921, немачки математичар*) или Коши-Буњаковског (*Буняковский, 1804-1889, руски математичар*) или Коши-Шварц-Буњаковског неједнакост. Неједнакост има примену на вишедимензиони простор што показује следећа теорема.

Теорема 5.1.
Ако су $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ два низа реалних бројева, тада је

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \le (\sum_{k=1}^{n} a_\kappa^2) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_\kappa^2).$$

Знак једнакости важи ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Доказ:
а) алгебарски доказ неједнакости
Посматрамо квадратни полином по x, који је позитиван за свако x:
$(a_1x+b_1)^2 + (a_2x+b_2)^2 + \ldots + (a_nx+b_n)^2 \ge 0$, односно
$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot x^2 + 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \cdot x + (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \ge 0$

Горњи израз је ненегативан за сваки реалан број x и мора испунити услове $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$ и његова дискриминанта не може бити позитивна, односно $D \le 0$. Значи да је
$4 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \le 0$ и
$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$, односно

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \le (\sum_{k=1}^{n} a_\kappa^2) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_\kappa^2).$$

Тиме је неједнакост доказана.

Знак једнакости важи ако су низови a и b пропорционални, односно ако постоји реални број t да је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = t$, односно

$a_1 = b_1t$, $a_2 = b_2t, \ldots$, $a_n = b_nt$, из чега следи да је

$(\sum_{k=1}^{n} b_k t \cdot b_k)^2 \le (\sum_{k=1}^{n} b_\kappa^2 t^2) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_\kappa^2)$, па је.

$t^2 \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^2 \le t^2 \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_\kappa^2) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_\kappa^2)$.

Тиме је једнакост доказана.

б) Геометријски доказ неједнакости

Нека су два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, њихов скаларни производ је

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, односно $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle (\vec{a} \cdot \vec{b})$,

при чему је $|\cos \sphericalangle (\vec{a} \cdot \vec{b})| \le 1$.

Модуо вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$. На основу тога је

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \cdot \cos \sphericalangle (\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

односно

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}} \le 1.$$ Из овога следи

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}.$$

Квадрирањем и леве и десне стране добијамо тражену неједнакост

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \le (\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2}).$$

1. Директна Коши-Шварцове неједнакости је неједнакост аритметичке и квадратне средине.

Доказ:
Нека је $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$. Тада је из неједнакости
$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2}$ добијено да је
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot n}$, односно
$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$, што представља везу између аритметичке и квадратне неједнакости за $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

2. Примена Коши-Шварцове неједнакости на неједнакост аритметичке и хармонијске средине.

Решење:
Нека је $a_1^2 = x_1, \ldots, a_n^2 = x_n$, $x_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) и
$b_1^2 = \frac{1}{x_1}, b_2^2 = \frac{1}{x_2}, \ldots, b_n^2 = \frac{1}{x_n}$.
Уврштавањем у неједнакост $(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \le (\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2})$

добијамо низ еквивалентних неједнакости:

$$(\sqrt{x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \ldots + \sqrt{x_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n}})^2 \le (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n})$$

$$(1 + 1 + \ldots + 1)^2 \le (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n})$$

$$n^2 \le (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n})$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Добијена неједнакост представља неједнакост аритметичке и хармонијске средине.

3. Кошијева неједнакост је специјалан случај неједнакости Минковског (*Minkowski,* 1864-1909, немачки математичар). За произвољне *n*-торке реалних бројева $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ **и** $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ **важи неједнакост** $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_\kappa^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_\kappa^2}$ **.**

Доказ.
Из Коши-Шварцове неједнакости се добија да је

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\ .$$

Ако се и лева и десна страна неједнакости помноже бројем 2, затим им се дода

$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+b_1^2+b_2^2+...+b_n^2$, из тога следи низ еквивалентних

Неједнакости

$$\sum_{k=1}^{n}a_\kappa^2 + 2\sum_{k=1}^{n}a_k b_k + \sum_{k=1}^{n}b_\kappa^2 \le \sum_{k=1}^{n}a_\kappa^2+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_\kappa^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_\kappa^2+|2\cdot a_k\cdot b_k|+b_\kappa^2)-\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_\kappa^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_\kappa^2}\right)^2$$, па је

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_\kappa+b_\kappa)^2} \le \sum_{k=1}^{n}a_\kappa^2+\sum_{k=1}^{n}b_\kappa^2\ .$$

4. Доказати да за свако *x, y, z* > 0 важи неједнакост

$$(x+y+z)\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\ge 9\,.$$

Решење:
Стављајући у Коши-Шварцову неједнакост да је

$a_1=\sqrt{x}, a_2=\sqrt{y}, a_3=\sqrt{z}, b_1=\frac{1}{\sqrt{x}}, b_2=\frac{1}{\sqrt{y}}, b_3=\frac{1}{\sqrt{z}}$. Добијамо

$$(x+y+z)\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2)\cdot((\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2+(\frac{1}{\sqrt{z}})^2)$$

$$\ge(\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\frac{1}{y}+\sqrt{z}\frac{1}{\sqrt{z}})^2=3^2=9.$$

Једнакост важи за *x* = *y* = *z*.

5. Нека је *a*+*b*+*c* = 1. Доказати да је $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$**.**

Решење:
Из Коши-Шварцове неједнакости, где је
$a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, b_1 = b_2 = b_3 = 1$, добијамо
$1 = (a+b+c)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)\cdot(1+1+1)$, из чега следи да је
$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

6. Доказати неједнакост $x\cdot\sqrt{x^2+z^2}+y\cdot\sqrt{y^2+z^2} \leq x^2+y^2+z^2$**.**

Решење:
Применом Коши-Шварцове неједнакости, где је

$a_1 = x, a_2 = \sqrt{y^2+z^2}, b_1 = \sqrt{x^2+z^2}, b_2 = y.$

Добија се неједнакост

$x\cdot\sqrt{x^2+z^2}+y\cdot\sqrt{y^2+z^2} \leq$

$\leq \sqrt{x^2+\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2+y^2} = x^2+y^2+z^2.$

7. Доказати неједнакост $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$**.**

Решење:
Нека је $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, b_1 = b, b_2 = c, b_3 = a$, па применом
Коши-Шварцове неједнакости добија се
$(ab+bc+ac)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)\cdot(a^2+b^2+c^2)$, па је
$ab+bc+ac \leq \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} = a^2+b^2+c^2$.

8. Ако су *x*, *y*, *z* реални бројеви такви да је *x*+*y*+*z* = 6, доказати да је $x^2+y^2+z^2 \geq 12$**.**

Решење:
Користећи Коши-Шварцову неједнакост код које је
$a_1 = a_2 = a_3 = 1, b_1 = x, b_2 = y, b_3 = z$ тада је

$(x+y+z)^2 \le (1^2+1^2+1^2)\cdot(x^2+y^2+z^2)$, $6^2 \le 3\cdot(x^2+y^2+z^2)$, па следи $x^2+y^2+z^2 \ge 12$.

9. Нека су $x_1, x_2, ..., x_n$ ненегативни реални бројеви такви да је $x_1+x_2+...+x_n=1$. Доказати неједнакост $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n} \le \sqrt{n}$.

Решење:
Применом Коши-Шварцове неједнакости добијамо низ еквивалентних неједнакости:

$$(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n})^2 = (1\cdot\sqrt{x_1}+1\cdot\sqrt{x_2}+...+1\cdot\sqrt{x_n})^2 \le$$
$$\le (1^2+1^2+...+1^2)\cdot(\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}+...+\sqrt{x_n^2}),$$

$$(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n})^2 \le n\cdot(x_1+x_1+...+x_n).$$

Користећи услов задатка да је $x_1+x_2+...+x_n=1$, добијамо $(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n})^2 \le n$, а кореновањем неједнакости добијамо $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+...+\sqrt{x_n} \le \sqrt{n}$, што је тражена неједнакост.

10. Нека су $a,b,c \in \left[-\frac{1}{4},\infty\right)$, такви да је *a+b+c* = 1.

Доказати неједнакост $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le 5$.

Решење:
Нека је $a_1=a_2=a_3=1, b_1=\sqrt{4a+1}, b_2=\sqrt{4b+1}, b_3=\sqrt{4c+1}$.

Према неједнакости добијамо низ еквивалентних неједнакости:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{4a+1}\right)^2+\left(\sqrt{4b+1}\right)^2+\left(\sqrt{4c+1}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{4\cdot(a+b+c)+3}, \quad a+b+c=1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le \sqrt{21}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le 5.$$

11. Ако су *a, b, c* реални бројеви, тада је
$abc\cdot(a+b+c)\le a^3b+b^3c+c^3a$**. Доказати.**

Решење:
Из израза

$$(a+b+c)^2\le\left(\frac{a}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}+\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{c}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}\right)^2\le\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right)\cdot(c+a+b)$$

следи

$(a+b+c)^2\le\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$. Множењем неједнакости са *abc* следи
$abc\cdot(a+b+c)\le a^3b+b^3c+c^3a$**.**

12. Ако су *x, y, z* реални бројеви такви да је *x+y+z* = 4 и
$x^2+y^2+z^2=6$**, показати да они припадају интервалу** $\left[\frac{2}{3},2\right]$**.**

Решење:
Дате једнакости напишимо у облику $y+z=4-x$, $y^2+z^2=6-x^2$.
Применом Коши-Шварцове неједнакости где је $a_1=a_2=1$, $b_1=y$, $b_2=z$, следи
$(4-x)^2=(y+z)^2\le(1^2+1^2)\cdot(y^2+z^2)=2\cdot(6-x^2)$.
Даље из $(4-x)^2\le 2\cdot(6-x^2)$ следи $3x^2-8x+4\le 0$.
Нуле полинома су $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=3$, тако да је *x* из интервала $\left[\frac{2}{3},2\right]$.
Како су *x, y, z* симетрични бројеви у обе једнакости, бројеви *y* и *z* су такође из интервала $\left[\frac{2}{3},2\right]$.

13. Ако су *a, b, c* странице троугла, *s* полуобим, доказати
$(a^3+b^3+c^3)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})>4s^2$**.**

Решење:
Применом Коши-Шварцове неједнакости где је
$a_1=a, a_2=b, a_3=c, b_1=\frac{1}{a}, b_2=\frac{1}{b}, b_3=\frac{1}{c}$, закључујемо да је

$$(a^3+b^3+c^3)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})>a^2+b^2+c^2>(a+b+c)^2=(2s)^2=4s^2.$$

14. Доказати да за сваки троугао страница *a, b, c* и тежишних дужи t_a, t_b, t_c важи неједнакост $at_a + bt_b + ct_c \le \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$, а једнакост ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Решење:
У Кошијевој неједнакости нека је $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $b_1 = t_a$, $b_2 = t_b$, $b_3 = t_c$. Добија се неједнакост

$$\left(a \cdot t_a + b \cdot t_b + c \cdot t_c\right)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) \qquad (1)$$

Ако су t_a', t_b', t_c' растојања између тежишта T и редом темена A, B, C, имамо

$t_a' = \frac{2}{3} t_a$, па следи $t_a = \frac{3}{2} t_a'$, затим $t_b' = \frac{2}{3} t_b$ и $t_b = \frac{3}{2} t_b'$,

односно $t_c' = \frac{2}{3} t_c$ и $t_c = \frac{3}{2} t_c'$.

Како је

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}, \quad t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},$$

одавде следи да је

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Из неједнакости (1) и предходне једнакости добија се

$$at_a + bt_b + ct_c \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Тиме је тражена неједнакост доказана.

15. Ако су *a, b, c* реални позитивни бројеви за које важи *a+b+c*=1, доказати да важи неједнакост $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \ge \frac{1}{2}$.

Решење:
Користећи Коши-Шварцову неједнакост где је

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{a+b}}, \quad a_2 = \frac{b}{\sqrt{b+c}}, \quad a_3 = \frac{c}{\sqrt{c+a}}, \quad b_1 = \sqrt{a+b}, \quad b_2 = \sqrt{b+c},$$

$$b_3 = \sqrt{c+a}.$$

Добијамо

$$(a+b+c)^2 \le \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \right) \cdot ((a+b)+(b+c)+(c+a)),$$ па је

$$\frac{(a+b+c)^2}{2} \le \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a},$$ онда је

$$\frac{a+b+c}{2} \le \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}.$$

Користећи услов задатка $a+b+c=1$, добија се тражена неједнакост.

Једнакост важи само ако је $a = b = c = \frac{1}{3}$.

6. ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

„Аритметика и геометрија су крила математике. Оне су основа свих наука које се баве величинама. Када дођемо до неког резултата, да бисмо га употребили , морамо га изразити бројевима и линијама. Ако га изразимо бројевима, служимо се аритметиком, ако га изражавамо линијама, служимо се геометријом.“

(Лагранж, Lagrange, 1736- 1813, италијанско-француски математичар)

Примена неједнакости у геометрији подразумева неједнакости везане за елементе троугла, многоугла, или неке друге геометријске фигуре (пирамиде, купе, лопте, итд). Проблеми везани за геометријске неједнакости могу бити веома компликовани. У многим случајевима решавање задатака подразумева употребу доста сложеног рачунског, уместо искључиво алгебарског метода.

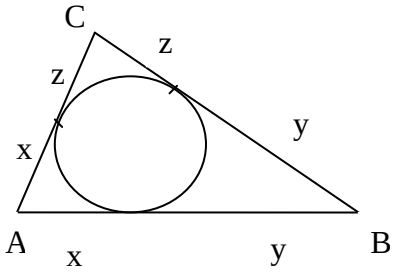
Шири смисао, геометријске неједнакости је свака неједнакост која се односи на геометријски цртеж.

6. 1. Неједнакости за елементе троугла

Најједноставније геометријске неједнакости су „неједнакости троугла“. Ако су a, b, c дужине страница троугла тада је $a + b > c$, $b + c > a$ и $c + a > b$ или $|a - b| < c < a + b$.

Многе неједнакости које се односе на странице a, b, c троугла, могу се доказати тако што се величине a, b, c изразе преко три позитивна броја.

Нека су x, y, z тангенте дужи из темена A, B и C троугла ABC на његов уписан круг (Слика 3.). Из тога је $a = y + z$, $b = x + z$, $c = y + z$ $(x, y, z > 0)$. Важи и обратно, ако важе претходне три једнакости тада су a, b и c странице троугла. Полуобим троугла је $S = \frac{a+b+c}{2}$, дносно $S = x + y + z$.



Слика 3.

Неке од следећих неједнакости имају велику примену.

1. Доказати да је збир тежишних дужи троугла већи од полуобима, а мањи од обима тог троугла.

Решење:

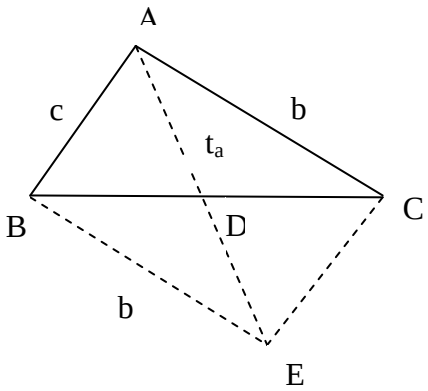
Потребно је доказати неједнакост

$$\frac{a+b+c}{2} < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

Нека су у троуглу ABC, дужине страница a, b, c и тежишна дуж $t_a = AD$. Из троугла ABD је $t_a > c - \frac{a}{2}$, а из троугла ADC је $t_a > b - \frac{a}{2}$.

