UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

AUTOMATSKE GRUPE I STRUKTURE PREDSTAVLJIVE KONAČNIM AUTOMATIMA

MASTER TEZA

Autor:
Atila Fešiš

Mentor:
dr Igor Dolinka

Novi Sad, 2013.

Sadržaj

Predgovor

Definiciju konačnog automata dao je Kleene 1956. godine. On je pokrenuo pitanje problema karakterizacije skupova koji su prepoznatljivi konačnim automatima, u smislu definabinosti u logici. Problem su rešili nezavisno Büchi(1960), Elgot(1961) i Trahtenbrot(1962), koji su dokazali ekvivalentnost definabilnih struktura u slaboj monadičnoj logici drugog reda u strukturi $(N,')$ (skup prirodnih brojeva sa operacijom naredni) i struktura prepoznatljivih konačnim sinhronim automatima (sa više traka) koji za unos uzimaju torke reči. Slaba monadičnost drugog reda znači da je u formulama pored kvantifikovanja po promenljivama za elemente domena dozvoljeno i kvantifikovanje po promenljivama za konačne podskupove domena.

Ispostavlja se da je definabilnost u slaboj monadičnoj logici drugog reda u strukturi $(N,')$ ekvivalentna definabinosti u logici prvog reda u strukturi $\mathcal{N}_2 = (N, +, |_2)$ (skup prirodnih brojeva sa sabiranjem, a relacija $x|_2y$ je dafinisana sa: $x = 2^k$ za neko $k \in N$ i $x|y$). Značajna je činjenica da je teorija prvog reda ove strukture odlučiva. Dokaz ovog rezultata se zasniva na čninjenici da skup prirodnih brojeva možemo predstaviti u binarnom zapisu unazad (što je regularan jezik), a potom automatima možemo predstaviti i sabiranje i relaciju $|_2$. Korišćenje logičkih operacije $\vee, \neg$ i kvantifikatora $\exists$ omogućava nam činjenica da je klasa automata zatvorena u odnosu na uniju, komplementiranje i projekciju. Uz primenu indukcije po složenosti formule, i na kraju, odlučivosti problema praznosti automata lako je uvideti navedeni rezultat. Priča se potom uopštava na strukture $\mathcal{N}_k = (N, +, |_k)$ za $k \geq 2$.

1966. godine Elgot i Rabin uspostavili su vezu izmedju slabe monadične teorije drugog reda strukture $(N,')$ i teorije prvog reda strukture
$\mathcal{W}_2 = (\{0,1\}^*, R_0, R_1, \leq_p, el)$, gde su relacije $R_0 := \{(w, w0) \mid w \in \{0,1\}^*\}$, $R_1 := \{(w, w1) \mid w \in \{0,1\}^*\}$, relacija $\leq_p$ je relacija prefiksa, a relaciju el čine parovi reči iste dužine.

1969. godine Eilenberg, Elgot i Shepherdson dokazali su da je relacija $P \subset \{0, 1, \ldots, k-1\}^{*n}$ predstavljiva konačnim automatom ako i samo ako je definabina u logici prvog reda u strukturi $\mathcal{W}_k = (\{0, 1, \ldots, k-1\}^*, R_0, R_1, \ldots, R_{k-1}, \leq_p, el)$.

Navedeni rezultati zajedno daju karakterizaciju struktura predstavljivih automatima (korolar 2.9):
Presdstavljivost strukture automatima, definabilnost strukture u slaboj modadičnoj logici drugog reda u strukturi $(N,')$, i definabilnost strukture u logici prvog reda u strukturama $\mathcal{N}_k$ i $\mathcal{W}_k$ za svako $k \geq 2$ su ekvivalentni.

Motivisan ovim rezultatima Hodgson je 1976. godine uveo pojam *automatska struktura* za relacionu struktura čiji domen i fundamentalne relacije su prepoznatljive konačnim automatima. U ovom pristupu se umesto fundamentalnih op-

eracija struktura posmatraju grafovi tih operacija, pa je dovoljno baviti se relacionim strukturama. Hodgson je proučavao odlučivost struktura predstavljivih automatima nad konačnim i beskonačnim rečima.

Automatske prezentacije (FA-prezentacije), u smislu definicije koja se danas koristi i kojom se ovaj rad bavi, uveli su 1995. Khoussainov i Nerode kao rezultat potrebe da se koncepti iz konačne teorije modela prošire i na beskonačne strukture, pri čemu bi se očuvala odlučivost najznačajnijih algoritamskih problema vezanih za te strukture. Jedan od najznačajnijih zadataka u vezi sa automatskim prezentacijama struktura jeste karakterizacija struktura određenog tipa koje dopuštaju takve prezentacije: odgovarajuće karakterizacije su poznate, na primer, za konačno generisane grupe, zatim za integalne domene, Bulove algebre, ordinale, itd. Međutim, u mnogim klasama, karakterizacija automatski prezentabilnih struktura ostaje otvoren i često prilično složen problem.

U domenu teorije grupa, jedan veoma specijalan primer FA-prezentabilnih struktura jesu automatske grupe. Grupa generisana konačnim skupom X je automatska ako postoji regularni jezik L nad X tako da su reči iz L u homomorfnom odnosu sa elementima grupe koje predstavljaju, i ako se desno množenje generatorima može (u izvesnom smislu) realizovati konačnim automatom. Ovde važi da Cayley graf grupe ima automatsku prezentaciju, iako je klasa graf automatskih grupa strogo šira od automatskih. Klasičan rezultat iz kombinatorne teorije grupa opisuje automatske grupe preko svojstva poznatog kao *osobina saputnika (fellow traveller property)*.

Pojam automatskih grupa je uveo Cannon 1992. godine.

U ovom master radu dat je pregled osnovnih pojmova i rezultata vezanih za automatski predstavljive strukture, sa posebnim osvrtom na strukture relevantne u teoriji grupa.

Prva glava ukratko izlaže osnovne pojmove i teoreme vezane za teoriju automata, i relacione strukture. Opširnije o ovim temama može se čitati u knjigama [7], [9] i [8]. Predstavljaju se i pojmovi konvolucije torki i relacija, kao i automati sa n-traka.

U drugoj glavi, koristeći osnovne koncepte predstavljene u prvoj glavi, definišu se centralni pojmovi rada: automatske i FA-prezentabilne strukture. Dokazuje se odlučivost teroje prvog reda automatske strukture. Zatim se izlaže karakterizacija automatskih struktura (o kojoj se govorilo u prethodnom delu predgovora), a potom se automatske strukture svode na automatske grafove. Rad se dalje fokusira na automatska drva i ordinale, za koje se formuliše i teorema o karakterizaciji. Nakon toga se uvodi pojam rasta automatskih struktura, a potom na osnovu poznatih rezultata vezano za ovaj pojam slede karakterizacije FA-prezentabilnih integralnih domena i Bulovih algebri. Na kraju glave se karakterišu unarno FA-prezentabilne strukture. Ova glava se uglavnom oslanja na rad [1].

Treća glava bavi se FA-prezentabilnim i automatskim grupama (koje su redefinisane u odnosu na istoimeni pojam u slučaju opštih struktura) i graf automatskim grupama. Tema je međusoban odnos ovih pojmova, kao i pitanje odlučivosti problema reči i konjugovanosti. Rad se zatim bavi rastom FA-prezentabilnih polugrupa, i uz pomoć dobijenih rezultata se karakterišu FA-prezentabilne grupe. Nakon toga sledi geometrijska karakterizacija automatskih grupa (osobina saputnika). Na kraju su predstavljene neke karakteristične konstrukcije na grupama, koje očuvavaju automatičnost odnoso FA-prezentabilnost.

Prve četiri sekcije ove glave se oslanjaju uglavnom na rad [2], dok se poslednje dve sekcije oslanjaju na radove [3], [4], [5] i [6].

Ovom prilikom bih želeo da se zahvalim mentoru dr Igoru Dolinki i članovima komisije dr Petru Markoviću i dr Rozaliji Madarász Szilágyi na korisnim savetima i podršci prilikom izrade ovog rada.

Novi Sad, maj 2013. Atila Fešiš

Glava 1

Osnovni pojmovi

1.1 Konačni automati i regularni jezici

U ovoj glavi biće opisani osnovni koncepti na kojima se zasnivaju automatske strukture.

Počećemo sa osnovnim definicijama i tvrđenjima vezanim za regularne jezike i konačne automate, a potom će biti reči o relacionim strukturama. Kombinacija ova dva koncepta dovešće nas do automatskih struktura u sledećoj glavi.

1.1.1 Regularni jezici

Neka je A konačan skup slova (simbola), zvaćemo ga azbuka. Slova, odnosno simbole obično označavamo sa $a, b, c, d, 0, 1$, ali naravno mogu doći u obzir bilo koji simboli.

Konačan niz slova azbuke A nazivamo reč. Reči obično označavamo simbolima w, u, v.

Dužina reči je broj slova u datoj reči, a odgovarajuća oznaka je $|w|$. Slova poistovećujemo sa odgovarajućim rečima dužine 1.

Definišemo i praznu reč, i označavamo je simbolom λ. Dužina prazne reči je 0.

Skup reči nazivamo jezik, obično u oznaci L, J, K.

A^* označava skup svih reči nad azbukom A, uključujući i praznu reč. A^+ označava skup svih reči nad azbukom A, bez prazne reči. Dakle, jezik nad azbukom A je podskup od A^*.

Uvodimo operaciju konkatenacije (dopisivanje, nadovezivanje) na rečima nekog jezika:

$$v \cdot w := vw.$$

Skup svih reči A^+ nad azbukom A sa operacijom konkatenacije čini polugrupu. Ako uključimo i praznu reč, koja predstavlja jedinični element za konkatenaciju, dobijamo monoid $(A^*, \cdot, \lambda)$

Zatim ovu operaciju proširujemo na operaciju na jezicima nad zajedničkom azbukom na sledeći način:

$$L \cdot K := \{u \cdot w \mid u \in L, w \in K\}.$$

Radi jednostavnosti znak množenja možemo izostaviti.

Dalje, definišemo još dve operacije na jezicima:

- sumu: $L + K := L \cup K$,
- Kleene-jevo zatvorenje: $L^* = \{\lambda\} + L + L \cdot L + L \cdot L \cdot L + \ldots = \bigcup_{n \geq 0} L^n$.

Sada je jasno zašto je skup svih reči nad azbukom A označen sa A^*. Uočimo i da je $\mathcal{P}(A^*)$ skup svih jezika nad azbukom A.

Sada možemo definisati algebru jezika nad azbukom A kao uređenu šestorku:

$$(\mathcal{P}(A^*), +, \cdot, ^*, \emptyset, \{\lambda\}).$$

U ovoj strukturi $\emptyset$ i $\{\lambda\}$ su konstante, odnosno operacije arnosti 0, ili unarne relacije.

Analogno termima nad proizvoljnom algebrom definišemo objekte sintaktičke prirode koje ćemo nazivati **regularnim izrazima**. U ovom smislu u definiciji koja sledi elemente azbuke A tretiramo kao promenljive, dok $+, \cdot, ^*$ predstavljaju operacijske simbole odgovarajućih arnosti.

Regularne izraze definišemo induktivno na sledeći način:

1. $\emptyset, \lambda, a$ su regularni izrazi, gde je $a \in A$;
2. ako su α, β regularni izrazi onda su $(\alpha + \beta), (\alpha \cdot \beta), (\alpha^*)$ regularni izrazi;
3. konačnom primenom *1.* i *2.* dobijaju se regularni izrazi;

U regularnim izrazima po dogovoru možemo izostaviti spoljne zagrade. Takođe po dogovoru prioritet operacija je redom $^*, \cdot, +$, pa se shodno tome mogu izostaviti odgovarajuće zagrade.

Interpretacijom regularnih izraza u algebri jezika dobijamo da svaki regularni izraz predstavlja neki jezik. Interpretaciju regularnih izraza, odnosno njihovu vrednost definišemo kao preslikavanje $\mathcal{L}$ regularnih izraza nad azbukom A na jezike nad azbukom A induktivno na prirodan način:

1. $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset, \mathcal{L}(\lambda) = \lambda, \mathcal{L}(a) = \{a\}$ za $a \in A$;
2. ako su α, β regularni izrazi onda
   $\mathcal{L}(\alpha + \beta) = \mathcal{L}(\alpha) + \mathcal{L}(\beta)$,
   $\mathcal{L}(\alpha \cdot \beta) = \mathcal{L}(\alpha) \cdot \mathcal{L}(\beta)$,
   $\mathcal{L}(\alpha^*) = (\mathcal{L}(\alpha))^*$.

Jezik koji u ovom smislu možemo opisati regularnim izrazom nazivamo **regularni jezik**. Kažemo da je regularni jezik jezik odgovarajućeg regularnog izraza. Kako je jezik skup reči, koristi se i naziv **regularan skup**.

Sledeće tvrđenje govori o osobinama regularnih jezika. Dokaz se izvodi koristeći Kleene-jevu teoremu (teorema 1.3), koju predstavljamo u sledećem odeljku, i teoremu Myhill-Nerode (teorema 2.10). Teoremu ipak dokazujemo ovde, kako bismo zaokružili priču o regularnim jezicima. Čitaocu se preporučuje čitanje sledećeg odeljka i tvrđenja 2.10 pre čitanja dokaza koji sledi.

Teorema 1.1 *Neka su A i B konačni skupovi. Važe sledeća tvrđenja:*

1. *Svaki konačan podskup A^* je regularan.*
2. *Ako je $L \subseteq A^*$ regularan jezik, tada je i njegov komplement $L^C = A^* \backslash L$ regularan.*
3. *Ako su $K, L \subseteq A^*$ regularni tada su i $K \cap L$ i $K \backslash L$ regularni.*
4. *Ako je $L \subseteq A^*$ regularan i $\psi : A^* \to B^*$ homomorfizam monoida, tada je i $\psi(L)$ regularan.*
5. *Ako je $K \subseteq B^*$ regularan i $\psi : A^* \to B^*$ homomorfizam monoida, tada je i $\psi^{-1}(L)$ regularan.*

■

Dokaz:

1. Neka je $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ konačan podskup skupa A^*. Jezik regularnog izraza $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ je upravo skup $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, pa je on regularan.
2. Ako je $L \subseteq A^*$ regularan jezik, po Kleene-jevoj teoremi (teorema 1.3) postoji automat $\mathcal{A} = (S, A, \delta, q_0, F)$ takav da je $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$. Konstruišimo automat $\mathcal{A}' = (S, A, \delta, q_0, S \backslash F)$. Imamo da je $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = L^C$, pa je na osnovu Kleene-jeve teoreme (teorema 1.3) jezik L^C regularan.
3. Po prethodnoj tački imamo da su jezici K^C i L^C regularni. Njihova unija takođe je regularna, pa i komplement te unije. Kako je $K \cap L = (K^C \cup L^C)^C$, imamo da je $K \cap L$ regularan jezik.

   $K \backslash L = K \cap L^C$, pa imamo da je $K \backslash L$ regularan jezik.
4. Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$. Neka je $\psi(a_i) = w_i$. Jezik $L \subseteq A^*$ je regularan, pa postoji regularan izraz α nad azbukom A, takav da je $\mathcal{L}(\alpha) = L$. Zamenom svakog slova $a_i \in A$ u regularnom izrazu α odgovarajućom rečju $w_i \in B^*$ dobijamo regularan izraz α' nad azbukom B, za koji važi $\mathcal{L}(\alpha') = \psi(L)$. Sledi da je $\psi(L)$ regularan jezik.
5. Kako je jezik $K \subseteq B^*$ regularan, na osnovu teoreme Myhill-Nerode (teorema 2.10) znamo da postoji leva kongruencija ρ konačnog indeksa (recimo n) na skupu reči B^*, takva da je $B^* = [w_1]_\rho \cup [w_2]_\rho \ldots [w_k]_\rho \cup [w_{k+1}]_\rho \cup \ldots [w_n]_\rho$ i $K = [w_1]_\rho \cup [w_2]_\rho \ldots [w_k]_\rho$.

   Definišimo relaciju ρ' na skupu reči A^* sa:

   $$u \rho' v \Leftrightarrow \psi(u) \rho \psi(v).$$

   Kako je ρ' definisana ekvivalencijom, iz činjenice da je ρ relacija ekvivalencije lako je uvideti da je to i relacija ρ'.

   Neka je $u \rho' v$ i neka je $w \in A^*$. Dokažimo da je $uw \ \rho' \ vw$. Po definiciji imamo da je $\psi(u) \ \rho \ \psi(v)$. Kako je ψ homomorfizam, a ρ leva kongruencija imamo da je

   $$\psi(uw) = \psi(u)\psi(w) \ \rho \ \psi(v)\psi(w) = \psi(vw).$$

Sledi da je $uw\ \rho'\ vw$, pa je ρ' leva kongruencija na A^*.

Po definiciji relacije ρ', slike reči iz B^* iz iste ρ-klase su reči iz A^* koje pripadaju istoj ρ'-klasi. Sledi da je broj ρ'-klasa manji ili jednak broju ρ-klasa, pa je njihov broj konačan, te je ρ' leva kongruencija konačnog indeksa na skupu A^*.

Konačno, imamo da je

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(K) &= \{v \in B^* \mid \psi(v) \in K\} \\ &= \{v \in B^* \mid \psi(v)\ \rho\ w_1\} \cup \ldots \cup \{v \in B^* \mid \psi(v)\ \rho\ w_k\},\end{aligned}$$

što je unija k ili manje ρ'-klasa. Na osnovu teoreme Myhill-Nerode (teorema 2.10) sledi da je $\psi^{-1}(K)$ regularan jezik.

■

Primer 1.1 Nad jednoslovnom azbukom $A = \{a\}$, jezik L koji se sastoji od svih reči parne dužine je regularan, naime možemo ga predstaviti regularnim izrazom $(aa)^*$. Njegov komplementarni jezik $L' = A^* \backslash L$, koji sadrži sve reči neparne dužine je takođe regularan, na osnovu prethodne teoreme. Regularni izraz za ovaj jezik je $a \cdot (aa)^*$ □

Poznajući teoremu 1.1 u regularnim izrazima možemo koristiti i dodatne operacijske simbole $-$ i $^+$, gde $-$ predstavlja razliku skupova, a $L^+ = L + L^2 + L^3 \ldots$. Ako $\lambda \notin L$ tada je $L^+ = L^* \backslash \{\lambda\}$, a u suprotnom $L^+ = L^*$.

1.1.2 Konačni automati

Sada kako smo definisali regularne jezike predstavićemo i "mašine" koje ih raspoznaju. U pitanju su konačni automati.

Definicija 1.1 ***Deterministički konačni automat*** $\mathcal{A}$ *nad azbukom* A *je uredjena petorka* (S, A, δ, q_0, F)*, gde je* S *konačan skup stanja,* q_0 *početno stanje,* $F \subseteq S$ *skup završnih stanja, i* $\delta : S \times A \to S$ *funkcija prelaza.*

Lako je uočiti da je relaciju prelaza iz definicije možemo proširiti na sledeći način:

$$\hat{\delta} : S \times A^* \to S$$

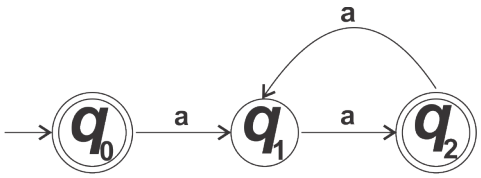
$$\begin{aligned}&(1) \qquad \hat{\delta}(q, \lambda) = q \\ &(2) \quad \hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)\end{aligned}$$

kako bismo mogli da razmišljamo o ulaznoj reči kao celini. U daljem tekstu, ova funkcija označavaće se istim simbolom δ kao i funkcija iz definicije, radi jednostavnijeg zapisa.

Ako se polazeći iz početnog stanja nakon učitane reči, automat nalazi u završnom stanju, kažemo da **automat prihvata** tu **reč**. Skup svih reči koje automat $\mathcal{A}$ prihvata, nazivamo **jezik determinističkog automata** $\mathcal{A}$, i označavamo sa $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Dakle,

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) := \{w \mid \delta(q_0, w) \in F\}.$$

Primer 1.2 Na slici 1.1 vidimo deterministički konačan automat $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a\}, \{(q_0, a, q_1)(q_1, a, q_2)(q_2, a, q1)\}, q_0, \{q_0, q_2\})$. Jezik ovog automata je skup reči parne dužine, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (aa)^*$ $\square$



Slika 1.1: deterministički automat $\mathcal{A}$: Kružići (čvorovi) predstaljaju stanja, a usmerene linije (grane) označene slovima azbuke predstavljaju funkciju prelaza. Strelica sa strane ukazuje na početno stanje, a završna stanja su zaokružena stanja.

Uvodimo i nedeterministički konačan automat, koji se od determinističkog razlikuje po tome što pri učitavanju slova može postojati više mogućnosti za prelaz u sledeće stanje, a sa druge strane neki prelazi i ne moraju biti definisani. Tako ćemo u sledećoj definiciji funkciju prelaza redefinisati.

Definicija 1.2 ***Nedeterministički konačni automat*** $\mathcal{A}$ *nad azbukom* A *je uredjena petorka* (S, A, δ, q_0, F)*, gde je* S *konačan skup stanja,* q_0 *početno stanje,* $F \subseteq S$ *skup završnih stanja, i* $\delta : S \times A \to \mathcal{P}(S)$ *funkcija prelaza.*

Kao i u slučaju determinističkog automata, proširujemo funkciju prelaza na reči:

$$\hat{\delta} : S \times A^* \to \mathcal{P}(S)$$

$$(1) \qquad \hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$$

$$(2) \qquad \hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a)$$

Dalje imamo sledeće proširenje:

$$\hat{\hat{\delta}} : \mathcal{P}(S) \times A^* \to \mathcal{P}(S)$$

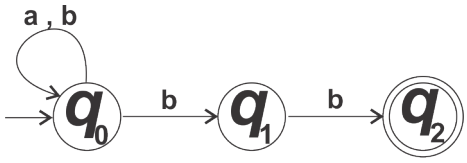
$$\hat{\hat{\delta}}(X, w) = \bigcup_{q \in X} \hat{\delta}(q, w)$$

Kao i u prethodnom slučaju u daljnjem će se upotrebljavati isti simbol δ i za ove novodefinisane funkcije.

Jezik nedeterminističkog automata $\mathcal{A}$ definišemo na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) := \{w \mid \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Primer 1.3 Na slici 1.2 vidimo primer nedeterminističkog konačnog automata $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{(q_0, a, q_0)(q_0, b, q_0)(q_0, b, q_1)(q_1, b, q_2)\}, q_0, \{q_2\})$. Jezik ovog automata su reči nad azbukom $\{a, b\}$ koje se završavaju sa bb. Ovaj jezik možemo predstaviti regularnim izrazom $\{a + b\}^*bb$ □



Slika 1.2: nedeterministički automat $\mathcal{A}$

Sledeća teorema ukazaće nam na to da se ove dve vrste automata u suštini i ne razlikuju, u smislu jezika koji prihvataju.

Teorema 1.2 *Za dati nedeterministički konačan automat* $\mathcal{A} = (S, A, \delta, q_0, F)$ *postoji deterministički konačan automat* $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}(S), A, \delta', q_0, F')$*, gde je:*

$$F' = \{X \subseteq S | X \cap F \neq \emptyset\}$$
$$\delta' : \mathcal{P}(S) \times A \to \mathcal{P}(S)$$
$$\delta'(X, a) = \bigcup_{q \in X} \delta(q, a)$$

za koji važi $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \mathcal{L}(\mathcal{A})$*. Dakle, za svaki nedeterministički konačan automat postoji ekvivalentan deterministički konačan automat.* ■

Dosadašnji primeri ukazuju na nekakvu vezu izmedju regularnih jezika i konačnih automata. Sledeća teorema govori o tome.

Teorema 1.3 (Kleene-jeva teorema) *Jezik L je jezik nekog konačnog determinističkog automata ako i samo ako je regularan.*■

Dakle, konačni automati su mašine koje raspoznaju regularne jezike.

Navedimo još jedno poznato tvrđenje, koje nam daje način za dokazivanje da odredjeni jezik nije regularan.

