UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DAPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Andrea Karalić

Ulamovi nizovi

- Master rad -

Mentor: Prof. dr Bojan Bašić

Novi Sad, 2019.

Predgovor

Ovaj rad sastoji se od pet poglavlja. Prvo (uvodno) poglavlje sadrži definiciju Ulamovog niza, neka glavna pitanja i postignute rezultate vezane za ovaj niz. U drugom poglavlju definisano je proširenje pojma Ulamovog niza do pojma 1-aditivnih nizova. Takođe, definisane su i neke od ,,lepih" i bitnih osobina 1-aditivnih nizova, koje se nalaze u središtu posmatranja (period niza uzastopnih razlika, fundamentalna razlika, regularnost, asimptotska gustina). Navedena je, i dokazana, teorema koja daje potreban uslov da bi 1-aditivan niz bio regularan. Postavljena je i pretpostavka o tome koji 1-aditivni nizovi (sa kojim početnim članovima) su regularni. Ostatak rada izdeljen je na poglavlja po slučajevima ove pretpostavke. Treće i četvrto poglavlje predstavljaju dva pojedinačna slučaja pretpostavke, dok su preostala tri slučaja, o kojima nije mnogo poznato, spojena u jedno poglavlje. Svako od tih poglavlja sadrži teoreme, dokaze, ili samo pretpostavke, o regularnosti i ostalim ključnim osobinama datih nizova.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Bojanu Bašiću na pomoći i stručnim savetima prilikom pisanja rada. Takođe se zahvaljujem i članovima komisije, dr Anni Slivkovoj i dr Petru Đapiću na sugestijama i primedbama.

Najviše se zahvaljujem svojim roditeljlima, sestri Ivani i prijateljima, na neizmernoj podršci, pomoći i razumevanju.

Novi Sad, 2019. Andrea Karalić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Ulamov niz predstavljen je od strane poljsko-američkog matematičara Stanislava Ulama[1], 1964. godine, kao rastući niz prirodnih brojeva definisan jednostavnom aditivnom relacijom. Niz je zadat sa dva početna člana, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, dok se opšti član niza u_n, za $n \geq 3$, definiše kao najmanji prirodan broj veći od u_{n-1}, takav da se na jedinstven način može napisati kao suma dva različita prethodna člana niza. Odnosno, u_n, za $n \geq 3$, ja najmanji prirodan broj veći od u_{n-1} koji se na jedinstven način može predstaviti kao $u_n = u_i + u_j$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Ulamov niz obično se obeležava sa $(1, 2)$.

Dakle, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, treći član niza je 3 kao zbir 1 i 2, četvrti član je $4 = 1 + 3$ (4 se može napisati i kao $2 + 2$, ali računamo samo predstavljanja kao zbir različitih članova niza, prema tome 4 jeste član), 5 nije član niza jer $5 = 2 + 3 = 1 + 4$, pa je peti član 6, i tako dalje. Prvih 15 članova niza $(1, 2)$ su:
$1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, ...$

1.1 Rezultati istraživanja Ulamovog niza

Ulamov niz je niz sa beskonačno mnogo članova, s obzirom na to da za svaki prirodan broj postoji od njega veći koji se na jedinstven način može predstaviti kao zbir dva različita manja broja koji su članovi Ulamovog niza (Ulamovi brojevi), pa postoji i najmanji takav broj. Na primer, u_n je u najgorem slučaju $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Ovaj zaključak doveo je do otkrića jednog gornjeg ograničenja za opšti član niza, u_n. Naime, $u_n \leq F_n$, gde je F_n opšti član Fibonačijevog niza[2].

---

[1]Stanislav Marsin Ulam (1909 – 1984)

[2]Niz čiji su početni članovi $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$, dok je opšti član niza definisan kao zbir dva prethodna člana.

Glavno pitanje koje je Ulam postavio, kada je predstavio svoj niz, bilo je vezano za njegovu gustinu, tačnije, da li je asipmtotska gustina ovog niza veća od nule? Činilo se da je raspodela Ulamovih brojeva prilično nepravilna, te se očekivalo da gustina niza asimptotski teži ka nuli. Međutim, ispostavilo se da je situacija dosta komplikovanija. Eksperimantalna istraživanja, izračunavanje Ulamovih brojeva do bilion (10^{12}), pokazala su da gustina niza na početku opada, a kasnije se raspodela ustaljuje i gustina niza iznosi približno 0,073979.

Takođe, uočeno je da se, kada se niz usaglasi, članovi grupišu oko svaka 22 prirodna broja, a između njih su proredi (David Wilson[3]). Uz pomoć Furijeove analize niza, Stefan Steinerberger došao je do signala čija je ugaona frekvencija $\alpha \approx 2,5714474995$ (videti [8]), što odgovara talasnoj dužini $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 2,443443$. Kako λ iznosi približno $\frac{22}{9}$, znači da se članovi niza gomilaju na svakih 9 talasnih dužina.

Svi navedeni rezultati dobijeni su isključivo eksperimentalnim putem, nisu matematički dokazani. Čini se da je Ulamov niz prilično nepravilan i da nema neke ,,lepe" osobine. Promenom inicijalnih članova mogu se dobiti nizovi sa uređenijom strukturom.

[3]Za više informacija videti [4].

Glava 2

Regularnost

2.1 s-aditivni nizovi

Definicija 2.1.1. *Niz zadat sa dva početna člana s_1 i s_2 ($s_1 < s_2, s_1, s_2 \in \mathbf{N}$), čiji je opšti član s_n, za $n \geq 3$, definisan kao najmanji prirodan broj veći od s_{n-1} takav da se na tačno s načina može predstaviti kao $s_n = s_i + s_j$, gde je $1 \leq i < j \leq n-1$, naziva se s-aditivan niz.*

Ukoliko je vrednost za s iz gornje definicije baš 1, dobijamo 1-aditivan niz, čiji je opšti član s_n, za $n \geq 3$, definisan na isti način kao opšti član Ulamovog niza, s tim što početni članovi s_1 i s_2 mogu biti bilo koja dva prirodna broja. Dakle, promenom početnih članova možemo uopštiti pojam Ulamovog niza do pojma 1-aditivnog niza. 1-aditivan niz sa početnim članovima $s_1 = u$ i $s_2 = v$ označava se sa (u, v).

Definicija 2.1.2. *Niz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je periodičan ako postoji prirodan broj N takav da važi $a_{N+n} = a_n$, za svako $n \in \mathbf{N}$. Najmanji takav broj N zove se period niza $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Neka je $s_1, s_2, ..., s_n, ...,n \in \mathbf{N}$, 1-aditivan niz, tada je niz uzastopnih razlika tog niza $s_2 - s_1, s_3 - s_2, ..., s_{n+1} - s_n, ..., n \in \mathbf{N}$.

Definicija 2.1.3. *Za 1-aditivan niz $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ kažemo da je regularan ako je niz njegovih uzastopnih razlika periodičan, počevši od člana $s_{n_0+1} - s_{n_0}$, za neko $n_0 \in \mathbf{N}$. Odnosno, ako postoji prirodan broj N takav da je $s_{N+n+1} - s_{N+n} = s_{n+1} - s_n$, za svako $n \geq n_0$. Najmanji takav broj N je period niza uzastopnih razlika, a broj $D = s_{N+n} - s_n$, $n \geq n_0$, je fundamentalna razlika niza $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Potpuno ekvivalentna definicija bila bi da je niz $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ regularan ako se niz $\{s_n\}_{n=n_0}^{\infty}$, za neko $n_0 \in \mathbf{N}$, može napisati kao unija konačno mnogo aritmetičkih progresija.

Definicija 2.1.4. *Asimptotska gustina regularnog 1-aditivnog niza je količnik* $\frac{N}{D}$.

Posmatranjem prvih 10^{12} izračunatih članova Ulamovog niza (1,2) moglo bi se zaključiti da niz njegovih uzastopnih razlika ne postaje periodičan za dovoljno veliko $n \in \mathbf{N}$, što bi značilo da on verovatno nije regularan. Kod mnogih drugih 1-aditivnih nizova se takođe ne uočava pravilnost. Međutim, ako se posmatra niz (4,5), primećuje se da se njegovi članovi razdvajaju u segmente od po 32 člana, na osnovu periodičnosti niza uzastopnih razlika (isključujući tri člana u prvom segmentu, 4,14 i 24):

$\mathbf{4}, 5, 9, 13, \mathbf{14}, 17, 19, 21, \mathbf{24}, 25, 27, 35, 37, 43, 45, 47, 57, 67, 69, 73, 77, 83, 93,$
$101, 105, 109, 113, 115, 123, 125, 133, 149, 153, 163, 173$**-prvi segment**,

$197, 201, 205, 209, 211, 213, 217, 219, 227, 229, 235, 237, 239, 249, 259, 261, 265,$
$275, 285, 293, 297, 301, 305, 307, 315, 317, 325, 341, 345, 355, 365$**-drugi segment**,

$389, 393, 397, ...$ **-treći segment**.

Za niz uzastopnih razlika važi:
$4, 4, 4, 2, 2, 4, 2, 8, 2, 6, 2, 2, 10, 10, 2, 4, 4, 6, 10, 8, 4, 4, 4, 2, 8, 2, 8, 6, 4, 10, 10$ **-za prvi segment**,

$4, 4, 4, 2, 2, 4, 2, 8, 2, 6, 2, ...$ **-za drugi segment**.

Dakle, niz (4,5) jeste regularan. Period niza uzastopnih razlika iznosi $N = 32$, fundamentalna razlika $D = 192$, a asimptotska gustina je $\frac{1}{6} \approx 0,1667$.

Prve primere regularnih 1-aditivnih nizova otkrio je Queneau [9], to su bili nizovi $(2, v)$ za $v \in 5, 7, 9$. Steven Finch je 1991. godine, u radu [3], dokazao potreban uslov za regularnost 1-aditivnih nizova.

2.2 Potreban uslov za regularnost

Teorema 2.2.1. *(Finch) 1-aditivan niz sa konačno mnogo parnih članova je regularan.*

Dokaz:

Pretpostavimo da 1-aditivan niz $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ima p parnih članova, neka su to $x_1, x_2, ..., x_p$. Za svako $1 \leq k \leq p$ definiše se $y_k = \frac{x_k}{2}$. Za dati prirodan broj $n \geq y_p$, neka je b_n broj predstavljanja $2n + 1$ kao zbira dva člana niza, s_i i s_j, $i < j$. Kako je za svaki prirodan broj n, $2n + 1$ neparan broj, a neparan broj se može dobiti samo kao zbir dva broja od kojih je jedan paran, a drugi neparan, može se zaključiti da jedan od dva člana s_i i s_j, čiji je zbir $2n+1$, mora biti paran. Kako su jedini parni članovi $x_1, ..., x_p$, jedan od s_i i s_j mora biti jednak nekom $x_k, 1 \leq k \leq p$, odnosno:

$$2n + 1 = x_k + (2n - x_k + 1), 1 \leq k \leq p.$$

Dakle, ukoliko treba izračunati na koliko načina se može napisati $2n+1$ kao zbir dva različita člana niza, zapravo treba proći kroz sve k, $1 \leq k \leq p$, i prebrojati za koliko k će $2n - x_k + 1$ biti član datog niza. $2n - x_k + 1$ će biti član niza akko se može na jedinstven način napisati kao zbir dva različita člana niza, tj. akko je $b_{n-\frac{x_k}{2}} = b_{n-y_k} = 1$. Prema tome, b_n se može predstaviti kao:

$$b_n = \sum_{k=1}^{p} \delta(b_{n-y_k} - 1). \tag{2.1}$$

Kako sabirak u sumi treba da je jednak 1 ako je $b_{n-y_k} = 1$, a inače treba da je jednak 0, definiše se $\delta(0) = 1$, a $\delta(r) = 0$, za $r \neq 0$.

Dalje, za svako $n \geq x_p$ definiše se vektor sa y_p komponenti na sledeći način:

$$\beta_n = (b_{n-y_p}, b_{n-y_p+1}, b_{n-y_p+2}, ..., b_{n-1}).$$

Regularnost datog 1-aditivnog niza $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ekvivalentna periodičnosti niza vektora $\beta_{x_p}, \beta_{x_p+1}, ...$ (Na osnovu komponenti vektora koji čine dati niz procenjujemo, za sve neparne brojeve počevši od $2y_p+1$, da li su članovi niza $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ako je dati niz vektora periodičan, u svim vektorima koji se ponavljaju jedinice se nalaze na istim mestima, pa brojevi kojima odgovara prva po redu jedinica u svim tim vektorima čine aritmetičku progresiju, isto tako oni kojima odgovara druga jedinica itd. Takvih aritmetičkih progresija ima onoliko koliko ima jedinica u jednoj periodi niza vektora - konačno mnogo. Prema tome, niz $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, počevši od nekog člana može da se predstavi kao unija konačno mnogo aritmetičkih progresija, pa je regularan. Jasno, važi i obratno.)

Kako rekurzivna formula (2.1) važi za svako $n \geq y_p$, a ovde se posmatraju vektori β_n za $n \geq x_p = 2y_p$, pa za $n - y_p \geq 2y_p - y_p = y_p$ važi rekurzivna formula, kao i za $n - y_p + 1, n - y_p + 2, ...$ Iz nje se onda može zaključiti da su sve komponente svakog vektora β_n manje ili jednake p (suma može iznositi najviše p). Kako vektora dužine y_p čije komponente su nenegativne i manje ili jednake p ima konačno mnogo, u nizu $\beta_{x_p}, \beta_{x_p+1}, ...$ neko β_n se mora ponoviti. Preko rekurzivne formule sledi periodičnost.

•

Ovom teoremom dat je potreban uslov za regularnost 1-aditivnih nizova. Finch je dao i pretpostavku o tome koje klase 1-aditivnih nizova zadovoljavaju gore navedenu teoremu:

Pretpostavka 2.2.1. *(Finch)*

1. *Sledeći 1-aditivni nizovi imaju konačno mnogo parnih članova:*

   - $(2, v), v \geq 5$,
   - $(4, v)$,
   - $(u, v), u \geq 6$, *u paran broj,*
   - $(u, v), u \geq 7$ *neparan broj i v paran broj,*
   - $(5, 6)$.

   (U svim navedenim slučajevima u i v su uzajamno prosti.)

2. *Svi ostali 1-aditivni nizovi imaju beskonačno mnogo parnih članova.*

U narednim odeljcima biće analizirani slučajevi navedeni u pretpostavci. Takođe, biće izneti i rezultati vezani za period niza uzastopnih razlika, asimptotsku gustinu i fundamentalnu razliku.

Glava 3

Slučaj $(2, v)$, $v \geq 5$ neparan broj

3.1 Regularnost niza $(2, v), v \geq 5$ neparan broj

Teorema 3.1.1. *Za $v \geq 5$ neparan broj, 1-aditivan niz sa početnim članovima 2 i v ima tačno 2 parna člana, to su $s_1 = 2$ i $s_k = 2v + 2$. ($k = \frac{v+7}{2}$)*

Dokaz:
Za početak označi se sa S skup $S = \{s_1, s_2, s_3, ...\}$, a sa d, $d = 2v + 2$. Pretpostavimo suprotno. Neka je x najmanji paran broj iz S, veći od d. Pre nastavka dokaza biće navedeno nekoliko lema koje se koriste u dokazu.

Lema 3.1.1. *(Queneau) Posmatra se niz $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$:*

1. *Prvih $\frac{1}{2}(3v + 11)$ članova su:* $2, v, v + 2, v + 4, ..., 2v - 3, 2v - 1, 2v + 1, 2v + 2, 2v + 3, 2v + 5, ..., 3v - 4, 3v - 2, 3v, 3v + 4, 3v + 8, ..., 5v - 2, 5v + 2, 5v + 4, 5v + 10$.
2. *2 i d su jedini parni članovi ne veći od $8v + 8$.*

Više informacija može se naći u radu [9].

Lema 3.1.2. *Ako je $d < u < x$ neparan broj, tada je u član niza $(2, v)$ akko je tačno jedan od $u - 2$, $u - d$ član niza.*

Dokaz:
Kako je u neparan broj, može se predstaviti samo kao zbir dva broja različite parnosti, a kako je $d < u < x$ jedina dva parna člana niza koja su manja od u su 2 i d. Prema tome, u će biti član niza akko je tačno jedan od $u - 2$, $u - d$ član niza.

•

Lema 3.1.3. *Neka je r neparan broj takav da $1 \leq r < x - 2v$. Tada postoji $0 \leq i \leq v$ takvo da $r + 2i \in S$.*

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je r najmanji neparan broj za koji važi $1 \leq r < x - 2v$, i ne postoji traženo i, tj. $\{r + 2i : 0 \leq i \leq v\} \cap S = \emptyset$. Za r mora važiti $r \geq 3$, jer ako je $r = 1$, za $i = v$, $2v + 1 \in S$ na osnovu leme 3.1.1 (1). Kako $r + 2v$ i $r + 2(v - 1) = r + 2v - 2$ ne pripadaju S, iz prethodne leme sledi da ni $r+2v-d$ nije u S. Tada $\{r-2+2i : 0 \leq i \leq v\} = \{r-2, r, r+2, ..., r+2v-2\} = \{r-2\} \cup \{r, r+2, ..., r+2v-2\} \subseteq \{r-2\} \cup \{r, r+2, ..., r+2v-2, r+2v\} = \{r-2\} \cup \{r+2i : 0 \leq i \leq v\}$, a $\{r + 2i : 0 \leq i \leq v\} \cap S = \emptyset$, i $r - 2$ nije u S, pa važi $\{r - 2 + 2i : 0 \leq i \leq v\} \cap S = \emptyset$. Dakle, $r - 2$ je neparan broj za koji važi $1 \leq r - 2 < r < x - 2v$ i $\{r - 2 + 2i : 0 \leq i \leq v\} \cap S = \emptyset$, što je kontradiktorno sa minimalnošću r. (Da je izostavljena pretpostavka da je r minimalan, na isti način bi se izveo dokaz za $r - 2$, pa ako bi $r - 2$ bio najmanji takav, dokazalo bi se isto za $r - 4$, i dobila bi se kontradikcija, a ako nije, možda je $r - 4$ najmanji, itd. Iz tog razloga može se odmah na početku bez umenjenja opštosti pretpostaviti da je r baš najmanji takav.)