Сабирањем тих неједнакости је

$$t_a > \frac{b+c-a}{2}.$$



Слика 4.

Са друге стране, ако продужимо тежишну дуж AD преко тачке D до E, где је AD = DE , из троугла ABE је $t_a < \frac{b+c}{2}$. Закључујемо да је

$\frac{b+c-a}{2} < t_a < \frac{b+c}{2}$, слично томе је

$\frac{a+c-b}{2} < t_b < \frac{a+c}{2}$ и

$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$.

Сабирањем тих неједнакости, добија се тражена неједнакост.

2. Доказати да у сваком троуглу чије су странице a, b, c и полуобим S, важе неједнакости:

а) $(a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + c - b) \leq abc$

б) $\frac{2S}{abc} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Решење:

а) Користећи „неједнакост троугла“ где је $a > b - c$, $b > c - a$, $c > a - b$ и квадрирањем неједнакости добија се

$a^2 > (b - c)^2$ односно $a^2 - (b - c)^2 \leq a^2$, па је $\sqrt{a^2 - (b - c)^2} \leq a$ (1)

$b^2 > (c - a)^2$ односно $b^2 - (c - a)^2 \leq b^2$, па је $\sqrt{b^2 - (c - a)^2} \leq b$ (2)

$c^2 > (a - b)^2$ односно $c^2 - (a - b)^2 \leq c^2$, па је $\sqrt{c^2 - (a - b)^2} \leq c$ (3)

Множењем неједнакости (1), (2) и (3) добија се

$$\sqrt{(a + b - c)^2 \cdot (b + c - a)^2 \cdot (a + c - b)^2} \leq abc,$$

А то је тражена неједнакост. Једнакост важи за једнакостраничан троугао.

б) Применом једнакости

$$\frac{2S}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \quad \text{и} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

добија се тражена неједнакост.

3. У сваком троуглу чије су странице a, b, c и полуобим S важе неједнакости:

а) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq S$

б) $(S-a)(S-b) + (S-b)(S-c) + (S-c)(S-a) \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$

ц) $(S-a)(S-b)(S-c) \leq \frac{abc}{8}$.

Решење:

а) Применом неједнакости хармонијске и аритметичке средине два позитивна броја је

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2} \quad \text{то јест} \quad \frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}, \ \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4},$$

$$\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \quad \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}.$$

Збир претходне три неједнакости је

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}, \ \text{односно} \ \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq S.$$

Једнакост важи за једнакостраничан троугао.

б) Нека је $x = S - a$, $y = S - b$, $z = S - c$, тада је

$$x = S - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} > 0,$$

јер је збир две странице већи од треће.

Слично томе је

$$y = S - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2} > 0 \quad \text{и}$$

$$z = S - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} > 0 .$$

Користећи неједнакост на x и y из задатка 3. под а), добија се

$$\frac{(S-a)(S-b)}{(S-a)+(S-b)} \le \frac{S-a+S-b}{4}$$, како је $2S - a - b = c$,

закључујемо да је $(S-a)(S-b) \le \frac{c^2}{4}$.

На сличан начин се добија $(S-b)(S-c) \le \frac{a^2}{4}$ и $(S-c)(S-a) \le \frac{b^2}{4}$.

Сабирањем претходне три неједнакости добија се тражена.

ц) Ако се помноже претходне три неједнакости, добија се

$$(S-a)^2(S-b)^2(S-c)^2 \le \frac{a^2b^2c^2}{64} .$$

Када се примени кореновање на неједнакост добија се тражена неједнакост. Једнакост важи за $a = b = c$.

4. Ако су h_a, h_b, h_c одговарајуће висине и r полупречник уписане кружнице троугла. Доказати:

а) $h_a \cdot h_b \cdot h_c \ge 27\, r^3$

б) $h_a + h_b + h_c \ge 9\, r$

Решење:

а) Користећи образац за површину троугла

$$P = \frac{r}{2}\ (a + b + c) = \frac{ah_a}{2} + \frac{bh_b}{2} + \frac{ch_c}{2}$$

Добија се да је

$$r = \frac{2P}{a + b + c} \quad \text{и} \quad h_a \cdot h_b \cdot h_c = \frac{2P}{a} \cdot \frac{2P}{b} \cdot \frac{2P}{c} = \frac{8P^3}{abc} \qquad (1)$$

Применом неједнакости геометријске и аритметичке средине за странице троугла је

$$\frac{(a + b + c)}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}\ .$$

Користећи једнакост (1) и претходну неједнакост је

$$\frac{8P^3}{abc} \geq 27 \cdot \frac{8P^3}{(a + b + c)^3}\ , \text{ односно } (a + b + c)^3 \geq 27\ abc.$$

Тиме је неједнакост доказана. Једнакост важи када је a = b = c.

б) Користећи једнакост

$$\frac{P}{h_a} + \frac{P}{h_b} + \frac{P}{h_c} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \quad \text{па је}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a + b + c}{2P} = \frac{a + b + c}{r \cdot (a + b + c)} = \frac{1}{r}\ .$$

Применом неједнакости хармонијске и аритметичке средине је

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} = \frac{3}{\frac{1}{r}} = 3r,\ h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

Једнакост важи за једнакостраничан троугао.

5. У сваком оштроуглом троуглу постоје два угла чија је разлика мања од $\frac{\pi}{6}$.

Решење:

Претпоставимо да тврђење није тачно, да је $\alpha - \beta \geq \frac{\pi}{6}$ и $\beta - \gamma \geq \frac{\pi}{6}$.

Сабирањем неједнакости добија се $\alpha - \gamma \geq \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{6}$, односно, $\alpha \geq \gamma + \frac{\pi}{3}$.

Како је $\pi = \alpha + \beta + \gamma \geq \beta + 2\gamma + \frac{\pi}{3}$ следи $\beta + 2\gamma \leq \frac{2\pi}{3}$.

Користећи неједнакост $-\beta + \gamma \leq -\frac{\pi}{6}$, следи $\gamma \leq \frac{\pi}{6}$.

Из $\pi = \alpha + \beta + \gamma \leq \alpha + \beta + \frac{\pi}{6}$ следи $\alpha + \beta \geq \frac{5\pi}{6}$, односно $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.

Закључујемо да је то супротно претпоставци да је троугао оштроугли, тиме је тврђење доказано.

6. Ако је $a < \frac{1}{2}(b + c)$ онда је $\alpha < \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$.

Доказати да неједнакост важи за сваки троугао чије су странице a, b, c и одговарајући углови α, β, γ.

Решење:

Користећи особину да је $-1 \leq \sin\beta \leq 1$ и $-1 \leq \sin\gamma \leq 1$ добијамо неједнакост $\sin\alpha < \frac{1}{2} \cdot (\sin\beta + \sin\gamma)$. Применом трансформације збира функције синус у производ добија се $\sin\alpha < \frac{1}{2} \cdot 2 \sin\frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2}$.

Како је $\sin\frac{\beta - \gamma}{2} \leq 1$ следи да је $\sin\alpha < \sin\frac{\beta + \gamma}{2}$.

Из услова задатка угао α је оштар, углови β и γ су такође оштри.

У противном њихов збир би био већи од π.

7. Доказати да за троугао ABC важи неједнакост

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Решење:

Применом косинусне теореме на троугао ABC добија се да је

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$ делењем једнакости са ab је $2\cos\alpha + \frac{a^2}{bc} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$.

Користећи Тврђење 1.13. $(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2)$ добија се

$\frac{a^2}{bc}\geq 2\,(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Аналогно томе је $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$,

односно $\frac{b^2}{ac}\geq 4\sin^2\frac{\beta}{2}$ и $\frac{c^2}{ab}\geq 4\sin^2\frac{\gamma}{2}$.

Сабирањем претходне три неједнакости добија се тражена неједнакост. Једнакост важи за једнакостраничан троугао.

8. Ако су α, β, γ унутрашњи углови троугла ABC, доказати да важи неједнакост

$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\gamma}+\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin\beta}}+\frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}}\geq 3.$$

Решење:

Нека су a, b, c странице троугла. Из неједнакости $a < b + c$ закључујемо

$\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$, јер је $a < b + c$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b + 2\sqrt{bc} + c} = \sqrt{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Применом синусне теореме нека је

$$x = \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{b}{2R}} + \sqrt{\frac{c}{2R}} - \sqrt{\frac{a}{2R}} = \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}\right)$$

односно $x = \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha} > 0$.

Аналогно томе је $y = \sqrt{\sin\gamma} + \sqrt{\sin\alpha} - \sqrt{\sin\beta} > 0$ и

$z = \sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} - \sqrt{\sin\gamma} > 0$.

При томе је $\sqrt{\sin\alpha} = \frac{y+z}{2}$, $\sqrt{\sin\beta} = \frac{z+x}{2}$, $\sqrt{\sin\gamma} = \frac{x+y}{2}$.

Лева страна неједнакости која се доказује је

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}\right).$$

Користећи Тврђење 1. 13. добија се десна страна претходне једнакости $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$. Тиме је доказана неједнакост.

Једнакост важи за $\sqrt{\sin\alpha} = \sqrt{\sin\beta} = \sqrt{\sin\gamma}$,

односно за $a = b = c$ код једнакостраничног троугла.

9. Ако су α, β и γ углови троугла, доказати неједнакост

$$\mathbf{tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2} \geq 1.}$$

Решење:

Како је $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, односно, $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$, применом тригонометријских трансформација добија се

$$tg\frac{y}{2} = tg\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = ctg\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1 - tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2}},$$ односно

$$tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\beta}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} = 1.$$

Уводећи смену $x = tg\frac{\alpha}{2}$, $y = tg\frac{\beta}{2}$, $z = tg\frac{\gamma}{2}$ у претходну једнакост, добија се $xy + yz + xz = 1$.

Применом познате неједнакости $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$,

која је тачна, јер је $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$,

то јест $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$.

Добија се да је $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$, тиме је доказана тражена неједнакост.

Једнакост важи ако је $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$, односно $\alpha = \beta = \gamma = 60^o$

(једнакостраничан троугао).

10. Ако су a, b, c странице троугла и α, β, γ одговарајући углови (изражени у радијанима), доказати да је

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2} .$$

Решење:

а) Доказ леве стране неједнакости.

Ако је $a \geq b$, тада је $\alpha \geq \beta$ односно $(a - b)(\alpha - \beta) \geq 0$. Једнакост важи ако је $a = b$. Слично томе је $(b - c)(\beta - \gamma) \geq 0$ и $(c - a)(\gamma - \alpha) \geq 0$.

Сабирањем претходне три неједнакости је

$(a - b)(\alpha - \beta) + (b - c)(\beta - \gamma) + (c - a)(\gamma - \alpha) \geq 0$,

једнакост важи за $a = b = c$.

Користећи услов $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, претходна неједнакост се трансформише, па је $a(2\alpha - \beta - \gamma) + b(2\beta - \gamma - \alpha) + c(2\gamma - \alpha - \beta) \geq 0$,

то јест $a(3\alpha - \pi) + b(3\beta - \pi) + c(3\gamma - \pi) \geq 0$,

односно $3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq \pi(a + b + c)$ из тога је

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3} .$$

Једнакост важи само ако је троугао једнакостраничан.

б) Доказ десне стране неједнакости.

Пошто је збир две странице већи од треће, следи

$(b + c - a) \cdot \alpha + (c + a - b) \cdot \beta + (a + b - c) \cdot \gamma > 0$, па је

$a(\beta + \gamma - \alpha) + b(\gamma + \alpha - \beta) + c(\alpha + \beta - \gamma) > 0$,

$a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0$,

$\pi(a + b + c) > 2 \cdot (a\alpha + b\beta + c\gamma)$,

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Тиме је доказана тражена неједнакост.

11. Доказати да за углове α, β, γ троугла важи неједнакост

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}.$$

Решење:

Примењујући тригонометријску формулу двоструког угла

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ на неједнакост, добија се

$\frac{1 - \cos\alpha}{2} + \frac{1 - \cos\beta}{2} + \frac{1 - \cos\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}$, односно

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Користећи једнакости

$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ и

$\cos\gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) = -2 \cdot \cos^2\frac{\alpha + \beta}{2} + 1$,

Неједнакост (1) је еквивалентна са

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} \le \frac{1}{4}$, односно са

$\frac{1}{4}\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$,

што је увек тачно. Тиме је дата неједнакост доказана.

Једнакост важи за једнакостраничан троугао.

6. 2. Примена неједнакости на правоугли троугао

1. Доказати да је у правоуглом троуглу збир кубова катета мањи од куба хипотенузе.

Решење:

Из неједнакости $a < c$ и $b < c$ следи $a^3 < a^2c$ и $b^3 < b^2c$. Сабирањем неједнакости је $a^3 + b^3 < c(a^2 + b^2) = c \cdot c^2 = c^3$. Тиме је доказана тражена неједнакост, $a^3 + b^3 < c^3$. Задатак би се могао уопштити, за сваки природан број $n > 2$, је $a^n + b^n < c^n$. Како је $a^{n-2} < c^{n-2}$ и $b^{n-2} < c^{n-2}$, множењем неједнакости са a^2 и b^2 добија се да је $a^n < a^2 c^{n-2}$ и $b^n < b^2 c^{n-2}$. Збир неједнакости је $a^n + b^n < c^{n-2}(a^2 + b^2) = c^{n-2} \cdot c^2 = c^n$.

2. Доказати да је у правоуглом троуглу збир катета мањи од $c\sqrt{2}$.

Решење:

Како је $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2}$, закључујемо да је

$2c^2 > (a + b)^2$, односно тражена неједнакост $a + b < c\sqrt{2}$.

Једнакост би важила за једнокрако правоугли троугао.

3. У правоуглом троуглу збир хипотенузе и висине над хипотенузом је већи од збира катета. Доказати.

Решење:

Применом неједнакости $c > a$ и $c > b$ је $c - a > 0$ и $c - b > 0$,

односно $(c - a)(c - b) > 0$, па је $c^2 + ab > c(a + b)$.

Делењем неједнакости са $c > 0$ је

$$c + \frac{ab}{c} > a + b.$$

Применом формуле за површину троугла је $h = \frac{ab}{c}$, тиме је претходна неједнакост

$c + h > a + b$, што је требало доказати.

4. Доказати да у било ком правоуглом троуглу важи $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ где је r полупречник уписане кружнице и h висина над хипотенузом.

Решење:

Користећи формулу за површину троугла $P = \frac{1}{2} c\, h = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r$

добија се да је $\frac{r}{h} = \frac{c}{a + b + c}$. Како је $a + b > c$, значи да је $\frac{r}{h} < \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$.