Teorema 1.4 (Pumping Lema) *Neka je L regularan jezik. Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takvo da za svaku reč* $z \in L, |z| \geq n_0$ *postoje* $u, v, w \in A^*$ *takve da je* $z = uvw, |uv| \leq n_0, v \neq \lambda$ *i* $uv^iw \in L$ *za sve* $i \geq 0$. ■

Primer 1.4 Jezik L svih reči oblika a^nb^n (sadrži isključivo reči ovog oblika) nije regularan. Ako pretpostavimo suprotno, za n_0 iz Pumping leme imamo: $z = a^{n_0}b^{n_0} \in L, z = uvw, |uv| \leq n_0$ pa je $v = a^k$ za neko $0 < k \leq n_0$. Sledi da je $uv^2w = a^{n_0+k}b^{n_0} \in L$. Kontradikcija. Dakle jezik L nije regularan. □

Sledeća teorema govori o tome da možemo efektivno utvrditi da li je jezik automata prazan.

Teorema 1.5 *Problem praznosti za konačan automat je odlučiv.*

Dokaz:
Automat prihvata neku reč ako i samo ako postoji staza od početnog do nekog završnog stanja. Ovo se efektivno testira u linearnom vremenu (vreme proporcionalno broju prelaza) koristeći breadth-first pretragu. ■

1.1.3 Konvolucija i automat sa n traka

Neka je A data azbuka. Azbuku $A_\$$ definišemo kao $A \cup \{\$\}$, gde je \$ simbol koji nije u A.

DEFINICIJA 1.3 ***Konvolucija uređene n-torke*** $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in A^{*n}$ *je reč* $\otimes(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *dužine* $\max_{i=1,2,\ldots,n} |w_i|$ *nad azbukom* $A^n_\$$*, čije je k-to slovo* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, gde je* a_i *k-to slovo reči* w_i *ako je* $|w_i| \geq k$*, a* \$ *u suprotnom.*

Dakle, konvolucija n reči (uredjene n-torke reči) je jedna reč sastavljena od uređenih n-torki slova. Te n-torke se dobijaju čitajući zadate reči istovremeno slovo po slovo, a kada ponestane slova u nekoj od reči, sledi simbol \$, sve dok se ne pročita i poslednje slovo najduže reči.

Primer 1.5 Neka je $w_1 = abbaab, w_2 = abba, w_3 = aaabb$. Konvolucija ovih reči je:

$$\otimes(w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} a & b & b & a & a & b \\ a & b & b & a & \$ & \$ \\ a & a & a & b & b & \$ \end{pmatrix}$$

Kolone ove matrice predstavljaju slova dobijene reči. □

Pošto smo konvolucijom više reči dobili jednu reč, a znamo da reči možemo čitati automatima i odlučiti da li pripadaju određenom regularnom jeziku, definisaćemo i automat koji čita konvoluciju uređene n-torke, odnosno čita n reči istovremeno.

DEFINICIJA 1.4 ***Automat sa*** n ***traka*** *nad azbukom* A *je konačan automat nad azbukom* $A^n_\$$.

DEFINICIJA 1.5 ***Konvolucija relacije*** $R \subseteq A^{*n}$ *je relacija* $\otimes R \subseteq (A^n_\$)^*$ *dobijena kao skup konvolucija svih uredjenih n-torki iz R:*

$$\otimes R = \{\otimes(w_1, w_2, \ldots, w_n) \mid (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in R\}.$$

Primetimo da je po svojoj definiciji automat sa n traka isti kao i konačni automat (sa jednom trakom), samo nad drugačijom azbukom, pa i za njega važe sva prethodna tvrđenja.

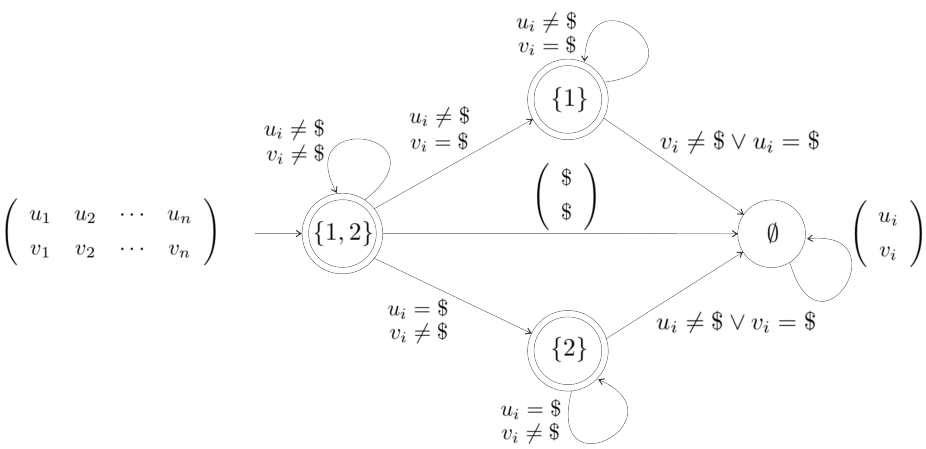
Ipak, moramo obratiti pažnju na činjenicu da ovako definisan automat sa n traka ne prihvata samo konvolucije reči, pošto automat po svojoj definiciji "ne zna" koja su prethodno učitana slova, a konvolucije imaju tu specifičnost da se nakon učitanog simbola \$ na nekoj koordinati slova ne može naći ni jedan drugi simbol osim \$ na toj koordinati narednih slova.

Ova činjenica međutim neće predstavljati problem, jer možemo konstruisati automat sa n traka koji odlučuje da li je uneta reč konvolucija neke uređene n-torke (primer 1.6).

Definicija 1.6 *Za (n-arnu) relaciju čija je konvolucija jezik nekog automata (sa n traka) kažemo da je* ***FA-prepoznatljiva relacija*** *(FA- finite automaton). Za takvu relaciju kažemo i da je* ***regularna****.*

To što relaciju iz prethodne definicije nazivamo i regularnom nije slučajnost, naime imamo da za svaku n-arnu FA-prepoznatljivu relaciju postoji regularan izraz nad azbukom $A_{\$}^{n}$ koji je predstavlja.

Primer 1.6 Na slici 1.3 vidimo automat sa 2 trake čiji je jezik $\otimes A^{*2}$. Stanja automata odgovaraju skupovima koordinata na kojima se još nije pojavio simbol \$. Na isti način može se konstruisati automat sa n traka čiji je jezik $\otimes A^{*n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Imamo da je $\otimes A^{*n}$ regularan jezik. $\square$

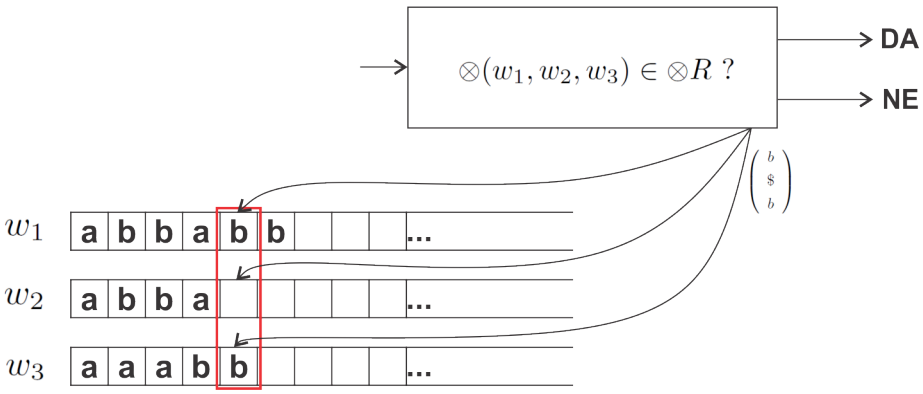


Slika 1.3: Automat sa 2 trake čiji je jezik $\otimes A^{*2}$

Automati imaju svoj jezik (skup svih reči koje prihvataju). Kako automat sa n traka obrađuje konvolucije reči, njegov jezik, pri "pravilnom unosu" čine prihvaćene konvolucije uređenih n-torki, pa je jezik ovog automata konvolucija neke n-arne relacije. Kako bismo "eliminisali mogućnost nepravilnog unosa", jezik ovog automata presecamo jezikom $\otimes A^{*n}$. Kako su oba jezika regularna, regularan je i presek. Sada na osnovu Kleene-jeve teoreme imamo da postoji automat čiji je jezik konvolucija odgovarajuće relacije (odbačeni "nepravilni unosi").

Automat sa n traka možemo zamisliti i kao Turingovu mašinu koja ima n ulaznih traka, sa kojih može samo da čita sleva nadesno, istovremeno sa svih traka i da prihvati ili odbaci unos, odnosno da odgovori na pitanje da li su unete reči u relaciji koja je jezik tog automata. (Slika 1.4)

Sledeća teorema ukazaće na načine na koje možemo modifikovati FA-prepoznatljivu relaciju, tako da ona ostane FA-prepoznatljiva.



Slika 1.4: Automat sa 3 trake

Teorema 1.6 *Neka su R_1 i R_2 n-arne FA-prepoznatljive relacije na rečima nad azbukom A. Tada su i sledeće relacije su FA-prepoznatljive:*

1. $R_1 \cup R_2$,
2. $R_1 \cap R_2$,
3. $R_1 \backslash R_2$,
4. *projekcija prve koordinate R_1:*
   $\{(w_2, w_3, \ldots, w_n) \mid (\exists w_1)(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in R_1\}$,
   (Po konvenciji, je za $n = 1$ ovaj skup je prazan ako je R_1 prazan skup, a $\{\lambda\}$ u suprotnom.)
5. *instantacija prve koordinate R_1:*
   $\{(w_2, w_3, \ldots, w_n) \mid (w, w_2, \ldots, w_n) \in R_1\}$ *za fiksiranu reč w,*
6. *cilindrifikacija prve koordinate R_1:*
   $\{(w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}) \mid (w_2, w_3, \ldots, w_{n+1}) \in R_1\, w_1 \in A^*\}$,
7. *permutacija koordinata R_1:*
   $\{(w_{\pi(1)}, w_{\pi(2)}, \ldots, w_{\pi(n)}) \mid (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in R_1\}$ *za fiksiranu permutaciju π na $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Dokaz:

1., 2., i *3.* su posledica teoreme teoreme 1.1, imajući u vidu da su FA prepoznatljive n-arne relacije jezici automata sa n traka, pa su to regularni jezici, za koje se može primeniti navedeno tvrđenje.

U daljem dokazu, neka je $\mathcal{A} = (S, A_\$^n, \delta, q_0, F)$ konačan deterministički automat koji prepoznaje relaciju R_1. Konstruišimo sada automate koji prepoznaju odgovarajuće relacije iz tvrđenja.

4. Traženi (nedeterministički) automat je $\mathcal{A}' = (S, A_\$^{n-1}, \delta', q_0, F')$, gde je:
$q \in \delta'(s, (a_2, \ldots, a_{n-1}))$ ako i samo ako je $\delta(s, (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})) = q$ za neko $a_1 \in A_\$$. $F' = \{q \in S \mid \delta(q, \otimes(w, \lambda, \ldots, \lambda)) \in F, w \in A_\$^*\}$
Dakle, $\mathcal{A}'$ prihvata $\otimes(w_2, \ldots, w_n)$ ako i samo ako postoje w, w_1 takvi da

$\mathcal{A}$ prihvata $\otimes(w_1 \cdot w, w_2, w_3, \ldots, w_n)$. Jezik ovog automata je:
$\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \{\otimes(w_2, \ldots, w_n) \mid (\exists w_1) \otimes (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \otimes R_1\}$.
Primetimo da za n=1 dobijamo skup koji se slaže sa konvencijom iz formulacije.

5. Neka je data reč $w \in A^*$. Prvo ćemo konstruisati automat $\mathcal{B}$ ekvivalentan datom automatu $\mathcal{A}$ sa svojstvom da svake dve staze novog automata koje počinju u početnom stanju q_0 imajuju jedino q_0 kao zajedničko stanje medju svojih prvih $|w| + 1$ stanja.

Sledeći korak je modifikacija dobijenog automata, tako dobijamo novi automat $\mathcal{B}'$. Neka je P skup svih (usmerenih) staza koje počinju u q_0, a sadrže $|w|+1$ stanje. Sada uklonimo sve sve staze iz P (uklanjajući grane prelaza) koje nisu označene sa w. Sa preostalim stazama u P uradićemo sledeće: za stazu $q_0, q_1, \ldots, q_{|w|}$ uklonimo grane prelaza iz $q_{|w|}$ koje nisu označene slovom azbuke $A^n_\$$ sa prvom komponontom \$. Na kraju, ako neka od staza iz P sadrži završno stanje, uklonimo to stanje iz skupa završnih stanja. Automat $\mathcal{B}'$ prihvata $\otimes(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ako i samo ako je $w_1 = w$ i ako je ta reč prihvaćena i u polaznom automatu $\mathcal{A}$.

Primenom cilindrifikacije prve koordinate na jezik automata $\mathcal{B}'$, odnosno prethodne tačke ove teoreme, dobijamo automat $\mathcal{A}'$ koji prihvata konvoluciju tražene relacije.

6. Konstruišemo automat $\mathcal{A}' = (S, A^{n+1}_\$, \delta', q_0, F)$ gde je za svako $a_1 \in A_\$$ $\delta'(s, (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})) = \delta(s, (a_2, \ldots, a_{n+1}))$. Presek automata $\mathcal{A}'$ i automata čiji je jezik $\otimes A^{*(n+1)}$ daje automat koji prihvata konvoluciju tražene relacije.

7. Konstruišemo automat $\mathcal{A}' = (S, A^n_\$, \delta', q_0, F)$ gde je
$\delta'(s, (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \ldots, a_{\pi(n)})) = \delta(s, (a_1, a_2, \ldots, a_n))$.
Ovaj automat prihvata kovnoluciju tražene relacije.

■

7. implicira da *4.,5.,6.* važe za sve koordinate relacije, ne samo za prvu kao što je gore formulisano.

Definišimo sada neke uobičajene binarne relacije nad azbukom A, koje će se koristiti ubuduće.

Neka su $u, v \in A^*$. Definišemo sledeće relacije:

- **relacija prefiksa**: $u \leq_p v \Leftrightarrow (\exists w \in A^*)(v = uw)$. Za $w \neq \lambda$ imamo $u <_p v$. Ova relacija je parcijalno uređenje na A^*.
- Neka $<$ linearno uređuje azbuku A. Definišemo **leksikografsko** $<_{lex}$ **uređenje** na rečima indukovano relacijom $<$.
  $u <_{lex} v$ ako:
  1. $u <_p v$, ili
  2. $u = w_1 a w_2$ i $v = w_1 b w_3$, za neke $w_i \in A^*$, $a, b \in A$ takve da je $a < b$

  Definišemo i $\leq_{lex}$ na prirodan način.

- **Dužinsko leksikografsko uređenje** $<_{llex}$. $u <_{llex} v$ ako:
  1. $|u| < |v|$, ili
  2. $|x| = |y|$ i $x <_{lex} y$

  Definišemo i $\leq_{llex}$ na prirodan način. Ova relacija je linearno uređenje skupa A^* svih reči. Ovo uređenje je dobro definisano.

Primer 1.7 *Relacije* $<_p, <_{lex}$ *i* $<_{llex}$ *su regularne.*
Neka je na primer $A = \{0, 1\}$ i $0 < 1$. Regularni izraz za relaciju $<_p$ je:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^* \cdot \left[\begin{pmatrix} \$ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \$ \\ 0 \end{pmatrix}\right]^*$$

Regularni izraz za relaciju $\leq_{lex}$ je:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^* \cdot \left[\left[\begin{pmatrix} \$ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \$ \\ 0 \end{pmatrix}\right]^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\otimes A^{*2})\right]$$

Slično se definiše i regularan izraz koji opisuje relaciju $\leq_{llex}$.

Za ove relacije možemo napisati odgovarajuće regularne izraze nad bilo kojom uređenom konačnom azbukom.
Drugi način da se dokaže regularnost relacija je konstrukcija automata sa n traka čiji je jezik data relacija. □

Važna napomena:
Dužinsko leksikografsko uređenje je dobro uređuje skupa svih reči nad proizvoljnom konačnom azbukom. Lako je uvideti da možemo definisati bijekciju između $(A^*, \leq_{llex})$ i $(\omega, \leq_{ord})$. Imamo da je broj svih mogućih reči nad konačnom azbukom prebrojiv.

Kao posledicu imamo da je svaka FA-prepoznatljiva relacija najviše prebrojiva.

1.2 Strukture

1.2.1 Relacione strukture

Definicija 1.7 ***Strukturu*** $\mathcal{S}$ *čine skup* S *koji nazivamo nosač, ili domen, zatim relacije i operacije na skupu* S *i konstante. Konstante možemo smatrati unarnim relacijama kardinalnosti 1* ($c \to \{c\}$).

Tip strukture $\mathcal{S}$ *čine nazivi (simboli) i arnosti relacija i operacija te strukture.*

Obično strukturu konačnog tipa označavamo kao:

$$\mathcal{S} = (S, R_1^{\mathcal{S}}, R_2^{\mathcal{S}}, \ldots, R_k^{\mathcal{S}}, f_1^{\mathcal{S}}, f_2^{\mathcal{S}}, \ldots, f_t^{\mathcal{S}}),$$

dok se arnosti relacija i funkcija navode posebno.

Kada ne postoji mogućnost zabune, odnosno kad je jasno na koju strukturu se odnose relacije i funkcije, možemo izostaviti eksponente u gornjem zapisu. U tom slučaju praktično je strukture označiti na sledeći način:

$$\mathcal{S} = (S, R_1^{n_1}, R_2^{n_2}, \ldots, R_k^{n_k}, f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, \ldots, f_t^{m_t}).$$

S je nosač, $R_i^{n_i}$ su fundamentalne relacije, a $f_j^{m_j}$ fundamentalne funkcije strukture $\mathcal{S}$, gde eksponenti predstavljaju arnosti relacija odnosno operacija.

DEFINICIJA 1.8 ***Relaciona struktura*** *je struktura koja nema operacije, već samo relacije.*

Strukture lako možemo predstaviti u obliku relacionih struktura, tako što ćemo svaku operaciju zameniti **grafom te operacije**, koja je relacija definisana na sledeći način:

$$Graph(f_j^{m_j}) = \{(s_1, s_2, \ldots, s_{m_j}, s) \mid f_j^{m_j}(s_1, s_2, \ldots, s_{m_j}) = s\}.$$

Dakle, relaciona struktura koja odgovara prethodno navedenoj strukturi izgleda ovako:

$$\mathcal{S} = (S, R_1^{n_1}, R_2^{n_2}, \ldots, R_k^{n_k}, Graph(f_1^{m_1}), Graph(f_2^{m_2}), \ldots, Graph(f_t^{m_t})).$$

Nadalje ćemo govoriti o relacionim strukturama. U ovom radu ćemo posmatrati strukture sa prebrojivim nosačem, jer strukture sa neprebrojivim nosačem ne možemo okarakterisati automatima.

1.2.2 Teorija strukture

Dalje definišemo formule i teoriju date strukture.

DEFINICIJA 1.9 ***$\mathcal{S}$-formula*** *je formula $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u kojoj su svi simboli osim logičkih iz tipa strukture $\mathcal{S}$.*

Za uređenu n-torku promenljivih $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koristimo i oznaku $\bar{x}$ ukoliko ne može doći do zabune. Isti je slučaj i za neku valuaciju ove uređene n-torke $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, koju označavamo sa $\bar{s}$. Umesto $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ možemo pisati $\phi(\bar{x})$, odnosno $\phi(\bar{s})$ umesto $\phi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

DEFINICIJA 1.10 ***Teorija prvog reda strukture*** *$\mathcal{S}$, u oznaci $Th(\mathcal{S})$, je skup svih rečenica (formula bez slobodnih promenjivih) prvog reda koje važe (su tačne) u strukturi $\mathcal{S}$. Dakle, $Th(\mathcal{S}) := \{\phi \mid \phi$ je rečenica, $\mathcal{S} \models \phi\}$*

Za teoriju kažemo da je odlučiva ako postoji algoritam koji za proizvoljnu rečenicu prvog reda odlučuje da li ona pripada toj teoriji.

1.2.3 Izomorfnost struktura, definabilnost skupova i interpretabilnost (definabilnost) struktura

DEFINICIJA 1.11 *Dve relacione strukture $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ istog tipa su **izomorfne** ako postoji bijekcija $\psi : S \to T$ između nosača ovih struktura, takva da za svaki relacioni simbol R arnosti n, i svaku uredjenu n-torku elemenata iz S važi: $\bar{s} \in R^{\mathcal{S}}$ ako i samo ako $\psi(\bar{s}) \in R^{\mathcal{T}}$*

Tip izomorfizma strukture je klasa svih struktura koje su joj izomorfne.

DEFINICIJA 1.12 ***Skup*** $X \subseteq S^l$ ***je definabilan u logici prvog reda u strukturi*** $\mathcal{S}$ *ako postoji* $\mathcal{S}$*-formula prvog reda* $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ *takva da je*

$$(s_1, s_2, \ldots s_l) \in X \Leftrightarrow \mathcal{S} \models \phi(s_1, s_2, \ldots, s_l).$$

DEFINICIJA 1.13 *Struktura* $\mathcal{T}$ *je* ***interpretabilna (definabilna) u logici prvog reda u strukturi*** $\mathcal{S}$ *ako postoje prirodan broj* k*, podskup* $X \subseteq S^k$ *i sirjektivna funkcija* $f : X \to T$*, takvi da je inverzna slika (u odnosu na funkciju* f^l*) svakog skupa* $Y \subseteq T^l$ *definabilnog u logici prvog reda u strukturi* $\mathcal{T}$*, definabilna u logici prvog reda u strukturi* $\mathcal{S}$*.* k *nazivamo* ***dimenzijom interpretacije (definicije)****.*

Da bi se proverila definabilnost u $\mathcal{S}$ inverzne slike svakog skupa definabilnog u $\mathcal{T}$, dovoljno je proveriti inverzne slike sledećih skupova definabilnih u $\mathcal{T}$:

- domen strukture $\mathcal{T}$ (skup X),
- dijagonalna relacija na domenu strukture $\mathcal{T}$ ($\ker(f)$),
- svaka relacija iz tipa strukture $\mathcal{T}$,
- graf svake operacije iz tipa strukture $\mathcal{T}$.

Jezgro funkcije $f : X \to T$ iz prethodne definicije je relacija ekvivalencije $\rho := ker(f)$ na skupu X. Neka je $\bar{s} \in X$. Tada bijektivna funkcija $F : X/\rho \to T$ definisana sa

$$F([\bar{s}]_\rho) = t \Leftrightarrow f(\bar{s}) = t$$

preslikava klase ekvivalencije relacije ρ na odgovarajuće elemente skupa T. Dakle, svaki element skupa T možemo poistovetiti sa klasom ekvivalencije relacije ρ koju funkcija F preslikava na dati element.

Primetimo da je relacija ρ definabilna u logici prvog reda nad strukturom $(X \cup T, f)$ kao skup

$$\rho = \{(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \mid f(\bar{s}_1) = f(\bar{s}_2)\}.$$

Za relaciju ρ iz prethodnog razmatranja faktor struktura $\mathcal{X}/\rho$ je istog tipa kao struktura $\mathcal{X}$, koja je istog tipa kao struktura $\mathcal{S}$. Domen faktor strukture $\mathcal{X}/\rho$ je skup klasa ekvivalencije $[\bar{s}]_\rho$, gde je $\bar{s} \in X$. Fundamentalna relacija $R^{\mathcal{X}/\rho}$ arnosti r definisana je sa:

$$([\bar{s}_1]_\rho, [\bar{s}_2]_\rho, \ldots, [\bar{s}_r]_\rho) \in R^{\mathcal{X}/\rho} \Leftrightarrow (\exists \bar{s}_1)(\exists \bar{s}_2) \ldots (\exists \bar{s}_r)(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_r) \in R^{\mathcal{X}},$$

gde je $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_r) \in R^{\mathcal{X}}$ ako i samo ako je za svako $1 \leq j \leq r$ $\bar{s}_j \in X$ i za svako $1 \leq i \leq k$ važ $(s_{1,i}, s_{2,i}, \ldots s_{r,i}) \in R^{\mathcal{S}}$, gde je $s_{j,i}$ i-ti element k-torke $\bar{s}_j$.

U mogućnosti smo, međutim, da u strukturi $\mathcal{S}$ u logici prvog reda definišemo strukturu $\mathcal{T}$ koja nije istog tipa kao struktura $\mathcal{S}$.

Neka je struktura $\mathcal{T} = (T, Q_1^{\mathcal{T}}, Q_2^{\mathcal{T}}, \ldots, Q_m^{\mathcal{T}})$ interpretabilna dimenzije k u logici prvog reda u strukturi $\mathcal{S} = (S, R_1^{\mathcal{S}}, R_2^{\mathcal{S}}, \ldots, R_n^{\mathcal{S}})$. Po definiciji interpretabilnosti imamo da postoje skup $X \subseteq S^k$, sirjektivna funkcija $f : X \to T$ i $\mathcal{S}$-formula $D(\bar{x})$, takvi da je

$$\mathcal{S} \models D(\bar{s}) \Leftrightarrow \bar{s} \in X \Leftrightarrow f(\bar{s}) \in T.$$

Dalje, za svako $1 \leq j \leq m$ za relaciju $Q_j^{\mathcal{T}}$ arnosti r_j postoji S-formula $\phi_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{r_j})$, takva da je

$$X \models \phi_j(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_{r_j}) \Leftrightarrow \bar{s}_1 \in X \wedge \bar{s}_2 \in X \wedge \ldots \wedge \bar{s}_{r_j} \in X \wedge \\ \wedge \ Q_j^{\mathcal{T}}(f(\bar{s}_1), f(\bar{s}_2), \ldots f(\bar{s}_{r_j})).$$

Uvedimo sada novu oznaku.

Notacija: Za datu $\mathcal{S}$-formulu $\phi(\bar{x})$ sa n promenljivih definišimo skup $\phi(\mathcal{S})$ kao skup svih $\bar{s} \in S^n$ koji zadovoljavaju formulu $\phi(\bar{x})$, odnosno:

$$\phi(\mathcal{S}) := \{\bar{s} \in S^n \mid \mathcal{S} \models \phi(\bar{s})\}.$$

Primetimo da je $D(\mathcal{S}) = X$. Neka je $\mathcal{X} = \mathcal{S}|_X$. Imamo da je $Q_j^{\mathcal{T}} \cong \phi_j(\mathcal{X})/\rho = \phi_j(\mathcal{S})|_X/\rho$, gde je $\rho = \ker(f)$. Kako je i $T \cong D(\mathcal{S})/\rho = D(\mathcal{X})/\rho = X/\rho$ imamo da je

$$\mathcal{T} \cong (D(\mathcal{S}), \phi_1(\mathcal{S})|_{D(\mathcal{S})}, \ldots, \phi_m(\mathcal{S})|_{D(\mathcal{S})})/\rho.$$

Sada interpretabilnost (definabilnost) strukture u logici prvog reda možemo definisati i na sledeći način:

Definicija 1.14 *Neka je $\mathcal{S}$ relaciona struktura i neka su*

$$D(\bar{x}), \phi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{r_1}), \ldots, \phi_m(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{r_m})$$

$\mathcal{S}$-formule prvog reda, gde su sve torke promenljivih $\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$ iste dužine k. Neka je $\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ $\mathcal{S}$-formula prvog reda, takva da je $\rho^{D(\mathcal{S})}$ relacija ekvivalencije na skupu $D(\mathcal{S}) \subseteq S^k$.

Za faktor strukturu

$$(D(\mathcal{S}), \phi_1(\mathcal{S})|_{D(\mathcal{S})}, \ldots, \phi_m(\mathcal{S})|_{D(\mathcal{S})})/\rho^{D(\mathcal{S})}$$

*kažemo da je **interpretabilna (definabilna) u logici prvog reda u strukturi $\mathcal{S}$**. k se naziva **dimenzija interpretacije (definicije)**.*

Glava 2

Automatske i FA-prezentabilne strukture

Ova glava bavi se relacionim strukturama koje se mogu predstaviti skupom automata. Kao što smo videli u prethodnoj glavi, jezici konačnih automata, regularni jezici, su zapravo skupovi reči određene forme (regularni izrazi), pa se na taj način uz pomoć konačnog skupa simbola (konačne azbuke) mogu opisati beskonačni skupovi.

Uveli smo automate sa n traka kako bismo njima opisali n-arne relacije, u smislu da su te relacije jezici tih automata. Dakle, odredjene relacije, kao i skupovi koji su nosači struktura (koji su opet unarne relacije ili relacije veće arnosti, ako se na primer definiše neka podstruktura ili struktura kongruencije neke strukture) mogu se opisati konačnim automatima sa n traka, u smislu da konvolucija tih relacija budu jezici ovih automata.

Ova glava ima zadatak da ispita koje uslove treba da zadovolji određena struktura da bi se mogla predstaviti na ovaj način.

U drugom delu glave biće izložena klasifikacija nekih značajnih struktura, za koje je poznata potpuna klasifikacija u smislu predstavljivosti konačnim automatima.

2.1 Osnovne definicije i primeri

Definicija 2.1 *Relaciona struktura $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots, R_n)$ je* ***automatska nad azbukom*** *A ako su njen domen i relacije prepoznatljive konačnim automatima (FA-prepoznatljive) nad azbukom A, odnosno $A_{\$}^{r_i}$ gde je gde je r_i, $i = 1, \ldots, n$ arnost odgovarajuće relacije.*

Struktura $\mathcal{S}$ je ***automatska*** *ako je automatska nad nekom konačnom azbukom.*

U slučaju struktura beskonačnog tipa, za $(R_i)_{i<\omega}$ potrebno je i da postoji algoritam za funkciju koja preslikava indeks i na odgovarajući automat.

Kako u matematici, iz praktičnih razloga, domen neke konkretne beskonačne strukture uglavnom ne doživljavamo kao neki formalni jezik nad konačnom azbukom, već kao neki beskonačan skup vrednosti, uvodimo još jedan pojam:

DEFINICIJA 2.2 *Neka je $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots, R_n)$ relaciona struktura. Neka je L regularan jezik nad konačnom azbukom A, i neka je $\psi : L \to S$ sirjektivni homomorfizam. (L, ψ) je* ***automatska prezentacija*** *strukture $\mathcal{S}$ ako:*

1. *relacija $L_= = \{(w_1, w_2) \in L^2 \mid \psi(w_1) = \psi(w_2)\}$ je regularna, i*
2. *za svako R_i arnosti r_i relacija $L_{R_i} = \{(w_1, \ldots, w_{r_i}) \in L^{r_i} \mid R_i(\psi(w_1), \ldots, \psi(w_{r_i}))\}$ je regularna.*

Jasno je da je struktura $\mathcal{L} = (L, L_{R_1}, L_{R_2}, \ldots, L_{R_n})$ gde su nosač i relacije iz prethodne definicije, automatska struktura.

DEFINICIJA 2.3 *Ako za strukturu $\mathcal{S}$ postoji automatska prezentacija (L, ψ), za strukturu $\mathcal{S}$ kažemo da je* ***automatski prezentabilna****, odnosno* ***FA-prezentabilna****.*

Teorema 2.1 *Ako struktura ima automatsku prezentaciju, tada ta struktura ima i injektivnu automatsku prezentaciju.*

Dokaz ove teoreme navodi se na kraju sledećeg odeljka.

Ovaj rezultat nam garantuje da se svaka FA-prezentabilna struktura može predstaviti automatskom strukturom u kojoj je svaki element strukture jedinstveno predstavljen.

Jasno je da su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{L}$, gde je (L, ψ) injektivna automatska prezentacija strukture $\mathcal{S}$, strukture istog tipa.

U nekim slučajevima je ipak jednostavnije posmatrati neinjektivne automatske prezentacije. Tada se nameće **problem reči**: utvrditi da li dve date reči predstavljaju isti element strukture. Značajno je pitanje kompleksnosti ovog problema. O ovom problemu biće reči u slučaju automatskih grupa, u sledećoj glavi.

Kako važi teorema 2.1 daćemo novu definiciju FA-prezentabilnih struktura, koja se standardno koristi. Tako ćemo nadalje FA-prezentabilnim strukturama nazivati injektivne FA-prezentabilne strukture, dok će se prethodna definicija i odgovarajuća terminologija koristiti u slučaju grupa i polugrupa, u narednoj glavi.

DEFINICIJA 2.4 *Neka je $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots, R_n)$ relaciona struktura. Neka je L regularan jezik nad konačnom azbukom A, i neka je $\psi : L \to S$ izomorfizam. (L, ψ) je* ***automatska prezentacija*** *strukture $\mathcal{S}$ ako je za svako R_i arnosti r_i relacija $L_{R_i} = \{(w_1, \ldots, w_{r_i}) \in L^{r_i} \mid R_i(\psi(w_1), \ldots, \psi(w_{r_i}))\}$ je regularna.*

Primer 2.1 *Automatsko predstavljanje prirodnih brojeva nad jednoslovnom azbukom.*

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je po svojoj definiciji ordinal ω (uz poredak $\leq_{ord}$). Takva definicija prirodnih brojeva uz pomoć funkcije "naredni", daje nam mogućnost za automatsko predstavljanje strukture $(N, \leq)$ na prirodan način, nad jednoslovnom azbukom. Odgovarajuća automatska struktura je $(a^*, \leq_p)$, a automatska prezentacija (a^*, ψ), gde je $\psi : a^* \to N,\ \psi(a^n) = n$.

Kako je i operacija sabiranja prirodnih brojeva definisana funkcijom "naredni", sabiranje prirodnih brojeva možemo predstaviti kako konkatenaciju reči nad jednoslovnom azbukom. Dakle, automatska struktura strukture $(N, +, \leq)$ je $(a^*, \cdot, \leq_p)$. $\square$

Iako je ova prezentacija prirodna u odnosu na formalnu definiciju prirodnih brojeva, prirodne brojeve iz praktičnih razloga uglavnom ne doživljavamo na ovakav način, jer bi poredjenje, a naročito sabiranje i množenje velikih brojeva bio naporan posao. Zbog toga prirodne brojeve obično zapisujemo u dekadnom sistemu, dok računari koriste binarni sistem.

Primer 2.2 *Automatsko predstavljanje prirodnih brojeva u brojevnom sistemu baze k.*

Fiksirajmo k. Svaki prirodan broj n možemo na jedinstven način zapisati kao $\sum_{0 \leq i \leq m} n_i k^i$, gde su m, i prirodni brojevi, a $n_i \in 0, 1, \ldots, k-1$. Reč $n_m n_{m-1} \ldots n_0$ je uobičajeno predstavljanje prirodnog n broja u brojevnom sistemu baze k. Upravo to predstavljanje ćemo iskoristiti za konstrukciju automatske strukture nad azbukom $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

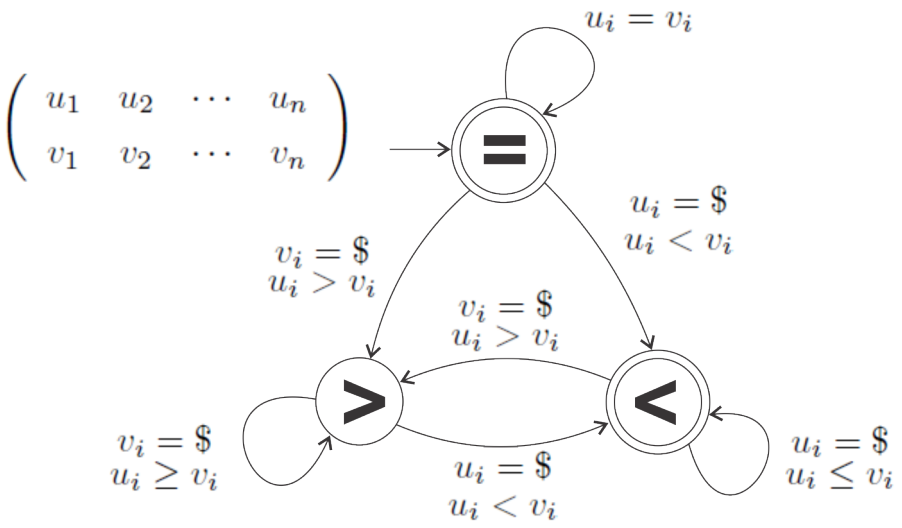
Kako bi dobijena automatska struktura bila upotrebljiva, odnosno da na njoj možemo definisati operacije sabiranja i množenja, predstavićemo brojeve kao nizove cifara koje čitamo zdesna nalevo: $n_0 n_1 \ldots n_m$.

Primetimo da je u ovako definisanoj automatskoj prezentaciji (u smislu definicije 2.2) svaki prirodan broj predstavljen sa beskonačno mnogo reči. Naime, kako su brojevi zapisani sa suprotnim redosledom cifara u odnosu na uobičajeni, na kraj ovakve reči možemo dodati proizvoljan broj 0, a da predstavljeni prirodan broj ostane isti. Ovaj problem se lako rešava ako ne dozvolimo reči koje se završavaju na 0. Jezik domena pri tome ostaje regularan, a dobijena automatska prezentacija je injektivna (odnosno tek sada imamo automatsku prezentaciju u smislu definicije 2.4), tj. svaki prirodan broj predstavljen je jedinstvenom reči.

Neka je $A = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $L = A^* \backslash (A^* \cdot 0)$ i neka funkcija $\psi : L \to N$, preslikava zapis prirodnog broja u brojevnom sistemu baze k unazad na odgovarajući prirodan broj.

L je regularan jezik, a relaciju poretka možemo predstaviti automatom na slici 2.1. Primetimo da je automatska struktura za $(N, \leq)$ struktura $(A^*, \overleftarrow{\leq_{llex}})$, gde relacija $\overleftarrow{\leq_{llex}}$ označava relaciju $\leq_{llex}$ na rečima čitanim u nazad. $\square$

Važna napomena:
Primetimo da se $\leq_{llex}$ poredak na rečima zapravo može definisati u svakoj automatskoj strukturi, kao restrikcija ove relacije na odgovarajući domen automatske strukture. Dakle, ako je struktura $(S, R_1, R_2, \ldots, R_n)$ automatska, tada je i struktura $(S, R_1, R_2, \ldots, R_n, \leq_{llex} |_S)$ automatska.
Ova činjenica biće korišćena u daljem izlaganju.



Slika 2.1: Automat za relaciju poretka prirodih brojeva zapisanih unazad u brojevnom sistemu baze k

Primer 2.3 *Automatsko predstavljanje sabiranja prirodnih brojeva u brojevnom sistemu baze k.*

Ideja je da se na strukturi definisanoj u prethodnom primeru primeni uobičajeni algoritam za sabiranje. U tu svrhu konstruišemo automat koji uz pomoć svojih stanja "pamti prenos" pri sabiranju brojeva cifru po cifru. Dakle, stanja ovog automata su mogući prenosi i dodatno stanje koje ukazuje na "grešku" u sabiranju. Dakle $S = \{s_0, s_1, r\}$, jer je za $a, b < k,\ a + b < 2k$. Početno i završno stanje je s_0, a funkcija prelaza za ulaz $(a, b, c) \in A_\$^3$ definisana je kao $\delta(s_i, (a, b, c)) = s_j$, gde je $i + a + b = c + kj$, i $\delta(s_i, (a, b, c)) = r$ ako je $i + a + b \neq c + kj$ za $j = 0, 1$. Definišemo i prelaz $\delta(r, (a, b, c)) = r$ za svako (a, b, c). U ovoj definiciji funkcije prelaza koristi se sabiranje i množenje cifara, ali kako je to konačno mnogo mogućnosti, to se može uključiti u definiciju. Simbol \$ se tretira kao 0. □

Primer 2.4 *Automatsko predstavljanje množenja prirodnih brojeva u brojevnom sistemu baze k.*

Kako je množenje dva prirodna broja $n{\cdot}m$ definisano kao $\sum_{0 \leq i \leq m} n$, automat koji bi odgovarao ovoj operaciji bio bi automat za sabiranje ponovljen nekoliko puta. Drugi činilac određuje broj ponavljanja, pa se automat može konstruisati samo za množenje sa odredjenim fiksnim prirodnim brojem (jer nemamo načina da konstruišemo brojač u automatu). Ovako umesto jednog automata imamo $\aleph_0$ automata koji zajedno odgovaraju operaciji množenja. Dakle, automatska struktura u ovom slučaju imala bi beskonačan tip (uz napomenu da u definiciji nismo dozvolili da se jedna relacija predstavi sa više automata, odnosno jezika). □

2.2 Teorija automatske strukture

Teorema 2.2 *Neka je struktura $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots, R_n)$ automatska nad azbukom A i neka su dati odgovarajući automati za domen i fundamentalne relacije. Tada postoji algoritam koji za datu $\mathcal{S}$-formulu prvog reda $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ konstruiše automat nad azbukom A koji prihvata $\otimes(w_1, w_2, \ldots, w_k)$, gde je $w_i \in A^*$, ako i samo ako $\mathcal{S} \models \phi(w_1, w_2, \ldots, w_k)$*

Dokaz: Dokažimo tvrđenje indukcijom po složenosti formule:

1. Baza indukcije: $\{\bar{x}|\phi(\bar{x})\} = R_i$, za neko $1 \leq i \leq n$.
   U ovom slučaju traženi automat je automat koji prepoznaje R_i.

2. Indukcijska hipoteza:
   neka tvrđenje važi za formule $\phi_1(\bar{x}_1)$ i $\phi_2(\bar{x}_2)$, i neka su jezici odgovarajućih automata $\otimes S$ i $\otimes T$, gde su S i T relacije odgovarajućih arnosti.

3. Indukcijski korak: dokazujemo da tvrđenje važi za ϕ:

   (a) $\phi = \neg\phi_1$:
   Automat za ϕ konstruišemo tako što završna stanja automata za ϕ_1 postaju nezavršna, a nezavršna stanja postaju završna.

   (b) $\phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \phi_1(\bar{x}_1) \wedge \phi_2(\bar{x}_2)$:
   Ova formula definiše relaciju $P = S \cap T$. Teorema 1.6 u tački 2. daje nam konstrukciju traženog automata, koji prepoznaje relaciju P.

   (c) $(\exists x_i)\phi(\bar{x})$:
   Postojanje automata za relaciju koja je opisana ovom formulom garantuje kombinacija tačke 7. i 4. teoreme 1.6.

Ovim je dokazano tvrđenje. ■

Uočimo da ovo tvrđenje važi i za formule sa parametrima, pošto su parametri zapravo konstante koje su definabilne 1. reda.

Posledica poslednje teoreme je sledeća teorema o odlučivosti:

Teorema 2.3 (Khoussainov, Nerode) *Teorija prvog reda automatske strukture $\mathcal{S}$ je odlučiva.*

Dokaz: Za datu rečenicu prvog reda ϕ važi $\mathcal{S} \models \phi$ ako i samo ako je jezik (relacija) koju opisuje formula $\neg\phi$, odnosno jezik odgovarajućeg automata iz prethodne teoreme, prazan. Na osnovu teoreme 1.5 znamo da je to odlučiv problem. Dakle, teorija strukture $\mathcal{S}$ je odlučiva. ■

Proširenjem logike prvog reda mogu se uopštiti navedena tvrđenja na sledeći način:

Teorema 2.4 *Neka je struktura $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots, R_n)$ automatska nad azbukom A. Tada postoji algoritam koji za datu $\mathcal{S}$-formulu (sa parametrima) prvog reda, uz dodatne kvantifikatore $\exists^\infty$ (postoji beskonačno mnogo) i $\exists^{(k,m)}$ (postoji k modulo m mnogo), $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ konstruiše automat nad azbukom $A^k_\$$ koji prihvata $\otimes(w_1, w_2, \ldots, w_k)$, gde je $w_i \in A^*$, ako i samo ako $\mathcal{S} \models \phi(w_1, w_2, \ldots, w_k)$.*

Teorija prvog reda strukture sa dodatnim kvantifikatorima $\mathcal{S}$ je odlučiva. ■

Dokaz ove teoreme može se pronaći u radu [1] kao teorema B.1.26.

Propozicija 2.5 *Neka je $\mathcal{S}$ automatska struktura i neka je struktura $\mathcal{T}$ definabilna u logici prvog reda sa dodatnim kvantifikatorima $\exists^\infty$ i $\exists^{(k,m)}$ u strukturi $\mathcal{S}$. Tada je struktura $\mathcal{T}$ FA-prezentabilna.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{S}$ automatska struktura nad azbukom A, i neka je struktura $\mathcal{T}$ definabilna u logici prvog reda sa dodatnim kvantifikatorima $\exists^\infty$ i $\exists^{(l,m)}$, dimenzije k, u strukturi $\mathcal{S}$. Tada je $\mathcal{T}$ oblika $\mathcal{T}'/\rho^{D^{\mathcal{S}}}$, za neku $\mathcal{S}$-formulu ρ, takvu da je $\rho^{D^{\mathcal{S}}}$ relacija ekvivalencije na $D^{\mathcal{S}} \subseteq S^k$, gde je

$$\mathcal{T}' = (D^{\mathcal{S}}, \phi_1^{\mathcal{S}}|_{D^{\mathcal{S}}}, \ldots, \phi_n^{\mathcal{S}}|_{D^{\mathcal{S}}}),$$

$D(\bar{x})$ i $\phi_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{r_i})$ su $\mathcal{S}$-formule, a $\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ k-torke promenljivih. Po teoremi 2.4 $D^{\mathcal{S}}$ i $\phi_i^{\mathcal{S}}$ su FA-prepoznatljive (domen automatom sa k traka nad azbukom $A_\$^k$, a relacija $\phi_i^{\mathcal{S}}$ arnosti r_i automatom sa kr_i traka nad azbukom $A_\$^{kr_i}$). Relacije $\phi_i^{\mathcal{S}}|_{D^{\mathcal{S}}} = \phi_i^{\mathcal{S}} \cap (D^{\mathcal{S}})^{r_i}$ su takođe FA-prepoznatljive, pa je $\mathcal{T}'$ automatska struktura nad azbukom $A_\$^k$. Označimo odgovarajuće relacije $\mathcal{T}'$ sa $R_1, R_2, \ldots, R_n$ redom.

Definišimo sada funkciju F koja preslikava $\bar{w} \in D^S$ u dužinsko-leksikografski najmanji element klase $[\bar{w}]_\rho$. F je FA-prepoznatljiva pošto je definabilna u logici prvog reda nad regularnim predikatima D^S i $<_{llex}$. Sledi da je struktura $(\mathcal{T}', F)$ automatska nad azbukom $A_\$^k$.

Definišimo sada podstrukturu $\mathcal{Q} \subset \mathcal{T}'$ na domenu

$$Q = \{\bar{u} \in D^S \mid (\exists \bar{w}) F(\bar{w}) = \bar{u}\}.$$

Relacije R_i^Q definišemo sa

$$R_i^Q(F(\bar{w}_1), F(\bar{w}_2), \ldots, F(\bar{w}_{r_i})) \Leftrightarrow R_i^{T'}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_{r_i}).$$

Sledi da je $\mathcal{Q}$ automatska struktura nad azbukom $A_\$^k$.

Na osnovu konstrukcije strukture $\mathcal{Q}$ imamo da je $\mathcal{Q}$ izomorfna sa strukturom $\mathcal{T}$, pa je $\mathcal{T}$ FA-prezentabilna nad azbukom $A_\$^k$. ■

Korolar 2.6 *Ako su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ automatske strukture. Tada su sledeće strukture FA-prezentabilne:*

1. *podstruktura od $\mathcal{S}$ sa definabilnim domenom,*
2. *faktorizacija $\mathcal{S}$ definabilnom kongruencijom,*
3. *direktni proizvod $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ (ako su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ istog tipa),*
4. *$\mathcal{S}\omega$ (disjunktna unija ω kopija skupa $\mathcal{S}$)*

Dokaz:

1. Neka je $S' \subset S$ domen podstrukture $\mathcal{S}' = (S', R_1^{S'}, R_2^{S'}, \ldots, R_n^{S'})$, gde su navedene fundamentalne relacije restrikcija fundamentalnih relacija strukture $\mathcal{S}$ na domenu S'. Ako je domen S' definisan formulom $\phi(\bar{x}), \bar{x} \in S^k$, za neko $k \in \mathbb{N}$, tada je l-arna relacija $R_i^{S'}$ definisana formulom prvog reda

$$\wedge_{1 \leq j \leq l} \phi(\bar{x}_j) \wedge R_i^S(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l),$$

pa je struktura $\mathcal{S}'$ FA-prezentabilna.

2. Direktna posledica propozicije 2.5

3. Direktan proizvod je definabilan na disjunktnoj uniji domena $S \cup T$, koja je automatska. l-arnu relaciju $R_i^{S\times T}$ definišemo kao:

   $$R_i^{S\times T}((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_l, y_l)) \Leftrightarrow R_i^S(x_1, x_2, \ldots, x_l) \wedge R_i^T(y_1, y_2, \ldots, y_l),$$

   dok je domen $S\times T$ definisan prirodno, pa je ova struktura FA-prezentabilna.

4. Definišemo domen $S' = S \times 1^*$ i relacije $R_i^{S'}$ sa

   $$R_i^{S'}((x_1, 1^m), (x_2, 1^m), \ldots, (x_l, 1^m)) \Leftrightarrow R_i^S(x_1, x_2, \ldots, x_l) \wedge m \in \mathbb{N}.$$

■

Za kraj ove sekcije dokazaćemo prethodno formulisano tvrđenje o injektivnoj automatskoj prezentaciji struktura.

Dokaz teoreme 2.1: Neka je (L, ψ) automatska prezentacija strukture $\mathcal{S}$. Definišimo $K \subset L$ na sledeći način:

$$K = \{w \in L \mid w = \min\{u | L_=(u, w)\},$$

gde funkcija min daje minimalan element odredjene klase ekvivalencije relacije $L_=$ u odnosu na uređenje $\leq_{llex}$. Kako je ova funkcija definabilna 1. reda nad relacijom $\leq_{llex}$ (koja je definabilna u logici prvog reda na bilo kom skupu reči), imamo da je skup K zajedno sa fundamentalnim relacijama strukture $\mathcal{L}$ restrikovanim na skup K, podstruktura strukture $\mathcal{L}$ denfinijabilna prvog reda. Kao takva, struktura $\mathcal{K}$ je FA-prezentabilna, pa su joj domen i relacije FA-prepoznatljive, a po konstrukciji skupa K i automatske. Sledi da je $\mathcal{K}$ automatska struktura, a funkcija ψ restrikovana na K bijekcija. Konačno, $(K, \psi|_K)$ je injektivna automatska prezentacija strukture $\mathcal{S}$. ■

2.3 Karakterizacija automatskih struktura

2.3.1 Univerzalne strukture

Primer 2.5 Struktura $\mathcal{W}_k = (A^*, (R_a)_{a\in A}, \leq_p, el)$ gde je:

- $A = \{0, 1, \ldots, k-1\}$,
- funkcija $R_a : A^* \to A^*$ definisana sa $R_a(x) = xa$,
- $\leq_p$ je relacija prefiksa
- $el(x, y) \Leftrightarrow |x| = |y|$,

je automatska. □

Primer 2.6 Struktura $\mathcal{N}_k = (N, +, |_k)$ gde je:

- domen N je skup prirodnih brojeva,
- $+$ je sabiranje na N,

- $x|_k y \Leftrightarrow x = k^n$ za neko $n \in N$ i $y = mx$ za neko $m \in N$,

je FA-prezentabilna. □

Primer 2.7 Struktura $(N,')$ gde je

- N skup prirodnih brojeva,
- $' : n \to n+1$ funkcija "naredni",

je FA-prezentabilna. □

Teorema 2.7 *Strukture $\mathcal{N}_k$ i $\mathcal{W}_j$ su međusobno interpretabilne u logici prvog reda za sve $j, k \geq 2$.*

■

Dokaz ove teoreme može se pronaći u radu [1] kao teorema B.1.29.

Sledeća tvrđenja govore da su ove strukture univerzalne FA-prezentabilne strukture (svaka FA-prezentabilna struktura je interpretabilna u logici prvog reda u njima).

Teorema 2.8 *Neka je $\mathcal{S}$ relaciona struktura. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *$\mathcal{S}$ je FA-prezentabilna.*
2. *$\mathcal{S}$ je interpretabilna u logici prvog reda u $\mathcal{W}_k$ za neko $k \geq 2$.*
3. *$\mathcal{S}$ je interpretabilna u logici prvog reda u $\mathcal{N}_k$ za neko $k \geq 2$.*

■

Lako je uvideti da je kao neposrednu posledicu prethodne dve teoreme imamo:

Korolar 2.9 *Neka je $\mathcal{S}$ relaciona struktura. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *$\mathcal{S}$ je FA-prezentabilna.*
2. *$\mathcal{S}$ je interpretabilna u logici prvog reda u $\mathcal{W}_k$ za svako $k \geq 2$.*
3. *$\mathcal{S}$ je interpretabilna u logici prvog reda u $\mathcal{N}_k$ za svako $k \geq 2$.*

■

U prethodnom tvrđenju može se dodati još jedan ekvivalentan iskaz:

4. $\mathcal{S}$ je interpretabilna u slaboj monadičnoj logici drugog reda u strukturi $(N,')$,

ali slaba monadična teorija drugog reda prevazilazi okvire ovog rada.

Dokaz ove teoreme (zajedno sa 4. ekvivalentnim iskazom) može se pronaći u radu [1] kao teorema C.2.2.

Za itorijat navedenih tvrđenja videti prvu stranu predgovora.

2.3.2 Teorema tipa Myhill-Nerode

Pozabavimo se sada pitanjem: koje n-arne relacije mogu biti FA-prepoznatljive?

Za regularne jezike nad konačnom azbukom A poznata je sledeća karakterizacija:

Teorema 2.10 (Teorema Myhill-Nerode) *Jezik L nad azbukom A je regularan ako i samo ako je unija nekih klasa ekvivalencije neke desne kongruencije konačnog indeksa na A^*.*

Kako bismo formulisali teoremu istog tipa za relacije R, arnosti n, potrebno je prvo definisati desnu kongruenciju na odgovarajućem skupu reči $\otimes A^{*n} \subsetneq A_{\$}^{n*}$. Pri tome moramo voditi računa da dve reči $u, v \in \otimes A^{*n}$ ne mogu biti nadovezane jedna na drugu, ako nisu odgovarajućeg oblika, pošto ne može biti slučaj da u rezultujućoj reči (konvoluciji) uv na nekoj koordinati (unutar) poslednjeg simbola reči u bude simbol \$, a da na toj istoj koordinati prvog simbola reči v bude neki simbol azbuke A, pošto je to suprotno definiciji konvolucije reči.

Kako bismo rešili ovaj problem, najpre definišemo početne i završne tipove reči jezika $\otimes A^{*n}$:

Definicija 2.5 *Neka je $w \in \otimes A^{*n}$, $w = u_0 \dots u_k$, gde su u_i slova azbuke $A_{\$}^n$. Neka je $C_i := \{j|$ koordinata j slova u_i nije $\$\}$. C_k je **završni tip reči** w. C_0 je **početni tip reči** w.*

Primetimo da važi $\emptyset \neq C_k \subseteq C_{k-1} \subseteq \dots \subseteq C_0 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Neka su $w, u \in \otimes A^{*n}$. Primetimo da je $wu \in \otimes A^{*n}$ ako i samo ako je početni tip reči u podskup završnog tipa reči w. Kako je završni tip reči u podskup početnog tipa reči u, imamo da je završni tip reči u, a time i završni tip reči wu (pod pretpostavkom da je $wu \in \otimes A^{*n}$) podskup završnog tipa reči w.

Definišimo sada odgovarajuću desnu kongruenciju.

Definicija 2.6 ***Desna n-kongruencija*** *ρ na $\otimes A^{*n}$ je relacija ekvivalencije koja zadovoljava sledeće uslove:*

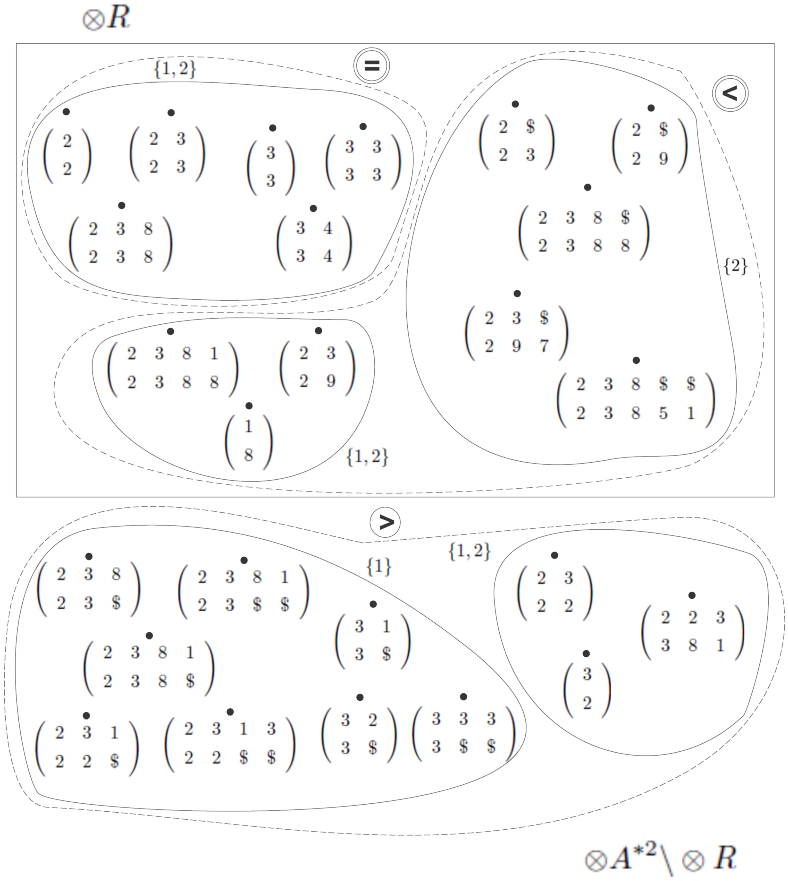
1. *Ako $w\rho v$ onda su w i v istog završnog tipa.*
2. *Za svake dve reči w, v završnog tipa I i reč u početnog tipa J, ako je $J \subseteq I$ tada važi:*
   $w \ \rho \ v \Rightarrow wu \ \rho \ vu$.

Sada možemo formulisati teoremu za FA-prepoznatljive relacije, sličnu prethodnoj.

Teorema 2.11 *Relacija $R \subseteq A^{*n}$ je FA-prepoznatljiva **ako i samo ako** je njena konvolucija $\otimes R$ unija nekih klasa ekvivalencije neke desne n-kongruencije konačnog indeksa na $\otimes A^{*n}$.*

Dokaz:
($\Rightarrow$) Neka je $R \subseteq A^{*n}$ FA-prepoznatljiva. Neka je $\mathcal{A} = (S, A_{\$}^n, \delta, q_0, F)$ konačan deterministički automat čiji je jezik $\otimes R$. Definišimo relaciju ρ na $\otimes A^{*n}$ kao:

- $w\rho v$ ako i samo ako su reči $w, v \in \otimes A^{*n}$ istog završnog tipa I i važi $\delta(q_0, w) = \delta(q_0, v)$.



Slika 2.2: primer desne n-kongruencije

Lako je uvideti da je ρ relacija ekvivalencije.

Nek su reči $w, v \in \otimes A^{*n}$ istog završnog tipa I, i neka je $w\rho v$. Po prethodnoj definiciji imamo $\delta(q_0, w) = \delta(q_0, v)$. Za svaku reč $u \in \otimes A^{*n}$ početnog tipa $J \subseteq I$ važi

$$\delta(q_0, wu) = \delta(\delta(q_0, w), u) = \delta(\delta(q_0, v), u) = \delta(q_0, vu).$$

Sledi da je $wu \ \rho \ vu$, pa je ρ desna n-kongruencija.

Funkcija ψ koja preslikava klase ekvivalencije ρ na stanja S automata $\mathcal{A}$ definisana kao: $\psi([w]_\rho) := \delta(q_0, w)$, preslikava najviše $2^n - 1$ klasu ekvivalencije na jedno stanje, jer je to broj mogućih završnih tipova reči, pa je broj klasa ograničen sa $|S| \cdot (2^n - 1)$, te je konačan, jer je broj stanja automata konačan. Dakle, ρ je konačnog indeksa. Imamo $R = \bigcup \{[w]_\rho \mid \delta(q_0, w) \in F\}$.

($\Leftarrow$) Neka je $\otimes R$ unija nekih klasa ekvivalencije n-kongruencije ρ konačnog indeksa na skupu $\otimes A^{*n}$. Za jezik $\otimes R$ definišimo automat $\mathcal{A} = (S, A^n_\$, \delta, q_0, F)$ koji ga prihvata, na sledeći način:

- $S = \{[w]_\rho \mid w \in \otimes A^{*n}\}$

- $q_0 = [\lambda^n]_\rho$
- $F = \{[w]_\rho \mid [w]_\rho \subseteq \otimes R\}$
- $\delta([w]_\rho, a) = [v]_\rho, a \in A^n_\$ \Leftrightarrow^{def} [w \cdot a]_\rho = [v]_\rho$

Imamo $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \mid [w] \in F\} = \{w \mid w \in \otimes R\}$. ■

Navedeno tvrđenje u nešto drugačijem obliku dali su Khoussainov i Nerode 1995. godine.

Teorema 2.11 je zapravo uopštenje teoreme Myhill-Nerode, jer je regularan jezik L iz teoreme Myhill-Nerode zapravo unarna relacija u smislu ove teoreme, a desna n-kongruencija je u tom slučaju uobičajena desna kongruencija, pošto tada postoji samo jedan tip reči.

Sledi direktna posledica prethodne teoreme:

Korolar 2.12 *Neka je $\mathcal{S} = (S, R_1, \ldots, R_k)$ relaciona struktura, i neka je $S \subseteq A^*$. Struktura $\mathcal{S}$ je automatska nad azbukom A ako i samo ako za domen S i svaku relaciju R_i postoji neka desna n-kongruencija konačnog indeksa na $\otimes A^{*n}$ (n je arnost odgovarajuće relacije, arnost relacije S je 1), takva da su domen strukture i konvolucija svake relacije unija nekih klasa ekvivalencije odgovarajuće desne n-kongruencije.*

■

Primer 2.8 Slika 2.2 ilustruje poslednju teoremu na primeru 2.2. Uporedimo ovu sliku sa slikom 2.1, gde je prikazan automat odgovarajuće relacije. Zapazimo da stanja $<, =, >$ tog automata odgovaraju isto označenim skupovima na slici 2.2, koji su unije odgovarajućih klasa ekvivalencije. □

Paralela navedena u prethodnom primeru daje nam način da konstruišemo minimalan automat koji prepoznaje konvoluciju odgovarajuće relacije.

2.3.3 Svodjenje na grafove

Ovaj odeljak ukazuje na to da izučavanje automatskih struktura možemo svesti na izučavanje automatskih grafova.

Teorema 2.13 (Hodges-1993) *Za svaku strukturu $\mathcal{S}$ postoji graf $\mathcal{G}(\mathcal{S})$, takav da važi:*

1. *$\mathcal{S}$ je automatska struktura ako i samo ako je $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ automatska struktura.*
2. *$\mathcal{S}$ i $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ su uzajamno interpretabilni.*
3. *Interpretacija $\mathcal{S}$ u $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ održava utapanja: $\mathcal{S}$ se utapa u $\mathcal{T}$ ako i samo ako se $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ utapa u $\mathcal{G}(\mathcal{T})$. Interpretacija takođe održava FA-prepoznatljiva utapanja.*

■

Konstrukcija grafa $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ za datu strukturu $\mathcal{S}$ i dokaz navedene teoreme, kao i dokaz teoreme koja sledi mogu se pronaći u radu [1] u odeljku C.4.

U ovom radu konstrucija ovog grafa u opštem slučaju nije od naročitog značaja jer ćemo se nadalje baviti konkretnim strukturama, pa će nas zanimati samo grafovi koji odgovaraju njima.

Poznata je i sledeća činjenica:

Teorema 2.14 (Khoussainov, Nies, Rubin, Stephan) *Problem izomorfnosti za FA-prezentabilne grafove je neodlučiv.* ■

2.4 Automatska drva i linearna uređenja

Videli smo da se pitanje FA-prezentabilnosti strukture $\mathcal{S}$ svodi na pitanje FA-prezentabilnosti grafa $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ iz teoreme 2.13, te je na neki način dovoljno baviti se automatskim grafovima.

Aciklične povezane grafove nazivamo **stablima**. Kako nas pre svega interesuju beskonačne strukture (jer su sve konačne strukture FA-prezentabilne), predikati koji su od značaja u daljem izlaganju su oni koji se mogu interpretirati u grafovima koji nisu ciklični, pa su **prebrojivo beskonačna stabla** od posebnog značaja. Naravno, reč je o usmerenim stablima. Naše interesovanje ograničićemo na **prebrojivo beskonačna drva**.

Drvo je **parcijalno uređenje** $\mathcal{T} = (T, \preceq)$ sa najmanjim elementom, koje nazivamo koren i označavamo sa r, i sa osobinom da je za svako $x \in T$ skup $\{y \mid y \preceq x\}$ konačno linearno uređenje.

Hasse dijagram drveta je, dakle, orijentisano stablo.

Jasno je da smo navedenom definicijom drveta isključili parcijalna uređenja koja u sebi sadrže gusta linearna podređenja. Sada ćemo pokazati da to ne umanjuje opštost u daljem radu.

Definicija 2.7 *Za linearno uređenje $(L, \preceq)$ kažemo da je **gusto** ako za svako x, y takve da je $x \prec y$ postoji z, takvo da je $x \prec z \prec y$.*

*Linearno uređenje $(L, \preceq)$ je **retko** ako ne sadrži gusto podređenje.*

Definicija 2.8 *Neka je $\mathcal{I}$ linearno uređenje, i neka je ono indeksni skup skupa linearnih uređenja $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, gde su $\mathcal{A}_i$ disjunktni po parovima. **$\mathcal{I}$-suma***

$$\mathcal{L} = \sum \{\mathcal{A}_i | i \in \mathcal{I}\}$$

je linearno uređenje sa domenom $\cup_i A_i$, i relacijom $\leq_L$ definisanom sa: za $x \in A_i, y \in A_j$ važi $x \leq_L y \Leftrightarrow (i <_I j) \vee (i = j \wedge x \leq_{A_i} y)$.

*Za $\mathcal{I}$-sumu kažemo da je **gusta** ako je skup I gust.*

Teorema 2.15 (Hausdorff) *Svako prebrojivo linearno uređenje može se predstaviti kao gusta suma prebrojivih retkih linearnih uređenja.* ■

Poznavajući ovaj rezultat možemo nastaviti sa posmatranjem drva. U drvetu $\mathcal{T}$ za $x \in T$ definišemo **skup neposrednih sledbenika**

$$S(x) := \{y \in T \mid x \prec y \wedge (\forall z)(x \preceq z \preceq y \Rightarrow (z = x \vee z = y))\}.$$

Posledica definicije drveta je da za svako $x \in T \backslash \{r\}$ postoji jedinstveno $y \in T$ takvo da je $x \in S(y)$.

Za beskonačno drvo $\mathcal{T}$ kažemo da ima **konačno grananje** ako je za svako $x \in T$, $S(x)$ konačan skup.

U daljem radu će od posebnog značaja biti uslovi konačne generisanosti strukture i lokalne konačnosti relacija kojima, na neki način (u slučaju određenih struktura), kod drva odgovara uslov konačnog grananja. Za definicije konačno generisanih struktura i lokalno konačnih relacija videti poglavlje 2.5.

Jasno je da su elementi skupa $S(x)$ međusobno neuporedivi u smislu relacije $\preceq$. Ako je $\mathcal{T}$ automatsko drvo nad azbukom A tada je skup $S(x)$ uređen relacijom $\leq_{llex}$.

Sada **na automatskim drvima** možemo definisati **Kleene-Brouwer uređenje** $<_{kb}$: $x <_{kb} y$ ako i samo ako je $x \prec y$ ili postoje w, u, v takvi da je $u, v \in S(w)$, $u \prec x$, $v \prec y$ i $u <_{llex} v$ (u ovom slučaju kažemo da je u levo od v u odnosu na $<_{llex}|_{S(w)}$).

Relacija $<_{kb}$ linearno uređuje skup čvorova T drveta $\mathcal{T} = (T, \prec)$. Struktura $(T, <_{kb})$ je definabilna prvog reda na strukturi $(T, \prec, <_{llex})$.

Za dato drvo $\mathcal{T}$ definišimo podskup od T koji se sastoji od onih čvorova x za koje postoje najmanje dva različita beskonačna maksimalna usmerena puta u maksimalnom poddrvetu drveta $\mathcal{T}$ sa korenom x. Restrikcija parcijalnog uređenja $\mathcal{T}$ na ovaj podskup je podurđenje koje ćemo označavati sa $d(\mathcal{T})$. Zapazimo da je $d(\mathcal{T})$ poddrvo drveta $\mathcal{T}$ sa istim korenom.

Za ordinal α definišemo $d^\alpha(\mathcal{T})$ rekurzivno sa:

1. $d^0(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$
2. $d^{\alpha+1}(\mathcal{T}) = d(d^\alpha(\mathcal{T}))$
3. za granični ordinal α: $d^\alpha(\mathcal{T}) = \cap_{\beta<\alpha} d^\beta(\mathcal{T})$

Definicija 2.9 ***Cantor-Bendixon rang drveta*** *$\mathcal{T}$, u oznaci $CB(\mathcal{T})$ je najmanji ordinal α za koji važi $d^\alpha(\mathcal{T}) = d^{\alpha+1}(\mathcal{T})$.*

Propozicija 2.16 *Neka je $\mathcal{T}$ prebrojivo beskonačno drvo i neka je $CB(\mathcal{T}) = \alpha$. Ako je $d^\alpha(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ tada u drvetu T ima neprebrojivo mnogo beskonačnih usmerenih puteva.*

Dokaz:
Neka je $d^\alpha(\mathcal{T}) \neq \emptyset$. Tada za svako $x \in d^\alpha(\mathcal{T})$ postoje $y, z \in d^\alpha(\mathcal{T})$ za koje važi $x \prec y$, $x \prec z$, $y \parallel z$. Sledi da se binarno drvo $(\{0,1\}^*, \leq_p)$ utapa u drvo $d^\alpha(\mathcal{T})$, pa ono ima neprebrojivo mnogo beskonačnih usmerenih puteva. Kako je $d^\alpha(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ sledi da drvo $\mathcal{T}$ ima neprebrojivo mnogo beskonačnih usmerenih puteva. ■

Za automatska drva važi sledeća činjenica:

Teorema 2.17 *Cantor-Bendixon rang automatskog drveta je konačan.* ■

Dokaz ovog tvrđenja može se promaći u radu [1] kao *teorema E.5.9.*

2.4.1 Automatska Königova lema

Sada ćemo automatska drva predstaviti kao skup njihovih beskonačnih (maksimalnih) usmerenih puteva, koji će se pokazati kao automatski. To znači da automatska drva predstavljamo kao skupove automatskih linearnih uređenja.

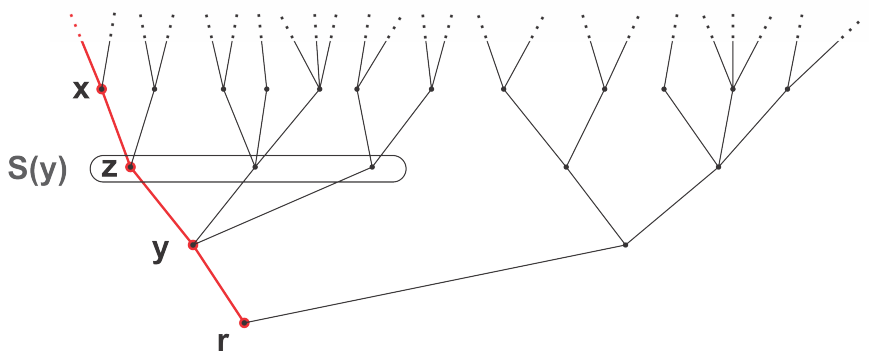
Za beskonačno drvo $\mathcal{T}$ definišemo poddrvo $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ koje sadrži sve čvorove drveta $\mathcal{T}$ koji su na nekom beskonačnom usmerenom putu. Svi beskonačni usmereni putevi drveta $\mathcal{T}$ sadržani su u $\mathcal{E}(\mathcal{T})$. Ako je $\mathcal{T}$ automatsko drvo, tada je to i $\mathcal{E}(\mathcal{T})$. Naime, drvo $\mathcal{E}(\mathcal{T}) = (E(T), \preceq)$ definisano je formulom $(\forall x)(\exists^{\infty} y)\ x \preceq y$ u drvetu $\mathcal{T} = (T, \preceq)$.

Poddrvo $d(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{T})$ je definisano formulom $(\forall x)(\exists y)(\exists u)(\exists v)(x \preceq y \wedge S(y)(u) \wedge S(y)(v))$ u drvetu $\mathcal{E}(\mathcal{T})$, gde je $S(y)$ (skup neposrednih sledbenika y) unarna relacija kardinalnonsti 1.

Teorema 2.18 *Neka je $\mathcal{T} = (T, \preceq)$ beskonačno automatsko drvo sa konačnim grananjem. Tada postoji regularan skup $P \subset T$, takav da je P beskonačan usmereni put drveta $\mathcal{T}$.*

Dokaz:
Zamenimo najpre drvo $\mathcal{T}$ drvetom $\mathcal{E}(\mathcal{T})$. Struktura $\mathcal{E}(\mathcal{T}) = (E(T), \preceq, \leq_{llex})$ je automatska.

Definišimo krajnje levi beskonačan maksimalan usmereni put P: $x \in P$ ako i samo ako za svako $y \prec x$ važi $(\forall z, z' \in S(y))(z \preceq x \Rightarrow z <_{llex} z')$, videti sliku 2.3. To znači da je jedinstveni element $z \in S(y)$ koji je "ispod" x najmanji element u $S(y)$ u odnosu na relaciju $\leq_{llex}$ ili da je $x \in S(y)$ i da je x najmanji element u $S(y)$ u odnosu na relaciju $\leq_{llex}$. Takav element uvek postoji jer je $\leq_{llex}$ dobro uređenje. Skup P je regularan.



Slika 2.3: ilustracija teoreme 2.18

Ostaje da se dokaže da je P beskonačan put. P je zatvoren od dole, pošto za dato $x \in P$, i za $a \preceq x$ za svako $y \prec a$, $z, z' \in S(y)$ i $y \preceq z \preceq x$, tada po pretpostavci imamo da je $z \leq_{llex} z'$, kao što je traženo.

P je linearno uređenje. Pretpostavimo suprotno, neka su $x, a \in P$ takvi da je $x || a$ (neuporedivi u smislu $\preceq$). Neka je z njihov $\prec -maksimalan$ zajednički

prethodnik. Neka su $v, w \in S(z)$ takvi da je $v \prec x, w \prec a$. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $v <_{llex} w$. Tada z, v, w ukazuju na to da $a \notin P$. Kontradikcija.

Dakle, P je beskonačan regularan usmereni put u $\mathcal{E}(\mathcal{T})$, pa i u $\mathcal{T}$. ■

Ako pretpostavimo da drvo $\mathcal{T}$ iz prethodne teoreme sadrži konačno mnogo maksimalnih beskonačnih usmerenih puteva, tada su svi oni regularni. Naime, nakon definisanja krajnje levog maksimalnog beskonačnog usmerenog puta P, na drvetu $\mathcal{T}\backslash P$ možemo ponoviti istu konstrukciju.

Teorema 2.19 *Neka je $\mathcal{T} = (T, \preceq)$ beskonačno automatsko drvo sa konačnim grananjem koje ima prebrojivo mnogo maksimalnih beskonačnih usmerenih puteva. Tada je svaki beskonačan usmereni put tog drveta regularan.*

Dokaz:
Zamenimo najpre drvo $\mathcal{T}$ drvetom $\mathcal{E}(\mathcal{T}) = (E(T), \preceq)$, i preimenujmo ga u $\mathcal{T}$. $d(\mathcal{T})$ i $\mathcal{T}\backslash d(\mathcal{T})$ su automatske strukture. $\mathcal{T}\backslash d(\mathcal{T})$ se sastoji od prebrojivo mnogo beskonačnih maksimalnih usmerenih puteva definisanih kao što sledi. Za svako $\prec$-minimalno $a \in \mathcal{T}\backslash d(\mathcal{T})$ definišemo beskonačan usmereni put $P_a := \{x \in T \mid x \preceq a \vee (a \prec x \wedge x \in \mathcal{T}\backslash d(\mathcal{T}))\}$.

Sada zamenimo $\mathcal{T}$ sa $d(\mathcal{T})$ i ponovimo upravo opisani postupak za ovo drvo. Kako je $CB(\mathcal{T})$ konačan, nakon $CB(\mathcal{T})$ ponovljanja ovog postupka rezultujuće drvo biće prazno (propozicija 2.16), a svaki beskonačan maksimalan usmereni put polaznog drveta $\mathcal{T}$ biće generisan.

Jasno je da ako je beskonačan maksimalan usmereni put P regularan, to je i svaki njegov beskonačan usmereni podput, jer su svi takvi putevi dobijeni uklanjanjem nekog konačnog početnog segmenta puta P, pa su definabilni u logici prvog reda nad regularnim predikatima. ■

Ova tvrđenja se uopštavaju na sledeća tvrđenja u kojima odbacujemo uslov o konačnom grananju:

Teorema 2.20 (Automatska Königova lema) *Svako beskonačno automatsko drvo koje ima beskonačan usmereni put ima regularnan beskonačan usmereni put.* ■

Teorema 2.21 *Ako automatsko drvo ima prebrojivo mnogo beskonačnih maksimalnih usmerenih puteva, tada je svaki beskonačan usmereni put tog drveta regularan.* ■

Dokazi ovih tvrđenja su u suštini isti kao navedeni dokazi odgovarajućih tvrđenja za drva sa konačnim grananjem.

Jedini problem je u tome što poddrvo $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ ne možemo definisati formulom $(\forall x)(\exists^{\infty} y)\ x \preceq y$, jer bi tada za $x \in T$ za koje je $S(x)$ beskonačan skup imali $x \in E(T)$ bez obzira da li je čvor x na nekoj beskonačanoj usmerenoj stazi. Ipak, $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ je i dalje automatska struktura. Dokaz ove činjenice izvodi se konstrukcijom Büchi automata (konačan automat koji prihvata neku reč beskonačne dužine ako se čitajući tu reč automat nađe beskonačno mnogo puta u nekom završnom stanju), pa to prevazilazi okvire ovog rada. Dokaz se može pronaći u radu [1] kao *Lema E.6.5.*

Argument iz 3. pasusa ove sekcije važi i u ovom slučaju, pa je i $d(\mathcal{T})$ automatsko drvo.

2.4.2 FA-prezentabilni ordinali

Kako smo do sada razmatrali prebrojiva drva, naše interesovanje nakon *Automatske Königove leme* svodi se na retka linearna uređenja koja su FA-prezentabilna, odnosno na automatske ordinale.

Poznat je sleći rezultat:

Propozicija 2.22 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \leq)$ automatska struktura. Odlučivo je da li je struktura $\mathcal{L}$ izomorfna nekom ordinalu.* ■

Sada je vreme da se pozabavimo ordinalima. Znamo da je ordinal ω, koji je skup prirodnih brojeva, FA- prezentabilan, kao što pokazuju primeri na početku ove glave. Korolar 2.6 ukazije na to da su i ordinali $\omega^m, m \in \omega$ FA-prezentabilni. Za svaki ordinal $\alpha <_{ord} \omega^\omega$ postoji prirodan broj m za koji je $\alpha <_{ord} \omega^{m+1}$. Imamo da je $\alpha = \omega^m n_m + \omega^{m-1} n_{m-1} + \ldots + \omega^2 n_2 + \omega n_1 + n_0$ u Cantor-ovoj normalnoj formi (u pitanju su operacije aritmetike ordinala). Na osnovu neinduktivnih definicija proizvoda i zbira ordinala lako je uvideti da je α automatski ordinal.

Navodimo sledeće tvrđenje o potpunoj karakterizaciji FA-prezentabilnih ordinala:

Teorema 2.23 (Delhommé-2001) *Ordinal α je FA-prezentabilan ako i samo ako je $\alpha <_{ord} \omega^\omega$.* ■

Ideja dokaza drugog smera ove teoreme iznešena je neposredno pre njene formulacije. Prvi smer je nešto složeniji i zahteva definisanje dodatnih pojmova, te ga nećemo ovde dokazivati. Dokaz i definicije potrebnih pojmova mogu se pronaći u radu [1] u sekcijama E.1 i E.2.

Teorema 2.24 *Ako je α automatski ordinal tada je izračunljiva njegova normalna forma.*

Dokaz:
Neka je $(R, \leq_{ord})$ automatska struktura nad azbukom A koja predstavlja ordinal α. Normalna forma ovog ordinala je oblika $\alpha = \omega^m n_m + \omega^{m-1} n_{m-1} + \ldots + \omega^2 n_2 + \omega n_1 + n_0$, gde su m, n_i prirodni brojevi. Ove vrednosti dobijamo iz automatske strukture sledećim algoritmom:

1. **Ulaz**: $(R, \leq_{ord})$
2. $D := R, m := 0, n_m := 0$
3. **while** $D \neq \emptyset$ **do**
4. **if** D ima maksimum u, koji je ordinal sledbenik
   then $n_m := n_m + 1$, $D := D \backslash \{u\}$
   else Neka je $L \subset D$ skup graničnih ordinala. $D := L, m = m + 1, n_m = 0$
5. **end while**
6. **Izlaz**: $\omega^m n_m + \omega^{m-1} n_{m-1} + \ldots + \omega^2 n_2 + \omega n_1 + n_0$

U delu algoritma označenim sa *4.* podskup graničnih ordinala je izračunljiv, jer ga možemo opisati formulom prvog reda, koristeći relaciju u datoj strukturi, tako što prvo definišemo funkciju "sledbenik" formulom prvog reda u datoj automatskoj strukturi. Dodele vrednosti u *4.* koje slede po izračunavanju L, možemo posmatrati kao "deljenje" ordinala sa ω, sličko deljenju polinoma $x{\cdot}p(x)$ sa x.

Algoritam izračunava vrednosti koeficijenata $n_0, n_1, n_2, \ldots$ redom. Kako je m prirodan broj, na kraju dobijamo sve koeficijente. ■

Neposredna posledica ove činjenice je:

Korolar 2.25 *Problem izomorfnosti za automatske ordinale je odlučiv.* ■

2.5 Rast dužine reči i rast konačno generisanih automatskih struktura

Definicija 2.10 *Za relaciju $R_i \subseteq S^{r_i}$ strukture $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots R_m)$ kažemo da je* ***lokalno konačna relacija*** *ako postoje prirodni brojevi k_i, l_i takvi da je $r_i = k_i + l_i$ i za svaku k_i-torku $\bar{s}$ postoji konačno mnogo l_i-torki $\bar{t}$ takvih da $(\bar{s}, \bar{t}) \in R_i$.*
$\mathcal{S}$ je ***lokalno konačna struktura*** *ako su joj sve fundamentalne relacije lokalno konačne.*

Primetimo da je u prethodnoj definiciji lokalna konačnost relacije R_i vezana za za k_i i l_i. Ovo je neophodno jer relacija može biti lokalno konačna za neki izbor ovih vrednosti, dok za neki drugi ne. Naravno izbor k_i, l_i ne mora biti jedinstven. Iz tog razloga se u daljem tekstu podrazumeva da su nam vrednosti k_i, l_i poznate i fiksne, pa u skladu sa tim imamo sledeću definiciju.

Definicija 2.11 *Za relaciju $R_i \subseteq S^{r_i}$ strukture $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots R_m)$ kažemo da je* ***k_i-lokalno konačna relacija*** *ako za svaku k_i-torku $\bar{s}$ postoji konačno mnogo $r_i - k_i$-torki $\bar{t}$ takvih da $(\bar{s}, \bar{t}) \in R_i$.*
$\mathcal{S}$ je ***$(k_1, k_2, \ldots, k_m)$-lokalno konačna struktura*** *ako su joj fundamentalne relacije R_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, k_i-lokalno konačne za $i = 1, 2, \ldots, m$ respektivno.*

Zapazimo da je graf svake n-arne operacije n-lokalno konačna relacija.

U daljem tekstu koristiće se sledeća notacija:
Ako je $\bar{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ tada pišemo $s \in \bar{s}$ ako je $s = s_j$ za neko $1 \leq j \leq k$.
$A^{\leq n}$ označavaće reči nad azbukom A dužine najviše n. Pišemo $A^{O(n)}$ umesto $A^{\leq kn}$, za neko $k \in \mathbb{N}$.
Ako je $S \subseteq A^*$, tada skup elemenata S dužine manje ili jednake n, odnosno $S \cap A^{\leq n}$ označavamo sa S_n.

Definicija 2.12 *Neka je $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots, R_m)$ $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$-lokalno konačna automatska struktura. Neka je G konačan podskup od S.*
Definišemo sledeće skupove:

- *$E_n(G)$ za $n \in \mathbb{N}$ sa:*
  1. $E_0(G) = G$
  2. $E_n(G) = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \{v \in S | (\exists \bar{v} \in S^{l_i})(\exists \bar{u} \in E_{n-1}^{k_i}(G))(v \in \bar{v} \wedge (\bar{u}, \bar{v}) \in R_i)\}$
- *$L_n(G)$ $n \in \mathbb{N}$ sa:*
  1. $L_0(G) = G$
  2. $L_n(G) = L_{n-1}(G) \cup E_n(G)$

Dakle, $L_n(G)$ je skup elemenata S koji mogu biti dobijeni od elemanata skupa G primenom fundamentalnih relacija, najviše n puta.

Definicija 2.13 *$(k_1, k_2, \ldots, k_m)$-lokalno konačna struktura $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots, R_m)$ je **konačno generisana** ako postoji konačan skup $G \subseteq S$ (skup generatora), takav da je $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i(G)$.*

*Funkcija $f : n \to |L_n(G)|$ naziva se **rast strukture** $\mathcal{S}$ generisane sa G.*

Propozicija 2.26 *Neka je $R \subseteq S^{k+l}$ k-lokalno konačna FA-prepoznatljiva relacija. Postoji konstanta p, takva da za svako $\bar{u} \in S^k, \bar{v} \in S^l, (\bar{u}, \bar{v}) \in R$ važi:*

$$\max\{|v| \mid v \in \bar{v}\} - \max\{|u| \mid u \in \bar{u}\} \leq p.$$

Dokaz: Neka je n_0 broj stanja automata koji prepoznaje datu relaciju R. Dokazaćemo da je tražena konstanta $p = n_0 \cdot l$.

Fiksirajmo $(\bar{u}, \bar{v}) \in R$. Neka je $u' = \max\{|u| \, |u \in \bar{u}\}$. Neka su $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m} \in \bar{v}$ svi $v_{i_j} \in \bar{v}$ za koje važi $|v_{i_j}| > |u'|$. Takavih v_{i_j} ima najviše l, znači $m \leq l$. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je $|v_{i_1}| \leq |v_{i_2}| \leq \ldots \leq |v_{i_m}|$. Neka je $d_1 = |v_{i_1}| - |u'|$ i $d_j = |v_{i_j}| - |v_{i_{j-1}}|$ za $j = 2, 3, \ldots, m$.

Pretpostavimo suprotno tvrđenju, da je $|v_{i_m}| - |u'| > n_0 \cdot l$. Kako je $|v_{i_m}| - |u'| = d_1 + d_2 + \ldots + d_m$, i $m \leq l$ sledi da postoji j za koje je $d_j > n_0$. Neka je $n = |u'|$ za $j = 1$, a $n = |v_{i_{j-1}}|$ inače. Na podreč reči $\otimes(\bar{u}, \bar{v})$ od pozicije $n + 1$ do pozicije $n + d_j$ možemo primeniti Pumping lemu. Dakle ovu podreč dužine d_j možemo zameniti odgovarajućom podreči (u smislu *Pumping leme*) dužine $d_j + t \cdot s$, za neko $0 < s < d_j$, i svako $t \in N$, pa za ovo ima beskonačno mnogo mogućnosti, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je R k-lokalno konačna relacija. ■

Teorema 2.27 *Neka je $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots R_m)$ $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$-lokalno konačna automatska struktura nad azbukom A generisana sa $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_j\}$. Tada postoji linearna funkcija $t : N \to N$, takva da $L_n(G)$ sadrži samo reči ne duže od $t(n)$.*

Dokaz: Neka je $R_i \subseteq S^{k_i + l_i}$, i $k = \max_i k_i, l = \max_i l_i$. Neka je $\mathcal{A}$ automat nad azbukom A koji prihvata $(k + l)$-torku $(u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_l)$ ako i samo zadovoljava formulu

$$\vee_i (R_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k_i}, y_1, y_2, \ldots, x_{l_i}) \wedge_{k_i < j \leq k} (x_j = \lambda) \wedge_{l_i < j \leq l} (y_j = \lambda)).$$

Navedena formula definiše relaciju R arnosti $k + l$. Primetimo da je $w \in L_n(G)$ u odnosu na $R_1, R_2, \ldots R_m$ ako i samo ako je $w \in L_n(G)$ u odnosu na R.

Neka je $g = \max_i |g_i|$ i $p = \max_i p_i$, gde su p_i konstante iz prethodne propozicije za odgovarajuće relacije. Dokažimo indukcijom po n da je $E_n(G) \subseteq S_{g+np}$.

1. Baza indukcije: $n = 0$
   Po definiciji važi $E_0(G) \subseteq S_g$.

2. Indukcijaska hipoteza: za n važi
   $E_n(G) \subseteq S_{g+np}$.

3. Indukcijski korak: $n + 1$
   $v \in E_{n+1}(G)$ ako i samo ako postoje $\bar{u}, \bar{v}$ takvi da je $R_i(\bar{u}, \bar{v})$, gde je $\bar{u} \in E_n^{k_i}(G), v \in \bar{v}$. Po prethodnoj propoziciji imamo $|v| \leq \max\{|u| \; |u \in \bar{u}\}+p$, pa sledi $E_{n+1}(G) \subseteq S_{(g+np)+p} = S_{g+(n+1)p}$.

$L_n(G) \subseteq S_{g+np}$ je posledica definicije $L_n(G)$. Dakle, tražena linearna funkcija je $t(n) = g + np$. ■

Korolar 2.28 (Khoussainov,Nerode-1995) *Neka je $\mathcal{S} = (S, R_1, R_2, \ldots R_m)$ $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$-lokalno konačna, konačno generisana, automatska struktura nad azbukom A. U slučaju jednoslovne azbuke imamo $|L_n(G)| = O(n)$, a inače $|L_n(G)| = |A|^{O(n)}$.*

Dokaz:
Ako je $|A| = 1$ onda je $|S_n| \leq n + 1$, pa je $|L_n(G)| \leq g + np + 1$, pa imamo $|L_n(G)| = O(n)$.

Za $|A| \neq 1$ imamo $|S_n| \leq |A|^n + |A|^{n-1} + \ldots + |A| + 1 = |A|^n + \frac{|A|^n - 1}{|A| - 1} \leq c|A|^n$, pa je $|L_n(G)| \leq c|A|^{g+np}$, odnosno $|L_n(G)| = |A|^{O(n)}$. ■

2.5.1 Karakterizacija FA-prezentabilnih integralnih domena i polja

Teorema 2.29 (Khoussainov, Nies, Rubin, Stephan) *Ne postoji beskonačni automatski integralni domen.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno. Neka je $(D, +, \cdot, 0, 1)$ beskonačni automatski integralni domen nad azbukom A, i neka je svaki element nosača jedinstveno predstavljen. Sada sabiranje i množenje predstavljaju odgovarajuće operacije integralnog domena, a ne operacije na jezicima. Identifikujmo reči 1^* sa operacijom konkatenacije sa prirodnim brojevima sa sabiranjem. $D_n = D \cap A^{\leq n}$, kao i do sada.

Definišimo relaciju $M(n, x)$ za $n \in 1^*, x \in D$ sa:

$$(\forall u, v, u', v' \in D_n)(u \cdot x + v = u' \cdot x + v' \Rightarrow (u = u' \wedge v = v')).$$

Pokazaćemo da za svako n postoji x takvo da važi $M(n, x)$. Pretpostavimo suprotno. Tada za neko n ne postoji takvo x, odnosno za svako $x \in D$ postoje različiti uredjeni parovi $(u, v), (u', v') \in D_n \times D_n$ takvi da je $u \cdot x + v = u' \cdot x + v'$. Kako je D_n konačan, a D beskonačan skup, postoje različiti uredjeni parovi $(u, v), (u', v') \in D_n \times D_n$ takvi da postoji beskonačno mnogo $y \in D$ za koje važi $u \cdot y + v = u' \cdot y + v'$. Iz poslednje jednakosti imamo $(u - u') \cdot y = (v - v')$, za te y. Ako je $u = u'$, mora biti i $v = v'$, što je u kontradikciji sa izborom ovih elemenata. Dakle, $u \neq u'$. Za neko $y_1, y_2 \in D$ imamo:$(u - u') \cdot y_1 = (v - v'), (u - u') \cdot y_2 = (v - v')$. Sledi $(u - u') \cdot (y_1 - y_2) = 0$. Kako integralni

domen nema delitelje nule, i $u \neq u'$ sledi da je $y_1 = y_2$, što protivreči činjenici da postoje različiti y_1, y_2 (ima ih beskonačno mnogo). Dakle, za svako n postoji x takvo da je $M(n, x)$.

Sada definišemo funkciju $F(n)$, za $n \in 1^*, x \in D$ sa:

$$F(n) = x \Leftrightarrow (M(n, x) \wedge (\forall y)(M(n, y) \Rightarrow x \leq_{llex} y))$$

Ova funkcija za n vraća najmanje $x \in D$, u smislu uređenja $\leq_{llex}$, za koje važi $M(n, x)$. Takvo x uvek postoji, pošto je $\leq_{llex}$ dobro uređenje.

Konačno, definišemo relaciju $E(n, x)$ za $n \in 1^*, x \in D$ sa:

$$(\exists u \in D_n)(\exists v \in D_n)(x = u \cdot F(n) + v)$$

Za različite uredjene parove $(u, v), (u', v') \in D_n \times D_n$ važi $u \cdot F(n) + v \neq u' \cdot F(n) + v'$, pa je $|D_n|^2 \leq |\{x \in D | E(n, x)\}|$.

Sa druge strane, $E(n, x)$ je lokalno konačna relacija, pa na osnovu propozicije 2.26 imamo da postoji konstanta p takva da je $\{x \in D | E(n, x)\} \subset D_{n+p}$. Sledi $|D_n|^2 \leq |\{x \in D | E(n, x)\}| \leq |D_{n+p}| = O(|D_n|)$. Sledi da je $|D_n| = O(1)$, odnosno da je broj reči proizvoljne dužine ograničen konstantom, što implicira da je D konačan skup. Kontradikcija. ■

Imajući na umu da je svaka konačna struktura FA-prezentabilna, imamo sledeće rezultate:

Korolar 2.30 *Integralni domen je FA-prezentabilan ako i samo ako je konačan.* ■

Korolar 2.31 *Polje je FA-prezentabilno ako i samo ako je konačno.* ■

2.5.2 Karakterizacija FA-prezentabilnih Bulovih algebri

Koristeći rezultate o rastu reči i struktura može se dokazati i sldeća karakterizacija FA prezentabilnih Bulovih algebri:

Teorema 2.32 (Khoussainov, Nies, Rubin, Stephan-2004) *Bulova algebra je FA-prezentabilna ako i samo ako je izomorfna intervalnoj algebri ordinala α, gde je $\alpha <_{ord} \omega^2$.* ■

Poznat je i sledeći rezultat:

Teorema 2.33 *Problem izomorfnosti za FA-prezentabilne Bulove algebre je odlučiv.* ■

Ovaj rezultat može se pronaći u radu [1] u sekciji F.1.

2.6 Unarno FA-prezentabilne strukture

Pozabavimo se sada pitanjem: koliko slova je najmanje potrebno za automatsko predstavljanje FA-prezentabilnih struktura?

Teorema 2.34 *Svaku FA-prezentabilnu strukturu možemo automatski predstaviti nad azbukom od 2 slova, odnosno svaka FA-prezentabilna struktura ima binarnu FA-prezentaciju.*

Dokaz:
Neka je struktura $\mathcal{S}$ automatska nad azbukom A. Za $|A| \leq 2$ tvrđenje važi trivijalno. U slučaju $|A| > 2$, neka je k najmanji prirodan broj za koji važi $2^k \geq |A|$. Neka je $\psi : A \to \{0,1\}^k$ proizvoljna injektivna funkcija koja na jedistven način preslikava slova azbuke na binarne reči dužine k. Produžimo ovu funkciju na A^* na sledeći način: $\psi(a_1a_2\ldots a_n) = \psi(a_1)\psi(a_2)\ldots\psi(a_n)$, za $a_i \in A$. Imamo da je struktura $\psi(\mathcal{S})$ izomorfna slika strukture $\mathcal{S}$. Za (poznate) regularne izraze koji odgovaraju relacijama strukture $\mathcal{S}$ formiramo regularne izraze nad azbukom $\{0,1\}$ zamenom svakog slova azbuke A odgovarajućom reči dužine k nad azbukom $\{0,1\}$ .Sledi da je struktura $\psi(\mathcal{S})$ automatska. Dakle, struktura $\mathcal{S}$ ima binarnu FA-prezentaciju. ■

Obzirom na ovaj rezultat, postavlja se pitanje koje strukture su unarno FA-prezentabilne, odnosno automatski predstavljive nad jednoslovnom azbukom.

Primer 2.9 Primer 2.1 pokazuje da je struktura $(N, \leq)$ unarno FA-prezentabilna.

Pokažimo sada unarnu FA-prezentabilnost za cele brojeve sa relacijom "naredni": $(Z, ')$.

Domen možemo predstaviti regularnim izrazom 1^*, dok relaciji odgovara regularni izraz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \$ & \$ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \$ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \$ & \$ \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \$ & \$ \end{pmatrix}.$$

U opisanoj automatskoj strukturi λ odgovara 0, dok reči 1^{2n+1} odgovara n, a reči 1^{2n} odgovara $-n$, za $n \in \mathbb{N}\backslash 0$. □

Kako smo pokazali da je dovoljno posmatrati grafove, formulisaćemo teoremu o unarnim FA-prezentabilnim grafovima.

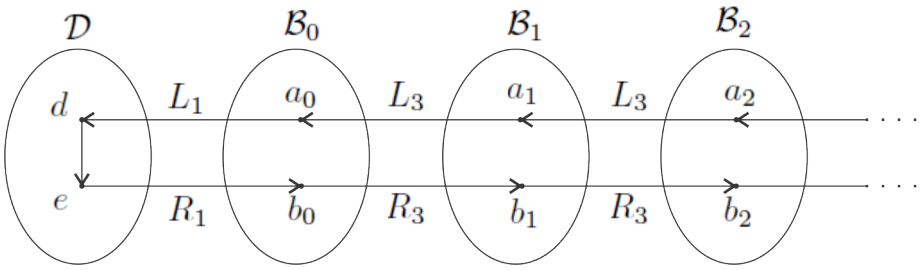
Graf $\mathcal{G} = (G, E)$ je unarno FA-prezentabilan ako su G i E FA-prepoznatljivi nad jednoslovnom azbukom.

Definisaćemo proceduru $\mathcal{U}$, koja za ulazne parametre uzima konačne grafove i konačne binarne relacije označene zajedno sa P, a za rezultat daje graf $\mathcal{U}(P)$, koji može biti beskonačan. Variranjem ulaznih parametara dobićemo klasu traženih unarno FA-prezentabilnih grafova.

Definicija 2.14 *Neka je $P = (\mathcal{D}, \mathcal{B}, \{R_i, L_i\}_{i=1,2,3,4})$* ***skup parametara****, gde su $\mathcal{D} = (D, E_D)$ i $\mathcal{B} = (B, E_B)$ konačni grafovi, a $\mathcal{B}_i = (B_i, E_{B_i})$, $i \in \mathbb{N}$ izomorfne kopije grafa $\mathcal{B}$. Označimo čvorove i-te kopije istim simbolom kao u $\mathcal{B}$ uz dodatni indeks i. R_i, L_i, $i = 1,2,3,4$ su binarne relacije: $R_i \subseteq D \times B$, $L_i \subseteq B \times D$ za $i = 1,2$ i $R_i, L_i \subseteq B \times B$ za $i = 3,4$.*

Odmotavanje skupa parametara *P, u oznaci $\mathcal{U}(P)$ je graf sa skupom čvorova $\cup_{i\in N} B_i \cup D$, i skupom grana $\cup_{i\in N} E_{B_i} \cup E_D \cup E$, gde je E skup grana definisan kao što sledi.*

Za $a, b \in B, d \in D$:
$(d, b_0) \in E \Leftrightarrow (d, b) \in R_1$, $(d_0, b) \in E \Leftrightarrow (d, b) \in L_1$



Slika 2.4: odmotavanje $\mathcal{U}(P)$ za skup parametara P iz primera 2.10

$(d, b_{i+1}) \in E \Leftrightarrow (d, b) \in R_2$, $(d_{i+1}, b) \in E \Leftrightarrow (d, b) \in L_2$ *za* $i \in \mathbb{N}$;
$(a_i, b_{i+1}) \in E \Leftrightarrow (a, b) \in R_3$, $(a_{i+1}, b_i) \in E \Leftrightarrow (a, b) \in L_3$ *za* $i \in \mathbb{N}$;
$(a_i, b_{i+2+j}) \in E \Leftrightarrow (a, b) \in R_4$, $(a_{i+2+j}, b_i) \in E \Leftrightarrow (a, b) \in L_4$ *za* $i, j \in \mathbb{N}$.

Kažemo da je graf ***odmotavanje*** *ako je izomorfno sa* $\mathcal{U}(P)$ *za neko* P.

Teorema 2.35 (Blummensath-1999) *Graf je unarno FA-prezentabilan ako i samo ako je izomorfan odmotavanju* $\mathcal{U}(P)$*, za neki skup parametara* P*.* ■

Dokaz navedenog tvrđenja može se pronaći u radu [1] kao *teorema D.1.1.*

Primer 2.10 Odgovarajuće odmotavanje za strukturu $(Z, ')$ (primer 2.9) prikazan je na slici 2.4. Skup parametara je sledeći: $\mathcal{D} = (\{d, e\}, \{(d, e)\}), \mathcal{B} = (\{a, b\}, \emptyset)$, $R_1 = \{(e, b)\}, L_1 = \{(a, d)\}, R_3 = \{(b, b)\}, L_3 = \{(a, a)\}, R_2 = L_2 = R_4 = L_4 = \emptyset$. □

Glava 3

Automatske i FA-prezentabilne grupe

Ova glava će ukratko predstaviti osnovne rezultate vezane za FA-prezentabilne i automatske grupe (koje će biti redefinisane u odnosu na automatske strukture).

3.1 FA-prezentabine, graf automatske i automatske grupe

U daljem tekstu $\mathbb{G}$ označava grupu $(G, \cdot)$.

Za početak definišimo pojmove automatske prezentacije i FA-prezentabilnosti za grupe.

Definicija 3.1 *Neka je $\mathbb{G}$ grupa, L regularan jezik nad konačnom azbukom A, i neka je $\psi : L \to G$ sirjektivi homomorfizam. (L, ψ) je* ***automatska prezentacija*** *grupe $\mathbb{G}$ ako:*

1. *relacija $L_= = \{(u, v) \in L^2 | \psi(u) = \psi(v)\}$ je regularna, i*
2. *graf operacije grupe $L_\cdot = \{(u, v, w) \in L^3 | \psi(u) \cdot \psi(v) = \psi(w)\}$ je regularan.*

Definicija 3.2 *Za grupu koja ima automatsku prezentaciju, kažemo da je* ***FA-prezentabilna****.*

Drugim rečima, grupa je FA-prezentabilna ako su joj domen i graf operacije FA-prepoznatljive.

Primer 2.4 je ukazao na to da množenje prirodnih brojeva ne možemo automatski predstaviti kao jednu operaciju, već je jedini način da to uradimo da umesto operacije množenja definišemo operacije množenja sa svakim elementom posebno. Struktura iz ovog primera, naravno, nije grupa, već samo polugrupa sa jedinicom, ali nam u svakom slučaju ukazuje na to da nam gornja definicija neće biti dovoljna u radu sa nekim binarnim operacijama.

Ipak, definisanje automatske prezentacije beskonačnog tipa nije najelegantnije rešenje. Kako bismo ovo izbegli operaciju treba da predstavimo pomoću

konačno mnogo predikata, što možemo lako postići kada su u pitanju konačno generisane grupe.

Time su motivisane sledeće definicije.

DEFINICIJA 3.3 ***Obojeni usmereni graf*** $\Gamma = (V, E)$ *gde su grane obojene (označene) elementima konačnog skupa* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, *je struktura*

$$(V, E_{a_1}, E_{a_2}, \ldots, E_{a_n}),$$

gde je $E_{a_k} = \{(x, y) | (x, y) \in E$ *i grana* (x, y) *je obojena sa* $a_k\}$.

Kažemo da je Γ ***FA-prezentabilan*** *ako je struktura* $(V, E_{a_1}, E_{a_2}, \ldots, E_{a_n})$ *FA-prezentabilna.*

Ovako definisan graf lako možemo povezati sa grupom, ukoliko je ona konačno generisana. Tada datu grupu možemo predstaviti konačnim skupom njenih generatora, koji ćemo uzeti za konačnu azbuku.

DEFINICIJA 3.4 *Neka je* $X \subseteq G$ *konačan skup generatora grupe* $\mathbb{G}$. ***Cayley graf grupe*** $\mathbb{G}$ *u oznaci* $\Gamma(G, X)$ *je graf sa skupom čvorova* G, *gde je za svako* $g \in G$ *i svako* $x \in X$, *grana* (g, gx) *označena simbolom* x, *odnosno* $(g, gx) \in E_x$. *Skup grana ovog grafa je* $E = \cup_{x \in X} E_x$.

DEFINICIJA 3.5 *Neka je* $X \subseteq G$ *konačan skup generatora grupe* $\mathbb{G}$. *Kažemo da je* $\mathbb{G}$ ***graf automatska grupa*** *ako je* $\Gamma(G, X)$ *FA-prezentabilan graf.*

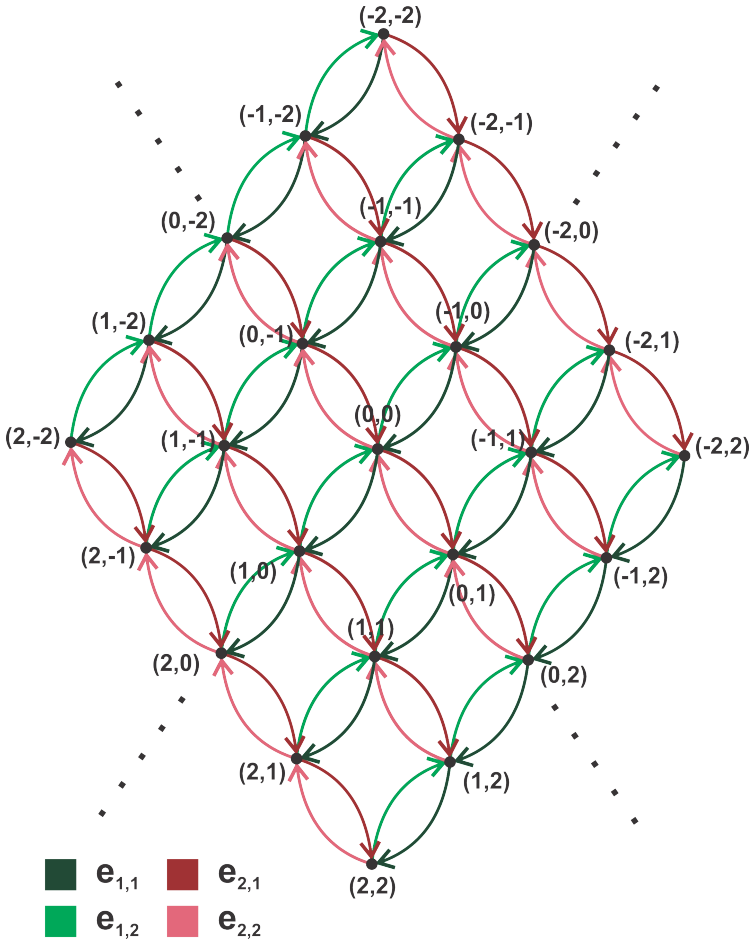
Primer 3.1 Posmatrajmo grupu $\mathbb{Z}^n = (Z^n, +)$, gde je sabiranje definisano po koordinatama. Ova grupa generisana je konačnim skupom E generatora: $e_{1,1} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_{1,2} = (-1, 0, 0, \ldots)$, $e_{2,1} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $e_{2,2} = (0, -1, 0, \ldots, 0), \ldots$, $e_{n,1} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, $e_{n,2} = (0, 0, \ldots, 0, -1)$.

Čvorove grafa $\Gamma(Z^n, E)$ možemo opisati regularnim jezikom E^*. Između čvorova $g, h \in G$ postoji grana označena sa e_i za neko $0 \leq i \leq n$ ako i samo ako je $h = g + e_i$. Rezultati iz prethodne glave ukazuju na to da je relacija E_i regularna, jer se radi o relaciji "naredni ceo broj", odnosno "prethodni ceo broj" na koordinati i. Sledi da je $(Z^n, +)$ graf automatska grupa. Na slici 3.1 vidimo Cayley graf grupe $(Z^2, +)$. $\square$

Ispostavlja se da konačan skup generatora graf automatske grupe možemo zameniti nekim drugim konačnim skupom generatora, a da pri tome grupa ostane graf automatska, i to ne menjajući automatsko predstavljanje domena grupe. Na putu do tog rezultata dokažimo najpre sledeću lemu:

Lema 3.1 *Neka je* $\mathbb{G}$ *graf automatska grupa u odnosu na skup generatora* X. *Za reč* $y \in X^*$ *postoji konačan automat* $\mathcal{M}_y$ *koji prihvata* $(g, h) \in G^2$ *ako i samo ako je* $g \cdot y = h$.

Dokaz:
Kako je $\Gamma(G, X)$ FA-prezentabilan graf, sledi da za svako $x \in X$ postoji automat $\mathcal{M}_x$ koji prepoznaje relaciju E_x. Definišimo sada relaciju E_w za $w \in X^*$ sa $E_{ux} = E_u \circ E_x$ za $u \in X^*, x \in X$. Kompozicija dve regularne relacije je opet regularna relacija, jer odgovarajući automat možemo konstruisati nadovezivanjem automata za te relacije. Sledi da je ovako rekurzivno definisana relacija E_w regularna. Imamo da je za $y \in X^*$ relacija $E_y = \{(g, h) \in G^2 | h = g \cdot y\}$ regularna, pa postoji konačan automat $\mathcal{M}_y$ koji je prepoznaje. $\blacksquare$



Slika 3.1: $\Gamma(Z^n, E)$

Teorema 3.2 *Neka je $\mathbb{G}$ graf automatska grupa u odnosu na konačan skup generatora X. Tada je grupa $\mathbb{G}$ graf automatska u odnosu na svaki konačan skup generatora Y.*

Dokaz:
Posmatrajmo FA-prezentabilan graf $\Gamma(G, X)$. Neka je Y konačan skup generatora grupe $\mathbb{G}$. Svako $y \in Y$ možemo napisati u obliku prozizvoda $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, gde je $x_i \in X$, $k \in \mathbb{N}$. Ostaje da se primeni prethodna lema za svako $y \in Y$. Relacija E_y je FA-prepoznatljiva za svako $y \in Y$, pa imamo da je $\Gamma(G, Y)$ FA-prezentabilan graf. Sledi da je grupa $\mathbb{G}$ graf automatska u odnosu na skup generatora Y. ■

Definicija 3.6 *Grupa $\mathbb{G}$ sa konačnim skupom generatora X je* ***automatska grupa*** *ako*

1. *postoji regularan jezik $L \subseteq X^*$ takav da je prirodno preslikavanje $\psi : L \to G$, $\psi(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdot \ldots \cdot \psi(x_n)$ gde je $x_i \in X$ (preslikavanje*

reči na odgovarajuće elemente grupe koji se dobijaju primenom operacije iz grupe na generatore), sirjektivno,

2. *relacija* $L_= = \{(u,v) \in L^2 | \psi(u) = \psi(v)\}$ *je regularna, i*

3. *za svako* $x \in X$ *relacija* $L_x = \{(u,v) \in L^2 | \psi(u) \cdot \psi(x) = \psi(v)\}$ *je regularna.*

Sledeća propozicija će malo preformulisati definiciju graf automatskih grupa, kako bismo jasnije videli vezu sa pojmom automatske grupe.

Propozicija 3.3 *Neka je* $\Gamma(G, X) = (G, E_{x_1}, E_{x_2}, \ldots, E_{x_n})$ *Cayley graf grupe* $\mathbb{G}$ *generisane konačnim skupom* X*. Grupa* $\mathbb{G}$ *je* ***graf automatska*** *ako i samo ako za neku konačnu azbuku* A *važe sledeći uslovi:*

1. *Postoji regularan jezik* $L \subseteq A^*$ *i sirjektivni homomorfizam* $\psi : L \to G$ *za koji je binarna relacija* $E_= \subseteq L^2$ *definisana sa* $E_=(u,v) \Leftrightarrow \psi(u) = \psi(v)$ *FA-prepoznatljiva.*

2. *Predikati* $E_{x_1}, E_{x_2}, \ldots, E_{x_n}$ *su FA-prepoznatljivi u odnosu na preslikavanje* ψ*, odnosno skup* $\psi^{-1}(E_x) = \{(u,v) \in L^2 | \psi(u) \cdot x = \psi(v)\}$ *je FA-prepoznatljiv.*

■

Primer 3.2 Grupa $\mathbb{Z}^n$ iz primera 3.1 je automatska nad azbukom E. Domen može biti predstavljen jezikom $L = E^*$. Argumenti za regularnost relacija za množenje su analogni onima iz primera 3.1. Regularnost Relacije $L_=$ garantuje prethodna propozicija, jer je $L_= = E_=$. □

Uočimo da se definicija graf automatske grupe razlikuje od definicije automatske grupe samo po tome što se kod graf automatskih grupa ne traži da bude $X = A$.

Teorema 3.4 *Svaka automatska grupa je graf automatska.* ■

Obratno tvrđenje međutim ne važi.

3.2 Problem reči i problem konjugovanosti

Po konstrukciji grafa grupe u odnosu na neki konačan skup generatora, kao i po definiciji automatske grupe jasno se vidi da elementi grupe nisu jedinstveno predstavljeni, odnosno da postoji više reči koje predstavljaju isti element grupe.

Na slici 3.1 vidimo da u slučaju grupe $(Z^2, +)$ za dati skup generatora iz primera 3.1, za element $(1,1)$ važi:

$$(1,1) = \psi(e_{1,1}e_{2,1}) = \psi(e_{2,1}e_{1,1}) = \psi(e_{1,1}e_{2,1}e_{1,2}e_{1,1}) = \ldots$$

Zapravo, svaki element grupe je predstavljen sa beskonačno mnogo reči, zbog postojanja inverznih elemenata za generatore (čak i kada oni nisu u skupu generatora, oni se mogu generisati).

Osim toga, i da je u pitanju bila polugrupa, bez inverznih elemenata recimo $(N^n, +)$ generisana elementima $e_{i,1}$, zbog komutativnosti imamo više predstavljanja elemenata, iako je u pitanju konačan broj predstavljanja.

Takođe se može javiti i situacija da skup generatora strukture nije minimalan, pa i to uzrokuje predstavljanje koje nije jedinstveno.

Usled ovakve situacije nameće se **problem reči:** *da li dve date reči predtavljaju isti element grupe?*

Kao posledicu definicije grafa grupe imamo:

Propozicija 3.5 *Graf $\Gamma(G, X)$ je izračunljiv ako i samo ako je problem reči za grupu $\mathbb{G}$, u odnosu na konačan skup generatora X, odlučiv.* ■

U daljem radu koristićemo sledeću terminoligiju: kažemo da je reč nad X **redukovana** ako ne radrži podreči oblika xx^{-1}, gde je $x \in X$.

Sledi tvrđenje o problemu reči za graf automatske grupe.

Teorema 3.6 *Problem reči u graf automatskim grupama je odlučiv u kvadratnom vremenu.*

U dokazu ćemo koristiti sledeću lemu:

Lema 3.7 *Neka je $f : D^k \to D$ funkcija čiji je graf FA-prepoznatljiv, $D \subseteq A^*$. Postoji algoritam koji za date $w_1, w_2, \ldots, w_k$ izračunava $f(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ u linearnom vremenu.*

Dokaz leme:
Neka je $w = f(w_1, w_2, \ldots, w_k)$. Na osnovu propozicije 2.26 imamo da je $|w| \leq max_{i\in\{1,\ldots,k\}}|w_i| + p$, gde je p broj stanja automata $\mathcal{M}$ koji prepoznaje graf funkcije f.

Pronalaženje staze u automatu $\mathcal{M}$ koja počinje u početnom, a završava se u nekom završnom stanju, i označena je sa $\otimes(w_1, w_2, \ldots, w_k, w)$, gde je $|w| \leq max_{i\in\{1,\ldots,k\}}|w_i| + p$ zahteva linearno vreme u odnosu na veličinu unosa $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$. ■

Dokaz teoreme 3.6:
Neka je w redukovana reč dužine n nad azbukom X. Tražimo reč $u \in X^*$ koja predstavlja isti elemenat grupe kao i w. Označimo sa w_i prefiks reči w dužine i. Za svako w_i možemo naći odgovarajuće u_i za koje je $|w_i| \leq C_1 \cdot i$. To po prethodnoj lemi možemo uraditi za vreme $C_2 \cdot i$, gde su C_1, C_2 konstante. Imamo da reč $u = u_n$ koja predstavlja isti element grupe kao i reč w. Ona može da se promađe za vreme $C_2(1 + 2 + \ldots + n) = O(n^2)$. ■

Cayley graf grupe, kako smo ga definisali predstavlja množenje elemenata grupe generatorima sa desne strane. Definišimo sada graf koji odgovara množenju sa leve strane.

Definicija 3.7 *Neka je $X \subseteq G$ konačan skup generatora grupe $\mathbb{G} = (G, \cdot)$.* ***Levi Cayley graf grupe*** *$\mathbb{G}$ u oznaci $\Gamma^l(G, X)$ je graf sa skupom čvorova G, gde je za svako $g \in G$ i svako $x \in X$ grana (g, xg) je označena simbolom x, odnosno $(g, xg) \in E_x$. Skup grana ovog grafa je $E = \cup_{x\in X} E_x$.*

DEFINICIJA 3.8 *Grupa $\mathbb{G}$ generisana konačnim skupom X je* ***graf biautomatska*** *ako su grafovi $\Gamma(G, X)$ i $\Gamma^l(G, X)$ FA-prezentabilni u odnosu na isti regularni jezik koji predstavlja čvorove grafa (elemente grupe).*

Analogno definišemo i **biautomatkse grupe**. Jasan je odnos ova dva pojma:

Propozicija 3.8 *Svaka biautomatska grupa je graf biautomatska grupa.* ■

Sada razmatramo **problem konjugovanosti**: *da li su dva data elementa grupe konjugovani?*

Teorema 3.9 *Problem konjugovanosti je odlučiv u svakoj graf biautomatskoj grupi.*

Dokaz:
Neka je $\mathbb{G}$ graf biautomatska grupa generisana skupom $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Grafovi $\Gamma(G, X)$ i $\Gamma^l(G, X)$ su FA-prezentabilni. Neka je L regularan jezik koji predstavlja domen grupe (čvorove grafa). Neka su dati $g, h \in G$, i neka su reči $p, q \in X^*$ takve da je $\psi(p) = g$, $\psi(q) = h$. Imamo da su skupovi $E_p = \{(u, up) | u \in L\}$ i $E_q^l = \{(u, qu) | u \in L\}$ regularni. Skup

$$S_{p,q} = \{u \in L | \psi(up) = \psi(qu)\}$$

je takođe regularan, pošto ga možemo definisati formulom

$$\phi(u) = E_p(u, up) \wedge E_q^l(u, qu) \wedge E_=(up, qu)$$

u automatskoj strukturi $(L, E_{x_1}, E_{x_2}, \ldots, E_{x_n}, E_{x_1}^l, E_{x_2}^l, \ldots, E_{x_n}^l)$. Imamo da su g i h konjugovani ako i samo ako je skup $S_{p,q}$ neprazan, a to je odlučivo. ■

3.3 Rast FA-prezentabilnih polugrupa

Rezultati u ovom poglavlju odnose se na polugrupe, pa važe i za grupe, na koje ćemo ove rezultate primeniti u sledećem odeljku.

FA-prezentabilne, graf automatske i automatske polugrupe se definišu analogno kao isti pojmovi za grupe.

DEFINICIJA 3.9 *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa sa injektivnom automatskom prezentacijom (L, ψ). Za proizvoljno $s \in S$, $l(s)$ je* ***dužina jedinstvene reči*** *jezika L koja predstavlja element s.*

Na osnovu propozicije 2.26 imamo:

Propozicija 3.10 *Neka je $(S, \cdot)$ konačno generisana FA-prezentabilna polugrupa. Tada postoji konstanta c takva da za svako $s, t \in S$ važi:*

$$l(s \cdot t) \leq \max\{l(s), l(t)\} + c.$$

■

Lema 3.11 *Neka je $(S, \cdot)$ FA-prezentabilna polugrupa sa konačnim skupom generatora X. Neka je $R = \max\{l(x) \mid x \in X\}$. Postoji konstanta c takva da je za svako $m \in \mathbb{N}$:*

$$\max\{l(x_1 \cdots x_m) \mid x_i \in X\} \leq R + c \log_2 m.$$

Dokaz:
Neka je c konstanta iz prethodne propozicije. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po m.
Za m = 1 imamo:

$$\max\{l(x_1) \mid x_1 \in X\} = R = R + c \log_2 1.$$

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za $1 \leq m \leq k$. Dokazujemo da tvrđenje važi za $m = k + 1$. Imamo dva slučaja:
1.
Neka je k neparno: $k = 2r - 1$. Na osnovu prethodne propozicije i indukcijske hipoteze imamo:
$\max\{l(x_1 \cdots x_{k+1}) \mid x_i \in X\}$
$= \max\{l(x_1 \cdots x_{2r}) \mid x_i \in X\}$
$\leq \max\{l(x_1 \cdots x_r), l(x_{r+1} \cdots x_{2r}) \mid x_i \in X\} + c$
$\leq max\{R + c\lceil \log_2 r \rceil, R + c\lceil \log_2 r \rceil\} + c$
$= R + c\lceil \log_2 r \rceil + c$
$= R + (\lceil \log_2 r + 1 \rceil)c$
$= R + c\lceil \log_2 2r \rceil$
$= R + c\lceil \log_2 (k+1) \rceil,$
2.
Neka je k parno: $k = 2r$. Tada je:
$\max\{l(x_1 \cdots x_{k+1}) \mid x_i \in X\}$
$= \max\{l(x_1 \cdots x_{2r+1}) \mid x_i \in X\}$
$\leq \max\{l(x_1, \cdots, x_r), l(x_{r+1} \cdots x_{2r+1}) \mid x_i \in X\} + c$
$\leq max\{R + c\lceil \log_2 r \rceil, R + c\lceil \log_2 (r+1) \rceil\} + c$
$= R + c\lceil \log_2 (r+1) \rceil + c.$
Sada imamo dva podslučaja u zavisnosti od toga da li je r stepen od 2:
(a) Pretpostavimo da r nije stepen od 2. Kako funkcija $\log_2 x$ na skupu $\{x \in N \mid x > 0\}$ ima istu vrednost za x i $x + 1$, osim kada je x stepen od 2. Dakle, $\log_2(r + 1) = \log_2 r$. Imamo:

$$R + c\lceil \log_2 (r+1) \rceil + c = R + c\lceil \log_2 r \rceil + c = R + c\lceil \log_2 (k+1) \rceil.$$

(b) Neka je sada $r = 2^x$, za neko $x \in \mathbb{N}$. Važi:

$$\lceil \log_2 (k+1) \rceil = \lceil \log_2 (2r+1) \rceil = \lceil \log_2 (2^{x+1} + 1) \rceil = x + 2.$$

Sledi
$R + c\lceil \log_2 (r+1) \rceil + c$
$= R + c\lceil \log_2 (r+1) + 1 \rceil$
$= R + c\lceil \log_2 (r+1) + \log_2 2 \rceil$
$= R + c\lceil \log_2 2(r+1) \rceil$
$= R + c\lceil \log_2 2(2^x + 1) \rceil$
$= R + c\lceil \log_2 (2^{x+1} + 2) \rceil$
$= R + c(x + 2)$
$= R + c\lceil \log_2 (k+1) \rceil,$
čime je tvrđenje dokazano. ■

Teorema 3.12 *Neka je $(S, \cdot)$ FA-prezentabilna polugrupa sa konačnim skupom generatora X. Funkcija rasta ove strukture je ograničena polinomom.*

Dokaz:
Na osnovu prethodne leme i korolara 2.28 imamo da je $|L_n| \leq |A|^{c \log_2 n}$ za neku konstantu c. Postoji konstanta c_1 takva da je:

$$|A|^{c \log_2 n} \leq 2^{c_1 \log_2 n} \leq n^{c_1}.$$

Sledi $|L_n| \leq n^{c_1}$. ■

3.4 Karakterizacija konačno generisanih FA-prezentabilnih grupa

Definicija 3.10 *Beskonačna grupa je **virtuelno Abelova** ako ima torziono slobodnu Abelovu podgrupu konačnog indeksa.*

Jasno je da ako je virtuelno Abelova grupa $\mathbb{G}$ konačno generisana, tada je i njena Abelova podgrupa konačnog indeksa $\mathbb{H}$ konačno generisana. Svaka konačno generisana Abelova grupa je direktna suma konačno mnogo cikličnih grupa, pa možemo pretpostaviti da je $\mathbb{H} \cong \mathbb{Z}^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.13 *Konačno generisana virtuelno Abelova grupa je FA-prezentabilna.*

Dokaz:
Neka je $\mathbb{G}$ konačno generisana virtuelno Abelova grupa. Kako smo zaključili u prethodnoj diskusiji za njenu Abelovu podgrupu konačnog indeksa $\mathbb{H}$ možemo pretpostaviti da je $\mathbb{H} \cong \mathbb{Z}^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ generatori $\mathbb{Z}^n$. Bez umanjenja opštosti uzmimo da je $n = 2$, radi lakšeg zapisa.

Zamenimo grupu $\mathbb{Z}^n$ sa njenim jezgrom, jer je ono normalna podgrupa grupe $\mathbb{G}$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $\mathbb{Z}^n$ normalna podgrupa grupe $\mathbb{G}$.

Neka su $t_1, t_2, \ldots, t_k$ predstavnici faktor grupe $\mathbb{G}/\mathbb{Z}^n$. Svaki element $g \in G$ možemo zapisati kao $t_i x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, za neke $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Zbog normalnosti $\mathbb{Z}^n$ imamo da postoje $c_{1,1,j}, c_{1,2,j}, c_{2,1,j}, c_{2,2,j}$ takvi da je:
$x_1 t_j = t_j x_1^{c_{1,1,j}} x_2^{c_{1,2,j}}$ i $x_2 t_j = t_j x_1^{c_{2,1,j}} x_2^{c_{2,2,j}}$ za j=1,2,..., k. Dalje, za $i, j = 1, 2, \ldots, k$ postoje l, c_i, c_j takvi da važi $t_i t_j = t_l x_1^{c_i} x_2^{c_j}$.

Sada operaciju u grupi možemo predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned} t_i x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdot t_j x_1^{m_3} x_2^{m_4} &= t_i t_j x_1^{m_1 c_{1,1,j} + m_2 c_{2,1,j} + m_3} x_2^{m_1 c_{1,2,j} + m_2 c_{2,2,j} + m_4} \\ &= t_l x_1^{c_i} x_2^{c_j} x_1^{m_1 c_{1,1,j} + m_2 c_{2,1,j} + m_3} x_2^{m_1 c_{1,2,j} + m_2 c_{2,2,j} + m_4}. \end{aligned}$$

Sve operacije iz ovog izraza su predstavljive konačnim automatima, pa je grupa $\mathbb{G}$ FA-prezentabilna. ■

Definicija 3.11 *Beskonačna grupa je **virtuelno nilpotentna** ako ima torziono slobodnu nilpotentnu podgrupu konačnog indeksa.*

Definicija 3.12 *Beskonačna grupa je **virtuelno rešiva** ako ima torziono slobodnu rešivu podgrupu konačnog indeksa.*

Za dalje razmatranje biće nam potrebni sledeći rezultati iz teorije grupa, koje navodimo bez dokaza:

Teorema 3.14 (Gromov) *Konačno generisana grupa sa polinomnim rastom je virtuelno nilpotentna.* ■

Teorema 3.15 (Romanovski, Noskov) *Virtuelno rešiva grupa ima odlučivu teoriju prvog reda ako i samo ako je virtuelno Abelova.* ■

Kako je virtuelno nilpotentna grupa virtuelno rešiva, a FA-prezentabina grupa ima polinoman rast, na osnovu poslednje dve teoreme zaključujemo da je svaka FA-prezentabilna grupa virtuelno Abelova.

Najzad, uzimajući u obzir teoremu 3.13 imamo karakterizaciju konačno generisanih FA-prezentabinih grupa:

Teorema 3.16 (Oliver, Thomas) *Konačno generisana grupa je FA-prezentabilna ako i samo ako je virtuelno Abelova.* ■

Propozicija 3.17 *Virtuelno Abelove grupe su automatske.*

Dokaz:
Neka je $\mathbb{G}$ virtuelno Abelova grupa. Kao u dokazu propozicije 3.13, možemo pretpostaviti da je grupa $\mathbb{Z}^n$ normalna podgrupa grupe $\mathbb{G}$ konačnog indeksa k. Grupa $\mathbb{Z}^n$ je automatska nad azbukom E. Neka regularan jezik $L \subseteq E^*$ predstavlja domen grupe $\mathbb{Z}^n$. Neka je su g_i, $1 \leq i \leq k$ predstavnici koseta, takvi da $g_i \notin E$. Jezik $K = \bigcup_{1 \leq i \leq k} g_i \cdot L$ je regularan i predstavlja domen grupe $\mathbb{G}$. Lako je uvideti da su relacija $K_=$ i relacije K_x za množenje elementima skupa $E \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ definabilne prvog reda nad relacijama $L_=$ i L_x. Za detaljnije objašnjenje videti dokaz teoreme 3.22. ■

Kako su sve virtuelno Abelove grupe automatske, imamo:

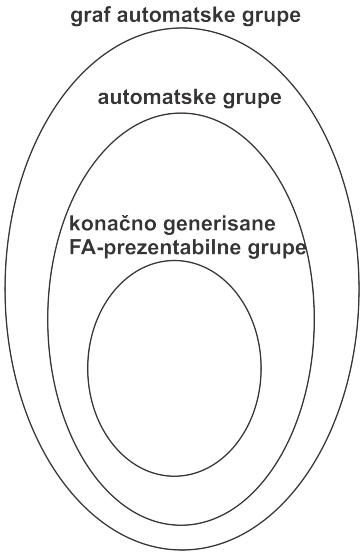
Teorema 3.18 *Svaka konačno generisana FA-prezentabilna grupa je automatska.* ■

Konačno, slikom 3.2 možemo predstaviti odnos klasa konačno generisanih FA-prezentabilnih, graf automatskih i automatskih grupa.

3.5 Geometrijska karakterizacija automatskih grupa

Definicija 3.13 *Neka je $\mathcal{G} = (V, E)$ usmereni graf.* ***Dužina neusmerenog (usmerenog) puta*** *između dva čvora u i v je broj grana tog neusmerenog (usmerenog) puta.*
Razdaljina *u oznaci $d(u, v)$ između čvorova u i v je dužina najkraćeg neusmerenog puta između u i v, ako takav put postoji.*

Definicija 3.14 *Neka je $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ reč nad azbukom A, gde $a_i \in A$. Za $t \geq 1$ definišemo* $w(t) := \begin{cases} a_1 a_2 \ldots a_t & : \quad t \leq n, \\ a_1 a_2 \ldots a_n & : \quad t > n. \end{cases}$



Slika 3.2: Odnos klasa konačno generisanih FA-prezentabilnih, graf automatskih i automatskih grupa

Definicija 3.15 *Neka je $\mathbb{G}$ grupa generisana konačnim skupom A i neka je (L, ψ) automatska prezentacija grupe $\mathbb{G}$ nad azbukom A. Za Cayley graf grupe $\mathbb{G}$ u odnosu na skup generatora A, $\Gamma(G, E)$ kažemo da ima* ***osobinu saputnika*** *(fellow traveller property) ako postoji konstanta k takva da važi: ako je $d(\psi(u), \psi(v)) \leq 1$ za $u, v \in L$, tada je $d(\psi(u(t)), \psi(v(t))) \leq k$ za svako $t \geq 1$.*

Za definisanje razdaljine smo koristili neusmerene staze u grafu grupe. To ima smisla pošto ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je skup generatora grupe zatvoren u odnosu na inverzne elemente, pošto svaki skup generatora možemo proširiti na taj način, a da on i dalje generiše istu grupu.

Propozicija 3.19 *Neka je $\mathbb{G}$ automatska grupa sa automatskom prezentacijom (L, ψ) nad azbukom A. Tada Cayley graf grupe $\mathbb{G}$ u odnosu na skup generatora A, $\Gamma(G, E)$ ima osobinu saputnika.*

Dokaz:
Neka su $u, v \in L$ takvi da je $d(\psi(u), \psi(v)) \leq 1$ u grafu $\Gamma(G, E)$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $\psi(v) = \psi(u) \cdot \psi(x)$ za neko $x \in A \cup \{\lambda\}$, dakle $(u, v) \in L_x$ za neko $x \in A \cup \{=\}$. Neka je $\mathcal{M}$ skup konačnih automata koji prepoznaju jezike $L_=$ i L_a, $a \in A$ i neka je n maksimalan broj stanja automata iz skupa $\mathcal{M}$. Neka je $\mathcal{M}_x = (S, A_\$^2, \delta, q_0, F)$ automat koji prepoznaje jezik L_x. Pretpostavimo da je $t > 0$.

Neka je $\delta(q_0, \otimes(u(t), v(t))) = q$. Kako je $\delta(q_0, \otimes(u, v)) = q_f$ za neko $q_f \in F$, na osnovu Pumping leme imamo da postoje reči u', v' takve da je $\delta(q, \otimes(u', v')) = q_f$, i da pri tome staza $q, \ldots q_f$ ne sadrži ni jedno stanje automata više puta. Imamo $|u'| \leq n - 1$, $|v'| \leq n - 1$. Važi $\psi(u(t)u'x) = \psi(v(t)v')$. Sledi da je

$$d(\psi(u(t)), \psi(v(t))) \leq |u'| + |v'| + 1 \leq 2n - 1.$$

$k = 2n - 1$ je tražena konstanta, koja zavisi samo od skupa automata $\mathcal{M}$. ■

Važi i obratno tvrđenje:

Propozicija 3.20 *Neka je grupa $\mathbb{G}$ generisana konačnim skupom A. Neka je L regularan jezik, i neka je $\psi : A^+ \to G$ homomorfizam, takav da je $\psi(L) = G$. Ako Cayley graf grupe $\mathbb{G}$ u odnosu na skup generatora A, $\Gamma(G, E)$ ima osobinu saputnika tada je $\mathbb{G}$ automatska grupa, sa automatskom prezentacijom (L, ψ).*

Dokaz:

U ovom dokazu $l(g)$ za $g \in \mathbb{G}$ označava dužinu najkraće reči jezika L koja predstavlja element g.

Neka je $c \in \mathbb{N}$ konstanta, takva da je $l(a^{-1}) \leq c$ za sve $a \in A$. Pretpostavimo da je $(g, h) \in E_a$. Tada je

$$ha^{-1} = gaa^{-1} = g,$$

pa u grafu $\Gamma(G, E)$ postoji usmereni put od h do g, ne duži od c.

Zbog osobine saputnika grafa $\Gamma(G, E)$ imamo da postoji konstanta $k \in \mathbb{N}$, takva da za svako $w_1, w_2 \in L$ za koje je $d(\psi(w_1), \psi(w_2)) \leq 1$ važi $d(\psi(w_1(t)), \psi(w_2(t))) \leq k$, za svako $t > 0$. Dakle, postoji usmereni put od $\psi(w_1(t))$ do $\psi(w_2(t))$, ne duži od kc. Dalje, za $g \in G$ za koje je $\psi(w_1(t))g = \psi(w_2(t))$ imamo $l(g) \leq kc$. Neka je $k' := kc$. U slučaju da je skup generatora A zatvoren u odnosu na inverzne elemente imamo $k' = k$.

Neka je $N = \{g \in G \mid l(g) \leq k'\}$, i neka je $\mathcal{M} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ automat čiji je jezik L.

Za svako $x \in A \cup \{=\}$, definišemo automat $\mathcal{M}_x = (Q', A^2_{\$}, \delta', q'_0, F')$, gde je $Q' \backslash \{q'_0, r\} = Q \times Q \times N$, gde je stanje r klopka.

$$F' = \{(f_1, f_2, x) \mid x \in A \cup \{\lambda\},\ f_1, f_2 \in F\}$$

Funkciju prelaza δ' definišemo na sledeći način:

$$\delta'(q'_0, (a_1, a_2)) := \begin{cases} (\delta(q_0, a_1), \delta(q_0, a_2), a_1^{-1}a_2) & : \ a_1^{-1}a_2 \in N; \\ r & : \ \text{inače.} \end{cases}$$

Dalje definišemo:

$$\delta'((q_1, q_2, g)(a_1, a_2)) :=$$

$$\begin{cases} (\delta(q_1, a_1), \delta(q_2, a_2), a_1^{-1}ga_2) & : \ a_1 \neq \$, a_2 \neq \$,\ a_1^{-1}ga_2 \in N; \\ (\delta(q_1, a_1), q_2, a_1^{-1}g) & : \ a_1 \neq \$, a_2 = \$,\ a_1^{-1}g \in N; \\ (q_1, \delta(q_2, a_2), ga_2) & : \ a_1 = \$, a_2 \neq \$,\ ga_2 \in N; \\ r & : \ \text{inače.} \end{cases}$$

Indukcijom se može pokazati da za $w_1, w_2 \in A^*$ važi:
ako je $\delta'(q'_0, \otimes(w_1, w_2)) = (q_1, q_2, g)$, tada je $\delta(q_0, w_1) = q_1$, $\delta(q_0, w_2) = q_2$ i $\psi(w_1) \cdot g = \psi(w_2)$.
Dokaz prve dve jednakosti je jednostavan.

Dokaz jednakosti $\psi(w_1) \cdot g = \psi(w_2)$:

1. Baza indukcije: $w_1 = a_1,\ w_2 = a_2,\ a_1, a_2 \in A$
   Po definiciji imamo:
$$\delta'(q_0', (a_1, a_2)) = (\delta(q_0, a_1), \delta(q_0, a_2), a_1^{-1}a_2)$$
   Zaista je:
$$a_1 \cdot a_1^{-1}a_2 = a_2.$$
2. Indukcijska pretpostavka: za $|w_1|, |w_2| = n$ važi
   $\delta'(q_0', \otimes(w_1, w_2)) = (q_1, q_2, g)$, $\delta(q_0, w_1) = q_1,\ \delta(q_0, w_2) = q_2$ i $\psi(w_1) \cdot g = \psi(w_2)$.
3. Indukcijski korak: $|w_1'|, |w_2'| = n + 1$
   $w_1' = w_1a_1,\ w_2' = w_2a_2,\ a_1, a_2 \in A_\$$
   (a) $a_1 \neq \$, a_2 \neq \$$
$$\delta'((q_1, q_2, g), (a_1, a_2)) = (\delta(q_1, a_1), \delta(q_2, a_2), t),$$
   Treba pokazati: $\psi(w_1)a_1t = \psi(w_2)a_2$. Imamo:
$$\begin{aligned}\psi(w_1)a_1t &= \psi(w_1)a_1a_1^{-1}ga_2\\ &= \psi(w_1)ga_2\\ &= \psi(w_2)a_2.\end{aligned}$$
   (b) $a_1 \neq \$, a_2 = \$$
$$\delta'((q_1, q_2, g), (a_1, \$)) = (\delta(q_1, a_1), q_2, t),$$
   Treba pokazati: $\psi(w_1)a_1t = \psi(w_2)$. Imamo:
$$\begin{aligned}\psi(w_1)a_1t &= \psi(w_1)a_1a_1^{-1}g\\ &= \psi(w_1)g\\ &= \psi(w_2).\end{aligned}$$
   (c) $a_1 = \$, a_2 \neq \$$
$$\delta'((q_1, q_2, g), (\$, a_2)) = (q_1, \delta(q_2, a_2), t),$$
   Treba pokazati: $\psi(w_1)t = \psi(w_2)a_2$. Imamo:
$$\begin{aligned}\psi(w_1)t &= \psi(w_1)ga_2\\ &= \psi(w_2)a_2.\end{aligned}$$

Dakle, ako automat $\mathcal{M}_x$ prihvata $\otimes(w_1, w_2)$, imamo da je
$$\psi(w_2) = \psi(w_1)x$$
(ili $\psi(w_2) = \psi(w_1)$ ako je $x =$).

Konačno imamo da automat $\mathcal{M}_x$ prihvata svako $\otimes(w_1, w_2)$ za koje je $\psi(w_1)x = \psi(w_2)$ (ili $\psi(w_1) = \psi(w_2)$ ako je $x =$). Sledi da je $\mathcal{L}(\mathcal{M}_x) = L_x$. ■

Najzad, imamo geometrijsku karakterizaciju automatskih grupa:

Teorema 3.21 *Grupa $\mathbb{G}$ je automatska sa automatskom prezentacijom (L, ψ) nad azbukom A ako i samo ako Cayley graf grupe $\mathbb{G}$ u odnosu na skup generatora A, $\Gamma(G, E)$ ima osobinu saputnika.* ■

3.6 Konstrukcije

U ovom poglavlju ukratko predstavljamo neke karakteristične konstrukcije na grupama koje očuvavaju automatičnost i FA-prezentabilnost.

3.6.1 Konačna proširenja grupa

Teorema 3.22 *Konačna proširenja automatskih grupa su automatske grupe.*

Dokaz:
Neka je $\mathbb{H}$ automatska grupa i neka je grupa $\mathbb{G}$ njeno proširenje konačnog indeksa k. Neka regularan jezik $L \subseteq A^*$ predstavlja domen grupe $\mathbb{H}$. Neka je su $g_i,\ 1 \leq i \leq k$ predstavnici koseta faktor grupe $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, takvi da za ove simbole važi $g_i \notin A$. Jezik $K = \bigcup_{1 \leq i \leq k} g_i \cdot L$ je regularan i predstavlja domen grupe $\mathbb{G}$. Lako je uvideti da su relacija $K_=$ i relacije K_x za množenje elementima skupa $A \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ definabilne prvog reda nad relacijama $L_=$ i L_x:

$$K_= = g_i \cdot L_=.$$

Za $a \in A$:

$$K_a = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \{(g_i w, g_i v) \in K^2 \mid (w, v) \in L_a\}.$$

Za $g_i,\ 1 \leq i \leq k$:

$$K_{g_i} = \{(g_j w, g_k w) \in K^2 \mid g_j H \cdot g_i H = g_k H\},$$

što je regularna relacija, jer je faktor grupa $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ konačna, pa time i FA-prezentabilna, te je množenje u toj strukturi FA-prepoznatljivo. Najzad imamo da je grupa $\mathbb{G}$ automatska nad azbukom $A \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$.■

Teorema 3.23 *Konačna proširenja FA-prezentabilnih grupa su FA-prezentabilne grupe.*

Dokaz:
Neka je $\mathbb{H}$ FA-prezentabilna grupa i neka je grupa $\mathbb{G}$ njeno proširenje konačnog indeksa k. Neka je (L, ψ) automatska prezentacija grupe $\mathbb{H}$ nad azbukom A. Neka je su $g_i,\ 1 \leq i \leq k$ predstavnici koseta faktor grupe $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, takvi da za ove simbole važi $g_i \notin A$. Jezik $K = \bigcup_{1 \leq i \leq k} g_i \cdot L$ je regularan i predstavlja domen grupe $\mathbb{G}$. Dalje definišemo:

$$K_= = g_i \cdot L_=,$$

$$L_. = \{(g_i u, g_j v, g_k w) \in K^2 \mid g_i H \cdot g_j H = g_k H \wedge ((u, v, w) \in L_. \\ \vee (u = \lambda \wedge \psi(v) = \psi(w)) \vee (v = \lambda \wedge \psi(u) = \psi(w)))\}.$$

Jasno je da su ove relacije FA-prepoznatljive (argumenti iz dokaza prethodne teoreme), pa je grupa $\mathbb{G}$ FA-prezentabilna. ■

3.6.2 Podgrupe

Teorema 3.24 *Regularna konačno generisana podgrupa automatske grupe je automatska.* ■

Teorema 3.25 *Regularna podgrupa FA-prezentabilne grupe je FA-prezentabilna.* ■

Pojam **regularna podgrupa** u prethodnom tvrđenju znači da domen te podgrupe predstavlja regularni jezik, koji je podskup regularnog jezika koji predstavlja domen grupe o čijoj je podgrupi reč.

Navedene rezultate je lako uvideti, obzirom da je presek regularnih relacija opet regularna relacija, a u pitanju je samo restrikcija odgovarajućih relacija na domen regularne podgrupe.

3.6.3 Direktan proizvod

Direktan proizvod FA-prezentabilnih polugrupa i grupa

Klasa FA-prezentabilnih polugrupa je zatvorena u odnosu na direktne proizvode, kao posledica korolara 2.6 koja govori da je to osobina svih FA-prezentabilnih struktura.

Teorema 3.26 *Direktan proizvod dve FA-prezentabilne polugrupe je FA-prezentabilan.* ■

Kao direktnu posledicu imamo:

Korolar 3.27 *Direktan proizvod dve FA-prezentabilne grupe je FA-prezentabilan.* ■

Postavlja se pitanje: *da li važi obratno tvrđenje, da iz FA-prezentabilnosti direktnog proizvoda dve polugrupe sledi FA- prezentabilnost direktnih faktora?*

Odgovor je **ne**. U radu [6] naveden je kontraprimer, gde su $\mathbb{S} \times T$ i $\mathbb{T}$ FA-prezentabilne polugrupe, dok polugrupa $\mathbb{S}$ nije FA-prezentabilna. Nakon ovog saznanja pitanje je: *da li postoje polugrupe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ koje nisu FA-prezentabilne, a da je njihov direktan proizvod FA-prezentabilan?*

Ova pitanja su od značaja zbog **otvorenog problema**: *da li su polugrupe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ automatske ako je njihov direktan proizvod automatski?*

Navedeni problem je otvoren i u slučaju grupa.

Direktan proizvod automatskih polugrupa, monoida i grupa

Direktan proizvod dve konačno generisane polugrupe ne mora biti konačno generisan, pa je situacija kod automatskih polugrupa složeniji nego kod FA-prezentabilnih.

Direktan proizvod dva konačno generisana monoida je međutim konačno generisan. Naime ako su monoidi $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ generisani konačnim skupovima X i Y respektivno, njihov direktan proizvod $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ je konačno generisan skupom $X \times \{1_T\} \cup \{1_S\} \times Y$, gde su 1_S i 1_T jedinični elementi monoida $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$.

Primer 3.3 Polugrupa $(\mathbb{N}\backslash\{0\},+)$ je generisana sa $\{1\}$, dok $(\mathbb{N}\backslash\{0\},+)\times(\mathbb{N}\backslash\{0\},+)$ nije konačno generisan.

Ako uključimo jedinični element, polugrupa $(\mathbb{N},+)$ je generisana sa $\{0,1\}$, a $(\mathbb{N},+)\times(\mathbb{N},+)$ je konačno generisan skupom $\{(1,0),(0,1)\}$. $\square$

Propozicija 3.28 *Neka je J regularan jezik nad azbukom A. Relacija $L=\{(\otimes\bar{w}_1,\otimes\bar{w}_2,\ldots,\otimes\bar{w}_k)\mid \bar{w}_1,\bar{w}_2,\ldots,\bar{w}_k\in J^n\}$ je FA-prepoznatljiva automatom sa k traka ako i samo ako je relacija $K=\{(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\ldots\bar{w}_k)\mid \bar{w}_1,\bar{w}_2,\ldots,\bar{w}_k\in J^n\}$ FA-prepoznatljiva automatom sa $n\cdot k$ traka.*

Dokaz:
Zbog jednostavnijeg zapisa dokaz izvodimo za $n=2,k=2$. Dokaz za $n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}$ izvodi se analogno.

($\Longrightarrow$) Neka je relacija L FA-prepoznatljiva. Po definiciji imamo da postoji automat sa dve trake $\mathcal{A}=(S,(A_\$^2\cup\{\$\})^2,\delta,q_0,F)$ takav da je $\mathcal{L}(\mathcal{A})=\otimes L$. Reči jezika $\otimes L=\{\otimes(\otimes\bar{w}_1,\otimes\bar{w}_2)\mid \bar{w}_1,\bar{w}_2\in J^2\}$ su reči nad azbukom:

$$\begin{aligned}(A_\$^2\cup\{\$\})^2=\{((a_1,a_2),(a_3,a_4))\mid a_1,a_2,a_3,a_4\in A_\$\}\\ \cup\{((a_1,a_2),\$)\mid a_1,a_2\in A_\$\}\\ \cup\{(\$,(a_3,a_4))\mid a_3,a_4\in A_\$\}\\ \backslash\{((\$,\$),(\$,\$)),((\$,\$),\$),(\$,(\$,\$))\}.\end{aligned}$$

Dakle automat $\mathcal{A}$ tretira $(a_1,a_2)\in A_\$^2\backslash\{(\$,\$)\}$ kao jedno slovo.

Definišimo automat sa 4 trake $\mathcal{B}=(S,A_\$^4,\delta',q_0,F)$, gde je funkcija prelaza definisana sa:

$$\delta'(q,(a_1,a_2,a_3,a_4))=s\Leftrightarrow\delta(q,((a_1,a_2),(a_3,a_4)))=s,$$

$$\delta'(q,(a_1,a_2,\$,\$))=s\Leftrightarrow\delta(q,((a_1,a_2),\$))=s,$$

$$\delta'(q,(\$,\$,a_3,a_4))=s\Leftrightarrow\delta(q,(\$,(a_3,a_4)))=s,$$

za svako $a_1,a_2,a_3,a_4\in A_\$$ i svako $q,s\in Q$.
Reči jezika $\otimes K=\{\otimes(\bar{w}_1,\bar{w}_2)\mid \bar{w}_1,\bar{w}_2\in J^2\}$ su reči nad azbukom:

$$A_\$^4=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\mid a_1,a_2,a_3,a_4\in A_\$\}\backslash\{(\$,\$,\$,\$)\}.$$

Imamo da je $\mathcal{L}(\mathcal{B})=\otimes K$.

($\Longleftarrow$) Ovaj smer se dokazuje polazeći od automata sa 4 trake $\mathbb{B}=(S,A_\$^4,\delta',q_0,F)$, definišući automat sa dve trake $\mathcal{A}=(S,(A_\$^2\cup\{\$\})^2,\delta,q_0,F)$. Kako je u dokazu prethodnog smera funkcija prelaza definisana ekvivalencijama, ovde možemo upotrebiti iste definicije pri definisanju δ preko δ'. $\blacksquare$

Koristeći ovu činjenicu možemo dokazati sledeću teoremu:

Teorema 3.29 *Direktan proizvod dva automatska monoida $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ je automatski.*

Dokaz:
Neka su L i K regularni jezici koji predstavljaju domene automatskih monoida $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ nad azbukama A i B respektivno. Monoid $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ je generisan skupom $(A \cup \{1_S\}) \times (B \cup \{1_T\})$ (čak i bez elementa $(1_S, 1_T)$ ukoliko bar jedan od skupova A i B ne sadrži jedinicu), gde su 1_S i 1_T jedinični elementi monoida $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ redom. Definišimo regularan jezik koji predstavlja domen monoida $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ nad azbukom $A_\$ \times B_\$ \backslash \{(\$, \$)\}$ sa:

$$J = \{\otimes(u, v) \mid u \in L \wedge v \in K\}.$$

Definišimo sada regularne relacije: $L_\$:= L_=$ i $K_\$:= K_=$. Imamo da je:

$$J_= = \{(\otimes(u, v), \otimes(u', v')) \mid L_=(u, u') \wedge K_=(v, v')\}.$$

Slede definicije relacija za množenje slovima azbuke $A_\$ \times B_\$ \backslash \{(\$, \$)\}$):

$$J_{(a,b)} = \{(\otimes(u, v), \otimes(u', v')) \in J^2 \mid L_a(u, u') \wedge K_b(v, v')\},$$

gde je $a \in A_\$,\ b \in B_\$$. Na osnovu propozicije 3.28 imamo da su gore definisane relacije regularne ako i samo ako su to i relacije

$$J_= = \{(u, v, u', v') \mid L_=(u, u') \wedge K_=(v, v')\},$$

$$J_{(a,b)} = \{(u, v, u', v') \mid L_a(u, u') \wedge K_b(v, v')\},$$

za $a \in A_\$,\ b \in B_\$$. Navedene relacije su definabilne prvog reda nad regularnim relacijama, pa imamo da su one regularne. Sledi da je $\mathbb{S} \times \mathbb{T}$ automatski monoid nad azbukom $A_\$ \times B_\$ \backslash \{(\$, \$)\}$, gde je odgovarajući homomorfizam $\tau : J \to \mathbb{S} \times \mathbb{T}$ definisan sa $\tau(a, b) = (a, b)$, $\tau(a, \$) = (a, 1_T)$ i $\tau(\$, b) = (1_S, b)$ za $a \in A, b \in B$. Dakle, simbol \$ u projekcijama reči jezika J označava odgovarajuću jedinicu (zamenom ovog simbola nekim drugim simbolima koji označavaju odgovaraju jedinice se ništa ne menja u pogledu regularnosti razmatranih jezika i relacija). ■

Napomena: Ova teorema se može dokazati i bez propozicije 3.28. U tom slučaju jezik J ne čine konvolucije, već reči nad azbukom $A+B$ iz skupa $(AB)^+$. Ova verzija dokaza može se pronaći u radu [3] kao teorema 6.4.

Korolar 3.30 *Direktan proizvod dve automatske grupe je automatski.*

3.6.4 Slobodan proizvod

Slobodan proizvod FA-prezentabilnih polugrupa, monoida i grupa

Teorema 3.31 *Slobodan proizvod dve polugrupe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ je FA-prezentabilan ako i samo ako su $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ trivijalni.*

Dokaz:
Pretpostavimo suprotno, da je $\mathbb{S}$ netrivijalna polugrupa. Neka su $s_1, s_2 \in S$ i $t \in T$. Skup $\{s_1t, s_2t\}$ gdeneriše slobodnu podpolugrupu od $\mathbb{S} * \mathbb{T}$. Rast ove podpolugrupe nije polinoman, pa polugrupa $\mathbb{S} * \mathbb{T}$ ne može biti FA-prezentabilna. Kontradikcija.

Neka su sada $S = \{s\}$ i $T = \{t\}$ nosači trivijalnih podgrupa. Svaki element $S*T$ je naizmenični proizvod s i t, pa je jedinstveno određen početnim simbolom i dužinom proizvoda. Dakle, skup $S * T$ možemo opisati sa:

$$L = \{xn \mid x \in \{s, t\}, n \in \mathbb{N}\backslash 0\},$$

gde su prirodni brojevi predstavljeni u binarnom zapisu unazad. Na prirodan način definišemo $\psi : L \to S * T$ Kako je (L, ψ) jedinstvena automatska prezentacija, imamo:

$$L_= = \{(w, w) \mid w \in L\}$$

Množenje opisuje sledeća relacija:

$$\begin{aligned} L_\cdot = \{(xn, ym, xp) \mid & ((x = y) \wedge (n \equiv 0 \ mod\ 2) \wedge (p = n + m)) \\ & \vee ((x = y) \wedge (n \equiv 1 \ mod\ 2) \wedge (p = n + m - 1)) \\ & \vee ((x \neq y) \wedge (n \equiv 0 \ mod\ 2) \wedge (p = n + m - 1)) \\ & \vee ((x \neq y) \wedge (n \equiv 1 \ mod\ 2) \wedge (p = n + m))\}. \end{aligned}$$

Naime, $\psi(xn)$ se završava sa x ako i samo ako je n neparno. Kako je parnost prirodnih brojeva u binarnom zapisu unazad lako proverljiv automatom, relacija $L_\cdot$ je FA-prezentabilna. ■

Kada je reč o slobodnom proizvodu monoida, sa poistovećenim jediničnim elementom, situacija je nešto povoljnija:

Teorema 3.32 *Slobodan proizvod dva monoida $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ je FA-prezentabilan ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

1. *monoid $\mathbb{S}$ je FA-prezentabilan, a $\mathbb{T}$ je trivijalan, ili obratno;*
2. *S i T su dvoelementni skupovi.*

Dokaz:
Ako je $\mathbb{T}$ trivijalan monoid, tada je $\mathbb{S} * \mathbb{T}$ izomorfan sa $\mathbb{S}$.

Neka su sada $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ netrivijalni monoidi. Pretpostavimo suprotno tvrđenju, da S sadrži bar 3 elementa. Neka su s_1 i s_2 ne-jedinični elementi monoida $\mathbb{S}$ and neka je t ne-jedinični element $\mathbb{T}$. Imamo da skup $\{s_1t, s_2t\}$ generiše slobodnu podpolugrupa od $S * T$, čiji rast nije polinoman, pa $\mathbb{ST}$ ne može biti FA-prezentabilan monoid. Kontradikcija.

Pretpostavimo sada da su S i T dvoelementni skupovi. Imamo da je svaki element $S * T$ jedinica ili naizmenični proizvod ne-jediničnih elemenata $s \in S$ i $t \in T$, koji jedinstveno određen početnim simbolom i dužinom proizvoda. Definišemo:

$$L = \{e\} \cup \{xn \mid x \in \{s, t\},\ n\mathbb{N}\backslash 0\}$$

i $\psi : L \to S * T$ sa $\psi(e) = 1$ i $\psi(xn)$ definisanim na prirodan način. Imamo:

$$L_= = \{(w, w) \mid w \in L\}.$$

Relacija $L_\cdot$ za množenje definiše se na sličan način kao u dokazu prethodnog tvrđenja, sa razlikom da sada postoji više slučajeva, u zavisnosti da li je $s^2 = s$ ili $s^2 = 1_S$, i $t^2 = t$ ili $t^2 = 1_T$. ■

Primetimo da ova karaterizacija FA-prezentabilnih slobodnih proizvoda monoida karakteriše i FA-prezentabilne slobodne proizvode grupa:

Korolar 3.33 *Slobodan proizvod dve grupe $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$ je FA-prezentabilan ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

1. *grupa $\mathbb{G}$ je FA-prezentabilna, a $\mathbb{H}$ je trivijalna, ili obratno;*
2. *G i H su dvoelementni skupovi.*

■

Slobodan proizvod automatskih polugrupa, monoida i grupa

Kada je u pitanju automatičnost, situacija je daleko povoljnija.

Propozicija 3.34 *Slobodan proizvod dve polugrupe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ je automatski ako i samo ako su $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ automatske polugrupe.*

Dokaz:
($\Longleftarrow$) Neka su $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ automatske polugrupe i neka su L i K regularni jezici koji injektivno predstavljaju njihove domene nad disjunktnim azbukama A_S i A_T.

Neka je $A = A_S \cup A_T$ azbuka nad kojom definišemo jezik za domen polugrupe $\mathbb{S} * \mathbb{T}$:

$$J = (L + \{\lambda\})(KL)^*(K \cup \{\lambda\})\lambda.$$

Svaki element $\mathbb{S} * \mathbb{T}$ je predstavljen jedinstveno u regularnom jeziku J, pa imamo:

$$J_= = \{(w, w) \mid w \in J\}.$$

Definišimo sada regularne jezike:

$$J_1 = (L \cup \{\lambda\})(KL)^*\{\lambda\}, \qquad J_2 = (L \cup \{\lambda\})(KL)^*K.$$

Važi $J = J_1 \cup J_2$ i $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

Za $a \in A_S$ definišemo:

$$J_a = L_a + (\{(w, w) \mid w \in J_2\}) \cdot (L_a + \{(\lambda, a)\}).$$

Za $a \in A_T$ definišemo:

$$J_a = K_a + (\{(w, w) \mid w \in J_1\}) \cdot (K_a + \{(\lambda, a)\}).$$

Jasno je da su navedene relacije regularne, pa je polugrupa $\mathbb{S} * \mathbb{T}$ automatska.

($\Longrightarrow$) Neka je polugrupa $\mathbb{S} * \mathbb{T}$ automatska i neka je njen domen predstavljen regularnim jezikom L nad azbukom A. Neka je ψ odgovarajući homomorfizam. Definišemo konačan skup:

$$B = \{a \in A \mid \psi(a) \in S\}.$$

Kako važi

$$x \cdot y \in S \Rightarrow x \in S \wedge y \in S,$$

imamo da je $(L \cap B^+, \psi|_{L \cap B^+})$ prezentacija automatske polugrupe $\mathbb{S}$.

Analogno se dokazuje da je $\mathbb{T}$ automatska polugrupa. ■

Teorema 3.35 *Slobodan proizvod dva automatska monoida $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ je automatski.*

Dokaz:
Neka su L i K regularni jezici koji injektivno predstavljaju domene automatskih monoida $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ nad azbukama A_S, A_T respektivno, za koje je $A_S \cap A_T = \{e\}$, gde e predstavlja jedinični element u obe grupe.

Neka su $L' = L \backslash \{e\}$ i $K' = K \backslash \{e\}$, i neka je $A = A_S \cup A_T$. Nad azbukom A definišemo regularni jezik:

$$J = \{e\} + (L' + \{\lambda\})(K'L')^*(K' + \{\lambda\}) \backslash \{\lambda\}.$$

Kako je svaki element $\mathbb{S} * \mathbb{T}$ predstavljen jedinstveno u jeziku J, imamo da je

$$J_= = \{(w, w) \mid w \in J\}.$$

Definišimo sada regularne jezike:

$$J_1 = (L' + \{\lambda\})(K'L')^* \backslash \{\lambda\}, \qquad J_2 = (L' + \{\lambda\})(K'L')^* K' \backslash \{\lambda\}.$$

Važi: $J = J_1 \cup J_2 \cup \{e\}$ i $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Imamo da je $J_e = J_=$.
Sada za $a \in A_S \backslash \{e\}$ definišemo:

$$J_a = L_a + (\{(w, w) \mid w \in J_2\}) \cdot (L'_a + \{(\lambda, a)\}).$$

Za $a \in A_T$ definišemo:

$$J_a = K_a + (\{(w, w) \mid w \in J_1\}) \cdot (K'_a + \{(\lambda, a)\}).$$

Jasno je da su navedene relacije regularne, pa je monoid $\mathbb{S} * \mathbb{T}$ automatski. ■

Jasno je da isti rezultat važi i za grupe:

Korolar 3.36 *Slobodan proizvod dve automatske grupe je automatski.* ■

Literatura

[1] S.Rubin, *Automatic Structures*, PhD thesis, University of Auckland, 2004.

[2] O.Kharlampovich, B.Khoussainov, A.Miasnikov, *From automatic structures to automatic groups*, 2011, arXiv:1107.3645.

[3] C.M.Campbell, E.F.Robertson, N.Ruškuc, R.M.Thomas, *Automatic semigroups*, Theoret. Comput. Sci. **250** (2001), 365-391.

[4] C.M.Campbell, E.F.Robertson, N.Ruškuc, R.M.Thomas, *Automatic completely simple semigroups*, Acta Math. Hungar. **95** (2002), 201-215.

[5] A.J.Cain, G.Oliver, N.Ruškuc, R.M.Thomas, *Automatic presentations for semigroups*, Inform. Comput. **207** (2009), 1156-1168.

[6] A.J.Cain, G.Oliver, N.Ruškuc, R.M.Thomas, *Automatic presentations and semigroup constructions*, Theory Comput. Syst. **47** (2010), 568-592.

[7] R.Sz. Madarász, S. Crvenković, *Uvod u teoriju automata i formalnih jezika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1995.

[8] R. Sz Madarász, *Od skupova do univerzalnih algebri*, Univerzitet u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, 2006.

[9] Hopcroft, Motwani, Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, 2001, ISBN 0201441241

Biografija

Atila Fešiš je rođen 23. januara 1988. godine u Novom Sadu. 2007. godine završio je gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu. 2011. godine je završio osnovne studije na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer matematika sa prosečnom ocenom 9.50. Školsku 2010/11. godinu proveo je na studentskoj razmeni na Middle East Technical University u Ankari, Turska. 2011. godine je upisao master akademske studije na matičnom fakuletu, modul teorijska matematika. Školsku 2011/12. godinu proveo je na studentskoj razmeni na Varšavskom Univerzitetu, Varšava, Poljska.

Novi Sad, maj 2013. Atila Fešiš

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Master rad

Autor: (AU): Atila Fešiš

Mentor: (MN): Igor Dolinka

Naslov rada: (NR): Automatske grupe i strukture predstavljive konačnim automatima

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): Srbija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2013.

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (FO):3/V+57/9/0/10/0/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Algebra

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): Automatske; FA-prezentabilne; Strukture; Grafovi; Grupe; Cayley graf grupe; Virtuelno Abelove grupe; Graf automatski; Osobina saputnika;

UDK:

Čuva se: (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-

matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): Ovaj rad se bavi automatskim i FA- prezentabilnim strukturama. Karakteriše ove strukture, a potom se bavi automatskim grafovima i drvima i karakteriše FA-prezentabilne ordinale, integralene domene, polja i Bulove algebre. U poslednjoj glavi je reč o FA-prezentabilnim, automatskim i graf automatskim grupama. Karakterišu se konačno generisane FA-prezentabilne grupe, a potom se iznosi i geometrijska karakterizacija automatskih grupa. Na kraju se predstavljaju neke značajne konstukcije.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP):

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Igor Dolinka, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Petar Marković, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Master's thesis

Author: (AU): Atila Fešiš

Mentor: (MN): Igor Dolinka

Title: (TI): Automatic groups and FA-presentable structures

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): Serbia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2013.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (PD): 3/V+57/9/0/10/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Algebra

Subject/Key words: (SKW): Automatic; FA-presentable; Structures; Graphs; Groups; Cayley graph of a group; Virtually Abelian groups; Graph automatic; Fellow traveller property;

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): This thesis deals with automatic and FA-presentable structures. We caracterise these structures, and then we deal with automatic graphs

and trees. After that we caracterise FA-presentable ordinals, integral domains, fields and Boolean algebras. In the last chapter the topic is FA-presentable, automatic and graph automatic groups. There is a caracterisation of finitely generated FA-presentable groups. Next comes the geometric caracterisation of automatic groups. At the end some important constructions are presented.

Accepted by the Scientific Board on: (ASb):

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Rozália Sz. Madarász, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: dr Igor Dolinka, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Petar Marković, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad