UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Anita Pustai

TEŽIŠTE FIGURA I SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA – MOGUĆNOST IZLAGANJA NEKIH DELOVA OVOG SADRŽAJA U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

Master rad

Novi Sad, 2016.

Predgovor

Ovaj master rad je posvećen jednoj nestandardnoj temi u školskoj matematici - temi: ***Težište figura i sistema materijalnih tačaka***. Iako ova tema nije u sadržaju programa nastave matematike u školi, mada ima dodirnih tačaka, korist izlaganja ovog komplikovanog sadržaja deci još u osnovnoj školi je od šireg interesa, kako zbog lakšeg usvajanja gradiva iz drugih predmeta (npr. fizike), tako i radi boljeg poimanja sveta koji ih okružuje.

Metodički deo rada je posvećen tzv. ***Kooperativnom učenju,*** tj. ***učenju u manjim grupama*** (*cooperative learning groups*). U prvoj glavi ovog rada dat je prikaz ovog pristupa podučavanju matematike, kao i pregled dosadašnjih iskustava u svetu u ovoj oblasti metodike matematike. Iznete su prednosti i mane takvog pristupa. Navedimo samo neke od razloga za rad u manjim grupama: mogućnost interaktivnog rada, generisanje širokog spektra mogućih alternativnih gledišta i rešenja, davanje prilike da đaci rade na projektu koji je suviše velik ili kompleksan za pojedinca, mogućnost učešća u diskusiji učenika koji imaju teškoće da iznesu javno svoja mišljenja, prevazilaženje anonimnosti i pasivnosti karakteristične za veće grupe... Takođe, poznato je da osećaj neuspeha grupe pojedinac ne doživljava tako traumatično kao lični neuspeh, a uspeh grupe često pojedinac pripisuje svom doprinosu.

Druga glava ovog rada se bavi obradom osnovne teme - *Težište figura i sistema materijalnih tačaka*. Ovde su pored osnovnih pojmova kao što su *materijana tačka i centar mase (težište)* izložene i osnovne teoreme geometrije masa. Takođe, dati su i dokazi nekih poznatih teorema korišćenjem centra mase kao što su Simpsonova, Čevina i Menelajeva teorema. Tema težište sistema materijalnih tačaka je pogodna za obradu kod učenika srednjoškolskog uzrasta koji pokazuju veće interesovanje za matematiku. Stoga i ne čudi to što se ovaj sadržaj može naći u popularnoj literaturi koja je upravo namenjena ovim đacima, kao što je to srednjoškolski matematički list Tangenta [21]. Ipak, tokom obrade ovog materijala uočeni su izvesni propusti u dokazima (netačnosti u II slučaju Menelajeve teoreme u [21]) te su ovom prilikom ti propusti otklonjeni. Pored ovoga, definisano je težište krivih linija, dvodimenzionih ograničenih figura i trodimenzionih tela i utvrđivanje osnovnih osobina. Napomenimo samo da srednjoškolci mašinske struke koriste priručnike [13] u kojima su samo navedeni položaji težišta kod konkretnih krivih, figura i tela. Za konkretne krive, figure i tela **kandidat je samostalno izveo dokaze koji se odnose na utvrđivanje težišta istih** i time proverio ispravnost formula koje se koriste u pomenutoj praksi.

Treća glava je posvećena jednom eksperimentu koji je izveden u Osnovnoj školi "Adi Endre" u Malom Iđošu, gde je kandidat bio zaposlen kao nastavnik Matematike za dva odeljenja 6. razreda (odnosno, 7. razreda) u periodu 31.03. do 17.04.2014. godine i 02.09.2014. godine. Zadatak koji je postavljen pred kandidata je bio da se ispitaju ***koji delovi ovog sadržaja se mogu izložiti učenicima šestog (sedmog) razreda osnovne škole MTE-modelom nastave kao i mogućnost da se to izloži putem kooperativnog učenja.*** Osnovna ideja eksperimenta je bila da se u prvom delu učenici eksperimentalne grupe pripreme za rad u manjim grupama korišćenjem tzv. *Modifikovanog MTE-modela nastave*, tj. da se u jednom dužem periodu, kroz obradu većeg broja nastavnih jedinica iz obaveznog programa, najpre naviknu na ovaj način rada. Modifikacija MTE-modela nastave, kojeg karakterišu dva testa: motivacioni (M-test) i test provere znanja (E-test), se sastoji u tome da se na času izvede samo jedan test koji predstavlja ujedno i test provere usvojenog znanja sa prethodnog časa i motivacioni test za aktuelni čas, a što je izvodljivo upravo zbog povezanosti gradiva koje se izlaže u nizu časova. U drugom delu eksperimenta, trebalo je ispitati koji sadržaj naše osnovne teme (Težište figure) bi se mogao izložiti ovim putem učenicima. U pripremnoj fazi eksperimenta, kroz 6 časova ovim putem su obrađene nastavne jedinice: *Pojam četvorougla, Uglovi četvorougla, Paralelogram, Vrste paralelograma, Paralelogram i simetrije i Trapez*, na kraju školske 2013/14. godine . Tema *Težište Figura* je obrađena u istim odeljenjima na početku sledeće školske godine (u sedmom razredu). Efikasnost opisanog modela nastave kako za ceo period u kome je vršen eksperiment, tako i za obradu naše osnovne, nestandardne teme je ispitana. Rezultati eksperimenta i anketiranja su statistički obrađeni a zaključci izvedeni u četvrtoj glavi.

Testovi iz pripremne faze, ankete i kontrolni zadaci sa rezultatima se mogu naći u Dodatku. Slike je autor teksta samostalno nacrtao pomoću matematičkog softvera GeoGebra.

Postoji veliki broj istraživanja koji su se bavili temom kooperativnog učenja. Tokom mnogih godina istraživanja ovaj način učenja je sada postavljen na zavidan nivo, dok se i dan danas još uvek postižu neki novi rezultati u nastavi i učenju. Ovaj master rad je vođen idejom da se da jedan skromni doprinos u ovome pravcu i nadamo se da smo u tome uspeli.

Želim da sa zahvalim svom mentoru, prof. Dr Olgi Bodroža-Pantić na svim savetima, sugestijama, pomoći, razumevanju i strpljenju. Takođe, želim da izrazim zahvalnost svojim roditeljima i svom suprugu na punoj podršci.

Novi Sad, januar 2016. Anita Pustai

Sadržaj

Uvod

Motivacija je skup razloga koje pojedinac ima za određeno ponašanje u određenim situacijama. Motivacija u učenju su oni činioci koji pokreću, organizuju, usmeravaju i određuju intenzitet i trajanje aktivnosti učenja. Nacionalni savet profesora matematike (NCTM – the National Council of Teachers of Mathematics) u SAD je postavio *motivacione ciljeve*:

- Učenje vrednovanja matematike
- Postati siguran u sopstvene sposobnosti

jer je ustanovljeno da u današnje vreme, kada tehnologija vrtoglavo napreduje, deca nemaju dovoljno matematičko znanje kao ni interesovanje da bi se lako snašli u društvu.

Ova dva cilja su najvažnija za učenike kao pokušaj da se promeni dosadašnji pristup matematici u sistemu obrazovanja.

Postoje dva različita tipa motivacije kod učenika [16]: unutrašnja i spoljašnja. Unutrašnja motivacija je želja učenika da samostalno uči za sopstveno napredovanje. Unutrašnje motivisan učenik je zainteresovan za samu aktivnost ili temu. Unutrašnja motivacija ispunjava učenika zadovoljstvom, učenik želi da sazna više i želi da napreduje. Učenici koji su motivisani unutrašnjom motivacijom više cene matematiku nego ostali učenici. Prihvataju zadatke zato što uživaju u njima, ona je primarna potreba za sticanjem znanja i veština. O njoj govorimo kada je učenik aktivan radi same aktivnosti i nije potrebno koristiti nagrade ili druge podsticaje jer za učenika samo bavljenje tom aktivnošću (učenje, rešavanje različitih intelektualnih zadataka) predstavlja nagradu. U osnovi unutrašnje motivacije za učenje leži radoznalost, stalni nemir ljudskog duha, težnja za otkrivanjem i saznavanjem novog. Želja za znanjem je najznačajniji motiv za školsko učenje. Mnogi obrazovni i odgojni problemi u školi se mogu uspešnije rešavati na taj način što će se veća pažnja obratiti na pobuđivanje i razvijanje unutrašnje motivacije kod učenika. Njihovi motivi se fokusiraju na ciljeve učenja kao što su razumevanje i savladanje matematičkih pojmova [16].

Spoljašnjom motivacijom učenici se angažuju ne zbog sopstvenog napredovanja ili zadovoljstva, nego da bi bili nagrađeni od strane nastavnika ili roditelja ili izbegli određenu kaznu (npr. lošu ocenu ili loše mišljenje od strane vršnjaka, odnosno konkurencije). Poželjno je spoljašnju motivaciju koristiti samo privremeno [16] dok se učenik ne upozna sa prirodom predmeta, a posle toga je potrebno razvijati unutrašnju motivaciju učenika, njihovu želju za saznanjem, radoznalost. Vremenom spoljašnja motivacija treba da postaje manje značajna, dok unutrašnji motivi vezani za postavljeni zadatak treba da postaju sve značajniji.

Prema Slavinu [22]-[25], jednom od vodećih autoriteta današnjice u oblasti metodike nastave, ***kooperativno učenje*** je jedno od najuspešnijih priča u istoriji edukativnih inovacija. Osnovna ideja kooperativnog učenja izneta je početkom dvadesetog veka (1920.-1930.god.) i sastoji se u tome da pojedinci (učenici) zajedno rade u ostvarenju nekog zajedničkog cilja, pri čemu se zbog međusobne interakcije postiže efekat povećanja motivacije za učenjem.

1. Kooperativno učenje - učenje u malim grupama

1.1. Definicija i ciljevi

U školama je pretežno zastupljena tradicionalna nastava. Postoje prednosti tradicionalne nastave ali takođe javljaju se poteškoće u našim školama. Tradicionalnoj nastavi ne možemo pripisati potpunu neefikasnost jer ona ima i svojih prednosti. Zato je ne smemo odbaciti, već moramo zadržati ono što je dobro i na tim osnovama graditi efikasnije oblike rada. Jedan od efikasnih oblika rada, jeste korišćenje kooperativnog učenja u nastavi. Pojam kooperativnog učenja predstavlja instrukcijsku metodu u kojoj učenici raznih nivoa znanja uče zajedno u malim grupama. Učenici su sami odgovorni za svoje učenje kao i za učenje ostalih. Uspeh jednog člana grupe pomaže drugom da bude uspešniji. Kooperativni timovi postižu veće nivoe mišljenja i zadržavaju informacije duže od onih koji rade individualno. Podeljeno učenje daje učenicima priliku da učestvuju u raspravi, preuzimaju odgovornost za sopstveno učenje, a razmena ideja ne samo da povećava interes među učenicima, već unapređuje i kritičko mišljenje. Ovakav način rada nesumnjivo snažno podstiče interakciju među članovima grupe čime se na najbolji način ostvaruje bolja efikasnost vaspitno-obrazovnog procesa. Da bi se postigla maksimalna efikasnost u nastavnom procesu neophodno je eliminisati negativne efekte tradicionalne nastave koji se ogledaju u forsiranju verbalizma i reproduktivnog učenja.

Najopštija i sveobuhvatna definicija kooperatvnog učenja može se objasniti kao primena raznolikih nastavnih metoda u kojima male grupe učenika rade zajedno i pomažu jedni drugima u izvršavanju školskih zadataka [14]. Rad u malim grupama može se koristiti kako u razredu tako i van njega, kao važan dodatak predavanju, pomažući učenicima da savladaju složene pojmove i da ih primene kao veštine kritičkog razmišljanja. Mnogi nastavnici [14] su se trudili da svoj razred organizuju u male neformalne grupe kako bi uradili jedan kratak zadatak. Učenje u malim grupama ovde traje ceo čas ili više časova, grupe mogu biti određene od strane nastavnika ili od strane učenika. Zadaci trebaju da budu takvi da ni jedan učenik ne može da ga uradi sam. Kolaborativni grupni rad zahteva nastavnikovo planiranje koje takođe nije bez teškoća ni za učenike. Međutim, prednosti su sve veće učešće učenika i to u svim komponentima časa, kao i bolje razumevanje i zadržavanje informacija, vladanje veštinama koje podstiču bolji uspeh na času i povećanost entuzijazma za učenje [9].

Učenici treba da se osete da su sami odgovorni za svoje učenje kao i za učenje ostalih. Uspeh jednog člana grupe pomaže drugom da bude uspešniji. Na ovaj način kooperativni timovi postižu veće nivoe mišljenja i zadržavaju informacije duže od onih koji rade individualno. Podeljeno učenje daje učenicima priliku da učestvuju u raspravi, preuzimaju odgovornost za sopstveno učenje a razmena ideja ne samo da povećava interes među učenicima, već unapređuje kritičko mišljenje.

Kooperativno učenje generalno podrazumeva da učenici podeljeni u manjim grupama razmenjuju ideje i rade na zadatim zadacima. Takva opšta definicija obezbeđuje da zapravo postoji veliki broj različitih modela za kooperativno učenje, modeli koji se značajno razlikuju u svojim pretpostavkama o prirodi učenja i o ulozi nastavnika i učenika u učionici. Na primer, kooperativni rad u matematici može da se koristi u kombinaciji sa praksom vežbanja veština, istraživačko učenje, laboratorijsko ispitivanje ili prikupljanje podataka, grupna diskusija koncepta i rešavanje problema. Kooperativni rad se može primenjivati takođe u kombinaciji sa korišćenjem kompjutera, vršnjačkim instrukcijama, dodatnom radu, kao i pregledavanju pa čak i testiranju grupe.

Već se duže vreme u vaspitanju i obrazovanju raspravlja o važnosti sticanja praktičnog i konceptualnog znanja nasuprot usvajanju činjeničnog znanja. Da bi mogli da dobro koriste stečene informacije, učenici moraju znati da vešto primene skup umeća praktičnog mišljenja, koje im omogućuje da delotvorno koriste informacije. Učeničko odlučivanje, oblikovanje mišljenja, rešavanje problema, saradnički rad, učenje o tome kako učiti iz raznih izvora, zatim kreativno integrisanje ideja i informacija mora se uvek smatrati delom sadržaja nastavnih programa i nikad ne odvajati od sadržaja [3]. Od velikog je značaja da škola nauči decu kako treba posmatrati i misliti, jer učenik ne usvaja samo znanje već i načine i puteve kako se znanje stiče, učenik usvaja način rada.

U tradicionalnoj nastavi nastavnik predstavlja ključnu osobu za sticanje znanja, pružanje informacija. Učenje više u kolaborativnom-kooperativnom okruženju zahteva drugačiju ulogu nastavnika koji treba da obezbedi da učenici razgovaraju o problemu i traže metode da ga reše. U kolaborativnoj učionici čas počinje tako što učitelj predaje gradivo, lekcije. Zatim se razred deli obično u dve grupe i svaka grupa dobija zadatke, kada su zadaci urađeni, razred se „spaja“ i svi zajedno sumiraju naučeno gradivo. Na ovakav način organizovanja nastave, svaki pojedinac u razredu ima ravnopravni status, svaki učenik ima svoju ulogu u grupi kojom će postići željeni uspeh.

Primarni fokus kooperativnog učenja jeste razmišljanje učenika. Učenici moraju da savladaju neke strategije rešavanja problema, moraju imati poverenja u svoje sposobnosti i biti sposobni da rizikuju kada iznose svoje mišljenje. Ove veštine se stiču vremenom, učenici u ovakvoj nastavi govore češće i iznose svoje mišljenje, uključuju se u razgovor i isprobavaju različite načine rešavanja postavljenog problema.

Grupna efikasnost podrazumeva [11]:

1. Konverzaciju, komunikaciju između članova grupe, primenu stečenih znanja u praksi, na konkretnim problemima i situacijama,
2. Vrstu zadataka otvorenog tipa, tako da učenici mogu da opravdavaju svoje postupke i procene prilikom rešavanja problema,
3. Vrstu zadataka koji od učenika zahtevaju da pokažu veštinu razmišljanja,
4. Vrstu zadataka, tako složenih da podrazumevaju od učenika saradnju, učestvovanje, dogovaranje, razumevanje kako bi zajedno doprineli rešavanju zadataka.

Kooperativno učenje ima za cilj da osposobi svakog učenika da napreduje u različitim aspektima, i da sličan ili isti zadatak uradi samostalno.

1.2. Istraživanja vezana za kooperativno učenje

Veliki broj istraživanja [9] potvrdio je tezu prema kojoj se verbalna i reproduktivna nastava nalaze na najnižem nivou efikasnosti. S obzirom na to, jasno se uočava potreba uvođenja efikasnijih načina rada u vaspitno-obrazovni proces, među kojima se ističe kooperativno učenje. Savremena škola i nastava traže savremene nastavne strategije sa stvaralačkim zahtevima i nastavnom orijentacijom na učenike kako bi razvijali kod učenika potrebu za učenjem, unutrašnju motivaciju, stvaralaštvo i druge uslove neophodne za izgrađivanje učeničkog stava prema ličnoj efikasnosti.

Uloga nastavnika se menjala u procesu učenja i prilagođavala potrebama savremenog vremena. Mnogi istraživači koji su se bavili kooperativnim učenjem razvili su brojne strategije koje je moguće primeniti u različitim nastavnim predmetima i u okviru različitih etapa nastave. Postoje i istraživački dokazi [14], koji govore u prilog kooperativnog učenja i o tome da li će efekti njegove primene biti pozitivni. To ne zavisi samo od entuzijazma nastavnika već i od dobre volje učenika da rade na ovakav način. Kooperativno učenje kao i kreiranje situacija za učenje podrazumeva pripremu i anganžovanje nastavnika. Međutim, efekti saradnje se najverovatnije neće ostvariti ako se ne obezbedi pet osnovnih neophodnih uslova za kooperativno učenje, a to su [17]:

1. Struktuiranje nastavnog zadatka u skladu sa pozitivnom interakcijom učenika;
2. Individualna odgovornost kod učenika;
3. Unapređujuća interakcija ”licem u lice”;
4. Socijalne veštine učenika i
5. Vrednovanje grupnih procesa kod učenika.

Postoji mnoštvo različitih pitanja vezanih za kooperativno učenje. Možda jedno od najosnovnijih pitanja jeste, da li je metoda kooperativnog učenja efikasnija od drugih tradicionalnijih metoda nastave. Prema Davidsonu i Krolu [6] jedna grupa autora (Johnson, Maruyama, Johnson, Nelson, and Skons's) su 1981 korišćenjem meta-analize pronašli 122 vrste kooperativnog učenja upoređujući relativne efekte kooperativnog, konkurentnog i individualnog učenja na ciljni zadatak. Oni su zaključili da je kooperativo učenje značajnije i efikasnije od konkurentnog ili individualnog napora.

Hofman i dr. [12] određuju nekoliko karakteristika koje moraju da se uoče da bi se grupa zvala “grupa za kooperativno učenje”. Ove grupe moraju biti organizovane u celinu, u okviru ovakvih grupa potrebno je da postoji radna etika i drugarstvo, dok članovi tima dele odgovornosti za ostvarivanje zadataka i podstiču jedni druge na učenje.

Prema Hofmanu [12] u proteklih deset godina došlo je do značajnih promena u razvoju metoda kooperativnog učenja. Tako se kooperativno učenje pokazalo kao efikasno u podizanju učeničkih postignuća, samopouzdanja, poboljšavanje učeničkih stavova prema školi i svojim vršnjacima. Svi naučnici i istraživači ovog načina učenja slažu se u jednom, a to je da bi grupe trebalo da budu višedimenzionalno heterogene, a to znači da se organizuju grupe sa decom koja imaju različite sposobnosti (fizičke, emocionalne, socijalne, kognitivne), koja su iz drugih etničkih, socijalnih i kulturnih sredina.

1.3. Tipovi kooperativnog učenja

Kooperativno učenje se pojavljuje u mnogim oblicima kao što su dijalog učenika i nastavnika, razmena mišljenja između dva ili više učenika, zajednički rad grupe učenika na istom zadatku, podela odgovornosti u timu i slično. Jedino zajedničko za sve ove oblike učenja je to da su pojedinci tokom procesa učenja upućeni jedni na druge i to kroz saradnju i razmenu mišljenja. Kooperativno učenje svodi se na četiri nivoa [14]:

1) ***Najniži nivo***- kada nastavnik, učenik ili grupa učenika pomaže pojedincu da reši zadatak. Kako je ovde naglasak na učenju, tj. rešavanju zadataka i socijalni odnosi padaju u „senku“, ovaj nivo naziva se *kognitivnim pristupom.*
2) ***Viši nivo***- angažovanje grupe učenika na zajedničkom zadatku, odnosno, kada grupa učenika ima isti cilj. Na ovom nivou učenici međusobno dele znanje, dok svako prema svom osećaju doprinosi zajedničkom uspehu. Ovaj nivo naziva se *učenički orijentisan pristup*.
3) ***Napredni nivo***- grupa je i dalje fokusirana na zadatak i odnose u grupi. Članovi tima jedni druge podstiču, usmeravaju, koriguju i upućuju. Ovaj nivo je nazvan *kombinacija kognitivnog i situacionog pristupa*.
4) ***Najviši nivo***- podrazumeva da i društvene grupe mogu da uče, gde se pre svega misli na porodicu, školu. Ovaj pristup polazi od činjenice da učimo iz kulture u koju smo uključeni. To je učenje u organizaciji pa je tako i nazvano *organizacijskim pristupom*.

1.4. Formiranje i vođenje grupa

Prema podacima pojedinih škola, koje su u svoj rad uključivale grupni rad na svojim časovima, mnogi bi se složili da je najbolja grupa za rad ako se sastoji od četiri do šest učenika, mada zavisno od težine zadatka moguće je formirati i grupe od osam do deset učenika. Određivanje kako će grupa biti formirana može biti komplikovano, jer idealna grupa treba da bude raznolika, da uključi učenike sa nizom intelektualnih sposobnosti, interesa i kognitivnim stilovima.

Dozvoljavajući učenicima da sami izaberu članove grupe može da funkcioniše ali u malim razredima, ali ova metoda nosi sa sobom rizik od budućeg izolovanja nekih učenika ili stvaranje uskog kruga unutar razreda. Sa većim razredima, najpogodnija je nasumična selekcija, selekcija bazirana na osnovu kompatibilnosti rasporeda, ili selekcija određena od strane nastavnika. Ne samo da je učenicima potrebna pomoć u tumačenju zadataka, često je potrebno ohrabrenje ili savet, da se uvere da put koji su odabrali vodi ka pravom rešenju. Nastavnik ne samo da može da pruži korisne savete nego može da preusmeri napore grupe koji vode do pogrešnih rezultata. U pružanju povratnih informacija u toku grupnog rada, važno je dozvoliti učenicima da sami donose odluke o tome kako da nastave. Uloga nastavnika je da vodi, a ne da diktira šta će se desiti među članovima grupe. Ako se na primer, članovi grupe žale da neko ne radi svoj deo u grupi koji mu je dodeljen, treba dostaviti do znanja da rešenje ovog problema treba da bude u grupi i da neće biti rešen intervencijom nastavnika.

Odluka da se uvede kooperativno učenje zadataka na času treba da se zasniva na pažljivom ispitivanju cilja časa. Jedan od veoma važnih faktora prilikom uvođenja grupnih zadataka jeste da nastavnik mora voditi računa o veličini grupa. Grupna kohezivnost može da podstakne i neke teškoće sa kojima se grupa suočava i može biti eleminisana ili svedena na minimum ako su zadaci napravljeni tako da [11]:

1. Zahtevaju visok nivo individualne odgovornosti za svakog člana grupe,
2. Zahtevaju od članova grupe da diskutuju i razgovaraju o zadacima i pitanjima,
3. Obezbeđuju da članovi grupe primaju neposredno, nedvosmislene i značajne povratne informacije,
4. Obezbeđuju osećaj uspeha, prilikom uspešno rešenog zadatka.

Individualna odgovornost je od suštinskog značaja za uspeh grupe jer pojedini učenici imaju prirodnu tendenciju da dominiraju, neki da se postepeno povuku pa da se opet aktiviraju u procesu rešavanja problema. Ovakav način rada može biti jednostavan ako svaki član grupe ima svoj radni list u kome beleži svoj doprinos u toku radnog dana, tj. prilikom rešavanja zadataka. Zadatak treba da oceni nastavnik, tako da pritisak vršnjaka u okviru grupe može da motiviše pojedince da rade zajedno .

1.5. Prednosti i nedostaci kooperativnog učenja

Na osnovu rečenog, možemo zaključiti da su prednosti kooperativnog učenja sledeće [17]:

1. Bolji uspeh i duže pamćenje;
2. Dublje razmišljanje i kritičko mišljenje;
3. Usmereniji rad u odeljenju i manje nediscipline;
4. Veća motivisanost i bolje ocene i učenje;
5. Pozitivan, tolerantan i prijateljski odnos sa vršnjacima;
6. Bolje prilagođavanje;
7. Pozitivan odnos prema samom sebi;
8. Pozitivan odnos prema nastavnicima, predmetima, učenju i školi.

Postoji nekoliko nedostataka interaktivnog učenja [26]:

1. Kod interakcije bez nastavnikovog usmeravanja i vođenja postoji mogućnost, pogotovo kod mlađih grupa, da ne savladaju predviđeno gradivo. Dakle, nastavnikovo vođenje je obavezno ali kako učenici postaju stariji i zreliji ono se postepeno smanjuje.

2. Zavisnost slabijih učenika od boljih, se može izbeći ako se pripreme takvi zadaci da svaki učenik doprinese boljem grupnom uspehu.
3. Lenčarenje kod učenika može da se javlja kada su zadaci takvi da mogu da ih reše jedan ili dva učenika dok ostali koriste "grupnu hladovinu". Na primer, ovaj problem se može rešiti tako što rezultate grupnog rada prezentuju svi članovi ili svaki put neki drugi član.
4. Ringelmanov efekat se javlja kada pojedinci nerado učestvuju i ne zalažu se za grupu već za sebe i svoj uspeh.
5. Emocionalni rizik se može javiti kod nekih učenika kojima ne odgovara grupna dinamika i emocionalna otvorenost.

1.6. MTE-model nastave

Didaktičko-metodički model nazvan MTE-model (Motivation test- Teaching-Examination test) ima za cilj, pre svega, da motiviše učenike za novo gradivo. Ideja ovog modela nastave jeste da se jedan školski čas podeli na tri faze [2]:

1. Prva faza predstavlja izradu tzv. ***Motivacionog testa* (M- testa),**
2. Druga faza podrazumeva izlaganje nastavnika putem rešavanja M- testa i
3. Treća faza jeste provera usvojenog znanja putem izrade tzv. ***E-testa*** (eng. *examination test*).

Prvi test ima uvodni karakter, i trebalo bi da se radi oko trećine vremena koje stoji nastavniku na raspolaganje (20 minuta) (sve zavisi od toga da li se radi o jednom času ili dvočasu). Ima za cilj da podseti učenike na odgovarajuće pojmove koji se obrađuju a zatim da ih dodatno motiviše i zainteresuje za temu časa. Neke od ovih zadataka nastavnik koristi kako bi odredio nivo znanja i intuitivnih spsobnosti koje bi mu omogućile jasan uvid u to koliko duboko može sa decom da ulazi u tematiku. Svaki nastavnik traba da poznaje razred kao i učenike kojima predaje kako bi procenjujući njihovo znanje, na osnovu njihovog uzrasta, mogućnosti i sposobnosti pripremio zadatke. M-test treba da sadrži 3 ili 4 zadataka, zavisno od težine. Takođe treba da sadrži najmanje jedan do dva jednostavnija zadatka i bar jedan teži ali intrigantan (zanimljiv), prvi da deca dobiju samopouzdanje a drugi radi sticanja motivacije za rad na zadatoj temi. Lakši zadaci treba da posluže kao priprema i pomoćna tvrđenja, ideja za rešavanje težeg-ciljnog zadatka, za koji se pretpostavlja da ga učenici ne mogu samostalno rešiti. Stoga je i poželjno predočiti učenicima da se od njih i ne očekuje da će sve zadatke uraditi ali da je poželjno da daju maksimum od sebe, da pokušaju sve da reše kako bi sagledali težinu problema koju će tek kasnije, tokom druge faze potpuno obraditi sa nastavnikom. Poželjno je da test sadrži što više slika koje će pomoći učenicima ako ne da reše zadatak, ono bar da pravilno razumeju šta se u zadatku traži. Pretpostavlja se da je njihovo prethodno znanje takvo da oni i dalje poseduju određen „alat" koji ih podstiče da pokušaju da reše taj teži zadatak. M-test treba da sadrži najmanje 50% rešivih zadataka (za koje nastavnik očekuje da će učenici uspešno rešiti) kako ne bi izgubili motivaciju za drugu fazu- učenje. Zbog vremenskog ograničenja, zadaci treba da budu takvog karaktera da omoguće učenicima brzo rešavanje, bez mnogo računanja kao na primer: zadaci tipa na zaokruživanje tačnog odgovora od više ponuđenih, zadaci sa dopunjavanjem formula i slično. U drugoj fazi, nastavnik izlaže gradivo rešavanjem zadataka M- testa. Na ovaj način se zadržava pažnja učenika i njihova želja da uporede svoje rešenje sa rešenjem nastavnika. Nastavnik u toj fazi uvodi nove pojmove, formule itd. Nakon ove faze, prelazi se na izradu E testa. Ova faza podrazumeva proveru usvojenog znanja, a zadaci su slični onim iz prvog, M-testa kako bi se izbegao faktor iznenađenja. E-test se radi na kraju časa, takođe traje oko 20 minuta. Iako učenici u ovoj fazi rešavaju teže zadatke nego one iz prvog testa, za očekivati je bolje rezultate od onih na M-testu kao rezultat usvojenog novog gradiva.