Користећи да је $a^2 + b^2 \geq \geq (a + b)^2$ и $c^2 = a^2 + b^2$ следи да је

$2c^2 \geq (a + b)^2$, то јест $a + b \leq c\sqrt{2}$. Из наведених неједнакости је

$$\frac{r}{h} \geq \frac{c}{c\sqrt{2} + c} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41 > 0{,}4.$$

Тиме је доказана тражена неједнакост.

5. За правоугли троугао важи неједнакост:

а) $R + r \geq \sqrt{2P}$ б) $R \geq r(1 + \sqrt{2})$

где је R полупречник описане кружнице, r полупречник уписане кружнице и P површина троугла.

Решење:

Како је $P = r \cdot s = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$ и $P = \frac{ab}{2}$ значи да је $r = \frac{ab}{a+b+c}$.

Код правоуглог троугла је $R = \frac{c}{2}$ и добија се

$$R + r = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c} = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a+b-c}{a+b-c}$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} = \frac{c}{2} + \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Применом аритметичке и геометријске средине је

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, односно

$R + r \geq \sqrt{ab}$ односно

$R + r \geq \sqrt{2P}$.

Тиме је тражена једнакост доказана.

Једнакост важи када је a = b.

б) Користећи неједнакости $a + b \leq c\sqrt{2}$ из задатка 2, множењем неједнакости са $1 + \sqrt{2}$, добија се

$(a + b)(1 + \sqrt{2}) \leq c\sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{2}) = c(\sqrt{2} + 2) = c(1 + \sqrt{2}) + c$, односно

$(a + b - c)(1 + \sqrt{2}) \leq c$.

Користећи да је $R = \frac{c}{2}$ и $r = \frac{a + b - c}{2}$ добија се

$2r(1 + \sqrt{2}) \leq 2R$ из тога је $R \geq r(1 + \sqrt{2})$, тиме је доказана неједнакост. Једнакост важи за $a = b$, где је $c = a\sqrt{2}$ и $R = r(1 + \sqrt{2})$.

6. За тежишне дужи t_a и t_b правоуглог троугла чије су катете a и b, хипотенуза c, важе неједнакости:

а) $\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2$

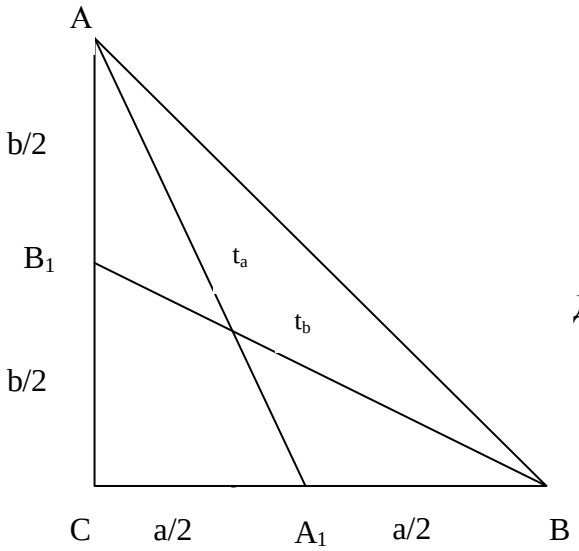
б) $\frac{t_a + t_b}{a + b} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$

ц) $t_a \cdot t_b \geq \frac{5}{2} \cdot P$

д) $\frac{t_a + t_b}{t_c} \leq \sqrt{10}$.

Решење:

а) Применом Питагорине теореме на правоугли троугао CAA_1 и BCB_1 је



$$t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \quad \text{и}$$

$$t_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 \qquad (1)$$

Дељењем ових једнакости је

$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{a^2 + 4b^2}{4a^2 + b^2}.$$

Слика 5.

Тада је $\frac{a^2+4b^2}{4a^2+b^2} = \frac{4\cdot\left(4a^2+b^2\right)-16a^2-4b^2+a^2+4b^2}{4a^2+b^2} = 4 - \frac{15a^2}{4a^2+b^2} < 4$, односно

$\frac{t_a}{t_b} < 2.$

Како је $\frac{a^2+4b^2}{b^2+4a^2} = \frac{1}{4} + \frac{15b^2}{4(4a^2+b^2)} > \frac{1}{4}$ из тога следи да је

$\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b}$.

Тиме је доказана тражена неједнакост.

б) Сабирањем једнакости (1) је

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2+b^2) \qquad (2)$$

Њиховим множењем је

$$t_a^2 \cdot t_b^2 = \frac{1}{4}(a^4+b^4) + \frac{17}{16}a^2b^2 \qquad (3)$$

Како је $(a^2-b^2)^2 \geq 0$ следи

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \qquad (4)$$

Користећи релације (3) и (4) је

$t_a^2 \cdot t_b^2 \geq \frac{1}{4}2a^2b^2 + \frac{17}{16}a^2b^2$, па је

$t_a^2 \cdot t_b^2 \geq \frac{25}{16}a^2b^2$, следи

$$t_a \cdot t_b \geq \frac{5}{4}ab. \qquad (5)$$

Применом једнакости (2) и (5) је

$$(t_a+t_b)^2 = t_a^2 + t_b^2 + 2t_at_b \geq \frac{5}{4}(a^2+b^2) + \frac{5}{2}ab = \frac{5}{4}(a+b)^2.$$

Закључујемо да је $t_a + t_b \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a + b)$, односно

$$\frac{t_a + t_b}{a + b} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

ц) Множењем једнакости (1) је

$$t_a^2 \cdot t_b^2 = \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)\left(\frac{b^2}{4} + a^2\right) = \frac{1}{16}(4a^4 + a^2b^2 + 16a^2b^2 + 4b^4) =$$

$$\frac{1}{16}[4(a^2 + b^2)^2 + 9a^2b^2] \qquad (6)$$

Применом познатих формула $2P = ab = c \cdot h$ и $c^2 = a^2 + b^2$ је

$$t_a^2 \cdot t_b^2 = \frac{1}{16}(h^2 + 9c^2h^2) = \frac{1}{16}h^2(1 + 9c^2).$$

Како је $c > 2h$, следи $9c^2 > 4h^2$, односно

$$t_a^2 \cdot t_b^2 \geq \frac{4}{16}h^2 \text{ односно } t_a \cdot t_b \geq \frac{1}{2}h.$$

Из једнакости (6) је $t_a^2t_b^2 = \frac{1}{16}(4c^4 + 9a^2b^2)$.

Користећи да је $c \geq 2h$ и једнакост добија се

$$t_a^2 \cdot t_b^2 \geq \frac{25c^2h^2}{16} = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{ch}{2}\right)^2 \text{ односно } t_a \cdot t_b \geq \frac{5}{2} \cdot P.$$

д) Како је $(t_a - t_b)^2 \geq 0$ односно $t_a^2 - 2t_at_b + t_b^2 \geq 0$.

Сабирањем једнакости (2) и

$t_a^2 + t_b^2 \geq 2t_at_b$ добија се

$$2 \cdot (t_a^2 + t_b^2) \geq 2t_a \cdot t_b + t_a^2 + t_b^2,$$

$$2 \cdot (t_a^2 + t_b^2) \geq (t_a + t_b)^2,$$

$$t_a + t_b \leq \sqrt{2 \cdot (t_a^2 + t_b^2)}. \qquad (7)$$

Користећи једнакост (2) где је

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{5}{4}\ c^2 = \frac{5}{4} \cdot (2t_c)^2 = 5t_c^2\ ,$$

када се уврсти у неједнакост (7), добија се

$$t_a + t_b \le \sqrt{2 \cdot 5 \cdot t_c^2} = t_c\sqrt{10} \quad \text{па је} \quad \frac{t_a + t_b}{t_c} \le \sqrt{10}\ .$$

Једнакост важи за a = b, односно једнакокраки правоугли троугао где је

$$t_a^2 = \frac{5a^2}{4}\ ,\ t_b^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \text{и} \quad c = a\sqrt{2}\ .$$

7. За правоугли троугао важи $\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} > \frac{2ab}{c^2}$ где су α и β оштри углови, a и b катете и c је хипотенуза. Доказати.

Решење:

Из неједнакости аритметичке и геометријске средине је

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \ge \sqrt{\sin\alpha \cdot \sin\beta}\ ,$$

$$\frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \ge \sqrt{\sin\alpha \cdot \sin\beta}\ ,$$

$$\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \ge \sqrt{\sin\alpha \cdot \sin\beta}\ .$$

Како је α + β = 90º следи да је $\sin\frac{(\alpha + \beta)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \ge \sqrt{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$

$$\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} \ge \sin\alpha \cdot \sin\beta\ ,$$

$$\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} \ge 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta\ ,$$

$$\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} \ge 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}\ .$$

Једнакост важи за sinα = sinβ односно α = β = 45º.

8. Круг уписан у правоугли троугао хипотенузе c додирује краке оштрог угла у тачкама M и N. Доказати да је MN < 2c $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Решење:

Нека је круг уписан у правоугли троугао ABC хипотенузе c = AB, круг додирује краке оштрог угла $\alpha = \measuredangle BAC$ у тачкама M и *N*.

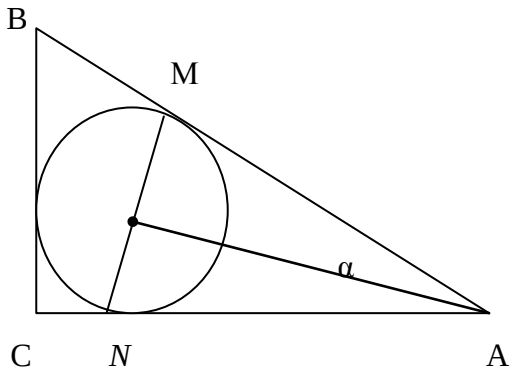
Тада је $AM = \frac{1}{2} \cdot (AB + AC - BC)$,

$AM = \frac{c}{2} \cdot (1 + \cos\alpha - \sin\alpha)$ и

$MN = 2AM \sin\frac{\alpha}{2}$,

$MN = c \cos\frac{\alpha}{2} (1 + \cos\alpha - \sin\alpha)$,

$MN = c \sin\alpha (\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2})$,



Слика 6.

$MN = c \sqrt{\sin^2\alpha (1 - \sin\alpha)}$,

$MN = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin\alpha \cdot \sin\alpha(2 - 2\sin\alpha)}$,

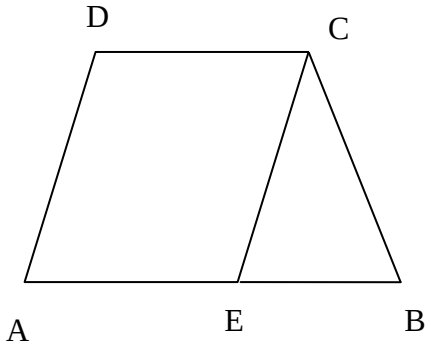
$MN \le \frac{c}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sin\alpha + \sin\alpha + (2 - \sin\alpha)}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ и $MN \le \frac{2\sqrt{3}\, c}{9}$.

6. 3. Примена неједнакости на неке многоуглове

1. Доказати да је разлика основица трапеза већа од разлике његових кракова.

Решење:

Нека је ABCD трапез код кога је AB || CD, AB > CD и тачка E припада основици AB, где је AE = CD.Четвороугао AECD је паралелограм, па је CE = AD, BE = AB - CD. За троугао BCE мора важити неједнакост BE > |BC - CE |. Тиме је доказана неједнакост AB – CD > |BC - AD|.



Слика 7.

2. У сваком конвексном четвороуглу збир дијагонала је већи од збира две наспрамне странице.

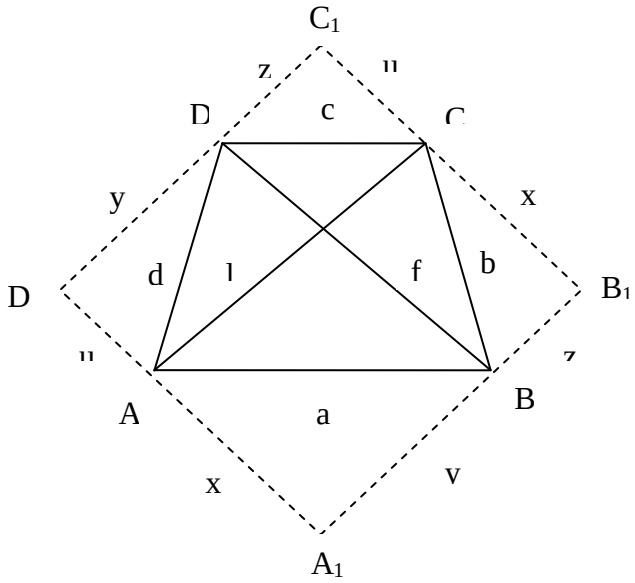
Решење:

У датом четвороуглу ABCD, ако су дијагонале AC = l, BD = f; тврдимо да је l + f > a + c или l + f > b + d. Кроз темена B и D четвороугла одредимо A_1B_1 тако да је A_1B_1 || C_1D_1 || AC.

Кроз темена A и C одредимо дуж B_1C_1 где је $B_1C_1 \parallel A_1D_1 \parallel BD$. У паралелограму AA_1B_1C је $AA_1 = CB_1 = x$, у паралелограму ACC_1D_1 је $AD_1 = CC_1 = u$, у паралелограму A_1BDD_1 је $A_1B = D_1D = y$, у паралелограму BB_1C_1D је $BB_1 = DC_1 = z$. Из троуглова AA_1B, BB_1C, CC_1D и ADD_1 је $x + y > a$, $x + z > b$, $z + u > c$, $y + u > d$.

Сабирањем прве и треће, затим друге и четврте неједнакости је $x + y + z + u > a + c$ и $x + y + z + u > b + d$. Како је $y + z = l$, $x + u = f$ заменом у неједнакости је $l + f > a + c$ и $l + f > b + d$.

Тиме је доказана неједнакост.



Слика 8.

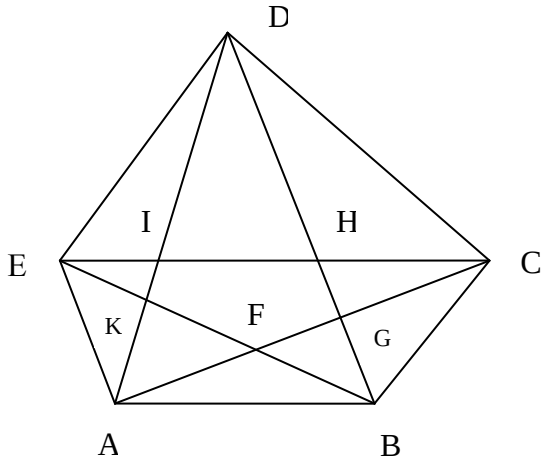
3. Доказати да је збир дијагонала петоугла већи од његовог обима, а мањи од двоструког обима.

Решење:

Како је у ΔAFD, $AB < AF + FB$;

ΔBCG, $BC < BG + GC$; ΔCDH, $CD < CH + HD$;

ΔDEI, $DE < DI + IE$; ΔEAK, $EA < EK + KA$.



Слика 9.

Сабирањем тих неједнакости, добија се

AB + BC + CD + DE + EA < AF + FB + BG + GC + CH + HD + DI +

+ EK + KA,

AB + BC + CD + DE + EA < (AF + FG + GC) + (BG + GH + HD) +

+(GH + HI + IE)+ (CH + HI + IE) + (DI + IK + KA) + (EK + KF + FB),

AB + BC + CD + DE + EA < AC +BD + CE + DA + EB.

Тиме је доказано да је збир дијагонала већи од збира страница.

За други део неједнакости, користи се неједнакост за

ΔABC, AC < AB + BC; ΔBCD, BD < BC + CD;

ΔCDE, CE < CD + DE; ΔDEA, DA < DE + EA;

ΔEAB, EB < EA + AB.

Из тога закључујемо да је

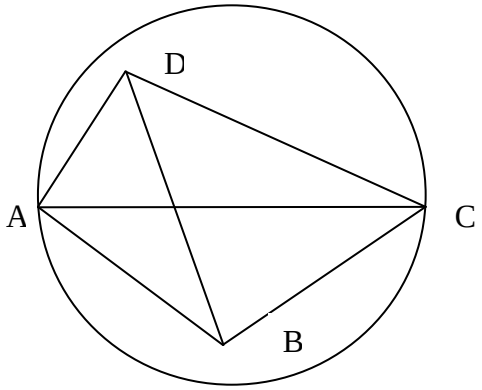
AC + BD + CE + DA + EB < 2 · (AB + BC + CD + DE + GA).

Тиме је збир дијагонала мањи од двоструког обима, па је неједнакост доказана.

4. У конвексном четвороуглу три угла су тупа. Доказати да је дијагонала која полази из четвртог темена већа од друге дијагонале.

Решење:

Нека су у конвексном четвороуглу ABCD, углови ADC и ABC повучени над већом дијагоналом AC тупи. Опишимо круг око дијагонале AC. Тада углови ADC и ABC припадају унутрашњости круга и за дијагоналу BD важи неједнакост BD < AC.



Слика10.

5. Неједнакост Птоломеја

(старогрчки астроном и математичар, око 100-178 н.е.)

Ако су A, B, C, D било које четири тачке у равни тада важи неједнакост $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$. Једнакост важи ако и само ако је четвороугао ABCD тетивни са дијагоналама AC и BD или су тачке A, B, C, D колинеарне, где једна од тачака B и D лежи између тачака A и C, а друга не.

Доказ.

Нека је M тачка у равни таква да су троуглови CMB и CDA слични и исто оријентисани. Тада је

$$\frac{CM}{BC} = \frac{CD}{AC} \text{ и } \measuredangle BCM = \measuredangle ACD.$$

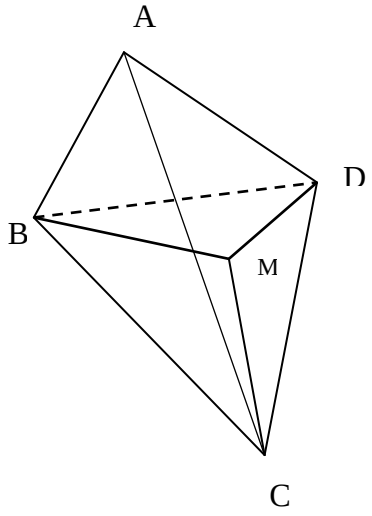
Одатле следи да је

$$\frac{CM}{DC} = \frac{CB}{AC} \text{ и } \measuredangle DCM = \measuredangle ACB.$$

Значи да су и троуглови CMD и CBA слични.

Због наведених сличност је

$$BM = \frac{BC \cdot AD}{AC} \text{ и } MD = \frac{CD \cdot AB}{AC}.$$



Слика 11.

Из неједнакости троугла $BM + MD \geq BD$ је

$$\frac{BC \cdot AD}{AC} + \frac{CD \cdot AB}{AC} \geq BD \text{ и } AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

Једнакост би важила када су тачке B, M и D колинеарне, тада би $\measuredangle CBD = \measuredangle CAD$, четвороугао ABCD би био тетиван.

6. (Неједнакост паралелограма)

За произвољне тачке A, B, C, D у простору важи неједнакост

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2$.

Једнакост важи ако и само ако су A, B, C, D темена паралелограма.

Доказ:

Нека су тачке $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$ у правоуглом координатном систему дате својим координатама. Задата неједнакост је збир неједнакости

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2 \geq (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2,$$
$$(y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (y_4 - y_1)^2 \geq (y_1 - y_3)^2 + (y_2 - y_4)^2,$$
$$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (z_1 - z_4)^2 + (z_4 - z_1)^2 \geq (z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_4)^2.$$

Неједнакости су еквивалентне са

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0,\ \ (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2 \geq 0 \ \text{ и } \ (z_1 - z_2 + z_3 - z_4)^2 \geq 0.$$

Из тога следи тврђење.

Једнакост је испуњена када је

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0,$$

односно ако и само ако је ABCD паралелограм.

7. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвексног четвороугла. Доказати да важи: $\mathbf{P \leq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$ **.**

Решење:

Нека је ABCD конвексан четвороугао са страницама AB = a, BC = b, CD = c, DA = d и нека су β и δ његови унутрашњи углови код темена B и D. Тада се површина четвороугла може изразити тригонометријски:

$$P = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \sin\beta + \frac{1}{2}\, c \cdot d \cdot \sin\delta \leq \frac{1}{2}\,(ab + cd) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2}\right).$$

Једнакост важи ако и само ако је дати четвороугао квадрат.

8. Конвексан *n*-тоугао је разложен на троуглове. У сваки од тих троуглова уписан је круг. Доказати да је збир полупречника тих кругова већи или једнак од $\frac{P}{S}$, где је P површина и S полуобим *n*-тоугла.

Решење:

Нека је дати *n*-тоугао разложен на троуглове T_i где је i = 1, 2, 3, ..., k, површина троугла T_i нека је P_i, полуобим s_i и полупречник уписаног круга са r_i. Како је за свако i, $r_i = \frac{P_i}{s_i}$. Тада полуобим било ког троугла ABC садржаног у конвексном *n*-тоуглу обима s може бити највише једнак s. Тада је $s_i \leq s$ за свако i важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{P_i}{s_i} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{P_i}{s} = \frac{P}{S}.$$

9. Дијагонале конвексног четвороугла ABCD се секу у тачки O. Нека су S_1 и S_2 површине троуглова AOB и COD, а S површина четвороугла ABCD. Тада важи неједнакост $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$.

Решење:

Нека је OA = a, OB = b, OC = c, OD = d и $\measuredangle COD = \alpha$.

Тада је $S_1 = \frac{ab}{2} \cdot \sin\alpha$, $S_2 = \frac{cd}{2} \cdot \sin\alpha$ и $S = \frac{(a+c)\cdot(b+d)}{2} \cdot \sin\alpha$.

Како је $\sin\alpha > 0$, користећи неједнакост $(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0$ која је еквивалентна са

$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)\cdot(b+d)}$ добија се $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$.

Једнакост важи ако и само ако је ad = bc, односно a : b = c : d, а то је испуњено ако и само ако је четвороугао ABCD трапез.

10. Дијагонала AC сече дијагоналу BD конвексног четвороугла ABCD у њеном средишту S. У троуглове ABS, BCS, CDS, DAS уписане су редом кружнице полупречника r_1, r_2, r_3, r_4.

Доказати да је: $\left| r_1 - r_2 + r_3 - r_4 \right| \leq \frac{1}{8} \left| AB - BC + CD - DA \right|$.

Решење:

Користећи познате формуле за површину

$$P_{SAB} = \frac{r_1}{2} \cdot (SA + SB + SC),$$

$$P_{SBC} = \frac{r_2}{2} \cdot (SB + SC + BC),$$

$$P_{SCD} = \frac{r_3}{2} \cdot (SC + SD + CD),$$

$$P_{SDA} = \frac{r_4}{2} \cdot (SD + SA + DA).$$

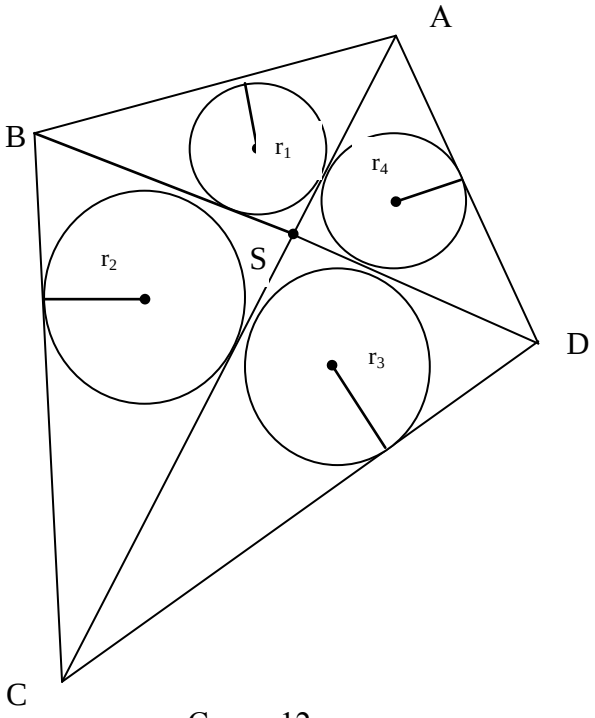
Полупречници уписаних кругова су

$$r_1 = \frac{2 \cdot P_{SAB}}{SA + SB + SC},$$

$$r_2 = \frac{2 \cdot P_{SBC}}{SB + SC + BC},$$

$$r_3 = \frac{2 \cdot P_{SCD}}{SC + SD + CD},$$

$$r_4 = \frac{2 \cdot P_{SDA}}{SD + SA + DA}.$$



Слика 12.

Како је SB = SD, површине троуглова SAB и SDA су једнаке, као и површине троуглова SBC и SDC. Посматрајући разлику

$$\left| r_1 - r_4 \right| = 2 \cdot P_{SAB} \cdot \left| \frac{1}{SA + SB + AB} - \frac{1}{SA + SD + AD} \right|$$

$$= \frac{2 \cdot P_{SAB} \cdot \left| AB - AD \right|}{(SA + SB + AB) \cdot (SA + SD + AD)} \qquad (1)$$

На другој страни производ дужине две странице било ког троугла је увек већи или једнак његовој површини.

Користећи да је SB = SD следи

$$(SA + SB + AB) \cdot (SA + SD + AD) =$$
$$= (SA + SB)^2 + AB \cdot SA + AD \cdot SA + AB \cdot SB + AD \cdot SD + AB \cdot AD \geq$$
$$\geq 8 \cdot P_{SAB} + 2 \cdot P_{SAB} + 2 \cdot P_{SAD} + 2 \cdot P_{SAB} + 2 \cdot P_{SAD} + 2 \cdot P_{DAB} = 20 \cdot P_{SAB}.$$

Користећи (1) добија се да је $\left| r_1 - r_4 \right| \leq \frac{1}{10} \cdot \left| AB - AD \right|$.

Слично томе је $\left| r_2 - r_3 \right| \leq \frac{1}{10} \cdot \left| CB - CD \right|$.

За такав четвороугао је AB > AD ако и само ако је CD > CB.

Сабирањем претходних неједнакости је

$$\left| r_1 - r_2 + r_3 - r_4 \right| \leq \left| r_1 - r_4 \right| + \left| r_2 - r_3 \right| \leq \frac{1}{10} \cdot \left(\left| AB - AD \right| + \left| CD - CB \right| \right)$$

$= \frac{1}{10} \cdot \left| AB - BC + CD - DA \right|$ односно тражена неједнакост је

$$\left| r_1 - r_2 + r_3 - r_4 \right| \leq \frac{1}{8} \cdot \left| AB - BC + CD - DA \right|.$$

11. Нека је ABCD тетивни четвороугао, доказати да је :

$$\left| AB - CD \right| + \left| AD - BC \right| \geq 2 \cdot \left| AC - BD \right|.$$

Решење:

Нека је пресек дијагонала AC и BD тачка S.

Како је

$\sphericalangle SAB = \sphericalangle CAB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle SDC$

$\sphericalangle ABS = \sphericalangle ABD = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DCS$

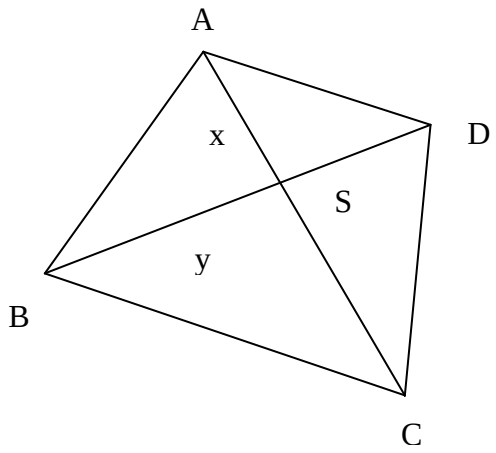
троуглови SAB и SDC су слични,

па је

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AS}{DS} = \frac{BS}{CS}.$$

Нека је AS = x и BS = y тада је

$$CS = y \cdot \frac{CD}{AB} \text{ и } DS = x \cdot \frac{CD}{AB}.$$



Слика 13.

Разлика $|AC - BD| = |AS + SC - BS - SD|$

$$= \left|x + y \cdot \frac{CD}{AB} - y + x \cdot \frac{CD}{AB}\right|$$

$$= \frac{|x - y|}{AB} \cdot |AB - CD|.$$

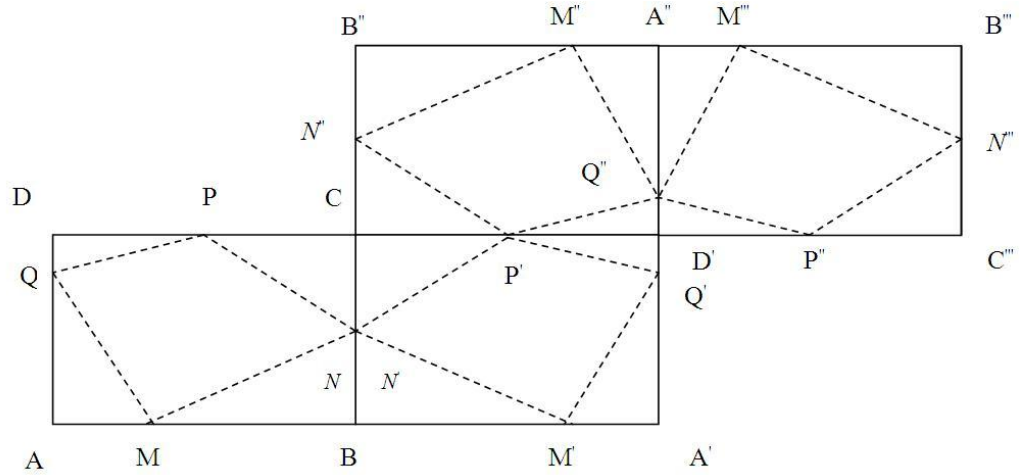
Странице троугла ABS су x, y и AB па је $|x - y| < AB$. Користећи предходну неједнакост добија се $|AC - BD| \leq |AB - CD|$, значи да је $|AB - CD| \geq |AC - BD|$. Слично томе је $|AC - BD| \leq |AD - BC|$ то јест $|AD - BC| \geq |AC - BD|$.

