UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ana Bogdanović

GENERATIVNE FUNKCIJE

MASTER RAD

Novi Sad, 2016.

Sadržaj:

Predgovor

U ovom master radu se prezentuje metod generativnih funkcija, moćne tehnike koja se može primenjivati u raznim matematičkim oblastima. Ovde će pre svega, akcenat biti na korišćenju generativnih funkcija u kombinatorici.

Ideja potiče od de Moavra (*Abraham de Moivre*), od oko 1720. godine, koji je upotrebio generativne funkcije za izvođenje formula za Fibonačijeve brojeve. Ojler (*Leonhard Euler*) ih je sistematski koristio od 1741. godine u svojim istraživanjima u teoriji brojeva. Laplas (*Pierre Simon Laplace*) je, takođe, razvio metod generativnih funkcija u svom klasičnom radu *"Theorie analytique des probabilities"* (1812. god.). Prioritet otkrića generativnih funkcija, međutim, po svemu sudeći dele Bernuli (*Jakob Bernoulli*) i Stirling (*James Stirling*).

U uvodnoj glavi rada dat je kratak pregled neophodnog predznanja iz kombinatorike, a zatim i osnovne definicije koje se tiču generativnih funkcija. Prvo se razmatraju generativne funkcije kao proizvodi polinoma koji generišu konačne nizove i način prikazivanja nizova pomoću funkcija. Opisano je kombinatorno značenje binomne teoreme i dobijanje generativnih funkcija čiji su koeficijenti kombinacije bez ponavljanja reda k u skupu od n elemenata. Opisane su i transformacije beskonačnih nizova u funkcije i obrnuto, kao ključni korak u konstruisanju generativnih funkcija beskonačnih nizova, a zatim i uopštenje binomne teoreme i dobijanje generativnih funkcija čiji su koeficijenti kombinacije reda k u skupu od n elemenata, sa ponavljanjem. Zatim se uz pomoć određenih transformacija nad opisanim generativnim funkcijama, dobija i generativna funkcija za rešavanje kombinatornih problema u kojima je bitan poredak elemenata, odnosno eksponencijalna generativna funkcija, posebno pogodna za rešavanje problema u kojima se javljaju varijacije elemenata.

U drugoj glavi govori se o operisanju generativnim funkcijama. Dati su primeri konstruisanja generativnih funkcija za zadate nizove, pomoću opisanih operacija i već poznatih generativnih funkcija. Npr. objašnjeno je kojim nizovima odgovaraju generativne funkcije dobijene sabiranjem, množenjem, transliranjem članova, množenjem konstantom, smenom promenljive, diferenciranjem, integracijom i prelaskom na niz parcijalnih suma, za funkcije koje odgovaraju nekim već poznatim nizovima. Ovi postupci biće potkrepljeni velikim brojem primera.

Treća glava sadrži brojne primene generativnih funkcija. Prikazano je kako se koriste generativne funkcije kao tehnika za rešavanje kombinatornih problema, prvo problema vezanih za kombinacije elemenata, potom problema prebrajanja u kojima je bitan poredak elemenata. Primeniće se generativne funkcija na određivanje članova nizova zadatih rekurentnim relacijama, najpre linearnim a zatim i drugih tipova: Fibonačijevih brojeva, harmonijskih brojeva, Katalanovih brojeva itd. Takođe, data je i primena na računanje broja particija datog prirodnog broja (rastavljanja na sabirke). Na kraju, pojavljuje se i primer primene na izračunavanje matematičkog očekivanja diskretne promenljive u teoriji verovatnoće, kao i neke primene na zadatke koji su se pojavljivali na matematičkim takmičenjima srednjoškolaca.

Ana Bogdanović

1. Uvod

1.1. Osnovne tehnike prebrojavanja

Kombinatorika je matematička disciplina koja proučava diskretne skupove i strukture. Povezana je sa mnogim drugim granama matematike, poput algebre, teorije verovatnoće, geometrije, kao i sa raznim oblastima u računarstvu, a osim toga, njeni principi i logika korisni su u svakodnevnom životu. Reč kombinatorika nastala je od latinske reči *combinare* što znači slagati. Termin ''kombinatorika'' potiče od Lajbnica (*Gottfried Leibniz*) u njegovom radu ''*Dissertatio de Arte* Combinatoria'' iz 1666. godine, koji, zajedno s Bernulijem (*Jakob Bernoulli*), razvija kombinatoriku u savremenu matematičku disciplinu, mada su se kombinatorni problemi javljali i ranije. Kombinatorika je oblast matematike u neprestanom i brzom razvitku, a jedan od osnovnih i najvažnijih problema kojima se bavi kombinatorika svakako je prebrojavanje (enumeracija) skupova. Veoma moćna metoda prebrojavanja koja se nije razvijala uz ''tradicionalnu'' kombinatoriku, već je svoju primenu našla u modernijoj istoriji kombinatorike, jeste metoda generativnih funkcija, o kojoj će u ovom radu biti reči. Biće objašnjeno na koji način funkcioniše i gde se sve može primeniti, ne samo kao tehnika prebrojavanja, nego i kao tehnika za rešavanje mnogih drugih problema. Ali pre svega, definišimo neke osnovne pojmove kombinatorike i osnovne metode prebrojavanja. U daljem toku rada videćemo da se do istih rezultata dolazi i pomoću generativnih funkcija.

Kod nekih kombinatornih problema, odnosno prebrajanja izbora elemenata, bitan je poredak u kojem se elementi nalaze, i u tom slučaju govorimo o uređenom izboru elemenata. Takođe, treba obratiti pažnju i na to da li je, ili nije dozvoljeno ponavljanje elemenata.

Definicija 1.1.1. Neka je X n-točlani skup, $n \in N$. *Permutacija* skupa X je bilo koja uredjena n-torka različitih elemenata iz tog skupa.

Teorema 1.1.1. Broj permutacija skupa od n elemenata je $P(n) = n!$.

Definicija 1.1.2. *Varijacija* k-te klase, bez ponavljanja, n-točlanog skupa X, je bilo koja uredjena k-torka različitih elemenata iz tog skupa.

Teorema 1.1.2. Broj varijacija k-te klase skupa od n elemenata je

$$V(n,k) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\,.$$

Napomena 1.1.1. Ako nije posebno naglašeno, podrazumeva se da su u pitanju varijacije bez ponavljanja, odnosno, svaki element iz skupa učestvuje najviše jednom u varijaciji.

Definicija 1.1.3. *Varijacija sa ponavljanjem* k-te klase n-točlanog skupa X, je bilo koja uređena k-torka njegovih elemenata.

Teorema 1.1.3. Broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata je

$$\bar{V}(n,k) = n^k.$$

Kada kod prebrajanja izbora elemenata, nije bitan poredak u kojem se elementi nalaze, govorimo o neuređenom izboru elemenata. Kod neuređenih izbora elementa, veliki značaj imaju binomni koeficijenti. Binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ imaju veliki broj primena i sasvim sigurno su jedan od najvažnijih kombinatornih pojmova.

Definicija 1.1.4. Neka je X skup, a k nenegativan ceo broj. Simbol $\binom{X}{k}$ označava skup svih k-točlanih podskupova skupa X.

Definicija 1.1.5. Neka su n, k nenegativni celi brojevi, tako da je $n \geq k$. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je funkcija promenljivih n i k data pomoću

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}\,.$$

Napomena 1.1.2. Posebne vrednosti binomnih koeficijenata su $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$. Ovu definiciju možemo da proširimo i na negativne vrednosti k i na vrednosti $k > n$ dogovorom da je $\binom{n}{k} = 0$, za sve $k < 0$ i $k > n$.

Lema 1.1.1. Faktorijelna reprezentacija. Za cele brojeve n i k, $n \geq k \geq 0$, važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Lema 1.1.2. Uslov simetričnosti. Za svaki ceo broj $n \geq 0$ i svaki ceo broj k važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Najvažnije svojstvo binomnih koeficijenata iskazano je u sledećoj teoremi. Ona se često naziva i Binomni razvoj.

Teorema 1.1.4. Binomna teorema. Za svaki nenegativni ceo broj n važi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(Ovo je jednakost dva polinoma sa promenljivama x i y, pa važi za proizvoljne vrednosti x i y).

Definicija 1.1.6. *Kombinacija* k-te klase, bez ponavljanja, n-točlanog skupa X, je bilo koji njegov podskup od k elemenata.

Teorema 1.1.5. Broj kombinacija k-te klase skupa od n elemenata je

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Napomena 1.1.3. Kao i kod varijacije, podrazmeva se da su u pitanju kombinacije bez ponavljanja, ukoliko nije drugačije naglašeno.

Definicija 1.1.7. *Kombinacija,* k-te klase, *sa ponavljanjem,* n-točlanog skupa X, je bilo koji multiskup sastavljen od tačno k, ne obavezno različitih, elemenata skupa X.

Teorema 1.1.6. Broj kombinacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata je

$$\bar{C}(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

1.2. Generativna funkcija konačnog niza

Generativne funkcije su veoma koristan metod za rešavanje mnogih problema, često kombinatorne prirode, ali ne i samo takvih. Osnovna ideja je da se beskonačnom nizu brojeva dodeli određena funkcija, tzv. generativna funkcija. Na taj način se beskonačno mnogo brojeva niza, zamenjuje jednim objektom. Dakle, generativne funkcije omogućuju da se problemi nad nizom, prenesu na probleme nad funkcijom, tako da se, dobro razvijeni matematički aparat, za rad sa funkcijama i stepenim redovima, može iskoristiti i za rešavanje kombinatornih problema.

Da bi se približio smisao generativne funkcije, a pre svega veza sa kombinatornim problemima, posmatrajmo sledeće jednostavne primere:

Primer 1.2.1. Neka su a i b dva objekta koji se mogu sabirati, množiti realnim brojem i množiti između sebe (takvi objekti su, na primer, dva realna broja, dva kompleksna broja, dva polinoma…). Razmotrićemo sve moguće kombinacije, ta dva objekta. Očigledno, broj 1-kombinacija je dva, a broj 2-kombinacija od dva objekta je – jedan.

Posmatrajmo sada funkciju $f(x) = (1 + ax)(1 + bx)$ gde sabirak jedan znači: objekat a ne učestvuje u kombinaciji, a sabirak ax: objekat a učestvuje u kombinaciji. Analogno važi i za objekat b. Kada se zagrade izmnože, dobijamo:

$$(1 + ax)(1 + bx) = 1 + (a + b)x + (ab)x^2.$$

Koeficijent uz x je upravo ''spisak'' svih mogućih 1-kombinacija, a koeficijent uz x^2 je jedina 2-kombinacija ova dva objekta.

Primer 1.2.2. Slično je i kada posmatramo tri objekta a, b, c, sa istim svojstvima kao u primeru 1.2.1.. Odgovarajuća funkcija bi bila:

$$f(x) = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx) = 1 + (a + b + c)x + (ab + bc + ac)x^2 + (abc)x^3.$$

Sabirci koeficijenata uz $x,\ x^2,\ x^3$ predstavljaju sve 1-kombinacije, 2-kombinacije, 3-kombinacije od tri objekta, respektivno. Ako nas zanima samo broj kombinacija ali ne i same kombinacije dovoljno je da prebrojimo broj sabiraka uz odgovarajući stepen x-a. U tom slučaju stavili bismo da je $a = b = c = 1$, kada funkcija postaje $f(x) = (1 + x)^3$. To je funkcija koja razvijanjem po stepenima od x daje broj kombinacija jednog, dva odnosno tri elementa u skupu od tri elementa.

U narednom tekstu biće reči o polinomima i njihovom proizvodu, stoga sledi nekoliko informacija s tim u vezi.

Opšti oblik polinoma je:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Ovo je polinom n-tog stepena, gde su $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ koeficijenti iz skupa realnih brojeva. Dva polinoma se množe tako što se svaki sabirak jednog polinoma množi svakim sabirkom drugog polinoma i svi ti proizvodi se sabiraju. Ako su:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

dva polinoma, formula za koeficijent uz x^k, u proizvodu $p(x)q(x)$, gde je $0 \leq k \leq n + m$, bi bila

$$a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0.$$

Ovo je korisno zbog toga što nam često treba samo koeficijent uz x na određeni stepen. Takođe pri razvijanju proizvoda polinoma možemo stati kada članovi pređu određeni stepen, odnosno stepen x-a uz koji stoji koeficijent koji nam treba.

Posmatrajmo sad polinome zadate na sledeći način: $p(x) = \sum_{i \in I} x^i$ i $q(x) = \sum_{j \in J} x^j$, I, J su konačni skupovi prirodnih brojeva. Koeficijenti u ovim polinomima su jedan ili nula. Za svaki prirodan broj r, broj uređenih parova (i, j) za koje važi $i + j = r$ jednak je koeficijentu uz x^r u proizvodu $p(x)q(x)$. To proizilazi iz činjenice, da za svako (i, j) takvo da je $i + j = r$, u proizvodu $p(x)q(x)$ javlja se $x^i x^j = x^{i+j} = x^r$. Dakle koliko rešenja jednačine $i + j = r$ ima, toliko se puta x^r javlja u proizvodu. Ovakva konstatacija može se proširiti na tri i više polinoma, a njenu ilustraciju videćemo u primeru 1.2.5..

Sledi definicija generativne funkcije konačnog niza:

Definicija 1.2.1. Нека je $a_0 a_1 \dots a_n$ konačan niz brojeva. Funkcija $G(x)$ definisana na sledeći način:

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

naziva se generativna funkcija niza $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Kako izgledaju generativne funkcije pomoću kojih rešavamo neke kombinatorne probleme, pogledajmo u narednim primerima:

Primer 1.2.3. *Na koliko se načina pomoću jednog zlatnog, srebrnog i bronzanog novčića od po jedan dinar, može platiti račun od dva dinara?*

Čak i jednostavnim prebrojavanjem dobija se da je rešenje tri načina. Međutim, pokušajmo da do rešenja dođemo i pomoću proizvoda: $(1 + x)(1 + x)(1 + x)$, gde jedinica u prvoj zagradi znači da nismo iskoristili zlatni novčić, dok x označava da jesmo, isto važi i za preostala dva novčića i preostale dve zagrade. Kako je

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

zaključujemo da je traženi broj načina, koeficijent koji se nalazi uz x^2, odnosno tri. Možemo reći, da je $G(x) = (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$, generativna funkcija niza $(1, 3, 3, 1)$. Primetimo, da ova funkcija osim što daje odgovor na koliko se načina može platiti račun od dva dinara, kaže na koliko se načina može platiti i račun od jednog, odnosno tri dinira. To su koeficijenti uz x i x^3.

Primer 1.2.4. *Koliko načina za plaćanje postoji ukoliko imamo 2 zlatna, 1 srebrni i 3 bronazana novčića od po dinar, a račun od pet dinara?*

U ovom slučaju posmatramo sledeći proizvod:

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3)$$

gde sabirci u prvoj zagradi označavaju da li smo iskoristili 0, 1 ili 2 zlatna novčića, redom. Dakle broj iskorišćenih novčića se poklapa sa keficijentima x-a, s tim sto je

$x^0 = 1$. Na isti način se interpretiraju druga i treća zagrada za srebrne i bronzane novčiće. Kada razvijemo ovaj proizvod

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

rešenje dobijamo kao koeficijent uz peti stepen x-a, odnosno broj načina da se plati račun od pet novčića je 3. Generativna funkcija koju smo koristili u ovom slučaju je

$$G(x) = (1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3),$$

generativna funkcija niza brojeva $(1,3,5,6,5,3,1)$, odnosno funkcija koja generiše broj mogućnosti za plaćanje računa od 1, 2, 3, 4, 5 ili 6 dinara.

Ako bismo početno pitanje preformulisali, tako da nas zanima broj načina da se račun plati koristeći od svake vrste bar po jedan novčić, onda bi odgovarajuća generativna funkcija izgledala ovako $G(x) = (x + x^2)(x)(x + x^2 + x^3)$. Izbacili bismo samo x^0, odnosno jedinicu iz svake zagrade i time isključili mogućnost da novčić ne bude izabran.

Primer 1.2.5. *Ako imamo račun od 21 dinara i 6 novčanica od dinar, 5 od dva dinara i četiri od 5 dinara, na koliko načina možemo platiti račun?*

Traženi broj načina jednak je broju rešenja jednačine $a + b + c = 21$, $a \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $b \in \{0,2,4,6,8,10\}$, $c \in \{0,5,10,15,20\}$, gde a predstavlja deo računa plaćen novčanicom od dinar, b od dva, a c novčanicom od pet dinara. Traženi broj naći ćemo pomoću generativne funkcije

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^6)(1 + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x^5 + \cdots + x^{20})$$

kao koeficijentu uz x^{21}.

Kombinatorno značenje binomne teoreme. Posmatrajmo n različitih objekata $y_{1,}y_{2,} \dots y_n$. Zanimaju nas kombinacije, bez ponavljanja, elemenata u skupu od tih n objekata. Zapravo ovo je uopštenje ranijih primera, gde smo imali po dva ili tri objekta. Dakle posmatramo proizvod

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + y_i x) = 1 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \cdots + s_n x^n.$$

Koeficijenti:

$s_1(y_{1,}y_{2,} \dots y_n) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$

$s_2(y_{1,}y_{2,} \dots y_n) = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots y_1 y_n + y_2 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n$

...

$s_n(y_{1,}y_{2,} \dots y_n) = y_1 y_2 \dots y_n$

su funkcije od n promenljivih, a ako nas ne zanimaju same funkcije, koje su kombinacije reda k od n elemenata, gde $k = 1,2, \dots n$, već jedino broj k-kombinacija, stavićemo $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$. Dobijamo $s_k(1,1, \dots 1) = \binom{n}{k}$, $k = 1,2, \dots n$, a početni proizvod postaje

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

pa je $(1 + x)^n$ generativna funkcija niza brojeva $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}\right)$.

Koeficijente $s_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, možemo izračunati i na drugi način. Analogno razmatranju iz prethodnog odeljka, možemo reći i da je koeficijent uz x^k jednak broju rešenja jednačine $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k$, gde $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0,1\}$. Svako takvo rešenje znači da će biti odabrano k promenljivih među promenljivama $i_1, i_2, \dots, i_n$, iz čega sledi da će $n - k$ promenljivih uzeti vrednost 0. Broj ovakvih odabira jednak je broju podskupova sa k elemenata u n-točlanom skupu, odnosno broju $\binom{n}{k}$, poznatom kao binomni koeficijent.

Možemo reći da je $(1 + x)^n$ generativna funkcija čiji su koeficijenti broj kombinacija k-te klase u skupu od n elemenata, a ilustraciju ovog tvrđenja videćemo u primeru 3.1.

1.3. Generativna funkcija beskonačnog niza

Neka je $a_0, a_1, \dots a_n \dots$ beskonačni brojevni niz, tada beskonačni brojevni red predstavlja sumu svih članova ovog niza $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$. Zbirovi $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1, \dots$, $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ zovu se parcijalne sume. Kažemo da je red konvergentan ako postoji granična vrednost $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$, koju zovemo zbir beskonačnog reda.

Funkcijski red (red funkcija) je red čiji su članovi funkcije iste promenljive: $\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$. Oblast konvergencije funkcijskog reda je skup svih onih vrednosti x, koje pripadaju zajedničkoj oblasti definisanosti svih funkcija $u_i(x)$, za koje konvergiraju dobijeni brojevni redovi.

Stepeni redovi spadaju u funkcijske redove, čiji su članovi funkcije iste promenljive x. Kod stepenog reda, opšti član je n – ti stepen nezavisno promenljive, pomnožen nekim koeficijentom:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i$$

ili,

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x - x_0)^i$$

gde su koeficijenti a_n i vrednost x_0 konstante. Tačka x_0 se naziva tačka razvoja stepenog reda. Tačka razvoja za prvi red je očigledno $x_0 = 0$. Očigledno je da stepeni red uvek konvergira za $x = x_0$, kada je njegova suma jednaka a_0. Pored toga, red apsolutno konvergira u nekom intervalu, $|x - x_0| < r$. Poluširina intervala konvergencije stepenog reda r, se naziva poluprečnik konvergencije. Suma beskonačnog stepenog reda, u intervalu konvergencije je neka funkcija $f(x)$, ili drugim rečima on u intervalu konvergencije definiše neku funkciju $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots.$$

Obrnuto, neka se neprekidna funkcija $f(x)$, koja ima sve izvode u tački $x = x_0$ može razviti u red,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

oko tačke x_0, u intervalu u kome je on konvergentan. Ovaj red poznat je pod nazivom Tajlorov red. Ovakve transformacije beskonačnih nizova u funkcije i obrnuto, ključni su korak u konstruisanju generativnih funkcija.

Sledeća propozicija, koju možemo videti i u knjizi [1] iz literature, govori o tome da se za svaki stepeni red, ako niz $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$ ne raste prebrzo, može naći poluprečnik konvergencije, odnosno da postoji interval konvergencije, tako da za odgovarajuće vrednosti promenljive x iz datog intervala, stepeni red zaista definiše funkciju, pomoću koje se pak jedinstveno odredjuju članovi niza $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$.

Propozicija 1.3.1. Neka je $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$ niz realnih brojeva, i pretpostavimo da za neki realan broj K, važi $|a_n| \leq K^n$ za sve $n \geq 1$. Tada, za svaki broj $x \in \left(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right)$ red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ apsloutno konvergira, što znači da vrednost te sume definiše funkciju $f(x)$ realne promenljive x, na ovom interval. Vrednosti ove funkcije na proizvoljno maloj okolini nule, jedinstveno određuju sve članove niza $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$. Funkcija $f(x)$ ima ima sve izvode u tački 0 i za sve $n = 0,1,2 \ldots$ imamo $a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}$, gde $a^{(n)}(0)$ predstavlja n-ti izvod funkcije $f(x)$ u tački 0.

Sada možemo dati definiciju generativne funkcije beskonačnog niza.

Definicija 1.3.1. Neка je $(a_0 a_1 \dots a_n, \dots)$ beskonačan niz realnih brojeva. Generativna funkcija $G(x)$ ovog niza predstavlja zbir beskonačnog reda

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i.$$

Primetimo da elementi niza $(a_0, a_1, \dots a_n, \dots)$ jesu uređeni ali ne moraju obavezno biti različiti. Na primer, kako smo ranije videli, funkcija $(1+x)^3$ je generativna funkcija niza brojeva 1,3,3,1, dakle $a_0 = a_4$ i $a_1 = a_2$. Takođe, možemo zaključiti da se svaki konačni niz može pretvoriti u beskonačni, tako što su, nakon odgovarajućeg n, svi članovi niza a_{n+i} , $i \in N$ jednaki nuli.

Sledi nekoliko primera beskonačnih nizova i odgovarajućih generativnih funkcija:

Primer 1.3.1. Posmatrajmo niz $(1, 0, 0, \dots)$. Generativna funkcija ovog niza je konstantna funkcija $f(x) = 1$.

Primer 1.3.2. Identička funkcija $f(x) = x$ je generativna funkcija niza $(0, 1, 0, 0, \dots)$.

Primer 1.3.3. $1 + x + x^2 + x^3 \dots$ je stepeni red, gde je $a_i = 1$, za sve i. Ako je x realan broj iz interval $(-1,1)$, onda ovaj red konvergira i njegova suma je $\frac{1}{1-x}$. U tom smislu, ovaj red određuje funkciju $\frac{1}{1-x}$, i obrnuto. Zaista, $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ je Tejlorov red funkcije $\frac{1}{1-x}$ u tački $x = 0$, jer kada diferenciramo funkciju k puta, zatim ubacimo $x = 0$ u rezultat, dobijamo baš $k!$, kao koeficijent uz x^k. Možemo sada reći da je $\frac{1}{1-x}$ generativna funkcija niza $(1, 1, 1, \dots)$.

Primer 1.3.4. Takođe poznat je i razvoj funkcije e^x u stepeni red $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ što znači da je e^x generativna funkcija niza $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots)$.

Uopštenje binomne teoreme. Uopštenje binomne teoreme podrazumeva da se za stepen binoma, umesto prirodnog broja n, $(x+y)^n$, uzima broj iz skupa realnih brojeva. Detaljnije o narednoj definiciji i propoziciji može se pogledati u knjizi iz literature, [1].

Definicija 1.3.2. Za svaki proizvoljan realan broj r i svaki nenegativan ceo broj k, definišemo binomni koeficijent

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k)}{k!}$$

(po definiciji je $\binom{r}{0} = 1$). Funkcija $(1+x)^r$ je generativna funkcija niza $\left(\binom{r}{0}\binom{r}{1}\binom{r}{2}\binom{r}{3}\dots\right)$.

Propozicija 1.3.2. Stepeni red $\binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots$ konvergira za sve $|x| < 1$.

Za kombinatornu primenu, važno je primetiti da ukoliko je r negativan ceo broj binomni koeficijent $\binom{r}{k}$ se može prikazati kao binomni koeficijent bez negativnih brojeva, odnosno za $r = -n$ je

$$\binom{r}{k} = \binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\dots\big(-n-(k-1)\big)}{k!} = (-1)^k\frac{n(n+1)\dots\big(n+(k-1)\big)}{k!}$$
$$= (-1)^k\binom{n+k-1}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}.$$

Tako, ako razvijamo $\frac{1}{(1-x)^n}$ dobijamo

$$(1-x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i-1}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^i$$
$$= 1 + nx + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n+i-1}{i}x^i + \cdots.$$

Dakle $\frac{1}{(1-x)^n}$ je generativna funkcija niza $\left(1, n, \binom{n+1}{2}, \dots \binom{n+i-1}{i}, \dots\right)$, odnosno niza $\left(\binom{n-1}{n-1}, \binom{n}{n-1}, \binom{n+1}{n-1}, \dots \binom{n+i-1}{n-1}, \dots\right)$. Može se reći da je $(1-x)^{-n}$ generativna funkcija čiji su koeficijenti broj kombinacija reda k u skupu od n elemenata, sa neograničenim ponavljanjem svakog od elementa.

Primetimo da je suma stepenog reda $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, koji smo već pominjali, slučaj kada je $n = 1$. Za $n = 2$, dobijamo generativnu funkciju niza $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$.

1.4. Eksponencijalna generativna funkcija

Videli smo da su generativne funkcije pogodne za pronalaženje broja kombinacija, ali postavlja se pitanje da li se mogu primeniti i na rešavanje kombinatornih problema u kojima je bitan poredak elemenata?

Primetimo da se permutacije nekog skupa, sa svim različitim elementima, dobijaju tako što se elementi datog skupa na sve moguće načine ispremeštaju. Takođe ako nam treba broj varijacija klase k u skupu od n elemenata, prvo ćemo naći sve kombinacije klase k, a zatim prebrojati permutacije svake od nađenih kombinacija. Tako da u slučaju varijacija $V(n,k)$ postoji sledeća veza sa kombinacijama $C(n,k)$: $V(n,k) = k!\,C(n,k)$. Ranije smo videli da se kombinacije reda k, $C(n,k)$ mogu pronaći pomoću generativne funkcije $(1+x)^n$, a sada menjajući koeficijente ove generativne funkcije, na sledeći način:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} k!\,C(n,k)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} V(n,k)\frac{x^k}{k!}$$

dobijamo i generativnu funkciju koja sadrži informacije o varijacijama reda k, $V(n,k)$. To su koeficijenti uz $\frac{x^k}{k!}$, odnosno koeficijenti oblika $\frac{n}{(n-k)!}$, koji se zaista i dobijaju kada pomnožimo $k!$ i $\binom{n}{k}$ tj. $k!\frac{n}{k!(n-k)!}$. Dati koeficijenti govore o broju varijacija k elemenata u n-točlanom skupu.

U ovom primeru, posmatrali smo generativnu funkciju drugačijeg oblika, odnosno oblika

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\propto} a_k \frac{x^k}{k!}$$

koja se zove eksponecijalna generativna funkcija. Uopšte, kada kombinatorne probleme, u kojima je bitan poredak elemenata, želimo da rešimo pomoću generativnih funkcija najčešće koristimo eksponencijalne generativne funkcije.

Posmatrajmo sada problem, u kome se jedan objekat u varijaciji moze javiti više puta, i pokušajmo da ga rešimo pomoću eksponencijalne generativne funkcije.

Na koliko načina od slova a,a,a,b,c možemo sklopiti reč od k slova, gde je k=1,2,3,4,5?

Primećujemo da su u pitanju varijacije. Pokušaćemo da se poslužimo načinom koji smo prethodno opisali, odnosno da modifikujemo koeficijente generativne funkcije koja bi opisivala broj kombinacija k-elemenata iz datog skupa

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x)(1+x)\,.$$

Stepeni x-a u prvoj zagradi nam kažu da se slovo *a* može javiti nula, jednom, dva ili tri puta, druga i treća zagrada govore da se slova *b* i *c* javljaju jednom ili nijednom. Nakon množenja zagrada svaki sabirak ćemo pomnožiti i podeliti sa $k!$, dobijamo

$$1 + 3\frac{x}{1!} + 8\frac{x^2}{2!} + 24\frac{x^3}{3!} + 72\frac{x^4}{4!} + 120\frac{x^5}{5!}$$

što bi značilo da koeficijenti uz $\frac{x^k}{k!}$ odredjuju broj reči od k slova. Međutim, običnim kombinatornim rasuđivanjem zaključujemo da je broj traženih varijacija 3,7,13,20 i

20, redom. Dakle, postoji greška i povezana je s činjenicom da za razliku od ranijeg razmatranja, ovde imamo varijacije s ponavljanjem. Moramo uzeti u obzir da ako imamo kombinaciju od k elemenata, broj permutacija unutar te kombinacije biće manji ako među k elemenata ima istih, sto je upravo bio slučaj s ovim primerom. Drugim rečima ako smo uzeli dva slova a, pogrešno smo zaključili da oni daju dve reči, zapravo daju samo jednu. Na osnovu ovog, možemo reći da ako je jedno slovo u kombinaciji od k elemenata ponovljeno m puta, onda u toj kombinaciji postoji $\frac{k!}{m!}$ permutacija. Tako da ako se neko slovo nađe u kombinaciji m puta, onda moramo i podeliti sa $m!$, pa ispravljena generativna funkcija izgleda ovako

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)(1+x)=1+3x+\frac{7}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+\frac{5}{6}x^4+\frac{1}{6}x^5$$
$$=1+3x+2!\frac{7}{2}\frac{x^2}{2!}+3!\frac{13}{6}\frac{x^3}{3!}+4!\frac{5}{6}\frac{x^4}{4!}+5!\frac{1}{6}\frac{x^5}{5!}$$
$$=1+3x+7\frac{x^2}{2!}+13\frac{x^3}{3!}+20\frac{x^4}{4!}+20\frac{x^5}{5!}.$$

Koeficijenti uz $\frac{x^k}{k!}$ su tražene vrednosti.

I u opštem slučaju postupak je sličan, tako dolazimo do zaključka da je eksponencijlana generativna funkcija, čiji su koeficijenti broj varijacija reda k u skupu od n elemenata, sa neograničenim ponavljanjem svakog od elemenata, sledeća

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots\right)^n=(e^x)^n=e^{nx}=$$

$$=1+\frac{nx}{1!}+\frac{(nx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(nx)^k}{k!}+\cdots \quad =\sum_{k=0}^{\propto} n^k\frac{x^k}{k!}$$

gde su koeficijenti n^k.

U pretposlednjoj jednakosti koristimo poznato razvijanje funkcije e^x u red, tj. $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=e^x$. Možemo primetiti i da je funkcija $e^x=\sum_{k=0}^{\propto}\frac{x^k}{k!}$ eksponencijalna generativna funkcija za niz $(1,1,1\ldots)$. Dok je, recimo, za niz $(1,1,2!,3!,4!\ldots)$, odnosno $a_k=k!$, eksponencijalna generativna funkcija $\frac{1}{1-x}$, jer je

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\propto}x^k=\sum_{k=0}^{\propto}k!\frac{x^k}{k!}.$$

2. Operacije s generativnim funkcijama

Videli smo neke nizove i njihove generativne funkcije, međutim postavlja se pitanje da li bi uz pomoć već poznatih generativnih funkcija za određene nizove, mogli da konstruišemo nove generativne funkcije za neke druge nizove? Postoje određene tehnike pomoću kojih možemo vršiti operacije s generativnim funkcijama, i u nastavku će biti izložene.

a) Sabiranje generativnih funkcija;

Neka su $(a_0, a_1, a_2 \dots)$ i $(b_0, b_1, b_2 \dots)$ nizovi, čije su generativne funkcije $A(x)$ i $B(x)$. Posmatrajmo funkciju $G(x) = A(x) + B(x)$

$$A(x) + B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i .$$

Dakle, funkcija $G(x)$ je generativna funkcija niza $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$.

b) Množenje generativne funkcije konstantom;

Ako je $A(x)$ generativna funkcija niza $(a_0, a_1, a_2 \dots)$ i c proizvoljan realan broj, tada je $cA(x)$ generativna funkcija niza $(ca_0, ca_1, ca_2 \dots)$. Zaista

$$cA(x) = c \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c a_i x^i .$$

Na osnovu a) i b) možemo zaključiti da je linearna kombinacija $\alpha A(x) + \beta B(x)$ generativna funkcija niza $(\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2 \dots)$, gde su α i β realni brojevi. Ovaj zaključak možemo primeniti i na više generativnih funkcija.

c) Translacija;

Ako je dat niz $(0,0, \dots 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$, gde se nula na početku niza ponavlja n puta, a znamo generativnu funkciju, $A(x)$, niza $(a_0, a_1, a_2 \dots)$, onda je generativna funkcija početnog niza $x^n A(x)$. Može se reći, da na ovaj način pomeramo niz u desno, za odredjeni broj mesta. Zaista

$$x^n A(x) = x^n \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=n}^{\infty} a_{i-n} x^i .$$

Tako se generativna funkcija niza $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 \dots)$ dobija kada generativnu funkciju niza $(1, 1, 1, 1 \dots)$, odnosno $\frac{1}{1-x}$, pomnožimo sa x^4.

Međutim šta se dešava ako želimo da pomerimo niz u levo, odnosno da nađemo generativnu funkciju za niz $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \dots)$? U tom slučaju moramo $A(x)$ podeliti sa x^n, ali pre toga oduzeti prvih n članova, i dobijamo traženu generativnu funkciju, odnosno

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}$$

dakle,

$$x^{-n}\sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+n} x^i .$$

Za niz $\left(\frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!} \dots\right)$, generativnu funkciju nalazimo pomoću opisanog pravila i funkcije e^x, koja je generativna funkcija niza $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots)$, tako što ćemo izvršiti odgovarajuće oduzimanje, a potom deljenje:

$$\left(e^x - 1 - 1 - \frac{1}{2!}\right)/x^3 = \frac{2e^x - 5}{2x^3}.$$

d) *Smena promenljive;*

Neka je c proizvoljan realan broj, $A(x)$ generativna funkcija niza $(a_0, a_1, a_2 \dots)$. Posmatrajmo funkciju $G(x) = A(cx)$, imamo $A(cx) = a_0 + a_1 cx + a_2 (cx)^2 + \cdots$, dakle $G(x)$ je generativna funkcija niza $(a_0, a_1 c, a_2 c^2 \dots)$.

Recimo, ako želimo da odredimo generativnu funkciju niza $(1, 2, 4, 8, 16 \dots)$, krećemo od generativne funkcije niza $(1, 1, 1, 1 \dots)$, odnosno $A(x) = \frac{1}{1-x}$. Za $c = 2$, $G(x) = A(2x) = \frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 \dots = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots$. Dakle, $G(x) = \frac{1}{1-2x}$ je tražena generativna funkcija.

Možemo takođe, zameniti promenljivu x sa x^n. U ovom slučaju dobijamo generativnu funkciju niza, kod koga je na kn-tom mestu k-ti član početnog niza, a ostali članovi su jednaki 0. Odnosno $G(x) = A(x^n) = a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \cdots$.

Na primer, ako zamenimo x sa x^2, dobijamo generativnu funkciju niza $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0 \dots)$. Niz $(1, 0, 0, 1, 0, 0..)$, možemo dobiti zamenom promenljive x, promenljivom x^3 u funkciji $A(x) = \frac{1}{1-x}$, odnosno odgovarajuća generativna funkcija bi bila $G(x) = A(x^3) = \frac{1}{1-x^3}$.

e) D*iferenciranje i integracija*;

Ako je funkcija $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, onda je njen izvod

$$A'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} (i+1)a_{i+1}\, x^i.$$

Funkcija $A'(x)$ je generativna funkcija niza $(a_1,\ 2a_2,\ 3a_3, \dots)$.

Integral funkcije $A(x)$ je

$$\int_0^x A(t)\, dt = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} a_{i-1}\, x^i\ .$$

Dakle, $\int_0^x A(t)\, dt$ je generativna funkcija niza $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \dots)$.

Za primer, posmatrajmo generativnu funkciju niza $(1, 1, 1 \dots)$, odnosno funkciju $A(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Diferenciranjem, dobijamo

$$A'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} (i+1)\, x^i$$

odnosno, generativnu funkciju niza $(1, 2, 3, \dots)$. S druge strane integracijom date funkcije nastaje generativna funkcija niza $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$, odnosno

$$\int_0^x A(t)\, dt = \ln\frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x^i.$$

f) *Množenje generativnih funkcija.*

Neka su $(a_0, a_1, a_2 \dots)$ i $(b_0, b_1, b_2 \dots)$ nizovi, čije su generativne funkcije $A(x)$ i $B(x)$, onda je $A(x)B(x)$ generativna funkcija niza $(c_0, c_1, c_2 \dots)$ tako da je

$$c_n = \sum\nolimits_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i}\ .$$

Zaista, $A(x)B(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) =$

$$=\ a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots.$$

Napomena 2.1. Ako su svi članovi niza $(b_0, b_1, b_2 \dots)$ jedinice, generativna funkcija tog niza je $B(x) = \frac{1}{1-x}$. Proizvod $A(x)B(x)$ postaje

$$A(x)\frac{1}{1-x} = \sum\nolimits_{i=0}^{n} a_i = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots\ .$$

Dakle,

$$A(x)\frac{1}{1-x}$$

je generativna funkcija za parcijalne sume niza generisanog funkcijom $A(x)$.

U narednim primerima, videćemo kako se dobijaju generativne funkcije nekih nizova, kombinovanjem prethodno opisanih operacija.

Primer 2.1. Odredimo generativnu funkciju niza $(1, 0, 3, 0, 5, 0 \dots)$. Polazimo od funkcije $G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ za koju znamo da je generativna funkcija niza $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$. Koristimo smenu promenljive, odnosno pravilo pod *d)*, i promenljivu x menjamo sa $-x$. Dakle $G(-x) = \frac{1}{(1-(-x))^2}$ je generativna funkcija niza $((-1)^0 1,\ (-1)^1 2,\ (-1)^2 3,\ (-1)^3 4,\ (-1)^4 5 \dots)$, što je zapravo niz $(1,\ -2, 3,\ -4, 5 \dots)$. Dalje koristimo sabiranje generativnih funkcija, pa množenje konstantom (pravila *a)* i *b)*), odnosno funkcija

$$\frac{1}{2}\big(G(x) + G(-x)\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{1 + x^2}{(1-x)^2(1+x)^2}$$

je tražena generativna funkcija niza $(1{,}0{,}3{,}0{,}5{,}0 \dots)$. Opisani postupak se često koristi kada je potrebno parne članove niza zameniti nulom.

Primer 2.2. Posmatrajmo sada niz $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6 \dots)$. U potrazi za njegovom generativnom funkcijom, prvo ćemo pronaći generativnu funkciju niza $(-6, -6, -6, -6 \dots)$, koju dobijamo korišćenjem pravila *b),* odnosno množenjem funkcije $\frac{1}{1-x}$ konstantom -6. Zatim koristimo smenu promenljive x promenljivom $-x$, pa je $\frac{-6}{1+x}$ generativna funkcija niza $(-6, 6, -6, 6, -6 \dots)$. Primenom translacije, pomeranjem niza u desno za četiri mesta dobijamo početni niz $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6 \dots)$ čija je genrativna funkcija $-6x^4/(1 + x)$.

Primer 2.3. Za pronalaženje generativne funkcije niza $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0 \dots)$, koristimo pravilo *a)*, odnosno sabiramo generativne funkcije nizova $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ i $(0, 0, -1, 0, 0, -1, \dots)$. Prva generativna funkcija već nam je dobro poznata, a drugu dobijamo polazeći od funkcije $1/(1 - x^3)$, množenjem sa x^2 i konstantom -1 (pravila *c)* i *b)*). Dakle, generativna funkcija početnog niza je:

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^3} = \frac{1+x}{1-x^3}.$$

Primer 2.4. Naći generativnu funkciju za niz kvadrata $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$, odnosno za niz sa opštim članom $a_n = (n + 1)^2$.

Polazimo od funkcije $\frac{1}{(1-x)^2}$, za koju smo u pravilu *e)* videli da je generativna funkcija niza $(1, 2, 3, \dots)$, gde je $a_n = n + 1$. Ako na ovu funkciju primenimo pravilo diferenciranja, dobićemo

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots.$$

Dakle, $\frac{2}{(1-x)^3}$ je generativna funkcija niza $(2 \cdot 1, 3 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots)$, sa opštim članom $a_n = (n+2)(n+1) = (n+1)^2 + n + 1$. Pošto je nama potreban niz sa opštim članom $a_n = (n+1)^2$, preostaje samo da od generativne funkcije $\frac{2}{(1-x)^3}$ oduzmemo generativnu funkciju niza $(1, 2, 3, \dots)$. Time dobijamo da je tražena generativna funkcija jednaka

$$\frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Primer 2.5. Da je $\frac{1}{(1-x)^n}$ generativna funkcija niza $\left(1, n, \binom{n+1}{2}, \dots \binom{n+i-1}{i}, \dots\right)$, videli smo već ranije, ali u ovom primeru do istog zaključka doći ćemo i primenom operacija nad generativnim funkcijama, opisanim u ovoj glavi. Naime, poznato je da ako se funkcija $\frac{1}{1-x}$ diferencira jednom dobija se, $\frac{1}{(1-x)^2}$, generativna funkcija niza $(1, 2, 3, 4 \dots)$. Pretpostavimo da je funkcija $\frac{1}{1-x}$ diferencirana k puta, $k \in N$, $A(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, generativna funkcija niza $\left(k!, (k+1)!, \frac{(k+2)!}{2!}, \dots, \frac{(k+i)!}{i!}, \dots\right)$. Pri diferenciranju $k+1$ puta, funkcije $\frac{1}{1-x}$, dobijamo $A'(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$, a na osnovu pravila pod *e),* koje kaže da je funkcija $A'(x)$ generativna funkcija niza $(a_1,\ 2a_2, \dots, ia_i, \dots)$, znamo da je $\frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}$ generativna funkcija niza $\left((k+1)!, (k+2)!, \frac{(k+3)!}{2!}, \dots, \frac{(k+1+i)!}{i!}, \dots\right)$. Na osnovu matematičke indukcije zaključujemo da je pretpostavka tačna, pa kako važi za svako $n \in N$, važi i za $n-1$. Dakle, diferenciranjem funkcije $\frac{1}{1-x}$ $n-1$ puta dobijamo generativnu funkciju $G(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$ niza $\left((n-1)!,\ n!, \frac{(n+1)!}{2!}, \dots, \frac{(n-1+i)!}{i!}, \dots\right)$. Dalje, množenjem $G(x)$ sa $\frac{1}{(n-1)!}$ dobija se tražena generativna funkcija, odnosno $\frac{1}{(1-x)^n}$, generativna funkcija niza $\left(\frac{(n-1)!}{(n-1)!}, \frac{n!}{(n-1)!}, \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}, \dots, \frac{(n-1+i)!}{i!(n-1)!}\right)$, tj. $\left(1, n, \binom{n+1}{2}, \dots \binom{n+i-1}{i}, \dots\right)$.

3. Primena generativnih funkcija

Primena generativnih funkcija može se videti, kako u jednostavnijim kombinatornim problemima, tako i u nešto složenijim. Mogu se primeniti u problemima prebrajanja, problemima koji se tiču sređivanja polinoma, rekurzivnih jednačina, Fibonačijevih i Katalnovih brojeva, particije prirodnog broja, teoroje verovatnoće.

Za početak ćemo videti kako ova tehnika ''radi'' sa uobičajenim problemima prebrajanja kombinacija, a čime se služimo da bi rešavala i probleme prebrajanja kod kojih je poredak elemenata bitan.

Rešićemo prvo jedan jednostavniji problem:

Primer 3.1. *Na koliko se načina od 20 različitih kuglica može izabrati kolekcija od njih k, $k = 1, 2 \dots 20$?*

Svaka od 20 kuglica može biti izabrana ili ne, tako da svakoj odgovara po jedna zagrada u izrazu $(1+x)^{20}$. Traženo rešenje se nalazi kao koeficijenti uz x^k, u razvoju generativne funkcije:

$$(1+x)^{20} = 1 + \binom{20}{1} x + \binom{20}{2} x^2 + \cdots + \binom{20}{7} x^7 + \cdots + \binom{20}{20} x^{20}.$$

Još jedan od problema u kome je tražen broj kombinacija, a za čije se rešavanje može primeniti generativna funkcija, glasi:

Primer 3.2. *Kutija sadrži 30 crvenih, 40 plavih i 50 belih kuglica, a kuglice iste boje se međusobno ne razlikuju. Na koliko se načina može izabrati 70 kuglica iz kutije?*

Pre nego što pređemo na rešavanje problema, pronađimo generativnu funkciju za niz $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, gde se jedinica na početku niza pojavljuje n puta. Koristeći prethodno opisanu translaciju niza u desno i generativnu funkciju $\frac{1}{1-x}$ niza $(1, 1, 1 \dots)$, imamo da je $x^n/(1-x)$ generativna funkcija niza $(0, 0, \dots, 0, 1, 1 \dots)$, gde se 0 javlja n puta. Oduzimajući ovako dobijen niz od niza $(1, 1, 1 \dots)$ dobijamo početni niz $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, a odgovarajuća generativna funkcija je

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Ovo se naravno moglo dobiti i direktno, kao suma prvih n članova geometrijskog niza $(1, x, x^2, \dots\ x^{n-1}, \dots)$.

Vratimo se problemu. Posmatraćemo proizvod:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{30})(1 + x + x^2 + \dots + x^{40})(1 + x + x^2 + \dots + x^{50})$$

iz čijeg razvoja dobijamo traženo rešenje, drugim rečima tražimo koeficijent uz x^{70}. Zapisaćemo proizvod u nešto drugačijem obliku, znajući da je $(1 + x + x^2 + \dots + x^{30})$ generativna funkcija niza $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ sa 31 jedinicom na početku, a pokazali smo da je to takođe i funkcija $(1 - x^{31})/(1 - x)$. Dakle, $(1 + x + x^2 + \dots + x^{30}) = (1 - x^{31})/(1 - x)$, a analogno važi i za preostale dve zagrade u proizvodu, tako da on postaje:

$$\frac{1 - x^{31}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{51}}{1 - x} = \frac{1}{(1 - x)^3}(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51}).$$

Faktor $(1 - x^3)^{-1}$ možemo rastaviti pomoću binomne teoreme, a u proizvodu $(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})$ bitni su nam samo sabirci čiji stepen x-a ne prelazi 70, što znači da ne moramo razvijati ceo proizvod. Dakle, dobijamo

$$\left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \cdots\right)(1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + \cdots).$$

U ovom proizvodu x^{70} javiće se kada sabirak $\binom{72}{2}x^{70}$ iz prve zagrade pomnožimo sa sabirkom 1 iz druge, zatim $\binom{41}{2}x^{39}$ sa $-x^{31}$, $\binom{31}{2}x^{29}$ sa $-x^{41}$ i $\binom{21}{2}x^{19}$ sa $-x^{51}$. Traženi koeficijent uz x^{70} bice $\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} = 1061$.

Sledeći primer pokazuje kako koristeći generativne funkcije u određenim problemima, možemo uštedeti na računu i odrediti koeficijent uz dati stepen x-a, u proizvodu polinoma.

Primer 3.3. *Naći koeficijent uz x^{15} u izrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$.*

Umesto da sređujemo izraz, dovoljno je da $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ zamenimo odgovarajućom funkcijom. S obzirom da je $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, množenjem leve i desne strane sa x^2 dobijamo da je $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4 = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^4$, a to je dalje $x^8(1 - x)^{-4}$. Izraz $(1 - x)^{-4}$ možemo razviti pomoću binomne formule i dobijamo:

$$x^8\left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3}x + \binom{5}{3}x^2 + \cdots + \binom{10}{3}x^7 + \cdots\right).$$

U ovom razvoju potreban nam je samo član koji sadrži x^7, jer jedino on pomnožen sa x^8 daje x^{15}. Traženi koeficijent je $\binom{10}{3} = 120$.

U narednim primerima, videćemo primenu eksponencijalne generativne funcije, pri rešavanju kombinatornih problema u kojima je bitan poredak elemenata.

Primer 3.4. *Naći eksponencijalnu generativnu funkciju za broj reči dužine k, nad azbukom od 5 slova, u kojima se svako slovo pojavljuje najviše 6 puta*.

Tražena funkcija je

$$(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^6}{6!})^5$$

u kojoj svaki sabirak oblika $\frac{x^k}{k!}$ govori da je dato slovo izabrano k puta, s tim što k nije veće od 6, jer se svako slovo pojavljuje najviše 6 puta.

Primer 3.5. *Metodom generativnih funkcija utvrditi na koliko se načina 20 studenata mogu smestiti u tri sobe, tako da u svakoj sobi bude bar jedan student?*

Koristićemo eksponencijalnu generativnu funkciju $(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^3$, u kojoj je kao što vidimo izuzet sabirak 1, odnosno x^0, zbog toga što ni jedna od tri sobe ne može biti prazna, odnosno mora u svakoj biti bar jedan, ili više studenata. Dalje je

$$(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^3 = (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

a kako važi jednakost $e^{nx} = \sum_{k=0}^{\propto} n^k \frac{x^k}{k!}$, dobijamo

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\propto} 3^k \frac{x^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\propto} 2^k \frac{x^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\propto} \frac{x^k}{k!} - 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\propto} (3^k - 3 \cdot 2^k + 3)\frac{x^k}{k!} - 1$$

Koeficijent uz $\frac{x^{20}}{20!}$ iznosi $3^{20} - 3 \cdot 2^{20} + 3$ što je i traženi broj načina.

Primer 3.6. *Odrediti broj reči dužine k, nad azbukom $\{0,1,2,3\}$ sa parnim brojem nula i neparnim brojem jedinica, metodom generativnih funkcija.*

Eksponencijalna generativna funkcija u ovom slučaju, takođe je proizvod,koji za prvi činilac ima sabirke oblika $\frac{x^k}{k!}$, s tim što k uzima samo parne brojeve, odnosno pokazuje koliko se puta može javiti nula, dok je drugi činilac zagrada sa sabircima istog oblika, ali k uzima neparne brojeve jer se jedinica može javiti samo neparan broj puta. Treći i četvrti faktor odnose se na broj pojavljivanja brojeva 2 i 3.

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2.$$

Koristićemo identitete:

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

koji se lako dobijaju iz činjenice da je:

$$e^{-x}=1+\frac{-x}{1!}+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\cdots=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots.$$

Otuda, naša eksponecijalna funkcija dobija oblik:

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})e^xe^x=\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})e^{2x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{4x}-1)=\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\propto}4^k\frac{x^k}{k!}-1\right).$$

Traženi broj je koeficijent uz $\frac{x^k}{k!}$ koji iznosi $\frac{1}{4}\cdot 4^k=4^{k-1}$, za sve $k\geq 0$.

3.1. Generativne funkcije i rekurentne jednačine

Rekurentne jednačine predstavljaju poseban oblik zapisivanja vrednosti određenog niza. To su jednačine u kojima, počevši od nekog člana niza, svaki sledeći zavisi od nekoliko prethodnih.

Definicija 3.1.1. Rekurentna jednačina reda k je jednačina oblika $a_{n+k}=F(n,a_n,a_{n+1},\dots,a_{n+k-1})$, gde je n prirodan broj, a $a_n,a_{n+1},\dots,a_{n+k-1}$ je $k+1$ uzastopnih članova niza $\{a_n\},n\in N$. Rešenje rekurentne jednačine je niz $\{a_n\}$, koji rekurentnu jednačinu prevodi u identitet.

Definicija 3.1.2. Opšte rešenje rekurentne jednačine reda k je ono rešenje koje sadrži sva rešenja. Opšte rešenje rekurentne jednačine reda k sadrži k proizvoljnih konstanti (zato što prvih k članova niza u potpunosti odredjuje niz).

Ukoliko su dati početni članovi ovog niza onda je moguće odrediti vrednosti tih konstanti — tada kažemo da smo dobili jedno ili partikularno rešenje.

Definicija 3.1.3. Linearna rekurentna jednačina je jednačina oblika

$$f_k(n)a_{n+k} + f_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \cdots + f_0(n)a_n = f(n)$$

i ona se najčešće zadaje u normiranom obliku, tj. sa $f_k(n) = 1$. Ako je $f(n) = 0$ to je linearna homogena rekurentna jednačina, a ako je $f(n) \neq 0$ to je linearna nehomogena rekurentna jednačina. Ako su funkcije $f_i(n)$ konstante onda imamo linearnu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, u protivnom govorimo o linearnoj jednačini sa funkcionalnim koeficijentima.

Dakle homogena linearna rekurentna jednačina sa konstantnim koeficijentima ima sledeći oblik:

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + c_0 a_n = 0,$$

dok je nehomogena oblika:

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + c_0 a_n = f(n).$$

I u jednom i drugom slučaju, lako možemo izraziti a_{n+k}, pomoću k prethodnih članova.

Generativne funkcije mogu se primeniti i na određivanje članova nizova zadatih linearnim rekurentnim relacijama, što ćemo videti iz sledećih primera.

Primer 3.1.1. *Koristeći generativnu funkciju odrediti formulu za izračunavanje opšteg člana, a_n, niza zadatog rekurentnom formulom $a_{n+1} = a_n + n$, uz uslov da je $a_0 = 1$.*

Neka je

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

generativna funkcija zadatog niza. Naš cilj je da dobijemo izraze oblika $(a_{n+1} - a_n - n)x^{n+1}$, koji su svi jednaki nuli budući da je $a_{n+1} = a_n + n$. Da bismo to postigli koristićemo ranije opisanu translaciju, kao i fukciju $\frac{1}{(1-x)^n}$, takođe od ranije poznatu, na sledeći način:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1} + \cdots$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} = x^2 + 2x^3 + \cdots + nx^{n+1} + \cdots$$

Množeći drugu i treću jednakost sa -1 i sabiranjem sa prvom, dobijamo:

$$f(x) - xf(x) - \frac{x^2}{(1-x)^2} = (1-x)f(x) - \frac{x^2}{(1-x)^2} =$$

$$= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - 1)x^2 + \cdots + (a_{n+1} - a_n - n)x^{n+1} + \cdots$$

Kako su u poslednjem zbiru, svi koeficijenti, osim a_0, jednaki nuli dobijamo:

$$(1-x)f(x) - \frac{x^2}{(1-x)^2} = a_0 = 1$$

Odakle je:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^3}$$

Dalje, razvijanjem u red, od ranije poznatih, funkcija $\frac{1}{1-x}$ i $(1-x)^{-3}$ dobijamo:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots + x^2\left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{2}x^{n-2} + \cdots\right) =$$

$$1 + x + 2x^2 + \left(1 + \binom{3}{2}\right)x^3 + \left(1 + \binom{4}{2}\right)x^4 + \cdots \left(1 + \binom{n}{2}\right)x^n + \cdots$$

Dakle, $f(x)$ je generativna funkcija niza $\left(1, 1, 2, 4, 7, \dots, 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \dots\right)$, a upravo to je niz zadat rekurentnom relacijom $a_{n+1} = a_n + n$, sa početnim uslovom $a_0 = 1$. Tražena formula za izračunavanje n-tog člana niza je

$$a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\ .$$

Primer 3.1.2. *Jedan od najpoznatijih nizova brojeva jeste* $(0,1,1,2,3,5,8,13,21\dots)$, *poznat kao Fibonačijev niz brojeva. Svaki član se dobija zbirom prethodna dva, odnosno rekurentnom relacijom* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, *gde su početni uslovi* $a_0 = 0$ *i* $a_1 = 1$. *Pitanje je kako pomoću generativne funkcije izvesti formulu za opšti član ovog niza?*

Kao i u prethodnom primeru, glavna ideja je da konstruišemo generativnu funkciju u kojoj će svi, osim jednog koeficijenta, biti jednaki nuli, odnoso da se poslužimo činjenicom da je $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$. Za početak, označićemo sa $f(x)$ generativnu funkciju zadatog niza, odnosno

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Posmatrajmo i funkcije dobijene primenom translacije na funkciju $f(x)$

$$xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1} + \cdots$$

$$x^2f(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{n+2} + \cdots$$

Množenjem druge i treće jednakosti sa -1, a zatim sabiranjem sve tri, dobijamo

$$(1 - x - x^2)f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n,$$

a kako su svi koeficijenti, osim $(a_1 - a_0) = 1$, jednaki nuli možemo izraziti $f(x)$ na sledeći način:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

U imeniocu ovog razlomka nalazi se kvadratni trinom $1 - x - x^2$, čiji su koreni $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Nakon kraćeg računanja dobija se da se $f(x)$ može predstaviti na sledeći način:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x}\right),$$

gde je $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Od ranije nam je poznat razvoj funkcije $(1 - x)^{-1}$, i pomoću njega razvijamo u red razlomke $\frac{1}{1-\alpha x}$ i $\frac{1}{1-\beta x}$, odnosno:

$$\frac{1}{1 - \alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2x^2 + \cdots + \alpha^nx^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1 - \beta x} = 1 + \beta x + \beta^2x^2 + \cdots + \beta^nx^n + \cdots$$

pa važi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1 + \alpha x + \alpha^2x^2 + \cdots + \alpha^nx^n + \cdots) - \frac{1}{\sqrt{5}}(1 + \beta x + \beta^2x^2 + \cdots + \beta^nx^n + \cdots) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big((\alpha - \beta)x + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \cdots + (\alpha^n - \beta^n)x^n + \cdots\big). \end{aligned}$$

S druge strane na početku smo rekli da je $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$, a kako je razvijanje funkcije u stepeni red jednoznačno, sledi da je

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Na ovaj način smo metodom generativne funkcije pronašli formulu za izračunavanje opšteg člana Fibonačijevog niza.

Metod primenjen u prethodnom primeru, može se generalizovati, odnosno možemo naći generativne funkcije za nizove zadate linearnim rekurentnim formulama oblika $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m}$ i početnim uslovima a_0, $a_1, \dots, a_{m-1}$. Generativna funkcija je, u ovom slučaju, u obliku razlomka, gde je brojilac polinom stepena manjeg od m, a imenilac polinom m-tog stepena:

$$Q_m(x) = 1 - c_1x - c_2x^2 - \cdots - c_m x^m.$$

Da bismo ovo dokazali, posmatrajmo sledeće funkcije:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m + \cdots$$

$$xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_{m-1}x^m + a_m x^{m+1} + \cdots$$

$$x^2f(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_{m-1}x^{m+1} + a_m x^{m+2} + \cdots$$

… … …

$$x^m f(x) = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \cdots + a_{m-1}x^{2m-1} + a_m x^{2m} + \cdots$$

množeći drugu jednakost sa $-c_1$, treću sa $-c_2$, i tako dalje, sve do poslednje jednakosti koju, po analogiji, množimo sa $-c_m$, zatim sabirajući sve novonastale jednakosti dobijamo:

$$f(x) - c_1xf(x) - c_2x^2f(x) - \cdots - c_m x^m f(x) =$$

$$= a_0 + (a_1 - c_1a_0)x + (a_2 - c_1a_1 - c_2a_0)x^2 + \cdots + (a_m - c_1a_{m-1} - \cdots - c_m a_0)x^m + \cdots$$

odnosno:

$$f(x)(1 - c_1x - c_2x^2 - \cdots - c_m x^m) = P_{m-i}(x)$$

gde je $P_{m-i}(x)$, $i = 0,1, \dots m$, polinom stepena manjeg od m. Naime, posle sabiranja na desnoj strani, svi koeficijenti uz x^k jednaki su nuli, za $k \geq m$, zbog rekurentne formule zadate na početku $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m}$ iz koje sledi da je

$$a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} - \cdots - c_m a_{n-m} = 0$$

za sve $n \geq m$.

Međutim, treba napomenuti, da u opštem slučaju nije baš uvek lako, niti moguće, iz ovako dobijene generativne funkcije rekonstruisati opšti član niza.

Harmonijski brojevi. Harmonijski red definisan je kao suma brojeva oblika $\frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Poznat je po tome što izuzetno sporo divergira. Potrebno je sabrati čak više od $0.5 \cdot 10^{43}$ prvih članova reda da bi zbir postao veći od 100. Parcijalna suma harmonijskog reda $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ naziva se n-tim harmonijskim brojem. Među harmonijskim brojevima važi rekurentna relacija $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$.

Neka je $(H_0,\ H_1,\ H_2, \dots H_n, \dots)$ niz harmonijskih brojeva, gde je $H_0 = 0$. Sa $h(x)$ označićemo generativnu funkciju datog niza, odnosno

$$h(x) = H_0 + H_1 x + H_2 x^2 + \cdots + H_n x^n + \cdots =$$

$$= x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n + \cdots$$

Na osnovu rekurentne formule $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$ sledi da je $H_n - \left(H_{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 0$, što ćemo, kao i u ranijim primerima, iskoristiti da pronađemo generativnu funkciju $h(x)$. Posmatrajmo funkcije:

$$xh(x) = H_0 x + H_1 x^2 + \cdots + H_{n-1} x^n + \cdots$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2} x^2 + \cdots + \frac{1}{n} x^n + \cdots.$$

Množenjem ovih funkcija sa -1 i sabiranjem sa $h(x)$ dobijamo:

$$h(x) - xh(x) - \ln \frac{1}{1-x}$$
$$= (H_1 - 1)x + \left(H_2 - H_1 - \frac{1}{2}\right) x^2 + \cdots + \left(H_n - H_{n-1} - \frac{1}{n}\right) x^n + \cdots.$$

Svi koeficijenti na desnoj strani jednaki su nuli, dakle:

$$h(x)(1 - x) - \ln \frac{1}{1-x} = 0$$

$$h(x) = \frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$$

Razvoj funkcija $\frac{1}{1-x}$ i $\ln \frac{1}{1-x}$ od ranije je poznat, i ako primenimo postupak o množenju generativnih funkcija dobijamo:

$$h(x) = \frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) \left(x + \frac{1}{2} x^2 + \cdots + \frac{1}{n} x^n + \cdots\right) =$$

$$= x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{6} x^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right) x^n + \cdots$$

Zaključujemo da je generativna funkcija niza harmonijskih brojeva

$$h(x) = \frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}.$$

Osim pomoću rekurentnih relacija, do ovog rezultata može se doći i pomoću generativne funkcije za parcijalne sume niza generisanog određenom funkcijom. U ovom slučaju u pitanju su parcijalne sume niza $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\right)$, odgovarajuća generativna funkcija je $\ln \frac{1}{1-x}$, pa na osnovu napomene 2.1. sledi

$$h(x) = \frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x} = x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \cdots.$$

Brojevi Katalana. Brojevi Katalana predstavljaju niz brojeva datih opštim članom

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

U kombinatorici postoje mnogi problemi čija su rešenja upravo Katalanovi brojevi, odnosno niz Katalanovih brojeva, a do kojih možemo doći pomoću generativnih funkcija. Jedan od takvih, jeste takozvani problem tetiva, formulisan na sledeći način:

Na kružnici je dato $2n$ tačaka. Na koliko se načina te tačke mogu razbiti na n parova, tako da među n tetiva određenih tim parovima tačaka ne postoje dve koje se seku?

Označimo tačke na kružnici sa $A_1, A_2, \dots A_{2n}$, a upravo u ovom poretku su na kružnici i poređane. Neka je a_n broj traženih načina razbijanja tačaka na n parova. Pri spajanju tačaka, moramo voditi računa da sa svake strane odgovrajuće tetive ostane paran broj tačaka, kako se tetive ne bi sekle. Tako, ako pođemo od tačke A_1 ona može biti spojena samo sa tačkama sa parnim indeksima, odnosno sa tačkama $A_2, A_4, \dots A_{2n}$. Dakle, prva tetiva je ona koja spaja tačke A_1 i A_{2k}, $k \in \{1,2, \dots n\}$. Sa jedne strane tetive $A_1 A_{2k}$ smešteno je $2k - 2 = 2(k-1)$ tačaka, a one se, poštujući uslove zadatka, mogu spojiti na a_{k-1}načina. Sa druge strane tetive $A_1 A_{2k}$ nalazi se $2n - 2k = 2(n-k)$ tačaka koje se mogu spojiti na a_{n-k} načina. Dakle broj spajanja datih tačaka sa n tetiva, pri kojima je tačka A_1 spojena sa A_{2k} jednak je $a_{k-1} a_{n-k}$. Sumiranjem po k, dobijamo

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{k-1} a_{n-k} + \cdots + a_{n-1} a_0.$$

Neka je $g(x)$ generativna funkcija niza $\{a_n\}, n \in N$, odnosno

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n \in N} a_n x^n$$

gde je $a_0 = a_1 = 1$. Kako su koeficijenti ove generativne funkcije rešenja problema, koristićemo od ranije poznate metode da pronađemo $g(x)$. Posmatrajmo

$$(g(x))^2 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$= a_0 a_0 + \cdots + (a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots a_{n-1} a_0) x^{n-1} + \cdots$$

$$= (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1} + \cdots)$$

što je jednako $\frac{g(x)-a_0}{x}$. Dakle,

$$x(g(x))^2 = g(x) - 1$$

Rešavajući kvadratnu jednačinu

$$x(g(x))^2 - g(x) + 1 = 0$$

po $g(x)$, dobija se

$$g(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Imajući u vidu da je za $x = 0$, $g(0) = a_0 = 1$, kao i

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

za generativnu funkciju treba uzeti rešenje sa znakom minus ispred korena, tj

$$g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Da bismo našli koeficijent uz x^n u razvoju funkcije $g(x)$ koristimo Njutnovu binomnu formulu

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k 4^k x^k$$

odakle se, posle kraćeg računaja, dobija

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^k$$

odavde je

$$g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i} x^i.$$

Prema tome,

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Pomoću generativne funkcije $g(x)$ dobili smo niz brojeva sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

odnosno niz brojeva $(1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots)$, koji se nazivaju brojevi Katalana. Za n-ti član niza Katalanovih brojeva, najčešće se koristi oznaka C_n.

Problem takozvane triangulacije mnogougla, odnosno razlaganje mnogougla na trouglove, takođe se rešava pomoću Katalanovih brojeva. Pitanje je: *Na koliko različitih načina konveksan n-ugao $A_1, A_2 \dots A_n$ može da se razloži na trouglove, povlačenjem nekih njegovih dijagonala, tako da se nikoje dve ne seku u unutrašnjosti mnogougla?*

Ideja je slična kao u prethodnom primeru sa tetivama i kružnicom. Traženi broj označimo sa T_n, posmatrajmo $(n+1)$-ugao $A_1, A_2 \dots A_n, A_{n+1}$. Temena A_1 i A_{n+1} su susedna, prema tome, u svakoj triangulaciji, stranica A_1A_{n+1} pripada tačno jednom trouglu. Među ostalim temenima, biramo A_k, koje će biti treće teme u trouglu $A_1A_{n+1}A_k$. Trougao $A_1A_{n+1}A_k$ deli polazni mnogougao na dva manja, jedan k-ugao $A_1, A_2 \dots A_k$ i jedan $(n-k+2)$-ugao, $A_k, A_{k+1}, \dots, A_{n+1}$. Označimo sa T_k broj načina da se izvrši triangulacija prvog mnogougla, a sa T_{n-k+2}, drugog. Dakle, broj triangulacija u kojima se pojavljuje trougao $A_1A_{n+1}A_k$ jeste T_kT_{n-k+2}. Sumiranjem po k, dobijamo rekurentnu formulu:

$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + \cdots + T_nT_2$$

Ako umesto n pišemo $n+1$, dobijamo:

$$T_{n+2} = T_2T_{n+1} + T_3T_n + \cdots + T_{n+1}T_2\ ,$$

a zatim uvedemo oznaku $C_k = T_{k+2}$, dobijamo upravo rekurentnu formula za brojeve Katalana:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0.$$

Dakle, broj triangulacija n-ugla, iznosi:

$$T_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$

Brojevi Katalana, takođe, imaju čestu primenu pri rešavanju problema koji se mogu svesti na problem određivanja broja dobrih nizova. Naime, za niz nula i jedinica dužine $2n$ nad skupom $\{1,0\}$ kažemo da je uravnotežen ako sadrži n nula i n jedinica. Za jedan takav niz, kažemo da je dobar ako je u svakom njegovom početnom segmentu broj jedinica veći ili jedank od broja nula. Broj, ovakvih, dobrih $2n$ nizova upravo je jednak:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Dokaz ove jednakosti, kao i više o ovoj temi može se videti u knjizi [2].

3.2. Particije prirodnog broja i generativne funkcije

Particija prirodnog broja n je predstavljanje n u obliku zbira nekoliko prirodnih brojeva, pri čemu je redosled sabiraka nebitan. Sa $p(n)$ označavamo broj particija broja n. Recimo particije broja 5 su: $1+1+1+1+1=5$, $1+1+1+2=5$, $1+2+2=5$, $1+1+3=5$, $2+3=5$, $1+4=5$, $5=5$, dakle $p(5)=7$. U ovom primeru članovi zbirova ne opadaju, a na taj način se mogu predstaviti particije bilo kog prirodnog broja n, tako da se može izvršiti sledeće poređenje. Naime particije broja n, mogu se uporediti sa ''neopadajućim zidovima'' koji su izgrađeni od n cigli, kao u primeru na slici, koji se odnosi na dve particije broja 5, $1+2+2$ i $1+1+3$.

Broj particija broja n jednak je broju rešenja jednačine $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = n$, s tim što su u ovom slučaju skupovi vrednosti promenljivih $i_1, i_2, \ldots, i_n$ nešto drugačiji nego što smo do sada videli. Naime, promenljiva i_j će uzimati vrednost koja govori koliki je zbir koji čine samo sabirci jednaki broju j u particiji broja n, drugim rečima i_j je broj cigli iskorišćenih da se sagrade kolone visine j. i_j može biti samo umnožak broja j, tako da važi:

$$i_1 \in \{0,1,2,3,\ldots\}, i_2 \in \{0,2,4,6,\ldots\}, \ldots, i_j \in \{0,j,2j,3j,\ldots\}.$$

Na primer, particiji $1+2+2=5$, odgovara rešenje $i_1 = 1$, $i_2 = 4$, $i_3 = i_4 = i_5 = 0$. Kao što već znamo, broj rešenja jednačine $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = n$, odnosno $p(n)$, jednak je koeficijentu uz x^n u proizvodu:

$$P_n(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots) \ldots (1 + x^n + x^{2n} + \cdots) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^k} \, .$$

Međutim, ovaj proizvod nije generativna funkcija niza $\{p(n)\}, n \in N$. Da bismo dobili generativnu funkciju, ona mora istovremeno da sadrži $p(n)$ za sve prirodne brojeve, tako da moramo koristiti beskonačni proizvod. Dakle,

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

je generativna funkcija niza $\{p(n)\}, n \in N$.

Ako se traži broj particija broja n, tako da sabirci u njima nisu veći od m, onda je traženi broj, koeficijent uz x^n u proizvodu:

$$P_m(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^m} \; .$$

Ako je uslov da svi sabirci u particijama $p(n)$ budu različiti, odgovarajuća generativna funkcija je:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) \; .$$

Particije čiji su svi delovi neparni, imaju generativnu funkciju:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2k-1})} \; .$$

Primer 3.2.1. Broj particija broja 9 na sabirke jednake 3, je koeficijent uz x^9 u izrazu $1 + x^3 + x^6 + x^9$. Taj koeficijent je 1 i odgovara particiji $3 + 3 + 3$.

Primer 3.2.2. Broj particija brojeva 9 i 10, na sabirke 2 i 3 su koeficijenti uz x^9 i x^{10} u izrazu:

$$(1 + x^2 + x^4 \dots + x^{10})(1 + x^3 + x^6 + x^9) =$$
$$= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + \cdots$$

Ima, dakle po dve tražene particije za svaki od ovih brojeva. To su, za broj 9 particije: $3 + 3 + 3$ i $2 + 2 + 2 + 3$, za broj 10: $2 + 2 + 3 + 3$ i $2 + 2 + 2 + 2 + 2$.

Primer 3.2.3. Broj particija n na različite sabirke je jednak broju particija na neparne sabirke.

Pomoću generativnih funkcija lako se može uveriti da je ovo istinito tvrđenje. Ako generativnu funkciju particija na različite sabirke, zapisemo u nešto drugačijem obliku:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^k}{1-x^k} \cdot (1+x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{2k}}{1-x^k} =$$

$$= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \ldots$$

primetićemo da se svi faktori $1-x^{2k}$ skraćuju, a ono što ostaje, upravo je generativna funkcija za broj particija na neparne sabirke, odnosno:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2k-1})} .$$

3.3. Pronalaženje očekivane vrednosti

Primer 3.3.1. *Bacamo kocku dok se prvi put ne pojavi broj šest. Koliki je očekivani broj bacanja?*

Verovatnoća da će šestica pasti nakon prvog bacanja je $p = \frac{1}{6}$, a verovatnoća da neće pasti nakon prvog, nego nakon drugog bacanja je $(1-p)p$. Generalno, verovatnoća da se šestica pojavi, prvi put, nakon i-tog bacanja je $q_i = (1-p)^{i-1}p$. Očekivanje, odnosno prosečan broj bacanja je onda:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} i q_i = \sum_{i=1}^{\infty} i\,(1-p)^{i-1} p\,.$$

Da bismo pronašli datu sumu, posmatrajmo sledeću generativnu funkciju:

$$q(x) = q_1 x + q_2 x^2 + \cdots \,.$$

Diferenciranjem, dobijamo

$$q'(x) = 1 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 x + 3 \cdot q_3 x^2 + \cdots .$$

Otuda vidimo da je željena suma S jednaka vrednosti $q'(1)$.

Dalje, sabiranjem jednakosti

$$\frac{p}{1-p} + q(x) = \frac{p}{1-p} + px + (1-p)px^2 + \cdots$$

sa

$$-(1-p)x\left(\frac{p}{1-p} + q(x)\right) = -px - p(1-p)x^2 + \cdots$$

dobijamo

$$q(x) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1}{1-(1-p)x} - \frac{p}{1-p} .$$

Nakon diferncirania imamo da je

$$q'(x) = \frac{p}{(1-(1-p)x)^2},$$

pa na osnovu $S = q'(1)$, a $q'(1) = p/p^2 = 1/p$, zaključujemo da je

$$S = \frac{1}{p}.$$

Pošto je u ovom slučaju $p = \frac{1}{6}$, traženi očekivani broj bacanja je 6.

Postoje i drugi, brži načini da se dođe do rešenja, ali pokazan metod sa generativnom funkcijom ima mnoge primene u teoriji verovatnoće. Ako je X proizvoljna promenljiva, koja uzima vrednost i, sa verovatnoćom q_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, i ako je $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i x^i$ generativna funkcija, onda je očekivanje promenljve X jednako $q'(1)$.

3.4. Razni zadaci

Na kraju ove glave, videćemo nekoliko zadatka, takmičarskog tipa, za srednjoškolce, za čija se rešavanja mogu primeniti generativne funkcije.

Zadatak 3.1. *(Putnam 1997) Za prirodan broj n i realan broj c, definišimo x_k rekurzivno tako da je $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ i za $k \geq 0$*

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}.$$

Fiksirajmo n i neka je c najveći moguć takav broj da je $x_{n+1} = 0$. Naći x_k u funkciji od n i k, $1 \leq k \leq n$.

<u>Rešenje.</u> Posmatrajmo generativnu funkciju

$$f(z) = x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} z^k.$$

Primetimo da ukoliko je $x_{n+1} = 0$, sledi da je $x_i = 0$, za sve $i > n$. Diferenciranjem funkcije f dobijamo

$$f'(z) = x_2 + 2x_3 z + 3x_4 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x_{k+2} z^k.$$

S druge strane, iz rekurzivne formule je

$$(k+1)x_{k+2} = cx_{k+1} - (n-k+1-1)x_k,$$

množimo levu i desnu stranu jednakosti sa z^k

$$(k+1)x_{k+2}z^k = cx_{k+1}z^k - (n+1)x_kz^k + (k+1)x_kz^k\,.$$

a zatim sumirajući po k, dobijamo

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x_{k+2}z^k = c\sum_{k=0}^{\infty}x_{k+1}z^k - (n+1)\sum_{k=0}^{\infty}x_kz^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x_kz^k\,.$$

Zaključujemo da je

$$f'(z) = c\sum_{k=0}^{\infty}x_{k+1}z^k - (n+1)\sum_{k=0}^{\infty}x_kz^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x_kz^k\,.$$

Pošto je $zf(z) + x_0 = \sum_{k=0}^{\infty}x_kz^k$, a $(z^2f(z))' = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x_kz^k$, onda je

$$f'(z) = cf(z) - (n+1)zf(z) + (z^2f(z))'$$

$$f'(z) = cf(z) - (n+1)zf(z) + 2zf(z) + z^2f'(z)$$

$$f'(z) = cf(z) - (n-1)zf(z) + z^2f'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{c-(n-1)z}{1-z^2} = \frac{c-(n-1)}{2(1-z)} + \frac{c+(n-1)}{2(1+z)}\,.$$

Integracijom obe strane dobijamo

$$\ln f(z) = \frac{n-1-c}{2}\ln(1-z) + \frac{n-1+c}{2}\ln(1+z)$$

iz čega, na osnovu pravila logaritmovanja, sledi

$$f(z) = (1-z)^{\frac{n-1-c}{2}}(1+z)^{\frac{n-1+c}{2}}\,.$$

Imajući u vidu da je $f(z)$ zapravo polinom, zaključujemo da je najveća moguća vrednost za $c = n-1$. Tada je

$$f(z) = (1+z)^{n-1}$$

što je, kako je od ranije poznato, genrativna funkcija niza $\left(\binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2}, \dots, \binom{n-1}{n-1}\right)$. Dakle, $x_k = \binom{n-1}{k-1}$, za $k = 1, 2, \dots, n$.

Zadatak 3.2. *(Leningrad Mathematical Olympiad 1991) Konačan niz celih brojeva* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *nazivamo* p*-balansiranim ako je suma oblika* $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \cdots$ *konstantna za* $k = 1, 2, 3, \dots$*. Dokazati da ukoliko je niz od* 50 *članova* p*-blansiran za* $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$ *onda su svi članovi tog niza jednaki* 0*.*

Rešenje. Neka je $f(x)$ generativna funkcija niza $a_1, a_2, \dots, a_{50}$, data kao sledeći polinom

$$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots a_{50}x^{49}$$

i neka je

$$S_p = a_1 + a_{1+p} + a_{1+2p} + \cdots = a_2 + a_{2+p} + a_{2+2p} + \cdots = \cdots = a_p + a_{2p} + a_{3p} + \cdots$$

za $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Posmatrajmo θ_p, p-ti koren jedinice različit od 1, za $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Pošto je $\theta_p{}^{kp} = 1$, $\theta_p{}^{kp+1} = \theta_p, \dots, \theta_p{}^{kp+(p-1)} = \theta_p{}^{p-1}$, za $k = 1, 2, 3, \dots$ sledi

$$f(\theta_p) = a_1 + a_2\theta_p + a_3\theta_p{}^2 + \cdots a_{50}\theta_p{}^{49} =$$

$$= (a_1 + a_{1+p} + \cdots) + (a_2 + a_{2+p} + \cdots)\theta_p + \cdots + (a_p + a_{2p} + \cdots)\theta_p{}^{p-1} =$$

$$= S_p(1 + \theta_p + \cdots + \theta_p{}^{p-1}).$$

Na osnovu formule za sumu prvih p članova geometrijskog reda važi jednakost

$$1 + \theta_p + \cdots + \theta_p{}^{p-1} = \frac{1 - \theta_p{}^p}{1 - \theta_p}$$

gde je $1 - \theta_p \neq 0$ jer je θ_p, p-ti koren jedinice različit od 1. Kako je $1 - \theta_p{}^p = 0$ sledi

$$1 + \theta_p + \cdots + \theta_p{}^{p-1} = 0$$

iz čega dalje sledi da je $f(\theta_p) = 0$. Pošto θ_p može uzeti $p - 1$ različitih vrednosti, polinom f ima $(3-1) + (5-1) + \cdots + (17-1) = 50$ nula u ovim korenima jedinice. To je nemoguće pošto je u pitanju polinom 49-tog stepena, osim ako nisu $a_1 = a_2 = \cdots = a_{50} = 0$, odnosno $f(x) \equiv 0$.

Zadatak 3.3. *(Na osnovu zadatka sa IMO Shortlist 1998) Neka je $a_0, a_1, a_2, \dots$ rastući niz nenegativnih celih brojeva takav da svaki nenegativan ceo broj može na jedinstven način biti predstavljen u obliku $a_i + 2a_j + 4a_k$ (i, j, k nisu obavezno različiti). Naći a_{2005}.*

Rešenje. Neka je $f(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots$, tada je $f(x^2) = x^{2a_0} + x^{2a_1} + x^{2a_2} + \cdots$, a $f(x^4) = x^{4a_0} + x^{4a_1} + x^{4a_2} + \cdots$. Sledi da je

$$f(x)f(x^2)f(x^4) =$$

$$= (x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots)(x^{2a_0} + x^{2a_1} + x^{2a_2} + \cdots)(x^{4a_0} + x^{4a_1} + x^{4a_2} + \cdots) =$$

$$\sum_{i,j,k} x^{a_i + 2a_j + 4a_k}.$$

Kako svaki nenegativan ceo broj može na jedinstven način biti predstavljen u obliku $a_i + 2a_j + 4a_k$, sabirke iz ove sume možemo poređati po rastućim stepenima x-a, odnosno

$$f(x)f(x^2)f(x^4) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Odavde možemo zaključiti i da važi

$$f(x^2)f(x^4)f(x^8) = \frac{1}{1-x^2}$$

pa deljenjem poslednje dve jednakosti dobijamo

$$\frac{f(x)}{f(x^8)} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$f(x) = (1+x)f(x^8).$$

Sledi da je $f(x) = (1+x)(1+x^8)f\left(x^{8^2}\right) = (1+x)(1+x^8)\left(1+x^{8^2}\right)f\left(x^{8^3}\right) =$

$$= (1+x)(1+x^8)\left(1+x^{8^2}\right)\left(1+x^{8^3}\right)\ldots$$

Zaključujemo da su a_i brojevi koji zapisani u sistemu sa osnovom 8, imaju samo cifre 0 i 1. Da bismo pronašli a_{2005}, dovoljno je da 2005 izrazimo u sistemu sa osnovom 2, a zatim samo promenimo osnovu u 8. Dakle, $2005 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0$, pa je $a_{2005} = 8^{10} + 8^9 + 8^8 + 8^7 + 8^6 + 8^4 + 8^2 + 8^0$.

Zadatak 3.4*. (Putnam 1980) Niz* racionalnih brojeva $f(n,i)$ (gde su n i i prirodni brojevi i važi $i \geq n$) definisan je rekurzivno na sledeći način:

$$f(1,i) = \frac{1}{i}$$

$$f(n+1,i) = \frac{n+1}{i}\left(f(n,n) + f(n,n+1) + \cdots + f(n,i-1)\right).$$

Ako je p prost broj dokazati da za $n > 1$ imenilac razlomka $f(n,p)$ (u skraćenom obliku) nije deljiv sa p.

<u>Rešenje.</u> Definišimo f_n na sledeći način

$$f_n(x) = f(n,n)x^n + f(n,n+1)x^{n+1} + f(n,n+2)x^{n+2} + \cdots + f(n,i)x^i + \cdots.$$

Ako ovo pomnožimo sa $(1 + x + x^2 + \cdots)$ koeficijenti uz x^{n+k}, $k \in N$, postaju $f(n,n) + f(n,n+1) + \cdots + f(n,n+k)$, dalje množeći sa $(n+1)$ dobijamo

$$(n+1)f_n(x)(1 + x + x^2 + \cdots) =$$

$$= (n+1)f(n,n)x^n + \cdots + (n+1)\big(f(n,n) + f(n,n+1) + \cdots + f(n,i-1)\big)x^{i-1} + \cdots.$$

Odavde vidimo da je koeficijent uz x^{i-1} jednak $if(n+1,i)$. S druge strane posmatrajmo prvi izvod funkcije $f_{n+1}(x)$

$$f'_{n+1}(x) = (n+1)f(n+1,n+1)x^n + \cdots + if(n+1,i)x^{i-1} + \cdots$$

zaključujemo da važi sledeća jednakost

$$f'_{n+1}(x) = (n+1)f_n(x)(1 + x + x^2 + \cdots).$$

Posmatrajmo slučaj kada je $n = 1$

$$f'_2(x) = 2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)(1 + x + x^2 + \cdots).$$

Primetimo da je $(1 + x + x^2 + \cdots)$ prvi izvod $\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$, pa je desna strana gornje relacije zapravo izvod složene funkcije i integracijom obe strane dobijamo

$$f_2(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^2.$$

Pomoću indukcije lako možemo zaključiti da važi

$$f_n(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^n.$$

Koeficijent uz x^p u ovom izrazu je zbir racionalnih brojeva oblika $\frac{a}{b}$ gde je a prirodan broj, a b proizvod nekih n brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, \mathrm{p} - \mathrm{n} + 1\}$. Dakle, njihov zajednički imenilac jeste $((p-n+1)!)^n$, što nije deljivo sa p.

Zaključak

Materijal izložen u prethodnih četrdesetak strana samo je deo celokupne teorije generativnih funkcija. Bez obzira na to, ovde su izložene sve bitne ideje i metode koje leže u osnovi ove teorije i koje su potrebne za dalje korišćenje tehnike generativnih funkcija.

Generativne funkcije predstavljaju most između diskretne matematike, s jedne strane i matematičke analize s druge strane. To se postiže tako što se beskonačnom nizu realnih brojeva dodeli određena neprekidna funkcija, tzv. generativna funkcija. Na taj način, umesto sa beskonačno mnogo objekata računske operacije vršimo sa konačno mnogo objekata i to u dobro razvijenom analitičkom aparatu. Određeni problemi nad nizovima sada postaju lako rešivi uz pomoć generativnih funkcija. Koristeći neke poznate razvoje funkcija u stepene redove, i operacije opisane u drugoj glavi, možemo pronaći generativne funkcije zadatih nizova, ali i obrnuto, pronaći niz koji odgovara datoj generativnoj funkciji.

Primena generativnih funkcija u kombinatorici od velikog je značaja jer pruža nov pristup rešavanju kombinatornih problema, nešto drugačiji od onog na koji smo navikli. Za pojedine probleme, koji se rešavaju na različite načine, pomoću različitih formula, generativne funkcije pružaju isti pristup rešavanju. Tako ova tehnika daje nov aspekt za posmatranje i rešavanje zadataka, ali i istraživanje novih mogućnosti za rešavanje još uvek otvorenih problema iz oblasti kombinatorike.

Generativne funkcije, između ostalog, koriste se i za rešavanje problema zadatih rekurentnim relacijama, pronalaženje opšteg člana niza, što ima veliki značaj kada je potrebno izračunati članove niza sa velikim indeksima. Možemo dobiti funkcije koje generišu članove Katalanovih, Fibonačijevih ili harmonijskih nizova brojeva, koji se koriste u kombinatorici i geometriji. Takođe, značajna je i primena generativnih funkcija u problemima vezanim za particiju prirodnog broja, kao i pronalaženje očekivane vrednosti diskretne promenljive, što je samo jedan od primera primene genrativnih funkcija u teoriji verovatnoće.

Ovaj rad bazira se na opisivanju genrativnih funkcija kao metode koja se primenjuje u problemima diskretne prirode. Ali one bi mogle naći primenu i u problemima matematičke analize, na čemu bi se moglo zasnivati neko buduće proučavanje generativnih funkcija, kao analitičkih i asimptotskih metoda.

Literatura

[1] Jiri Matousek, Jaroslav Nesetril, *Invitation to Discrete Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, (1988).

[2] Dr Ratko Tošić, *Kombinatorika*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, (1998).

[3] Rade Dacić, *Elementarna kombinatorika*, Matematički institut, Beograd, (1977).

[4] D. Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević , S. Simić, P. Vasić, *Matematika I - Algebra*, VIII izdanje, Akademska misao, Beograd, (2004).

[5] Herbert. S. Wilf, *generatingfunctionology*, University of Pennsylvania, Philadelphia, (1994).

[6] http://www.math.tamu.edu/~david.larson/pendse13.pdf, (2016).

[7] D. Stevanović, M.Ćirić, S. Simić, V. Baltić, *Diskretna matematika*, (2007).

[8] B.Bašić, *Maturski rad - Funkcije izvodnice*, (2005).

Biografija

Ana Bogdanović rođena je u Šapcu, 21. jula 1990. godine. Osnovnu školu "Janko Veselinović" u Šapcu završava 2005. godine, kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje društveno – jezički smer u Šabačkoj gimnaziji. Školske 2009/2010. upisuje osnovne akademske studije na Pririodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, departman za matematiku i informatiku, smer Diplomirani profesor matematike. Završava ih 2013. godine, sa prosečnom ocenom 8,46 i upisuje master akademske studije na istom fakultetu, smer Master matematika, modul Nastava matematike. Od školske 2013/2014. radi kao profesor matematike u Srednjoj poljoprivrednoj školi u Šapcu. Na master studijama položila je sve ispite predviđene planom i programom, čime je stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, 2016. Ana Bogdanović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMETACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Ana Bogdanović
AU
Mentor: dr Boris Šobot
MN
Naslov rada: Generativne funkcije
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2016.
GO
Izdavač: Autorski reprint IZ Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički faklutet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 3 glave/ 47 strane/ 8 literatura/ 1 slika/ 1 fotografija
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Diskretna matematika, kombinatorika
ND

Predmetna odrednica/ ključne reči: generativne funkcije, beskonačni nizovi, eksponencijalna generativna funkcija, operacije s generativnim funkcijama, rekurentne jednačine
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: U ovom radu bavimo se generativnim funkcijama. Kao ključni korak u konstruisanju generativnih funkcija beskonačnih nizova, opisuju se transformacije beskonačnih nizova u funkcije i obrnuto. Date su brojne primene generativnih funkcija pre svega u kombinatornim problemima, veze sa rekurentnim jednačinama, primene u particiji prirodnog broja i teoriji verovatnoće. Rešeni su i neki zadaci koji su se pojavljivali na matematičkim takmičenjima srednjoškolaca, a u čijim se rešenjima može videti primena generativnih funkcija.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 3.3.2016.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Vojislav Petrović, redovan profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Bojan Bašić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Boris Šobot, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCES

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master's thesis
CC
Author: Ana Bogdanović
AU
Mentor: Boris Šobot, Ph.D.
MN
Title: Generating functions
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina LP Publication year: 2016
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and informatics, Faculty of sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 3 chapters/ 47 pages/ 8 references/ 1 pictures/ 1 photograph
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Discrete mathematics, combinatorics
SD
Subject/ Key words: generating functions, infinite series, exponential generating functions, operations with generating functions, recurrent equation

SKW
UC:
Holding data: The library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N
In this paper we deal with the generating functions. As a key step in the construction of the generating function of infinite series, describes the transformation of infinite series in function and vice versa. There are numerous applications of generating function, first of all, in combinatorial problems, the association with recurrent equations, applications in the partition of the natural numbers and probability theory. There are some solved tasks that are used on the high school math contests, and in whose solutions can be seen the application of generating function.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 3/3/2016
ASB
Defended:
DE
Thesis defens board:
DB
President: Vojislav Petrović, Ph.D., Full Professor, Faculty of sciences, University of Novi Sad
Member: Bojan Bašić, Ph.D., Faculty of sciences, University of Novi Sad
Mentor: Boris Šobot, Ph.D., Faculty of sciences, University of Novi Sad