$\bullet$

Nastavak dokaza teoreme 3.1.1:

Na osnovu leme 3.1.1 (2) x mora biti veće od $8v + 8$. Neka x može da se predstavi kao $x = a+b$, $a < b$ i $a, b \in S$, neparni brojevi. Ako se u lemu 3.1.3 uvrsti $r = x - 3v$, dobija se da postoji $0 \leq i \leq v$ takvo da $x - 3v + 2i \in S$. Iz leme 3.1.1 (1) važi $\{3v - 2j : 0 \leq j \leq v\} \subseteq S$, pa kako $x - 3v + 2i \in S$ i $3v-2i \in S$ sledi da mora biti $a = 3v-2i$ i $b = x-3v+2i$. Pošto $x \in S$, mora biti predstavljeno kao zbir dva različita člana niza na tačno jedan način, sledi da $x - 3v + 2j \notin S$ za svako $0 \leq j \leq v$ i $j \neq i$. Dakle, tačno se zna koji od brojeva $x-3v, x-3v+2, ..., x-v-4, x-v-2, x-v$ su članovi niza. Nadalje se posmatraju brojevi $x-3v-2, x-3v-4, x-3v-6, ..., x-5v+2, x-5v, x-5v-2$. Brojevi oblika $x - 3v + 2j - d = x - 3v + 2j - 2v - 2 = x - 5v + 2j - 2$ pripadaju S akko tačno jedan od brojeva $x-3v+2j$ i $x-3v+2j-2$ pripada S. To se može zapisati na sledeći način:

1. ako je $0 \leq i < v$ i $0 \leq j \leq v$, tada $x - 3v + 2j - d \in S$ akko je $j = i$ ili $j = i + 1$,
2. ako je $i = v$ i $0 \leq j \leq v$, tada $x - 3v + 2j - d \in S$ akko je $j = v$ ili $j = 0$.

- **Slučaj** $0 \le i < v$

  Za početak biće pokazano da nijedan od $x-3v+2i-d$, $x-3v+2i-d+2$ nije jednak ni a, ni b, ni $\frac{x}{2}$, odnosno $\{x-3v+2i-d, x-3v+2i-d+2\} \cap \{a, b, \frac{x}{2}\} = \emptyset$.

  1. $\{x-3v+2i-d, x-3v+2i-d+2\} \cap \{a\} = \emptyset$

     Ako se pretpostavi da je $x-3v+2i-d = a$, onda:

     $$x-3v+2i-d = 3v-2i,$$

     $$x-3v+2i-2v-2 = 3v-2i,$$

     $$x = 8v-4i+2.$$

     Ako je $x-3v+2i-d+2 = a$, onda:

     $$x-3v+2i-d+2 = 3v-2i,$$

     $$x-5v+2i = 3v-2i,$$

     $$x = 8v-4i < 8v-4i+2.$$

     Kada se posmatraju oba slučaja zajedno, dolazi se do zaključka da je $x \le 8v-4i+2$, što je kontradiktorno sa činjenicom da je $x > 8v+8$.

  2. $\{x-3v+2i-d, x-3v+2i-d+2\} \cap \{b\} = \emptyset$
     Važi $x-3v+2i-d < x-3v+2i-d+2 = x-3v+2i-(2v+2-2) = x-3v+2i-2v < x-3v+2i = b$.

  3. $\{x-3v+2i-d, x-3v+2i-d+2\} \cap \{\frac{x}{2}\} = \emptyset$
     Pretpostavimo prvo da je $x-3v+2i-d = \frac{x}{2}$. Tada je $\frac{x}{2} = 3v-2i+d = 5v-2i+2$ i iz tvrđenja (1), iz dokaza ove teoreme, sledi da pripada S. Onda je $x-3v+2i-d+2 = \frac{x}{2}+2 \in S$, tj. $5v-2i+4 \in S$. Na osnovu leme 3.1.1 (1) $5v-2i+2, 5v-2i+4 \in S$ samo za $i=0$, a tada važi $x = 2(5v-2i+2) = 10v+4$, pa se x može zapisati kao $x = (5v-6)+(5v+10)$, što je još jedno predstavljanje za x ($5v-6, 5v+10 \in S$ zbog leme 3.1.1 (1)).

Ako pretpostavimo da je $x - 3v + 2i - d + 2 = \frac{x}{2} \in S$, sledi da je $\frac{x}{2} = 3v + 2i + d - 2 = 5v - 2i \in S$. Onda $x - 3v + 2i - d = \frac{x}{2} - 2 = 5v - 2i - 2 \in S$. Znači, $5v - 2i, 5v - 2i - 2 \in S$, što po lemi 3.1.1 (1) nije moguće ni za jedno i, $0 \leq i < v$.

Time je pokazano $\{x - 3v + 2i - d, x - 3v + 2i - d + 2\} \cap \{a, b, \frac{x}{2}\} = \emptyset$. Iz (1) sledi:

$$x - 3v + 2i - d = x - (3v - 2i + d) \in S,$$

pa i $\{3v - 2i + d\} \cap \{a, b, \frac{x}{2}\} = \emptyset$, što znači da $3v - 2i + d \notin S$, jer bi inače x imalo više predstavljanja.

Isto tako,

$$x - 3v + 2i - d + 2 = x - (3v - 2i + d - 2) \in S,$$

te $\{3v - 2i + d - 2\} \cap \{a, b, \frac{x}{2}\} = \emptyset$. Sledi, $3v - 2i + d - 2 \notin S$.

Kako $3v - 2i + d, 3v - 2i + d - 2 \notin S$, iz leme 3.1.2 sledi $3v - 2i + d - d = 3v - 2i \notin S$, a to je kontradikcija sa lemom 3.1.1 (1). Prema tome, prvi slučaj otpada.

- **Slučaj** $i = v$

  Ako se u (2) uvrsti $j = 0$ dobija se da važi $x - 3v - d \in S$. Iz leme 3.1.1 (1) $3v + d = 5v + 2 \in S$, pa je $x = x - 3v - d + 3v + d = (x - 3v - d) + (5v + 2)$, što je još jedno predstavljanje za x različito od $x = a + b$. (U ovom slučaju $a = v$ i $b = x - v$, pa $5v + 2 \neq v$, i $5v + 2 \neq x - v$, jer je inače $x = 6v + 2$, što je nemoguće jer $x > 8v + 8$. Dakle, $5v + 2 \notin \{a, b\}$, pa i $x - 3v - d \notin \{a, b\}$.)

  Kako $x \in S$, preostaje samo mogućnost da su to polovine broja x, tj. $x - 3v - d = 5v + 2$. Ali, ako se sada uvrsti $j = 1$ u (2) sledi $x - 3v + 2j - d \notin S$, tj. $x - 3v - d + 2 = 5v + 2 + 2 = 5v + 4 \notin S$, što je kontradikcija sa lemom 3.1.1 (1).

Ovim je teorema 3.1.1 dokazana.

•

3.2 Period, fundamentalna razlika i gustina

Rezultati vezani za period niza uzastopnih razlika i fundamentalnu razliku datog niza dobijeni su posmatranjem niza $a_0^n, a_1^n, a_2^n, ...$, gde je $a_0^n = 0$, $a_1^n = a_2^n = ... = a_{n-1}^n = 1$ i $a_{n+k}^n = a_{n+k-1}^n + a_k^n$ po modulu 2, $k \geq 0, n \geq 2$. Ovaj niz je periodičan, njegov period označava se sa $p(n)$, a sa $q(n)$ broj jedinica među $a_1^n, a_2^n, ..., a_{p(n)}^n$.

Uočeno je da $2k - 2 + v \in S$ akko $a_k^{v+1} = 1$. Iz teoreme 3.1.1 sledi da za $v \geq 5$ neparan broj, $D(v) = 2p(v+1)$ i $N(v) = q(v+1)$.

Posledica 3.2.1. *Neka je $v \geq 5$ neparan broj. Tada je $N(v) \leq 2^v$, $D(v) \leq 2^{v+2} - 2$ i $\Delta(v) = \frac{N(v)}{D(v)} \geq \frac{1}{2}(v+1)$.*

Granice navedene u posledici 3.2.1 dostižu se za $v = 5$. U specijalnim slučajevima mogu se odrediti tačne vrednosti za $N(v)$ i $D(v)$.

Teorema 3.2.1. *Ako je $m \geq 3$, tada je $N(2^m - 1) = 3^m - 1$ i $D(2^m - 1) = 2(4^m - 1)$.*

Dokaz:

Da bi se dokazala teorema potrebno je najpre dokazati rekurziju $p(2^{r+1}) = 4p(2^r) + 3$ i $q(2^{r+1}) = 3q(2^r) + 2$, $r \geq 1$. Ovo se jednostavno pokazuje, ukoliko se pre toga pokaže da, ako je $m = 2^r$, $n = 2^{r+1}$, $k = in + j$, $0 \leq i, j < n$, važi:

$$a_k^n = \begin{cases} a_{im+j}^m, & i, j < m \\ a_{im+j-m}^m, & i < m \leq j \ \wedge \ (i,j) \neq (0,m) \\ a_{(i-m)m+j}^m, & j < m \leq i \ \wedge \ (i,j) \neq (m,0) \\ 0, & m \leq i, j \\ 1, & (i,j) = (0,m) \ \vee \ (i,j) = (m,0) \end{cases}$$

Dokaz navedenog tvrđenja izvodi se uz pomoć matematičke indukcije. Ideja koja u značajnoj meri olakšava izvođenje i praćenje dokaza, jeste da se elementi nizova $\{a_k^m\}$ i $\{a_k^n\}$, $m = 2^r, n = 2^{r+1}, (k = im+j, odnosno\, k = in+j)$, poređaju u tabele dimenzija $m \times m$ i $n \times n$. Na primer, ako je $r = 2$, tada je $m = 4$ i $n = 8$, tabele izgledaju ovako:

0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0

0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

U tabeli levo ispisani su članovi niza $\{a_k^4\}$, do a_{15}^4, a u tabeli desno članovi niza $\{a_k^8\}$ do a_{63}^8. U prvoj vrsti i prvoj koloni nalaze se članovi kod kojih je $i = 0, j = 0$, u prvoj vrsti i drugoj koloni oni kod kojih je $i = 0, j = 1$, u drugoj vrsti i prvoj koloni oni sa $i = 1, j = 0$ itd. Dakle, vrsta se menja sa promenom broja i, a kolona sa j. Iz definicije niza može se zaključiti da se svaki član iz bilo koje vrste, sem prve, dobija kao zbir člana pre njega, i onog iznad njega u tabeli, posmatrajući njihov zbir po modulu 2.

Tvrđenje koje treba dokazati, na ovom primeru, znači sledeće: prva stavka govori da je gornja leva četvrtina tabele za $\{a_k^8\}$ potpuno identična tabeli za $\{a_k^4\}$ $(i, j < m)$, druga i treća stavka tvrde da isto važi i za gornju desnu i donju levu četvrtinu ($i < m \leq j$ i $j < m \leq i$), izostavljajući elemente u prvoj vrsti i $m+1$-voj koloni $((i, j) = (0, m))$ i $m+1$-voj vrsti i prvoj koloni $((i, j) = (m, 0))$, oni se razlikuju i iznose 1, po petoj stavki. Četvrta stavka tvrdi da su u donjoj desnoj četvrtini tabele za $\{a_k^8\}$ sve nule $(m \leq i, j)$.

Pored navedenog tvrđenja, biće dokazano i sledeće:
$a_{in}^n = 1, a_{in+n-1}^n = 0, 1 \leq i < n$ i $a_{(n-1)n+j}^n = 0, 1 \leq j < n$ (na primeru, to su jednice u prvoj koloni i nule u poslednjoj, bez elemenata u prvoj vrsti jer $i \geq 1$, i nule u poslednjoj vrsti, bez elementa u prvoj koloni jer $j \geq 1$).

Oba tvrđenja će biti dokazana indukcijom po r.

Baza indukcije će biti za $r = 1$, tada je $m = 2$ i $n = 4$. Oba tvrđenja mogu se proveriti direktno. Iz definicije sledi: $a_0^2 = 0,\ a_1^2 = 1,\ a_2^2 = (a_0^2 + a_1^2) \bmod 2 = 1,\ a_3^2 = (a_2^2 + a_1^2) \bmod 2 = 0$.

Takođe, $a_0^4 = 0,\ a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = 1,\ a_4^4 = (a_3^4 + a_0^4) \bmod 2 = 1,\ a_5^4 = (a_4^4 + a_1^4) \bmod 2 = 0$, itd. po istom principu se dobija $a_6^4 = 1, a_7^4 = 0, a_8^4 = 1, a_9^4 = 1, a_{10}^4 = 0, a_{11}^4 = 0, a_{12}^4 = 1, a_{13}^4 = 0, a_{14}^4 = 0, a_{15}^4 = 0$. Očigledno da oba tvrđenja zaista važe. Tabele su sledeće:

0	1
1	0

0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za $r - 1$, i dokažimo ga za r. Označi se $n = 2^{r+1}$ i $m = 2^r$, i $k = in + j$ za $0 \leqslant i, j < n$. Razlikuju se dva slučaja.

- $i < m$ (i $j < n$):

  Najpre će biti dokazano prvo od dva željena tvrđenja. U ovom slučaju za a_k^n (tj. a_{in+j}^n) treba dokazati sledeće jednakosti:

$$a_k^n = \begin{cases} a_{im+j}^m, & \text{za } j < m; \\ a_{im+j-m}^m, & \text{za } j \geqslant m \text{ i } (i,j) \neq (0,m); \\ 1, & \text{za } (i,j) = (0,m). \end{cases}$$

Koristi se (još jednom) indukcija, po k. Za bazu se uzimaju sve vrednosti k manje od n (tj. sve kada važi $i = 0$, $j = k$): tada za $k = 0$ imamo $a_0^n = 0 = a_0^m$, a za $0 < k < n$ imamo $a_k^n = 1$, što je zaista jednako sa a_k^m za $k < m$, odnosno sa a_{k-m}^m za $k > m$ (sve direktno po definiciji). Time je baza dokazana. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve vrednosti manje od zadatog k, i dokažimo ga za k. Važi:

$$a_{in+j}^n = (a_{in+j-1}^n + a_{(i-1)n+j}^n) \bmod 2.$$

U slučaju $0 < j < m$ desna strana se (po induktivnoj hipotezi) svodi na $(a_{im+j-1}^m + a_{(i-1)m+j}^m) \bmod 2$, što je a_{im+j}^m, a za $j = 0$ za desnu stranu važi: $(a_{(i-1)n+n-1}^n + a_{(i-1)n}^n) \bmod 2 = (a_{(i-2)m+n-1}^m + a_{(i-1)m}^m) \bmod 2 = (a_{im-1}^m + a_{(i-1)m}^m) \bmod 2 = a_{im}^m$ (kod prve jednakosti primenjuje se induktivna hipoteza). Dakle, u oba slučaja dobija se šta je i trebalo. Slično, u slučaju $m < j < n$ desna strana se svodi na $(a_{im+j-1-m}^m + a_{(i-1)m+j-m}^m) \bmod 2$, što je a_{im+j-m}^m. Ostaje još slučaj $j = m$. Tada za desnu stranu za $i = 1$ je: $a_{n+m-1}^n + a_m^n = a_{m+m-1}^m + a_m^n = 0 + 1 = 1$, a za $i > 1$: $a_{in+m-1}^n + a_{(i-1)n+m}^n = a_{im+m-1}^m + a_{(i-1)m}^m = 0 + 1 = 1$ (ovde se koriste oba dela induktivne hipoteze, tj. oba tvrđenja pretpostavljena za $r - 1$). Kako je u slučaju $j = m$ trebalo da se dobije vrednost $a_{(i-1)m+m}^m$, tj. a_{im}^m, a po induktivnoj hipotezi (drugi deo) ova vrednost je jednaka 1, i u ovom slučaju (kao i u prethodnima) dobija se ono što je i trebalo dokazati.

Drugo od dva željena tvrđenja sada jednostavno sledi: zaista, iz upravo dokazanog, kao i induktivne hipoteze (drugi deo), za $1 \leqslant i < m$ imamo $a_{in}^n = a_{im}^m = 1$ i $a_{in+n-1}^n = a_{im+m-1}^m = 0$, što je i trebalo dokazati.