Сабирањем неједнакости је $|AB - CD| + |AD - BC| \geq 2 \cdot |AC - BD|$.

12. У правоугаоник је уписан четвороугао тако да се на свакој страници правоугаоника налази по једно теме тог четвороугла. Доказати да обим уписаног четвороугла није мањи од збира дијагонала правоугаоника.

Решење:

Нека је ABCD дати правоугаоник и M*N*PQ уписани четвороугао где је M ∈ AB, *N* ∈ BC, P ∈ CD, Q ∈ DA. Пресликајмо ABCD симетријом у односу на страницу BC у правоугаоник $A'BCD'$, затим тај правоугаоник симетријом у односу на страницу CD' у правоугаоник $A''B''CD'$, њега у односу на $D'A''$ у $A''B'''C'''D'$.



Слика 14.

При тим пресликавањима нека се произвољна тачка X преслика у X', затим у X'' и у X'''. Обим уписаног четвороугла је једнак дужини изломљене линије $MNP'Q''M'''$ која није мања од растојања MM''', а ово је једнако збиру дијагонала полазног правоугаоника ABCD.

13. Ако је ABCDEF конвексан шестоугао такав да је AB паралелно са ED, BC паралелно са FE и CD паралелно са AF. Нека су R_A, R_C, R_E полупречници кругова описаних око троуглова FAB, BCD, DEF и O обим шестоугла, доказати неједнакост $R_A + R_C + R_E \geq \frac{O}{2}$.

Решење:

Нека су P и Q подножја нормала из темена A на праве BC и FE, а R и S подножја нормала из темена D на праве BC и FE.

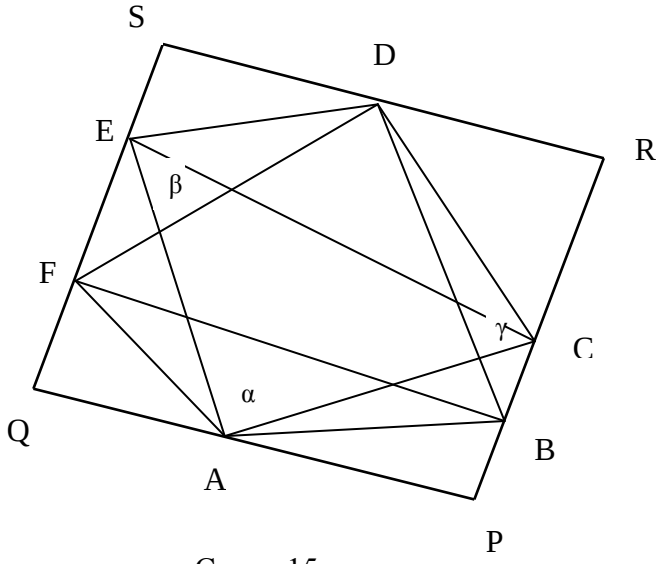
Ако је $\measuredangle FAB = \measuredangle CDE = \alpha$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF = \beta$, $\measuredangle BCD = \measuredangle EFA = \gamma$.

Применом синусне теореме је $FB = 2 \cdot R_A \cdot \sin\alpha$. Како је

$FB \geq PQ$, $FB \geq AQ + AP$, $FB \geq FA \cdot \sin\gamma + AB \cdot \sin\beta$,

$2 \cdot R_A \geq FA \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + AB \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Слично $FB \geq SR$, $FB \geq DS + DR$,

$FB \geq ED \cdot \sin\alpha + CD \cdot \sin\gamma$, $2 \cdot R_A \geq ED \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} + CD \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.



Слика 15.

Применом неједнакости за R_E и R_C, добијају се исте неједнакости.

Њихов збир је

$$4 \cdot R_A + 4 \cdot R_E + 4 \cdot R_C \geq (AB + ED) \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) + (BC + FE) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + (CD + FA) \cdot \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right).$$

Користећи неједнакост $x + \frac{1}{x} \geq 2$ за свако $x > 0$, десна страна последње неједнакости није мања од $2 \cdot O$. Закључујемо $4R_A + 4R_E + 4R_C \geq 2 \cdot O$, односно $R_A + R_E + R_C \geq \frac{O}{2}$. Једнакост важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma$ и $BF \perp BC$, $DB \perp DE$, $FD \perp FA$. Односно ако и само ако је шестоугао ABCDEF правилан.

6. 4. Стереометријске неједнакости

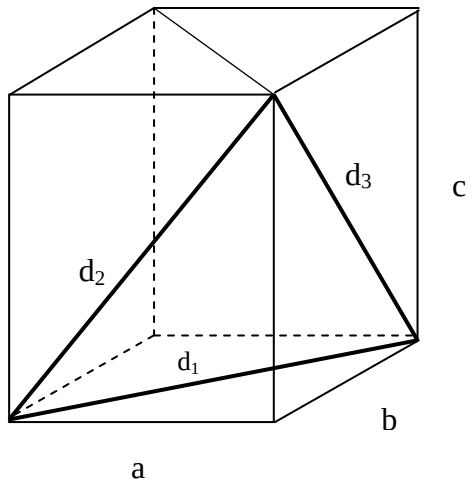
1. Нека су a, b, c дужине страница квадра, а d_1, d_2, d_3 дужине дијагонала страна квадра. Доказати да важи неједнакост

$d_1 + d_2 + d_3 \geq \sqrt{2} \cdot (a + b + c)$.

Решење:

На основу Питагорине теореме је

$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$, $d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$.



Слика 16.

Применом квадратне и аритметичке средине је

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}\ ,\ \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} \geq \frac{a+c}{2}\ ,\ \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq \frac{b+c}{2}\ .$$

Закључујемо да је $d_1 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$, $d_2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c)$, $d_3 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$.

Сабирањем тих неједнакости је $d_1 + d_2 + d_3 \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2a + 2b + 2c)$,

односно $d_1 + d_2 + d_3 \geq \sqrt{2}\,(a + b + c)$.

Једнакост важи када је квадратна средина једнака аритметичкој, када је $a = b = c$, када је коцка у питању.

2. За сваки ваљак висине H, полупречника основе r, површине P и запремине V, важи неједнакост $P^3 \geq 54 \cdot \pi \cdot V^2$.

Решење:

Из познатих једнакости $P = 2r\pi\,(r + H)$ и $V = r^2\pi H$ следи

$$P = 2\pi \cdot \left(r^2 + \frac{V}{rH}\right) = 2\pi \cdot \left(r^2 + \frac{V}{2r\pi} + \frac{V}{2r\pi}\right). \qquad (1)$$

Применом аритметичко-геометријске средине је

$$r^2 + \frac{V}{2r\pi} + \frac{V}{2r\pi} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{V}{2r\pi} \cdot \frac{V}{2r\pi}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}\ . \qquad (2)$$

Користећи неједнакост (1) и (2) добија се да је $\frac{P}{2\pi} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$.

Кубирањем неједнакости је $\frac{P^3}{8\pi^3} \geq 27 \cdot \frac{V^2}{4\pi^2}$, ако се неједнакост помножи са $8\pi^3 \geq 0$ тада је $P^3 \geq 27 \cdot 2V^2$ односно $P^3 \geq 54V^2$.

Једнакост важи за ваљак чији је осни пресек квадрат.

3. Збир дужина пречника основе и висине купе је 18. Од свих таквих купа одредити површину оне која има највећу запремину.

Решење:

Нека је r полупречник базе, а H висина купе. Њена запремина је

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H = \frac{\pi}{3} \left(\sqrt[3]{r^2 H}\right)^3 = \frac{\pi}{3} \left(\sqrt[3]{r \cdot r \cdot H}\right)^3.$$

Применом аритметичко-геометријске средине за три позитивна броја, познато је да геометријска средина није већа од аритметичке средине, односно

$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$, при чему једнакост важи за $a = b = c$. Из тога се добија

$$V^3 \leq \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{r+r+H}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{18}{3}\right)^3 = 72 \cdot \pi .$$

Једнакост је тачна ако је R = H = 6. Тада усправна купа има највећу запремину. Према Питагориној теореми за правоугли троугао где је хипотенуза s изводница, а катете су r и H па је $s^2 = r^2 + H^2$, односно $s = 6\sqrt{2}$. Површина купе је

$$P = r^2\pi + r\pi s = r\pi (r + s) = 6\pi (6 + 6\sqrt{2}) = 36\pi (1 + \sqrt{2}).$$

4. Да ли се може направити кутија у облику квадра чија је запремина 0,4 m^2, а збир свих ивица квадра 2 m?

Решење:

Применом аритметичко-геометријске средине за ивице квадра a, b, c је

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ односно $\frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{0,4}$, односно $8 \geq 27 \cdot 0,4$ то јест

$2 \geq 27 \cdot 0,1$, односно $2 \geq 2,7$ што је супротно претпоставци.Закључак је да се не може направити кутија.

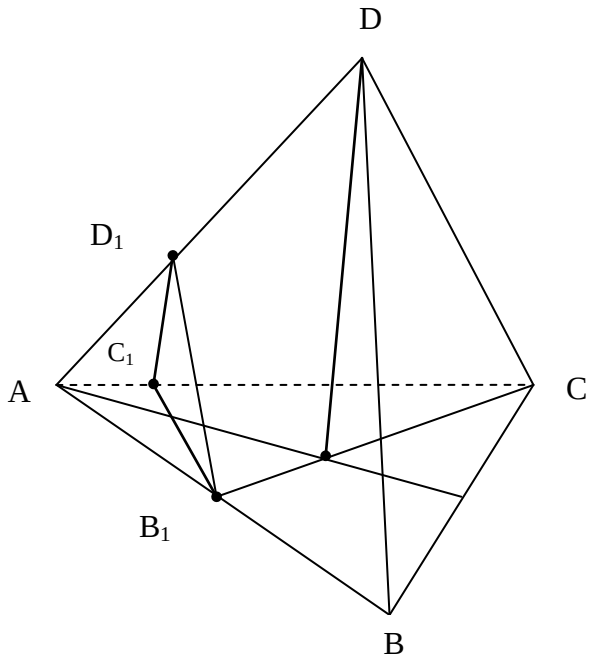
5. Нека су a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 парови мимоилазних ивица тетраедра. Доказати да је $a_1a_2 + b_1b_2 > c_1c_2$.

Решење:

Нека је $AB = a_1$, $CD = a_2$, $BC = b_1$, $AD = b_2$, $AC = c_1$,$BD = c_2$, (Слика 17.).

Ако $B_1 \in AB$, $C_1 \in AC$, $D_1 \in AD$ тада је

$AD \cdot AB_1 = 1$, $AC \cdot AC_1 = 1$, $AD \cdot AD_1 = 1$.



Слика 17.

Из сличности троугла ABC и троугла AB_1C_1 је $\frac{AB}{AC_1} = \frac{AC}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$,

добија се да је $B_1C_1 = \frac{BC}{AB \cdot AC}$.

Слично је $C_1D_1 = \frac{CD}{AC \cdot AD}$ и $B_1D_1 = \frac{BD}{AD \cdot AB}$.

Користећи неједнакост троугла $B_1C_1D_1$ је $B_1C_1 + C_1D_1 > B_1D_1$, односно

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} > \frac{BD}{AD \cdot AB},$$

$$\frac{b_1}{a_1 \cdot c_1} + \frac{a_2}{c_1 \cdot b_2} > \frac{c_2}{b_2 \cdot a_1}.$$

Множењем неједнакости са $a_1b_2c_1$ ($a_1b_2c_1 > 0$) добија се тражена неједнакост

$b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot a_2 > c_1 \cdot c_2$.

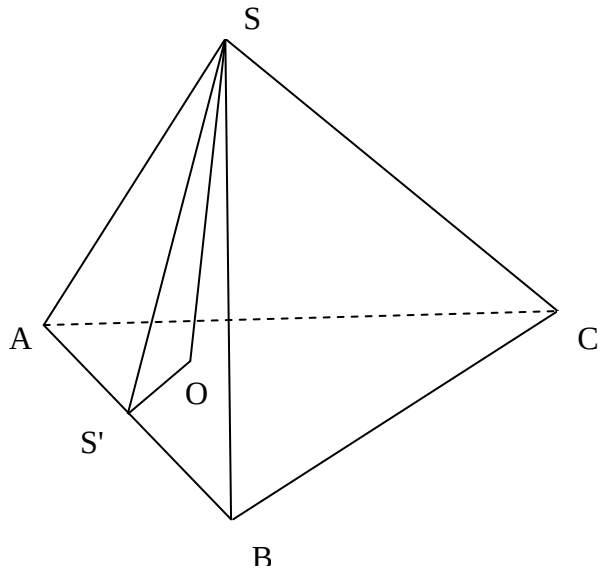
6. Дат је тетраедар у коме је дужина тачно једне ивице већа од 1. Доказати да запремина тетраедра није већа од $\frac{1}{8}$.

Решење:

Нека је у тетраедру SABC (слика 18.) ивица SC > 1, а дужине осталих ивица су највише 1 (мање од 1 или једнаке 1).

Тачка O је подножје висине тетраедра из врха S. Подножје S' нормале из O на ивицу AB мимоилазну са SC.

Како је троугао SOS' правоугли где је SO < SS' па су странице троугла SAB мање или једнаке 1, где је висина $SS' \leq \sqrt{3}$.



Слика 18.

Јер је $\frac{\sqrt{3}}{2}$ висина највећег једнакостраничног троугла странице дужине 1 (SS' ⊥ AB на основу теореме о три нормале). Како је висина тетраедра $H = SO \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, површина основе ABC је $B \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ јер је од свих троуглова, са страницом мањом или једнаком 1. Највећи једнакостранични трогао је странице дужине 1. Запремина тетраедра је

$$V = \frac{1}{3}\ BH \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}\ .$$

7. Све три стране рогља код врха S пирамиде SABC су углови од 60º. Доказати да је SA + SB + SC ≤ AB + BC + CA.

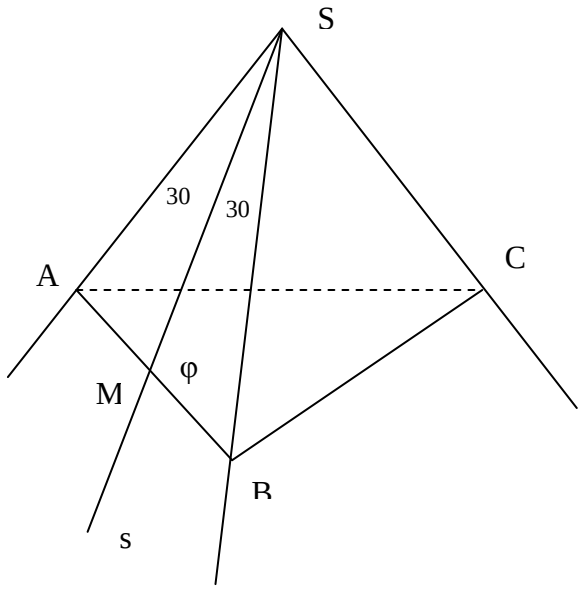
Решење:

Нека је SAB једна бочна страна пирамиде и SM симетрала угла од 60º. Ако означимо угао SMB са φ, слика 19, применом синусне теореме је

$$\frac{SA}{\sin(180° - \varphi)} = \frac{AM}{\sin 30°} = 2 \cdot AM, \quad \frac{SB}{\sin\varphi} = \frac{BM}{\sin 30°} = 2 \cdot BM.$$

Сабирањем једнакости добија се

$$\frac{SA}{\sin\varphi} + \frac{SB}{\sin\varphi} = 2 \cdot (AM + BM), \text{ односно } \frac{SA + SB}{\sin\varphi} = 2 \cdot AB.$$



Слика 19.

Како је $\sin\varphi \leq 1$, закључујемо да је $SA + SB \leq 2 \cdot AB$. На сличан начин из бочне стране SBC је $SB + SC \leq 2 \cdot BC$, а из бочне стране SAC је $SC + CA \leq 2 \cdot AC$. Сабирањем те три неједнакости је

$2 \cdot (SA + SB + SC) \leq 2 \cdot (AB + BC + AC)$.

Неједнакост је доказана.

8. Дата је пирамида SABC и у њој тачка Q . Доказати да је

∢BQC + ∢CQA + ∢AQB < ∢BSC + ∢CSA ∢ASB.

Решење:

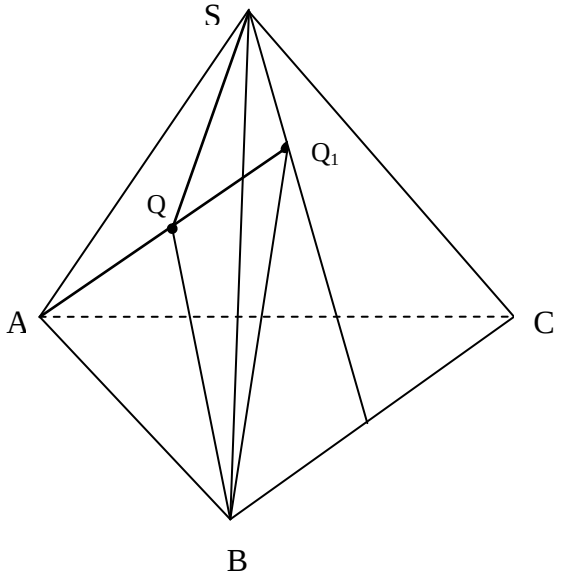
Нека је тачка Q продор праве кроз раван троугла SBC, слика 20.

Тада је ∢ABS + ∢SBC = ∢ABC + ∢SBC + ∢Q_1BC.

На основу особине о ивичним угловима триедра је

∢ABS + ∢SBQ_1 > ∢ABQ_1, односно ∢ABS + ∢SBC > ∢ABQ_1 + ∢Q_1BC.

Слично томе ∢ABQ_1 = ∢ABQ + ∢QBQ_1 и ∢QBQ_1 + ∢Q_1BC > ∢QBC.



Слика 20.

Закључујемо да је ∢ABS + ∢SBC > ∢ABQ + ∢QBC, односно

∢BCS + ∢SCA > ∢BCQ + ∢QCA и ∢CAS + >SAB > ∢CAQ + ∢QAB.

Сабирањем те три неједнакости је

∢ABS + ∢SBC + ∢BCS + ∢SCA + ∢CAS + ∢SAB >

> ∢ABQ + ∢QBC + ∢BCQ + ∢QCA + + ∢CAQ + ∢QAB.

Из троугла BCS је

∢SBC + ∢BCS = 180° - ∢BSC ,

$\sphericalangle SCA + \sphericalangle CAS = 180° - \sphericalangle CSA$,

$\sphericalangle SAB + \sphericalangle ABS = 180° - \sphericalangle ASB$.

Са друге стране је

$\sphericalangle QBC + \sphericalangle BCQ = 180° - \sphericalangle BQC$,

$\sphericalangle QCA + \sphericalangle CAQ = 180° - \sphericalangle CQA$,

$\sphericalangle QAB + \sphericalangle ABQ = 180° - \sphericalangle AQB$.

Заменом у горњу неједнакост добија се

$$3 \cdot 180° - (\sphericalangle BSC + \sphericalangle CSA + \sphericalangle ASB) >$$

$$> \; 3 \cdot 180° - (\sphericalangle BQC + \sphericalangle CQA + \sphericalangle AQB).$$

Из чега следи тражена неједнакост.

9. У тетраедру SABC је SA ⊥ SB, а подножје нормале из темена S на раван ABC је ортоцентар тог троугла.

Доказати да је

$$(|AB| + |BC| + |AC|)^2 \leq 6 \cdot (|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2).$$

Решење:

Нека је тачка O ортоцентар троугла ABC и SO висина тетраедра слика 21. Доказаћемо да су све стране рогља код врха S прави углови. Како је по претпоставци AM висина базе тетраедра AM ⊥ BC, применом теореме о три нормале и SM ⊥ BC. Па је права BC нормална на раван SAM, па је BC ⊥ AS.

По претпоставци је AS ⊥ SB и AS ⊥ BC, па је AS нормална на раван SBC, закључујемо AS ⊥ SC. Слично томе је $\sphericalangle BSC = 90°$.

Применом Питагорине теореме на троуглове SAB, SBC, SAC је

$$AB^2 = SA^2 + SB^2, \quad BC^2 = SB^2 + SC^2, \quad AC^2 = SA^2 + SC^2.$$

Сабирањем тих неједнакости је

$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 2 \cdot (SA^2 + SB^2 + SC^2)$.

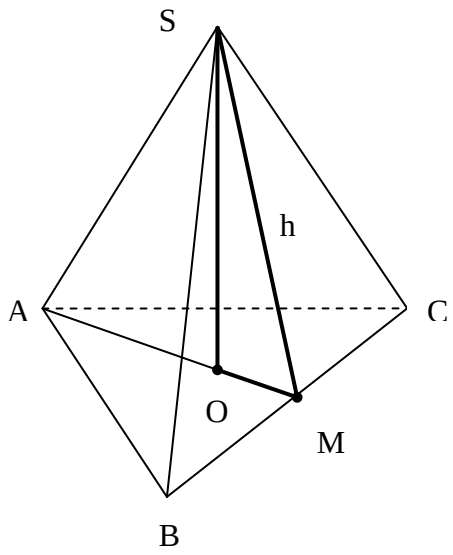
Дата неједнакост је еквивалентна са

$(AB + BC + AC)^2 \leq 3 \cdot (AB^2 + BC^2 + AC^2)$, односно са

$2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot AC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC - 2 \cdot BC \cdot AC - 2 \cdot AB \cdot AC \geq 0$,

$(AB - BC)^2 + (BC - AC)^2 + (AC - AB)^2 \geq 0$ што је очигледно тачно.

Једнакост важи када је $AB = BC = AC$, односно $SA = SB = SC$.



Слика 21.

7. ПРИМЕНА НЕЈЕДНАКОСТИ ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ

„Суштина математике је у њеној слободи“

(Кантор)

Одређивање максимума и минимума неких израза повезано је са доказивањем неједнакости. Често су то два вида истог задатка.
Ако се докаже да неједнакост

$f(x) \leq c$ (1)

важи за све вредности променљиве x из неког скупа D, тиме је доказано да је

$\max\limits_{x \in D} f(x) = \max \{f(x) \mid x \in D\} \leq c.$

Под претпоставком да наведени максимум постоји. Ако се још закључи да је $x_0 \in D$, где је $f(x_0) = c$, онда је

$\min\limits_{x \in D} f(x) = c$ (2)

Са друге стране, ако неким поступком докажемо да важи неједнакост (2), онда је доказана неједнакост (1) за свако $x \in D$.

Проблеми из ове теме варирају од једноставних до тешких и врло сложених.

1. Нека је $x \geq 3$ реалан број. Одредити минималну вредност израза

$$\mathbf{x + \frac{1}{x}}.$$

Решење:

Нека су $x, y \in [3, +\infty)$ и $x > y$. Закључујемо да је

$$x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} = (x - y) \cdot \left(1 - \frac{1}{xy}\right) > 0.$$

Како је $xy \geq 3$ значи да је $\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{9}$.

Оба израза у загради су ненегативна, одавде следи да је функција

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ растућа на интервалу $[3, +\infty)$.

Максимална вредност израза је за $x = 3$ и износи $f(x) = \frac{10}{3}$.

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c \leq \frac{3}{2}$.

Одредити минималну вредност израза

$$\mathbf{a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}. \qquad (1)$$

Решење:

Користећи неједнакост аритметичке и геометријске средине, добија се да је

$$\frac{1}{6} \cdot \left(a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}\right) > \sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}},$$

$$a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} > 6 \cdot \sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} \qquad (2)$$

Из неједнакости аритметичке и хармонијске средине је

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{3}{a + b + c}\ ,$$ односно

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}\ ,$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{a + b + c} \qquad (3)$$

Сабирањем неједнакости (2) и (3), добија се на левој страни тражени израз

$$a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq$$

$$\geq 6 \cdot \sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{a + b + c}\ .$$

Користећи услов задатка да је $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, добија се да је

$b \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{2} + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$, а то је оптимална вредност израза (1).

Вредност се добија ако и само ако је $a = b = c = \frac{1}{2}$.

3. Нека су a, b,c позитивни реални бројеви такви да је $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Одредити минималну вредност израза

$$\mathbf{a + b + c + \frac{1}{abc}}\ .$$

Решење:

Користећи аритметичку и геометријску неједнакост на следећи начин

$$a + b + c + \frac{1}{abc} = a + b + c + \frac{1}{9abc} + \frac{8}{9abc} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{abc \cdot \frac{1}{9abc}} + \frac{8}{9abc},$$

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{8}{9abc} .$$

Применом квадратне и геометријске неједнакости је $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$

и услова задатка $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ решавањем неједнакости, добија се низ еквивалентних неједнакости

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \geq \sqrt[3]{abc} ,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \geq (abc)^2 ,$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \geq abc ,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9} \geq abc .$$

Закључујемо да је $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{8}{9abc} \geq \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$.

Максимална вредност израза је $4\sqrt{3}$ и добија се ако и само ако је

$$a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

4. Одредити максималну вредност производа два броја чији је збир једнак S.

Еквивалентан задатак: Одредити који правоугаоник датог обима 2S има највећу површину.

Решење:

Нека су a и b тражени бројеви (странице правоугаоника), где је

$a + b = S$ и $a \cdot b = P$.

Користећи неједнакост геометријске и аритметичке средине добија се

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ квадрирањем неједнакости је

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $P \le \left(\frac{S}{2}\right)^2$.

Једнакост важи за $a = b$. Највећа вредност површине P ће бити када је $a = b$, односно када је правоуганик квадрат. Вредност максимума ће бити $\frac{1}{4} S^2$.

5. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $x^2 + y^2 \le 25$. Одредити најмању и највећу вредност израза $x^2 + y^2 + 12x - 16y$.

Решење:

Нека је $F(x,y) = x^2 + y^2 + 12x - 16y$, односно

$F(x,y) = 2 \cdot (x + 3)^2 + 2 \cdot (y - 4)^2 - (x^2 + y^2) - 50 \ge -75$.

Најмања вредност је -75 за $x = -3$, $y = 4$.

За највећу вредност користимо услов, па је

$F(x,y) + F(-x,-y) = 2 \cdot (x^2 + y^2) \le 2 \cdot 25 = 50$ (1).

Јер је $F(-x,-y) \ge -75$.

Из неједнакости (1) је $F(x,y) \le 50 - F(-x,-y)$,

$F(x,y) \le 50 - (-75)$, $F(x,y) \le 125$.

Највећа вредност је 125 за $x = 3$ и $y = -4$.

6. Нека су $x_1, x_2, ..., x_n$ позитивни реални бројеви такви да је $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Наћи минималну вредност израза

$$-\frac{x_1^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot x_{i+1} .$$

Решење:

Ако дати израз означимо са A тада је

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-a} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n \right)^2 .$$

Користећи неједнакост Коши-Шварцова добија се

$$\left(1 + 2^2 + \ldots + n^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2 \right) \geq 1(x_1 - x_2) + 2 \cdot (x_2 - x_3) + \ldots$$

$$\ldots + (n-1) \cdot (x_{n-1} - x_n) + nx_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1.$$

Значи да је минимална вредност израза A једнака

$$A_{min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = \frac{3}{n(n+1) \cdot (2n+1)} .$$

Потребно је одредити још x_i за које се добија та минимална вредност. Код Коши-Шварцове једнакост важи када су елементи пропорционални, а то је за

$$\frac{x_1 - x_2}{1} = \frac{x_2 - x_3}{2} = \frac{x_3 - x_4}{3} = \ldots = \frac{x_{n-1} - x_n}{n-1} = \frac{x_n}{n} = a .$$

Из тога следи да је

$x_n = n \cdot a$, $x_{n-1} - x_n = (n-1) \cdot a$, ... , $x_{k-1} - x_k = (k-1) \cdot a$, ...

..., $x_1 - x_2 = 1 - a$.

Сабирањем првих $(n + 1 - k)$ једнакости добија се

$$x_k = [n + (n - 1) + \ldots + k] \cdot a = \left[\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{k-1} i\right] \cdot a = \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right] \cdot a.$$

Одређивање вредности за а се добија из

$$1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \left[n \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i\right] \cdot a =$$

$$= \left[\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}\right] \cdot a.$$

Из тога је

$$a = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \quad \text{и}$$

$$x_k = 3 \cdot \left[\frac{n(n+1) - (k-1)k}{n(n+1)(2n+1)}\right] = \frac{6 \cdot \sum_{j=k}^{n} x_j}{n(n+1)(2n+1)}.$$

7. Одредити минималну вредност функције

$$\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}}.$$

Решење:

Функција f (x) се може записати у облику

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2 + 4^2}.$$

Па је функција f (x) збир растојања од тачака A(2, -2) и B(5, 4) до тачке X(x, 0). Ово растојање је минимално када тачка X припада дужи AB (из „неједнакости троугла“). Минимум функције се добија за x = 3 и износи $f_{min}(x) = f(3) = 3\sqrt{5}$.

8. Нека су a, b, c, d, e, f реални бројеви такви да је

$a + b + c + d + e + f = 10$ и

$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 + (d - 1)^2 + (e - 1)^2 + (f - 1)^2 = 6.$

Одредити минималну вредност броја f.

Решење:

Применом Коши-Шварцове неједнакости за $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$, $d - 1$, $e - 1$ и 1,1,1,1,1 добија се

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 + (d - 1)^2 + (e - 1)^2 \geq \frac{(a + b + c + d + e - 5)^2}{5}.$$

Израз на левој страни је једнак са $6 - (f - 1)^2$,

а на десној страни неједнакости је

$\frac{(5 - f)^2}{5}$, па се добија

$$6 - (f - 1)^2 \geq \frac{(5 - f)^2}{5}, \quad f \cdot (3 \cdot f - 10) \leq 0, \quad 0 \leq f \leq \frac{10}{3}$$

Значи да највећа вредност за f је $\frac{10}{3}$ и добија се за

$a = b = c = d = e = \frac{4}{3}$.

9. Од свих четвороуглова са датим страницама највећу површину има тетивни четвороугао. Доказати.

Решење:

Нека су a, b, c, d узастопне странице четвороугла, а α, β углови између a и b, односно c и d. Тада је према косинусној теореми

$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$, односно

$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2 \cdot (ab\cos\alpha - cd\cos\beta)$.

Површина четвороугла је

$2 \cdot P = ab\sin\alpha + cd\sin\beta$, па је

$4 \cdot P^2 = (ab\sin\alpha + cd\sin\beta)^2 = a^2b^2\sin^2\alpha + 2abcd\sin\alpha\cdot\sin\beta + c^2d^2\sin^2\beta$

$= a^2b^2(1 - \cos^2\alpha) + 2abcd - 2abcd + 2abcd\sin\alpha\cdot\sin\beta + c^2d^2(1 - \cos^2\beta)$

$= (ab + cd)^2 - 2abcd(1 - \sin\alpha\cdot\sin\beta) - (ab\cos\alpha - cd\cos\beta)^2 - 2abcd\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$= (ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 2abcd(1 + \cos(\alpha + \beta))$

$= (ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 2abcd\cos^2\frac{\alpha + \beta}{2}$

$\leq (ab + cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$.

Једнакост важи када је

$\cos^2\frac{\alpha + \beta}{2} = 0$ односно $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Једнакост је за $\alpha + \beta = \pi$, а то је тетивни четвороугао и површина је највећа.

10. Нека је $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ полином са реалним коефицијентима који има три реална позитивна корена, који не морају бити различити. Одредити минималну вредност збира $a + b$.

Решење:

Ако су r, s, t корени полинома $f(x)$, тада је

$f(x) = (x - r)\cdot(x - s)\cdot(x - t)$ и $rst = 1$.

Користећи Коши-Шварцову неједнакост

$(1 + \alpha)^2 \geq 2\sqrt{\alpha}$, $\alpha \in R^+$ добија се

$(1 + r) \cdot (1 + s) \cdot (1 + t) \geq 8\sqrt{rst} = 8.$

Значи да је

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1 - r) \cdot (-1 - s) \cdot (-1 - t) \\ &= -(1 + r) \cdot (1 + s) \cdot (1 + t) \\ &\leq -8. \end{aligned}$$

Са другој страни је

$f(-1) = (-1)^2 - a(-1)^2 - b(-1) - 1 = -(a + b) - 2.$

Из тога се добија да је

$-(a + b) - 2 \leq -8,$

$a + b \geq 6.$

Па је функција $f(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ и $a + b = 6$ тражени минимум је вредност 6.

8. ЧЕБИШЕВЉЕВЕ НЕЈЕДНАКОСТИ И ПРИМЕНА

„ Сваки однос између математичких величина,
одговара односу између реалних ствари.“
(Чебышёв)

Чебишевљева (*Чебышёв*, 1821-1894, руски математичар) и неколико интересантних примена тих неједнакости се ређе примењује у задацима елементарне математике, али неки задаци се могу решити једино помоћу ове неједнакости. Приказаћемо и доказати неједнакост, као и њену примену на задацима.

Теорема 8. 1.

Ако су низови реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ монотони у истом смислу односно $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ или $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$ тада је

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_{n+1-i} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \ . \qquad (1)$$

Ако су $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ монотони у супротном смислу односно $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$ или $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ и $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ тада је

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \le \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \qquad (2)$$

Доказ:

Доказаћемо неједнакост (1) аналогно томе се доказује и

неједнакост (2).

Докажимо најпре десну страну неједнакости (1)

$(a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + ... + b_n) \leq n \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n)$.

Нека је

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot b_j \quad \text{и}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_j \cdot b_i \ .$$

Сабирањем неједнакости је

$$2 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + ... + b_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i b_j + a_j b_i\right).$$

Користећи особину да је

$$n \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n) = n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} k = nk$$

тада је

$$n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \quad \text{и} \quad n \sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Сабирањем тих једнакости, добија се

$$2n \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i b_i + a_j b_j\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j + a_j b_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_i + a_j b_j),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_ib_i + a_jb_j - a_ib_j - a_jb_i\right) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i\left(b_i - b_j\right) - a_j\left(b_i - b_j\right)\right) \geq 0 \text{ и}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(b_i - b_j\right) \cdot \left(a_i - a_j\right) \geq 0.$$

Због монотоности у истом смислу низова (a_i) и (b_i), сви сабирци су ненегативни па се добија неједнакост

$$n \sum_{i=1}^{n} a_ib_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq 0 \text{ и}$$

$$n \cdot (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \geq 0 ,$$

односно неједнакост Чебишевљева. При томе је један (и то највећи) од сабирака тог збира $(a_n - a_1) \cdot (b_n - b_1)$.

Да би важила једнакост, неопходно је и довољно да је збир једнак нули, а то се добија за $a_1 = a_n$ или $b_1 = b_n$. Због монотоности низова (a_i), (b_i) еквивалентно је услову да бар један од низова буде константан.

За доказ леве неједнакости довољно је да је заједно са низом $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и низ $-b_n, -b_{n-1}, \ldots, -b_1$ растући. Па се доказани део теореме може применити на низове (a_i) и $(-b_{n+1-i})$.

Теорема 8. 2.

Нека су $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ опадајући низови реалних бројева и П произвољна пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тада важе неједнакости

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_{\Pi(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i .$$

Ако је при том низ (a_i) строго опадајући, тада лева страна неједнакости постаје једнакост ако и само ако су $b_{n+1-\Pi(i)} = b_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$,
а десна постаје једнакост ако и само ако је $b_{\Pi(i)} = b_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Доказ:

Доказ десне стране неједнакости, методом математичке индукције.
За n = 1, неједнакост је очигледна.
Претпоставимо да неједнакост важи за неки природни број n и доказаћемо да важи и за n + 1.
За дату пермутацију П скупа {1, 2, ..., n, n + 1) нека је
$c_i = b_{\Pi(i)}$ $(i = 1, 2, ..., n + 1)$.
Разликоваћемо два случаја.
1) Ако је $c_{n+1} = b_{n+1}$, $c_1, c_2, ..., c_n$ су пермутације бројева $b_1, b_2, ..., b_n$.
Према индуктивној претпоставци је

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Додавањем левој и десној страни израз $a_{n+1} b_{n+1}$ добија се тражена неједнакост.
2) Ако је $c_k = b_{n+1}$, $(k \ne n+1)$, нека су $c_1', c_2', ..., c_n', c_{n+1}'$ пермутације бројева која се добија транспоновањем k-тог и (n+1)-тог члана.
Тада је $c_1, c_2, ,..., c_n, c_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i' - \sum_{i=1}^{n+1} a_i c_i = a_k \cdot b_i + a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_k \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_i, \text{ где је } b_i = c_{n+1}.$$

Како је

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot c_i \le \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot c_i' ,$$ довољно је доказати неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot c_i' \le \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot b_i$$ а тај случај

припада делу (1) који је доказан. Ако је низ (a_i) строго опадајући, неједнакост важи ако и само ако је $c_i = b_i$,

односно $b_{\Pi(i)} = b_i$ за $i = 1, 2, ..., n$.

1. Нека су α, β, γ углови троугла изражени у радијанима, a, b, c дужине страница,

$S = \frac{a+b+c}{2}$. Тада важе неједнакости

$$\text{а)}\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \ge \frac{9}{\pi}$$

$$\text{б)} \sum \frac{b+c-a}{\alpha} \ge \frac{6s}{\pi}$$

$$\text{в)} \sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \ge \frac{9}{\pi}\ .$$

Решење:

а) Ако је $x_1 \ge x_2 \ge x_3 > 0$ и $0 \le y_1 \le y_2 \le y_3$ односно $\frac{1}{y_1} \ge \frac{1}{y_2} \ge \frac{1}{y_3} > 0$

тада због неједнакости (1) је

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \ge \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right).$$

Користећи неједнакост између аритметичке и хармонијске средине за позитивне бројеве је $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \ge \frac{9}{y_1 + y_2 + y_3}$.

Из претходне две неједнакости добија се

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \ge \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \frac{9}{y_1 + y_2 + y_3},$$ односно

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \geq 3 \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{y_1 + y_2 + y_3}. \qquad (3)$$

Ако у претходну неједнакост уврстимо да је $x_1 = x_2 = x_3 = 1$,

$y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = \gamma$

$(0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma)$ добија се (јер је $\alpha + \beta + \gamma = \pi$) да је

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3 \cdot \frac{3}{\pi} \quad \text{па је} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{9}{\pi}.$$

б) Ако се у неједнакост (3) уврсти да је

$x_1 = b + c$, $x_2 = c + a - b$, $x_3 = a + b - c$,

$y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = \gamma$ где је $0 < a \leq b \leq c$ и $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$ тада је

$$b + c - a \geq c + a - b \geq a + b - c > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\gamma} > 0.$$

На тај начин добија се тражена неједнакост

$$\sum \frac{b + c - a}{\alpha} \geq 3 \cdot \frac{b + c - a + c + a - b + a + b - c}{\alpha + \beta + \gamma},$$

$$\sum \frac{b + c - a}{\alpha} \geq 3 \cdot \frac{a + b + c}{\pi},$$

$$\sum \frac{b + c - a}{\alpha} \geq 3 \cdot \frac{2S}{\pi},$$

$$\sum \frac{b + c - a}{\alpha} \geq \frac{6S}{\pi}.$$

в) Нека је $x_1 = \frac{b + c - a}{a}$, $x_2 = \frac{c + a - b}{b}$, $x_3 = \frac{a + b - c}{c}$ где је $0 < a \leq b \leq c$ и

$x_1 \geq x_2 \geq x_3 > 0$, $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = \gamma$, $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Ако уврстимо у неједнакост (3) добија се

$$\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geq 3 \cdot \left(\frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c}\right) \cdot \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geq \frac{3}{\pi} \cdot \left(\frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c}\right),$$

$$\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geq \frac{3}{\pi} \cdot \left(\frac{b+c}{a} - 1 + \frac{c+a}{b} - 1 + \frac{a+b}{c} - 1\right),$$

$$\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geq \frac{3}{\pi} \cdot \left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - 3\right).$$

Како је $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ јер је $(a-b)^2 \geq 0$ за $a > 0, b > 0$.

Закључујемо да је $\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geq \frac{3}{\pi}$ (6-3) , то јест тражена неједнакост

$$\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geq \frac{9}{\pi}.$$

Једнакост важи када је троугао једнакостраничан.

2. За природан број *n*, важи неједнакост

$$\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Решење:

Један начин доказивања неједнакости би био помоћу математичке индукције, јер је $n \in N$. Други начин би био примена неједнакости Чебишевљева, што ће се и показати. Користећи развој леве и десне стране једнакости $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$ по биномној формули. Коефицијент уз члан x^n на левој страни је $\binom{2n}{n}$ а на десној страни је

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2, \quad \text{значи да је} \quad \binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 .$$

Применом неједнакости Чебишевљева $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

и особина

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^2 = 2^2 .$$

Закључујемо да је

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k},$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \ge \frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right),$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \ge \frac{1}{n+1}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^2,$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \ge \frac{1}{n+1}\cdot(2^n)^2,$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \ge \frac{1}{n+1}\cdot 2^{2n},$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \ge \frac{4^n}{n+1}.$$

Једнакост важи само када је n = 1.

3. За реалне позитивне бројеве a, b, c природан број n, где је $S = \frac{a+b+c}{2}$ важи неједнакост

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \ge \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot S^{n-1}. \qquad (1)$$

Решење:

Доказаћемо најпре помоћну неједнакост

$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n \leq k^{n-1} \cdot (a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n)$ (2)

где су $k, n \in N$ и $a_1, a_2, ..., a_n$ позитивни реални бројеви.

Једнакост важи када је $n = 1$,

$a_1 + a_2 + ... + a_k \leq k^0 \cdot (a_1 + ... + a_k)$ или $a_1 = a_2 = ... = a_k = a$, односно

$(a + a + ... + a)^n \leq k^{n-1} \cdot (a^n + a^n + ... + a^n)$

$(k \cdot a)^n \leq k^{n-1} \cdot (k \cdot a^n)$

$(k \cdot a)^n \leq k^n \cdot a^n$

Потребно је доказати неједнакост (2) за $n \geq 2$ и $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_к$.

Може се посматрати да је $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_к$ и $a_1 \leq a_к$. Доказ помоћне неједнакости помоћу математичке индукције

За $n = 2$ је $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 < k \cdot (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2)$, односно

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + 2 \cdot \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i,j \leq k}} a_{ij} < k \cdot \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2\right),$$

$$0 < (k - 1) \cdot \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2\right) - 2 \cdot \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i,j \leq k}} a_i a_j ,$$

$$0 < \sum_{i \neq j} (a_i^2 - 2a_i a_j + a_j^2) ,$$

$$0 \leq \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i,j \leq k}} (a_i - a_j)^2 .$$

Неједнакост је тачна због претпоставке да је $a_1 < a_k$. Претпоставимо да је неједнакост (2) тачна за $n \geq 2$,

$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n < k^{n-1} \cdot (a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n)$.

Доказаћемо да неједнакост важи и за $n + 1$,

$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^{n+1} < k^n \cdot (a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1})$. (3)

Користећи индуктивну претпоставку

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^{n+1} = (a_1 + a_2 + ... + a_k) \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k)^n <$$
$$< (a_1 + a_2 + ... + a_k) \cdot k^{n-1} \cdot (a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n)$$
$$< k^{n-1} \cdot (a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n) \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k)$$
$$< k^{n-1} \cdot k \cdot (a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1})$$
$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^{n+1} < k^n \cdot (a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1}).$$

Доказаћемо да је

$$(a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n) \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k) < k \cdot (a_1^{n+1} + ... + a_k^{n+1}) \qquad (4)$$

Множењем на левој страни добија се

$$a_1^n \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_2^n \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k) + ... + a_k^n \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_k)$$
$$< (k - 1) \cdot (a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1}),$$

$$0 < a_1^n \cdot ((k -1)a_1 – a_2 - ... - a_k) + a_2^n \cdot ((k - 1)a_2 - a_1 - a_3 - ... - a_k) + ... + a_k^n$$
$$((k - 1)a_k - a_1 - ... - a_{k-1}) ,$$

$$0 < a_1^n \cdot ((a_1 - a_2) + ... + (a_1 - a_k)) + a_2^n \cdot ((a_2 - a_1) + (a_2 - a_3) + ... + (a_2 - a_k)) +$$
$$... + a_k^n \cdot ((a_k - a_1) + ... + (a_k - a_{k-1})) ,$$

$$0 < \sum_{1 \le i,j \le k} \left(a_i^n - a_j^n\right) \cdot \left(a_i - a_j\right).$$

Ова неједнакост је тачна јер су изрази у заградама једнаког знака и $a_1 < a_k$. Неједнакост (4) је тачна, па из неједнакости (3) за n + 1 следи тачност неједнакости (2). Сада ћемо доказати неједнакост (1).

Не мењајући смисао неједнакости, посматраћемо да је

$0 \le a \le b \le c$ односно

$0 \le a^n \le b^n \le c^n$ па је и $0 < \dfrac{1}{b+c} \le \dfrac{1}{a+c} \le \dfrac{1}{a+b}$.

Применом неједнакости Чебишевљева добија се

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{1}{3}\cdot(a^n+b^n+c^n)\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\qquad(5)$$

Применом неједнакости (2) за k = 3 добија се

$$\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\geq\frac{a+b+c}{3}\quad\text{то јест}\quad a^n+b^n+c^n\geq\frac{1}{3^{n-1}}\,(a+b+c)^n\,.$$

Сада применом неједнакости аритметичке и хармонијске средине је

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2\cdot(a+b+c)}$$. Из неједнакости (5) је

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{1}{3^n}\cdot(a+b+c)^n\cdot\frac{9}{2\cdot(a+b+c)}\,,$$

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot S^{n-1}\,.$$

Из чега следи тражена неједнакост (1). Ако се у неједнакост (1) користи да је n = 1, добија се да је $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$,

а за n = 2 је $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq S$.

Пошто је неједнакост хомогена, може се приметити да је a + b + c = 1 и

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2.}$. Ако би се поступак наставио за n = 3, 4, ...

где је a + b + c = 1 тада би се добило

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{1}{6}\,,\quad\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{a+c}+\frac{c^4}{a+b}\geq\frac{1}{18}\,,\ldots$$

Тиме је неједнакост доказана.

9. ШУРОВА НЕЈЕДНАКОСТ И ЊЕНА ПРИМЕНА

„Никакво људско истраживање не може се назвати правом науком ако није математичким доказима потврђено.“

(Леонардо да Винчи)

Теорема 9. 1.

Ако су a, b, c позитивни реални бројеви и n је реалан број, тада је

$a^n \cdot (a - b) \cdot (a - c) + b^n \cdot (b - c) \cdot (b - a) + c^n \cdot (c - a) \cdot (c - b) \geq 0$ (1)

са једнакошћу ако и само ако је a = b = c.

Овај доказ је дао *Levy, J. J. An easy proof for Schur´s integualiti, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 7 (1985).*

Доказ:

Ако леву страну неједнакости (1) означимо са L. Претпоставимо да два од бројева a, b, c нису једнаки. Ако је b = c, тада је $L = a^n (a - b)^2 \geq 0$. Пермутовањем a, b, c уочавамо да може да се претпостави да је

a > b > c. Разликоваћемо два случаја.

1. Ако је n ≥ 0, тада је

$L = (a - b) \cdot [a^n \cdot (a - c) - b^n (b - c)] + c^n \cdot (a - c) \cdot (b - c)$

$L > (a - b) \cdot (a^n - b^n) (b - c) + c^n \cdot (a - c) \cdot (b - c) > 0.$

2. Ако је n < 0, тада је

$L = a^n \cdot (a - b) \cdot (a - c) + (b - c) \cdot [-b^n \cdot (a - b) + c^n \cdot (a - c)]$,

$L > a^n \cdot (a - b) \cdot (a - c) + (b - c) \cdot (-b^n + c^n) \cdot (a - c) > 0.$

Једнакост важи ако и само ако је a = b = c.

Неједнакост (1) важи и за реалан број n који је паран када су a, b, c негативни бројеви.

1. Доказати да за сваки позитиван реалан број a, b, c важи неједнакост $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (a + b + c) \cdot (bc + ca + ab)$.

Решење:

Користећи неједнакост (1) за n = 1 добија се

$a \cdot (a - b) \cdot (a - c) + b \cdot (b - c) \cdot (b - a) + c \cdot (c - a) \cdot (c - b) \geq 0,$

$a^3 - a^2b - a^2c + abc + b^3 - b^2c - ab^2 + abc + c^3 - ab^2 + abc \geq 0,$

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2$,

$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq a^2b + ab^2 + abc + a^2c + ac^2 + abc + b^2c + bc^2 + abc,$

$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq ab \cdot (a + b + c) + ac \cdot (a + b + c) + bc \cdot (a + b + c),$

$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (a + b + c)\,(bc + ca + ab).$

Тиме је доказана неједнакост (1).

Једнакост важи ако је a = b = c.

2. Доказати да за сваки позитиван реалан број a, b, c, где је abc = 1, важи неједнакост

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1. \qquad (1)$$

Решење:

Множењем израза на левој страни неједнакости и сређивањем добија се неједнакост

$a^2b + b^2c + c^2a \geq a + b + c + ab + bc + ca$ (2)

Како је $abc = 1$, уводећи смену да је $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ где је $x, y, z > 0$, јер је $a, b, c > 0$.

Уводећи смену у неједнакост (2), добија се

$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$.

Претходна неједнакост је специјалан случај Шурове неједнакости када је $n = 1$, једнакост важи за $x = y = z$. Закључујемо да и њој еквивалентна неједнакост (2) важи, односно и дата неједнакост (1). Једнакост се добија када је $a = b = c = 1$.

3. Нека су x, y, z позитивни реални бројеви. Доказати неједнакости:

а) $\mathbf{x^4 + y^4 + z^4 + xyz\,(x + y + z) \geq 2 \cdot (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)}$. **(1)**

б) $\mathbf{9xyz + 1 \geq 4 \cdot (xy + yz + zx)}$ **за** $\mathbf{x + y + z = 1}$. **(2)**

Решење:

а) Применом Херонове формуле за површину троугла, добија се једнакост

$$2 \cdot (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) - (x^4 + y^4 + z^4) =$$

$$= (x + y + z) \cdot (y + z - x) \cdot (z + x - y) \cdot (x + y - z).$$

Користећи ову једнакост добија се еквивалентна неједнакост са датом неједнакости

$$xyz \cdot (x + y + z) \geq 2 \cdot (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4),$$

$$xyz \geq \frac{2\,(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4)}{x + y + z},$$

$$xyz \geq \frac{(x + y + z) \cdot (y + z - x) \cdot (z + x - y) \cdot (x + y - z)}{x + y + z},$$

$$xyz \geq (y + z - x) \cdot (z + x - y) \cdot (x + y - z).$$

Множењем и сређивањем претходне неједнакости добија се

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2.$$

Та неједнакост је случај Шурове теореме када је $n = 1$.

Тиме је доказана тражена неједнакост.

Једнакост се добија када је $x = y = z$.

б) Користећи услов $x + y + z = 1$ неједнакост $9xy + 1 \geq 4 \cdot (xy + yz + zx)$ је еквивалентна са нејаднакости

$$9xyz + (x + y + z)^3 \geq 4 \cdot (x + y + z) \cdot (yz + zx + xy).$$

Сређивањем претходне неједнакости је

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2.$$

Тачност неједнакости потврђује Шурова теорема за $n = 1$.

Једнакост важи када је $x = y = z = \frac{1}{3}$.

ЗАКЉУЧАК

Обрађене теме карактерише занимљивост, разноврсност и примењивост. Рад је фокусиран на теме које су значајне за додатни рад, рад са надареним ученицима, као и такмичење ученика основних и средњих школа. Повезаност теоријског и практичног истраживања може послужити као добар материјал свима који показују интересовање за елементарне неједнакости и неједнакости уопште.

Потребна је снажна мотивација у процесу стицања нових знања, проширивању и продубљивању већ стечених знања. Сматрам да су циљеви мог рада реализовани. Тема елементарне неједнакости је неисцрпна, проистекла од велике примене математичара али и нематематичара. Могућност даљег истраживања и проширења теме би обухватило детаљнију примену на метрички простор, на конвексне и конкавне функције. Коришћење других познатих неједнакости Хелдерове (*Hölder,* 1859-1937, немачки математичар), Жорданове (*Jordan,* 1838-1922, француски математичар), Јангове (*Young,* 1882-1946, енглески математичар), Ердеш-Морделова(*Erdös,* 1913-1996, мађарски математичар, *Mordell,* 1888-1972, енглески математичар). Примена метода математичке индукције и диференцијалног рачуна у решавању сложенијих задатака и проблема неједнакости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Др Драгослав С.Митриновић, НЕЈЕДНАКОСТИ, Грађевинска књига, Београд, 1965.

[2] Д.С.Митровиновић, Д. Михаиловић, П. М. Васић, ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА, ПОЛИНОМИ, АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА, VI издање, Грађевинска књига, Београд, 1973.

[3] Др Шефкет Арсланагић, МАТЕМАТИКА ЗА НАДАРЕНЕ, I издање, Босанска ријеч, Сарајево, 2004.

[4] Проф.др.Борис Павковић, проф.др.Дарко Вељан, ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМЕТИКА I, Школска књига, Загреб, 2004.

[5] Милан С. Јовић, ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Бачка Паланка, 1996.

[6] Владимир Стојановић, СТАЗАМА ШАМПИОНА, приручник за додатну наставу и припрему такмичења, за ученике VII и VIII разреда, Математископ, Београд, 1999.

[7] Владимир Стојановић, МАТЕМАТИСКОП 3, одабрани задаци за први разред средњих школа, V издање, Математископ, Београд, 1995.

[8] Владимир Стојановић, МАТЕМАТИКА, иностранa такмичења основаца, Математископ, Београд, 2010.

[9] Др Павле Миличић, мр Владимир Стојановић, др Зоран Каделбург, др Бранислав Боричић, МАТЕМАТИКА за I разред средње школе, IX издање, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2000.

[10] Славиша Б. Прешић, РЕАЛНИ БРОЈЕВИ, математичка библиотека 45, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1985.

[11] Милорад Челебић, Слободан Диков Новчић, ЗАДАЦИ СА ТАКМИЧЕЊА СА РЕШЕЊИМА, математичка библиотека 49, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1986.

[12] Зоран Каделбург, ДушанЂукић, Миливоје Лукић, Иван Матић, НЕЈЕДНАКОСТИ, материјал за младе математичере, свеска 42, Друштво математичара Србије, Београд, 2003.

[13] Владимир Балтић, Душан Ђукић, Ђорђе Кртинић, Иван Матић, ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ за математичка такмичења средњошколаца Србије, материјал за младе математичере, свеска 49, Друштво математичара Србије, Београд, 2008.

[14] Друштво математичара Србије, ТАНГЕНТА 10, задаци из математичког часописа „ТАНГЕНТА“ 1995-2005, материјал за младе математичере, свеска 45, Београд, 2006.

[15] Дирк Ј. Сројк, КРАТАК ПРЕГЛЕД ИСТОРИЈЕ МАТЕМАТИКЕ, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1987.

БИОГРАФИЈА

Рођена сам 12.08.1963. године у Бачкој Паланци. Завршила сам средње усмерено образовање у Бачкој Паланци у Гимназији „20 октобар“, математички смер и стекла звање помоћни истраживач у математици. У Новом Саду, на Природно-математичком факултету сам стекла звање дипломирани математичар – професор математике.

Рад у просвети сам започела 1990. године у Силбашу, у школи у којој сам започела своје образовање. Затим сам седам година предавала математику и информатику у основној школи „Алекса Шантић“ Гајдобра – Нова Гајдобра. У Челареву, у основној школи „Здравко Челар“ радим десет година.

У Новом Саду, 11.07.2011.

Биљана Павков

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број: **РБР**	
Идентификациони број: **ИБР**	
Тип документације: **ТД**	Монографска документација
Тип записа: **ТЗ**	Текстуални штампани материјал
Врста рада: **ВР**	Мастер рад
Аутор: **АУ**	Биљана Павков
Ментор: **МН**	Проф. др Црвенковић Синиша
Наслов рада:	Елементарне неједнакости
Језик публикације: **ЈП**	Српски (ћирилица)
Језик извода: **ЈИ**	Српски / енглески
Земља публиковања: **ЗП**	Србија
Уже географско подручје: **УГП**	Војводина
Година: **ГО**	2011.
Издавач: **ИЗ**	Ауторски репринт
Место и адреса: **МА**	Природно - математички факултет Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад
Физички опис рада: *(поглавља, страна, фотографија, слика, литература, табела)* **ФО**	9 / 111/ 1 / 21 / 15 / 0
Научна област: **НО**	Математика
Научна дисциплина: **НД**	Методика наставе математике
Предметна одредница / кључне речи: **ПО**	Математика, неједнакости, теорема, доказ, геометрија
УДК	
Чува се: **ЧУ**	Библиотека Департмана за математику, ПМФ, Нови Сад
Важна напомена: **ВН**	Нема
Извод: **ИЗ**	Обрада и примена елементарних неједнакости, бројевних логаритамских, геометријских
Датум прихватања теме од стране НН већа: **ДП**	11.07.2011.
Датум одбране: **ДО**	Јул 2011.

Чланови комисије:
КО

Председник:	проф. др Љиљана Гајић, редовни професор, ПМФ, Нови Сад
Ментор:	проф. др Синиша Црвенковић, редовни професор, ПМФ, Нови Сад
Члан:	проф. др Загорка Црвенковић Лозанов, редовни професор, ПМФ, Нови Сад

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph type
Type of record: **TR**	Printed text
Contents Code: **CC**	Master examination
Author: **AU**	Biljana Pavkov
Mentor: **MN**	Professor Siniša Crvenković, Ph.D., Full Professor of Faculty of Natural Sciences and Math., Novi Sad
Title:	Elementary inequality
Language of text: **LT**	Serbian (Cyrillic)
Language of abstract: **LA**	English
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2011.
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad, Serbia
Physical description (chapters, pages, photographs, pictures, references, table : **PD**	9 / 111 / 1 /21 / 15 / 0
Scientific field: **SF**	Mathematics
Scientific discipline: **SD**	Methodic of Mathematics
Subject / Key words: **SKW**	Mathematics, inequality, theorem, proof, geometry
UC	.
Holding data: Novi Sad **PP**	Library of Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematic,
Note: **N**	None
Abstract: **AB**	Processing and use of elementarary intequality, numerical, ogarithmic, geometrc
Accepted by the Scientific Board on: **ASB**	July 11th, 2011.
Defended on: **DE**	July 2011.

Thesis defends board:
DB
President: Ljiljana Gajić Ph.D, Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematic, Novi Sad
Mentor: Siniša Crvenković, Ph.D. Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematic, Novi Sad
Member: Zagorka Crvenkovic Lozanov , Ph.D. Full Professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematic, Novi Sad