Do sada su vršena ispitivanja efikasnosti ovog modela u više eksperimenata pri čemu su obrađivane različite teme, kako u osnovnim školama tako i u srednjim školama i na fakultetu na teritorije Srbije i Crne Gore [1]:

1) Množenje brojeva do deset (Osnovna škola – deca sa posebnim potrebama, Novi Bečej [4]
2) Popločavanje ravni (Srednja građevinska škola, Novi Sad) [2]
3) Linearne jednačine (I razred Srednje hemijske škole, Podgorica) [1]
4) Linearna funkcija (I razred Srednje hemijske škole, Podgorica) [1]
5) Trigonometrijske funkcije, izoperimetrijski problem (I razred gimnazije, Bečej) [5]
6) Obim i površina paralelograma (VI razred Osnovna škola, Kula, Crvenka) [20]
7) Obim i površina trougla (VI razred Osnovna škola, Kula, Crvenka) [20]
8) Obim i površina kruga (VII razred Osnovna škola, Kula, Crvenka) [15]
9) Delovi kruga (VII razred Osnovna škola, Kula, Crvenka) [15]
10) Integral, Određen integral, Primena integrala (Građevinski fakultet, Podgorica)[1]

Ovaj model se uspešno pokazao i uz primenu diferencirane nastave kako na časovima gde se obrađivala nova tematska jedinica, tako i na časovima ponavljanja gradiva.

2. Težište figura i sistema materijalnih tačaka

Materijalna tačka je model tela čiji se oblik i dimenzije u datom razmatranju mogu zanemariti. Materijalna tačka je idealizovan model za proučavanje osobina tela u mirovanju i kretanju. Na primer, pri proučavanju kretanja planeta oko Sunca one se mogu smatrati kao materijalne tačke čije su mase jednake masama planeta a čije se dimenzije mogu zanemariti u odnosu na veličine rastojanja između Sunca i odgovarajućih planeta. U matematici materijalnu tačku ne razmatramo kao tačku samu po sebi već se pripisuje proizvoljno izabrani pozitivni ili negativni broj u svojstvu njegove mase.

Pod **sistemom materijalnih tačaka** podrazumeva se skup materijalnih tačaka čija su kretanja i položaji u međusobnoj vezi, tj. kretanje svake tačke zavisi od kretanja i položaja ostalih tačaka sistema, odnosno konačan broj materijalnih tačaka koje su na određeni način povezane. U prirodi i tehnici postoje kretanja u kojim učestvuje više tela, ta tela možemo idealizovati materijalnim tačkama. Tačke u prostoru obrazuju sistem materijalnih tačaka ako je njihov raspored diskretan tj. mase se nalaze na konačnim rastojanjima.

2.1. Težište sistema materijalnih tačaka

Osnovni pojam u geometriji masa je materijalna tačka.

Definicija 1.***Materijalna tačka (m.t.)*** *je uređen par* **(m, P)** *gde je* **m** *realan broj, a* **P** *tačka. Kažemo još da tačka* **P** *ima masu* **m**.

Ako tačke $P_1, P_2, \dots, P_n$ imaju mase $m_1, m_2, \dots, m_n$, postoji sistem m.t. koji se obično označava sa $\{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \dots, (m_n, P_n)\}$.

Masa materijalnog sistema jednaka je algebarskom zbiru masa svih tačaka ili tela, koje obrazuju sistem

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Definicija 2. *Za sistem m.t.* $\{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \dots, (m_n, P_n)\}$ *centar masa (težište) je tačka T koja zadovoljava jednakost:*

$$m_1\overrightarrow{TP_1} + m_2\overrightarrow{TP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{TP_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{TP_i} = \vec{0}.$$

(Čestica je u ravnoteži ako je rezultantna sila na tu česticu jednaka nuli.)

Teorema 1. *Za svaki sistem materijalnih tačka postoji jedinstveno težište.*

Dokaz. Neka je $S = \{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \dots, (m_n, P_n)\}$ sistem m.t. takav da je masa sistema $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$. Neka je O proizvoljna tačka. Da bi tačka T bila težište, mora biti zadovoljen uslov :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{TP_i} = \vec{0}.$$

Na osnovu zakona o sabiranju vektora sledi:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OP_i}\right) = m_1 (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OP_1}) + m_2 (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OP_2}) + \dots + m_n (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OP_n}) = \vec{0}\ ,$$

odakle je

$m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n} - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\ \overrightarrow{OT} = \vec{0}$, pa je

$m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n} = (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\ \overrightarrow{OT}$, te dobijamo

$\overrightarrow{OT} = \dfrac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OP_i}$, gde je $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Desna strana izraza određuje jedinstven vektor koji za svaki sistem tačaka uvek postoji. Dakle, T je težište sistema. ■

Teorema 2. *Ako u sistemu od n materijalnih tačaka, k tačaka ($k \leq n$) zamenimo njihovim težištem u kome je skoncentrisana sva njihova masa, dobijeni sistem će imati isto težište kao i polazni.*

Dokaz. Neka je:
T_n težište sistema $S_n = \{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \dots, (m_n, P_n)\}$,
T_k težište sistema $S_k = \{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \dots, (m_k, P_k)\}$, a
T težište sistema $S = \{(m, T_k), (m_{k+1}, T_{k+1}), \dots, (m_n, P_n)\}$, gde je $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$.
Za tačku T_n u odnosu na proizvoljnu tačku O, na osnovu Teoreme 2, važi:

$$\overrightarrow{OT_n} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

za tačku T_k: $\overrightarrow{OT_k} = \dfrac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_k\overrightarrow{OP_k}}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}$,

i za tačku T: $\overrightarrow{OT} = \dfrac{m\overrightarrow{OT_k} + m_{k+1}\overrightarrow{OP_{k+1}} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m + m_{k+1} + \dots + m_n}$

$$= \frac{\left(m\,\frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m}\right) + m_{k+1}\overrightarrow{OP_{k+1}} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$= \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OT_n}$$

Dakle, $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_n}$, odnosno, $T \equiv T_n$. ■

Teorema 3. *Za sistem od dve m.t. (m_1, A) i (m_2, B) važi da se njihovo težište T nalazi na pravoj AB, pri čemu je $\overrightarrow{TA} : \overrightarrow{BT} = m_2 : m_1$.*

Dokaz.

Iz definicije težišta važi: $m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \overrightarrow{TA} = \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{BT}$, odakle
$\overrightarrow{TA} : \overrightarrow{BT} = m_2 : m_1$.

Iz poslednje jednakosti sledi da su vektori $\overrightarrow{TA}$ i $\overrightarrow{BT}$ linearno zavisni, pa su tačke *A, B, T* kolinearne. ■

Posledica 1. *Ako su mase m_1 i m_2 obe pozitivni ili obe negativni brojevi, onda se težište nalazi na duži AB. Ako su mase različitog znaka, težište se nalazi van duži AB.*

Teorema 4. *Ako se sistem od n materijalnih tačaka S = {(m_1, P_1), (m_2, P_2), ... , (m_n, P_n)} nalazi u jednoj ravni, onda se i centar mase tog sistema nalazi u istoj ravni.*

Dokaz. Neka se tačka *O* nalazi u ravni sistema *S*. Važi:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + m_2\overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

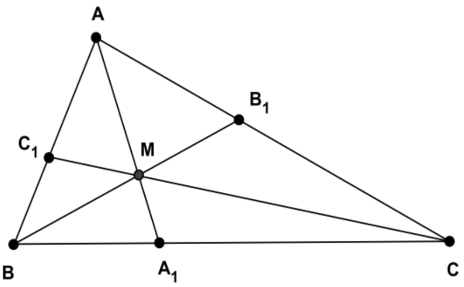
Vektor $\overrightarrow{OT}$ je linearno zavisan od vektora $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$. Pošto svi oni leže u istoj ravni, onda je i vektor $\overrightarrow{OT}$ u toj ravni pa je i tačka *T*. ■

2.2. Poznate teoreme povezane sa centrom masa

Poznati matematičari kao što su Van Obel, Čeva, Menelaj i drugi bavili su se problemima težišta sistema materijalnih tačaka i u ovom poglavlju dokazaćemo njihove teoreme, kao i postojanje Simpsonove prave.

Teorema 5. (Van Obelova teorema) Neka su duži AA_1, BB_1 i CC_1 seku u tački *M*, gde su A_1, B_1 i C_1 redom tačke na stranicama *BC, CA* i *AB* trougla *ABC*. Ako važi $AC_1 : C_1B = p$ i $AB_1 : B_1C = q$, onda je i $AM : MA_1 = p + q$.

Dokaz:

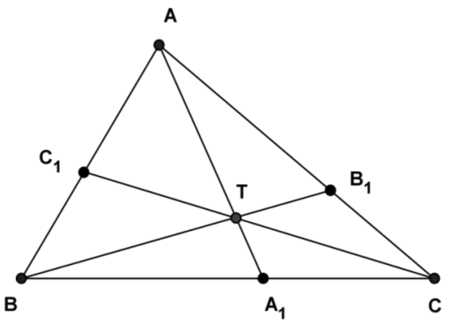


slika 1.

Dodelimo mase 1, p i q redom tačkama A, B i C. Zbog $AC_1 : C_1B = p$ i $AB_1 : B_1C = q$, tačke B_1 i C_1su redom težišta sistema $\{(1, A), (q, C)\}$ i $\{(1, A), (p, B)\}$. Težište sistema $\{(1, A), (p, B), (q, C)\}$ mora biti kolinearno sa B_1 i B, a takođe i sa A_1 i A, pa je to tačka M. Tačka A_1 mora biti težište sistema $\{(p, B), (q, C)\}$ zbog kolinearnosti sa A i M. Zbog teoreme 3 M je težište i sistema $\{(1, A), (p+q, A_1)\}$. Iz toga sledi $AM : MA_1 = (p+q) : 1$,tj. $AM : MA_1 = p+q$. ■

Italijanski matematičar Đovani Čeva (1648-1734) bavio se sa sledećim pitanjem: Na stranicama BC, CA i AB trougla ABC su izabrane redom tačke A_1, B_1 i C_1. Može li se bez ikakvih docrtavanja i merenja unutar trougla, već samo na osnovu merenja na njegovoj konturi, zaključiti da li se prave AA_1, BB_1 i CC_1 seku u jednoj tački?
Čeva je dao odgovor na ovo pitanje 1678. godine kada je dokazao teoremu koristeći svojstva centra masa.

Teorema 6. (*Čevina teorema*) *Neka je ABC trougao i neka su tačke A_1, B_1 i C_1 redom izabrane na stranicama (ili njihovim produžecima) BC, CA, AB trougla ABC. Prave AA_1, BB_1 i CC_1 seku se u jednoj tački (konkurentne su) ako i samo ako važi uslov:*
$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$



slika 2.

Dokaz. (⇒)

Pretpostavimo da se prave AA_1, BB_1 i CC_1 seku seu tački T. Neka važe odnosi: $BA_1 : A_1C = p : 1$ i $CB_1 : B_1A = q : 1$. Dodelimo redom mase pq, 1, i p redom tačkama A, B i C. Tada su tačke A_1 i B_1 redom težišta sistema $\{(1, B), (p, C)\}$ i $\{(p, C), (pq, A)\}$. U preseku

pravih BB_1 i AA_1 se nalazi težište *T* sistema {(*pq*, *A*), (1, *B*), (*p*, C)}. Kako prava CC_1 sadrži težište *T* tačka C_1 je težište sistema {(*pq*, *A*), (1, *B*)} pa sledi da je
$AC_1 : C_1B = 1 : pq$.
Dakle,

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{p}{1} \cdot \frac{q}{1} \cdot \frac{1}{pq} = 1$$

(⇐)

Dokažimo sada da iz pretpostavke $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1$, sledi da se prave AA_1, BB_1 i CC_1 seku u jednoj tački. Pretpostavimo suprotno, da nisu konkurentne. Tada na pravoj *AB* postoji tačka $C_2 \neq C_1$, takva da je tačka *T* pripada CC_2, gde je *T* tačka preseka pravih AA_1 i BB_1.
Na osnovu prvog dela dokaza važi:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{C_2B}} = 1,$$

a na osnovu pretpostavke važi

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

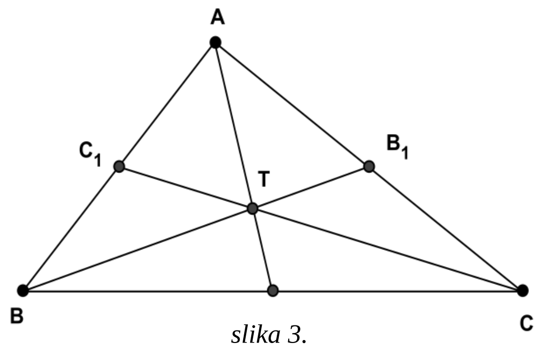
Sledi

$$\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{C_2B}} = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$$

Kako su tačke *A*, C_2, C_1 i B kolinearne, sledi da su $C_2 \equiv C_1$ poklapaju, što je kontradikcija.
Postoji slučaj kada su prave AA_1, BB_1 i CC_1 paralelne, odnosno kada je zbir masa jednak nuli. Ovo nećemo razmatrati zato što ne može da se dokaže preko osobina centra masa. ■

Primer 1. Neka su A_1, B_1 i C_1 redom središta stranica *BC, CA* i *AB* trougla *ABC*. Tada se AA_1, BB_1 i CC_1 seku u jednoj tački koja te duži deli u odnosu 2:1 (osnovna osobina težišta).

Dokaz.



slika 3.

Pošto su $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$ i $AC_1 = C_1B$, važi:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1$$

Iz Čevine teoreme sledi da se duži AA_1, BB_1 i CC_1 seku u jednoj tački, neka je to tačka T. Pridružimo svakom od temena A, B i C masu 1. Tada je A_1 težište sistema {(1, B), (1, C)}, a B_1 težište sistema {(1, A), (1, C)}, pa je T težište sistema {(1, A), (1, B), (1, C)}. Sledi da je T težište sistema {(2, A_1), (1, A)} pa je $AT : TA_1 = 2 : 1$.
Slično dobijamo da važi $BT : TB_1 = 2 : 1$ i $CT : TC_1 = 2 : 1$. ■

Menelaj Aleksandrijski (oko 70–140. n.e.) je starogrčki matematičar koji je delovao u Aleksandriji, dokazao teoremu vrlo sličnu Čevinoj teoremi, koja govori o kolinearnosti tačaka na pravama kojima pripadaju stranice trougla.

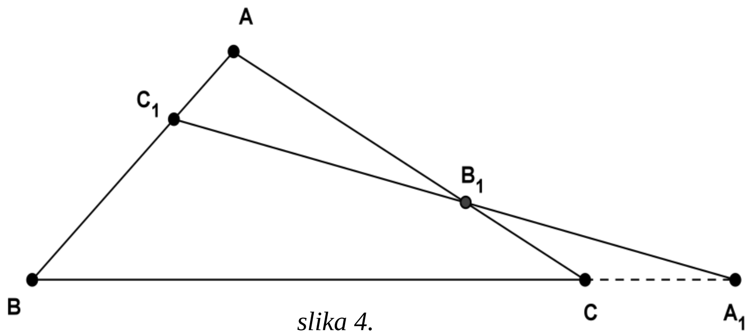
Teorema 7. (Menelajeva teorema) *Neka je dat trougao ABC i neka su tačke A_1, B_1 i C_1 izabrane redom na stranicama (ili njihovim produžecima) BC, CA i AB. Tačke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne (leže na istoj pravoj) ako i samo ako važi jednakost*

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1. \qquad (*)$$

Dokaz. (⇒)

Pretpostavimo da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne. Dokažimo da važi (∗). Razlikujemo dva slučaja: kada prava određena tačkama A_1, B_1 i C_1 seče dve stranice i produžetak treće i kada ta prava seče sva tri produžetka stranica.

1.slučaj:



slika 4.

Neka je C_1 centar mase sistema $\{(m_A, A), (m_B, B)\}$, a C centar mase sistema $\{(m_{A_1}, A_1), (m_B, B)\}$. Tada se u preseku pravih AC i A_1C_1 nalazi težište sistema $\{(m_A, A), (m_B, B), (m_{A_1}, A_1)\}$ i važe jednakosti:

(1) $m_B\overrightarrow{CB} + m_{A_1}\overrightarrow{CA_1} = \vec{0}$;

(2) $m_A\overrightarrow{C_1A} + m_B\overrightarrow{C_1B} = \vec{0}$;

(3) $m_A\overrightarrow{B_1A} + (m_B + m_{A_1})\overrightarrow{B_1C} = \vec{0}$.

Iz jednakosti (1) sledi: $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA_1}} = \frac{m_{A_1}}{m_B}$, imamo $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA_1}} + \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} = \frac{m_{A_1}}{m_B} + \frac{1}{1}$, tj.

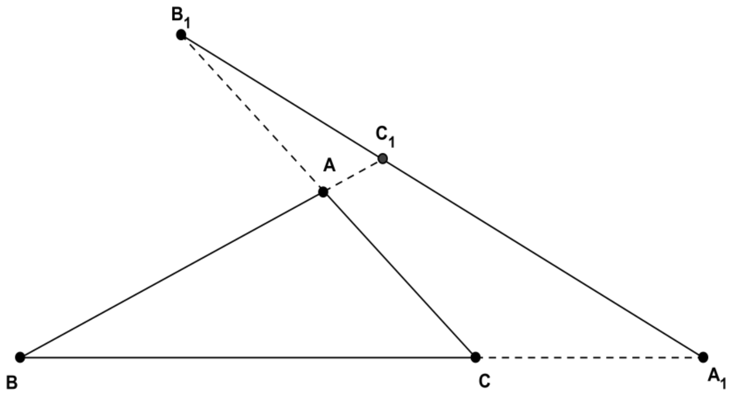
$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = -\frac{m_B + m_{A_1}}{m_B}$.

Slično, iz druge dve jednakosti sledi: $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{m_B}{m_A}$ i $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{m_A}{m_B + m_{A_1}}$.

Iz poslednje tri jednakosti dobija se:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -\frac{m_B + m_{A_1}}{m_B} \cdot \frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{m_A}{m_B + m_{A_1}} = -1.$$

2.slučaj:



slika 5.

Neka je *C* centar mase sistema $\{(m_B, B), (m_{A_1}, A_1)\}$ i C_1 centar mase sistema $\{(m_{B_1}, B_1), (m_{A_1}, A_1)\}$. Tada je *A* centar mase sistema $\{ (m_{B_1}, B_1), (m_B, B), (m_{A_1}, A_1)\}$. Analogno prvom slučaju, dobija se da važi:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -\frac{m_B + m_{A_1}}{m_B} \cdot \left(-\frac{m_{B_1} + m_B + m_{A_1}}{m_B + m_{A_1}}\right) \cdot \left(-\frac{m_B}{m_{B_1} + m_B + m_{A_1}}\right) = -1$$

(⇐)

Dokažimo da iz jednakosti $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1$ sledi da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne. Pretpostavimo suprotno, da A_1, B_1 i C_1 nisu kolinearne. Tada postoji tačka C_2 na pravoj *AB* takva da su tačke A_1, B_1 i C_2 kolinearne i time $C_1 \neq C_2$.

Na osnovu prvog smera važi

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{C_2B}} = -1$$

i kako važi

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1$$

sledi da je $\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{C_2B}} = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}$.

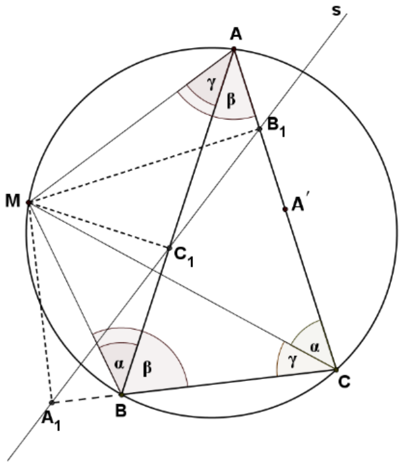
Pošto su *A*, *B*, C_1 i C_2 kolinearne sledi da se $C_1 \equiv C_2$ poklapaju, što je kontradikcija sa prethodno izvedenim zaključkom $C_1 \neq C_2$. ■

Teorema 8. ***(Simpsonova teorema)*** *Iz proizvoljne tačke M koja se nalazi na kružnici povučene su normale na sve tri stranice (ili na njihove produžetke) trougla ABC koji je upisan u tu kružnicu.*
Dokazati de su podnožja tih normala (A_1, B_1 i C_1) kolinearne tačke.

Dokaz:

Dokažimo ispunjenost pretpostavki Menelajeve teoreme za kolinearnost tačaka A_1, B_1 i C_1, tj.

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1$$



slika 6.

Neka su oznake tačaka uvedene kao na *slici 6.* (sa usvojenim rasporedom tačaka) i neka je $\sphericalangle MBA = \alpha, \sphericalangle MBC = \beta, \sphericalangle MCB = \gamma$. Koristeći tvrđenje o jednakosti periferijskih uglova nad istim lukom sledi $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MCA = \alpha$ i $\sphericalangle MCB = \sphericalangle MAB = \gamma$.
Iz pravouglog trougla MA_1C sledi $\frac{A_1C}{A_1M} = ctg\gamma$ i iz pravouglog trougla MA_1B sledi $\frac{A_1B}{A_1M} = ctg(\pi - \beta) = -ctg\beta$, pa dobijamo da je $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} = -\frac{ctg\beta}{ctg\gamma}$. Stoga, ako postavimo mase $ctg\beta$ (< 0) i $ctg\gamma$ redom u tačke C i B, tada je tačka A_1 centar mase sistema $\{(ctg\beta, B), (ctg\gamma, C)\}$.
Postavimo masu $ctg\alpha$ u tačku A. Pošto je masa u tački B jednaka $ctg\gamma$, to je C_1 centar mase sistema $\{(ctg\alpha, A), (ctg\gamma, B)\}$ i važi $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{ctg\gamma}{ctg\alpha}$.
Iz pravouglog trougla MB_1C sledi $\frac{CB_1}{MB_1} = ctg\,\alpha$ i iz pravouglog trougla MAB_1 sledi $\frac{AB_1}{MA} = ctg(\sphericalangle MAB_1) = ctg(\pi - \beta) = -ctg\,\beta$. Neka je tačka A' centralno simetrična tački A u odnosu na tačku B_1 i postavimo masu $ctg\alpha$ u A'. Kako je $AB_1 = B_1A'$ i važi $B_1 - A' - C$ sledi da je $\frac{A'B_1}{CB_1} = -\frac{ctg\,\beta}{ctg\,\alpha}$, tj. $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A'}} = \frac{ctg\alpha}{ctg\beta}$. Dakle, B_1 centar mase sistema $\{(ctg\alpha, A'), (ctg\gamma, C)\}$.
Pošto je B središte duži AA' to je $\overrightarrow{B_1A'} = -\overrightarrow{B_1A}$, onda je $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -\frac{ctg\alpha}{ctg\beta}$.

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{ctg\beta}{ctg\gamma} \cdot \frac{-ctg\alpha}{ctg\beta} \cdot \frac{ctg\gamma}{ctg\alpha} = -1$$

Iz poslednje jednakosti, na osnovu Menelajeve teoreme, sledi da su tačke A_1, B_1 i C_1 kolinearne. ■

2.3. Centar mase ili centar gravitacije

Geometrija masa je oblast matematike nastala kombinacijom mehanike i geometrije. Bavi se svojstvima centra mase. Grčki matematičar, fizičar i astronom iz Sirakuze, Arhimed (287 - 212 pr. n. e.) je primetio da se medijane trougla seku u jednoj tački i začetnik je matematičkih tehnika koje su prve dovele do izračunavanja centra mase trougla, polusfere i eliptičkog paraboloida.

Pojam centar mase se često meša sa pojmom težišta. Naime, potrebno je razdvojiti dva pojma.

Centar mase koji se još, osim *centra gravitacije* naziva i *baricentrom* (naziv potiče od grčke reči *bario*, što znači težak) je tačka jednog objekta odnosno sistema materijalnih tačaka (u $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$) u kojoj se može smatrati da je čitava masa tog objekta skoncentrisana. Ovaj pojam omogućava da se celo telo, odnosno objekat, može posmatrati kao jedna materijalna tačka čija masa je jednaka ukupnoj masi tog tela. Centar mase postoji za bilo koji sistem materijalnih tačaka bez obzira da li na sistem deluju sile ili ne.

Težište u nekim izvorima se navodi kao *centroida*. Jednostavno rečeno težište tela se poklapa sa centrom mase u slučaju da je telo homogeno (konstantne gustine). U fizici se težište tela definiše kao napadna tačka vektorskog zbira sila teže svih materijalni tačaka istog objekta. Geometrijska tela istih oblika i dimenzija imaju isti položaj težišta u odnosu na to telo bez obzira na vrednost konstante njihove gustine. Možemo objasniti sledećim primerom: Težište svake od tri kocke koje su istih dimenzija se nalazi na istom mestu odnosno imaju iste koordinate u odnosu na kocku bez obzira da li je kocka napunjena vodom, uljem ili je potpuno kruto, bitna je samo konstantnost gustine.

Da bismo lakše određivali težište geometrijskih tela u prirodi smatramo da su ta tela homogena, kruta i da se nalaze u homogenom gravitacionom polju. Kod homogenih tela gustina je konstantna po celoj zapremini, tj. $\rho = const$. Po definiciji **krutog (čvrstog) tela** njegove čestice su na stalnom (konstantnom) rastojanju. Homogeno gravitaciono polje znači da je gravitaciono ubrzanje konstantno ($g = const$). U ovim uslovima centar masa poklapa se sa težištem i tako ćemo smatrati i u daljem radu.

U fizici, jedan od važnih i integralnih karakteristika mehaničkog sistema materijalnih tačaka je **centar masa** [29]. To je geometrijska tačka čiji je vektor položaja određen jednačinom:

$$\vec{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}$$

gde su m_i i $\vec{r_i}$ redom masa i vektor položaja *i*-te materijalne tačke a $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$ ukupna masa sistema tačaka. U Dekartovom koordinatnom sistemu *xyz* centar mase biće određen projekcijama vektora $\vec{r_c}$ na koordinatne ose:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m};\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m};\ z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

gde su x_i, y_i i z_i koordinate*i-te* materijalne tačke. Položaj centra mase zavisi od rasporeda masa u sistemu, ali ne zavisi od izbora koordinatnog sistema.

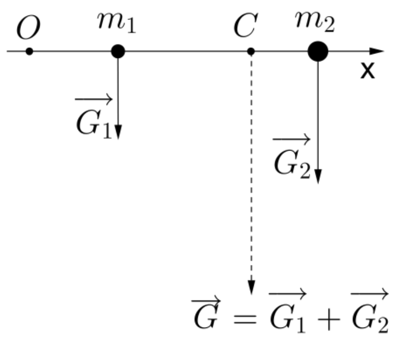
Najpre, zamislimo primer rapoređenih masa m_1 i m_2 na lakom štapu čija masa može da se zanemari (*slika 7.*). Težine tih tela biće $\vec{G_1} = m_1\vec{g}$ i $\vec{G_2} = m_2\vec{g}$, gde je $\vec{g}$ gravitaciono ubrzanje. One predstavljaju dve paralelne sile, te se može naći njihova rezultanta $\vec{G} = \vec{G_1} + \vec{G_2}$. Položaj napadne tačke *C* ove rezultante određuje se prema uslovima da statički momenti sila u odnosu na tačku *C* moraju biti jednaki. Označimo sa p_1 i p_2 rastojanja tela od napadne tačke *C* , tada će biti $\vec{G_1}p_1 = \vec{G_2}p_2$, odnosno

$$m_1\vec{g}p_1 + m_2\vec{g}p_2 = 0.$$

U ovom slučaju tačka *C* se naziva težište sistema tela masam_1 i m_2. Ubrzanje $\vec{g}$ ima konstantnu vrednost (zbog homogenog gravitacionog polja), pa važi sledeće (u prethodnoj jednačini $\vec{g}$ se može skratiti):

$$m_1p_1 + m_2p_2 = 0.$$

Tačka *C* se prema prethodnoj jednačini može odrediti bez obzira na težinu tela, odnosno gravitacionog ubrzanja $\vec{g}$, pa tačku *C* nazivamo i centar masa (težište) m_1 i m_2.



slika 7.

Postavimo kroz štap sa masama m_1 i m_2 *x*-osu koordinatnog sistema čiji je početak u *O*. Neka je x_1 apscisa tela mase m_1, x_2 apscisa tela mase m_2 i x_c apscisa tačke *C*. Potražimo sada apscisu x_c tačke *C* ako su nam poznati x_1 i x_2. Rezultanta $\vec{G} = \vec{G_1} + \vec{G_2}$ ima zbirno dejstvo obe sile $\vec{G_1}$ i $\vec{G_2}$. Momentna jednačina će biti: $\vec{G}x_c = \vec{G_1}x_1 + \vec{G_2}x_2$, pa odavde dobijamo:

$$x_c = \frac{\overrightarrow{G_1}x_1 + \overrightarrow{G_2}x_2}{\overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{G_2}}$$

Za apscisu x_c tačke *C* možemo dobiti i oblik:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

ako izvršimo zamenu $G_1 = m_1 g$ i $G_2 = m_2 g$.

Uzmimo sada kruto telo koje možemo smatrati da se sastoji od mnogo čestica (elementarnih delova). Svaka od čestica imaće svoju težinu $\Delta\overrightarrow{G_1}$, …, $\Delta\overrightarrow{G_n}$. Posmatranjem krutih tela, čije su dimenzije, u odnosu na dimenzije Zemlje, zanemarljive, može se usvojiti da su linije gravitacione sile pojedinih čestica tela međusobno paralelne.
Bilo kakvo okretanje tela u odnosu na Zemlju, ove sile menjaju pravac u odnosu na telo ali i dalje su paralelne i jednako usmerene. Uvek su vertikalne i usmerene naniže. Ove paralelne sile $\Delta\overrightarrow{G_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ možemo složiti u jednu rezultantu koja će predstavljati ukupnu težinu tela $\vec{G}$. Napadna tačka *C* rezultante $\vec{G}$ biće težište tela. Položaj težišta je nepromenljiv u odnosu na kruto telo. Sa korišćenjem Varinjonove teoreme *(Moment sile na neku tačku prostora rezultante sistema sila, koje deluju na istu tačku, jednak je zbiru momenata tih sila na istu tačku prostora*) dobijaju se momentne jednačine i koordinate težišta:

$$G x_c = \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i x_i \Rightarrow x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i x_i}{G} \qquad (1)$$

$$G y_c = \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i y_i \Rightarrow y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i y_i}{G},$$

$$G z_c = \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i z_i \Rightarrow z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i z_i}{G},$$

gde je $G = \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i$ i x_i, y_i, z_i – koordinate *i*-tog dela tela.

Svaka ΔG_i sila može se izraziti proizvodom težine Δm_i i gravitacionim ubrzanjem $\vec{g}$, tj. $\Delta G_i = \Delta m_i g$.
I tako, x_c koordinata težišta se može izvesti na sledeći način:

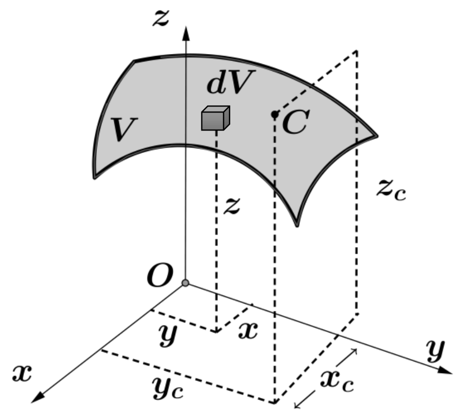
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i x_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i g x_i}{mg} = \frac{g\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i}{gm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i}{m}, \text{ gde je } m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i.$$

Analogno dobijamo i za $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i}{m}$ i $z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i z_i}{m}$.
Veličina $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i$ zove se **momentom sistema**, **prvim momentom** ili **momentom mase** oko tačke oslonca. Ona predstavlja sumu pojedinačnih momenata $\Delta m_1 x_1, \dots, \Delta m_n x_n$. Ako se svi pojedinačni momenti međusobno poništavaju onda $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i z_i = 0$ (tj. koordinatni početak nalazi u tački *C*, biće $x_c = y_c = z_c = 0$).

Odredimo sledeće slučajeve:

2.3.1. Određivanje težišta tela homogene mase zapremine V

Zamislimo da smo materijalno telo zapremine *V* rastavili na veoma mnogo elementarnih čestica (delova) u obliku malih paralelopipeda zapremine ΔV_i. Ako je ΔG_i težina svake takve čestice onda je $\Delta G_i = \gamma \cdot \Delta V_i$, gde je γ = *const*. Pošto je $\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i = G$ i $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$, ukupna težina homogenog tela je $G = \gamma \cdot V$. Ako uvrstimo u (1) dobijamo koordinate težišta za



slika 8.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma \cdot \Delta V_i x_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\gamma \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i x_i}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i x_i}{V}, \qquad (2)$$

isto i za $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i y_i}{V}$ i $z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i z_i}{V}$.

Težište homogenog tela, pošto zavisi samo od njegovog geometrijskog oblika, naziva se i težištem zapremine. Ako su ΔV_i i ΔG_i veoma male veličine, odnosno ako ih smatramo za beskonačno male sledi da je $\gamma = \lim_{i \to \infty} \frac{\Delta G_i}{\Delta V_i} = \frac{dG}{dV}$ *specifična težina* ili *težina jedinice zapremine* $(\frac{N}{m^3})$ tela u posmatranoj tački tela. Veličina $\rho = \frac{\gamma}{g}$ naziva se *gustinom, specifičnom masom* ili *masom jedinice zapremine* tela u posmatranoj tački. Zbog homogenosti γ i ρ su *konstantne veličine*.

Iz definicije $\gamma = \frac{dG}{dV}$ i $\rho = \frac{\gamma}{g}$ dobijamo da je $dG = \gamma dV = g\rho dV$. Da bismo dobili tačne izraze uzima se da telo ima beskonačno mnogo delova. Kako je sabiranje

beskonačno malih veličina zapravo integraljenje, u svim izrazima znak ($\sum$) treba zameniti znakom integrala ($\int$) po celoj zapremini, a koordinata x_i zamenjuje se sa *x*. Prema tome, tačne formule za definisanje težišta tela zapremine *V*:

$$x_c = \frac{\int_V x\, dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int_V y\, dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int_V z\, dV}{V}$$

gde su *x*, *y*, *z* koordinate težišta sile teže beskonačno malog dela tela zapremina ΔV_i, a $V = \int_V dV$ je zapremina tela, a $\int_V x\, dV$, $\int_V y\, dV$, $\int_V z\, dV$ statički momenti s obzirom na ravni *yz*, *xz*, *zy*.

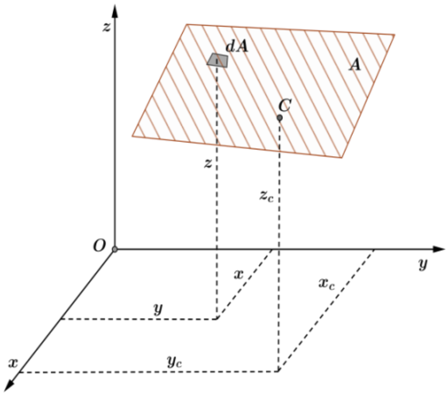
Koordinate težište u Dekartovim i polarnim koordinatama:

$$x_c = \frac{\iiint_V x\, dzdydx}{\iiint_V dzdydx}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y\, dzdydx}{\iiint_V dzdydx}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z\, dzdydx}{\iiint_V dzdydx}$$

$$x_c = \frac{\iiint_V \rho^2 \cos\varphi \, d\rho d\varphi dz}{\iiint_V \rho \, d\rho d\varphi dz}, \qquad y_c = \frac{\iiint_V \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi dz}{\iiint_V \rho \, d\rho d\varphi dz}, \qquad z_c = \frac{\iiint_V \rho z \, d\rho d\varphi dz}{\iiint_V \rho \, d\rho d\varphi dz}.$$

2.3.2.Određivanje težišta figure u ravni površine *A*

Posmatramo ravnu homogenu figuru čija je površina A koju možemo rastaviti na mnogo elementarnih čestica površineΔA_i. Težina ovih čestica je $\Delta G_i = \gamma' \cdot \Delta A_i$, gde je γ' specifičnatežina površine $(\frac{N}{m^2})$.Pošto je $\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i = G$ i $\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = A$, ukupna težina homogenog tela je $G = \gamma' \cdot A$. Ako ovo uvrstimo u (1) tada dobijamo koordinate težišta



slika 9.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma' \cdot \Delta A_i x_i}{\gamma' \cdot A} = \frac{\gamma' \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i x_i}{\gamma' \cdot A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i x_i}{A}$$

analogno, $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i y_i}{A}iz_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i z_i}{A}$.

Slično kao i u prethodnom slučaju vrši se integracija po površini. Koordinate težišta su:

$$x_c = \frac{\int_A x \, dA}{A}, \quad y_c = \frac{\int_A y \, dA}{A}, \quad z_c = \frac{\int_A z \, dA}{A}, \text{ gde je } A = \int_A dA.$$

Koordinate težišta u Dekartovim i polarnim koordinatama, $z_c = 0$:

$$x_c = \frac{\iint_A x \, dydx}{\iint_A dydx}, \qquad y_c = \frac{\iint_A y \, dydx}{\iint_A dydx},$$

odnosno,

$$x_c = \frac{\iint_A \rho^2 \cos\varphi \, d\rho d\varphi}{\iint_A \rho \, d\rho d\varphi}, \qquad y_c = \frac{\iint_A \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi}{\iint_A \rho \, d\rho d\varphi}.$$

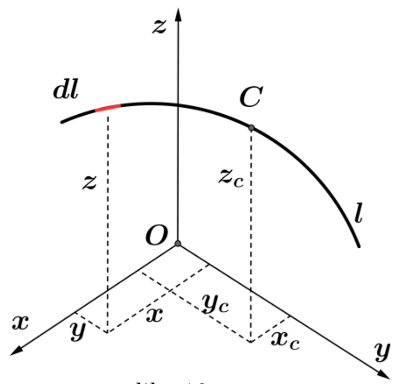
Napomena: Ako $Ax_c = \int x \, dA = 0$, tada $x_c = 0$ i težište se nalazi na osi *y*.

2.3.3. Određivanje težišta homogene linije

Kao i u prethodnom slučaju i ovde možemo rastaviti liniju na elementarne čestice Δl_i. Težina ovih čestica je $\Delta G_i = \gamma'' \cdot \Delta l_i$, gde je γ'' specifična težina linije ($\frac{N}{m}$).

Pošto je $\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i = G$ i $\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = l$, ukupna težina homogenog tela je

$G = \gamma'' \cdot l$. Ako ovo uvrstimo u (1) tada dobijamo koordinate težišta:



slika 10.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma'' \cdot \Delta l_i x_i}{\gamma'' \cdot l} = \frac{\gamma'' \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i x_i}{\gamma'' \cdot l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i x_i}{l}$$

analogno $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i y_i}{l}$ i $z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i z_i}{l}$.

Zatim se vršiintegracija po liniji, i na kraju dobijamo koordinate težišta:

$$x_c = \frac{\int_l x\, dl}{l}, \quad y_c = \frac{\int_l y\, dl}{l}, \quad z_c = \frac{\int_l z\, dl}{l},$$

gde je $l = \int_l dl$.

Ako linija leži u *xy* ravni, tada koordinate x_c i y_c određuju koordinate težišta, a $z_c = 0$.

Prema tome, težišta homogenih tela određuju se kao težišta zapremina, površina i linija, a zavise samo od geometrijskih svojstava tela.

2.4. Određivanje težišta tela, figura i linija

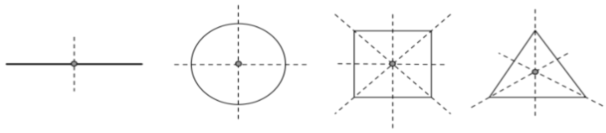
2.4.1. Težište simetričnih tela (figura)

Postupak traženja položaja težišta tela može se znatno pojednostaviti ako je telo simetrično. Razmatramo sledeće slučajeve:

- Ako homogeno telo ima ravan simetrije, onda se težište nalazi u toj ravni.
- Ako homogeno telo ima jednu osu simetrije, onda se težište nalazi na toj osi simetrije. Za ravne površi (figure) koje imaju jednu osu simetrije, dovoljno je odrediti jednu koordinatu x_c ili y_c težišta *C*.
- Ako homogeno telo ima centar simetrije, to jest ako ima dve ili više osa simetrije, težište se nalazi u centru simetrije, tj. u preseku dve ose simetrije.

Primeri primene simetrije:

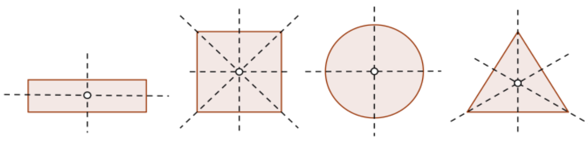
- na homogene linije



slika 11.

Očigledno, težište duži je središte iste, težište kružnice je centar iste, težište ruba kvadrata je tačka preseka dijagonala, a težište ruba jednakostranih trougla je tačka preseka težišnih linija.

- na ravne površi



slika 12.

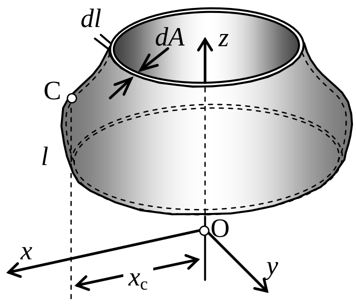
Očigledno, težište pravougaonika je središte iste, težište kvadrata je tačka preseka dijagonala, težište kružnice je centar iste, a težište jednakostranih trougla je tačka preseka težišnih linija.

2.4.2. Papus – Guldinova pravila

Papus – Guldinova pravila, poznata su još kao Guldinova pravila ili Papusova pravila, predstavljaju matematička pravila koja omogućuju jednostavno računanje nekih rotacijskih površina i zapremina pomoću putanje težišta linija čijom su rotacijom nastali. Pravila se lako dokazuju integralnim računom.

***Prvo Papus – Guldinovo pravilo*:**

Površina A_{ROT} tela koje nastaje obrtanjem ravanske krive oko z-ose za neki ugao $\propto$ koja leži u ravni te krive i ne seče je, jednaka je proizvodu dužine kružnog luka (ili obima kružnice u slučaju da je $\propto = 2\pi$) koji opisuje težištete krive prilikom rotacije za ugao α na udaljenosti x_c od ose i dužine krive l.



slika 13.

Primer 1:
Rotacijom ravanske linije oko ose, koja se nalazi u istoj ravni sa linijom dobija se obrtna površ. Prikazana linija *l* leži u *xz* ravni. Rotacija se vrši oko *z* ose za pun ugao od 2π rad. Rotacijom elementarnog dela linije dužine dl, čija *x* koordinata iznosi *x*, oko *z* ose za pun krug, dobija se elementarna površina obrtnog tela koja iznosi, $dA = 2x\pi \cdot dl$. Integraljenjem ovog izraza dobija se:

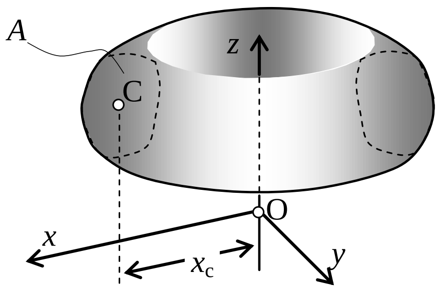
$$A_{ROT} = 2\pi \int_l x\, dl = 2\pi\, x_c l$$

Primer 2:
Neka je data polukružnica u *xz* ravni, čija je poluprečnika *R*. Dužina kružnog luka je $l = R\pi$ i svako težište te polukružnice se nalazi na rastojanju $x_c = \frac{2R}{\pi}$. Rotacijom oko *z* ose dobija se lopta, sa korišćenjem Papus – Guldinove teoreme površina lopta je:

$$A_{ROT} = 2\pi x_c l = 2\pi \frac{2R}{\pi} R\pi = 4R^2\pi$$

***<u>Drugo Papus – Guldinovo pravilo</u>*:**

Zapremina V_{ROT} tela koje nastaje obrtanjem ravanskog lika okoz ose koja leži u ravni tog lika i ne seče je, jednaka je proizvodu dužine kružnog luka (ili obima kružnice u slučaju da se rotacija vrši za $2\pi\, rad$) koji opisuje težište C_A te površi prilikom rotacije na udaljenosti x_c od ose i površine lika *A*.



slika 14.

Primer 3:
Prikazana ravna figura površina *A* leži u *xz* ravni. Rotacija se vrši se oko *z* ose za pun ugao od 2π rad. Rotacijom elementarnog dela dA čija *x* koordinata iznosi *x*, oko *z* ose za pun krug, dobija se elementarna zapremina obrtnog tela koja iznosi $dV = 2x\pi \cdot dA$. Integraljenjem ovog izraza dobijamo:

$$V_{ROT} = 2\pi \int_A x\, dA = 2\pi\, x_c A.$$

Primer 4:
Neka je dat pravougli trougao dužina kateta R i H, a površina $A = \frac{R \cdot H}{2}$. Rotacijom tog pravouglog trougla oko z ose na kojoj se nalazi kateta dužina H nastaje kupa. Kako je rastojanje težišta trougla od z ose jednako $\frac{R}{3}$, to primenom Papus – Guldinova teoreme dobijemo zapreminom kupa:

$$V_{ROT} = 2\pi \frac{R}{3} \cdot \frac{RH}{2} = \frac{R^2 \pi \cdot H}{3} = \frac{B \cdot H}{3}$$

2.4.3. Arhimedova teorema

Teorema 9. ***(Arhimedova):***
Ako se geometrijsko telo sastoji iz dva manja dela, njegovo težište će biti kolinearno sa težištima ta dva dela.

Dokaz: Neka se telo sa težištem u tački $C(x_c, y_c, z_c)$ zapremine V sastoji iz dva tela sa težištima $C_1(x_1, y_1, z_1)$ i $C_2(x_2, y_2, z_2)$ i zapremina V_1 i V_2 redom ($V = V_1 + V_2$), tada važi:

$x_c = \frac{\int_V x\, dV}{V},\ x_1 = \frac{\int_{V_1} x\, dV}{V_1},\ x_2 = \frac{\int_{V_2} x\, dV}{V_2}$, što dalje implicira

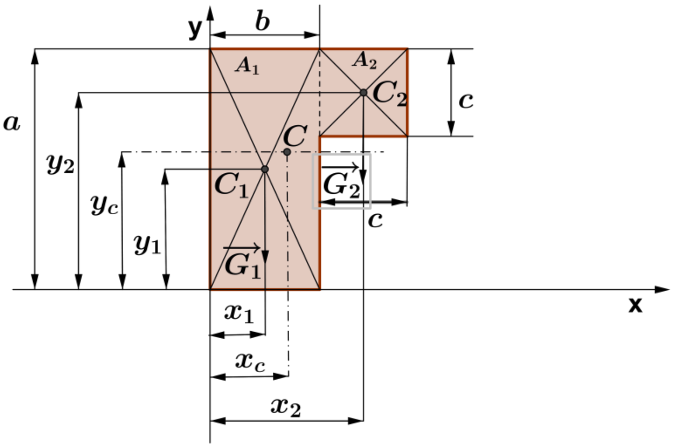
$$V \cdot x_c = \int_V x\, dV = \int_{V_1+V_2} x\, dV = \int_{V_1} x\, dV + \int_{V_2} x\, dV = V x_1 + V_2 x_2$$

$$(V_1 + V_2) x_c = V_1 x_1 + V_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2}{V_1 + V_2}.$$

Analogno, dobijamo $y_c = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2}$ i $z_c = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V_1 + V_2}$.

Iz gornjih formula zaključujemo da tačka C predstavlja konveksnu kombinaciju tačaka C_1 i C_2 za koje važi $C_1 C : C C_2 = V_1 : V_2$.
Slično se dokazuje i za ravanske figure.

Primer 5 : Posmatramo "L-figuru", koja je podeljena na pravougaonikekao što je to prikazano na *slici 15*. Težište cele figure označimo sa $C(x_c, y_c)$, atežištadelova C_1 i C_2 (*slika 15.*). Označimo površine cele figure sa A, a njenih delova sa A_1 i A_2. Koristeći Arhimedovu teoremu dobijamo:



slika 15.

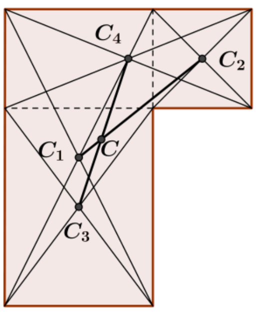
$A = A_1 + A_2, \quad x_c = \frac{\int x\, dA}{A}, \; x_1 = \frac{\int x\, dA}{A_1}, \; x_2 = \frac{\int x\, dA}{A_2}$ i

$$Ax_c = \int x\, dA = A_1x_1 + A_2x_2 \Rightarrow x_c = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2}$$

Analogno, dobijamo da je $y_c = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A_1 + A_2}$.

Dakle, težište se nalazi u tački $C\left(\frac{A_1x_1+A_2x_2}{A}, \frac{A_1y_1+A_2y_2}{A}\right)$, tački duži $[C_1C_2]$ koja razbija tu duž u razmeri $C_1C : CC_2 = A_1 : A_2$.

Primetimo da određivanje težišta posmatrane figure može se izvesti i grafičkim postupkom, tj. korišćenjem Arhimedove teoreme i činjenice da se ta figura može razbiti na dva načina na dva pravougaonika. Jedno razbijanje je određeno pravougaonicima čiji su preseci dijagonale (težišta) označeni sa C_1 i C_2 na *slici 16.*, dok je drugo razbijanje određeno sa pravougaonicima čija su težišta C_3 i C_4. Jasno, težište cele figure se nalazi u preseku duži $[C_1C_2]$ i $[C_3C_4]$. Ovaj metod određivanja težišta figure korišćen je u 7ME – testu, koji su učenici radili, u okviru izvedenog eksperimenta.



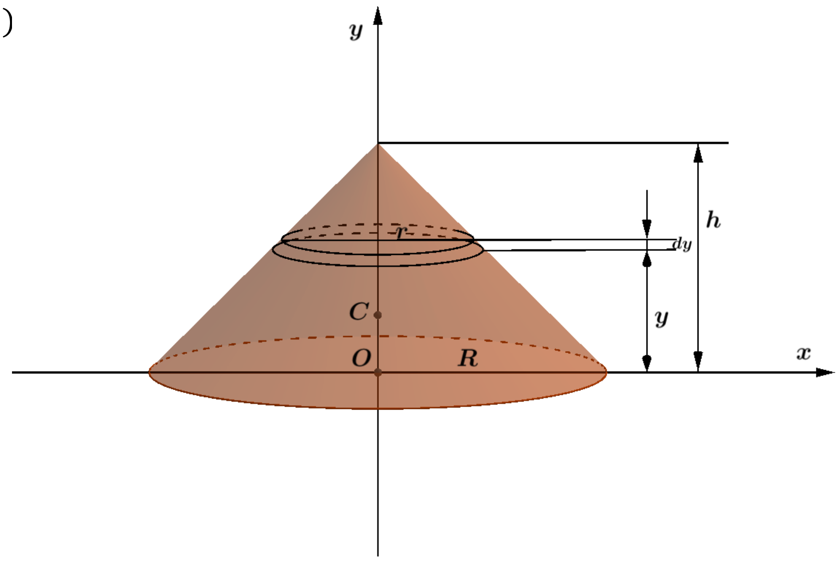
slika 16.

Koordinate težišta tela:

2.4.4. Određivanje težišta kupe

Poluprečnika osnove $R>0$, visina kupe $h>0$, $\frac{r}{R}=\frac{h-y}{h}\rightarrow r=\frac{R}{h}(h-y)$, zapremina elementarnog diska debljina dy je $dV=r^2\pi dy=\left(\frac{R}{h}(h-y)\right)^2\pi\, d$

$=\frac{\pi R^2}{h^2}(h^2-2hy+y^2)$



slika 17.

Zapremina kupa je:

$$V=\int_V dV=\int_0^h\frac{\pi R^2}{h^2}(h^2-2hy+y^2)dy=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h(h^2-2hy+y^2)dy$$

$$=\frac{\pi R^2}{h^2}\left(h^2y\Big|_0^h-hy^2\Big|_0^h+\frac{y^3}{3}\Big|_0^h\right)=\frac{\pi R^2}{h^2}\left(h^3-h^3+\frac{h^3}{3}\right)=\frac{\pi R^2h}{3}$$

$$\int_V ydV=\int_0^h y\,r^2\pi dy=\int_0^h y\frac{R^2}{h^2}(h-y)^2\pi\,dy=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h y\left(h^2-2hy+y^2\right)dy$$

$$=\frac{\pi R^2}{h^2}\left(\frac{h^2}{2}y^2\Big|_0^h-\frac{2h}{3}y^3\Big|_0^h+\frac{1}{4}y^4\Big|_0^h\right)=\frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{h^4}{12}=\frac{\pi R^2h^2}{12}$$

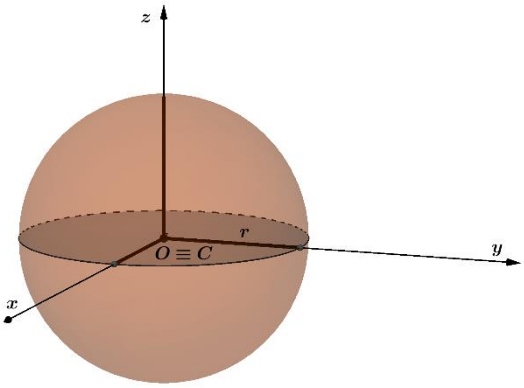
$$\boldsymbol{y_C} = \frac{\int_V y\, dV}{V} = \frac{\frac{\pi R^2 h^2}{12}}{\frac{\pi R^2 h}{3}} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{4}}$$

Zbog principa simetrije $\boldsymbol{x_C} = \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{z_C} = \boldsymbol{0}$. Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{4}}, \boldsymbol{0}\right)$.

Napomena: Potpuno analogno se izvodi da je težište piramide visine $\boldsymbol{h}$ i kvadratne osnove $\boldsymbol{a^2}$ u $\boldsymbol{xy}$-ravni sa centrom u koordinatnom početku takođe tačka $\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{4}}, \boldsymbol{0}\right)$.

2.4.5. Određivanje težišta lopte

Lopta poluprečnika $r > 0$, sa centrom u koordinatnom početku. Kako su sve tri koordinatne ose simetrije ove lopte, zaključujemo da je težište u tački $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$, tj. da se poklapa sa centrom lopte.

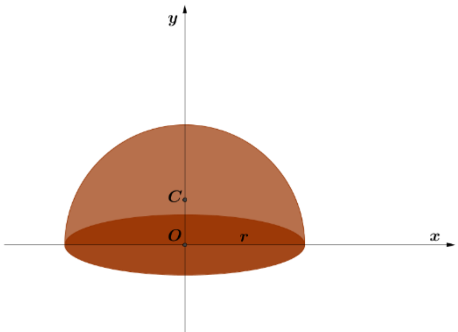


slika 18.

2.4.6. Određivanje težišta polulopte

Poluprečnika $r > 0$, sa centrom u koordinatnom početku, čije tačke imaju nenegativnu prvu koordinatu.

Zapremina ove polulopte je:



slika 19.

$$V = \iiint\limits_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \rho^2 \sin\theta \;d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} r^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \;d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}r^3\left(-\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}r^3\pi$$

$$\int_V y dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \; d\rho d\theta d\varphi = \frac{r^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \; d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \frac{r^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{r^4}{8}\cdot 2\pi = \frac{1}{4}r^4\pi$$

$$\boldsymbol{y_C} = \frac{\int_V y \; dV}{V} = \frac{\frac{r^4\pi}{4}}{\frac{2r^3\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{8}r}$$

Zbog principa simetrije $\boldsymbol{x_C = 0}$ i $\boldsymbol{z_C = 0}$.

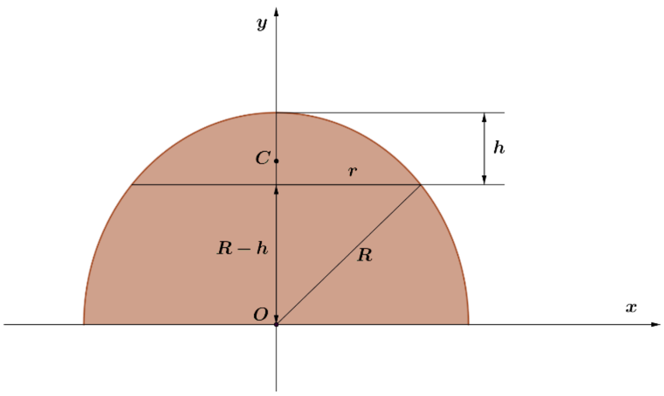
Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C\left(0, \frac{3}{8}r, 0\right)}$.

2.4.7. Određivanje težišta loptinog odsečka (kalota)

R je poluprečnik lopte, *h* je visina odsečka, a *r* je poluprečnik presečnog kruga.

$$y^2 + r^2 = R^2 \;\; \rightarrow \;\; r = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$R - h < y < R$$



slika 20.

Zapremina loptinog odsečka:

$$V = \int_V dV = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - y^2) dy$$

$$= \pi \left(R^2 y \Big|_{R-h}^{R} - \frac{y^3}{3} \Big|_{R-h}^{R} \right) = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

$$\int_V y\, dy = \pi \int_{R-h}^{R} y\,(R^2 - y^2)\, dy = \pi \left(\frac{R^2}{2}\, y^2 \Big|_{R-h}^{R} - \frac{1}{4} y^4 \Big|_{R-h}^{R} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{R^2}{2}(R^2 - (R-h)^2) - \frac{1}{4}(R^4 - (R-h)^4) \right)$$

$$= \pi(2Rh - h^2)\left(\frac{R^2}{2} - \frac{2R^2 - 2Rh + h^2}{4} \right) = \frac{\pi h^2}{4}(2R - h)^2$$

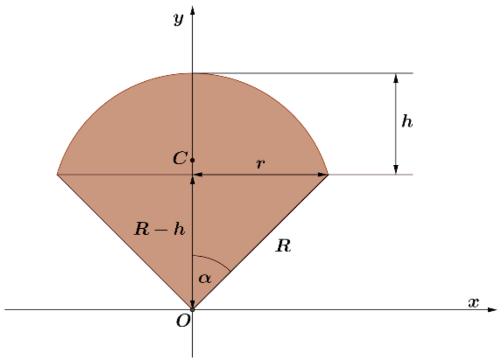
$$\boldsymbol{y_C} = \frac{\int_V y\, dV}{V} = \frac{\frac{\pi h^2}{4}(2R-h)^2}{\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{(\boldsymbol{2R-h})^{\mathbf{2}}}{(\boldsymbol{3R-h})}$$

Zbog principa simetrije $\boldsymbol{x_C = 0}$ i $\boldsymbol{z_C = 0}$.

Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C}\left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{(\boldsymbol{2R-h})^{\mathbf{2}}}{(\boldsymbol{3R-h})}, \mathbf{0}\right)$.

2.4.8. Određivanje težišta loptinog isečka

$$\left.\begin{aligned} y^2 + r^2 &= R^2 \\ y &= R - h \end{aligned}\right\} \quad \to\ r = \sqrt{2Rh - h^2}$$



slika 21.

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$$

Zapremina loptinog isečka:

$$V = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{R} \rho^2 \sin\theta\ d\rho d\theta d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \sin\theta\ d\theta d\varphi$$

$$= \frac{R^3}{3}(-\cos\alpha + 1)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi R^3}{3}\left(-\left(\frac{R-h}{R}\right)+1\right) = \frac{2}{3}\cdot \pi R^2 h$$

$$\int_V y dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{R} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \cos\theta \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

$$= \left[\begin{matrix}\sin\theta = t \\ \cos\theta d\theta = dt\end{matrix}\right] = \frac{R^4}{4}\cdot\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\alpha}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}(\sin\alpha)^2 = \frac{\pi R^2 h}{4}\cdot(2R-h)$$

$$\boldsymbol{y_C} = \frac{\int_V y dV}{V} = \frac{\frac{\pi R^2 h\cdot(2R-h)}{4}}{\frac{2\pi R^2 h}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{8}\cdot(2R-h)}$$

Zbog principa simetrije $\boldsymbol{x_C = 0}$ i $\boldsymbol{z_C = 0}$.

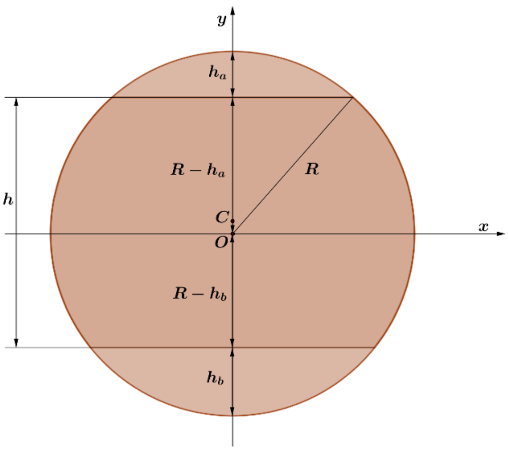
Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C\left(0,\ \frac{3}{8}\cdot(2R-h)\ , 0\right)}$.

2.4.9. Određivanje težišta loptine zone

$$h_a = R - \sqrt{R^2 - a^2}$$

$$h_b = R - \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$h = \sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - b^2}$$



slika 22.

Zapremina loptinog zona:

$$V = \int_V dV = \int_{-(R-h_b)}^{R-h_a} dV = \pi \int_{-\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-a^2}} (R^2 - y^2)\, dy$$

$$= \pi\left(R^2\left((R^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+(R^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{3}\left((R^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+(R^2-b^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$= \pi\left(\left((R^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+(R^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(R^2-\frac{1}{3}\left(2R^2-a^2-b^2-\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}\right)\right)\right)$$

$$= \pi h\left(R^2-\frac{1}{3}\left(2R^2-a^2-b^2-\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}\right)\right)$$

$$= \pi h\left(R^2-\frac{1}{3}\left(2R^2-a^2-b^2-\frac{h^2-2R^2+a^2+b^2}{2}\right)\right)$$

$$= \pi\left(\frac{6hR^2-4hR^2+3ha^2+3hb^2+h^3-2hR^2}{6}\right)=\frac{1}{6}\,\pi h(3a^2+3b^2+h^2)$$

$$\int_V ydV = \int_{-(R-h_b)}^{R-h_a} ydV = \pi\int_{-\sqrt{R^2-b^2}}^{\sqrt{R^2-a^2}} y\,(R^2-y^2)dy$$

$$= \pi\left(\frac{R^2}{2}(b^2-a^2)-\frac{1}{4}((R^2-a^2)^2-(R^2-b^2)^2)\right)$$

$$= \pi\left(-\frac{R^2}{2}(a^2-b^2)+\frac{1}{4}(a^2-b^2)(2R^2-a^2-b^2)\right)$$

$$= \pi(a^2-b^2)\left(\frac{-a^2-b^2}{4}\right)=-\frac{1}{4}\pi(a^4-b^4)$$

$$\boldsymbol{y_C}=\frac{\int_V y\,dV}{V}=\frac{-\frac{1}{4}\pi\left(a^4-b^4\right)}{\frac{1}{6}\,\pi h(3a^2+3b^2+h^2)}=\frac{\boldsymbol{-3(a^4-b^4)}}{\boldsymbol{2h^3+6h(a^2+b^2)}}$$

Zbog principa simetrije $\boldsymbol{x_C=0}$ i $\boldsymbol{z_C=0}$.

Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C\left(0,\ \frac{-3(a^4-b^4)}{2h^3+6h(a^2+b^2)}\ ,0\right)}$.

Koordinate težišta ravnih površina:

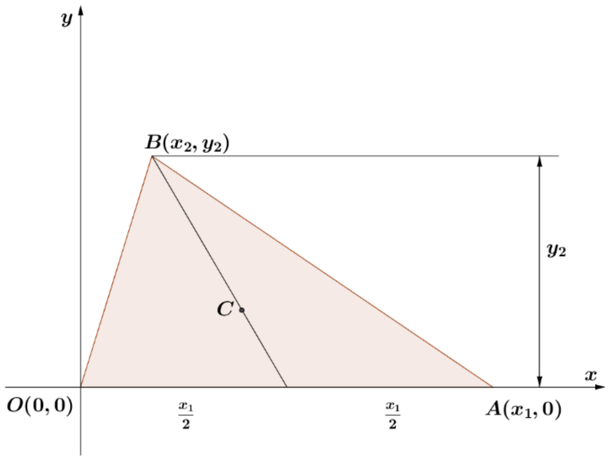
2.4.10. Određivanje težišta trougla

Neka su temena trougla tačke $O(0{,}0)$, $A(x_1, 0)$ i $B(x_2, y_2)$; $(x_1,\, x_2,\, y_2 > 0)$.

$$OB:\quad y = \frac{y_2}{x_2}\, x \longrightarrow x = \frac{x_2}{y_2}\, y$$

$$AB:\quad y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

$$\rightarrow\quad x = \frac{x_2 - x_1}{y_2}\, y + x_1$$



slika 23.

Površina ΔOAB jednaka je polovini poizvoda dužine jedne njegove strane $(OA = x_1)$ i odgovarajuće visine (y_2), odnosno:

$$A = \frac{x_1 \cdot y_2}{2}$$

Težište ΔOAB u koordinatu *x*:

$$\int_A x\, dA = \iint_A x\, dxdy = \int_0^{y_2} \int_{\frac{x_2}{y_2}y}^{\frac{x_2 - x_1}{y_2}y + x_1} x\, dxdy$$

$$= \int_0^{y_2} \left(\frac{\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2} y + x_1\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{x_2}{y_2} y\right)^2}{2} \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^{y_2} \left[\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2} y\right)^2 \right.$$

$$\left. + 2yx_1\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2}\right) + {x_1}^2 - \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 \right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2x_1x_2y_2}{3} + \frac{{x_1}^2 y_2}{3} + x_1x_2y_2 \right] = \frac{x_1x_2y_2 + {x_1}^2 y_2}{6} = \frac{x_1y_2\,(x_2 + x_1)}{6}$$

$$\boldsymbol{x_C} = \frac{\int_A x\,dA}{A} = \frac{\frac{x_1 y_2\ (x_2 + x_1)}{6}}{\frac{x_1 \cdot y_2}{2}} = \frac{\boldsymbol{x_2 + x_1}}{\boldsymbol{3}}$$

Težište ΔOAB u koordinatu *y*:

$$\int_A y\,dA = \iint_A y\,dxdy = \int_0^{y_2} \int_{\frac{x_2}{y_2}y}^{\frac{x_2 - x_1}{y_2}y + x_1} y\,dxdy$$

$$= \int_0^{y_2} y\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2}\,y + x_1 - \frac{x_2 y}{y_2}\right) dy = \int_0^{y_2} \left(\frac{x_2 - x_1}{y_2}y^2 + x_1 y - \frac{x_2 y^2}{y_2}\right) dy$$

$$= \frac{(x_2 - x_1){y_2}^3}{3y_2} + \frac{x_1 {y_2}^2}{2} - \frac{x_2 {y_2}^3}{3y_2} = \frac{x_1 {y_2}^2}{6}$$

$$\boldsymbol{y_C} = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{\frac{x_1 {y_2}^2}{6}}{\frac{x_1 \cdot y_2}{2}} = \frac{\boldsymbol{y_2}}{\boldsymbol{3}}$$

Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C}\left(\frac{\boldsymbol{x_2 + x_1}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{y_2}}{\boldsymbol{3}}\right)$.

Primedba: analitički se lako pokazuje da je tačka $C\left(\frac{\boldsymbol{x_2 + x_1}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{y_2}}{\boldsymbol{3}}\right)$ presek duži koje spadaju temena trougla sa središtima naspramnih stranica (težišnih linija) na osnovu čega sledi da su u opštem slučaju za proizvoljan trougao sa temenima u (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), koordinate težišta $C\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

2.4.11. Određivanje težišta paralelograma

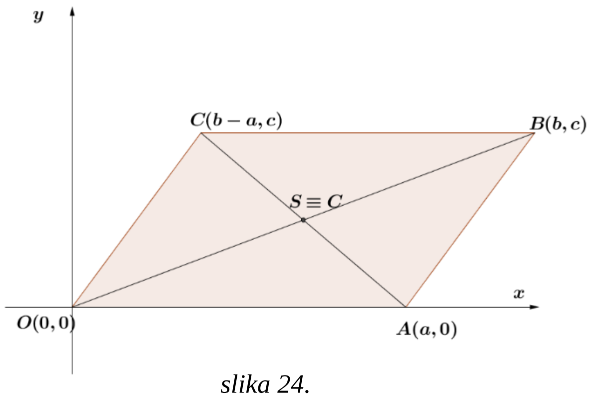
Neka su temena paralelogram tačke $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(b,c)$ i $C(b-a,c)$, $(b > a > 0,\, c > 0)$

OC: $y = \left(\frac{c}{b-a}\right)x$

$$\rightarrow x = \left(\frac{b-a}{c}\right)y$$

AB: $y = \left(\frac{c}{b-a}\right)(x-a)$

$$\rightarrow x = \left(\frac{b-a}{c}\right)y + a$$



slika 24.

Površina paralelograma *OABC* jednaka je proizvodu dužina njegove stranice $OA = a$ i odgovarajuće visine *c*, odnosno: $\boldsymbol{A = a \cdot c}$.

$$\int_A x\,dA = \iint_A x\,dxdy = \int_0^c \int_{\left(\frac{b-a}{c}\right)y}^{\left(\frac{b-a}{c}\right)y+a} x\,dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^c \left[\left(\left(\frac{b-a}{c}\right)y + a\right)^2 - \left(\frac{b-a}{c}\right)^2 y^2\right]dy = \frac{1}{2}\int_0^c \left[\frac{2ay(b-a)+a^2c}{c}\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{ac^2(b-a)}{c} + a^2c\right] = \frac{1}{2}acb$$

$$\boldsymbol{x_T} = \frac{\int_A x\,dA}{A} = \frac{\frac{1}{2}acb}{a\cdot c} = \boldsymbol{\frac{1}{2}b}$$

$$\int_A y\,dA = \iint_A y\,dxdy = \int_0^c \int_{\left(\frac{b-a}{c}\right)y}^{\left(\frac{b-a}{c}\right)y+a} y\,dxdy = \int_0^c y\left(\left(\frac{b-a}{c}\right)y + a - \left(\frac{b-a}{c}\right)y\right)dy$$

$$= \frac{ac^2}{2}$$

$$\boldsymbol{y_T} = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{\frac{ac^2}{2}}{a\cdot c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{c} \quad .$$

Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{T}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}\right)$.

Napomena: Primetimo da dokaz da se težište paralelograma nalazi u preseku dijagonala možemo izvesti koristeći Arhimedovu teoremu i razlaganje paralelograma na trouglove.

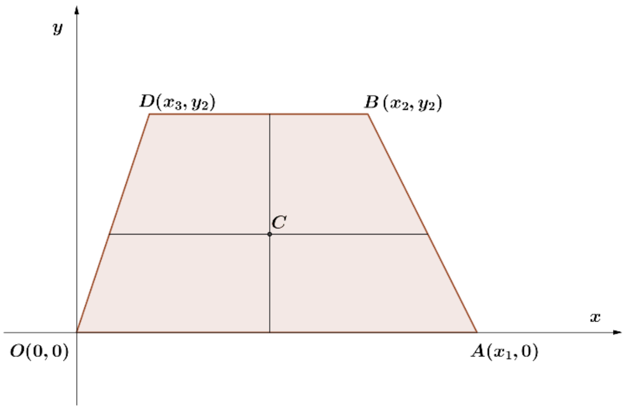
2.4.12. Određivanje težišta trapeza

Neka su temena trapeza tačke $O(0,0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_1, y_2)$ i $C(x_3, y_2)$, $(x_1 > x_2 > x_3 > 0, y_2 > 0)$.

OD: $y = \frac{y_2}{x_3}\,x \rightarrow x = \frac{x_3}{y_2}y$

AB: $y = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2$

$$\rightarrow x = \frac{x_2 - x_1}{y_2}\,y + x_1$$



slika 25.

Površina trapeza jednaka je polovini proizvoda dužine visine y_2 i zbira dužina osnovica $x_1 + (x_2 - x_3)$:

$$A = \frac{y_2}{2}\left(x_1 + (x_2 - x_3)\right)$$

$$\int_A x\,dA = \iint_A x\,dxdy = \int_0^{y_2}\int_{\frac{x_3}{y_2}y}^{\frac{x_2 - x_1}{y_2}y + x_1} x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{y_2}\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2}\,y + x_1\right)^2 - \left(\frac{x_3}{y_2}y\right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{y_2}\left[\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2}y\right)^2 + 2yx_1\,\frac{x_2 - x_1}{y_2} + {x_1}^2 - \left(\frac{x_3}{y_2}y\right)^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{{x_2}^2 y_2 + x_1 x_2 y_2 + {x_1}^2 - {x_3}^2 y_2}{3}\right] = \frac{y_2}{6}\left({x_2}^2 + x_1 x_2 + {x_1}^2 - {x_3}^2\right)$$

$$\boldsymbol{x_C} = \frac{\int_A x\, dA}{A} = \frac{\frac{y_2({x_2}^2+x_1x_2+{x_1}^2-{x_3}^2)}{6}}{\frac{y_2(x_1+x_2-x_3)}{2}} = \frac{\boldsymbol{{x_2}^2 + x_1x_2 + {x_1}^2 - {x_3}^2}}{\boldsymbol{3(x_1 + x_2 - x_3)}}$$

$$\int_A y\, dA = \iint_A y\, dxdy = \int_0^{y_2} \int_{\frac{x_3}{y_2}y}^{\frac{x_2-x_1}{y_2}y+x_1} y\, dxdy = \int_0^{y_2} y\left(\frac{x_2-x_1}{y_2}y + x_1 - \frac{x_3}{y_2}y\right) dy$$

$$= \int_0^{y_2} \left(\frac{x_2y^2 - x_1y^2 + x_1x_2y - x_3y^2}{y_2}\right) dy$$

$$= \frac{2x_2{y_2}^2 + 3x_1{y_2}^2 - 2x_3{y_2}^2 - 2x_1{y_2}^2}{6} = \frac{{y_2}^2}{6}(x_1 + 2x_2 - 2x_3)$$

$$\boldsymbol{y_C} = \frac{\int_A y\, dA}{A} = \frac{\frac{{y_2}^2(x_1+2x_2-2x_3)}{6}}{\frac{y_2(x_1+x_2-x_3)}{2}} = \frac{\boldsymbol{x_1 + 2x_2 - 2x_3}}{\boldsymbol{3\,(x_1 + x_2 - x_3)}}\boldsymbol{y_2}$$

Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C}\left(\frac{{x_2}^2+x_1x_2+{x_1}^2-{x_3}^2}{3(x_1+x_2-x_3)}, \frac{x_1+2x_2-2x_3}{3\,(x_1+x_2-x_3)}\boldsymbol{y_2}\right)$.

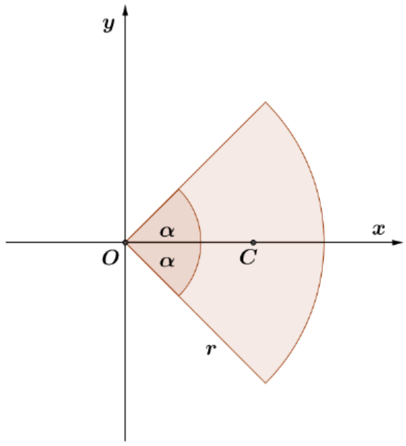
2.4.13. Određivanje težišta kružnog isečka

- sa poluprečnikom r i centralnim uglom 2α

Površina kružnog isečka:

$$A = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^r \rho\, d\rho d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^r\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}\right) = r^2\alpha$$



slika 26.

$$\int_A x\, dA = \iint_A x\, dxdy = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^r \rho^2 \cos\theta\, d\rho d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^r\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} r^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\ d\theta = \frac{1}{3} r^3 \sin\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2}{3} r^3 \sin\alpha$$

$$\boldsymbol{x_C} = \frac{\int_A x\, dA}{A} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin\alpha}{r^2 \alpha} = \boldsymbol{\frac{2}{3} \cdot \frac{r\ \sin\alpha}{\alpha}}$$

Težište se nalazi na x-osi, odnosno važi $\boldsymbol{y_C = 0}$

Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{r\ \sin\alpha}{\alpha}, 0\right)}$.

2.4.14. Određivanje težišta kružnog odsečka

- sa poluprečnikom R centralnim uglom 2α

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ y = R - h \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{R^2 - x^2} = R - h$$

$$x^2 = 2Rh - h^2$$

$$x = \pm\sqrt{2Rh - h^2} = \pm t$$

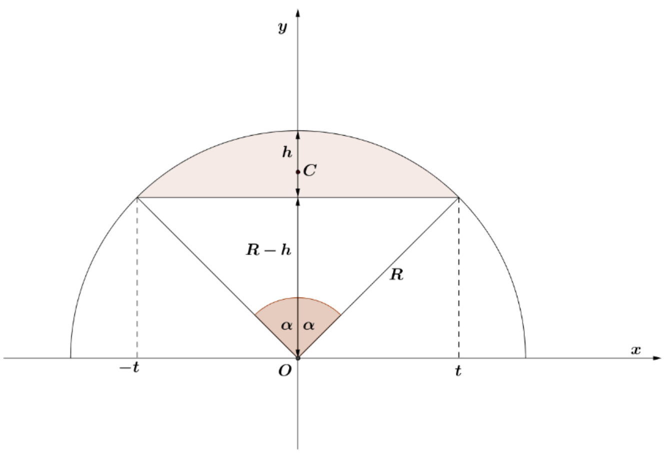
Površina je:

$$A = \frac{R^2}{2}(\hat{\varphi} - \sin\varphi), \quad \varphi = 2\alpha$$

$$A = \frac{R^2}{2}(2\hat{\alpha} - \sin 2\alpha)$$

$$= \frac{R^2}{2}(2\hat{\alpha} - 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= R^2(\hat{\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha)$$



slika 27.

visina je $h = R(1 - \cos\alpha)$

$$\int_A y\,dA = \int_{-t}^{t} \frac{1}{2}[f^2(x) - g^2(x)]dx = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t}[(R^2 - x^2) - (R-h)^2]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-t}^{t} 2Rh\,dx - \int_{-t}^{t} h^2 dx - \int_{-t}^{t} x^2 dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2Rh \cdot 2\sqrt{2Rh - h^2} - 2h^2\sqrt{2Rh - h^2} - \frac{2}{3}(2Rh - h^2)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2(2Rh - h^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(2Rh - h^2)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\big(2R\big(R(1-\cos\alpha)\big) - R^2(1-\cos\alpha)^2\big)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3}(R^2 - R^2\cos\alpha)^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot R^3\sin^3\alpha$$

$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\frac{2}{3}\cdot R^3\sin^3\alpha}{R^2(\hat{\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\boldsymbol{R\sin^3\alpha}}{(\boldsymbol{\hat{\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha})}, \quad \boldsymbol{x_C = 0}$$

Težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C\left(0, \frac{2}{3}\cdot\frac{R\sin^3\alpha}{(\hat{\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha)}\right)}$.

2.4.15. Određivanje težišta isečka kružnog prstena

- sa odgovarajućim centralnim uglom 2α, $r$je poluprečnik manjeg kruga i R poluprečnik većeg kruga.

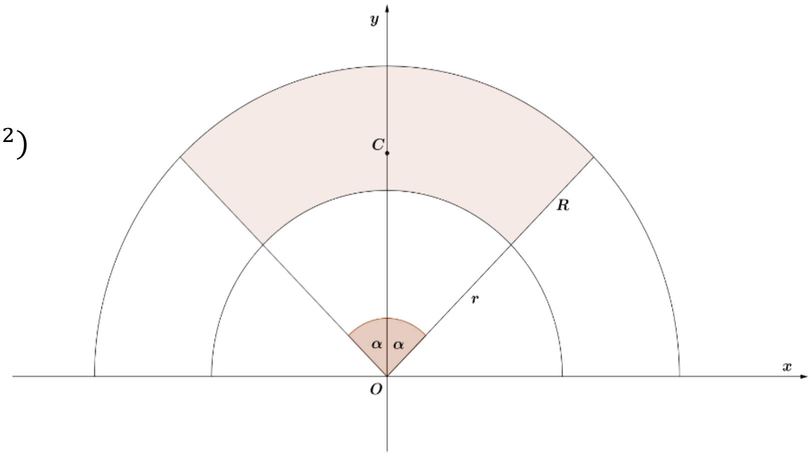
Površina isečka kružnog prstena direktno je proporcionalan centralnom uglu:

$$\frac{A_{ikp}}{A_{kp}} = \frac{2\alpha}{360°} \Longrightarrow A_{ikp} = \frac{2\alpha}{360°}(R^2\pi - r^2\pi) = \frac{2\alpha\pi}{360°}(R^2 - r^2)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{2\alpha\pi}{360°}$$

$$A_{ikp} = A = \hat{\alpha}(R^2 - r^2)$$

$$y = r\cos\alpha$$



slika 28.

$$\int_A y\, dA = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{r}^{R} r^2 \cos\alpha\, dr d\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{r}^{R}\right)\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{3}(R^3 - r^3)\sin\alpha \Big|_{-\alpha}^{\alpha}$$

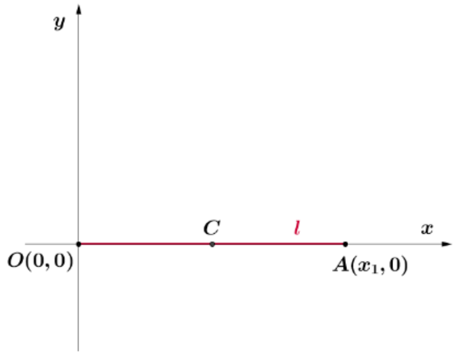
$$= \frac{2}{3}(R^3 - r^3)\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{y_C} = \frac{\int_A y\ dA}{A} = \frac{\frac{2}{3}(R^3 - r^3)\sin\alpha}{\hat{\alpha}(R^2 - r^2)} = \boldsymbol{\frac{2}{3} \cdot \frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\hat{\alpha}}}, \qquad \boldsymbol{x_C = 0}$$

Težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C\left(0, \frac{2}{3} \cdot \frac{(R^3-r^3)}{(R^2-r^2)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\hat{\alpha}}\right)}$.

Koordinate težišta linija:

2.4.16. Određivanje težišta duži



slika 29.

$$l = \int_l dl = \int_0^{y_1} dl = y_1$$

$$\int_l x\, dl = \int_0^{x_1} l\, dl = \frac{l^2}{2} \Big|_0^{x_1} = \frac{{x_1}^2}{2}$$

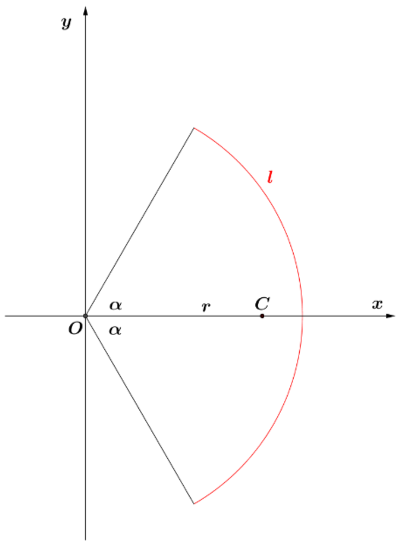
$$\boldsymbol{x_C} = \frac{\int_l x\, dl}{l} = \frac{\frac{{x_1}^2}{2}}{x_1} = \frac{x_1}{2}$$

$$\boldsymbol{y_c} = \mathbf{0}.$$

Težišta je u središtu duži.Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C}\left(\frac{\boldsymbol{x_1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{0}\right)$.

2.4.17. Određivanje težišta kružnog luka

Posmatrajmo kružni luk poluprečnika r i pridružen centralnom uglom 2α kome je x-osa osa simetrije.



slika 30.

$$l = \int_l dl = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2(\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2}\, dt$$

$$= r\int_{-\alpha}^{\alpha} dt = 2r\alpha$$

$$dl = \sqrt{r^2(\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2}\, dt$$

$$\int_l x\, dl = \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos t\, dt = r^2 \sin t \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2r^2 \sin\alpha$$

$$\boldsymbol{x_C} = \frac{\int_l x\, dl}{l} = \frac{2r^2 \sin\alpha}{2r\alpha} = \boldsymbol{r}\, \frac{\boldsymbol{\sin\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

U ovom izrazu α je mera ugla u radijanima. Dakle, težište se nalazi u tački $\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{r}\,\frac{\boldsymbol{\sin\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{0}\right)$.

3. Eksperiment

3.1. Ideja eksperimenta

Eksperiment je izveden u Osnovnoj školi „Adi Endre“ u Malom Iđošu, u periodu od 31.03.2014. godine do 17.04.2014. godine (6 časova, pripremna faza) i 04.09.2014 (sedmi čas u nizu - glavni test). U istraživanju su učestvovala dva odeljenja šestog (sedmog) razreda (VIa i VIb), ukupno 44 učenika.

Osnovna ideja eksperimenta je bila da se u prvom delu (pripremnoj fazi) učenici eksperimentalne grupe pripreme za rad u manjim grupama korišćenjem tzv. ***Modifikovanog MTE-modela nastave,*** tj. da se u jednom dužem periodu, kroz obradu većeg broja nastavnih jedinica iz obaveznog programa, najpre naviknu na ovaj način rada. Modifikacija MTE-modela nastave, kojeg karakterišu dva testa: motivacioni (M-test) i test provere znanja (E-test), se sastoji u tome da se na času izvede samo jedan test koji predstavlja ujedno i test provere usvojenog znanja sa prethodnog časa i motivacioni test za aktuelni čas, a što je izvodljivo upravo zbog povezanosti gradiva koje se izlaže u nizu časova. Stoga su naši testovi nazvani ***ME-testovi.*** U drugom delu eksperimenta trebalo je ispitati koji sadržaj naše osnovne teme (Težište figure) bi se mogao izložiti ovim putem učenicima. U pripremnoj fazi eksperimenta, kroz 6 časova ovim putem su obrađene nastavne jedinice: *Pojam četvorougla, Uglovi četvorougla, Paralelogram, Vrste paralelograma, Paralelogram i simetrije i Trapez*, na kraju školske 2013/14. godine . Tema *Težište Figura* je obrađena u istim odeljenjima na početku sledeće školske godine (u sedmom razredu).

Cilj eksperimenta je bio da se ispita efikasnost kolektivnog učenja ovim modelom nastave. U okviru eksperimenta, jedno odeljenje (VIb) je poslužilo kao eksperimentala grupa a drugo (VIa) odeljenje kao kontrolna grupa. U eksperimentalnom odeljenju formirane su manje grupe od po 4-5 učenika. Nastavnik je izabrao lidere tih grupa od najboljih (po ocenama iz matematike) đaka, a oni su zatim birali preostale članove grupe po svom afinitetu stvarajući na taj način pozitivnu klimu u grupi.

Svaki učenik kontrolne grupe je u toku prvog dela časa samostalno radio tzv. ME-test koji ima za cilj da motiviše učenika za nastavnu jedinicu koja se obrađuje tokom tog časa, ali i da ispita usvojeno znanje i podseti na gradivo sa prethodnog časa. Ti testovi su trajali od 20 do 25 minuta i sadržali su četiri do pet zadatka (videti Dodatak). U drugom delu časa nastavnik je izlagao gradivo kroz rešavanje upravo zadataka tog ME-testa, zajedno sa učenicima, uz davanje dodatnih obrazloženja, definicija, tvrđenja i sl. Razlika u radu eksperimentalnog i kontrolnog odeljenja je bila u tome što formiranim grupama eksperimentalnog odeljenja je bilo dozvoljeno i sugerisano da zajedno rade unutar grupe, da komentarišu i objašnjavaju jedni drugima svoja razmišljanja. Ovim modelom je urađen niz od 7 časova s tim da je poslednji test rađen na početku sedmog razreda (04.09.2014.) u istim odeljenjima.

U okviru eksperimenta urađena su i tri kontrolna zadatka, kao provera znanja stečenih u nizu tih časova. Prvi kontrolni zadatak rađen je nakon šestog ME-testa (na kraju školske godine), drugi neposredno pre sedmog ME-testa (na početku nove školske godine), dok je treći posle sedmog ME- testa. Ti zadaci su rađeni na potpuno isti način u oba odeljenja i svaki đak je radio zadatke samostalno. Svrha tih zadataka je bila da se utvrdi da li su učenici Grupe-4, Grupe-3 ili Grupe-2 u eksperimentalnoj grupi napredovali ili nazadovali, kao i da li je cela eksperimentalna grupa bolje ili gore usvojila znanje u odnosu na kontrolnu grupu.

3.2. Specifičnosti odeljenja, način izbora grupa i priprema učenika na novi način rada

Odeljenje VIb (eksperimentala grupa) je problematično u smislu da su učenici ovog odeljenja više nezainteresovani za učenje, više su nestašni, imaju puno loših ocena (ne samo iz matematike, nego i iz drugih predmeta), samim tim su bili poseban izazov. Ovi razlozi su uticali na izbor VIb kao eksperimentalne grupe od 21 učenika, gde se primenjuje kooperativno učenje, odnosno da rade u manjim grupama, gde su grupe formirane od 4-5 učenika. Način izbora članova grupa, u nastavku zvaćemo ih ***radnim grupama***, je tekao na sledeći način:
Svi učenici, u oba odeljenja su razvrstani najpre u grupe prema uspehu iz matematike u prvom polugodištu. Tako smo dobili u svakom odeljenju četiri grupe: Grupa-5, Grupa-4, Grupa-3 i Grupa-2 a sve u cilju analiziranja napredovanja pojedinih grupacija. Po uspehu (provereno na jednom dodatnom kontrolnom) moglo bi se reći da Grupe-5 i Grupe-4 jednog odeljenja postižu približno jednak uspeh kao odgovarajuće grupe drugog odeljenja. Grupa-3, pak, u eksperimentalnom odeljenju postiže duplo lošiji uspeh (10% kontrolnog) od parnjaka u kontrolnom odeljenju (21%) a kod Grupe-2 taj odnos je još dramatičniji (uspeh na pomenutom kontrolnom u eksperimentalnom odeljenju je bio 1.8% a u kontrolnom odeljenju 8.3%).

Radne grupe (iz VIb**)** su dobile nazive: **A-grupa, B-grupa, C-grupa i D-grupa.** Ove grupe su bile ravnopravne (heterogene), tj. lideri su birani od strane nastavnika od najboljih učenika. Naime, sugerisano je da oni izvode formule ali da bude međusobni dogovor između članova grupa, lošiji su bili zaduženi za računske operacije, crteže ili za vođenje računa o dužini raspoloživog vremena za obavljanje zadatka (20-25 minuta za rešavanje testa). Posebno je naglašeno da svi treba da rešavaju zadatke, odnosno oni koji su zaduženi za sporedne radnje isto tako treba da budu aktivni u rešavanju zadataka. Na taj način je obezbeđeno da se i učenici sa slabijm ocenama iz matematike ravnopravno uključe u rad i osete korisnim za grupu pa će tako i njihova pažnja ostati fokusirana na sadržaj sa časa.

Odeljenje VIa je imalo 23 učenika i bila je kontrolna grupa. Učenici su radili iste ME-testove kao i eksperimentalna grupa, ali samostalno.

U tabelama koje slede (posebno u Dodatku) date su vrednosti izražene u procentima koje predstavljaju broj tačnih odgovora u testovima. Rezultati u VIa prikazani su po grupama, gde su grupe određene na osnovu polugodišnjih ocena iz matematike, tj.

grupa-5 (ocena 5) sa pet učenika, grupa-4 (ocena 4) sa šest učenika, grupa-3 (ocena 3) sa pet učenika i grupa-2 (ocena 2) sa sedam učenika. Dok rezultati u VIb su prikazani po grupama koje su bile heterogene, u grupi-A bilo je šest učenika, u grupi-B, grupi-C i grupi-D bilo je po pet učenika.

Na poslednjem, 7ME- testu u kontrolnom odeljenju, koji je sada VIIa, rezultati su prikazani po grupama prema ocenama na kraju šestog razreda, tj. grupa-5 (ocena 5) sa šest učenika, grupa-4 (ocena 4) sa tri učenika, grupa-3 (ocena 3) sa pet učenika i grupa-2 (ocena 2) sa devet učenika. U eksperimentalnom odeljenju grupe su ostale takve kakve su bile na 1ME-6ME testovima u šestom razredu.

Zadaci za ME-testove su birani pažljivo tako da zadovoljavaju kriterijume po kojima se osmišljavaju zadaci u MTE-modelu nastave, ali naravno da i obezbede obradu osnovnih tipskih zadataka što je i zacrtano u programu nastave. Naši testovi sadrže:

- bar jedan lak i jasan zadatak, za koji se pretpostavlja da će svaki učenik znati uraditi (tako će učenici biti motivisani i dobijati želju za dalje rešavanje zadataka).
- zadatke koji služe za ponavljanje ranije naučenih pojmova, a cilj je da se učenici sami podsete tih pojmova
- zadatke vezanih za temu koja se obrađuje i da se učenici zainteresuju za temu časa
- slike, koje će pomoći učenicima da reše zadatke
- zadatke za proveru znanja sa prethodnog časa

3.3. Anketiranje učenika

Obavljeno je četiri anketiranja učenika sa dve vrste anketnih listića (Anketa 1 i Anketa 2) tokom eksperimenta. Anketiranje učenika se vršilo anonimno kako bi realno iskazali svoje mišljenje o kvalitetu održanog časa i rada nastavnika.

Pitanja iz **Ankete 1** su imala za cilj da ispitaju stav učenika prema testiranjima i grupnom radu uopšte (da li vole da rade testove koji se ne ocenjuju, da li osećaju strah prilikom izrade testova, da li žele da rade novo gradivo putem rešavanja testova i da li bi voleli da praktikuju grupni rad). Ovo anketiranje je obavljeno pre i posle pripremne faze (28.03.2014. godine i 03.09.2014. godine.) pri čemu su svi učenici bili prisutni, tj. ukupno 44 učenika.

Rezultati su pokazali, kod oba anketiranja, da većina učenika u oba odeljenja vole da rade testove i otvoreni su za nov metod usvajanja novog gradiva ali jako je važno za njih da ne budu ocenjeni. Na osnovu rezultata ovih anketa možemo zaključiti da je strah kod učenika različit, npr. prema drugom pitanju u Anketi 1 utvrđujemo da se samo kod kontrolne grupe pojavljuje mali broj đaka koji oseća strah (verovatno je to strah od nepoznatog, ne znaju kakvi su tipovi zadataka), dok u eksperimentalnoj grupi vidimo da više od polovine “nikako” nemaju strah kod popunjavanja testova. Ovo mišljenje se menja u manjoj meri u Ponovljenoj Anketi 1, nakon obavljene pripremne faze, tj. odrade 6 ME-testova. Naime, u kontrolnoj grupi, u kojoj su učenici radili samostalno ME-testove 13% učenika koji su imali mali strah sada nemaju uopšte strah prilikom izrade testova.

Interesantna je situacija kod eksperimentalne grupe: oko 30% učenika koji su se ranije izjasnili da ne osećaju strah uopšte, kao i 10% učenika koji su osećali strah sada se izjašnjavaju da malo osećaju strah. Što se tiče načina rada na času kod oba odeljenja više od polovine preferira grupni rad i samo trećina dece daje prednost raditi u paru, dok samo u odeljenju VIa svaki peti učenik bi voleo da radi samostalno testove.

Pitanja iz **Ankete 2** su imala za cilj da ispitaju stav učenika prema modifikovanom MTE-modelu nastave uz i bez kooperativnog pristupa (da li su im časovi na kojima su radili ME-testove bili interesantni ili ne, da ih uporede sa dosadašnjim načinom rada, da ih ocene ocenom od 1 do 5, da li su naučili tim putem nešto novo i da li bi taj pristup voleli ponovo da praktikuju). Ovo anketiranje je obavljeno posle pripremne faze i posle sedmog ME-testa (18.04.2014. godine i ponovljeno 08.09.2014. godine.) pri čemu su skoro svi učenici bili prisutni, tj. ukupno 43 učenika prvi put, a 44 učenika drugi put.

Prema rezultatima prvog anketiranja, nakon pripremne faze, oko 70% učenika kontrolnog odeljenja i oko 50% eksperimentalnog odeljenja smatra ove časove interesantnim, interesantnijim nego inače i ocenjuje ih visokim ocenama (4 i 5), dok samo 4% učenika kontrolnog odeljenja ocenjuje ove časove kao manje dopadljive nego inače i oko 15% eksperimentalnog odeljenja smatraju ih dosadnim. Broj učenika koji su nezadovoljni ovim časovima se nakon sedmog ME-testa duplo smanjio (broj nezadovoljnih u kontrolnom odeljenju se sa 21% spustio na 10%, u eksperimentalnom sa 15% na 5%) što možemo pripisati tome da je sama tema koja se obrađuje 7ME-testom (Težište figura) uspela da ih zaintrigira. Primetimo da kod oba testiranja velika većina učenika priznaje da su naučili nešto novo i da bi voleli i drugi put da imaju takve časove.

3.4. Pripremna faza eksperimenta, Testovi ME1-ME6 i prvi kontrolni

Kao što smo naveli MTE-model predstavlja kombinovani način rada. Na testovima pripremne faze zadaci su birani iz sadržaja gradiva šestog razreda osnovne škole. Obrađene teme odnose se na temu četvorougao i podeljene su u šest nastavnih jedinica (testova): "*Pojam četvorougla*" (1ME-test), " *Uglovi četvorougla*" (2ME-test), "*Paralelogram*" (3ME-test), "*Vrste paralelograma*" (4ME-test), "*Paralelogram i simetrije*" (5ME-test), "*Trapez*" (6ME-test) . Ovde ćemo se samo nakratko osvrnuti na te testove. Za detaljniji opis videti Dodatak.

U prvom, **1ME-testu** kroz prva dva zadatka učenici se podsećaju osnovnih pojmova vezanih za četvorougao, dok putem trećeg zadatka upoznaju se sa pojmom konveksnosti figure. Četvrti zadatak je onaj 'intrigantan'. Nacrtano je pet pravih koje se međusobno seku a zadatak je da se uoče svi tako formirani četvorouglovi. Cilj zadatka je da đaci obrate pažnju na postojanje i nekonveksnih četvorouglova.

Uočeno je da su bolji rezultat u usvajanju pojma konveksnosti (3. Zadatak) pokazali učenici svih eksperimentalnih grupa nego što su to uradili učenici grupe-5 kontrolnog razreda.

U drugom, **2ME-testu** peti zadatak je bio ciljni: Kod posmatranog četvorougla zadati su jedan spoljašnji ugao i dva unutrašnja ugla konveksnog četvorougla, a treba odrediti preostala dva unutrašnja ugla. Kroz prva tri zadatka, učenici se podsećaju pojma konveksnih uglova, unutrašnjih i spoljašnjih dijagonala, samog pojma konveksnog četvorougla (sa prethodnog časa) kao i tvrđenja (iz prvog polugodišta šestog razreda) o zbiru unutrašnjih i spoljašnjih uglova trougla. Četvrti zadatak obrađuje novo gradivo o zbiru unutrašnjih uglova proizvoljnog četvorougla, kao i zbiru spoljašnjih uglova konveksnog četvorougla. Od učenika se očekuje da će uz pogodnu sličicu koja mu sugeriše razbijanje četvorougla na dva trougla sam doći do zaključka i rešenja ovog zadatka, koji mu je i neophodan za rešavanje ciljnog zadatka.

Ponovo je eksperimentalno odeljenje u proseku pokazalo bolji rezultat u rešavanju ovih zadataka od Grupe-5 kontrolnog odeljenja. Primetimo da je zadatak 4 (novo gradivo) tačno uradilo bar 50% učenika eksperimentalnog odeljenja, dok u kontrolnom to nije pošlo za rukom ni Grupi-5. Za očekivati je bilo, kao što se i desilo, da je samo mala grupa đaka rešila i peti zadatak, za koji je bilo potrbno znati tvrđenja iz zadatka 4. Prihvatanje neuspeha kod ciljnog zadatka u prvoj fazi je takođe jedna od namera autora ovog modela nastave (MTE-modela), a sve u cilju jačanja želje da se taj ciljni zadatak u potpunosti reši, što će kroz drugu fazu časa (kroz obradu istih zadataka tog testa zajedno sa nastavnikom) i uraditi.

Treći 3ME-test se bavi paralelogramom koji se uvodi drugim zadatkom. Prvim zadatkom se učenici podsećaju, od ranije, pojmova komplementnih i suplementnih uglova kao i tvrđenja, sa prethodnog časa, o uglovima četvorougla. Treći i četvrti zadatak traži od učenika da sami dođu do tvrđenja o osobinama paralelograma koje se odnose na njegove stranice i uglove, kao i dijagonale (da se polove).

Ovaj test nije imao nijedan posebno zahtevan zadatak, te je i bilo za očekivati da će biti urađen sa velikim uspehom, kao što su i rezultati pokazali. I u ovom testu su učenici eksperimentalne grupe u nešto boljem procenu odradili ove zadatke od grupe-5 kontrolnog odeljenja.

Četvrti 4ME-test obrađuje vrste paralelograma. Kroz prva dva zadatka učenici treba da se podsete definicije i tvrđenja vezana za paralelogram (sa prethodnog časa). Treći, četvrti i peti zadatak daju redom definicije pravougaonika, romba i kvadrata kao specijalne slučajeve paralelograma. Četvrti i peti zadatak traže da se uoče osnovna tvrđenja vezana za ove figure (podudarnost odgovarajućih stranica i dijagonala kod pravougaonika) a u drugom delu časa nastavnik će i dokazati kroz diskusiju sa učenicima ta tvrđenja. Zadatak 5 je bio nešto kompleksniji: tražilo se da se izračuna površina kvadrata ako je obim poznat.

Učenicima bi trebalo da su poznati obrasci za izračunavanje površine i obima kvadrata iz nižih razreda osnovne škole. Kompleksnost ovog zadatka je u tome da učenik treba da taj zadatak razloži sam na delove (korake). Najpre da odredi iz obima stranicu kvadrata a zatim površinu. Rezultati su pokazali da su sve radne grupe eksperimentalnog odeljenja (dakle i ono gde je lider bio iz Grupe-4) u većem procentu odradilo taj zadatak i od Grupe-5 i od Grupe-4 kontrolnog odeljenja.

Ciljni zadatak **Petog 5ME-testa** je treći zadatak kojim se uz uvođenje pojma centralne simetrije kao preslikavanja od učenika traži da uoči da je paralelogram centralno simetrična figura, tj. da na konkretnim dužima to ustanovi. Za to je neophodno da se podsete gradiva sa prethodnog časa (osobine specijalnih četvorouglova) rešavajući zadatak 1, kao i pojma osne simetrije iz petog razreda rešavajući zadatak 2.

Rezultati pokazuju po prvi put nešto lošije urađen ME-test kod svih radnih grupa eksperimentalnog odeljenja u odnosu ne samo na Grupu-5 već i na Grupu-4 kontrolnog odeljenja. Zadatak 3 su sve grupe (uključujući i Grupu-2) kontrolnog odeljenja bolje uradile od svih grupa eksperimentalnog odeljenja. Kako to objasniti? Zadatak je bio 'pipav' (na 9 linija je trebalo ispisati slike određenih duži i trouglova). Takvi zadaci su više preporučljivi za samostalni rad, gde je obezbeđena veća koncentracija (manje ometanje), dok veća količina fizičkog posla (pisanja) slabi volju kod mogućih 'prepisivača' u radnim grupama.

Poslednji, šesti **6ME-test** je posvećen trapezu čiji pojam se uvodi prvim zadatkom (u kojem treba samo da prepoznaju trapeze među ponuđenim četvorouglovima). Drugi zadatak proverava usvojeno znanje o zbiru uglova u četvorouglu na konkretnom primeru pravouglog trapeza (zadatak računarskog tipa). Treći i četvrti zadatak su predstavljali posebni izazov za nastavnika. U trećem zadatku učenicima je predočen tekstualni dokaz tvrđenja o jednakokrakim trapezima (Ako su kraci podudarni onda i samo onda su im i uglovi na osnovici podudarni) sa izostavljenim ključnim delovima teksta. Od njih se očekuje da pokušaju da proprate taj dokaz i uspešno popune upražnjena polja. Prema rezultatima, možemo zaključiti da se više od polovine onih najboljih učenika (Grupe-5) u oba odeljenja dosta uspešno snašla pred ovim izazovom, obzirom na to da se oni do sada nisu susretali sa formalnim zapisom dokaza u celosti (iako je nastavnik više puta na času izlagao slične dokaze). Četvrti zadatak je tražio od njih da pokušaju da dokažu tvrđenje o podudarnosti dijagonala jednakokrakog trapeza, pri čemu im je priložena slika. Od njih se očekivalo da samostalno uoče trouglove koje treba uporediti i da dokažu njihovu podudarnost. Dve radne grupe od četiri u eksperimentalnom odeljenju su to skoro u celosti odradili kako treba, dok u kontrolnom odeljenju je to pošlo za rukom samo jednom učeniku (iz grupe-5). Sve u svemu, ponovo je primetan bolji uspeh u proseku kod eksperimentalnog odeljenja u odnosu na Grupu-5 kontrolnog odeljenja (jasno, kao i za sve ostale grupe kontrolnog odeljenja).

Prvi kontrolni je bio organizovan na početku sedmog razreda 02.09.2014. godine da bi se videlo koliko su učenici savladili gradivo koje je rađeno na tim testovima i u kojoj meri se sećaju toga (obzirom da je proteklo više meseci od tada). Na prvom času u septembru nastavnik je najavio učenicima kontrolni za sledeći dan kao obnavljanje nekih delova gradiva iz prethodne godine (iz šestog razreda), ali nije rečeno koji deo. Ovaj kontrolni ne pripada nastavnom planu i nije ni bio ocenjen, samo najbolji učenici su bili nagrađeni. Rečeno im je da kontrolni neće biti ocenjivan, ali da će najuspešniji biti nagrađeni. Bile su dve grupe: A i B. U Dodatku smo priložili samo zadatke jedne grupe pošto je druga grupa imala potpuno iste zadatke sa različitim redosledom. Zadaci su birani tako da su veoma slični zadacima iz testova 1ME- 6ME ali malo zahtevniji. Npr., prvi zadatak je sličan četvrtom zadatku 1ME-testa samo što je umesto pet pravih sada nacrtano šest; sada umesto da zaokruže koja tvrđenja o paralelogramu su tačna, što je bio zadatak 2 4ME-testa, od njih se očekuje da navedu što više tačnih tvrđenja koja znaju o paralelogramu i sl. Napomenimo da su sada svi učenici oba odeljenja radili zadatke samostalno.

Rezultati pokazuju da su sada učenici kontrolnog odeljenja pokazali u proseku bolji uspeh (skoro 50% urađenih zadataka) od učenika kontrolnog odeljenja (34%), što i nije predstavljalo iznenađenje obzirom na sastav odeljenja o kojem smo izvestili na početku ove glave. Naravno, uloga nastavnika u II fazi časa po MTE-modelu može biti ključna za uspešno usvajanje gradiva. Međutim, ako poredimo grupe istog uspeha na polugodištu u oba odeljenja možemo zaključiti sledeće:

Grupa-5 eksperimentalnog odeljenja (u kojoj su svi lideri radnih grupa) je pokazala u proseku, ipak bolji uspeh od Grupe-5 kontrolnog odeljenja, dok je Grupa-4 kontrolnog odeljenja pokazala skoro duplo bolji uspeh (63%) od Grupe-4 eksperimentalnog odeljenja (32%). Primetimo da u Grupi-4 eksperimentalnog odeljenja se nalazi samo jedan lider (radne grupe Grupe-D) dok preostalih 5 učenika nisu bili lideri. Grupa-3 i grupa-2 eksperimentalnog odeljenja su nešto lošije uradili zadatke od parnjaka u kontrolnom odeljenju, ali ne tako kao što bi se očekivalo. (Obično, grupa-2 i grupa-3 eksperimentalnog odeljenja mnogo lošije urade zadatke od odgovarajućih parnjaka kontrolnog odeljenja.)

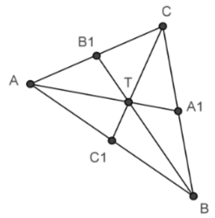
3.5. Test 7ME-test

Glavni deo eksperimenta, kao što je već rečeno, je bila obrada nestandardne teme *Težište figure* modifikovanim MTE-modelom i održano je 04.09.2014. godine. Učenici eksperimentalnog odeljenja (VIIb) su bili podeljeni u grupe na potpuno isti način, kao što je to urađeno prilikom obrade prvih šest tema u pripremnoj fazi.

7ME - test

Učenik	
Odeljenje	
Grupa	

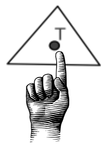
1) Težište T trougla ABC deli težišnu duž AA_1 u razmeri (odnos [AT] : [TA_1])



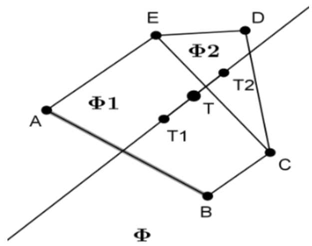
a) 1 : 2 b) 2 : 1 c) 3 : 1 d) 1 : 3 e) 2 : 3

2) Naučimo:

<u>Težište T</u> tela je jedinstvena tačka u kojoj je skoncentrisana ukupna težina tela (rezultanta težina svih čestica od kojih se telo sastoji) .
Za trougao od kartona težište tog tela je tačka određena tačkom preseka težišnih linija.

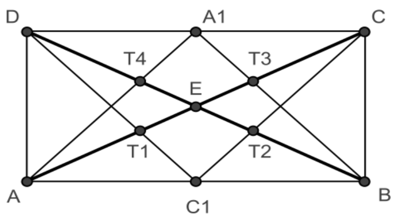


- **Ako se figura ϕ sastoji od dve manje figure ϕ_1 i ϕ_2 (vidi desnu sliku), tada se težište T figure ϕ nalazi na duži T_1T_2 gde su T_1 i T_2 težišta figura ϕ_1 i ϕ_2 , redom.**



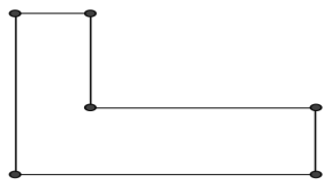
Težište pravougaonika ABCD je tačka (zaokruži tačan odgovor):

a) T_1
b) T_2
c) T_3
d) T_4
e) E



3) Na koliko načina se figura sa slike može podeliti (razložiti) na dva pravougaonika:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4



4) Odrediti težište datog trougla (priložen trougao od kartona).

5) Odrediti težište date figure (priložena figura od kartona oblika figure iz zadatka 3).

Analiza zadataka 7ME-testa:

Naš zadatak je bio da deca osete praktičnu primenu već usvojenog znanja o težištu trougla i da na intuitivnom planu prihvate pojam težišta figure (tela). Stoga u drugom zadatku, u kojem se uvodi taj pojam govorimo o 'trouglu od kartona' i upućujemo da je težište tog tela ona tačka koju smo i ranije zvali težištem, ali (samo) trougla.

Kao što se može videti, prvi zadatak služi za podsećanje na već ranije obrađenu temu- težišta trougla (u petom razredu), dok drugim zadatkom, pored uvođenja pojma težišta tela dajemo i tvrđenje Arhimedove teoreme, koja bi trebalo da je prihvatljiva na intuitivnom planu. U okviru zadatka 2, od učenika se očekuje da uoči koja tačka predstavlja težište pravougaonika. Za očekivati je da većina učenika da tačan odgovor (bez mnogo razmišljanja). Nastavnik je taj koji će u drugom delu časa objasniti zašto je tačka E upravo tražena tačka koristeći Arhimedovu teoremu i znanje o težištu trougla.

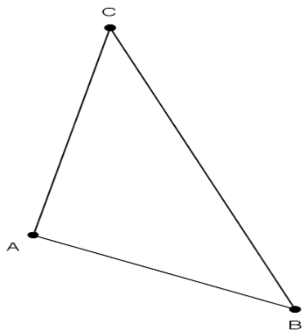
Za određivanje težišta figura koristeći Arhimedovu teoremu zgodno nam je da možemo uočenu figuru podeliti na bar dva načina na dve figure čija težišta znamo da odredimo. Težište te figure se nalazi u preseku dve duži, pri čemu svaka duž spaja težišta manjih figura jednog razbijanja. Naš ciljni zadatak ovog testa je zadatak 5, koji traži da se odredi težište figure sa slike iz zadatka 3. Kao algoritamski korak za određivanje težišta te figure, potrebno je uočiti da je moguće razbiti tu figure na dva pravougaonika na dva načina, što se traži zadatkom 3. Za očekivati je da će i ovaj zadatak svi tačno uraditi, kao i drugi zadatak i tako dobiti neophodno samopouzdanje za dalji rad. Prvi zadatak je trebao da ih podseti da se težište trougla dobija u preseku težišnih linija (stoga je tu i dat crtež sa strane) čak i ako se ne sete odgovora vezano za razmeru u kojoj težište deli težišnu duž trougla (mada je za očekivati da će oni dovitljiviji đaci sa crteža uspeti doći do tačnih vrednosti).

Dakle, prva tri zadatka su napravila pripremu za onaj praktični deo - određivanje težišta trougla i figure u obliku ćiriličnog slova 'G' koji su nacrtani na kartonu i isečeni. Četvrti zadatak je takođe zadatak koji predstavlja proveru usvojenog znanja te je za očekivati da ga većina uradi. Na nastavniku ostaje da uoči koji procenat đaka će iskoristiti priliku da pokuša da održi karton na vrhu prsta pomoću težišta. Svakako, u drugom delu časa tu demonstraciju za obe figure treba da urade i nastavnik i đaci.

3.6. Drugi kontrolni (zadaci o težištu)

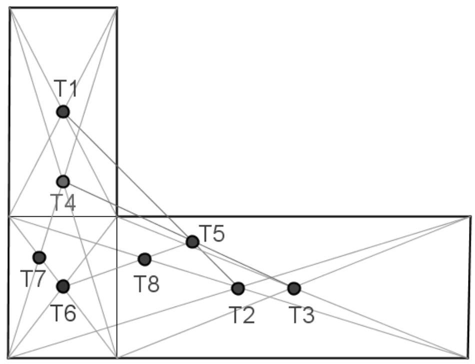
Ime:______________________

1) Odrediti težište datog trougla ABC.

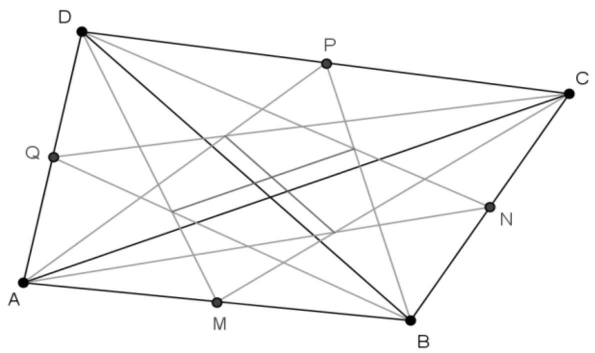


2) Težište datog figura je tačka (zaokruži tačan odgovor):

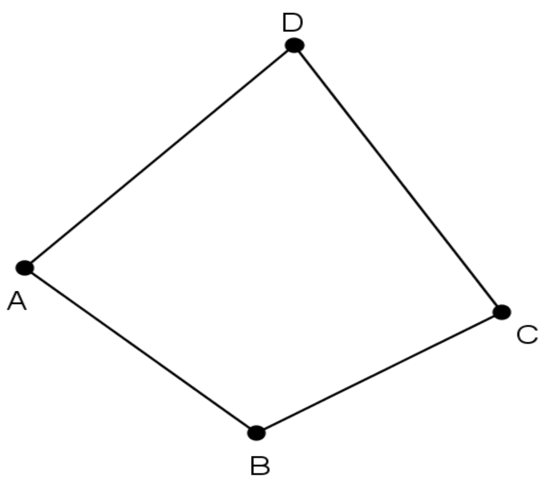
f) T_1	e) T_5
g) T_2	f) T_6
h) T_3	g) T_7
i) T_4	h) T_8



3) Uočiti težište datog četvorougla ABCD na crtežu. (M, N, P i Q su središta duži)



4) Odrediti težište datog četvorougla ABCD.



4. Rezultati eksperimenta i zaključak

4.1. Rezultati 7ME – testa za temu *“Težište figura”*

Na poslednjem testu u VIIa odeljenju četiri učenika je bilo odsutno, jedan iz grupe-4, jedan iz grupe-3 i dva iz grupe-2. U VIIb odeljenju jedan učenik je bio odsutan iz grupe-B. Rezultati se vide iz sledećih tabela.

Odeljenje	**Kontrolno odeljenje VIIa**				
Broj učenika	19				
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
Grupa-5 (6 učenika)	83.33%	100%	83.33%	100%	83.33%
	90%				
Grupa-4 (2 učenika)	50%	100%	100%	100%	50%
	80%				
Grupa-3 (4 učenika)	25%	75%	100%	50%	25%
	55%				
Grupa-2 (7 učenika)	42.86%	57.14%	57.14%	28.57%	14.28%
	40%				
Ukupan prosek odeljenja	**63.15%**				

Tabela 1

Odeljenje	**Eksperimentalno odeljenje VIIb**				
Broj učenika	20				
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
A-grupa (6 učenika)	100%	100%	100%	66.67%	83.33%
	90%				
B-grupa (4 učenika)	100%	100%	100%	25%	0%
	65%				
C-grupa (5 učenika)	100%	100%	80%	60%	40%
	76%				
D-grupa (5 učenika)	100%	100%	80%	40%	60%
	76%				
Ukupan prosek odeljenja	**78%**				

Tabela 2

Što se tiče prva tri zadatka, rezultati potvrđuju naša očekivanja da će oni biti s lakoćom urađeni. Ako ćemo porediti dva odeljenja, relevantni su nam rezultati samo Grupe-5 i eventualno Grupe-4 kontrolnog. Obzirom da je eksperimentalna grupa ove zadatke uradila nešto bolje (npr. u prvom zadatku sve eksperimentalne grupe su dale tačno rešenje, dok u kontrolnom odeljenju jedan učenik grupe-5 i jedan grupe-4 nisu zaokružili tačan odgovor) mogli bismo zaključiti da je došla do izražaja u grupnom radu ona snalažljivost koju smo pomenuli ranije kao mogućnost da se dođe do tačnog odgovora putem crteža (uočavanje tražene razmere na crtežu) a koja nije isključivo karakteristika najboljih đaka. Težište trougla u kontrolnom odeljenju je znalo da odredi 12 od 19 dece (svi iz Grupe-5 i Grupe-4 i po dvoje iz preostale dve grupe) dok je rezultat u eksperimentalnom odeljenju nešto lošiji: 10 od 20 dece. No, primetno je da je teži zadatak (peti) u eksperimentalnom odeljenju veći broj dece uradilo (njih desetoro) nego u kontrolnom odeljenju (osmoro). Takođe, interesantno je primetiti to da su dve eksperimentalne grupe bolje uradile peti zadatak nego četvrti.

4.2. Rezultati drugog kontrolnog (zadaci o težištu)

Rezultati kontrolnog zadatka za temu "Težište figura"

Kontrolno odeljenje VIIa:

Na dan kontrolnog jedna devojčica i jedan dečak su bili odsutni.

Odeljenje	**VIIa**			
Broj učenika	21			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Grupa- 5 Ukupno (6)	100%	100%	100%	33.33%
	83.33%			
Grupa- 4 Ukupno (3)	100%	100%	100%	33.33%
	83.33%			
Grupa- 3 Ukupno (5)	20%	80%	100%	20%
	55%			
Grupa- 2 Ukupno (7)	28.57%	42.86%	85.72%	0%
	39.28%			
Ukupan prosek odeljenja	**64.28%**			

Tabela 3

Eksperimentalno odeljenje VIIb:

Sledeća tabela pokazuje rezultati po ocenama.

Odeljenje	**VIIb**			
Broj učenika	21			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Grupa- 5 Ukupno (3)	100%	100%	100%	66.675
	91.67%			
Grupa- 4 Ukupno (6)	83.33%	33.33%	50%	0%
	41.67%			
Grupa- 3 Ukupno (4)	25%	50%	50%	0%
	31.25%			
Grupa- 2 Ukupno (8)	25%	37.5%	50%	0%
	28.13%			
Ukupan prosek odeljenja	**41.67%**			

Tabela 4

Drugi kontrolni je održan 05.09.2014. godine. Zadaci su slični sa zadacima iz eksperimenta (7ME-testa) ali vidno teži. Ovaj kontrolni ne spada u nastavni plan i nije bio ocenjivan, ali najbolji učenici su bili nagrađeni. Tabele pokazuju rezultate po ocenama iz matematike na kraju šestog razreda u oba odeljenja. Iz kontrolnog odeljenja dva učenika su bila odsutna, oni su iz grupe-2, a u eksperimentalnom odeljenju svi su bili prisutni. Najbolje rezultate imaju učenici iz grupe-5 (lideri) u eksperimentalnom odeljenju, na svakom kontrolnom su pokazali da su oni postigli najbolje rezultate i njima su se veoma dopali ti testovi. U kontrolnom odeljenju grupe-5 i grupe-4 imaju isti ukupan prosek, tj. 83.33% i u prva tri zadatka svi su tačno odredili težište datog trougla, figure i datog četvorougla ABCD, stoga bi mogli reći da grupi-4 odgovara ovaj pristup (MTE-model nastave). Grupa-4 u VIIb odeljenju je skoro duplo lošije uradila zadatke od svojih parnjaka u kontrolnom odeljenju (što inače nije slučaj, već imaju približno iste rezultate). Takođe, Grupa-2 i Grupa-3 eksperimentalnog odeljenja su nešto lošije u proseku uradili ovaj kontrolni od svojih parnjaka, ali ne mnogo kao što je inače sluom čaj.

Najteži zadatak se ispostavilo da je bio četvrti zadatak u oba odeljenja gde se od učenika tražilo da odredi težište proizvoljno nacrtanog četvorougla bez ikakve dodatne pomoći, ako se izuzme zadatak 3 čijom analizom dolazimo do algoritma za ovaj zadatak. Obzirom da su zadaci 2 i 3 u oba odeljenja u zadovoljavajućem procentu tačno urađena, nameće se kao zaključak nedovoljna praktična uvežbanost u crtanju lenjirom, što bi budućom praksom trebalo promeniti.

4.3. Zapažanja nastavnika

Pre izvođenja eksperimenta priželjkivali smo da će rad u grupama pokazati bolje rezultate, u odnosu na tradicionalno izvođenje nastave naročito kod učenika sa slabijim ocenama. Svakako, postojala je i sumnja u mogućnost gubljenja entuzijazma kod učenika eksperimentalne grupe koji imaju odlične ocene jer ne napreduju po svom tempu. Takođe, postojala je bojazan da će učenici sa lošijim ocenama zapravo uživati u ćaskanju u grupama, a neće napredovati u boljem usvajanju gradiva, kao i da neki učenici mogu da iskoriste grupni rad kako ne bi radili ništa, a rezultate prepisivati od drugih, boljih učenika.

Na osnovu razgovora sa učenicima, nastavnik je saznao da većina učenika i u kontrolnom odeljenju preferira grupni rad u odnosu na samostalni. Primećeno je da su u oba odeljenja slabiji učenici dolazili na časove matematike sa dobrom voljom i nisu osećali nikakav strah, jer su znali da neće biti ocenjivani na klasičan način. Smatram da je savladanje samog straha od časova matematike već veliki napredak, što je već samo po sebi napredak i što govori u prilog MTE-modelu nastave.

U eksperimentalnom odeljenju lošiji učenici bili su motivisaniji, više samouvereni tokom rešavanja zadataka i nisu osećali to da samo pojedinci, odnosno dobri učenici mogu biti uspešni u matematici. U isto vreme svaki učenik je imao svoju ulogu i pored toga mogli su da komunicirajući jedni sa drugima, da rešavaju zadatke. Članovi grupe su sedeli tako da su bili okrenuti licem u lice i mogli su međusobno deliti materijal i tiho razgovarati, bez uznemiravanja drugih grupa dok rade. Već sama mogućnost razgovora na času je dalo bolje raspoloženje. Naravno, dešavalo se i to da su bili preglasni i da su skretali sa teme, ali tada je nastavnik intervenisao i podsetio učenike da svako radi svoj zadatak. Sastav malih grupa je bio veoma dobar pošto su učenici sami birali članove i nije bilo problema takve prirode da jedan učenik ne želi da bude u grupi sa drugim, i isto tako nije bilo problema oko toga da pojedinac želi da radi samostalno van grupe. Jedna bitna činjenica je primećena da dobri učenici nisu bili nazadovani ili usporeni u napredovanju dok su pomagali slabijim učenicima u grupi.

Da bi se učenici bolje skoncentrisali na zadatke stvorena je umerena takmičarska atmosfera tako što je najbolja grupa na kraju eksperimenta nagrađena (na isti način i u kontrolnom odeljenju su nagrađeni najbolji učenici). U eksperimentalnom odeljenju svi su se dobro osećali tokom rada. Kod pojedinih slabijih učenika nije primećeno napredovanje zbog same činjenice da su učenici zatvoreniji, naravno ti učenici su vršili svoje zadatke, ali komunikacija je bila nešto slabija što je sasvim normalno kod tih učenika pošto se još nisu navikli na grupni rad i zbog toga je bitno da učenici po mogućstvu rade u grupama već od prvog razreda kako bi se pojačalo samopouzdanje, i na taj način lakše mogli rešavati samostalno zadatke. Bilo je i takvih učenika u grupi koji su se više bavili svojom ulogom u grupi (zaduženje za vreme i pažnju, zapisnik zajedničkih ideja, koordinator koji je nadležan za praćenje aktivnosti u grupi, itd.), nego svojim zadatkom. I ovo poslednje rečeno govori u prilog tome da bi trebalo navikavati učenike na grupni rad što ranije kako bi se više fokusirali na same zadatke, a manje na dodeljene uloge i stekli veću odgovornost prema zajedničkom, ciljnom zadatku.

4.4. Zaključak

Na osnovu izvedenog eksperimenta u šestom razredu (kao i na početku sedmog razreda) osnovne škole može se smatrati da je modifikovani MTE-model nastave, uz ili bez primene kooperativnog pristupa, u suštini uspešan prilikom usvajanja novog gradiva, i prihvatljiv kako za učenike tako i za nastavnika. Učenici mogu i rado usvajaju i u nastavi nestandardne sadržaje kao što je to tema *Težište figura*

Rezultati Ankete 1, koja je dva puta urađena, pre i posle pripremne faze, pokazuju da je moguće poraditi na smanjivanju osećaja neprijatnosti (straha) od samog testiranja (ispitivanja) kao i povećanju osećaja lične odgovornosti i da je kooperativni pristup uz modifikovani MTE-model jedan od načina.

Na osnovu zapažanja nastavnika i na osnovu rezultata Ankete 2, koja je takođe dva puta urađena, pre i posle ME7-testa, učenicima se veoma dopada ovaj nov način rada u nastavi (preko 50% u oba odeljenja smatra te časove interesantnim i ocenjuje ih visokim ocenama). Isto tako, većina učenika podržava grupni rad i njihova želja je da se u buduće radi po ovom modelu jer se dobro osećaju kada rešavaju zadatke u grupi. Rezultati Ankete 2 potvrđuju da broj nezadovoljnih učenika na ovim časovima se može smanjiti u znatnoj meri ako se obrati pažnja na izbor same teme. Izbor dovoljno interesantne i praktične teme može da poveća motivaciju za dalji rad (smanji nezadovoljstvo). Iz tog razloga smatramo da bi trebalo u redovni program nastave uvrstiti i časove obrade nestandardnih, praktičnih tema kao što je *Težište figura*.

Grupni rad je pokazao svoje prednosti ne samo u individualnom osećaju učenja (rezultati anketa) već i u boljoj motivaciji i želji za uspehom. Naime u većini ME-testova skoro sve radne grupe eksperimentalnog odeljenje su postigli bolji rezultat od
Grupe-5 kontrolnog odeljenja.

Primećujemo da se dešavalo da je nekad Grupa-D , sa liderom iz Grupe -4, eksperimentalnog odeljenja bila uspešnija od drugih radnih grupa čiji su lideri bili iz Grupe-5, što ukazuje da označavanje nekog kao lidera može imati pozitivan efekat na motivaciju.

Međutim, označavanje nekog kao liderom može imati i negativne posledice po uspeh onih koji nisu dobili tu titulu, ako se osete u senci tih lidera. Naime, rezultati (individualne) provere usvojenog znanja koji se odnose na testove ME1-ME7 (kontrolni zadaci) pokazuju malo napredovanje Grupe-5 (lideri radnih grupa), kao i Grupe-3 i Grupe-2 u odnosu na parnjake (Grupa-2 i Grupa-3 eksperimentalnog odeljenja su pokazali lošije znanje od parnjaka u kontrolnom, ali ne u toj meri kao inače; dok su lideri bili oko 10% uspešniji od parnjaka kontrolnog odeljenja). Međutim, Grupa-4 eksperimentalnog odeljenja (koja inače ne zaostaje od svojih parnjaka, Grupe -4 kontrolnog odeljenja) je na oba kontrolna pokazala skoro duplo lošiji uspeh od svojih parnjaka. Ovo ukazuje na negativne efekte koje može imati grupni rad, tj. na mogućnost pojave učenika u radnim grupama koji nisu zadovoljni svojom ulogom i koji se osećaju u senci svojih lidera grupe. Kao mogući predlog za otklanjanje takvih nedostataka je osmišljavanje posebne (za njih važne) uloge u grupama ili, čak, davanje liderske uloge većem broju učenika u grupi.

Mi, nažalost, prilikom anketiranja nismo grupisali učenike (što je moguće dodatnim pitanje o uspehu na polugodištu) tako da smo ostali uskraćeni za informaciju o strukturi učenika nezadovoljnih ovim časovima. U perspektivi, ako se budu vršila slična istraživanja trebalo bi taj propust otkloniti.

5. Dodatak

5.1. Ankete i rezultati anketa

Datum: 28.03.2014.
Ponovljen datum: 03.09.2014.

Anketa1

1) Da li voliš testove koji se ne ocenjuju?

DA NE

2) Da li se pojavljulje strah kod popunjavanja radnih listova?

a) nikako
b) malo
c) da

3) Da li bi želeo(la) da učimo novo gradivo putem rešavanja testova?

a) da, ali ne uvek
b) da, ako se test ne ocenjuje
c) ne
d) svejedno mi je
e) tvoje mišljenje: ____.

4) Da li bi voleo da na času matematike praktikujemo:

a) pojedinačni rad
b) rad u paru
c) grupni rad

<u>Rezultati Anketa 1</u>:

Odeljenje VIa:

1.pitanje	**DA**	**NE**			
	95.65%	4.35%			
2.pitanje	**Nikako**	**Malo**	**Da**		
	39.13%	52.18%	8.69%		
3.pitanje	**a**	**B**	**C**	**d**	**E**
	34.78%	39.13%	4.35%	21.74%	0%
4.pitanje	**Pojedinačni**	**u paru**	**grupni rad**		
	21.74%	26.08%	52.18%		

Tabela 5

Odeljenje VIb:

1.pitanje	**DA**	**NE**			
	100%	0%			
2.pitanje	**nikako**	**Malo**	**da**		
	57.14%	28.57%	14.28%		
3.pitanje	**a**	**B**	**c**	**d**	**e**
	0%	85.72%	0%	9.52%	4.76%
4.pitanje	**pojedinačni**	**u paru**	**grupni rad**		
	0%	33.33%	66.67%		

Tabela 6

Rezultati Ponovljene Ankete 1:

Odeljenje VIIa:

1.pitanje	**DA**	**NE**			
	95.65%	4.35%			
2.pitanje	**nikako**	**malo**	**Da**		
	52.18%	39.13%	8.69%		
3.pitanje	**a**	**B**	**c**	**d**	**E**
	21.74%	39.13%	8.69%	30.44%	0%
4.pitanje	**pojedinačni**	**u paru**	**grupni rad**		
	13.05%	17.39%	69.56%		

Tabela 7

Odeljenje VIIb:

1.pitanje	**DA**	**NE**			
	100%	0%			
2.pitanje	**nikako**	**malo**	**Da**		
	28.57%	66.67%	4.76%		
3.pitanje	**a**	**B**	**c**	**d**	**E**
	33.33%	47.62%	0%	19.05%	0%
4.pitanje	**pojedinačni**	**u paru**	**grupni rad**		
	0%	23.81%	76.19%		

Tabela 8

Datum: 18.04.2014
Ponovljen datum: 08.09.2014

Anketa 2

1) Časovi matematike na kojima su rađeni ME testovi su bili po tvom mišljenju :

   a) veoma dosadni
   b) dosadni
   c) nemam neki stav
   d) interesantni
   e) veoma interesantni
   f) tvoje mišljenje : ____________________________________.

2) Uporedi ih sa ranijim časovima :
   a) manje mi se dopada nego inače
   b) kao i inače
   c) interesantnije nego inače

3) Kojom ocenom bi ocenio časove sa ME testovima?

   1 2 3 4 5

4) Da li si na časovima sa ME testovima naučio nešto novo? DA NE

5) Da li bi voleo da i drugi put imamo takve časove? DA NE

<u>Rezultati Ankete 2</u>:

Odeljenje VIa:

1.pitanje	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**F**			
	13.04%	8.69%	4.35%	56.53%	13.04%	4.35%			
2.pitanje	**a**	**b**	**C**						
	4.35%	34.78%	60.87%						
3.pitanje	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**				
	4.35%	4.35%	21.74%	21.74%	47.82%				
4.pitanje	**DA**	**NE**							
	86.95%	13.05%							
5.pitanje	**DA**	**NE**							
	86.95%	13.05%							

Tabela 9

Odeljenje VIb:

1.pitanje	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
	0%	15%	35%	30%	10%	10%
2.pitanje	**a**	**b**	**c**			
	35%	15%	50%			
3.pitanje	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
	10%	0%	30%	30%	30%	
4.pitanje	**DA**	**NE**				
	75%	25%				
5.pitanje	**DA**	**NE**				
	70%	30%				

Tabela10

<u>Rezultati Ponovljene Ankete 2</u>:

Odeljenje VIIa:

1.pitanje	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
	9.53%	0%	28.56%	33.33%	19.05%	9.53%
2.pitanje	**a**	**b**	**c**			
	23.82%	38.09%	38.09%			
3.pitanje	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
	4.76%	4.76%	19.05%	33.33%	38.09%	
4.pitanje	**DA**	**NE**				
	90.47%	9.53%				
5.pitanje	**DA**	**NE**				
	66.67%	33.33%				

Tabela 11

Odeljenje VIIb:

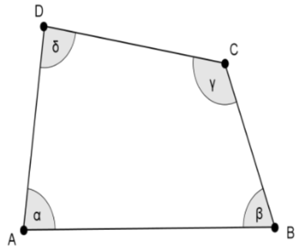
<table>
<tr><td rowspan="2">1.pitanje</td><td colspan="5">a</td><td colspan="5">b</td><td colspan="5">c</td><td colspan="5">d</td><td colspan="5">e</td><td colspan="5">f</td></tr>
<tr><td colspan="5">5.26%</td><td colspan="5">0%</td><td colspan="5">36.84%</td><td colspan="5">47.37%</td><td colspan="5">10.53%</td><td colspan="5">0%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.pitanje</td><td colspan="10">a</td><td colspan="10">b</td><td colspan="10">c</td></tr>
<tr><td colspan="10">15.79%</td><td colspan="10">31.58%</td><td colspan="10">52.63%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.pitanje</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">2</td><td colspan="6">3</td><td colspan="6">4</td><td colspan="6">5</td></tr>
<tr><td colspan="6">5.26%</td><td colspan="6">0%</td><td colspan="6">15.79%</td><td colspan="6">31.58%</td><td colspan="6">47.37%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.pitanje</td><td colspan="15">DA</td><td colspan="15">NE</td></tr>
<tr><td colspan="15">52.63%</td><td colspan="15">47.37%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5.pitanje</td><td colspan="15">DA</td><td colspan="15">NE</td></tr>
<tr><td colspan="15">84.21%</td><td colspan="15">15.79%</td></tr>
</table>

Tabela 12

5.2. 1ME-test - “*Pojam četvorougla*”

Učenik	
Odeljenje	
Grupa	

1) Dat je proizvoljan četvorougao *ABCD*. Dopuni rečenicu.

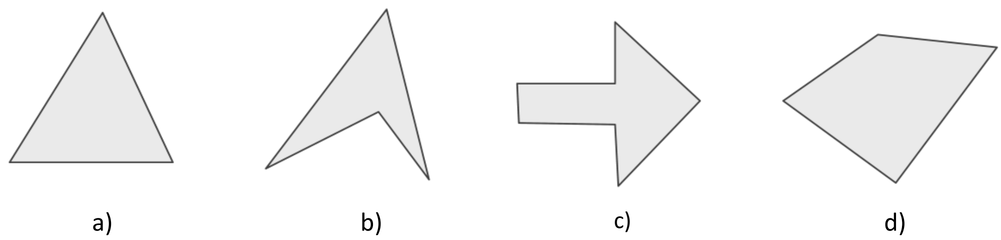


   a) Temena datog četvorougla su: ___________________________
   b) Stranice datog četvorougla su: ___________________________
   c) Uglovi datog četvorougla su: ___________________________
   d) Dijagonale četvorougla su: ______________________________

2) Dat je proizvoljan četvorougao *ABCD* iz 1.) zadatka. (Zaokružiti tačan odgovor.)

   a) *AD* i *AB* su susedne stranice. DA NE
   b) *AD* i *CB* su naspramne stranice. DA NE
   c) ∢ *DAB* i∢ *ABC* su susedni uglovi. DA NE
   d) ∢DAB i ∢ *BCD* su naspramni uglovi. DA NE

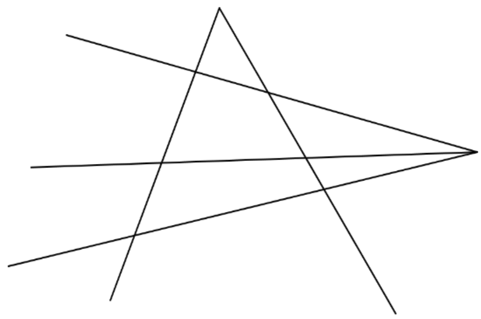
3) Mnogougao (figura) je **konveksan** ako za **svake dve** njegove tačke *X* i *Y* važi da duž *[XY]*, koju one određuju, cela pripada tom mnogouglu. U suprotnom, mnogougao je **nekonveksan**.



Konveksne figure su figure koje se nalaze pod: _________________________
Nekonveksne figure su figure koje se nalaze pod: _______________________

4) Koliko četvorouglova možeš da uočiš na slici?
   Zaokružiti tačan odgovor.

   a) 1 b) 3 c) 6



Analiza zadataka 1ME – testa

1. zadatak: ovaj zadatak ne bi trebalo da predstavlja problem učenicima oba odeljenja pošto su se sreli sa tim delom gradiva u nižim razredima, kao npr.: pojam mnogougla (trouglovi, četvorouglovi) kao i oznakama ovih mnogouglova (temeni, stranice, uglovi, dijagonale). Ovaj zadatak pomaže učenicima da se prisete gore navedenih pojmova.
2. zadatak: pošto su se u nižim razredima sreli sa ovim pojmovima drugi zadatak služi za proveru njihovog znanja o susednim i naspramnim stranicama četvorougla. Kao i u prvom zadatku posmatrajući sliku učenici ne bi trebalo da imaju poteškoća u rešavanju ovog zadatka koji se odnosi na susedne i naspramne uglove.
3. zadatak: Kako bi lakše rešili ovaj zadatak data je definicija konveksne i nekonveksne figure. Prikazane su različite figure, i potrebno je da razlikuju konveksne od nekonveksnih figura. Takođe sa pojmom konveksnosti su se sreli u petom razredu, odnosno da se razlikuju konveksne od nekonveksnih figura. Ovaj zadatak je za podsećanje da bi znali odrediti koji četvorouglovi su konveksni a koji nekonveksni.
4. zadatak: da bi učinici znali tačno nabrojati sve četvorouglove, treba da raspoznaju konveksne i nekonveksne četvorouglove. Rešen prethodni zadatak može pomoći u rešavanju ovog zadatka.

- **Rezultati 1ME – testa za temu *“Pojam četvorougla”***

Kontrolno odeljenje VIa

U VIa razredu ima ukupno 11 devojčica i 12 dečaka

Odeljenje	**VIa**			
Broj učenika	23			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Grupa-5 Ukupno (5)	80%	70%	60%	40%
	62.86%			
Grupa-4 Ukupno (6)	79.17%	70.83%	33.33%	33.33%
	54.76%			
Grupa-3 Ukupno (5)	55%	60%	60%	0%
	58.33%			
Grupa-2 Ukupno (7)	46.43%	71.43%	42.86%	28.57%
	47.96%			
Ukupan prosek odeljenja	**57.53%**			

Tabela 13

Eksperimentalno odeljenje VIb

Odeljenje	**VIb**			
Broj učenika	21			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
A-grupa	95.83%	100%	100%	100%
Ukupno (6)	**98.48%**			
B-grupa	90%	100%	100%	0%
Ukupno (5)	**87.27%**			
C-grupa	85%	75%	100%	0%
Ukupno (5)	**76.36%**			
D-grupa	70%	80%	80%	0%
Ukupno (5)	**69.09%**			
Ukupan prosek odeljenja	**83.55%**			

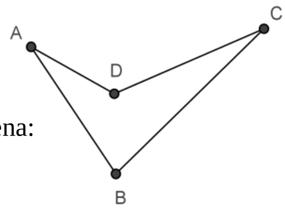
Tabela 14

U kontrolnom odeljenju na dan testiranja svi učenici su bili prisutni. U prvom zadataku smo očekivali bolje rezultate, jer su se učenici sreli sa tim delom gradiva već u prethodnim razredima. Međutim očekivani rezultat nije postignut zbog teškoća kod dopunjavanja uglova i dijagonala datog četvorougla. Rezultati pokazuju da su grupe-3 za 4% bolje uradili test od grupe-4, tj. 58.33% i za njih možemo reći da im se dopao ovaj način rada. Zanimljivo je da je grupa-2 najbolje uradila (71.43%) zadatak 2, ali nisu pokazali bolje rezultate u ostalim zadacima. Vidi se da su rezultati veoma različiti za četvrti zadatak, grupa-3 uopšte nije znao da ga reši. Na prvi pogled zadatak deluje jednostavno za rešavanje, zbog toga su užurbano rešavali zadatak i nisu primetili da osim konveksnih četvorouglova postoje i nekonveksni četvorouglovi. Uglavnom prema ukupnom proseku odeljenja (**57.53%**) možemo zaključiti da su prvi test uspešno uradili.

U eksperimentalnom odeljenju na dan testiranja svi učenici su bili prisutni. Rezultati su jako dobri u svim grupama, jedino kod zadatka 4 bio je isti problem kao kod kontrolnog odeljenja. Ovaj zadatak je bio najteži u oba odeljenja. Grupa-D je slabije uradila test od ostalih grupa, moguće da je razlog tome bio da u toj grupi nije bilo učenika sa ocenom pet iz matematike. Ukupan prosek odeljenja je (**83.55%**) pokazuje da je test pozitivno delovao na učenike i imao je pozitivan efekat u oba odeljenja. Napomenimo još da su rezultati bolji u odeljenju VIb verovatno zato što su radili u grupama.

5.3. 2ME-test - *“Uglovi četvorougla”*

Učenik	
Odeljenje	
Grupa	

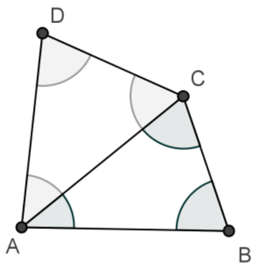


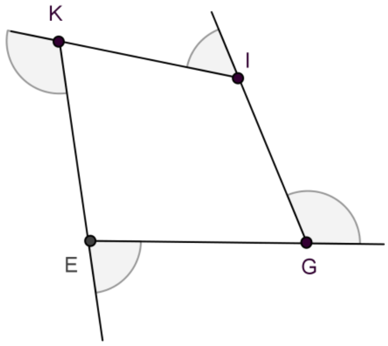
1) Dopuni rečenicu :
   a) Konveksni unutrašnji uglovi četvorougla *ABCD* sa slike desno su kod temena: ______________________________
   b) a nekonveksni unutrašnji uglovi su: ____________________________

2) Odgovori na sledeće pitanje.
   a) Koliko unutrašnjih dijagonala ima **konveksan** četvorougao? _________________________
   b) Koliko unutrašnjih dijagonala ima **nekonveksan** četvorougao? _______________________
   c) Koliko spoljašnjih dijagonala ima **konveksni** četvorougao? ___________________________
   d) Koliko spoljašnjih dijagonala ima **nekonveksni** četvorougao? ________________________
   e) Na koliko najviše načina se može podeliti **konveksni** četvorougao na dva trougla? ________
   f) Na koliko najviše načina se može podeliti **nekonveksni** četvorougao na dva trougla? _______

3) Zaokruži odgovor:
   Zbir sva tri unutrašnja ugla proizvoljnog trougla jednak je: a) 90° b) 180° c) 360° d) 120°
   Zbir sva tri spoljašnja ugla proizvoljnog trougla jednak je: a) 275° b) 90° c) 360° d) 180°
   Zbir svih zajedno, i unutrašnjih i spoljašnjih uglova trougla je: a) 180° b) 2x180° c) 3x180° d)4x180°

4) Dati su proizvoljni četvorougli *ABCD* i *EGIK*.





Zbir unutrašnjuh uglova *ABCD* četvorougla je ___________.

Zbir spoljašnjih uglova konveksnog *EGIK* četvorougla je _______.

5) Izračunaj uglove α i γ četvorougla *ABCD*, ako je β=67° i δ=120°, dok je spoljašnji ugao kod temena *C* γ_1=77° (nacrtaj crtež).

Analiza zadataka 2ME - testa

1.zadatak: učenici treba da se podsete gradiva iz petog razreda. Zapravo ovaj zadatak služi za ponavljanje o konveksnim i nekonveksnim uglovima. Data je slika *ABCD* četvorougla gde je potrebno odrediti konveksne i nekonveksne uglove.

2.zadatak: Na prethodnom času, odnosno na nastavnim jedinicama *Pojam četvorougla* su usvojili pojam konveksne i nekonveksne četvorougle, kao i pojam dijagonala četvorougla, takođe naučili su da crtaju dijagonale četvorougla, prema tome treba da znaju zadatke pod a), b), c) i d). Zadaci e) i f) služe za izražavanje logičkog mišljenja učenika, odnosno prema povučenim dijagonalama četvorougla se može rešiti ovaj zadatak.

3.zadatak: U prvom polugodištu šestog razreda učili su zbir unutrašnjih uglova trougla kao i zbir spoljašnjih uglova. Da bi tačno odgovorili na prvo i drugo pitanje treba samo da se podsete gradiva iz prvog polugodišta. Na treće pitanje lako mogu tačno odgovoriti ako jednostavno saberu zbirove unutrašnjih i spoljašnjih uglova, naravno i ovde mogu pogrešiti ako pogrešno sabiraju ili ne znaju odgovore na prethodna dva pitanja.

4.zadatak: Dat je prvi četvorougao *ABCD* tako da je podeljen na dva trougla i označeni su svi unutrašnji uglovi kao pomoć učenicima da dođu do zaključka kako se računa zbir unutrašnjih uglova četvorougla.

Na drugoj slici dat je četvorougao *EGIK* i svi njegovi spoljašnji uglovi, učenici treba da se podsete da je zbir unutrašnjeg i odgovarajućeg spoljašnjeg ugla jednak je 180° (ovo je već poznato za njih iz gradiva uglovi trougla iz šestog razreda) i pojam suplmentnih uglova treba primeniti na sva četiri ugla.

Na osnovu ovog zadatka učenici usvajaju novo gradivo, odnosno dve teoreme koji se odnosi na uglove četvorougla.

5.zadatak:na osnovu datog ugla β , δ i γ_1učenici mogu da nacrtaju *ABCD* četvorougao. Učenici treba da se podsete činjenice da je zbir unutrašnjeg i odgovarajućeg spoljašnjeg ugla konveksnog četvorougla jednak 180° (to je već poznato iz šestog razreda kad su učili uglove trougla), može se izračunati unutrašnji ugao γ. Na kraju ostaje samo da izračunaju ugao α na osnovu stečenog znanja o zbiru unutrašnjih uglova četvorougla. U najgorem slučaju, ako učenik nema ideju kako da nacrta četvorougao postoji mogućnost da izračuna γ ugao, naravno u tom slučaju treba da zna napamet da je zbir unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod jednog temena četvorougla jednak opruženom uglu tj. 180° . Na kraju treba da izračuna α ugao i na taj način kada zna sve uglove može da nacrta četvorougao.

- **Rezultati 2ME – testa za temu *“Uglovi četvorougla”***

Kontrolno odeljenje VIa

U VIa razredu ima ukupno 11 devojčica i 12 dečaka. Na dan testiranja jedna devojčica je bila odsutna.

Odeljenje	**Via**				
Broj učenika	22				
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
Grupa-5	40%	63.33%	100%	40%	30%
Ukupno (5)	**60%**				
Grupa-4	0%	86.11%	72.22%	33.33%	0%
Ukupno (6)	**53.33%**				
Grupa-3	0%	46.67%	53.33%	30%	0%
Ukupno (5)	**33.33%**				
Grupa-2	0%	58.33%	55.55%	33.33%	0%
Ukupno (6)	**38.89%**				
Ukupan prosek odeljenja	**46.36%**				

Tabela 15

Eksperimentalno odeljenje VIb

Na dan testiranja u VIb dva dečaka su bili odsutni.

Odeljenje	**VIb**				
Broj učenika	19				
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
A-grupa	83.33%	83.33%	100%	100%	50%
Ukupno (6)	**84.44%**				
B-grupa	25%	45.83%	100%	50%	0%
Ukupno (4)	**48.33%**				
C-grupa	87.5%	100%	100%	50%	0%
Ukupno (4)	**78.33%**				
D-grupa	0%	40%	100%	60%	0%
Ukupno (5)	**40%**				
Ukupan prosek odeljenja	**63.86%**				

Tabela 16

Na ovom testu u VIa razredu jedan učenik je bio odsutan iz grupe-2. Od prvog zadatka očekivali smo da će učenici znati da ga reše, jer je ovaj zadatak sadržao ponavljanje konveksnih i nekonveksnih uglova iz petog razreda, a rezultati pokazuju da se nisu sećali. Sve grupe su uradile sa najlošijim uspehom, osim grupe-5 svi su dobili 0%. Nije samo ovaj zadatak bio težak njima, nego su iste rezultate imali i za peti zadatak. U ovom zadatku učenici se nisu snašli prilikom crtanja datog ABCD četvorougla, koji je imao zadate vrednosti β i δ, na primer nisu obratili pažnju na to da je ugao δ tup, isto tako nisu

uspeli da izračunaju unutrašnji ugao γ pomoću γ_1 spoljašnjeg ugla (zbir unutrašnjeg i odgovarajućeg spoljašnjeg ugla jednak je 180°). Osim grupe-5 sve grupe su dobili 0%. Drugi zadatak je bio za ponavljanje gradiva sa prethodnih časova (ME1). Možemo prema rezultatima zaključiti da je grupa-2 bolje uradila od grupe-3, a grupe-4 je bolje uradila od grupe-5, to znači da je većina naučila pojam o konveksnim i nekonveksnim figurama pomoću ME testa sa prethodnog časa. Grupa-2 bolje je uradila treći zadatak od grupe-3, i u ostalim grupama više od polovine učenika je znalo da odredi zbir unutrašnjih uglova trougla kao i zbir spoljašnjih uglova trougla. Ovaj zadatak sa jedne strane je bio da se podsete učenici na te pojmove, a sa druge strane da se ti pojmovi iskoriste u zadatku 4, koji jesadržao i novo gradivo časa. Na žalost u svim grupama manje od polovina učenika je svhatilo kako treba zadatak 4 rešiti. Ukupan prosek odeljenja je manje od polovine (**46.36%**), to je slab uspeh,koji je rezultat loše rešenog prvog i petog zadatka.
Na istom testu u VIb razredu dva učenika je bila odsutna, po jedan iz grupe-B i iz grupe-C. Međutim u odnosu na VIa u ovom odeljenju boljih rezultata imamo za prvi zadatak, najbolje su znali grupa-C i grupa-A, a najlošije grupa-D (vidi se da u ovoj heterogenoj grupi nije bilo nikog sa ocenom pet na polugodištu). Treći zadatak je bio najlakši na osnovu uspeha (100%), svi su znali zbir unutrašnjih uglova trougla i zbir spoljašnjih uglova trougla. Peti zadatak kao što smo malo pre rekli i u ovom odeljenju je bio jako težak. Osim grupe-A niko nije znao tačno da uradi ovaj zadatak. Problem je bio isti kao u odeljenju VIa. Ukupan prosek odeljenja (**63.86%**) pokazuje da je više od polovine učenika znala drugi ME test. Ovaj metod sa grupnim radomje bio uspešan i topokazuje rezultat eksperimentalne grupe u odnosu na kontrolnu grupu.

5.4. 3ME-test - *“Paralelogram”*

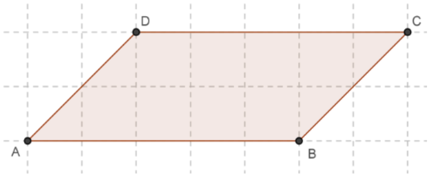
Učenik	
Odeljenje	
Grupa	

Dopuni šta nedostaje ili zaokruži.

1) Četvorougao je _____________ (upisati figuru) koji ima _____ stranice i _____ ugla.
Zbir (unutrašnjih) uglova konveksnog četvorougla iznosi ________.
Zbir spoljašnjih uglova konveksnog četvorougla je _______. (Spoljašnje uglove definišemo samo za konveksne poligone.)
Dva ugla su uzajamno komplementna ako je njihov zbir: a) 180° b) 90° c) 360°
Dva ugla su uzajamno suplementna ako im je zbir: a) 180° b) 90° c) 360°

2) **Paralelogram** je četvorougao čije su oba para naspramnih stranica paralelne. Koristeći oznaku „∥“ napiši koje su naspramne stranice paralelne za paralelogram sa slike.

____



Svojstva paralelograma:

3) Uporediti stranice (vidi sliku pod 2.): a) AB < CD b) AB > CD c) AB = CD
Zaokruži tačan odgovor!
a) AD < BC b) AD > BC c) AD = BC

Oba para naspramnih stranica paralelograma su __________________.

Uporediti uglove (vidi sliku 2.): a) ∢DAB <∢BCD b) ∢DAB >∢BCD c) ∢DAB = ∢BCD

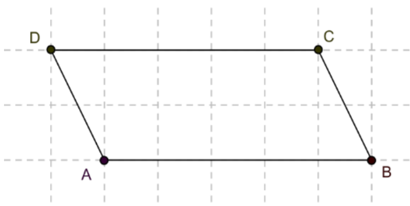
a) ∢ABC <∢CDA b) ∢ABC >∢CDA c) ∢ABC = ∢CDA

Naspramni uglovi paralelograma su _______________, a **susedni uglovi** su ___________________.

4) Docrtaj dijagonale na crtežu desno, i označi njihov presek sa S.

Uporediti duži: a) SA < SC b) SA > SC c) SA = SC
a) BS < SD b) BS > SD c) BS = SD

Dijagonale paralelograma se _______________.



Analiza zadataka 3ME - testa

1.zadatak:ovaj zadatak ima za cilj da učenici ponove gradivo sa prethodnog časa, a dva poslednja pitanja služe da se prisete naučenog iz petog razreda.

2.zadatak: Data je definicija paralelograma i oznaka paralelnosti „ ||“ pomoću koje treba da napišu koje naspramne stranice su paralelne. Za rešavanje ovog zadatka za pomoć imaju jedan ABCD paralelogram koji je nacrtan na kvadratnoj mreži. Pomoću ovog zadatka učenici usvajaju definiciju paralelograma.

3.zadatak: u ovom zadatku učenici sami treba da odredu svojstsva paralelograma. Prvo treba da se uporedu stranice tog četvorougla pomoću “*Podudarnosti trougla*” i tako dokažu da su naspramne stranice jednake. Druga svojstsva se odnose na uglove. Treba da se podsete usvojenih pojmova iz petog razreda kao što su „*Uglovi na transverzali*“ i „*Uglovi sa paralelnim kracima*” (njihova jednakost ili suplementnost). Na osnovu ove osobine uglova učenici treba da izvedu nove zaključke koji se odnose na uglove paralelograma.

4.zadatak: dat je paralelogram čije dijagonale treba docrtati i označiti njihov presek. Na osnovu slike treba odrediti kakav je odnos dijagonala. Nastavnik će na času koristeći podudarnost određenih trouglova u celosti objasniti rešenje zadatka.

Na osnovu 2, 3 i 4 zadatka učenici usvajaju pojam paralelograma i njegova svojstva.

- **Rezultati 3ME –testa -*“Paralelogram”***

Kontrolno odeljenje VIa

Na dan testiranja u VIa razredu dve devojčice su bile odsutne.

Odeljenje	**Via**			
Broj učenika	21			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Grupa-5	78.57%	100%	78.57%	81.25%
Ukupno (4)	**81.25%**			
Grupa-4	73.81%	66.67%	83.33%	58.33%
Ukupno (6)	**73.33%**			
Grupa-3	57.14%	40%	48.57%	40%
Ukupno (5)	**49%**			
Grupa-2	52.38%	16.67%	69.05%	45.83%
Ukupno (6)	**53.33%**			
Ukupan prosek odeljenja	**63.33%**			

Tabela 17

Eksperimentalne odeljenje VIb

Na dan testiranja u VIb razredu jedan dečak je bio odsutan.

Odeljenje	**VIb**			
Broj učenika	20			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
A-grupa	100%	66.66%	80.95%	100%
Ukupno (6)	**90%**			
B-grupa	100%	75%	85.72%	87.5%
Ukupno (4)	**90%**			
C-grupa	88.57%	100%	85.72%	65%
Ukupno (5)	**84%**			
D-grupa	100%	100%	85.72%	100%
Ukupno (5)	**95%**			
Ukupan prosek odeljenja	**89.75%**			

Tabela 18

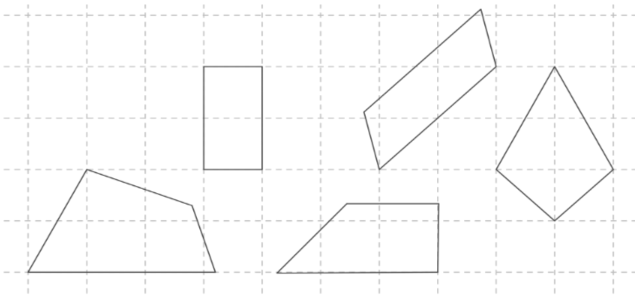
Na dan testiranja u VIa razredu dve učenice su bile odsutne iz grupe-5 igrupe-2. Prvi zadatak imao je za cilj da se učenici podsete na gradivo sa prethodnog časa (test 2ME) i imao jedan deo za podsećanje iz petog razreda. Rezultati su pokazali da su naučili teoreme sa prethodnog časa, ali gde su slabiji učenici pogrešili to je bilo kod određivanja komplementnih i suplementnih uglova (iz petog razreda). U drugom zadataku očekivali smo bolje rezultate kod grupe-3 i grupe-2, jer bi učenici trebalo da znaju šta su naspramne stranice kod četvorougla i samo koristeći znak paralelnosti mogli su jednostavno da urade zadatak, ali nekako znak „‖” je pomalo zbunio učenike. U grupi-5 nisu imali problem da ga reše. U trećem i u četvrtom zadatku su rezultati jako različiti, ali bio je lak za rešavanje u oba odeljenja. Imamo jedan interesantan ukupan prosek u grupi-2 to je da su bolje uradili test od grupe-3 i vidi se da se ovoj grupi dopao ovakav način rada . Što se tiče ukupnog proseka odeljenja (**63.33%**) možemo zaključiti da je ovaj metod učenja veoma povoljan za sve grupe.

U VIb razredu na času jedan učenik je bio odsutan iz grupe-B. Možemo reći da su skoro svi učenici u grupama znali da reše prvi zadatak, što pokazuje da ono što su naučili na prethodnom času (test 2ME) bilo je uspešno. Po rezultatima ovaj zadatak je bio najlakši za učenike, a ni ostali nisu bili teški, pošto su veoma uspešno uradili. Interesantno je da u odnosu na VIa ovde učenici nisu bili zbunjeni videvši znak paralelosti. Ukupan prosek odeljenja je **89.75%**, opet su bolji uspeh osvojili od kontrolnog odeljenja.

5.5. 4ME-test - *“Vrste paralelograma”*

Učenik	
Odeljenje	
Grupa	

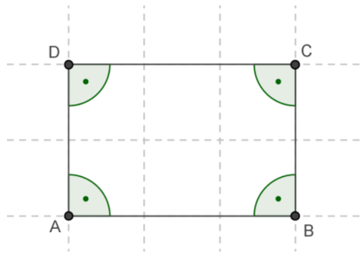
1) Obojiti četvorouglove koji su paralelogrami.



2) Zaokružiti tačne odgovore.

   a) Paralelogram je četvorougao čija su oba para naspramnihstranica paralelni.
   b) Oba para naspramnih uglovaparalelogramasu podudarni, a susedni suplementni.
   c) Četvorougao čijisu oba paranaspramnihuglovapodudarni ilisusedniuglovisu suplementni, nije paralelogram.
   d) Oba para naspramnih stranica paralelograma su podudarni.
   e) Dijagonale paralelograma su podudarne.
   f) Dijagonale paralelograma se polove.

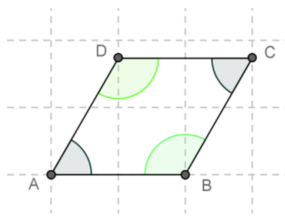
3) Paralelogram čiji su **svi uglovi pravi** naziva se **pravougaonik**.
   Uporediti stranice: a) AB > CD b) AB < CD c) AB = CD
   a) AD > BC b) AD < BC c) AD = BC



   Docrtaj dijagonalepravougaonika na crtežu desno.
   Uporediti duži: a) AC > BD b) AC < BD c) AC = BD

   Dijagonale pravougaonika su ___________________.

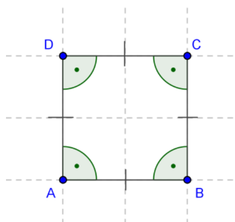
4) Paralelogram čije su **sve stranice jednake** naziva se **romb**.
   Uporediti uglove: a) DAB∢> BCD∢ b) DAB∢< BCD∢ c) DAB∢ = BCD∢
   d) ABC∢> CDA∢ b) ABC∢< CDA∢ c) ABC∢ = CDA∢



   Docrtaj dijagonale pravougaonika na crtežu desno.
   Uporediti duži: a) AC = BD b) AC ≠ BD

5) Paralelogram čije su **sve stranice jednake** i **svi uglovi pravi** naziva se **kvadrat**.

   Zadatak: Izračunati površinu kvadrata, čiji je O = 32 cm!



Analiza zadataka 4ME - testa

1.zadatak: na prethodnom času usvojili su definicije paralelograma, prema tome trebalo bi da prepoznaju koji od njih je paralelogram.

2.zadatak:služi da se obnovi definicija i svojstva paralelograma sa prethodnog časa.

3.zadatak: Data je definicija pravougaonika i dat je crtež pravougaonika na kvadratnoj mreži. Crtež služi učenicima kako bi odredili odnos između stranica, naravno treba iskoristiti osobine paralelograma za stranice (u trećem razredu su se već sreli sa pojmom pravougaonika kao geometrijski oblik). Da bi mogli odrediti odnos dijagonala pravougaonika potrebno je da nacrtaju dijagonale i na osnovu dobijenih odgovarajućih trougla mogu koristiti „*Podudarnost trougla*“.

4.zadatak: Dat je crtež i data je definicija romba. Kako bi odredili odnose među uglovima treba da se podsete svojstva paralelograma za uglove ili na teži način da podeli romb na dva trougla dijagonalama i korišćenjem„*Podudarnost trougla*“ može odrediti odnos datih uglova.

5.zadatak: Dat je crtež i data je definicija kvadrata, gde su označeni uglovi i jednake stranice sa crtom. Sa kvadratom kao geometrijski oblik upoznali su se u nižim razredima, gde su naučili kako se izračunava površina i obim kvadrata. Problem je u tome da ne znaju vrednost stranice *a* ali to se lako može dobiti iz datog obima. Posle izračunavanja stranice *a* jednostavno mogu završiti zadatak.

U 3, 4 i 6 zadatku uvedeno je novo gradivo, gde su učenici naučili definicije pravougaonika, romba i kvadrata i usvojili su njihovo obeležje i svojstva.

- **Rezultati 4ME – testa za temu *“Vrste paralelograma”***

Kontrolno odeljenje VIa

Odeljenje	**Via**				
Broj učenika	23				
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
Grupa-5	100%	100%	92%	100%	30%
Ukupno (5)	**89.41%**				
Grupa-4	100%	75%	93.33%	95.83%	41.67%
Ukupno (6)	**84.31%**				
Grupa-3	100%	90%	64%	65%	20%
Ukupno (5)	**69.41%**				
Grupa-2	92.86%	78.57%	57.14%	57.14%	14.28%
Ukupno (7)	**61.34%**				
Ukupan prosek odeljenja	**75.19%**				

Tabela 19

Eksperimentalno odeljenje VIb

Na dan testiranja u VIb razredu jedan dečak je bio odsutan.

Odeljenje	**VIb**				
Broj učenika	20				
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
A-grupa	100%	100%	100%	100%	83.33%
Ukupno (6)	**98.04%**				
B-grupa	100%	100%	100%	100%	87.5%
Ukupno (4)	**98.53%**				
C-grupa	100%	100%	100%	100%	100%
Ukupno (5)	**100%**				
D-grupa	100%	83.33%	100%	100%	100%
Ukupno (5)	**94.12%**				
Ukupan prosek odeljenja	**97.65%**				

Tabela 20

Rezultati 4ME – testa -*“Vrste paralelograma”*

Na testu 4ME u VIa odeljenju svi su bili prisutni. Kontrolna grupa veoma lepo je uradila ovaj test. Grupa-5, grupa-4 i grupa-3 znali sutačno da reše prvi zadatak, uspešno su usvojili definiciju paralelograma sa prethodnog časa (iz testa 3ME), pošto su tačno obojili paralelograme od datih četvorougla, doku grupi-2 samo jedan učenik nije znao potpuno da reši taj zadatak. Isto tako i drugi zadatak je služio za ponavljanje gradiva sa prethodnog časa i možemo zaključiti da je u svakoj grupi više od tri četvrtine učenika naučila definiciju i svojstva paralelograma. Ovaj zadatak najbolje je uradila grupa-5 sa 100%, dok grupa-3 i a grupa-2 je bolje uradila od grupe-4. Iz toga se vidi da su pojedinci iz grupe-4 malo popustili. Treći i četvrti zadatak sadrži novo gradivo, odnosno definicije pravougaonika i romba. Sve grupe su uspešno uradile oba zadatka i nisu bili teški za njih. Dok peti zadatak po rezultatima je najlošiji, manje od polovine učenika je znala da ga reši. Problem je bio da se učenici nisu snašli u izračunavanju stranice kvadrata iz datog obima.

Na testu 4ME u VIb odeljenju jedan učenik je bio odsutan iz grupe-B. Naime, skoro svaki zadatak je 100% rešen u grupama. Zaključujemo da su naučili definicije i svojstva paralelograma sa prethodnog časa (3ME) i uspešno su usvojili novo gradivo, odnosno definiciju pravougaonika i romba. Mođemo primetiti da su grupa-A i grupa-B imali sličan problem kao u VIa odeljenju, ali osim toga više od polovina učenika je znala dareši ovaj zadatak. Posebno grupa-D (gde nema učenika sa ocenama 5 iz matematike) znala tačno da uradi zadatak. Ovaj rad do sada je veoma uspešan u eksperimentalnom odeljenju. Na osnovu rezultata možemo zaključiti da je i u ovom slučaju grupni rad pokazao bolje rezultate, odnosno **97.65%** prema 79.95%.

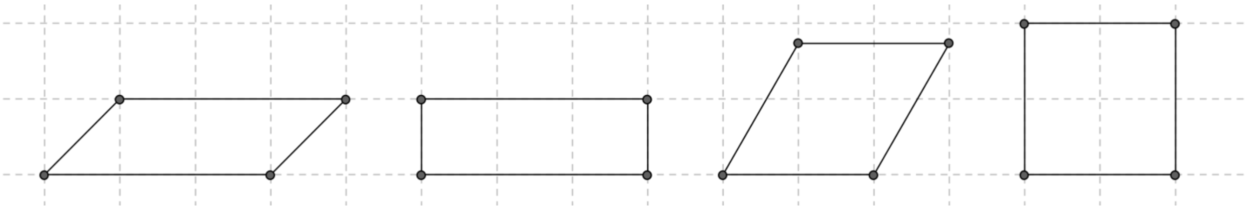
5.6. 5ME-test - *“Paralelogram i simetrije”*

Učenik	
Razred	
Odeljenje	

1) Na predviđena mesta upiši jednu od reči “paralelogram” , “pravougaonik”, “romb”, ili “kvadrat”, naravno u odgovarajućem padežu, tako da dobijene rečenice budu **što opštija** tačna tvrđenja.

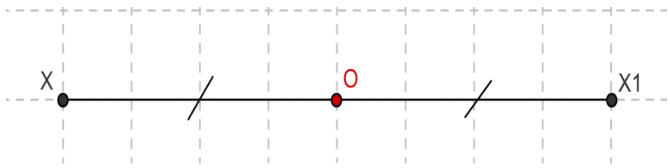
   a) U svakom ____________________ sve stranice su jednake.
   b) Susedni uglovi svakog ____________________ su suplementni.
   c) Naspramne stranice svakog ____________________ su jednake dužine i paralelne.
   d) Dijagonale svakog ____________________________ se polove, jednake su dužine i međusobno normalne.
   e) Dijagonale svakog ____________________________ se polove i jednake su dužine.

2) Nacrtati sve ose simetrija paralelograma, pravougaonika, romba i kvadrata. (slika 1.)



slika 1.

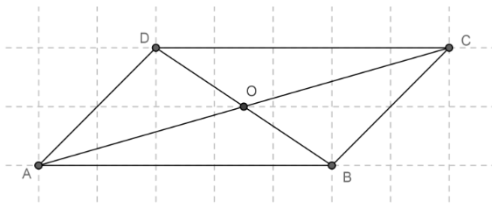
3) Za tačku X_1 kažemo da je je **centralnosimetrična** tački X u odnosu na tačku O ukoliko je O središte duži XX_1. (slika 2.)
Preslikavanje skupa tačaka ravni u isti taj skup tačaka koje pridružuje svakoj tački X njenu centralnosimetričnu tačku naziva se **centralna simetrija**.



slika 2.

Zadatak: Neka je O presek dijagonala paralelograma $ABCD$. (slika 3.)
Dopuni šta nedostaje. Centralnom simetrijom u odnosu na tačku O:

a) duž AB se preslikava u ______________________________;
b) duž BC se preslikava u ______________________________;
c) duž AC se preslikava u ______________________________;
d) duž OB se preslikava u ______________________________;
e) ΔABO se preslikava u ______________________________;
f) ΔABC se preslikava u ______________________________;
g) ΔBCO se preslikava u ______________________________;
h) ΔABD se preslikava u ______________________________;
i) ΔBCD se preslikava u ______________________________.



slika 3.

Analiza zadataka 5ME - testa

1.zadatak: obnavljenje, odnosno utvrđivanje naučenih pojmova, vrste i svojtsva paralelograma sa prethodnog časa.

2.zadatak: da bi uradili zadatak treba da se podsete "*pojma osne simetrije u ravni*", iz petog razreda.

3.zadatak: cilj ovog zadatka je da se učenici upoznaju sa pojmom centralne simetrije, kao i sa pojmom centralnosimetrične figure.

Pomoću ovog zadatka bi trebali učenici da shvate da je paralelogram jedna centralnosimetrična figura.

- **Rezultati 5ME – testa za temu *"Paralelogram i simetrije"***

Kontrolno odeljenje VIa

Na dan testiranja u VIa razredu tri devojčice i dva dečaka su bili odsutni.

Odeljenje	**Via**		
Broj učenika	18		
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**
Grupa-5	50%	37.5%	61.11%
Ukupno (4)	**52.78%**		
Grupa-4	48%	30%	60%
Ukupno (5)	**50%**		
Grupa-3	28%	25%	60%
Ukupno (5)	**43.33%**		
Grupa-2	30%	18.75%	61.11%
Ukupno (4)	**43.05%**		
Ukupan prosek odeljenja	**47.22%**		

Tabela 21

Eksperimentalno odeljenje VIb

Na dan testiranja u VIb razredu dve devojčice i dva dečaka su bili odsutni.

Odeljenje	**VIb**		
Broj učenika	17		
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**
A-grupa	60%	43.75%	41.66%
Ukupno (4)	**47.22%**		
B-grupa	20%	50%	22.22%
Ukupno (4)	**27.77%**		
C-grupa	25%	25%	41.66%
Ukupno (4)	**33.33%**		
D-grupa	20%	0%	53.33%
Ukupno (5)	**32.22%**		
Ukupan prosek odeljenja	**34.97%**		

Tabela 22

Rezultati 5ME – testa za temu *"Paralelogram i simetrije"*

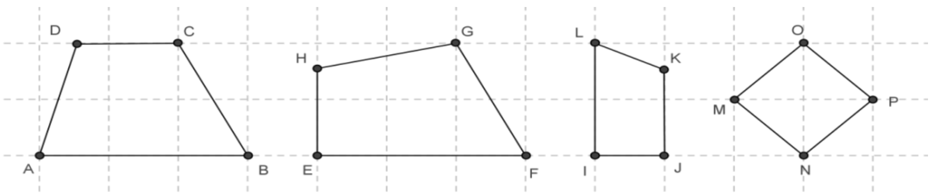
Na dan testiranja u kontrolnom odeljenju pet učenikaje bilo odsutno, jedan iz grupe-5 i grupe-4, a tri iz grupe-2 . Prvi zadatak je odrađen sa slabijim uspehom od očekivanog, to je bilo zapravo obnavljanje gradiva koje se odnosilo na vrste paralelograma iz testa 4ME. Učenici u ovom zadatku nisu bili potpuno pažljivi zato je dalo samo malo učenika tačne odgovore.Drugi zadatak je najlošije urađen, nisu se setili osne simetrije iz petog razreda. Dok treći zadatak su znali najbolje, to je bilo novo gradivo tog časa. Po rezultatima vidimo da su u svim grupama više od polovine učenika shvatilo pojam centralne simetrije i ovaj deo je bio interesantan za njih, posebno za grupu-2 koji su osvojili isti rezultat kao grupa-5, i bolje su uradili taj zadatak od grupe-4 i grupe-3.

U eksperimentalnom odeljenju četiri učenika je bilo odsutno, dvoje iz grupe-A, po jedan iz grupe-B i iz grupe-C. Prvi zadatak i u ovom odeljenju bio je težak, možemo reći da su u grupi-A više od polovine učenika znala da uradi taj zadatak. U ostalim grupama skoro samo jedna petina je znala da ga reši. Problem je bio da npr. kod jednog podzadatka pisali su više odgovora umesto jednog. Drugi zadatak i u ovom odeljenju je bio najteži, nisu se sećali pojma osne simetrije. Treći zadatak nisu uspeli da reše tačno i lošije urađen čak i od slabijih grupa (grupa-3 i grupa-2) u kontrolnom odeljenju. U ovom slučaju kontrolno odeljenje je pokazao bolji uspeh od eksperimentalnog, tj. **47.22%** u odnosu na **33.03%**.

5.7. 6ME-test - “*Trapez*”

Učenik	
Odeljenje	
Grupa	

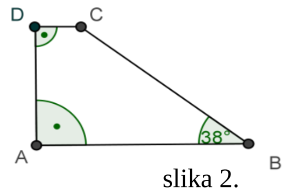
1) Za četvorougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica kažemo da je **trapez**.
   Paralelne stranice trapeza nazivamo **osnovice**, a preostale dve stranice **kraci** tog trapeza.
   Obojiti četvorouglove koji su trapezi! (slika 1.)



slika 1.

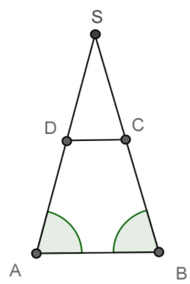
2) Za trapez kažemo da je **pravougli** ako je jedan njegov krak normalan na osnovice.(slika 2)
   Ako je u pravouglom trapezu *ABCD* (∢*BAD* = ∢ *ADC* = 90°), ∢ *ABC* = 38° , onda je ∢ *BCD* jednak:______.

   Zaokružiti tačan odgovor.
   Uglovi trapeza koji naležu na isti krak su a) suplementni
   b) komplementni
   c) jednaki



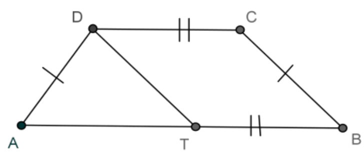
slika 2.

3) Dopuniti dokaz sledećeg tvrđenja:
   Kraci *AD* i *BC* trapeza *ABCD* su podudarni ako i samo ako su uglovi na osnovici podudarni, tj. ∢ *BAD*≅ ∢ *ABC*⇔*AD*≅*BC* .
   Dopuniti dokaz ovog tvrđenja.
   Dokaz za smer(⇒)
   Neka je ∢*BAD*≅ ∢ *ABC* za trapez *ABCD* i neka je *S* presek pravih ___ i ___(slika 3.). Kako je *AB* paralelno sa *DC* , to je ∢ ____≅ ∢ *BAD* ≅ ∢ *ABC*≅ ___(zapisati uglove trougla Δ*CDS*). Trougao *CDS* je __________ pa je _____≅ ____(zapisati stranice trougla). I trougao *ABS* je _________, pa je *AS* =____.
   Dakle, *AD* = ________________ = *BC*.



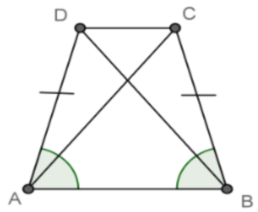
slika 3.

   Dokaz za smer (⇐)
   Neka je *AD* ≅ *BC* i neka je *T* tačka veće osnovice *AB* trapeza *ABCD* za koju je *DC* ≅ *TB* (slika 4). Tada je četvorougao *TBCD* ___________, pa je *DT* ≅ ____. Kako su stranice ____ i ____ trougla *ATD* podudarne , trougao *ATD* je ______, pa ______≅ _____ (zapisati uglove Δ*ATD*). Kako je ∢*DTB*≅ 180°- ∢*DTA* i ∢*DTB* = 180° - ∢*CBT*, zaključujemo da su _____ ≅ _____ ≅ ____ tj. uglovi na osnovici trapeza *ABCD* su podudarni.



slika 4.

Trapez sa podudarnim kracima (i podudarnim uglovima na osnovici) naziva se **jednakokraki.**



slika 5.

4) Dokazati da su dijagonale jednakokrakog trapeza **jednake**. (slika 5.)
   (Dokazati podudarnost nekih trouglova)

Analiza zadataka 6ME - testa

1.zadatak: učenici se upoznaju sa novim gradivom, odnosno sa definicijom trapeza. Cilj zadatka je da se korišćenjem te definicije od datih četvorouglaprepoznaju koji su trapezi.
2.zadatak: učenici se upoznaju sa definicijom pravouglog trapeza, koji je jedna od vrsta trapeza. U prvom delu zadatka date su veličine uglova, traba izračunati četvrti ugao, odnosno ∢BCD. Tu bi trebalo da se podsete znanja o zbiru unutrašnjih uglova četvorougla. U drugom delu zadatka lako se može zaključiti da su uglovi trapeza na isti krak suplementni, sa tim pojmom su se već sreli u petom razredu i na 3ME testu je bio zadatak za podsećanje.
3.zadatak: Pre date definicije jednakokrakog trapeza učenici dopunjuju dokaz datog tvrđenja. Za pomoć imaju crteže, kao i nepopunjen tekst koji služi za lakše dokazivanje teoreme.
4.zadatak: Pomoću slike 5. i definicije jednakokrakog trapeza, treba da se uoče koja su ta dva trougla pomoću kojih se može dokazati da su dijagonale jednakokrakog trapeza jednake.

- **Rezultati 6ME – testa za temu *"Trapez"***

Kontrolno odeljenje VIa

Na dan testiranja u VIa razredu dve devojčicei jedan dečak su bili odsutni.

Odeljenje	**Via**			
Broj učenika	20			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Grupa-5	70%	60%	55%	20%
Ukupno (5)	**55%**			
Grupa-4	90%	20%	38%	0%
Ukupno (5)	**39%**			
Grupa-3	50%	60%	17%	0%
Ukupno (5)	**22%**			
Grupa-2	70%	20%	11%	0%
Ukupno (5)	**16%**			
Ukupan prosek odeljenja	**33%**			

Tabela 23

Eksperimentalno odeljenje VIb

Odeljenje	**VIb**			
Broj učenika	21			
Zadatak	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
A-grupa	100%	100%	80.83%	100%
Ukupno (6)	**85.81%**			
B-grupa	100%	100%	58%	0%
Ukupno (5)	**65.18%**			
C-grupa	100%	100%	60%	80%
Ukupno (5)	**69.63%**			
D-grupa	100%	100%	49%	0%
Ukupno (5)	**58.52%**			
Ukupan prosek odeljenja	**70.55%**			

Tabela 24

Rezultati 6ME – testa za temu *"Trapez"*

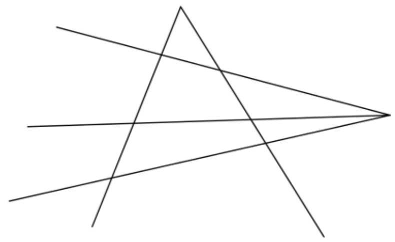
U VIa odeljenju tri učenika je bilo odsutno na dan testiranja, jedan iz grupe-4 i dva iz grupa-2. Prvi zadatak je sadržao definiciju trapeza, iz rezultata se vidi da su shvatili definiciju trapeza i uspešno su prepoznali trapeze od datih četvorouglova. Grupa-2 je bolje uradila od grupe-3, a grupa-4 je bolja od grupe-5. Kod drugog zadatka u grupi-4 mnogi učenici su pomešali suplementne i komplementne uglove, i nisu dobili tačnu vrednost unutrašnjeg četvrtog ugla trapeza. U grupi-2 većina nije ni probala da reši ovaj zadatak. Što se tiče grupe-3 oni su bolje uradili ovaj zadatak od grupe-4. Treći zadatak je

bio iznenađenje za njih jer do sada nisu radili zadatak koji su sami trebali da dokažu. Malo su se uplašili od tog zadatka bez obzira na to da su imali pomoć sa slike. Sa najmanjim uspehom četvrti zadatak je rešen, taj zadatak je bio naporan za njih, jer je prethodni zadatak bio isto tako težaks tim da kod ovog zadatka nije bilo pomoći i zato nisu ni počeli da ga rešavaju. U ovom odeljenju do sada ovaj test je bilo najteži i nije se dopao učenicima. Ukupan prosek odeljenja je **33%**.
Na testu u VIb odeljenju svi učenici su bili prisutni. Sve grupe su tačno uradili prvi i drugi zadatak, nisu imali taj problem kao što su imali učenici u VIa odeljenju. U trećem zadatku samo na početku su imali mali strah. Pošto su radili u grupama mogli su da se diskutuju o rešavanju zadatka i rezultati pokazuju da su dobro uradili ovaj dokaz. U skoro svakoj grupi više od polovine učenika je znala rešiti ovaj zadatak. Ni njima nije bio lak ovaj zadatak i pri kraju zadatka su već bili umorni i zato grupa-B i grupa-D nisu ni probali da ga reše.Samogrupa-A je znala tačno rešenje za ovaj zadatak a u grupi-D tri četvrtine učenika. Ovo odeljenjeje imao veoma dobar ukupan prosek, **70.55%**.

5.8. Prvi kontrolni (Provera usvojenog znanja iz pripremne faze)

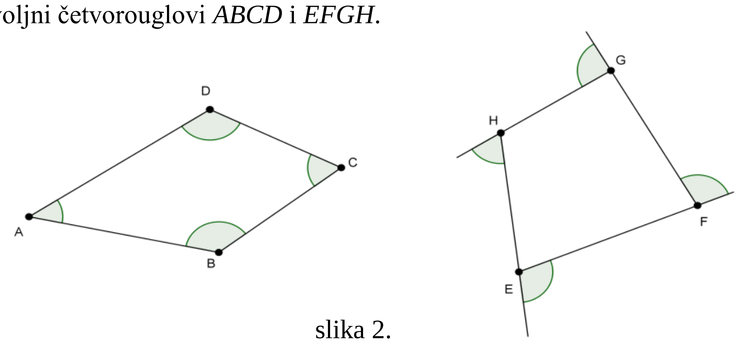
Ime:______________________

1) Koliko četvorouglova možeš da uočiš na slici 1.?



slika 1.

2) Date su proizvoljni četvorouglovi *ABCD* i *EFGH*.



slika 2.

a) Zbir uglova ABCD četvorougla je __________. (slika 2.)
b) Zbir spoljašnjih uglova konveksnog četvorougla EFGH je ________. (slika 2.)

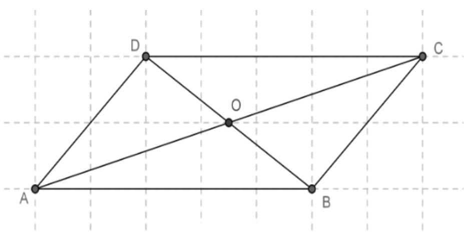
3) Neka je *ABCD* paralelogram. Koje osobine paralelograma koje se odnose na uglove i stranice paralelograma znas? Navedi ih što više.

4) Izračunati površinu kvadrata, čija je O = 36 cm.

5) Neka je O presek dijagonala paralelograma *ABCD.* (slika 3.)

Dopuni šta nedostaje.
Centralnom simetrijom u odnosu na tačku O:

a) duž BC se preslikava u _____________________________;
b) duž AC se preslikava u _____________________________;
c) ΔABD se preslikava u _____________________________;
d) ΔBCO se preslikava u _____________________________.



slika 3.

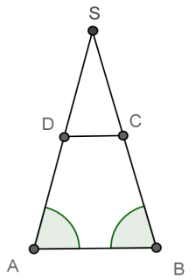
6) Dopuniti dokaz sledećeg tvrđenja:

Kraci AD i BC trapeza $ABCD$ su podudarni ako i samo ako su uglovi na osnovici podudarni, tj.$\measuredangle BAD \cong \measuredangle ABC \Leftrightarrow AD \cong BC$.

Dopuniti dokaz ovog tvrđenja.

Dokaz za smer($\Rightarrow$)

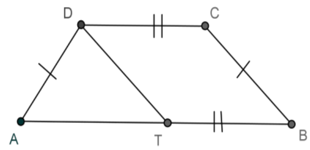
Neka je $\measuredangle BAD \cong \measuredangle ABC$ za trapez $ABCD$ i neka je S presek pravih ____ i ____ . (slika 4). Kako je AB paralelno sa DC , to je$\measuredangle$ ____$\cong \measuredangle BAD \cong \measuredangle ABC \cong$ ____ (zapisati uglove trougla ΔCDS). Trougao CDS je ______________ pa je _____$\cong$ ____ (zapisati stranice trougla). I trougao ABS je____ __________, pa je AS =____. Dakle, AD = ________________ = BC.



slika 4.

Dokaz za smer ($\Leftarrow$)

Neka je $AD \cong BC$ i neka je T tačka veće osnovice AB trapeza $ABCD$ za koju je$DC \cong TB$. (slika 5) Tada je četvorougao $TBCD$ ______________, pa je $DT\cong$ ____. Kako su stranice ____ i ____ trougla ATD podudarne , trougao ATD je ______, pa ______$\cong$ ______ (zapisati uglove ΔATD). Kako je $\measuredangle DTB \cong 180°- \measuredangle DTAi\measuredangle DTB = 180° - \measuredangle CBT$, zaključujemo da su _____ $\cong$ _____ $\cong$ ____ tj. uglovi na osnovici trapeza $ABCD$ su podudarni.



slika 5.

<u>Rezultati provere usvojenog znanja za 1ME-6ME-testove</u>

Kontrolno odeljenje VIIa:

Na dan kontrolnog jedan dečak i jedna devojčica su bili odsutni.

<table>
<tr><td>Odeljenje</td><td colspan="10">VIIa</td></tr>
<tr><td>Broj učenika</td><td colspan="10">21</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Zadatak</td><td rowspan="2">1.</td><td colspan="2">2.</td><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">4.</td><td colspan="4">5.</td><td rowspan="2">6.</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa-5 Ukupno (6)</td><td rowspan="2">66.7%</td><td>66.7%</td><td>100%</td><td rowspan="2">62.5%</td><td rowspan="2">16.7%</td><td>100%</td><td>83.3%</td><td>83.3%</td><td>100%</td><td rowspan="2">47.5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">83.33%</td><td colspan="4">91.67%</td></tr>
<tr><td colspan="10">61.38%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa-4 Ukupno (3)</td><td rowspan="2">66.7%</td><td>66.7%</td><td>100%</td><td rowspan="2">50%</td><td rowspan="2">33.3%</td><td>100%</td><td>66.7%</td><td>100%</td><td>100%</td><td rowspan="2">55%</td></tr>
<tr><td colspan="2">83.33%</td><td colspan="4">91.67%</td></tr>
<tr><td colspan="10">63.33%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa-3 Ukupno (4)</td><td rowspan="2">80%</td><td>25%</td><td>50%</td><td rowspan="2">0%</td><td rowspan="2">0%</td><td>25%</td><td>0%</td><td>50%</td><td>25%</td><td rowspan="2">34%</td></tr>
<tr><td colspan="2">40%</td><td colspan="4">45%</td></tr>
<tr><td colspan="10">33.33%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa-2 Ukupno (8)</td><td rowspan="2">62.5%</td><td>37.5%</td><td>25%</td><td rowspan="2">6.3%</td><td rowspan="2">0%</td><td>50%</td><td>25%</td><td>50%</td><td>37.5%</td><td rowspan="2">12.5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">31.3%</td><td colspan="4">40.6%</td></tr>
<tr><td colspan="10">25.52%</td></tr>
<tr><td>Ukupan prosek odeljenja</td><td colspan="10">49.36%</td></tr>
</table>

Tabela 25

Eksperimentalno odeljenje VIIb:

Na dan kontrolnog jedan dečak je bio odsutan.

<table>
<tr><td>Odeljenje</td><td colspan="10">VIIb</td></tr>
<tr><td>Broj učenika</td><td colspan="10">20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Zadatak</td><td rowspan="2">1.</td><td colspan="2">2.</td><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">4.</td><td colspan="4">5.</td><td rowspan="2">6.</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>B</td><td>c</td><td>d</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa- 5 Ukupno (3)</td><td rowspan="2">100%</td><td>66.7%</td><td>66.7%</td><td rowspan="2">83.3%</td><td rowspan="2">83.3%</td><td>100%</td><td>100%</td><td>100%</td><td>66.7%</td><td rowspan="2">65%</td></tr>
<tr><td colspan="2">66.67%</td><td colspan="4">91.67%</td></tr>
<tr><td colspan="10">72.73%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa- 4 Ukupno (6)</td><td rowspan="2">33.3%</td><td>50%</td><td>16.7%</td><td rowspan="2">41.7%</td><td rowspan="2">16.7%</td><td>16.7%</td><td>33.3%</td><td>33.3%</td><td>16.7%</td><td rowspan="2">28.3%</td></tr>
<tr><td colspan="2">33.33%</td><td colspan="4">25%</td></tr>
<tr><td colspan="10">32.5%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa- 3 Ukupno (3)</td><td rowspan="2">66.7%</td><td>0%</td><td>100%</td><td rowspan="2">25%</td><td rowspan="2">0%</td><td>0%</td><td>33.3%</td><td>0%</td><td>0%</td><td rowspan="2">18.3%</td></tr>
<tr><td colspan="2">50%</td><td colspan="4">16.67%</td></tr>
<tr><td colspan="10">29.44%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupa- 2 Ukupno (8)</td><td rowspan="2">12.5%</td><td>12.5%</td><td>12.5%</td><td rowspan="2">15.6%</td><td rowspan="2">0%</td><td>12.5%</td><td>12.5%</td><td>12.5%</td><td>12.5%</td><td rowspan="2">3.7%</td></tr>
<tr><td colspan="2">12.5%</td><td colspan="4">12.5%</td></tr>
<tr><td colspan="10">12.06%</td></tr>
<tr><td>Ukupan prosek odeljenja</td><td colspan="10">33.96%</td></tr>
</table>

Tabela 26

U tabelama prikazani su rezultati po ocenama iz matematike na kraju šestog razreda u oba odeljenja. U kontrolnom odeljenju u grupi-5 biloje šest učenika, u grupi- 4 tri učenika, u grupi-3 pet učenika i u grupi-2 devet učenika. Dok u eksperimentalnom odeljenju u grupi-5 bilo je tri učenika, u grupi-4 šest učenika, u grupi-3 četiri i u grupi-2 osam učenika. Rezultati ovog kontrolnog zadatka pokazuju koliko su učenici usvojili naučenog gradiva u šestom razreduna 1ME-6ME testovimai koliko su razumeli te zadatke na 1ME-6ME testovima. Kontrolni zadaci su samostalno rađeni u oba odeljenja. Na dan kontrolnog u VIIa jedan učenik je bio odsutan iz grupe-3 i jedan iz grupe-2. U VIIb odeljenju jedan učenik je bio odsutan iz grupe-3.
Prvi zadatak je urađen sa slabijim uspehom u eksperimentalnom odeljenju, tj. grupa-4, grupa-3 i grupa-2 su lošiji u odnosu na iste grupe u kontrolnom odeljenju. Problem je bio isti kao i na 1ME testu, nisu sve četvorouglove uočili, nisu bili pažljivi, samo konveksne četvorouglove su uočili.U kontrolnom odeljenju u svim grupama su više od polovine učenika znali da urade zadatak, a najbolje je grupa-3, gde je 80% učenika dobro uradilo, dok u VIIb odeljenju grupa-5 je jedina grupa u oba odeljenja koja je znala tačno sve četvorouglove uočiti sa date slike. U drugom zadatku ponovo možemo nabrojati više grupa u kontrolnom odeljeju koji su bolje uradili taj zadatak u odnosu na grupe u eksperimentalnom odeljenju, tj. grupa-5, grupa-4 i grupa-2 su bolji po rezultatima u odnosu na iste grupe u VIIb odeljenju. Jako loše su uradili treći zadatak od očekivanog u grupi-3 i u grupi-2 u oba odeljenja, ove grupe su najlošije uradili četvrti zadatak, odnosno 0%. Nisu se setili kako da izračunaju stranicu kvadrata iz datog obima. Interesantno je da

su i grupe-4 jako loše uradili u oba odeljenja, dokje najbolje uradila grupa-5 u VIIb odeljenju, a ista grupa u VIIa je neočekivano loše uradila. Kod petog zadatka nema razlike između grupe-5 u oba odeljenja, i imaju isti prosek 91.67%. Možemo reći da su ostale grupe u VIIa imale bolje rezultate na ovom zadatku u odnosu na VIIb odeljenje. Peti zadatak je bio težak za oba odeljenja, bez obzira da su već radili taj dokaz na 6ME testu. Opet su se uplašili od dokaza i bilo je naporno za njih pošto je bio zadnji zadatak. Od grupa u oba odeljenja su najbolje uradili grupa-5 sa 65%. Konačno, grupa-5 u VIIb odeljenju je mnogo bolja od grupe-5 u VIIa, a ostale grupe u eksperimentalnom odeljenju lošije su uradili kontrolni u odnosu na učenike iz kontrolnog odeljenja sa istim ocenama. Ovaj kontrolni je VIIa bolje uradio od VIIb, tj. ukupan prosek je **49.36%** u odnosu na**33.96%** i možemo zaključiti da je samostalni rad efikasniji bilo od grupnog rada, bez obzira da su na testovima grupni rad dali bolje rezultate, ali na žalost učenici sa slabijim ocenom nisu poboljšali svoje ocene ni u jednom odeljenju. Isto tako možemo primetiti da jeu VIIa grupa-5 malo opustila. Pošto ovaj kontrolni nije bio po nastavnom planu i učenici su znali samo da će biti ponavljanje nekih delova iz šestog razreda, ovaj rezultat možemo pripisati i tome da je bio početak nove školske godine i nisu se spremali ozbiljno za ovaj kontrolni.

Literatura

[1] Bodroža-Pantić O.: Motivacioni testovi i njihova uloga u nastavi, Akreditovani program stručnog usavršavanja: *Kako da motivišemo učenike za matematiku*, Subotica 2009.-2012., materijal sa izlaganja.

[2] Bodroža-Pantić, O., Matić-Kekić, S., Jakovljev, B., Marković, Đ.: On MTE-Model of Mathematics Teaching: Studying the Problems Related to a Plane Division Using the MTE-model, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(2) (2008) 197-213.

[3] Bukara, S.: *Prednosti i mane kooperativnog pristupa učenju*, master rad, Beograd: Matematički Fakultet, (2012) 8-12.

[4] Cucić V.:*Један нови модел наставе математике у раду са децом са посебним потребама*, Diplomski rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-Matematički Fakultet, Novi Sad, 2009.

[5] Čorba, R.: *Mogućnost nekih obaveznih i nekih naprednih sadržaja iz matematike MTE-modelom nastave u prvom razredu srednje škole*, Master rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-Matematički Fakultet, Novi Sad, 2014.

[6] Davidson, N., Kroll D.: An Overview of Research on Cooperative Learning Related to Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5) (1991) 362-365.

[7] Davidson, N.: *Cooperative learning in mathematics*, Addison-Wesley Pub. Co., 1990.

[8] Džaferagić, A., Tomić, R.: *Kooperativno učenje u nastavi mlađih razreda osnovne škole*, Metodički obzori 7 (2) (2012), 107-117.

[9] Džaferagić, A., Tomić, R.: *Kooperativno učenje u nastavi mlađih razreda osnovne škole*, Tuzla: Filozofski fakultet, (2011) 11-13.

[10] Esmonde I.: Ideas and Identities: Supporting Equity in Cooperative Mathematics Learning, *Review of Educational Research* , 79(2)(2009) 1008-1043

[11] Gross Davids B.: Cooperative learning: Students working in small groups, *Stanfors University Newsletter on Teaching*, 10 (2) (2007) 1-4.

[12] Hoffman, M.: Collective learning in everyday mathematics classrooms, *Bethlehem: Liberty High School.* (2002) 2-11.

[13] Kraut, B.: *Strojarski priručnik,* Tehnička knjiga, Zagreb , 1954.

[14] Lalović, Z.: *NAŠA ŠKOLA, Metode učenja/nastave u školi,* Zavod za školstvo, Podgorica, (2009) 30-33.

[15] Marmila S., *Motivisanost učenika na času utvrđivanja gradiva u nastavi matematike za VII razred – Određivanje površine i obima kruga i njegovih delova*, Diplomski rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-Matematički Fakultet, Novi Sad, 2009.

[16] Middleton, J.A., Spanias Ph.A.: Motivation for achievement in mathematics: finding, generalisations, and Criticisms of research, *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (1) (1999) 65-88.

[17] Miletić, J.: Kooperativna ili saradnička nastava, *Obrazovna Tehnologija* 3 (2007) 60-63.

[18] Millard F. B., Jr.: *Principles of Engineering Mechanics, Volume 2 : Dynamics- The Analysis of Motion,*Springer,Science & Business Media, Inc.,USA , 2006.

[19] Orbán F.: *Mérnöki fizika*, Pécs: Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Kar , 2005. 60-74 .

[20] Pejanović G., *Motivisanost učenika na času utvrđivanja gradiva u nastavi matematike za VI razred – Određivanje površine četvorougla i trouglova*, Diplomski rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-Matematički Fakultet, Novi Sad, 2010.

[21] Perović J., Krmar J.: Geometrija masa, *Tangenta*, 55(3) (2009) 1-8.

[22] Slavin, R.: Cooperative Learning, *Review of Educational Research*, 50(2) (1980) 315-342.

[23] Slavin, R.: Cooperative Learning: Where Behavioral and Humanistic Approaches to Classroom Motivation Meet, *Elementary School Journal*, 88 (1) (1987) 29-37.

[24] Slavin, R.: Developmental and Motivational Perspectives on Cooperative Learning: A Reconciliation, *Child Development,* 58(5) (1987), 1161-1167.

[25] Slavin, R.: Comprehensive Approaches to Cooperative Learning, *Theory into Practice*, 38 (2) (1999) 74-79.

[26] Vilotijević, N.: Saradnička (Kooperativna) nastava, *Obrazovna Tehnologija* 1-2 (2007), 49-50, 249-63.

[27] Yackel E., Cobb P., Wood T., Small-group Interaction as a Source of Learning Opportunities in Second-grade Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(5)(1991) 390-408.

[28] Young H. D., Freedman R. A., *Sears and Zemansky University Physics,* Addison-Wesley, San Francisco, 2004.

[29] Žižić, B.: *Kurs opšte fizike-Fizička mehanika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

Biografija

Rođena sam 13.03.1988. u Bačkoj Topoli. Završala sam osnovnu školu Nikola Đurković u Feketiću. Kao vukovac upisala sam srednju medicinsku školu Dr Ružica Rip u Somboru na smer Farmaceutski tehničar. Nakon završene škole sa odličnim uspehom 2007. godine, upisala sam osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Profesor matematike. Studije sam završila 2013.godine i stekla zvanje Diplomirani profesor matematike. Nakon toga na istom fakultetu sam upisala master studije, smer Nastava matematike. U septembru te godine počela sam da radim u Oglednoj Osnovnoj Školi Adi Endre u Malom Iđošu, gde sam radila kao profesor matematike godinu i po dana. Nakon toga sam se preselila u Englesku, gde živim i sada.

Anita Pustai

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *Master rad*
VR
Autor: *Anita Pustai*
AU
Mentor: *dr Olga Bodroža-Pantić*
MN
Naslov rada*: Težište figura i sistema materijalnih tačaka - mogućnost izlaganja nekih delova ovog sadržaja u nastavi matematike u osnovnoj školi*
NR
Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *srpski/engleski*
JI
Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2016.*
GO
Izdavač: *Autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad*
MA
Fizički opis rada: 5/99/1/30/29/26/0
(broj poglavlja/strana/fotografija/slika/literatura/tabela/grafika)
FO
Naučna oblast: *Matematika*
NO

Naučna disciplina: *Metodika nastave matematike*
ND
Ključne reči: *motivacija, kooperativno učenje, težište*
PO
UDK
Čuva se: *Biblioteka Departmana za metematiku, PMF, Novi Sad*
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: *Implementacija jednog modifikovanog MTE-modela kroz kooperativno učenje u podučavanju matematike u osnovnoj školi.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *25.06.2014.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije: *Predsednik: dr Siniša Crvenković, redovni profesor, PMF, Novi Sad*
KO *Mentor:dr Olga Bodroža-Pantić, redovni profesor, PMF, Novi Sad*
Član: dr Petar Đapić, docent, PMF, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *Monograph type*
DT
Type of record: *Printed text*
TR
Contents Code: *Master thesis*
CC
Author: *Anita Pustai*
AU
Mentor: *dr Olga Bodroža-Pantić*
MN
Title: *The centroid- the possibility of presenting some parts of the content in math class in elementary school*
TI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *Serbian/English*
LA
Country of publication: *Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: 2016.
PY
Publisher: *Author's reprint*
PU
Publication place: *Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad, Serbia*
PP
Physical description: 5/99/1/30/29/26/0
(chapters/pages/photographs/pictures/references/tables/charts)
PD
Scientific field: *Mathematics*
SF
Scientific discipline: *Methodic of Mathematics*
SD
Key words: *motivation, cooperarive learning, centroid*

SKW
UC
Holding data:
Note:
N
Abstract: *The implementation of a modified MTE-model through cooperarive learning in mathematics teaching in the elementary school.*
AB
Accepted by the Scientific Board on*: June 25th 2014.*
ASB
Defended on:
DE
Thesis defend board:
DB
President: dr Siniša Crvenković, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad
Mentor: dr Olga Bodroža-Pantić, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: dr Petar Đapić, docent, Faculty of Science, Novi Sad