- $i \geqslant m$ (i $j < n$):

  U ovom slučaju za a_k^n (tj. a_{in+j}^n) treba dokazati sledeće jednakosti:

$$a_k^n = \begin{cases} a_{(i-m)m+j}^m, & \text{za } j < m \text{ i } (i,j) \neq (m,0); \\ 0, & \text{za } j \geqslant m; \\ 1, & \text{za } (i,j) = (m,0). \end{cases}$$

Ponovo se koristi indukcija po k, sa bazom za $mn \leqslant k < (m+1)n$ (tj. sve kada važi $i = m$, $j = k - mn$): tada je $a^n_{mn} = a^n_{mn-1} + a^n_{(m-1)n} = 0+1 = 1$, zatim $a^n_{mn+1} = a^n_{mn} + a^n_{(m-1)n+1} = 1 + a^m_{(m-1)m+1} = 1+0 = 1$, zatim $a^n_{mn+2} = a^n_{mn+1} + a^n_{(m-1)n+2} = 1 + a^m_{(m-1)m+2} = 1 + 0 = 1$ itd., obrazac se nastavlja sve do $a^n_{mn+m-1} = 1$. Nakon toga imamo $a^n_{mn+m} = (a^n_{mn+m-1} + a^n_{(m-1)n+m}) \bmod 2 = (1 + a^m_{(m-1)m}) \bmod 2 = 2 \bmod 2 = 0$, zatim $a^n_{mn+m+1} = a^n_{mn+m} + a^n_{(m-1)n+m+1} = 0 + a^m_{(m-1)m+1} = 0 + 0 = 0$, zatim $a^n_{mn+m+2} = a^n_{mn+m+1} + a^n_{(m-1)n+m+2} = 0 + a^m_{(m-1)m+2} = 0+0 = 0$ itd. Time je baza dokazana.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki broj strogo manji od k, i pokazujemo da važi za k. Za $0 < j < m$ po induktivnoj hipotezi na desnoj strani se dobija $(a^m_{(i-m)m+j-1} + a^m_{(i-1-m)m+j}) \bmod 2 = a^m_{(i-m)m+j}$, što je i trebalo pokazati. Ako je $j = 0$, imamo dva podslučaja: za $i = m+1$, ponovo se korišćenjem induktivne hipoteze desno dobija $(a^n_{mn+n-1} + a^n_{mn}) \bmod 2 = 0+1 = 1$, a ako je $i > m+1$, onda je $(a^n_{in-1} + a^n_{(i-1)n}) \bmod 2 = (a^n_{(i-1)n+n-1} + a^n_{(i-1)n}) \bmod 2 = 0 + a^m_{(i-1-m)m} = 1$ (koristi se hipoteza za drugi deo). Trebalo je pokazati $a^n_{in} = a^m_{(i-1)m} = 1$ (po drugom delu hipoteze). Dakle, pokazano je ono što se tražilo u oba podslučaja. Za $j = m$ desno je $(a^n_{in+m-1} + a^n_{(i-1)n+m}) \bmod 2 = a^m_{(i-m)m+m-1} + 0 = 0$ (takođe se koristi hipoteza za drugi deo tvrđenja), a za $m < j < n$ je $(a^n_{in+j-1} + a^n_{(i-1)n+j}) \bmod 2 = 0 + 0 = 0$ (koristi se induktivna hipoteza). Dakle, za $m \leq j < n$ je $a^n_k = 0$, što je i trebalo pokazati.

Što se tiče drugog tvrđenja, $a^n_{in} = 1$ i $a^n_{in+n-1} = 0$, $m \leq i < n$, to je već dokazano, a $a^n_{(n-1)n+j} = a^m_{(n-1-m)m+j} = a^m_{(m-1)m+j} = 0$, za $1 \leq j < m$ (hipoteza za drugi deo tvrđenja), a $a^n_{(n-1)n+j} = 0$, za $m \leq j < n$ (hipoteza za glavno tvrđenje). Time je drugo tvrđenje dokazano.

Nakon dokazanog prvog dela, sledi dokaz rekurzije. Iz definicije niza i uz pomoć prethodno dokazanog tvrđenja, lako se može zaključiti da je period niza, za $n = 2^r$, jednak $n^2 - 1$. Stoga, $p(2^{r+1}) = 2^{2r+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2r} - 1 = 4(2^{2r} - 1 + 1) - 1 = 4(2^{2r} - 1) + 3 = 4p(2^r) + 3$. Što se tiče broja jedinica u jednoj periodi, iz prethodno dokazanog tvrđenja sledi da je broj jedinica u jednoj periodi niza za $n = 2^{r+1}$ tri puta veći od broja jedinica u periodi niza za $n = 2^r$, plus još dve jedinice za $k = 2^r$ i $k = 2^r \cdot 2^{r+1} = 2^{2r+1}$. Odnosno, $q(2^{r+1}) = 3q(2^r) + 2$.

Uz pomoć svega do sada dokazanog, i činjenice da je $p(2) = 3$ i $q(2) = 2$ (pokazuje se direktno, izračunavanjem članova niza), dokazuju se, indukcijom po m, tvrđenja $N(2^m - 1) = 3^m - 1$ i $D(2^m - 1) = 2(4^m - 1)$, za $m \geq 3$:

Za $m = 3$ je:

$N(2^3 - 1) = q(2^3) = 3q(2^2) + 2 = 3(3q(2) + 2) + 2 = 3 \cdot 8 + 2 = 26 = 3^3 - 1,$

$D(2^3 - 1) = 2p(2^3) = 2(4p(2^2) + 3) = 2(4(4p(2) + 3) + 3) = 126 = 2(4^3 - 1).$

Pretpostavimo da tvrđenja važe za brojeve manje od m, tada je:

$$N(2^m - 1) = q(2^m) = 3q(2^{m-1}) + 2 = 3N(2^{m-1} - 1) + 2 =$$
$$3(3^{m-1} - 1) + 2 = 3^m - 3 + 2 = 3^m - 1,$$

$$D(2^m - 1) = 2p(2^m) = 2(4p(2^{m-1}) + 3) = 2(2 \cdot 2p(2^{m-1}) + 3) =$$
$$2(2D(2^{m-1} - 1) + 3) = 2(2 \cdot 2(4^{m-1} - 1) + 3) = 2(4^m - 1).$$

•

U tabeli 1 su prikazani rezultati za period i fundamentalnu razliku niza $(2, v)$, $v \geq 5$ neparan broj, za neke v.

v	period N	fundamentalna razlika D
5	32	$126 = 2(2^6 - 1)$
$7 = 2^3 - 1$	$26 = 3^3 - 1$	$126 = 2(4^3 - 1)$
9	444	$1\,778 = 2(2^3 - 1)(2^7 - 1)$
11	1 628	$6\,510 = 2(2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^5 - 1)$
13	5 906	$23\,622 = 2(2^2 - 1)(2^5 - 1)(2^7 - 1)$
$15 = 2^4 - 1$	$80 = 3^4 - 1$	$510 = 2(4^4 - 1)$
17	126 960	$507\,842 = 2(2^5 - 1)(2^{13} - 1)$
19	380 822	$1\,523\,526 = 2(2^2 - 1)(2^5 - 1)(2^{13} - 1)$
21	2 097 152	$8\,388\,606 = 2(2^{22} - 1)$
23	1 047 588	$4\,194\,302 = 2(2^{21} - 1)$
25	148 814	$597\,870 = 2(2^9 - 1)(2^{12} - 1)/7$
27	8 951 040	$35\,791\,394 = 2(2^{28} - 1)/15$
29	5 406 720	$21\,691\,754 = 2(2^{30} - 1)/99$
$31 = 2^5 - 1$	$242 = 3^5 - 1$	$2\,046 = 2(4^5 - 1)$
33	127 842 440	$511\,305\,630 = 2(2^4 - 1)(2^{30} - 1)/63$
35	11 419 626 400	$45\,678\,505\,642 = 2(2^9 - 1)(2^{10} - 1)(2^{17} - 1)/3$
37	12 885 001 946	$51\,539\,607\,546 = 2(2^2 - 1)(2^{33} - 1)$
$63 = 2^6 - 1$	$728 = 3^6 - 1$	$8\,190 = 2(4^6 - 1)$
$127 = 2^7 - 1$	$2\,186 = 3^7 - 1$	$32\,766 = 2(4^7 - 1)$
$255 = 2^8 - 1$	$6\,560 = 3^8 - 1$	$131\,070 = 2(4^8 - 1)$
$511 = 2^9 - 1$	$19\,682 = 3^9 - 1$	$524\,286 = 2(4^9 - 1)$
$1\,023 = 2^{10} - 1$	$59\,048 = 3^{10} - 1$	$2\,097\,150 = 2(4^{10} - 1)$

Tabela 1 Period i fundamentalna razlika niza $(2, v)$, $v \geq 5$ neparan broj

Glava 4

Slučaj $(4, v)$

4.1 Regularnost niza $(4, v)$

Pretpostavka 4.1.1. *Neka je $v \geq 5$ neparan broj.*

- *Ako je $v \neq 2^m - 1$, za svako $m \geq 3$, niz $(4, v)$ ima tačno tri parna člana, to su: $4, 2v + 4$ i $4v + 4$.*

- *Ako je $v = 2^m - 1$, za neko $m \geq 3$, niz $(4, v)$ ima tačno četiti parna člana, to su: $4, 2v + 4, 4v + 4$ i $2(2v^2 + v - 2)$.*

Za pretpostavku 4.1.1 još nije pronađen dokaz analogan dokazu regularnosti za slučaj $(2, v)$, $v \geq 5$ neparan broj.

U tabeli 2 dati su članovi nizova $(4, v)$, za $v \geq 5$ neparan broj, izračunati do $4v+8$. Tabela ima četiri kolone, u odnosu na to koji ostatak v daje pri deljenju sa 8. Oznaka $\{f_1(j), f_2(j), ..., f_n(j)\}_0^k$ označava podniz $f_1(0), ..., f_n(0)$, $f_1(1), ..., f_n(1), ..., f_1(k), ..., f_n(k)$, datog niza, ako je $k \geq 0$, inače označava prazan podniz. Može se uočiti da svaki od ovih nizova ima bar 3 parna člana, i da su jedini parni članovi manji ili jednaki od $4v + 8$, $4, 2v + 4$ i $4v + 4$.

5 mod 8	1 mod 8	3 mod 8	7 mod 8
4	4	4	4
$\{v+4j\}_0^{(v+3)/4}$	$\{v+4j\}_0^{(v+3)/4}$	$\{v+4j\}_0^{(v+1)/4}$	$\{v+4j\}_0^{(v+1)/4}$
$2v+4$	$2v+4$	$2v+4$	$2v+4$
$\{2v+7+4j\}_0^{(v-5)/4}$	$\{2v+7+4j\}_0^{(v-5)/4}$	$\{2v+7+4j\}_0^{(v-3)/4}$	$\{2v+7+4j\}_0^{(v-3)/4}$
$\{3v+4+8j,$	$\{3v+4+8j,$	$\{3v+4+8j,$	$\{3v+4+8j,$
$3v+6+8j,$	$3v+6+8j,$	$3v+6+8j,$	$3v+6+8j,$
$3v+10+8j\}_0^{(v-13)/8}$	$3v+10+8j\}_0^{(v-9)/8}$	$3v+10+8j\}_0^{(v-11)/8}$	$3v+10+8j\}_0^{(v-7)/8}$
$4v-1$	$4v+3$	$4v+1$	$4v+4$
$4v+1$	$4v+4$	$4v+3$	$4v+5$
$4v+4$	$4v+5$	$4v+4$	$4v+7$
$4v+5$		$4v+7$	
$4v+7$			

Tabela 2

Regularnost je dokazana samo u slučaju niza $(4, v)$, za $v \equiv 1 \pmod 4$, stoga se ostatak ovog poglavlja svodi na dokaz teoreme kojom se tvrdi regularnost.

Za dalja razmatranja potrebno je definisati $z(h, l)$, za nenegativne cele brojeve h i l, kao binomni koeficijent $z(h, l) = \binom{h+l}{l}$ po modulu 2. Ako je bilo koji od brojeva h ili l manji od nule, $z(h, l) = 0$. U narednoj lemi navedene su neke značajne osobine funkcije $z(h, l)$.

Lema 4.1.1. *1. Neka su $h, l \geq 0$, i neka su $h^0, h^1, \ldots$ cifre u binarnom zapisu broja h, počevši od poslednje cifre. Na isti način se definiše $l^0, l^1, \ldots$ za broj l. Tada je $z(h, l) = 1$ akko je $(h^j, l^j) \neq (1, 1)$, za svako j. [6]*

2. z je rekurzivno zadato sa:

- $z(2i, 2j) = z(i, j)$,
- $z(2i+1, 2j) = z(i, j)$,
- $z(2i, 2j+1) = z(i, j)$,
- $z(2i+1, 2j+1) = 0$,

zajedno sa početnim uslovima $z(0, 0) = 1$ i $z(0, -1) = z(-1, 0) = z(-1, -1) = 0$ (sledi trivijalno iz 1.).

3. Niz $z(h, l)$ za fiksirano h je periodičan, sa periodom 2^g, gde je g najmanji ceo broj za koji važi $2^g > h$. Pritom:

$$\sum_{l=0}^{2^g-1} z(h,l) = 2^{g-\#(h)}.$$

U gornjem zapisu $\#(h)$ označava broj jedinica u binarnom zapisu broja h. Kod sume primenjuje se obično sabiranje. [10]

4. *Neka je $i > 0$ najmanji ceo broj takav da je $(l^i, h^i) \neq (l^0, h^0)$. Tada $z(h,l) = 1$ implicira:*

$$z(h - h^0 - h^i, l + l^0 + l^i) = z(h + h^0 + h^i, l - l^0 - l^i) = 1. \text{ [1]}$$

4.1.1 Slučaj $(4, v)$, $v = 4k + 1$

U ovom odeljku posmatraju se 1-aditivni nizovi $(4, v)$, za koje je $v = 4k + 1$, $k \geq 1$. Neka su članovi niza $(4, v)$ $s_1, s_2, ...$ Sa t označen je indeks onog člana niza za koji važi $s_t = 4v + 4$. Iz tabele 1 može se videti da je, na primer, $t = \frac{1}{8}(7v + 41)$ za nizove kod kojih v daje ostatak 1 pri deljenju sa 8, a $t = \frac{1}{8}(7v + 37)$, ako v daje ostatak 5 pri deljenju sa 8.

Dalje, definiše se niz $\langle 4, v\rangle$ na sledeći način:
ako su članovi niza označeni sa $b_1, b_2, ..., b_n, ...$, $n \in \mathbf{N}$, onda je $b_k = s_k$, za $1 \leq k \leq t$, a b_n, za $n \geq t + 1$, je najmanji neparan broj veći od b_{n-1}, koji se na jedinstven način može napisati kao suma $b_i + b_j$, $i < j$. Očigledno, ovaj niz je definisan na isti način kao $(4, v)$, s tim što počevši od člana b_t sadrži samo neparne brojeve. Iz toga se može zaključiti da niz $(4, v)$ sadrži tačno tri parna člana akko je $(4, v) = \langle 4, v\rangle$ (ranije je pomenuto da su, za svaki od nizova $(4, v)$, $v \geq 5$ neparan broj, jedini parni članovi manji ili jednaki od $4v + 8$ — $4, 2v + 4, 4v + 4$).

Za prirodan broj $n > 8k + 4$ definiše se x_n kao broj predstavljanja $2(n - 6k - 4) + 1$ kao sume $b_i + b_j$, $i < j$. Kako je $2(n - 6k - 4) + 1$ neparan broj za svako n, jedan od dva broja b_i, b_j mora biti paran, pa na isti način kao što se došlo do rekurzivne formule (2.1) u dokazu teoreme 2.2.1, može se zaključiti:

$$x_n = \delta(x_{n-2} - 1) + \delta(x_{n-4k-3} - 1) + \delta(x_{n-8k-4} - 1),$$

gde je $\delta(0) = 1$, i $\delta(r) = 0$, za $r \neq 0$.

Gore navedena formula može se uprostiti definisanjem $y_n = \delta(x_n - 1)$. Rekurzivno, y_n je definisano relacijom:

$$y_n = \delta(\delta(x_{n-2} - 1) + \delta(x_{n-4k-3} - 1) + \delta(x_{n-8k-4} - 1) - 1) =$$

$$\delta(y_{n-2} + y_{n-4k-3} + y_{n-8k-4} - 1),$$

uz početni uslov $(y_0, y_1, ..., y_{8k+3}, y_{8k+4}) = (0, 0, ..., 0, 1)$.

Može se uočiti da y_n, $n > 8k+4$, zapravo govori, za svaki neparan broj počevši od $4k+3$, da li je on član niza $\langle 4, v\rangle$. Ako je $n = 8k+5$, onda je $2(n-6k-4)+1 = 4k+3$, pa ako je $y_n = 1$, $4k+3$ jeste član, a ako je $y_n = 0$, $4k+3$ nije član niza $\langle 4, v\rangle$. Kako se dalje menja n dobijaju se svi neparni brojevi veći od $4k+3$. Period niza $\{x_n\}$ jednak je periodu niza $\{y_n\}$.

Lema 4.1.2. *Ako se prirodan broj n zapiše kao $n = 8(2k+1)l + 4c + r$, gde je $l \geq -1$, $2k+1 \leq c \leq 6k+2$ i $1 \leq r \leq 4$. Tada je y_n:*

$$\begin{array}{ll}
0 & \textit{za } r = 1 \textit{ i } 2k+1 \leq c \leq 5k+2 \\
z(2k+1, l) & \textit{za } r = 1 \textit{ i } c = 5k+3 \\
0 & \textit{za } r = 1 \textit{ i } 5k+4 \leq c \leq 6k+2 \\
z(c-2k-1, l) & \textit{za } r = 2 \textit{ i } 2k+1 \leq c \leq 4k+1 \\
0 & \textit{za } r = 2 \textit{ i } 4k+2 \leq c \leq 6k+2 \\
0 & \textit{za } r = 3 \textit{ i } 2k+1 \leq c \leq 3k \\
z(c-3k-1, l) & \textit{za } r = 3 \textit{ i } 3k+1 \leq c \leq 5k+2 \\
0 & \textit{za } r = 3 \textit{ i } 5k+3 \leq c \leq 6k+2 \\
z(c-2k, l) & \textit{za } r = 4 \textit{ i } 2k+1 \leq c \leq 4k \\
1 - z(2k+1, l) & \textit{za } r = 4 \textit{ i } c = 4k+1 \\
z(c-4k-1, l) & \textit{za } r = 4 \textit{ i } 4k+2 \leq c \leq 6k+1 \\
1 - z(2k+1, l) & \textit{za } r = 4 \textit{ i } c = 6k+2.
\end{array}$$

Dokaz:

U dokazu ove leme koristi se indukcija po n, i relacija:

$$z(h, l) = (z(h-1, l) + z(h, l-1)) \bmod 2.$$

Lako se pokazuje da nevedena relacija zaista važi:

$$z(h-1,l) = \binom{h+l-1}{l} = \frac{(h+l-1)!}{l!(h-1)!} \mod 2$$
$$z(h,l-1) = \binom{h+l-1}{l-1} = \frac{(h+l-1)!}{(l-1)!h!} \mod 2.$$

Onda je:

$$z(h-1,l) + z(h,l-1) = \frac{(h+l-1)!}{l!(h-1)!} + \frac{(h+l-1)!}{(l-1)!h!} \mod 2 =$$
$$\frac{(h+l-1)!h + (h+l-1)!l}{l!h!} \mod 2 = \frac{(h+l-1)!(h+l)}{l!h!} \mod 2 =$$
$$\frac{(h+l)!}{l!h!} \mod 2 = \binom{h+l}{l} \mod 2 = z(h,l).$$

Za brojeve $1 \leq n \leq 8k+4$ važi da je $l = -1$, i za njih se jednostavno proverava tačnost tvrđenja:

- za n=1:

$$n = -16k - 8 + 16k + 8 + 1 = 8(2k+1)(-1) + 4(4k+2) + 1.$$

  Sledi, $l = -1, c = 4k+2, r = 1$. Iz početnog uslova zna se da je $y_1 = 0$, a i lema tvrdi $y_1 = 0$ (prvi slučaj u lemi).

$\vdots$

- za $n = 8k+3$:

$$n = -16k - 8 + 24k + 8 + 3 = 8(2k+1)(-1) + 4(6k+2) + 3.$$

  Sledi, $l = -1, c = 6k+2, r = 3$. Dakle, iz početnog uslova je $y_{8k+3} = 0$, iz leme takođe (osmi slučaj u lemi).

- za $n = 8k+4$:

$$n = -16k - 8 + 24k + 8 + 4 = 8(2k+1)(-1) + 4(6k+2) + 4.$$

Sledi, $l = -1, c = 6k+2, r = 4$. Iz početnog uslova se zna da je $y_{8k+4} = 1$, a lema tvrdi da je $y_{8k+4} = 1 - z(2k+1, l) = 1 - 0 = 1$, jer je l negativno pa je $z(2k+1, -1) = 0$.

Induktivna hipoteza je da tvrđenje važi za svaki broj manji od n, gde je $n \geq 8k+5$. U induktivnom koraku dokazuje se da tvrđenje važi za n, uz pomoć podataka iz tabele 3. Kako je $y_n = \delta(x_n - 1)$, a $x_n = y_{n-2} + y_{n-4k-3} + y_{n-8k-4}$, u tabeli 3 su izračunate vrednosti (l, c, r) za $n-2, n-4k-3, n-8k-4$, i na osnovu toga su dobijene vrednosti za $y_{n-2}, y_{n-4k-3}, y_{n-8k-4}$ iz hipoteze, koje se ubacuju umesto x_n i odatle se dobija y_n za pojedinačne slučajeve.
Na primer:
za $r = 3$, $c = 5k+3$:

$$n = 8(2k+1)l + 4(5k+3) + 3 \Rightarrow (l, c, r)_n = (l, 5k+3, 3),$$

$$n - 2 = 8(2k+1)l + 4(5k+3) + 1 \Rightarrow (l, c, r)_{n-2} = (l, 5k+3, 1),$$

$$n - 4k - 3 = 8(2k+1)l + 16k + 12 + 4 - 4 = 8(2k+1)l + 4(4k+2) + 4$$
$$\Rightarrow (l, c, r)_{n-4k-3} = (l, 4k+2, 4),$$

$$n - 8k - 4 = 8(2k+1)l + 12k + 11 = 8(2k+1)l + 4(3k+2) + 3$$
$$\Rightarrow (l, c, r)_{n-4k-8} = (l, 3k+2, 3).$$

Gore nevedene vrednosti za $(l, c, r)_{n-2}, (l, c, r)_{n-4k-3}, (l, c, r)_{n-4k-8}$ mogu se pročitati iz tabele 3.

$$x_n = y_{n-2} + y_{n-4k-3} + y_{n-8k-4} \Rightarrow x_n = z(2k+1, l) + z(1, l) + z(1, l) =$$
$$= 2z(1, l) + z(2k+1, l).$$

Iz osobine koja je navedena na početku dokaza sledi $z(1, l) = z(0, l) + z(1, l-1) \bmod 2$. Iz definicije je $z(0, l) = \binom{0+l}{l} = 1$, dok je $z(1, l-1) = \binom{1+l-1}{l-1} \bmod 2 = \binom{l}{l-1} \bmod 2 = \frac{l!}{(l-1)!} \bmod 2 = \frac{l(l-1)!}{(l-1)!} \bmod 2 = l \bmod 2$. Prema tome, $z(1, l-1) = 1$, kada je l neparan broj, i $z(1, l-1) = 0$, kada je l paran broj. Pa je $z(1, l) = 1 + 0 = 1$, l parno, i $z(1, l) = 1 + 1 = 0$, l neparno. Dakle, važi:

- ako je l paran broj:

$$y_n = \delta(x_n - 1) = \delta(2z(1,l) + z(2k+1,l) - 1) = \delta(2 + z(2k+1,l) - 1) = \\ = \delta(1 + z(2k+1,l)).$$

  Kako $z(2k+1,l)$ može imati samo vrednosti 0 i 1, i $\delta(1) = \delta(2) = 0$, u oba slučaja važi $y_n = 0$.

- ako je l neparan broj:

$$y_n = \delta(x_n - 1) = \delta(2z(1,l) + z(2k+1,l) - 1) = \delta(z(2k+1,l) - 1) = \\ = \delta(-1) = 0,$$

  jer je $z(2i+1, 2j+1) = 0$.

Zaključak, u slučaju $(l,c,r) = (l, 5k+3, 3)$, $y_n = 0$. Na isti način se dokazuje lema i za preostale slučajeve.

•

r	c	$(l,c,r)_{n-2}$	$(l,c,r)_{n-4k-3}$	$(l,c,r)_{n-8k-4}$	y_{n-2}	y_{n-4k-3}	y_{n-8k-4}
1	$c = 2k+1$	$(l-1, 6k+2, 3)$	$(l-1, 5k+2, 2)$	$(l-1, 4k+2, 1)$	0	0	0
1	$2k+1 \le c \le 3k+1$	$(l, c-1, 3)$	$(l-1, c+3k+1, 2)$	$(l-1, c+2k+1, 1)$	0	0	0
1	$c = 3k+2$	$(l, 3k+1, 3)$	$(l, 2k+1, 2)$	$(l-1, 5k+3, 1)$	1	1	$z(2k+1, l-1)$
1	$3k+3 \le c \le 4k+1$	$(l, c-1, 3)$	$(l, c-k-1, 2)$	$(l-1, c+2k+1, 1)$	$z(c-3k-2, l)$	$z(c-3k-2, l)$	0
1	$4k+2 \le c \le 5k+2$	$(l, c-1, 3)$	$(l, c-k-1, 2)$	$(l, c-2k-1, 1)$	$z(c-3k-2, l)$	$z(c-3k-2, l)$	0
1	$c = 5k+3$	$(l, 5k+2, 3)$	$(l, 4k+2, 2)$	$(l, 3k+2, 1)$	$z(2k+1, l)$	0	0
1	$5k+4 \le c \le 6k+2$	$(l, c-1, 3)$	$(l, c-k-1, 2)$	$(l, c-2k-1, 1)$	0	0	0
2	$c = 2k+1$	$(l-1, 6k+2, 4)$	$(l-1, 5k+2, 3)$	$(l-1, 4k+2, 2)$	$1 - z(2k+1, l-1)$	$z(2k+1, l-1)$	0
2	$2k+2 \le c \le 3k+1$	$(l, c-1, 4)$	$(l-1, c+3k+1, 3)$	$(l-1, c+2k+1, 2)$	$z(c-2k-1, l)$	0	0
2	$3k+2 \le c \le 4k+1$	$(l, c-1, 4)$	$(l, c-k-1, 3)$	$(l-1, c+2k+1, 2)$	$z(c-2k-1, l)$	0	0
2	$c = 4k+2$	$(l, 4k+1, 4)$	$(l, 3k+1, 3)$	$(l, 2k+1, 2)$	$1 - z(2k+1, l)$	1	1
2	$4k+3 \le c \le 6k+2$	$(l, c-1, 4)$	$(l, c-k-1, 3)$	$(l, c+2k-1, 2)$	$z(c-4k-2, l)$	$z(c-4k-2, l)$	$z(c-4k-2, l)$
3	$2k+1 \le c \le 3k$	$(l, c, 1)$	$(l-1, c+3k+1, 4)$	$(l-1, c+2k+1, 3)$	0	$z(c-k, l-1)$	$z(c-k, l-1)$
3	$c = 3k+1$	$(l, 3k+1, 1)$	$(l-1, 6k+2, 4)$	$l-1, 5k+2, 3)$	0	$1 - z(2k+1, l-1)$	$z(2k+1, l-1)$
3	$3k+2 \le c \le 4k+1$	$(l, c, 1)$	$(l, c-k-1, 4)$	$(l-1, c+2k+1, 3)$	0	$z(c-3k-1, l)$	0
3	$4k+2 \le c \le 5k+1$	$(l, c, 1)$	$(l, c-k-1, 4)$	$(l, c-2k-1, 3)$	0	$z(c-3k-1, l)$	0
3	$c = 5k+2$	$(l, 5k+2, 1)$	$(l, 4k+1, 4)$	$(l, 3k+1, 3)$	0	$1 - z(2k+1, l)$	1
3	$c = 5k+3$	$(l, 5k+3, 1)$	$(l, 4k+2, 4)$	$(l, 3k+2, 3)$	$z(2k+1, l)$	$z(1, l)$	$z(1, l)$
3	$5k+4 \le c \le 6k+2$	$(l, c, 1)$	$(l, c-k-1, 4)$	$(l, c-2k-1, 3)$	0	$z(c-5k-2, l)$	$z(c-5k-2, l)$
4	$c = 2k+1$	$(l, 2k+1, 2)$	$(l-1, 5k+3, 1)$	$(l-1, 4k+2, 4)$	1	$z(2k+1, l-1)$	$z(1, l-1)$
4	$2k+2 \le c \le 3k$	$(l, c, 2)$	$(l-1, c+3k+2, 1)$	$(l-1, c+2k+1, 4)$	$z(c-2k-1, l)$	0	$z(c-2k, l-1)$
4	$3k+1 \le c \le 4k$	$(l, c, 2)$	$(l, c-k, 1)$	$(l-1, c+2k+1, 4)$	$z(c-2k-1, l)$	0	$z(c-2k, l-1)$
4	$c = 4k+1$	$(l, 4k+1, 2)$	$(l, 3k+1, 1)$	$(l-1, 6k+2, 4)$	$z(2k, l)$	0	$1 - z(2k+1, l-1)$
4	$4k+2 \le c \le 6k+1$	$(l, c, 2)$	$(l, c-k, 1)$	$(l, c-2k-1, 4)$	0	0	$z(c-4k-1, l)$
4	$c = 6k+2$	$(l, 6k+2, 2)$	$(l, 5k+2, 1)$	$(l, 4k+1, 4)$	0	0	$1 - z(2k+1, l)$

Tabela 3

Ovakav način predstavljanja y_n je ključan za dalja posmatranja 1-aditivnih nizova $(4, 4k+1)$. Posebno su značajni oni brojevi n za koje postoji mogućnost da je $y_n \neq 0$. Zbog toga se izdvajaju skupovi u kojima se nalaze takvi prirodni brojevi:

$$
\begin{array}{ll}
A = \{n : r = 2 \, i \, 2k+2 \leq c \leq 4k+1\} & n \in A \Rightarrow y_n = z(h,l) \text{ za } h = c - 2k - 1 \\
B = \{n : r = 3 \, i \, 3k+2 \leq c \leq 5k+1\} & n \in B \Rightarrow y_n = z(h,l) \text{ za } h = c - 3k - 1 \\
C = \{n : r = 4 \, i \, 2k+1 \leq c \leq 4k\} & n \in C \Rightarrow y_n = z(h,l) \text{ za } h = c - 2k \\
D = \{n : r = 4 \, i \, 4k+2 \leq c \leq 6k+1\} & n \in D \Rightarrow y_n = z(h,l) \text{ za } h = c - 4k - 1 \\
E = \{n : r = 2 \, i \, c = 2k+1\} & n \in E \Rightarrow y_n = 1 \\
F = \{n : r = 3 \, i \, c = 3k+1\} & n \in F \Rightarrow y_n = 1 \\
G = \{n : r = 1 \, i \, c = 5k+3\} & n \in G \Rightarrow y_n = z(2k+1,l) \\
H = \{n : r = 3 \, i \, c = 5k+2\} & n \in H \Rightarrow y_n = z(2k+1,l) \\
I = \{n : r = 4 \, i \, c = 4k+1\} & n \in I \Rightarrow y_n = 1 - z(2k+1,l) \\
J = \{n : r = 4 \, i \, c = 6k+2\} & n \in J \Rightarrow y_n = 1 - z(2k+1,l)
\end{array}
$$

Ima ukupno deset skupova, oni su međusobno disjunktni i njihova unija je nadskup skupa $\{n : y_n = 1\}$. Skupovi A, B, C, D su intervali koji zavise od parametra h, dok su E, F, G, H, I, J izolovane tačke.

Lema 4.1.3. *Neka je* $y_p = y_q = 1$ *za* $p \neq q$, *i* $p + q > 20k + 13$. *Tada postoji* $d \neq 0$ *takvo da je* $y_{p+d} = y_{q-d} = 1$, *uz uslove* $p + d \neq q - d$ *i* $p + d \neq q$.

Dokaz:

Kako važi $y_p = y_q = 1$, p i q pripadaju nekim od gore navedenih skupova. Skup kom pripada p označi se sa X, a onaj kom pripada q sa Y. Potrebno je za svaki par (X, Y), gde su $X, Y \in \{A, B, C, ..., J\}$, naći odgovarajuće d.Takvih parova ima ukupno 100. Ako se ne računaju oni kod kojih se d može dobiti primenom simetrije, ostaje da se ispita 55 slučajeva (d se može dobiti simetrijom kod parova (X, Y) i (Y, X), trojci (p, q, d), odgovara trojka $(q, p, -d)$). U ovom radu data je skica dokaza ove leme, za izdvojenih šest slučajeva. Preostalih 49 se analiziraju analogno [1]. U tabeli 4 su sumirani rezultati. Uvodi se oznaka $w = 8(2k + 1)$.

[1]Za više informacija pogledati [1].

Slučaj 1
U slučaju 1 neka je $(X,Y)=(E,F)$.

$$p \in E \Rightarrow p = wl_p + 4(2k+1)+2,$$
$$q \in F \Rightarrow q = wl_q + 4(3k+1)+3.$$

Dalje, izabere se $s \neq 0$ tako da važi $-l_p \leq s \leq l_q$ (*). Takvo s uvek postoji, osim kada je $l_p = l_q = 0$. Međutim, kako bi tada bilo $p+q = 8k+6+12k+7 = 20k+13$, a u uslovu leme stoji da mora biti $p+q > 20k+13$, ta mogućnost $l_p = l_q = 0$ svakako otpada.
Za tako izabrano s može se uzeti $d = sw$. Tada je:

$$p+d = wl_p + 4(2k+1) + 2 + sw = w(l_p+s) + 4(2k+1) + 2,$$
$$q-d = wl_q + 4(3k+1) + 3 - sw = w(l_q-s) + 4(2k+1) + 3.$$

Iz uslova (*) sledi da je $l_p + s > 0$ i $l_q - s > 0$, pa su i $p+d, q-d > 0$. Može se zaključiti da $p+d \in E$ i $q-d \in F$. Dakle, važi $y_{p+d} = y_{q-d} = 1$, $p+d \neq q-d$ jer pripadaju različitim skupovima, a svi skupovi $\{A, B, ..., J\}$ su međusobno disjunktni. Iz istog razloga je ispunjen i uslov $p+d \neq q$. U svim ostalim slučajevima u kojima je dokaz za uslove podjednako trivijalan kao ovde, izostavljen je.

Slučaj 2
Neka je $(X,Y)=(H,H)$.

$$p \in H \Rightarrow p = wl_p + 4(5k+2) + 3\ ,\ y_p = z(2k+1, l_p),$$
$$q \in H \Rightarrow q = wl_q + 4(5k+2) + 3\ ,\ y_q = z(2k+1, l_q).$$

Iz $y_p = y_q = 1$ sledi $z(2k+1, l_p) = z(2k+1, l_q) = 1$, iz čega sledi da su l_p i l_q parni (jer $z(2i+1, 2j+1) = 0$).

Može se uzeti $d = 12k+1$, tada:

$$p+d = wl_p + 4(5k+2) + 3 + 12k + 1 = wl_p + w + 16k + 4 = w(l_p+1) + 4(4k) + 4$$
$$\Rightarrow p+d \in C$$

$$(l_{p+d} = l_p,\ c_{p+d} = 4k,\ r_{p+d} = 4,\ h_{p+d} = c_{p+d} - 2k = 4k - 2k = 2k),$$

$$q-d = wl_q + 4(5k+2) + 3 - 12k - 1 = wl_q + 8k + 10 = wl_q + 4(2k+2) + 2$$

$$\Rightarrow q-d \in A$$

$(l_{q-d} = l_q,\ c_{q-d} = 2k{+}2,\ r_{q-d} = 2,\ h_{q-d} = c_{q-d} - 2k - 1 = 2k{+}1{-}2k{-}1 = 1)$.

Da bi se pokazalo da $d = 12k+1$ zadovoljava lemu potrebno je uočiti:

$$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(2k, l_p + 1) = z(2k+1, l_p) = y_p = 1.$$

(Korišćena osobina $z(2i, 2j+1) = z(i,j) = z(2i+1, 2j)$.)

$$y_{q-d} = z(h_{q-d}, l_{q-d}) = z(1, l_q) = \binom{1+l_q}{l_q} = \frac{(1+l_q)!}{l_q!} = 1 + l_q = 1 \mod 2.$$

U tabeli 4 su date još neke vrednosti za d koje odgovaraju.

Slučaj 3

Neka je $(X,Y) = (C,E)$.

$$p \in C \Rightarrow p = wl_p + 4(2k + h_p) + 4,$$
$$q \in E \Rightarrow q = wl_q + 4(2k+1) + 2.$$

Ovaj slučaj se može podeliti na dva podslučaja:

- ako je $z(2k+1, l_q - 1) = 1$

  Jedna vrednost koja odgovara je $d = 4k+3$:

  $$p+d = wl_p + 8k + 4h_p + 4 + 4k + 3 = wl_p + 4(3k + h_p + 1) + 3 \Rightarrow p+d \in B$$

  $$(l_{p+d} = l_p,\ 3k+2 \le c_{p+d} \le 5k+1,\ r_{p+d} = 3,\ h_{p+d} = c_{p+d} - 3k - 1 = 3k + h_p + 1 - 3k - 1 = h_p),$$

  $$q-d = wl_q + 8k + 4 + 2 - 4k - 3 = wl_q + 4k + 3 - 16k - 8 + 16k + 8 =$$

  $$w(l_q - 1) + 4(5k+2) + 3 \Rightarrow q-d \in H$$

  $$(l_{q-d} = l_q - 1,\ c_{q-d} = 5k+2,\ r_{q-d} = 3).$$

Iz ove analize sledi:

$$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(h_p, l_p) = y_p = 1,$$
$$y_{q-d} = z(2k+1, l_{q-d}) = z(2k+1, l_q - 1) = 1.$$

- ako je $z(2k+1, l_q - 1) = 0$
  U ovom slučaju može se uzeti $d = 2$:

  $p + d = wl_p + 8k + 4h_p + 4 + 2 = wl_p + 4(2k + h_p + 1) + 2 \Rightarrow p + d \in A$

  $(l_{p+d} = l_p,\ 2k+2 \leq c_{p+d} \leq 4k+1,\ r_{p+d} = 2,\ h_{p+d} = c_{p+d} - 2k - 1 = h_p,)$

  $q - d = wl_q + 8k + 4 - 16k - 8 + 16k + 8 = w(l_q - 1) + 4(6k+2) + 4 \Rightarrow q - d \in J$

  $$(l_{q-d} = l_q - 1,\ c_{q-d} = 6k+2,\ r_{q-d} = 4).$$

  Sledi:

  $$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(h_p, l_p) = y_p = 1,$$
  $$y_{q-d} = 1 - z(2k+1, l_{q-d}) = 1 - z(2k+1, l_q - 1) = 1 - 0 = 1.$$

Slučaj 4
Ako je $(X, Y) = (A, C)$, tada:

$$p \in A \Rightarrow p = wl_p + 4(2k + h_p + 1) + 2,$$
$$q \in C \Rightarrow q = wl_q + 4(2k + h_q) + 4.$$

Ponovo postoje dva podslučaja:

- $h_p + h_q \neq 2k + 1$
  za d se bira $d = wl_q - 4h_p$:

  $$p + d = wl_p + 4(2k + h_p + 1) + wl_q - 4h_p = w(l_p + l_q) + 4(2k+1) + 2$$
  $$\Rightarrow p + d \in E$$

$$(l_{p+d} = l_p + l_q,\ c_{p+d} = 2k+1,\ r_{p+d} = 2).$$

Iz toga sledi da je $y_{p+d} = 1$.

$$q - d = wl_q + 4(2k + h_q) + 4 - wl_q + 4h_p = 4(2k + h_p + h_q) + 4.$$

Ako je $0 \leq h_p + h_q \leq 2k$ tada $q - d \in C$ ($l_{q-d} = 0$, $2k + 2 \leq c \leq 4k$, $r_{q-d} = 4$, $h_{q-d} = c_{q-d} - 2k = 2k + h_p + h_q - 2k = h_p + h_q$). Tada je $y_{q-d} = z(h_{q-d}, l_{q-d}) = z(h_p + h_q, 0) = 1$.

Ako je $2k + 2 \leq h_p + h_q \leq 4k$ tada $q - d \in D$ ($l_{q-d} = 0$, $4k + 2 \leq c_{q-d} \leq 6k$, $r_{q-d} = 4$, $h_{q-d} = c_{q-d} - 4k - 1 = 2k + h_p + h_q - 4k - 1 = h_p + h_q - 2k - 1$). Tada je $y_{q-d} = z(h_{q-d}, l_{q-d}) = z(h_p + h_q - 2k - 1, 0) = 1$.

- $l_p \neq l_q$ ili $h_p \neq h_q$

Ovaj podslučaj nije disjunktan sa prethodnim podslučajem, ali su sve mogućnosti obuhvaćene, jer ako pretpostavimo da je $h_p = h_q$, $h_p + h_q$ ne bi bio neparan.

Ako je $l_p \neq l_q$ i $d = 2$ sledi:

$$p + d = wl_p + 4(2k + h_p + 1) + 2 - 2 = wl_p + 4(2k + h_p) + 4 \Rightarrow p + d \in C$$

$$(l_{p+d} = l_p,\ 2k + 2 \leq c_{p+d} \leq 4k,\ r_{p+d} = 4,\ h_{p+d} = c_{p+d} - 2k = 2k + h_p - 2k = h_p).$$

$$q - d = wl_q + 4(2k + h_q) + 4 + 2 = wl_q + 4(2k + h_q + 1) + 2 \Rightarrow q - d \in A$$

$$(l_{q-d} = l_q,\ 2k + 2 \leq c_{q-d} \leq 4k + 1,\ r_{q-d} = 2,\ h_{q-d} = c_{q-d} - 2k - 1 = 2k + 1 + h_q - 2k - 1 = h_q).$$

Može se zaključiti:

$$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{h+d}) = z(h_p, l_p) = y_p = 1,$$
$$y_{q-d} = z(h_{q-d}, l_{q-d}) = z(h_q, l_q) = y_q = 1.$$

Ovde je neophodan uslov $l_p \neq l_q$, jer $p + d$ i q oba pripadaju skupu C pa se mora isključiti mogućnost da je $p + d = q$.

Ako je $l_p = l_q$ i $h_p \neq h_q$ i $d = 4(h_p - h_q)$, sledi:

$$p + d = wl_p + 4(2k + h_p + 1) + 2 + 4(h_p + h_q) = wl_p + 4(2k + h_q + 1) + 2$$
$$\Rightarrow p + d \in A$$

$$(l_{p+d} = l_p,\ 2k + 2 \leq c_{p+d} \leq 4k + 1,\ r_{p+d} = 2,\ h_{p+d} = c_{p+d} - 2k - 1 = 2k + h_q + 1 - 2k - 1 = h_q),$$

$$q - d = wl_q + 4(2k + h_q) + 4 - 4(h_q - h_p) = wl_q + 4(2k + h_p) + 4 \Rightarrow q - d \in C$$

$$(l_{q-d} = l_q = l_p,\ 2k + 1 \leq c_{q-d} \leq 4k,\ r_{q-d} = 4,\ h_{q-d} = c_{q-d} - 2k = 2k + h_p - 2k = h_p).$$

Dakle, važi:

$$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(h_q, l_p) = z(h_q, l_q) = y_q = 1,$$
$$y_{q-d} = z(h_{q-d}, l_{q-d}) = z(h_p, l_q) = z(h_p, l_p) = y_p = 1.$$

Ovde je neophodan uslov $h_p \neq h_q$ jer treba isključiti mogućnost da je $d = 0$.

Slučaj 5
Ako je $(X, Y) = (A, B)$, tada:

$$p \in A \Rightarrow p = wl_p + 4(2k + 1 + h_p) + 2,$$
$$q \in B \Rightarrow q = wl_q + 4(3k + 1 + h_q) + 3.$$

Ako je $l_p \neq l_q$ ili $h_p \neq h_q$, analiza ide analogno prethodnom slučaju:

- $l_p \neq l_q$, uzima se $d = 4k + 1$
- $l_p = l_q$ i $h_p \neq h_q$, uzima se $d = 4(h_q - h_p)$

Ako je $l_p = l_q = l$ i $h_p = h_q = h$, za d se može uzeti $d = w(l^0 + l^i) - 4(h^0 + h^i)$ (l^0, l^i, h^0, h^i su definisani u lemi 4.1.1 (4)).

Kako je $y_p = y_q = z(h, l) = 1$, na osnovu leme 4.1.1 (1), mora biti $(h^j, l^j) \neq (1, 1)$ za svako j. To bi značilo da mogućnost $l^0 = l^i = 1$ otpada (kako su l^0 i l^i jednaki mora biti $h^0 \neq h^i$, pa će jedan od ta dva broja sigurno biti 1), kao i $h^0 = h^i = 1$. Dakle, d može imati vrednosti $d = w$, $d = w - 4$ i $d = -4$.

$$p+d = wl_p+4(2k+1+h_p)+2+w(l^0+l^i) = w(l_p+l^0+l^i)+4(2k+1+h_p-h^0-h^i)+2,$$

$$q - d = wl_q + 4(3k + 1 + h_q) + 3 - w(l^0 + l^i) + 4(h^0 + h^i) =$$
$$w(l_q - l^0 - l^i) + 4(3k + 1 + h_q + h^0 + h^i) + 3.$$

Tada je $l_{p+d} = l_p + l^0 + l^i$, h može imati vrednosti $1 \leq h \leq 2k$:

- ako je $h = 1$, $h^0 = 1$ i $h^i = 0$, te je $c_{p+d} = 2k + 1$, i $r = 2$ iz čega sledi $p + d \in E$.
- ako je $1 < h \leq 2k$, u zavisnosti od l^0 i l^i može biti $h^0 = h^i = 0$, ili $h^0 \neq h^i$. Ako je $h^0 = h^i = 0$, $2k + 1 \leq c_{p+d} \leq 4k + 1$, a ako je $h^0 \neq h^i$, $2k + 2 \leq c_{p+d} \leq 4k$. U oba slučaja $2k + 2 \leq c_{p+d} \leq 4k + 1$ i $r = 2$, te $p + d \in A$, $h_{p+d} = c_{p+d} - 2k - 1 = h - h^0 - h^i$.

Dakle, važi:

$$\begin{cases} p + d \in A \textit{ i } h_{p+d} = h - h^0 - h^i, & h > 1 \\ p + d \in E, & h = 1 \end{cases}$$

Sledi, $y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(h - h^0 - h^i, l_p + l^0 + l^i) = 1$ (lema 4.1.1 (4)), ako $p + d \in A$. Takođe, $y_{p+d} = 1$, ako $p + d \in E$.

Što se tiče $q - d$, $l_{q-d} = l - l^0 - l^i$:

- ako je $h = 2k$, kako je to paran broj mora biti $h^0 = 0$, a $h^i = 0$ ili $h^i = 1$. U slučaju $h^i = 0$, $c_{q-d} = 5k + 1$, $r = 3$, pa $q - d \in B$. Ako je $h^i = 1$, $c_{q-d} = 5k + 2, r = 3$, pa $q - d \in H$.
- ako je $1 \leq h < 2k$ i $h^0 = h^i = 0$, $3k + 2 \leq c_{q-d} \leq 5k$. Ako je $h^0 \neq h^i$, $3k + 3 \leq c_{q-d} \leq 5k + 1$. U oba slučaja $3k + 2 \leq c_{q-d} \leq 5k + 1$, $r = 3$, pa $q - d \in B$, $h_{q-d} = c_{q-d} - 3k - 1 = h + h^0 + h^i$.

  Dakle, važi:

$$\begin{cases} q - d \in B \textit{ i } h_{q-d} = h + h^0 + h^i, & h < 2k \textit{ ili } h^i = 0 \\ q - d \in H, & h = 2k \textit{ i } h^i = 1 \end{cases}$$

Sledi, $y_{q-d} = z(h_{q-d}, l_{q-d}) = z(h + h^0 + h^i, l_q - l^0 - l^i) = 1$ (lema 4.1.1 (4)), ako je $q - d \in B$. Važi i $y_{q-d} = 1$, ako $q - d \in H$.

Slučaj 6
Ako je $(X, Y) = (C, I)$, p i q su oblika:

$$p \in C \Rightarrow p = wl_p + 4(2k + h_p) + 4,$$
$$q \in I \Rightarrow q = wl_q + 4(4k + 1) + 4.$$

Postoje tri slučaja:

- $z(2k + 1, l_q - 1) = 1$, $l_p \neq l_q$

  Iz uslova $z(2k+1, l_q - 1) = 1$ može se zaključiti da je $l_q - 1$ paran broj, što bi značilo da je l_q neparan.

  Može se uzeti da je $d = 2$, sledi:

  $$p + d = wl_p + 4(2k + h_p) + 4 + 2 = wl_p + 4(2k + h_p + 1) + 2 \Rightarrow p + d \in A$$

  $$(l_{p+d} = l_p,\ 2k + 2 \leq c_{p+d} \leq 4k + 1,\ r_{p+d} = 2,\ h_{p+d} = c_{p+d} - 2k - 1 = 2k + h_p + 1 - 2k - 1 = h_p).$$

  Tada je:

  $$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(h_p, l_p) = y_p = 1.$$

  Što se tiče $q - d$ važi:

  $$q - d = wl_q + 4(4k + 1) + 4 - 2 = wl_q + 4(4k + 1) + 2 \Rightarrow q - d \in A$$

  $$(l_{q-d} = l_q,\ c_{q-d} = 4k + 1,\ r_{q-d} = 2,\ h_{q-d} = c_{q-d} - 2k - 1 = 4k + 1 - 2k - 1 = 2k).$$

  Tada je:

  $$y_{q-d} = z(h_{q-d}, l_{q-d}) = z(2k, l_q) = z(2k + 1, l_q - 1) = 1.$$

  (Korišćena osobina $z(2i + 1, 2j) = z(i, j) = z(2i, 2j + 1)$.)

  Uslov $l_p \neq l_q$ je potreban jer $p + d, q - d \in A$, pa treba isključiti mogućnost $p + d \neq q - d$.

- $z(2k+1, l_q - 1) = 1$, $l_q = l_p$
  Ako se za d izabere $d = -8k - 4$ dobija se:

  $$p + d = wl_p + 4(2k + h_p) + 4 - 8k - 4 = w(l_p - 1) + 4(4k + h_p + 1) + 4$$
  $$\Rightarrow p + d \in D$$

  $$(l_p = l_{p-1},\ 4k + 2 \leq c_{p+d} \leq 6k + 1,\ r_{p+d} = 4, h_{p+d} = c_{p+d} - 4k - 1 = 4k + h_p + 1 - 4k - 1 = h_p).$$

  Kako je $l_p = l_q$, a l_q je neparan, i l_p je neparan. Iz toga i činjenice da je $y_p = z(h_p, l_p) = 1$, sledi da je h_p paran. Dakle:

  $$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(h_p, l_p - 1) = z(h_p, l_p) = y_p = 1.$$

  $$(\text{Koriščena osobina } z(2i, 2j) = z(i, j) = z(2i, 2j + 1).)$$

  Takođe važi:

  $$q - d = wl_q + 4(4k + 1) + 4 + 8k + 4 = wl_q + 4(6k + 2) + 4 \Rightarrow q - d \in J$$

  $$(l_{q-d} = l_q,\ c_{q-d} = 6k + 2,\ r_{q-d} = 4).$$

  Tada:

  $$y_{q-d} = 1 - z(2k + 1, l_{q-d}) = 1 - z(2k + 1, l_q) = 1$$

  $$(z(2i + 1, 2j + 1) = 0).$$

- $z(2k + 1, l_q - 1) = 0$
  Za d se može uzeti $d = 8k + 4$:

  $$p+d = wl_p+4(2k+h_p)+4+8k+4 = wl_p+4(4k+h_p+1)+4 \Rightarrow p+d \in D$$

  $$(l_{p+d} = l_p,\ 4k+2 \leq c_{p+d} \leq 6k + 1,\ r_{p+d} = 4,\ h_{p+d} = c_{p+d}-4k-1 = h_p),$$

  $$y_{p+d} = z(h_{p+d}, l_{p+d}) = z(h_p, l_p) = y_p = 1.$$

Što se tiče $q-d$ važi:

$$q-d = wl_q+4(4k+1)+4-8k-4 = w(l_q-1)+4(6k+2)+4 \Rightarrow q-d \in J$$

$$(l_{q-d} = l_q - 1,\ c_{q-d} = 6k+2,\ r_{q-d} = 4),$$

$$y_{q-d} = 1 - z(2k+1, l_{q-d}) = 1 - z(2k+1, l_q - 1) = 1.$$

•

(X,Y)	d	(X',Y')	(l_{p+d}, l_{q-d})	(h_{p+d}, h_{q-d})	uslovi
(E,F)	w	(E,F)	(l_p+1, l_q-1)		$l_q > 0$
	$-w$	(E,F)	(l_p-1, l_q+1)		$l_p > 0$
(H,H)	$12k+1$	(C,A)	(l_p+1, l_q)	$(2k,1)$	
	$12k+3$	(A,C)	(l_p+1, l_q)	$(2k,1)$	
	$12k+5$	(I,E)	(l_p+1, l_q)		
(C,E)	$4k+3$	(B,H)	(l_p, l_q-1)	$(h_p, -)$	$z(2k+1, l_q-1) = 1$
	2	(A,J)	(l_p, l_q-1)	$(h_p, -)$	$z(2k+1, l_q-1) = 0$
(A,C)	$wl_q - 4h_p$	(E,C)	$(l_p+l_q, 0)$	$(-, h_p+h_q)$	$h_p + h_q \leq 2k$
	$wl_q - 4h_p$	(E,D)	$(l_p+l_q, 0)$	$(-, h_p+h_q-2k-1)$	$h_p + h_q > 2k+1$
	-2	(C,A)	(l_p, l_q)	(h_p, h_q)	$l_p \neq l_q$
	$4h_q - 4h_p$	(A,C)	(l_p, l_q)	(h_q, h_p)	$l_p = l_q, h_p \neq h_q$
(A,B)	$4k+1$	(B,A)	(l_p, l_q)	(h_p, h_q)	$l_p \neq l_q$
	$4h_q - 4h_p$	(A,B)	(l_p, l_q)	(h_q, h_p)	$l_p = l_q, h_p \neq h_q$
	w	(A,B)	(l_p+1, l_p-1)	(h_p, h_p)	$l_p = l_q, h_p = h_q,$ $h^0 + h^i = 0, l^0 + l^i = 1$
	-4	(E,B)	(l_p, l_p)	$(-, 2)$	$l_p = l_q, h_p = h_q,$ $h^0 + h^i = 1, l^0 + l^i = 0$
	-4	(A,B)	(l_p, l_p)	(h_p-1, h_p+1)	$l_p = l_q, 1 < h_p = h_q < 2k,$ $h^0 + h^i = 1, l^0 + l^i = 0$
	-4	(A,H)	(l_p, l_p)	$(2k-1, -)$	$l_p = l_q, h_p = h_q = 2k,$ $h^0 + h^i = 1, l^0 + l^i = 0$
	$w-4$	(E,B)	(l_p+1, l_p-1)	$(-, 2)$	$l_p = l_q, h_p = h_q = 1,$ $h^0 + h^i = 1, l^0 + l^i = 1$
	$w-4$	(A,B)	(l_p+1, l_p-1)	(h_p-1, h_p+1)	$l_p = l_q, 1 < h_p = h_q < 2k,$ $h^0 + h^i = 1, l^0 + l^i = 1$
	$w-4$	(A,H)	(l_p+1, l_p-1)	$(2k-1, -)$	$l_p = l_q, h_p = h_q = 2k,$ $h^0 + h^i = 1, l^0 + l^i = 1$
(C,I)	2	(A,A)	(l_p, l_q)	$(h_p, 2k)$	$z(2k+1, l_q-1) = 1,$ $l_p \neq l_q$
	$-8k-4$	(D,J)	(l_p-1, l_q)	$(h_p, -)$	$z(2k+1, l_q-1) = 1,$ $l_p = l_q$
	$8k+4$	(D,J)	(l_p, l_q-1)	$(h_p, -)$	$z(2k+1, l_q-1) = 0$

Tabela 4

Naredna teorema je glavna teorema u ovom poglavlju, ona tvrdi da je niz $(4, 4k+1)$, $k \geq 1$ regularan.

Teorema 4.1.1. *1-aditivan niz* $(4, 4k+1)$, *za svako* $k \geq 1$, *ima tačno tri parna člana. To je ekvivalentno tvrđenju* $(4, 4k+1) = \langle 4, 4k+1 \rangle$.

Dokaz:

Posmatra se 1-aditivan niz $(4, v)$ gde je $v = 4k+1$, $k \geq 1$. Do sada je viđeno da svaki 1-aditivan niz (4,v) ima bar tri parna člana, to su $4, 2v+4$ i $4v+4$. U ovom dokazu pretpostavimo da niz $(4, v)$, pored ta tri, ima bar još jedan paran član. Neka je e najmanji paran član veći od $4v+4$. Jasno da je tada e prvi član u kom se razlikuju nizovi $(4, v)$ i $\langle 4, v \rangle$. Kako nam y_n daje informaciju o tome da li je $2(n-6k-4)+1$ član niza $\langle 4, v \rangle$, a članovi niza $\langle 4, v \rangle$ su do e isti kao članovi niza $(4, v)$, znači da nam y_n u ovom slučaju govori i da li je $2(n-6k-4)+1$ član niza $(4, v)$ za $2(n-6k-4)+1 < e+1$, tj. za $n < \frac{e}{2} + 6k + 4$.
Dalje, važi:

$$4 + (4v+4) = (v+4) + (3v+4).$$

Kako je $v + 4 = 4k + 1 + 4 = 4k + 5 = 2(n - 6k - 4) + 1$, sledi da je $n = 8k + 6$, te n možemo napisati kao $n = w0 + 4(2k+1) + 2$, pa je $y_n = z(2k+1-2k-1, l) = z(0,0) = 1$. Dakle, $v+4$ je član niza $(4, v)$. Na sličan način se dobija i za $3v+4$. Prema tome, gore navedeni broj ima dva predstavljanja.
Takođe:

$$(2v+4) + (4v+4) = (3v+2) + (3v+6).$$

Ponovo, $3v+2$ i $3v+6$ jesu članovi niza $(4, v)$, pa i ovaj broj ima dva predstavljanja.

$$4 + (2v+4) = 2v+6 < 4v+4.$$

Na osnovu gore navedenog može se zaključiti da e nije zbir dva parna člana. Neka je $e = f + g$, gde su f i g neparni. Ako je:

$$p = \frac{1}{2}(f-1) + 6k + 4,$$
$$q = \frac{1}{2}(g-1) + 6k + 4,$$

$$2(\frac{1}{2}(f-1)+6k+4-6k-4)+1 = f-1+1 = f \in (4,v),$$

dakle, $x_p = 1$, pa je stoga i $y_p = 1$. Analogno se pokazuje i za y_q, odnosno važi $y_p = y_q = 1$.

$$p+q = \frac{1}{2}(f-1)+6k+4+\frac{1}{2}(g-1)+6k+4 = \frac{1}{2}(f+g)+12k+7 =$$

$$\frac{1}{2}e+12k+7 > \frac{1}{2}(4v+8)+12k+7 = \frac{1}{2}(4(4k+1)+8)+12k+7 = 20k+13.$$

(Nejednakost važi zato što je e prvi paran član veći od $4v+4$, te on mora biti veći od $4v+8$, jer nema parnih članova između $4v+4$ i $4v+8$.)
Kako je $y_p = y_q = 1$ i $p+q > 20k+13$ za p i q važi prethodna lema, tačnije, postoji $d \neq 0$ takvo da je $y_{p+d} = y_{q-d} = 1$ pod uslovima $p+d \neq q-d$ i $p+d \neq q$.Tada:

$$y_{p+d} = 1 \Rightarrow 2(p+d-6k-4)+1 \in (4,v),$$
$$y_{q-d} = 1 \Rightarrow 2(q-d-6k-4)+1 \in (4,v).$$

Kako je:

$$2(p+d-6k-4)+1+2(q-d-6k-4)+1 =$$
$$2(p+q)-24k-14 = e+24k+14-24k-14 = e,$$

e može na još jedan način da se predstavi kao zbir dva neparna broja, što je kontradikcija.

•

4.1.2 Asimptotska gustina

Lema 4.1.4. *Niz $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je periodičan. Njegov period iznosi $P = 2^{m+3}(2k+1)$, gde je m najmanji ceo broj za koji važi $2^m > 2k+1$.*

Dokaz:

Prethodno je pokazano da se članovi niza $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, koji nisu odmah jednaki 1 ili 0, mogu predstaviti kao $z(h,l)$ za $h \leq 2k$. U lemi 4.1.1 (3) navedeno je da je niz $z(h,l)$, za fiksirano h, periodičan, i da njegov period iznosi 2^g, gde je g najmanji ceo broj za koji važi $2^g > h$, tj. $z(h,l) = z(h,l+2^g)$. Kako je m najmanji ceo broj za koji važi $2^m > 2k+1$, sledi $2^m > h$, pa je $g \leq m$.

Dakle, $2^g|2^m$, pa i za 2^m takođe važi $z(h, l+2^m) = z(h, l)$. Svako n je oblika:

$$n = wl + 4c + r,$$

$$n + P = wl + 4c + r + 2^{m+3}(2k+1) = wl + 4c + r + 2^m w = w(l + 2^m) + 4c + r.$$

Dakle, ako y_n nije izraženo kao $z(h, l)$, $y_n = y_{n+P}$ (c i r se ne menjaju). Ako je $y_n = z(h, l)$, $y_{n+P} = z(h, l + 2^m) = z(h, l) = y_n$. Prema tome, P zadovoljava $y_{n+P} = y_n$, za svako n, ali ostaje pitanje da li je to najmanji takav broj.

Pretpostavimo da je period niza y_n broj p. Kako se iz početnog uslova zna $(y_1, y_2, ..., y_{8k+3}, y_{8k+4}) = (0, 0, ..., 0, 1)$, iz činjenice da je p period sledi $(y_{p+1}, y_{p+2}, ..., y_{p+8k+3}) = (0, 0, ..., 0)$.

Dalje se razmatra:

$$y_{wl+8k+6} = y_{wl+4(4k+1)+2} = z(2k + 1 - 2k - 1, l) = z(0, l) = 1,$$
$$y_{wl+12k+7} = y_{wl+4(3k+1)+3} = z(3k + 1 - 3k - 1, l) = z(0, l) = 1.$$

Navedena zapažanja dobijena se primenom leme 4.1.2 i važe za za svako l.

$$\begin{aligned} &y_{wl+16k+12} = y_{wl+4(4k+2)+4} = \\ &= z(4k + 2 - 4k - 1, l) = z(1, l) = 1, && \text{za } l \text{ paran broj.} \\ &y_{wl+16k+8} = y_{wl+4(4k+1)+4} = 1 - z(2k + 1, l) = 1, && \text{za } l \text{ neparnan broj.} \\ &y_{wl+24k+12} = y_{wl+4(6k+2)+4} = 1 - z(2k + 1, l) = 1, && \text{za } l \text{ neparan broj.} \end{aligned}$$

Ponovo je korišćena lema 4.1.2 i neke osobine funkcije $z(h, l)$.

Iz prethodno uočenog može se zaključiti da $p \notin [wl + 3, wl + 8k + 5]$, za svako l. Ako je $p = wl+3$, onda $y_{p+8k+3} = y_{wl+8k+6} = 1$, što je kontradiktorno sa činjenicom da je $y_{p+8k+3} = 0$, jer je p period. Isto važi ako je $p = wl + 4$, onda je $y_{p+8k+2} = y_{wl+8k+6} = 1$, itd. ako je $p = wl + 8k + 5$, tada je $y_{p+1} = y_{wl+8k+6} = 1$.

Analognim načinom zaključivanja dobija se i $p \notin [wl+4k+4, wl+12k+6]$ za svako l, $p \notin [wl + 8k + 9, wl + 16k + 11]$ za parno l, $p \notin [wl + 8k + 5, wl + 16k + 7]$ za neparno l, $p \notin [wl + 16k + 9, wl + 24k + 11]$ za neparno l.

Ovi intervali se preklapaju i prekrivaju sve pozitivne cele brojeve sem brojeva oblika $wl + 16k + 8$, za neparno l, što bi značilo da preostaje još samo mogućnost da je p baš tog oblika. Kako je $wl + 16k + 8 = w(l + 1)$ i $p|2^m w = P$, mora biti $l + 1 = 2^j$, za neko $j \leq m$.

Slučaj $j = m - 1$ otpada jer:

$$y_{20k+13} = y_{0w+4(5k+3)+1} = z(2k+1, 0) = 1,$$
$$y_{20k+13+p} = y_{w(l+1)+4(5k+3)+1} = z(2k+1, l+1) = z(2k+1, 2^{m-1}),$$

$$z(2k+1, 2^{m-1}) = \frac{(2^{m-1}+2k+1)!}{(2^{m-1})!(2k+1)!} \bmod 2 =$$
$$\frac{(2^{m-1}+1)(2^{m-1}+2)...(2^{m-1}+2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3...(2k+1)} \bmod 2.$$

U brojiocu je proizvod čiji su članovi oblika $(2^{m-1}+i)$, a u imeniocu proizvod i, $1 \leq i \leq 2k+1$. Ako je t najveći broj takav da $2^t|i$, onda će važiti i $2^t|(2^{m-1}+i)$, jer je m najmanji ceo broj za koji je $2^m > 2k+1$ ($i \leq 2k+1$, pa je i $t \leq m-1$). Prema tome, svaki član proizvoda u brojicu deljiv je istim ili većim brojem dvojki od odgovarajućeg člana u imeniocu. Dovoljno je pokazati da postoji jedno i, za koje važi da je $(2^{m-1}+i)$ deljivo većim bojem dvojki u odnosu na i, da bi ceo količnik bio paran. Jedno takvo i je $i = 2^{m-1}$. Sledi:

$$y_{20k+13+p} = z(2k+1, 2^{m-1}) = 0.$$

Dakle, period $p \neq 2^{m-1}w$, samim tim $p \neq 2^j w$ za svako $j < m-1$, jer $2^j w|2^{m-1}w$ pa kada bi $2^j w$ bio period, istu osobinu bi imao i $2^{m-1}w$, što je kontradikcija. Preostaje, $p = P$.

•

Lema 4.1.5. *Broj jedinica u jednom periodu niza* $\{y_n\}$ *iznosi:*

$$2^{m+2} \sum_{j=0}^{2k} 2^{-\#(j)},$$

gde broj m *predstavlja najmanji ceo broj za koji važi* $2^m > 2k+1$.

Dokaz:

U dokazu se koriste lema 4.1.2 i lema 4.1.1 (3). Broj jedinica u periodu računa se na sledeći način:

$$\sum_{n=1}^{P} y_n = \sum_{l=0}^{2^m-1} \sum_{r=1}^{4} \sum_{c=2k+1}^{6k+2} y_{wl+4c+r} =$$

$$= \sum_{l=0}^{2^m-1} \Big(z(2k+1,l) + \sum_{c=2k+1}^{4k+1} z(c-2k-1,l) + \sum_{c=3k+1}^{5k+2} z(c-3k-1,l) +$$

$$\sum_{c=2k+1}^{4k} z(c-2k,l)+1-z(2k+1,l)+\sum_{c=4k+2}^{6k+1} z(c-4k-1,l)+1-z(2k+1,l)\Big) =$$

$$\sum_{l=0}^{2^m-1}\Big(\sum_{j=0}^{2k} z(j,l)+\sum_{j=0}^{2k+1} z(j,l)+\sum_{j=1}^{2k} z(j,l)+1+\sum_{j=1}^{2k} z(j,l)+1-z(2k+1,l)\Big) =$$

$$\sum_{l=0}^{2^m-1}\Big(\sum_{j=0}^{2k} z(j,l)+\sum_{j=0}^{2k} z(j,l)+z(2k+1,l)+\underbrace{\sum_{j=1}^{2k} z(j,l)+z(0,l)}-z(0,l)+1+$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{2k} z(j,l)+z(0,l)}-z(0,l)+1-z(2k+1,l)\Big) = \sum_{l=0}^{2^m-1}\Big(4\sum_{j=0}^{2k} z(j,l)+2-2z(0,l)\Big) =$$

$$4\sum_{l=0}^{2^m-1}\sum_{j=0}^{2k} z(j,l) = 4\sum_{j=0}^{2k}\sum_{l=0}^{2^m-1} z(j,l) = 2^2\sum_{j=0}^{2k} 2^{m-\#(j)} = 2^{m+2}\sum_{j=0}^{2k} 2^{-\#(j)}.$$

•

Naredna teorema iznosi tvrđenja vezana za period niza uzastopnih razlika i fundamentalnu razliku niza $(4, 4k+1)$, i posledica je prethodne leme.

Teorema 4.1.2. *Za 1-aditivan niz $(4, 4k+1)$, $k \geq 1$, gde je m najveći ceo broj za koji važi $2^m < 4k+1$, period N niza uzastopnih razlika i fundamentalna razlika D iznose:*

$$N = 2^{m+2}\sum_{j=0}^{(v-1)/2} 2^{-\#(j)},$$

$$D = 2^{m+3}(v+1).$$

Specijalno, ako je $v = 2^m + 1$, tada je:

$$N = 2^{m+1} + 8 \cdot 3^{m-1}.$$

Posledica 4.1.1. *Ako je $\Delta(v) = N(v)/D(v)$ asimptotska gustina niza $(4, 4k+1)$,$k \geq 1$, neka je $\theta = \log 3/\log 2 \approx 1,58496$, $c_0 = (1-2^{1/(\theta-2)})^{\theta-2}$. Tada za svako $k \geq 1$ važi:*

$$\frac{1}{4}(2k+1)^{\theta-2} \leq \Delta(4k+1) \leq \frac{1}{4}c_0(2k+1)^{\theta-2} < 0,27261(2k+1)^{\theta-2},$$

$$\lim_{k\to\infty} \Delta(4k+1) = 0,$$

$$\liminf_{k\to\infty} (2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1) = \frac{1}{4},$$

$$\limsup_{k\to\infty} (2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1) > \frac{1}{7}3^{\theta-1} > 0,27164.$$

Dokaz:
Za početak se definiše funkcija:

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{x-1} 2^{-\#(j)},\ x \geq 1.$$

Može se uočiti da je $\phi(x) = 4x\Delta(2x-1)$, za neparne $x \geq 3$:
važi $2x - 1 \geq 5$, za $x \geq 3$. Kako je x neparan broj, $x = 2t+1$, $t \geq 1$, onda je $2x-1 = 2(2t+1)-1 = 4t+1 \equiv 1 \bmod 4$. Dakle, može se ubaciti $v = 2x-1$ u prethodnu teoremu, i dobija se:

$$N(2x-1) = 2^{m+2} \sum_{j=0}^{(2x-1-1)/2} 2^{-\#(j)} = 2^{m+2} \sum_{j=0}^{x-1} 2^{-\#(j)},$$

$$D(2x-1) = 2^{m+3}2x = 2^{m+4}x,$$

$$\Delta(2x-1) = \frac{N(2x-1)}{D(2x-1)} = \frac{2^{m+2}\sum_{j=0}^{x-1} 2^{-\#(j)}}{2^{m+4}x} = \frac{\phi(x)}{4x} \Rightarrow \phi(x) = 4x\Delta(2x-1).$$

Dalje, tvrđenje $1 \leq x^{1-\theta}\phi(x) \leq c_0$ se pokazuje indukcijom po x. Za $x = 1$:

$$1 \leq 1^{1-\theta}\phi(1) = 1 \sum_{j=0}^{0} 2^{-\#(j)} = 1 \leq c_0.$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $1 \leq x \leq 2^s$, i pokazujemo da važi za $1 \leq x \leq 2^{s+1}$. Koristi se rekurzija:

$$\phi(2^s + x) = \phi(2^s) + \frac{1}{2}\phi(x). \tag{4.1}$$

Kako je:

$$\phi(2^s) = \sum_{j=0}^{2^s-1} 2^{-\#(j)},$$

$$\frac{1}{2}\phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{x-1} 2^{-\#(j)},$$

$$\phi(2^s+x) = \sum_{j=0}^{2^s+x-1} 2^{-\#(j)} = \sum_{j=0}^{2^s-1} 2^{-\#(j)} + \sum_{j=2^s}^{2^s+x-1} 2^{-\#(j)},$$

da bi se pokazalo da važi gore navedena rekurzivna formula, treba pokazati:

$$\sum_{j=2^s}^{2^s+x-1} 2^{-\#(j)} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{x-1} 2^{-\#(j)}.$$

Uoči se da brojevi $2^s + l$, $0 \le l \le 2^s - 1$, u svom binarnom zapisu sadrže onoliko jedinica koliko sadrži broj l, plus još jednu koliko ima 2^s. Iz toga sledi:

$$\sum_{j=2^s}^{2^s+x-1} 2^{-\#(j)} = \sum_{j=0}^{x-1} 2^{-\#(j)-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{x-1} 2^{-\#(j)}.$$

Prema tome, navedena rekurzivna formula zaista važi.

Kako brojevi od 0 do 2^s-1 u svom binarnom zapisu imaju od 0 do s jedinica, važi:

$$\phi(2^s) = 1\cdot 1 + s\cdot 2^{-1} + \binom{s}{2}\cdot 2^{-2} + \binom{s}{3}\cdot 2^{-3} + ... + \binom{s}{s}\cdot 2^{-s} = \left(\frac{1}{2}+1\right)^s = \left(\frac{3}{2}\right)^s.$$

($\phi(2^s)$ = broj onih koji imaju 1 jedinicu u binarnom zapisu puta 2^{-1}, plus broj onih koji imaju 2 jedinice puta 2^{-2}, itd.)
Dakle, $\phi(2^s + x) = \left(\frac{3}{2}\right)^s + \frac{1}{2}\phi(x)$.

Kako je $1 \le x^{1-\theta}\phi(x) \le c_0$, za $1 \le x \le 2^s$, sledi:

$$x^{\theta-1} \le \phi(x) \le c_0 x^{\theta-1} \ / \div 2,$$

$$\frac{1}{2}x^{\theta-1} \le \frac{1}{2}\phi(x) \le \frac{1}{2}c_0 x^{\theta-1} \ / + \left(\frac{3}{2}\right)^s,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^s + \frac{1}{2}x^{\theta-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^s + \frac{1}{2}\phi(x) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^s + \frac{1}{2}c_0x^{\theta-1},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^s + \frac{1}{2}x^{\theta-1} \leq \phi(2^s + x) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^s + \frac{1}{2}c_0x^{\theta-1}. \tag{4.2}$$

Dalje, definiše se funkcija:

$$\varphi(x, c) = \frac{(\frac{3}{2})^s + \frac{1}{2}cx^{\theta-1}}{(2^s + x)^{\theta-1}}, \ c \geq 1, \ 0 \leq x \leq 2^s.$$

$$\varphi_x(x, c) = \frac{(\theta-1)(2^s + x)^{\theta-2}(\frac{1}{2}cx^{\theta-2}(2^s + x) - (\frac{3}{2})^s - \frac{1}{2}cx^{\theta-1})}{(2^s + x)^{2(\theta-1)}} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \left(\frac{3^s}{2^s c}\right)^{\frac{1}{\theta-2}}.$$

Diferenciranjem, za fiksirano c, dobija se stacionarna tačka x_0. Kako je za fiksirano c data funkcija neprekidna i definisana na zatvorenom intervalu, ona ima minimum i maksimum na tom intervalu. Tačke u kojima ih može dostizati su krajevi intervala i tačka u kojoj je izvod jednak nuli, tj. x_0. Za $x = 0$, $\varphi(0, c) = 1$, za $x = 2^s$, $\varphi(2^s, c) = \frac{1}{3}(2 + c)$ i za $x = x_0$, $\varphi(x_0, c_0) = c_0$. Sledi da je minimum funkcije za $c = 1$, $\varphi(x, 1) = 1$, a maksimum za $c = c_0$, $\varphi(x, c_0) = c_0$. Znači:

$$\varphi(x, 1) = \frac{(\frac{3}{2})^s + \frac{1}{2}x^{\theta-1}}{(2^s + x)^{\theta-1}} \geq 1,$$

$$\varphi(x, c_0) = \frac{(\frac{3}{2})^s + \frac{1}{2}c_0x^{\theta-1}}{(2^s + x)^{\theta-1}} \leq c_0.$$

Iz ovog zaključka i formule (4.2) imamo:

$$1 \leq \frac{(\frac{3}{2})^s + \frac{1}{2}x^{\theta-1}}{(2^s + x)^{\theta-1}} \leq \frac{\phi(2^s + x)}{(2^s + x)^{\theta-1}} \leq \frac{(\frac{3}{2})^s + \frac{1}{2}c_0x^{\theta-1}}{(2^s + x)^{\theta-1}} \leq c_0.$$

Kako je $1 \leq x \leq 2^s$, onda je $2^s + 1 \leq 2^s + x \leq 2^{s+1}$, time je pokazano da važi $1 \leq x^{\theta-1}\phi(x) \leq c_0$ za $1 \leq x \leq 2^{s+1}$ (za $1 \leq x \leq 2^s$ se zna iz hipoteze, a ovde je pokazano za $2^s + 1 \leq x \leq 2^{s+1}$).

Pomenuto je da važi $\phi(x) = 4x\Delta(2x - 1)$, $x \geq 3$ neparan broj. Ako se za x uzme $x = 2k + 1$, dobija se:

$$\phi(2k + 1) = 4(2k + 1)\Delta(2(2k + 1) - 1) = 4(2k + 1)\Delta(4k + 1),$$

i

$$
\begin{aligned}
&1 \leq (2k+1)^{1-\theta}\phi(2k+1) \leq c_0 \\
\Leftrightarrow\ &1 \leq (2k+1)^{1-\theta}4(2k+1)\Delta(4k+1) \leq c_0 \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{4}(2k+1)^{\theta-2} \leq \Delta(4k+1) \leq \frac{1}{4}c_0(2k+1)^{\theta-2}. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Pošto je $\theta < 2$, kada k teži beskonačnosti $\frac{1}{4}(2k+1)^{\theta-2}$, i $\frac{1}{4}c_0(2k+1)^{\theta-2}$ teže nuli, pa onda je i $\lim_{k\to\infty}\Delta(4k+1) = 0$.

Treba još pokazati $\liminf_{k\to\infty}(2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1) = \frac{1}{4}$, i $\limsup_{k\to\infty}(2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1) > \frac{1}{7}3^{\theta-1} > 0.27164$.

Kada se nejednakost (4.3) pomnoži sa $(2k)^{1-\theta}$ dobija se:

$$
\frac{1}{4}(2k+1)^{\theta-2}(2k)^{2-\theta} \leq \Delta(4k+1)(2k)^{2-\theta} \leq \frac{1}{4}c_0(2k+1)^{\theta-2}(2k)^{2-\theta}
$$

pa važi:

$$
\lim_{k\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{\theta-2} \leq \lim_{k\to\infty}\Delta(4k+1)(2k)^{2-\theta} \leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4}c_0\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{\theta-2}
$$

$$
\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \lim_{k\to\infty}\Delta(4k+1)(2k)^{2-\theta} \leq \frac{1}{4}c_0 < 0,27261. \qquad (4.4)
$$

- Prvo, biće pokazano da je:

$$
(2^s-1)^{1-\theta}\phi(2^s-1) \to 1, s \to \infty.
$$

$$
\phi(2^s-1) = \sum_{j=0}^{2^s-2} 2^{-\#(j)} = \sum_{j=0}^{2^s-1} 2^{-\#(j)} - 2^{-\#(2^s-1)} = \phi(2^s) - 2^{-\#(2^s-1)} =
$$

$$
\left(\frac{3}{2}\right)^s - 2^{-s} = \frac{3^s-1}{2^s}.
$$

Kako je $\theta = log_2 3 \Rightarrow 2^\theta = 3$, imamo:

$$
\lim_{s\to\infty}(2^s-1)^{1-\theta}\phi(2^s-1) = \lim_{s\to\infty}(2^s-1)^{1-\theta}\frac{3^s-1}{2^s} =
$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{2^s-1}{(2^s-1)^\theta}\cdot\frac{3^s-1}{2^s}=\lim_{s\to\infty}\frac{2^s}{3^s}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^s-\frac{1}{2^s}\right)=\lim_{s\to\infty}(1-\frac{1}{3^s})=1.$$

- Kao drugo, biće pokazano:

$$(\sum_{i=0}^{s}2^{2i})^{1-\theta}\phi(\sum_{i=0}^{s}2^{2i})\to\frac{4}{7}3^{\theta-1},\, s\to\infty.$$

$$\sum_{i=0}^{s}2^{2i}=\sum_{i=0}^{s}4^i=\frac{4^{s+1}-1}{3}=\frac{2^{2s+2}}{3}. \tag{4.5}$$

Dalje, pokazuje se:

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{s}2^{2i}\right)=\phi(2^{2s})+\frac{1}{2}\phi\left(\sum_{i=0}^{s-1}2^{2i}\right). \tag{4.6}$$

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{s}2^{2i}\right)=\sum_{j=0}^{\sum_{i=0}^{s}2^{2i}-1}2^{-\#(j)}=\sum_{j=0}^{2^{2s}-1}2^{-\#(j)}+\sum_{j=2^{2s}}^{\sum_{i=0}^{s}2^{2i}-1}2^{-\#(j)}=$$

$$\phi(2^{2s})+\sum_{j=2^{2s}}^{2^{2s}+\sum_{i=0}^{s-1}2^{2i}-1}2^{-\#(j)}=\phi(2^{2s})+\sum_{j=0}^{\sum_{i=0}^{s-1}2^{2i}-1}2^{-\#(j)-1}=$$

$$\phi(2^{2s})+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\sum_{i=0}^{s-1}2^{2i}-1}2^{-\#(j)}=\phi(2^{2s})+\frac{1}{2}\phi\left(\sum_{i=0}^{s-1}2^{2i}\right).$$

Sada se formula (4.6) koristi da bi se pokazalo:

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{s}2^{2i}\right)=\frac{9^{s+1}-2^{s+1}}{7\cdot 4^s}. \tag{4.7}$$

Ovo tvrđenje se dokazuje indukcijom po s:
u bazi uzima se $s=1$,

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{1}2^{2i}\right)=\phi(2^0+2^2)=\phi(5)=\sum_{j=0}^{4}2^{-\#(j)}=\frac{11}{4},$$

takođe:

$$\frac{9^2-2^2}{28}=\frac{81-4}{28}=\frac{11}{4}.$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve brojeve manje od s. Pokazujemo da tvđenje važi za s:

$$\phi\left(\sum_{j=0}^{s}2^{2i}\right)=\phi(2^{2s})+\frac{1}{2}\phi\left(\sum_{j=0}^{s-1}2^{2i}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9^{s-1+1}-2^{s-1+1}}{7\cdot 4^{s-1}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{2s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9^s-2^s}{7\cdot 4^{s-1}}=\frac{9^s\cdot 7+9^s\cdot 2-2^s\cdot 2}{7\cdot 4^s}=\frac{9^{s+1}-2^{s+1}}{7\cdot 4^s}.$$

Ovim je indukcija završena.

Koristeći gore dokazana tvrđenja (4.5) i (4.7), imamo:

$$\lim_{s\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{s}2^{2i}\right)^{1-\theta}\phi\left(\sum_{i=0}^{s}2^{2i}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{2^{s+2}-1}{3}\right)^{1-\theta}\frac{9^{s+1}-2^{s+1}}{7\cdot 4^s}=$$

$$\frac{1}{7}3^{\theta-1}\lim_{s\to\infty}\frac{2^{2s+2}-1}{(2^{2s+2}-1)^{\theta}}\cdot\frac{3^{2s+2}-2^{s+1}}{2^{2s}}=\frac{1}{7}3^{\theta-1}\lim_{s\to\infty}\frac{2^{2s+2}}{3^{2s+2}}\cdot\frac{3^{2s+2}-2^{s+1}}{2^{2s}}=$$

$$\frac{1}{7}3^{\theta-1}\lim_{s\to\infty}\frac{\frac{2^{2s+2}}{3^{2s+2}}3^{2s+2}-\frac{2^{2s+2}}{3^{2s+2}}2^{s+1}}{2^{2s}}=\frac{1}{7}3^{\theta-1}\lim_{s\to\infty}\frac{2^{s+2}-\frac{2^{2s+2}}{3^{2s+2}}2^{s+1}}{2^{2s}}=$$

$$\frac{1}{7}3^{\theta-1}\lim_{s\to\infty}4\left(1-\frac{2^{s+1}}{3^{2s+2}}\right)=\frac{4}{7}3^{\theta-1}.$$

Kako, na osnovu formule (4.4), važi:

$$\lim_{k\to\infty}(2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1)\geq\frac{1}{4},$$

da bi se pokazalo da je

$$\liminf_{v\to\infty}\left(\frac{v}{2}\right)^{2-\theta}\Delta(v)=\liminf_{k\to\infty}\left(\frac{4k+1}{2}\right)^{2-\theta}\Delta(4k+1)=$$

$$\liminf_{k\to\infty}(2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1)=\frac{1}{4},$$

treba naći niz $\{x_s\}, s \in \mathbf{N}$, takav da je:
$\lim_{s\to\infty} x_s = \infty$ i $\lim_{s\to\infty} \left(\frac{x_s}{2}\right)^{2-\theta} \Delta(x_s) = \frac{1}{4}$.

Kako je:

$$\lim_{s\to\infty} (2^s-1)^{1-\theta}\phi(2^s-1) = \lim_{s\to\infty} (2^s-1)^{1-\theta} 4(2^s-1)\Delta(2(2^s-1)-1) =$$

$$4\lim_{s\to\infty} (2^s-1)^{2-\theta}\Delta(2^{s+1}-3) = 4\lim_{s\to\infty} \left(\frac{2^{s+1}-3}{2}\right)^{2-\theta}\Delta(2^{s+1}-3) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \left(\frac{2^{s+1}-3}{2}\right)^{2-\theta}\Delta(2^{s+1}-3) = \frac{1}{4}.$$

Dakle, može se uzeti niz čiji je opšti član $x_s = 2^{s+1}-3$.

S druge strane, iz desne nejednakosti iz formule (4.4), imamo:

$$\lim_{k\to\infty} (2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1) \le \frac{1}{4}c_0 < 0,27261,$$

ako posmatramo niz sa opštim članom $x_s = \sum_{i=0}^{s} 2^{2i}$, imamo:

$$\lim_{s\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}\right)^{1-\theta} \phi\left(\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}\right) =$$

$$\lim_{s\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}\right)^{1-\theta} 4\left(\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}\right)\Delta(2\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}-1) =$$

$$4\lim_{s\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}\right)^{2-\theta} \Delta(2\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}-1) = 4\lim_{s\to\infty} \left(\frac{2\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}}{2}\right)^{2-\theta}\Delta(2\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}-1) =$$

$$= \frac{4}{7}3^{\theta-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \left(\frac{2\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}}{2}\right)^{2-\theta}\Delta(2\sum_{i=0}^{s} 2^{2i}-1) = \frac{1}{7}3^{\theta-1}.$$

Iz ovog zaključka sledi $\limsup_{k\to\infty} (2k)^{2-\theta}\Delta(4k+1) \ge \frac{1}{7}3^{\theta-1} > 0,27164$.
Ovim je tvrđenje kompletno dokazano.

•

4.2 Pitanja

Za niz $(4,4k+1)$, $k \geq 1$, dokazano je da ima tačno tri parna člana, i dobijeni su izrazi za fundamntalnu razliku i period. Slični rezultati još uvek nisu postignuti za niz $(4,4k+3)$ i postoji sumnja da će se u skorije vreme dobiti. Razlozi za sumnju su ti da empirijski nisu otkrivene nikakve pravilnosi vezane za fundamentalnu razliku, ovi nizovi imaju duge prelazne faze što otežava računanje, i niz $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, za $n \geq 8k+8$ definisan sa:

$$y_n = \delta(y_{n-2} + y_{n-4k-5} + y_{n-8k-8} - 1), y_n = 1 \Leftrightarrow 2(n-6k-8)+3 \in \langle 4, 4k+3\rangle$$

sa početnim uslovom $(y_1, y_2, ..., y_{8k+8}) = (0, 0, ..., 1)$, ne obrazuje oblik sličan Paskalovom trouglu, a to je dovelo u slučaju $(4,4k+1)$ do leme 4.1.2 koja je bila ključna za dokaz regularnosti.

Jedini izuzetak kada su u pitanju 1-aditivni nizovi $(4,4k+3)$, $k \geq 1$, je niz gde je $k = 2^m - 1$, $m \geq 1$. U tom slučaju za $1 \leq n \leq n_0 = 32(k+1)^2$, kada se predstavi kao $n = 16(k+1)l + 4c + r$, $l \geq -1$, $2k+2 \leq c \leq 6k+5$ i $1 \leq r \leq 4$, y_n ima oblik:

$$\begin{array}{ll}
0 & \text{za } r = 1 \text{ i } 2k+2 \leq c \leq 3k+2 \\
z(c-3k-3, l) & \text{za } r = 1 \text{ i } 3k+3 \leq c \leq 5k+4 \\
z(c-5k-5, l+1) & \text{za } r = 1 \text{ i } 5k+5 \leq c \leq 5k+l+5 \\
0 & \text{za } r = 1 \text{ i } 5k+l+6 \leq c \leq 6k+5 \\
z(c-2k-2, l) & \text{za } r = 2 \text{ i } 2k+2 \leq c \leq 4k+3 \\
0 & \text{za } r = 2 \text{ i } 4k+4 \leq c \leq 6k+5 \\
0 & \text{za } r = 3 \text{ i } 2k+2 \leq c \leq 5k+4 \\
z(c-5k-5, l+1) & \text{za } r = 3 \text{ i } 5k+5 \leq c \leq 5k+l+5 \\
0 & \text{za } r = 3 \text{ i } 5k+l+6 \leq c \leq 6k+5 \\
0 & \text{za } r = 4 \text{ i } 2k+2 \leq c \leq 2k+l+1 \\
z(c-2k-1, l) & \text{za } r = 4 \text{ i } 2k+l+2 \leq c \leq 4k+2 \\
0 & \text{za } r = 4 \text{ i } 4k+3 \leq c \leq 4k+l+3 \\
z(c-4k-3, l) & \text{za } r = 4 \text{ i } 4k+l+4 \leq c \leq 6k+4 \\
\delta(l+1) & \text{za } r = 4 \text{ i } c = 6k+5.
\end{array}$$

Gornja granica za n i n_0 je izabrana, pa se može postaviti hipoteza:

Pretpostavka 4.2.1. *Pretpostavimo da je $20k + 23 < n < n_0$. Tada važi:*

$$\sum_{\substack{p+q=n \\ p<q}} y_p y_q \neq 1,$$

$$\sum_{\substack{p+q=n_0 \\ p<q}} y_p y_q = 1.$$

Ukoliko bi ova pretpostavka bila tačna, za posledicu bi imala to da niz $(4, 2^{m+2} - 1)$, $m \geq 1$, ima bar 4 parna člana.

Poznato je da 1-aditivan niz $(4, 7)$ ima fundamentalnu razliku $D = 11\,301\,098$, i period iznosi $N = 1\,927\,959$, posle faze prelaza (broj članova niza pre početka periodičnosti) koja je duga oko $1,36 \times 10^7$ članova. U nizu $(4, 15)$ nije uočena periodičnost do $2,12 \times 10^{11}$ članova.

U narednoj tabeli dati su neki rezultati vezani za period i fundamentalnu razliku niza $(4, v)$.

v	N	D	v	N	D
5	32	$192 = 2^5(5+1)$	35	826	5326
$7 = 2^3 - 1$	1 927 959	11 301 098	37	776	$9728 = 2^8(37+1)$
9	88	$640 = 2^6(9+1)$	39	108 966	620 796
11	246	1 318	41	824	$10\,752 = 2^8(41+1)$
13	104	$896 = 2^6(13+1)$	43	632	5 632
$15 = 2^4 - 1$	$*$	$*$	45	856	$11\,776 = 2^8(45+1)$
17	248	$2\,304 = 2^7(17+1)$	47	7 226 071	41 163 940
19	352	2 560	49	896	$12\,800 = 2^8(49+1)$
21	280	$2\,816 = 2^7(21+1)$	51	1 488	13 312
23	5 173	29 858	53	928	$13\,824 = 2^8(53+1)$
25	304	$3\,328 = 2^7(25+1)$	55	856	7 168
27	10 270	57 862	57	952	$14\,848 = 2^8(57+1)$
29	320	$3\,840 = 2^7(29+1)$	59	97 150 536	553 730 584
$31 = 2^5 - 1$	$*$	$*$	61	968	$15,872 = 2^8(61+1)$
33	712	$8\,704 = 2^8(33+1)$	$63 = 2^6 - 1$	$*$	$*$

Tabela 5 Polja označena zvezdicom znače da kod datog niza $(4, v)$ nije uočena periodičnost do $3,65 \times 10^9$ članova

Glava 5

Preostali slučajevi iz pretpostavke 2.2.1

5.1 Slučaj $(5,6)$

U svim preostalim slučajevima koji su navedeni u pretpostavci 2.2.1, ne postoje konkretni dokazi još uvek. Sve navedene pretpostavke dobijene su eksperimentalno. U slučaju niza $(5,6)$ pretpostavka od koje se polazi je sledeća:

Pretpostavka 5.1.1. *Niz* $(5,6)$ *ima tačno* 13 *parnih članova, a to su:* $6, 16, 26, 36, 80, 124, 144, 172, 184, 196, 238, 416$ *i* 448.

Uzimajući u obzir da gore navedena pretpostavka zaista važi, uz pomoć rekurzivne formule (2.1) (dokaz teoreme 2.2.1), došlo se do rezultat da je $N = 208$ i $D = 1\,720$, nakon prelazne faze od oko $1,56 \times 10^5$ članova.

5.2 Slučaj (u,v), $u \geq 6$ paran broj

Nizovi (u,v), gde je $u \geq 6$ paran broj, imaju prilično duge faze prelaza (na primer, niz $(8,17)$ ima fazu prelaza dugu oko 2×10^8 članova), što u značajnoj meri otežava sva ispitivanja i proračune, te se o nizovima ovog tipa ne zna mnogo. Pretpostavka od koje se polazi je sledeća:

Pretpostavka 5.2.1. *Niz* (u,v), $u \geq 6$ *paran broj, ima* $2+\frac{1}{2}u$ *parnih članova, a to su* $u + 2pv$, *za* $0 \leq p \leq \frac{1}{2}u$, *i* $(2u+4)v$.

U Tabeli 6 izneti su razultati za period i fundamentalnu razliku nizova ovog tipa, za konkretne u i v. Crticama su označeni parovi (u,v) kod kojih je $u \geq v$, ili u i v nisu uzajamno prosti. Kako bi se došlo do formula i veza između N i D potrebni su mnogo detaljniji proračuni.

	$u=6$		$u=8$		$u=10$	
v	N	D	N	D	N	D
7	9 365	62 450	–	–	–	–
9	–	–	180	1 440	–	–
11	218	1 408	299 214	2 183 224	1 782	15 312
13	252	1 664	232 025	1 689 694	314	2 496
15	–	–	2 287 191	16 687 270	–	–
17	14 089 505	93 609 388	306	2 720	1 618	13 056

Tabela 6

5.3 Slučaj (u, v), $u \geq 7$ neparan broj, v paran broj

Kod slučaja (u, v), gde je $u \geq 7$ neparan broj i v paran broj, kada su u pitanju prelazne faze, situacija je dosta bolja u odnosu na prethodni slučaj. Fundamentalna razlika i period se mogu izaraziti kao linearni obrasci po v, za v dovoljno veliko u odnosu na u. Sve jednakosti dobijene su pod pretpostavkom:

Pretpostavka 5.3.1. *Niz (u, v), za $u \geq 7$ neparan broj, i v paran broj, ima $2 + \frac{1}{2}v$ parnih članova, a to su $2qu + v$, za $0 \leq q \leq \frac{1}{2}v$, i $u(2v + 4)$.*

U narednoj tabeli dati su podaci za fundamentalnu razliku i period.

	$u=6$		$u=8$		$u=10$	
v	N	D	N	D	N	D
8	5 874	42 758	–	–	–	–
10	830	6 594	80 240	630 818	–	–
12	182	1 568	–	–	272	2 464
14	–	–	258	2 304	164	1 408
16	124	1 008	546	5 184	670	6 336
18	228	2 240	–	–	708	7 040
20	156	1 232	300	3 168	842	7 744
22	140	1 344	334	3 456	–	–
24	310	2 912	–	–	488	4 576
26	532	5 488	292	4 032	1 506	21 560
28	–	–	288	4 320	614	5 280
30	132	1 792	–	–	2 114	22 528
32	326	4 284	984	9 792	2 242	23 936
34	326	4 032	636	5 484	2 370	25 344
36	364	4 256	–	–	2 498	26 752
38	238	4 480	870	11 520	2 626	28 160
40	250	4 704	464	6 048	2 751	29 568
42	–	–	–	–	2 882	30 976
44	274	5 152	584	6 624	–	–
46	286	5 376	628	6 912	3 138	33 792
48	298	5 600	–	–	3 266	35 200
50	310	5 824	780	7 488	3 394	36 608
52	322	6 048	614	7 776	3 522	38 016
54	334	6 272	–	–	3 650	39 424
56	–	–	782	8 352	3 778	40 832
58	358	6 270	810	8 640	3 906	42 240
60	370	6 914	–	–	4 034	43 648
62	382	7 168	866	9 216	4 162	45 056
64	394	7 392	894	9 504	4 290	46 464

Tabela 7

Koristeći tabelu 7 i sličnosti koje su uočene kada su posmatrani slučajevi $u = 13, 15, 17, 19$, došlo se do sledeće pretpostavke:

Pretpostavka 5.3.2. *Neka je $v \geq 7$ neparan prirodan broj. Tada postoji prirodan broj v_0 takav da za svaki paran broj $v \geq v_0$, period N i fundamentalna razlika D moraju biti sledećeg oblika:*

$$N(v) = f_N(u)v + g_N(u),$$
$$D(v) = f_D(u)v + g_D(u).$$

Koeficijenti za prvih nekoliko vrednosti u su:

u	f_N	g_N	f_D	g_D	v_0
7	6	10	112	224	38
9	14	-2	144	288	56
11	64	194	704	1408	30
13	19	-56	208	416	56
15	42	672	480	960	52
17	28	-180	272	514	118
19	48	-60	608	1216	120

Tabela 8

Osim odnosa $g_D = 2f_D$, nijedna druga veza nije uočena.

Bibliografija

[1] J. Cassaigne, S. R. Finch, *A class of 1-additive sequences and quadratic requrrences*, Experimental Math. 4, 49-60, 1996.

[2] S. R. Finch, *Patterns in 1-additive sequences*, Experimental Math. 1, 57-63, 1992.

[3] S. R. Finch, *Conjectures about s-additive sequences*, Fibonacci Quart. 29, 209-214, 1991.

[4] P. Gibbs, J. McCranie, *The Ulam numbers up to one trillion*, niz A002858 u The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

[5] P. Gibbs, *An efficient method for computing Ulam numbers*, niz A002858 u The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

[6] C. T. Long, *Pascal's triangle modulo p*, Fibonacci Quart. 19, 458-463, 1981.

[7] J. H. Schmerl, E. Spiegel, *The regularity of some 1-additive sequences*, J. Combin. Theory A66, 172-175, 1994.

[8] S. Steinerberger, *A Hidden Signal in the Ulam Sequence*, Experimental Math. 26, 460-467, 2016.

[9] R. Queneau, *Sur les suites s-additives*, J. Combin. Theory A12, 31-71, 1972. English summary in Math. Rev. 46, 1741.

[10] S. Wolfram, *Geometry of binomial coefficients*, Amer. Math. Monthly 91, 566-571, 1984.

Biografija

Andrea Karalić rođena je 14. oktobra 1994. godine u Somboru. Osnovnu školu "Nikola Vukićević" je završila u Somboru, 2009. godine. Iste godine je upisala Gimnaziju "Veljko Petrović" u Somboru, prirodno-matematički smer, koju je završila 2013. godine. Nakon završetka gimnazije, 2013. godine, upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike, koje je završila 2013. godine, sa prosečnom ocenom 9,03. Iste godine je upisala master akademske studije, smer Master profesor matematike, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđne planom i programom master studija 2018. godine, sa prosečnom ocenom 9,55. Od 2018. godine zaposlena je na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, kao saradnik u nastavi, pri katedri za matematiku.

Novi Sad, 2019. Andrea Karalić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Andrea Karalić
AU

Mentor: dr Bojan Bašić
MN

Naslov rada: Ulamovi nizovi
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / e
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2019.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 5/56/10/8/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Teorija brojeva
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Ulamov niz, 1-aditivni nizovi, regularnost, period niza uzastopnih razlika, fundamentalna razlika, asimptotska gustina.
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

U ovom master radu proučavaju se 1-aditivni nizovi, kao uopštenja pojma Ulamovog niza, neke njihove bitne osobine, regularnost, period niza uzastopnih razlika, asimptotska gustina.

Rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju definisan je Ulamov niz, navedene su osobine koje su se istraživale i rezultati postignuti eksperimentalnim putem. U drugom poglavlju je generalizovan pojam Ulamovog niza do pojma 1-aditivnih nizova. Definišu se osobine 1-aditivnih nizova: regularnost, period niza uzastopnih razlika, fundamentalna razlika, asimptotska gustina. Takođe, navodi se potreban uslov za regularnost 1-aditivnih nizova, kao i hipoteza o tome koji 1-aditivni nizovi imaju osobinu regularnosti. Treće poglavlje bavi se jednim slučajem iz prethodno pomenute hipoteze, tačnije 1-aditivnim nizovima $(2, v)$, gde je $v \geq 5$ neparan broj. U tom poglavlju pokazano je da su dati nizovi regularani i izneti su rezultati vezani za period niza uzastopnih razlika i asimptotsku gustinu ovih nizova. U četvrtom poglavlju su ključni nizovi $(4, v)$, odnosno specijalan slučaj, $(4, 4k + 1)$, $k \geq 1$, za koji je dokazana regularnost, pokazano koliko iznose period niza uzastopnih razlika, fundamentalna razlika i asimptotska gustina. U petoj glavi su obrađeni preostali slučajevi iz hipoteze o kojima je malo toga poznato.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 5.7.2019.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu;
Mentor:	dr Bojan Bašić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor;
Član:	dr Anna Slivková, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Andrea Karalić
AU

Mentor: Bojan Bašić, Ph.D.
MN

Title: Ulam sequences
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian (latin)
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2019
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/56/10/8/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Number theory
SD

Subject/Key words: Ulam sequence, 1-additive sequences, regularity, period of successive differences, fundamental difference, asymptotic density.
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
In this Master degree thesis we are analyzing 1-additive sequences, as a generalization of the Ulam sequence, some of their essential properties, regularity, period of successive differences, asimptotic density.

The thesis consists of five chapters. In the first chapter, we define the Ulam sequence, list some traits that were expressed and the results obtained experimentally. The second chapter generalizes the term Ulam seguence to the term 1-additive sequences. The properties of 1-additive series are defined: regularity, period of successive differences, fundamental difference, asymptotic density. Also, the necessary condition for the regularity of 1-additive sequences is stated, as well as the hypothesis of which 1-additive sequences have the regularity property. The third chapter deals with a single case from the above hypothesis, more precisely 1-additive sequences $(2, v)$, where $v \geq 5$ is an odd number. In this chapter it is shown that the given sequences are regular and the results are presented concerning the period of successive differences and the asymptotic density of these sequences. The fourth chapter contains the sequences $(4, v)$, actualy, a special case, $(4, 4k + 1)$, $k \geq 1$, for which regularity is proved, shown by how much the period of successive differences, the fundamental difference, and the asymptotic density are. The fifth chapter deals with the remaining cases from a hypothesis of which little is known.
Accepted by the Scientific Board on: 5.7.2019.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Petar Đapić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad;
Member:	Dr. Bojan Bašić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad;
Member:	Dr. Anna Slivková, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad.