UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Aljehina Laketić

ARITMETIKA I AlGEBRA U RANOM MATEMATIČKOM OBRAZOVANJU

-MASTER RAD -

Mentor:

dr Đurđica Takači

Novi Sad, 2019.

Predgovor

Matematika je jedan od najvažnijih alata za razvoj veština razmišljanja koje su potrebne pojedincima za rešavanje svakodnevnih problema. Sa druge strane, matematika se uglavnom smatra jednim od najtežih školskih predmeta [23]. Zaista, prva stvar koju svako uoči kada otvori knjigu iz matematike jeste da je puna simbola, jer matematičari svoje ideje iskazuju jezikom matematike. Osnovni razlog zbog kog učenici smatraju da je matematiku teško razumeti je taj što se sastoji od specifične mreže apstraktnih odnosa, a algebra je oblast koja najviše uključuje ove odnose [23].

Teorija i praksa su pokazale da učenici imaju velike poteškoće sa razumevanjem algebre u višim razredima [10]. Uzrok tog problema je nedovoljna povezanost aritmetike (koja se izučava u mlađem školskom uzrastu) i algebarskih sadržaja koji se uče kasnije [13]. Taj prelaz bi trebalo da olakša rana algebra, kroz koju bi se algebarski sadržaji uvrstili u nastavu od samog početka osnovnog obrazovanja [31].

U ovom radu bavimo se pojmovima rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje, koje je važna komponenta prelaska sa aritmetike na algebru. Rad se sastoji od tri glave.

Prva glava je uvodna i u njoj je dat kratak istorijat algebre i razmatranje uzroka problema koji nastaju pri prelasku sa aritmetike na algebru.

Druga glava sadrži teorijske osnove za ubacivanje algebarskih sadržaja u nastavu matematike u nižim razredima osnovne škole, uvodi se pojam rane algebre i osnovnih elemenata ranoalgebarskog mišljenja, kao i nekoliko priprema za čas nastavne teme „Polinomi”.

U trećoj glavi data je analiza uspeha učenika Osnovne škole „Zmaj Jova Jovanović” iz Rume, iz matematike, na kraju šestog i na kraju sedmog razreda, tabelarno i grafički, kako bi se primetio pad proseka ocena iz matematike po odeljenjima, kao i razmatranje mogućih razloga zašto učenici imaju slabije ocene u sedmom razredu nego što su imali u šestom.

Sadržaj

Predgovor ... 1

Uvod ... 3

1.1 Rana istorija algebre ... 3

1.2 Aritmetika i algebra ... 4

Teorijska pozadina ... 7

2.1 Rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje ... 7

2.2 Generalizacija aritmetičkih koncepata ... 9

2.3 Uočavanje funkcionalnih veza ... 13

2.4 Uočavanje relacijskih veza ... 15

2.4.1 Rešavanje jednačina i nejednačina ... 16

2.4.2 Aktivnost za učenike ... 17

2.5 Uloga znaka jednakosti ... 18

2.6 Od aritmetike ka algebri ... 20

2.7 Algebra u školskoj nastavi ... 22

2.7.1 Pravilnosti ... 23

2.7.2 Aktivnost za učenike sa elementima aritmetike i algebre ... 25

2.8 Matematički razgovori ... 27

2.9 Polinomi ... 28

2.10 Neke misli o algebri ... 42

Uspeh učenika u školi ... 44

3.1 Uloga nastavnika i uspeh učenika u nastavi matematike ... 44

3.2 Analiza uspeha učenika iz matematike u šestom i sedmom razredu osnovne škole ... 45

Zaključak ... 48

Biografija ... 49

Literatura ... 50

Glava 1

Uvod

1.1 Rana istorija algebre

Na pitanje „Šta je algebra?”, dobili bismo različite odgovore u zavisnosti od toga koga pitamo. Učenici bi verovatno, zahvaljujući tradicionalnom načinu podučavanja, algebru definisali kao granu matematike u kojoj treba pronaći tačnu vrednost nepoznate x ili y, matematičari bi odmah pomenuli prstene i polja [1].

Poreklo naziva algebre se vezuje za knjigu arapskog matematičara al-Khwarizmi-a (Abu Ja’far Muhammad Ibnu Musa al- Khwarizmi-persijski matematičar, astronom, astrolog i geograf iz IX veka) *“The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing*” (al-Kitab almukhtaṣar fi ḥisab al-jabr wal-muqabala), što u slobodnom prevodu može biti „Sažeta knjiga o proračunima kompletiranjem i balansiranjem”. Izraz algebra je izveden iz naziva jedne od osnovnih operacija sa jednačinama al-jabr, što znači obnavljanje, a odnosi se na postupak uspostavljanja balansa dodavanjem istog broja sa obe strane jednakosti, koji je opisan u ovoj knjizi. U svom najpoznatijem delu al-Khwarizmi piše o rešavanju linearnih i kvadratnih jednačina i daje opštu metodu, tehniku za njihovo rešavanje koristeći samo reči [1]. Knjiga sadrži mnoge praktične svakodnevne probleme tog vremena, kao što su raspodela zemljišta, plaćanje radnika ili podela nasledstva.

Koreni algebre mogu se pratiti od drevnih Vavilonjana koji su razvili formule za pronalaženje rešenja za probleme koji se danas uglavnom rešavaju korišćenjem linearnih i kvadratnih jednačina [10]. Većina Egipćana i Grka tog doba su obično rešavali takve jednačine geometrijskim metodama, kao što su one opisane u Euklidovim „*Elementima*“.

U početku su se algebarski problemi pisali tekstualno, a ne simbolima, pa je bilo jako teško formulisati probleme. Diofant je napravio velike promene u algebri uvodeći simboliku, te time omogućava jasan i uniforman zapis i formalizaciju ove discipline. Algebarski simboli su ubrzo zamenili pisanje algebre u prozi, u verbalnom obliku poznatom kao retorička algebra, odnosno algebra u kojoj su jednačine zapisane rečima. Osim toga, proučavao je algebarske jednačine i njihova racionalna rešenja, razmotrio je niz zadataka o predstavljanju brojeva u određenom obliku i još opštije probleme rešavanja neodređenih jednačina sa celim i pozitivnim racionalnim brojevima. Najpoznatiji je po svojoj knjizi „*Arithmetica*” koja se sastoji od 13 knjiga od kojih je pronađeno šest [11].

Prvo kompletno aritmetičko rešenje (uključujući i negativno i nulu) kvadratne jednačine dao je Brahmagupta, indijski matematičar i astronom, u svom radu „Brahma-sphuta-sid ’hanta“, koji je imao 22 poglavlja, uključujući dva poglavlja o matematici: *Predavanja o aritmetici* i *Predavanja o neodređenim jednačinama* [12].

Devedesete godine dvadesetog veka predstavljaju pravi trijumf matematičke discipline koju zovemo algebra. Smatramo da je 1545. godina i pojava knjige Đirolama Kardana (Girolamo Cardano) *„Ars Magna”* pravi početak algebre. U ovom delu predstavljeni su, po prvi put, javno, principi rešavanja kubnih i bikvadratnih jednačina. Pun naslov Kardanove knjige u prevodu znači Velika veština, ili Pravila algebre. Knjiga sadrži 40 poglavlja. Kardano koristi geometrijske argumente za dokaze svojih tvrđenja. Savremeno pisanje matematičkih tvrđenja počinje od francuskog pravnika i matematičara Fransoa Vijete (François Viète) iz 16. veka. On algebru naziva analitičkom umetnošću [10].

1.2 Aritmetika i algebra

Postoje različite definicije algebre, pa samim tim i različita mišljenja šta tačno spada u domen algebre [1]. Uobičajena podela algebre je na elementarnu i apstraktnu algebru. Prva se bavi svojstvima matematičkih operacija, a druga proučava strukture poput grupa, prstena i polja. Predmet algebre je izučavanje matematičkih entiteta, bilo konkretnih kao što su brojevi, polinomi, funkcije, matrice, bilo apstraktnih, kao što su grupe, prsteni, polja [40].

Sa druge strane, aritmetika (grč. arithmos-brojevi, techne-umeće) je grana matematike koja se bavi brojevima i računskim operacijama sa brojevima [10]. Sa aritmetikom i njenim osnovnim računskim operacijama (sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje) učenici se upoznaju u prvim razredima osnovne škole.

Problemi nastaju kada se sa aritmetike pređe na učenje algebre. Postavlja se pitanje koje su suštinske razlike između aritmetike i algebre i šta je to što uzrokuje probleme. Pre svega, aritmetika se bavi izračunavanjem poznatih brojeva, dok algebra zahteva razumevanje nepoznatih i promenljivih veličina, kao i prepoznavanje razlika između konkretnih i uopštenih situacija.

Na nivou osnovnoškolske matematike, učenicima pokazujemo kako nešto funkcioniše, ne objašnjavajući te procese. Algebra se pojavljuje čim se postave pitanja „Zašto?”, „Kako mi znamo da tako treba?, „Možemo li to uraditi na neki drugi način?”[9]. Činjenica da je algebra nastala istorijski kasnije, a kao generalizacija aritmetike, sugeriše da algebra treba da sledi aritmetiku u nastavnom planu i programu. Dugo se verovalo da aritmetika mora prethoditi algebri i da u početnoj nastavi matematike nema mesta za algebarske ideje, što je dovelo do problema prilikom učenja i najosnovnijih algebarskih koncepata u starijim razredima osnovne škole [1].

Postoje razlike u interpretaciji slova, simbola i izraza između aritmetike i algebre. U aritmetici slova uglavnom predstavljaju skraćenice, dok slova u algebri označavaju promenljive ili nepoznate veličine [36]. Takođe, različita je interpretacija znaka jednakosti. U početnoj nastavi matematike, gde dominira aritmetika, na znak jednakosti se gleda kao na signal da treba izvršiti nekakvo izračunavanje. Tek kasnije, učenici se dovode u situaciju da na znak jednakosti gledaju kao na uporedivost dva iskaza, znak da su leva i desna strana izraza jednake. Različita interpretacija matematičkih simbola u različitim periodima školovanja mogla bi biti uzrok problema koji se javljaju pri učenju algebre. Podučavanje algebre zahteva smisleno korišćenje jezika algebre, ispitivanje odnosa između veličina i poznavanje procesa generalizacije [3], [5], [35].

Učenici koriste svoja iskustva iz aritmetike u tranziciji ka algebri [23]. Nedostaci koji proističu iz načina učenja aritmetike, kao, na primer, učenje oduzimanja bez fokusiranja na odnose između umanjenika, umanjioca i razlike, mogu uticati na razvoj algebarskog mišljenja [23]. Ovakva situacija dovodi do toga da učenici osnovnih škola aritmetiku percipiraju kao skup pravila. Umesto direktnog memorisanja pravila, neophodno je da učenici vide odnose na kojima počivaju pravila i da razviju osnovne aritmetičke veštine [25]. Razvijanje ovih veština omogućava zapisivanje brojnih rečenica matematičkim simbolima, razumevanje osnovnih karakteristika operacija i konceptualizaciju broja u različitim oblicima ($5=7-2,\ 5=3+2,$ itd.)

Prihvatljiva transformacija od aritmetike do algebre zahteva [21]:

- fokusiranje na međusobnu vezu između brojeva, a ne samo na računanje sa tim brojevima;
- fokusiranje na operacije, ali i na njihove inverze;
- fokusiranje na to šta je problem, a ne samo kako ga rešiti;
- preispitivanje značenja znaka jednakosti.

Prema mišljenju velikog broja članova akademske zajednice matematičkog obrazovanja, podučavanje algebre u osnovnim školama ne bi trebalo odvajati od podučavanja aritmetike, već, naprotiv, treba ubacivati algebarske koncepte u aritmetičke sadržaje kad god je to moguće [9], [31]. Ranu algebru možemo posmatrati kao most između aritmetike i algebre. Rana algebra bi trebala da bude rešenje za mnoge probleme koji se javljaju u matematičkom obrazovanju, tamo gde aritmetika „završava“, a algebra „počinje“ [8].

Glava 2

Teorijska pozadina

2.1 Rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje

U mnogim zemljama učenici se sa algebrom upoznaju u višim razredima osnovne škole. Tradicionalno, algebra se podučava posle aritmetike kada se proceni da su učenici ovladali neophodnim veštinama u radu sa aritmetičkim strukturama i da su razvili sposobnosti koje omogućavaju prihvatanje algebarskog rezonovanja [8]. Aktivnosti u matematici nižih razreda mogu se opisati kao aktivnosti posredstvom objekata (kao što su brojevi, figure, promenljive), svojstva objekata, odnosno veze između njih i transformacijama tih objekata [9]. Moć matematike leži u relacijama i transformacijama koje nastaju uočavanjem pravilnosti i njihovom generalizacijom, a ne u objektima [39]. Cilj učenja matematike je konstrukcija apstraktnih pojmova [32].

Razumevanje matematike nije memorisanje matematičkih algoritama, koji mogu biti korisni prilikom izračunavanja. Potrebu za njima treba svesti na najmanju meru i snažiti učenike u razumevanju matematičkih problema i osmišljavanju načina za rešavanje problema. Na algebru možemo gledati kao na jedan apstraktan sistem u kome se, u međusobnoj isprepletenosti, reflektuju aritmetičke strukture. Apstraktnost algebre je jedan od glavnih razloga zbog kog učenici imaju problema sa razumevanjem gradiva [4]. Algebarske ideje povezuju sve oblasti matematike i mnoge oblasti izvan matematike i zbog toga je potrebno dublje angažovanje učenika kako bi razvili algebarske veštine rasuđivanja.

Vrlo često, za rešavanje nekih problema, potrebno je koristiti i aritmetiku i algebru, kao, na primer, pri rešavanju sledećeg zadatka, preuzetog iz [2]:

588 putnika treba da se preveze iz jednog mesta u drugo pri čemu putuju u dva različita voza. Jedan voz sadrži samo vagone od 12 mesta, a drugi samo vagone od 16 mesta. Ako drugi voz ima osam vagona više nego prvi, koliko najmanje vagona treba da imaju oba voza da bi se svi putnici prevezli?

Najjednostavnije rečeno, pod ranom algebrom se podrazumeva proces ubacivanja algebarskih sadržaja zajedno sa uobičajenim aritmetičkim sadržajima u nastavni plan i program za niže razrede osnovne škole [10]. Kroz ranu algebru učenici treba da se upoznaju sa algebarskom notacijom [9]. Istraživanja su pokazala da učenici imaju poteškoća u shvatanju da slovo n (ili bilo koje drugo slovo) može da označava bilo koji broj [23]. Razlog je pre svega taj što su u nastavi aritmetike navikli da se bave konkretnim slučajevima, dok u algebri preovladavaju opšti slučajevi. Suština rane algebre je produbljivanje nastave aritmetike [7]. Za uvođenje algebarskog mišljenja u nastavni plan i program najzaslužniji je matematičar J. J. Kaput[1], koji opisuje algebarsko zaključivanje kao generalizaciju aritmetike i zakona, korišćenje simbola i njihovo značenje, proučavanje strukture brojevnih sistema, proučavanje pravilnosti i funkcija, proces matematičkog modeliranja [18]. Ovakav način mišljenja bi trebalo razvijati kod učenika od samog početka obrazovanja, kako bi dalje učenje i shvatanje algebre bilo produktivnije.

Složenost algebre pripisuje se sintaktičkim nedoslednostima u aritmetici, na primer, promenljiva može istovremeno da predstavlja više brojeva, slova se biraju proizvoljno, jednakost se posmatra kao ekvivalencija, nevidljivi znak množenja, pravila prioriteta i upotreba zagrada [4].

Aritmetika je orijentisana na odgovor i nedovoljno se fokusira na relacije. Primer iz knjige *Adding It Up* [24] pokazuje da će učenici, koji su tek počeli sa učenjem algebre, u zadatku $8+5=\_+9$ na prazno mesto staviti broj 13 zato što im je $8+5$ signal da izvrše računanje, umesto da stave tačnu vrednost 4. Kada je znak jednakosti prisutan oni ga tretiraju kao separator između problema i rešenja i vrše izračunavanje sa leve strane znaka.

Algebra je jezik, a kako bismo razumeli taj jezik moramo pre svega razumeti koncept promenljivih, odnosno ono šta promenljive predstavljaju [35]. Algebra kao jezik podrazumeva sposobnost čitanja, pisanja i manipulacije brojevnim i simboličkim reprezentacijama u izrazima, formulama, jednačinama i nejednačinama, kao i fleksibilno primenjivanje gramatičkih pravila algebarskog jezika [10]. Fleksibilnost se odnosi na upotrebu standardnih algebarskih konvencija. Na primer, izraz $12x$ znači 12 pomnoženo sa x. Izraz $x12$ je takođe ispravan, ali se $12x$ preferira jer postoji konvencija, nepisano pravilo, da se koeficijent piše na prvom mestu. Takođe, promenljive koje se koriste u algebri mogu imati različita značenja u zavisnosti od koncepta. Recimo, u jednačini $5+x=9$, x je nepoznata i 4 je rešenje problema, dok u izrazu $x+y=y+x$, x predstavlja bilo koji broj [10].

[1] James J. Kaput (1952-2005), matematičar koji se zalagao za učenje algebre sa razumevanjem, kroz svoj životni rad uvodi mnoge inovacije i tehnologije koje olakšavaju rad u matematici.

Razdvajanje aritmetike i algebre produžava i produbljuje učeničke poteškoće u razumevanju važnih koncepata koji stoje u osnovi aritmetike, pa se preporučuje parcijalno integrisanje ova dva domena. Najprikladniji podsticaji ranoalgebarskog mišljenja za učenike nižih razreda osnovne škole su [33]:

- *generalizacija aritmetike*
- *uočavanje funkcionalnih veza*
- *uočavanje relacijskih veza*
- *preispitivanje uloge znaka jednakosti*

2.2 Generalizacija aritmetičkih koncepata

Generalizacija je jedna od osnovnih naučnih metoda istraživanja. Reč je nastala od latinske reči generalisatio, što znači uopštavanje, uopštenost. Generalizacija je prelaz sa razmatranja datog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegovog nadskupa. Kreće se od nekog pojma kome je pridružen određen skup objekata, njegov opseg i ustanovljava se neko svojstvo svih elemenata zadatog skupa. Zatim se posmatra opštiji pojam, svojstvo se prenosi na sve elemente dobijenog nadskupa ili se izgrađuje opštije svojstvo. Kako nije odmah jasno da li će pri tom prenošenju svojstvo ostati sačuvano, neophodno je dokazati da to svojstvo važi za sve elemente nadskupa [27]. U školskoj matematici najčešći prelazi sa skupa na nadskup su: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jednakostranični touglovi → jednakokraki trouglovi, pravougli trouglovi → trouglovi, kvadrati → pravougaonici, pravougaonici → paralelogrami, paralelogrami → trapezi i tako dalje [27].

Termin generalizacija aritmetičkih koncepata se odnosi na zaključivanje koje se manifestuje kada učenici uočavaju neke pravilnosti koje se pojavljuju tokom rada sa operacijama sabiranja i množenja, kao i njihovim inverzima – oduzimanjem i deljenjem [9]. Nastava matematike treba da bude usmerena na podsticanje osnovnih veština usvajanja i izražavanja i sistematskog opravdavanja matematičke generalizacije. Takva iskustva dovode do razumevanja koje je nezavisno od brojeva ili objekata sa kojima se radi (na primer, $a+b=b+a$ bez obzira da li su a i b celi, decimalni brojevi ili promenljive) [8]. Generalizacija, odnosno prelaz sa konkretnog i pojedinačnog ka opštem je složen misaoni proces. Postoje učenici koji teško savladavaju taj prelaz. Zato je pred nastavnicima ogdovoran zadatak da svojim metodičkim pristupom učenicima učine taj prelaz što lakšim. Evo nekoliko primera generalizacije preuzetih iz [9]:

Pri savladavanju veština sabiranja i oduzimanja prirodnih brojeva unutar skupa $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$, ili skupa $\{0, 1, 2, \dots, 20, 21, \dots, 99\}$ učenici uočavaju da:

a) Neki brojevi se, između ostalog, mogu dobiti i kao zbir dva jednaka broja:

$$(0 = 0 + 0), \qquad 2 = 1 + 1\,, \qquad 4 = 2 + 2\ldots, \quad 20 = 10 + 10$$

Ove brojeve zovemo *parni brojevi.* Zajedno sa ostalima koji se ne mogu tako predstaviti $1, 3, \dots 19$ čine ceo pomenuti skup. Brojeve koji nisu parni zovemo *neparni brojevi.* Ako sa a označimo bilo koji prirodan broj, tada se zbir $a + a$ može zapisivati kao $2a$. Prirodno se postavlja pitanje kako ćemo predstavljati neparne brojeve. Parni brojevi se mogu ilustrovati sledećim figurama:

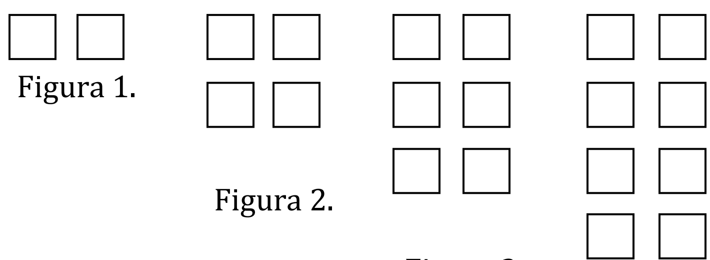


Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

Koncept parnog broja omogućava učenicima da se upoznaju sa logičkim alatima:

– *Princip isključenja trećeg:* Prirodan broj je paran ili neparan.

– *Princip nekontradikcije:* Prirodan broj ne može istovremeno biti paran i neparan.

Takođe, koncept parnog broja pruža mogućnost usvajanja algebarske notacije, ali i pravila zaključivanja „*Modus ponens*˝. U nižim razredima osnovne škole može se, na nekoliko načina, odgovoriti na pitanje kako znamo da je zbir dva parna broja opet paran broj.

Brojevi 2 i 4 su parni brojevi .
$2+4=6$ (6 je paran broj jer je $6=3+3$).
Zbir parnih brojeva 2 i 4 je paran broj 6 (zaključak).

Brojevi 6 i 12 su parni brojevi.
$6+12=18$ (18 je paran broj jer je $18=9+9$).
Zbir parnih brojeva 6 i 12 je paran broj 18 (zaključak).

Drugi način da se pokaže da je zbir brojeva 2 i 4 opet paran broj je sledeći:

Brojevi 2 i 4 su parni brojevi, jer se mogu dobiti kao zbir dva jednaka broja, tj.

$$2=1+1 \text{ i } 4=2+2.$$

Ako saberemo brojeve 2 i 4 ovako zapisane, imamo

$$2+4=(1+1)+(2+2)=(1+2)+(1+2)=3+3,$$

dakle zbir brojeva 2 i 4 je predstavljen u obliku zbira dva jednaka broja, pa je prema gore pomenutom $2+4$ takođe paran broj.

Na ovaj način učenike stavljamo u poziciju da na znak jednakosti ne gledaju kao na signal da treba izvršiti neka izračunavanja, nego kao na jednakost leve i desne strane, odnosno ako u nekoj jednakosti desna strana ima neko svojstvo, tada to svojstvo ima i leva strana jednakosti i obrnuto.

Zatim, možemo da pređemo na sledeće razmišljanje, koje predstavlja generalizaciju upravo izloženog zaključivanja.

Pretpostavka 1. Prvi broj je paran, pa se može predstaviti kao zbir dva jednaka broja, recimo

$$a+a.$$

Pretpostavka 2. Drugi broj je paran, pa se može predstaviti kao zbir dva jednaka broja, recimo

$$b+b.$$

Zaključivanje: Saberemo zbir $a+a$ sa zbirom $b+b$. Dobijamo

$$(a+a)+(b+b)=(a+b)+(a+b).$$

Zaključak: Budući da su sabirci sa desne strane prethodne jednakosti jednaki (prepoznavanje reprezentacije parnog broja), zaključujemo da zbir $(a+b)+(a+b)$ predstavlja paran broj.

Dakle, zbir $(a+a)+(b+b)$ je takođe paran broj.

Analogno, izvodimo zaključke:

Razlika dva parna broja je paran broj.

Zbir ili razlika dva neparna broja je paran broj.

Zbir ili razlika parnog i neparnog broja je neparan broj.

Kod sabiranja dvocifrenih brojeva, na primer $37+28$, može se postupiti na neki od sledećih načina:

$$37+28=(37+3)+(28-3)=40+25=65$$
$$37+28=(37-2)+(28+2)=35+30=65$$

U početku, učenik može da navede uočenu pravilnost rečima: Zbir dva broja se ne menja ako jednom sabirku dodamo neki broj, a od drugog sabirka oduzmemo taj isti broj, ili obrnuto. Simbolički, ovo zapisujemo kao:

$$\begin{aligned} a+b &= (a+c)+(b-c) \quad \text{uz uslov da je } c \le b \\ &= (a-c)+(b+c) \quad \text{uz uslov da je } c \le a. \end{aligned}$$

b) Kada oduzimamo broj od zbira brojeva, na primer $(35+47)-27$, to se može uraditi na više načina:

$$(35+47)-27=(35-27)+(47-0)=8+47=55;$$
$$(35+47)-27=(47-27)+35=20+35=55;$$
$$\begin{aligned}(35+47)-27&=(35+47)-(13+14)\\ &=(35-13)+(47-14)=22+33=55;\end{aligned}$$
$$(35+47)-27=82-27=(82+3)-(27+3)=85-30=55;$$
$$\begin{aligned}(35+47)-27&=82-27=(70+12)-(20+7)\\ &=(70-20)+(12-7)=50+5=55.\end{aligned}$$

Dakle, prvo uporedimo broj c koji oduzimamo od zbira $a+b$ sa sabircima a i b, ali i sa samim zbirom $a+b$. Tokom tog upoređivanja učenici pokazuju koliko razumeju relaciju poretka među prirodnim brojevima. Koji način ćemo upotrebiti zavisi od međusobnih odnosa brojeva o kojima se radi u konkretnom oduzimanju, ali je pre svega važno da razumemo ideju koja se nalazi u osnovi ovih izračunavanja.

2.3 Uočavanje funkcionalnih veza

Uočavanje funkcionalnih veza pomaže u razumevanju odnosa između matematičkih operacija, posebno rekurzivnog odnosa (opis koji govori kako se menja uzorak iz koraka u korak). Pojam funkcionalnih veza se odnosi na uopštavanje numeričkih modela [9]. Takvi obrasci se mogu predstaviti slikama, brojevnim pravama, funkcijskim tabelama.

Učenici su sposobni da primete funkcionalnu zavisnost između dve promenljive veličine i pre nego što se pojam funkcije uvede u nastavi matematike u višim razredima osnovne škole. U svakodnevnom životu susreću se sa raznim situacijama, recimo, visina plate radnika zavisi od broja radnih sati, na osnovu kojih razvijaju osećaj zavisnosti i uzročnosti. Za učenike u osnovnom obrazovanju dovoljno je funkciju definisati kao pravilo koje elementima jednog skupa dodeljuje elemente drugog skupa [20].

Za uočavanje funkcionalnih veza može se iskoristiti objašnjavanje operacije sabiranja. Primer je preuzet iz [9].

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \dots, \ 9 + 1 = 10$$

Dakle, kada neki broj saberemo sa brojem 1 rezultat sabiranja je sledbenik tog broja. Ako sa a označimo bilo koji prirodan broj, a sa a' sledbenik broja a, tada jednakost

$$a + 1 = a'$$

opisuje pridruživanje koje paru brojeva a i 1 pridružuje broj a'.

Sada možemo i da odgovorimo na pitanje kako predstavljati neparne prirodne brojeve. Kako su neparni prirodni brojevi sledbenici parnih prirodnih brojeva, predstavljamo ih tako što reprezentaciji parnog broja dodamo broj 1:

$$2a + 1,$$

pri čemu slovo a označava bilo koji prirodan broj.

Neparni brojevi mogu se ilustrovati sledećim figurama:

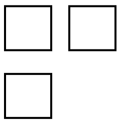


Figura 5.

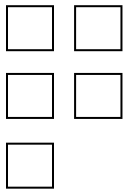


Figura 6.

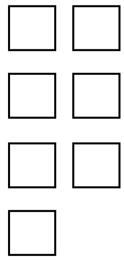


Figura 7.

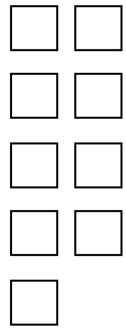


Figura 8.

Na sledeći način učenicima se može pokazati da je zbir dva neparna broja paran broj.

Brojevi 5 i 9 su neparni brojevi.
$5+9=14$ (14 je paran broj jer je $14=7+7$).
Zbir neparnih brojeva 5 i 9 je paran broj 14 (zaključak).

Dokaz možemo dati i na sledeći način:
Broj 5 je neparan broj, pa se može predstaviti u obliku
$5=4+1=2+2+1$;
Broj 9 je neparan broj, pa se može predstaviti u obliku
$9=8+1=4+4+1$.
Ako sabremo brojeve 5 i 9 prikazane na ovaj način imamo

$$5+9=(4+1)+(8+1)=(2+2+1)+(4+4+1)=(2+4+1)+(2+4+1)\,.$$

Zbir sa desne strane jednakosti je paran broj, pa zaključujemo da je zbir $5+9$ sa leve strane jednakosti takođe paran broj.

Uopštavanjem konstruišemo zaključivanje:

Pretpostavka 1. Prvi broj je neparan, pa se može predstaviti kao zbir dva jednaka broja i broja 1, recimo $a+a+1$.

Pretpostavka 2. Drugi broj je neparan, pa se može predstaviti kao zbir dva jednaka broja i broja 1, recimo $b+b+1$.

Zaključivanje: Saberemo zbir $a+a+1$ sa zbirom $b+b+1$. Dobijamo

$$(a+a+1)+(b+b+1)=(a+b+1)+(a+b+1)\,.$$

Zaključak: S obzirom da su sabirci na desnoj strani prethodne jednakosti jednaki, zaključujemo da zbir $(a+b+1)+(a+b+1)$ predstavlja paran broj. Dakle, zbir $(a+a+1)+(b+b+1)$ sa leve strane jednakosti je takođe paran broj.

2.4 Uočavanje relacijskih veza

Uočavanje relacijskih veza se odnosi na ispitivanje odnosa između datih veličina, a ne pronalaska rezultata matematičkih operacija. Podrazumeva korišćenje osnovnih osobina brojeva i operacija za transformaciju matematičkih rečenica. U kontekstu aritmetike ovaj termin je shvaćen kao sposobnost učenika da prepoznaju različite odnose između brojeva, operacija i relacija sa njima [28]. Ovakav način razmišljanja pruža nam drugačiju perspektivu u pogledu na aritmetiku i igra ključnu ulogu u učenju [23], [26].

Pri rešavanju matematičkih problema učenici bi trebali da ispituju dve ili više ideja alternativno, gledajući na vezu između njih, da ih analiziraju i koriste međusobne odnose u nameri da reše problem [33]. Ovo je od velikog značaja u matematici, budući da mnoge matematičke ideje uključuju odnose između različitih reprezentacija brojeva, ali i operacija i relacija između njih. Treba dobro razumeti aritmetiku, kako bi apstrakcije koje prethode ulasku u algebru bile dobro zasnovane i samim tim doprinele boljem razumevanju algebre. To se može postići različitim aktivnostima, koje ne samo da podstiču razumevanje aritmetike, nego i veštine računanja. Da bi se počelo sa ovakvim načinom razmišljanja, učenicima treba omogućiti rešavanje matematičkih problema u kojima su jednačine i nejednačine objekti koji se analiziraju [20].

Posmatrajmo dva načina na koji bi učenici rešavali sledeći zadatak:

Zadatak: Na prazno mesto upiši neki broj tako da jednakost bude tačna: $8 - \square = 9 - 4$.

Prvi način: Učenici izračunaju koliko je $9 - 4$, dobiju rezultat 5. Zatim se zapitaju koji broj treba oduzeti od 8 da bi se dobilo 5, $8 - 3 = 5$, dakle 3 je traženi broj.

Drugi način: 9 je za jedan veće od 8. Kako od broja sa desne strane oduzimamo 4, da bi seuspostavila ravnoteža, od broja sa leve strane moramo oduzeti broj koji je za jedan manji od 4, pa je 3 broj koji se traži.

Oba načina rešavanja su korektna i dovode do tačnog rešenja, razlika je samo u načinu razmišljanja. Pogledajmo još jedan primer i načine rešavanja istog. Kako bi učenici rešili ovaj problem:

$$147 + 222 = 223 + \square \ ?$$

Prvi način je da izračunaju vrednost sa leve strane, pa zatim da prilagođavaju rezultat na drugoj strani kako bi izraz bio valjan. Drugi način je posmatranje odnosa između datih brojeva sa obe strane znaka jednakosti. Ovo je jednostavniji način rešavanja kada su veliki brojevi kao u datom primeru. 223 je za jedan veće od 222, pa kako bi se nadoknadila razlika, od 147 treba oduzeti jedan, dakle rešenje je 146.

U praksi, učenici se više drže tradicionalnog metoda rešavanja, odnosno radije se opredeljuju za računanje. U radu sa velikom brojevima to može dovesti do poteškoća, pa i greške pri računu. Razmišljanje o numeričkim odnosima sa obe strane znaka jednakosti je upravo relacijsko razmišljanje. Na taj način ispitujemo kako je jedna operacija povezana sa drugom. Relacijsko razmišljanje se koristi kao strategija za rešavanje mnogih problema, na primer strategije udvostručenja ili polovljenja. Recimo, znamo da je $6+6$ za jedan manje od $6+7$, ili da je $4\cdot 7$ pola od $8\cdot 7$. To je jednostavan primer relacijskog razmišljanja.

Učenicima ne treba nametati relacijsko razmišljanje, već ga je potrebno uvoditi kroz zadatke, recimo tačno/netačno jednakosti, otvorene jednakosti [23]. U jednačinama treba birati velike brojeve, kako bi odustali od računanja i počeli da razmišljaju o odnosima između datih brojeva.

2.4.1 Rešavanje jednačina i nejednačina

Podučavanje učenika nižih razreda osnovne škole o upotrebi slova kao algebarskih promenljivih i nepoznatih uglavnom se svodi na korišćenje promenljive x kako bi se opisala nepoznata vrednost u aritmetičkim zapisima i rešavanje prostih jednačina i nejednačina u skupu prironih brojeva. Takav sistem učenja ne podstiče algebarsko mišljenje, a preterana upotreba slova x dovodi do toga da se učenici naviknu na taj način predstavljanja nepoznate, pa im zadaci u kojima se upotrebljavaju druga slova izgledaju nepoznato i teško. Cilj podučavanja je da učenici rade sa izrazima koji uključuju promenljive, bez razmišljanja o određenom broju, nego sa slovima na njihovom mestu, da rade sa simbolima bez obraćanja pažnje na ono što oni predstavljaju.

Promenljive mogu predstavljati jedinstvenu nepoznatu vrednost ili vrednosti koje se menjaju. Na primer, u zadatku $n+n+4=n+12$, slovo n predstavlja nepoznatu vrednost, koja se pojavljuje na više mesta u izrazu. Ako se isto slovo ili simbol pojavljuje više od jednom u izrazu ono ima istu vrednost na svakom mestu na kom se pojavi. Dok, na primer, u jednačini $a+6=10-b$, jedno rešenje je $a=3,\ b=1$, a drugo $a=b=2$, odnosno jednačina ima više rešenja, pa promenljive mogu varirati. Većinu učenika zbunjuje mogućnost da su njihove vrednosti jednake, jer misle da različita slova moraju da označavaju različite brojeve, što nije uvek tačno.

Učenici prvo treba da rešavaju jednačine i nejednačine sa jednom nepoznatom pomoću pokušaja i pogrešaka, a u višim razredima trebalo bi da znaju postupke rešavanja kada te neformalne metode više nisu prikladne. Zatim, treba im zadati zadatke sa više varijabli i dopustiti im da reše metodom kojom hoće [20]. Kako bi uvideli da metoda pogađanja ne daje rezultate, može se zadati jednačina oblika $3x + 2 = 11 - x$, gde rešenje nije ceo broj. Nakon što reše više ovakvih jednakosti, razviće i metodu za njihovo rešavanje.

2.4.2 Aktivnost za učenike

Pri uvodjenju tačno/netačno jednakosti učenicima kroz jednostavne primere treba objasniti šta je to tačna, a šta netačna jednskost, na primer:

$$5 + 3 = 8 \qquad 2 + 7 = 10 \qquad 2 + 6 = 8 + 0$$

$$4 + 4 = 7 \qquad 5 = 6 - 3 \qquad 7 - 4 = 5 - 3$$

Jednakosti oblika $5 = 5$ često zahtevaju dodatna objašnjenja jer su učenici naviki da sa jedne strane jednakosti bude neka računska operacija.

Prvo im možemo podeliti listiće na kojima su ispisane neke tačne i neke netačne jednakosti. Učenici rešavaju listić i određuju koje su jednakosti tačne, a koje nisu. Svaki odgovor mora da ima i objašnjenje. Zatim, kako bi savladali sastavljanje jednakosti, zadamo zadatak da svaki učenik na papir napiše nekoliko tačno/netačno jednakosti, od kojih je barem jedna tačna i barem jedna netačna i da ih da drugu iz klupe da rešava. Kad sami zadaju zadatke drugovima iz odeljenja učenici su skloni tome da zadaju velike brojeve, čime je računanje teže i samim tim koriste se drugim metodama rešavanja.

Takođe, možemo im postaviti zadatak da sastave jednakosti koristeći neki određen broj, na primer ako je datum 27., treba da pomoću brojeva i operacija zapišu broj 27. U početku će koristiti jednostavne izraze, ali kasnije će početi da koriste razne trikove, dodavanje i oduzimanje istog broja, nulu. Na ovaj način učenici razvijaju relacijsko mišljenje, uče da razmišljaju o odnosima između brojeva sa obe strane jednakosti.

2.5 Uloga znaka jednakosti

Učenici nižih razreda osnovne škole imaju zablude o značenju znaka jednakosti [6]. Već u prvoj godini školovanja znak jednakosti se interpretira kao signal da se izvrše naznačene računske operacije. Znak jednakosti je jedan od najvažnijih simbola u svim oblastima matematike u kojima se radi sa brojevima i operacijama. Važno je da razumeju da se simbol ˝$=$˝ odnosi na jednakost i balans između brojeva, između leve i desne strane znaka jednakosti [6].

Na temelju iskustva, učenici smatraju da je jedna strana jednakosti, obično leva, problem, a da desna strana predstavlja odgovor na taj problem. Takvo razmišljanje dodatno potkrepljuje i npr. korišćenje kalkulatora, gde je rezultat ono što se dobija kada pritisnemo tipku ˝$=$˝. U pisanoj formi, simbol ˝$=$˝ posmatraju kao nešto što razdvaja problem od rešenja.

Zadaci otvorenog tipa, tj otvorene jednakosti, se mogu koristiti kao alat koji će učenike podstaći da razmišljaju o odnosima između brojeva i kako da predstave te odnose. Pod otvorenim jednakostima podrazumevamo jednakosti koje imaju prazno mesto koje treba popuniti kako bi jednakost bila tačna. Na primer, u zadatku $28+35=29+\_$ na prazno mesto treba upisati neki broj tako da jednakost bude tačna, bez izračunavanja [23]. Kada se ispitaju veličine sa obe strane jednakosti, vidimo da se jedan od brojeva sa leve strane (28) poveća na 29. Možemo zaključiti da drugi broj (35) treba da se smanji za 1 da bi suma bila jednaka. Dakle, na prazno mesto treba upisati broj 34. Rešenje je nađeno uspostavljanjem ravnoteže imeđu datih brojeva.

Naučiti učenike da posmatraju celu jednačinu je izazov, jer se uglavnom fokusiraju na računanje čitajući sa leva na desno brojevnu rečenicu. Zadaci poput $11+3=4+\_$ ih teraju da nađu smisao i pogledaju ceo izraz, jer znaju da $11+3\neq 4$ [23].

Takođe, neke neke matematičke „rečenice˝ učenici mogu da transformišu koristeći svojstva računskih operacija, na primer izraz $(46+17)+14$ može da se zapiše kao $(46+14)+17$ koristeći svojstvo asocijativnosti sabiranja, ili, recimo $9\cdot 7$ kao $(10\cdot 7)-7$, kombinovanjem desetica i jedinica.

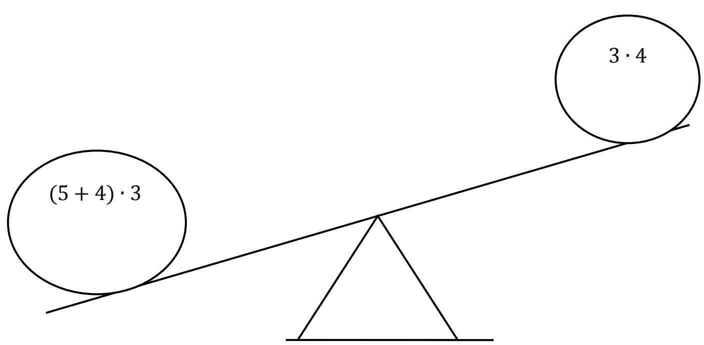
Praksa je pokazala da je učenicima najteže transformisanje izraza koristeći distributivnost. Na primer, u zadaku $8+4=4\cdot(\_+\_)$ kako bi došli do rešenja, učenici prvo nađu broj 12, odnosno izvrše sabiranje sa leve strane jednakosti, a zatim dođu do rešenja 3 podelom broja 12 sa 4. Sa druge strane, učenici koji su sposobni da uočavaju odnose između brojeva mogu da primete da su brojevi 8 i 4 dvostruko veći i jednaki broju 4, respektivno, te da je zbir ta dva broja tri puta veći od 4. Kako je broj 4 zajednički faktor i leve i desne strane date jednakosti, može se zaključiti da rezultat sabiranja u zagradi sa desne strane mora da bude broj 3, odnosno da na prazna mesta treba upisati brojeve 1 i 2, uzimajući u obzir osobinu komutativnosti sabiranja [23].

Razumevanje znaka jednakosti važno je i za sređivanje algebarskih izraza, jer uglavnom kada se susretnu sa njima učenici imaju poteškoća. Čak i rešavanje jednostavnijih jednačina, kao na primer $3x + 18 = 63$ zahteva od učenika da vidi obe strane jednakosti kao ekvivalentne izraze.

Operativno i relaciono razumevanje znaka jednakosti ima uticaj na relacijsko razmišljanje i razumevanje algebarskih koncepata koje će učenici učiti kroz školovanje. Kako bi razmišljao na ovaj način, učenik mora da posmatra jednačine kao objekte za analiziranje, a ne kao pocese koje treba obaviti [28]. Fokusirajući se na sabiranje i oduzimanje prilikom rešavanja zadataka, treba obratiti pažnju na sledeće osobine [9]:

- Komplementarnost sabiranja i oduzimanja;
- Komutativnost sabiranja;
- Zbir dva broja se ne menja kada se isti broj doda jednom sabirku, a oduzme od drugog sabirka;
- Rezultat oduzimanja se ne menja kada se isti broj doda ili oduzme od oba člana;
- Nula je neutralni element za sabiranje;
- Kada se broj oduzme od samog sebe dobija se nula;
- Asocijativnost sabiranja;
- Svaki broj se na više načina može prikazati kao zbir dva broja.

Učenicima znak jednakosti možemo predstaviti kao vagu, koja je u ravnoteži kada je vrednost izraza sa obe strane jednakosti ista. Vizuelno im to predočimo sa slikama vage (*Slika 1*).



Slika 1. Prikaz znaka jednakosti pomoću vage

2.6 Od aritmetike ka algebri

Kroz sledeći primer, koji je uzet iz udžbenika iz matematike za drugi razred osnovne škole [30], u okviru nastavne teme „Sabiranje i oduzimanje brojeva do 100“, u nastavnoj jedinici „Oduzimanje broja od zbira“, možemo da podstaknemo učenike da razviju veštine ranoalgebarskog mišljenja. Ideja je preuzeta iz S. Stevanović, S. Crvenković, D. A. Romano: *Jedan primjer analize aritmetičkog i ranoalgebarskog mišljenja.*

Zadatak 1: U prodavnici je bilo 25 belih i 30 crnih šešira. Prodato je 10 šešira. Koliko šešira je ostalo u prodavnici?

Ponuđeno je sledeće rešenje: Prvo odredimo broj šešira pre prodaje (saberemo broj belih i crnih):

$$25 + 30 = 55.$$

Zatim od tog broja oduzmemo broj prodatih šešira: $55 - 10 = 45.$

Isto možemo zapisati i jednim izrazom : $(25 + 30) - 10 = 45.$

U udžbeniku je dat jedan način rešavanja ovog zadatka i, mada se ne navodi da je to i jedini način, stiče se takav utisak i učenici zadatke istog tipa šablonski rešavaju koristeći se naučenim primerom.

Kako bismo im pružili uvid u različite načine rešavanja ovog zadatka i da bi dublje razmatrali problem možemo im postaviti pitanja:

1) Šta bi bilo da su kupljeni samo beli šeširi?
   Ovde će većina učenika primetiti da tada računamo ovako: $(25 - 10) + 30 = 15 + 30 = 45$;
2) A šta da su kupljeni samo crni šeširi?
   Tada bismo računali ovako: $25 + (30 - 10) = 25 + 20 = 45.$

Primetimo da je rezultat izračunavanja na sva tri načina isti i iznosi $45.$

3) Da je kupljeno 28 šešira, kako bismo tada računali?
   Ako je kupljeno od obe vrste tada $(25 + 30) - 28 = 55 - 28 = 27$;
   Ako su kupljeni samo crni, $25 + (30 - 28) = 25 + 2 = 27.$
4) Da je kupljeno 40 šešira, tada bi to moglo da se uradi samo na prvi način, odnosno
   $$(25 + 30) - 40 = 55 - 40 = 15.$$

Učenici bi znali da odgovore na postavljena pitanja, jer je ovakav pristup rešavanju zadataka tradicionalan u podučavanju strategija oduzimanja broja od zbira brojeva.

Nastavnik treba da prepusti učenicima da sami izvedu zaključke o načinima rešavanja zadatog problema i da opišu rečima kako su došli do rešenja, a zatim da uz njegovu pomoć zapišu postupke rešavanja.

Dakle, rečima bismo mogli ovako opisati postupak:

Ako ne vodimo računa koji šeširi su kupljeni; onda od ukupnog broja šešira $25 + 30$ treba oduzeti broj 10 u prvom slučaju, broj 28 u drugom slučaju i broj 40 u trećem slučaju, odnosno

$$(25 + 30) - 10 = 45, \qquad (25 + 30) - 28 = 27 \quad \text{i} \quad (25 + 30) - 40 = 15.$$

Dalje, možemo pokazati da ako želimo jednim izrazom da pokrijemo sva tri slućaja, to možemo zapisati ovako $(25+30)-c$, gde smo slovom c obeležili broj kupljenih šešira. Učenici treba da razumeju da su pravilnosti koje uočavamo u radu sa brojevima šabloni i treba ih navesti da dođu do zaključka zašto smo ovde tako zapisali postupak, odnosno da primete da ako u izraz $(25+30)-c$ umesto slova c uvrstimo 10, 28 ili 40 dobijemo iste rezultate kao gore. Zatim postavimo pitanje da li slovo c označava samo brojeve $10, 28$ i 40 ili i neke druge brojeve, gde bismo trebali da dođemo do zaključka da u našem šablonu slovo c jeste oznaka za te brojeve, ali i za sve druge brojeve koje možemo da oduzmemo od zbira $25 + 30$. Ne možemo izračunati koliko je $(25+30)-c$, ovaj šablon nam označava da se od zbira $25 + 30$ oduzima neki broj, ali nije rečeno koji, pa tako ne znamo rezultat oduzimanja. Rezultat zavisi od toga kojim brojem ćemo zameniti slovo c. Ovako upotrebljeno slovo zovemo promenljiva.

Na sličan način možemo razmatrati drugi deo zadatka, odnosno slučajeve kada su kupljeni samo beli ili samo crni šeširi. Uz pomoć nastavnika učenici bi sami trebali da dođu do rešenja i da pokušaju da ih zapišu.

Oduzimanje jednog broja od zbira brojeva može se obaviti na više načina. Koji način ćemo upotrebiti zavisi od međusobnih odnosa između konkretnih brojeva u zadatku. Cilj ovakvog rešavanja zadataka jeste da učenici koriste algebarsku notaciju, uočavaju veze između brojeva, proučavaju relacije i da razumeju ideju koja je u osnovi ovih izračunavanja.

Zadatak 2: Pera je zamislio dva broja. Njihov zbir je 19, a njihova razlika je 5. Koji su to brojevi?

Po ugledu na [4] zadatak se može rešiti na više načina, postupak možemo opisati koristeći samo reči, samo brojeve ili algebarske simbole, na primer:

Rečima: Brojeve nalazimo tako što od njihovog zbira oduzmemo razliku i dobijeni broj podelimo sa dva, čime smo dobili manji broj. Veći broj dobijemo tako što manji broj saberemo sa pet.

Numerički: $19 - 5 = 14, \quad 14:2 = 7, \ \ 7 + 5 = 12$.

Koristeći algebarske simbole: Do traženih brojeva dolazimo rešavanjem jednačine

$$x + (x + 5) = 19.$$

U praksi, učenici najviše koriste drugi način, izbegavajući jednačine. Kako bi se izbegao ovaj problem potrebno je sa učenicima diskutovati o drugim načinima rešavanja zadataka, uvoditi pisana objašnjenja u lekcije iz matematike, tako bi i sami nastavnici mogli više da saznaju o nivou razumevanja učenika posmatrajući njihove analize zadataka poput ovog, sa ciljem da im pomognu da prevaziđu „strah“ od algebre.

2.7 Algebra u školskoj nastavi

Kako se matematika razvijala, oblast algebre je postala šira i ljudi su počeli da je dele na apstraktnu algebru i školsku algebru. Glavna razlika između onoga što se podrazumeva pod algebrom generalno i algebre u školi je nivo apstrakcije sa kojim se radi. Ipak, imaju istu ideju: sve je u generalizaciji [1].

Školska algebra predstavlja polaznu tačku za razvijanje algebarskog mišljenja koje je osnova za naprednu algebru. Uprkos njenoj važnosti za nastavak školovanja, nastava i učenje algebre se susreće sa mnogim problemima. Najproblematičnija područja su promenljive, algebarski izrazi, algebarske jednačine i tekstualni zadaci [1].

Što se tiče promenljivih, učenici nemaju jasnu sliku o upotrebi određenih slova i znakova u različitim situacijama, ne razumeju značenje simbola u jednačinama i teško prevode probleme opisane rečima u ogovarajuće algebarske izraze.

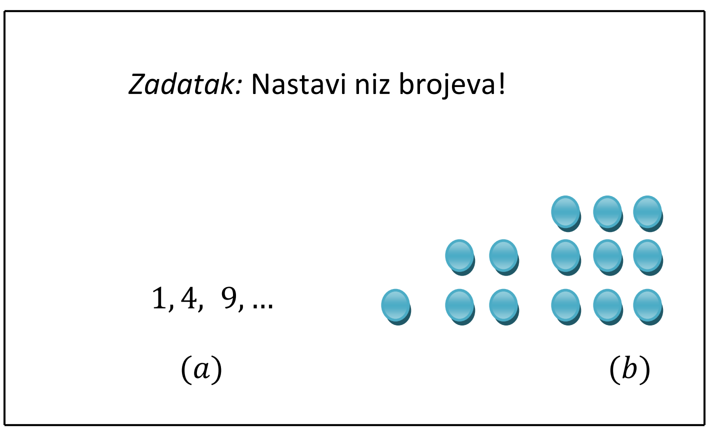
Smileni rad u algebri, kao i fluentno manipulisanje algebarskom notacijom podrazumeva da učenici dobro razumeju aritmetiku. Znanje aritmetike je osnovni preduslov za razumevanje algebre. Zbog toga učenicima treba pružiti priliku da vide odnose između te dve grane matematike, potrebne su aktivnosti koje se fokusiraju na prelazak sa tipičnih aritmetičkih na algebarske probleme [1]. Postoji faza u nastavnom planu i programu kada uvođenje algebre može jednostavne stvari učiniti komplikovanim, ali bez algebre je nemoguće učiniti komplikovane stvari prostim [34].

Kao rešenje za problem prelaza sa aritmetike na algebru i istovremeno podučavanje algebre u nižim razredima osnovne škole preporučuje se istraživanje šablona i pravilnosti. Istraživanje pravilnosti moglo bi se osmisliti u različitim oblicima, na primer slikovni ili geometrijski prikazi, numerički šabloni, pravilnosti koje se ponavljaju.

2.7.1 Pravilnosti

Istraživanje, proučavanje pravilnosti kao i proširivanje pravilnosti na veće skupove doprinosi razvoju algebarskog mišljenja. Šablon (šema, obrazac, engl. *pattern*) predstavlja određenu pravilnost koja se može uočiti u prirodi ili ljudskim tvorevinama, gde se elementi ponavljaju na neki predvidljivi način. Priroda je puna pravilnosti, na primer snežne pahuljice i kristali, ali ima i primera iz životinjskog sveta, poput pruga na zebri.

Jedan način korišćenja pravilnosti su, recimo, numeričke pravilnosti koje su vizuelno prikazane. Vizuelni prikaz matematičkih objekata može biti od velike pomoći učenicima pri zaključivanju. Na primer, razmotrimo sledeći kvadratni obrazac (*Slika 2*) koji ima oblik niza brojeva (a) i vizuelni prikaz istog (b) [1].

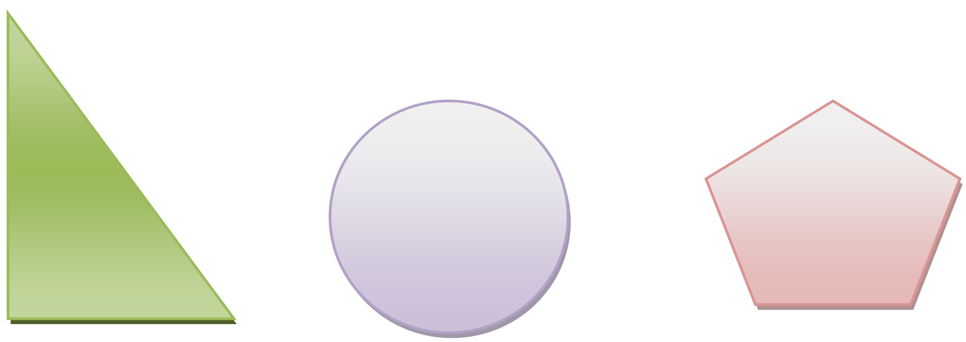


Slika 2.Prikaz jedne pravilnosti brojeva

U brojevnom nizu (a) učenici treba da uvide vezu između brojeva, bez ikakvog dodatnog objašnjenja. Mnogi učenici se ne snalaze u ovakvim zadacima i odbijaju dalje istraživanje. Sa druge strane, slikovni prikaz istog niza brojeva pomoću tačkica koje formiraju kvadrate učenicima pruža drugačiji pogled na isti zadatak. Ovde se mogu primetiti neka predviđanja [1]:

- Učenici direktno primećuju da je sledeći broj u nizu onaj koji je kvadrat nekog broja (uz razmatranje: broj 1 je kvadrat broja 1, broj 4 je kvadrat broja 2, broj 9 je kvadrat broja 3);
- Učenici primećuju porast tačkica na svakoj slici;
- Učenici primećuju odnos između broja tačkica na svakoj slici i broja tačkica u vrsti i koloni.

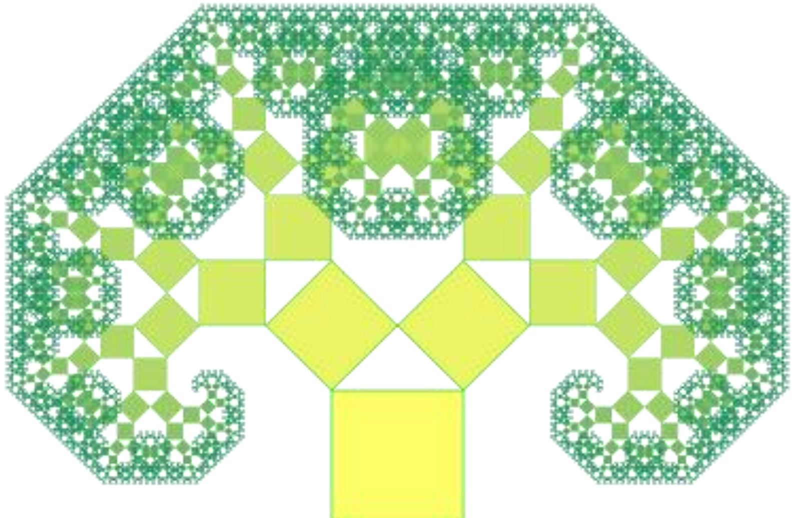
Za početak razvoja algebarskog mišljenja nije loše krenuti sa šablonima koji se ponavljaju. Šabloni mogu biti kocke, čačkalice, geometrijski oblici i mogu se praviti od različitih materijala. Učenicima možemo zadati zadatak da na osnovu jednog datog šablona naprave nove iste šablone, ili da zadamo šablon i različite materijale kako bi napravili isto od različitih materijala.



Slika 3. Primeri šablona od papira za učenike

Osnovna karakteristika pravilnosti je da se ponavljaju po određenom obrascu (boji, obliku, veličini), odnosno slede neko pravilo. To znači da su predvidive, da ih često možemo dovršiti posmatrajući samo deo niza. Prepoznavanje pravilnosti je temelj za ideju da dve različite situacije mogu imati isto matematičko značenje.

Jedan zanimljiv tip pravilnosti su fraktali – beskonačno ponavljajući elementi. Isti, ili vrlo sličan, element se ponavlja kroz sve dimenzije objekta. Bez obzira koliko ga uvećavali ili smanjivali, šema i količina detalja ostaju isti. Fraktale nalazimo u slikama, građevinama, kinematografiji. Jedan od najpoznatijih primera fraktala je Pitagorino drvo. Ovaj fraktal je dobio ime po Pitagori zato što svaka trojka susednih kvadrata svojim zajedničkim temenima određuje pravougli trougao, u obliku koji se tradicionalno koristi za prikaz Pitagorine teoreme.



Slika 4. Pitagorino drvo

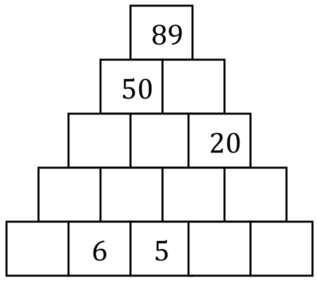
2.7.2 Aktivnost za učenike sa elementima aritmetike i algebre

Učenicima je postavljeno pet problema, rade samostalno u toku jednog školskog časa. Dve glavne teme problema su aritmetika i algebra. Aritmetički zadaci se fokusiraju na razumevanje učenika u obavljanju osnovnih računskih operacija sa celim brojevima, dok je sektor algebre fokusiran na uočavanje pravilnosti i obrasaca pri rešavanju problema. Ideje za zadatke su preuzete iz Ayu Apsari, R. *Bridging Between Arithmetic and Algebra: Using Patterns to Promote Algebraic Thinking,* ali zadaci su osmišljeni u skladu sa nastavnim jedinicama koje su obrađivane.

Problem 1. Napiši naredna tri člana niza brojeva:

a. $52, 53, 54, \ldots$
b. $97, 98, 99, \ldots$
c. $1, 3, 5, \ldots$
d. $92, 94, 96, \ldots$
e. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

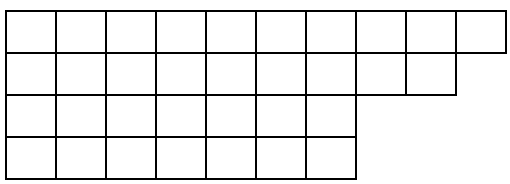
Problem 2. Popuni brojevnu piramidu:



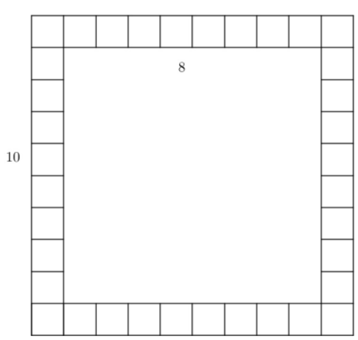
Problem 3. Izračunaj vrednost izraza:

a. $10 + 8 \cdot 4 =$
b. $39 \cdot 11 =$
c. $185 : 5 - 4 =$
d. $6^2 =$

Problem 4. Odredi da li ima paran ili neparan broj blokova, bez brojanja.



Problem 5. (Problem granice): Uz pomoć informacija sa slike odredi broj pločica u obliku kvadrata kojima će se popločati granica oko bazena. Na slici je područje veličine 10×10 u obliku kvadrata, a bazen je veličine 8×8. Ako je moguće, naći više od jednog načina za određivanje broja graničnih kvadrata.



U prva dva problema od učenika se traži da uvide vezu između datih brojeva, da zaključe u kakvim odnosima se nalaze ti brojevi kako bi nastavili niz ili popunili piramidu. Treći zadatak je izračunavanje sa brojevima i, mada učenicima na prvi pogled ne izgleda teško, često dolazi do grešaka u redosledu računskih operacija. U četvrtom zadatku ono što učenike zbunjuje je to što se traži da daju tačan odgovor bez brojanja. Uglavnom su mišljenja da moraju prebrojati blokove kako bi zaključili da li je njihov broj paran ili ne. Ideja zadatka je da uvide da postoji „čudan˝ deo date slike i da mogu doneti zaključak razmatrajući ga. Peti zadatak se odnosi na metodu prebrojavanja elemenata bez računanja svakog koraka. Postoji nekoliko načina za rešavanje ovog problema. Često rešenje koje učenici ponude je $10+10+8+8=2\cdot 10+2\cdot 8=20+16=36$, jer uoče kako sa leve i desne strane od početka do kraja bazena ima po 10 kvadrata, a da sa gornje i donje strane vodoravno ostane po 8. Još neka moguća rešenja su $10^2-8^2, 4\cdot 8+4$. lako je izračunati granicu kada se radi o manjem bazenu. Kada bismo isti zadatak postavili sa većim dimenzijama bazena, teško bi prebrojavanjem došli do tačnog rezultata. Ovakvi zadaci mogu da posluže kao uvodni u opisivanju formula za n-ti korak.

2.8 Matematički razgovori

„Nikada nećemo postati pravi matematičari, čak i ako znamo napamet sve tuđe dokaze, ako naš um nije dovoljno sposoban da samostalno rešava bilo kakve probleme."

Rene Decartes

Razgovori u učionici su ključno obeležje reformi u nastavi matematike [4]. Nastavnici treba da ohrabruju učenike da iskazuju svoje ideje, da raspravljaju o njima. Potreban je veći stepen interakcije kako između nastavnika i učenika, tako i između učenika međusobno.

Komunikacija u matematici je važna matematička praksa kojom se razvijaju umeća povezivanja, uopštavanja i opravdavanja ideja. Kroz pitanja tipa „Može li se ovaj problem rešiti na drugačiji način?“, „Kako znamo da je ovo rešenje tačno?“, „Da li ovaj način rešavanja uvek daje tačne rezultate?“, nastavnici omogućavaju učenicima da verbalizuju i prošire svoje mišljenje o matematičkim objektima i njihovim međusobnim vezama [9]. Slušajući njihove odgovore i ideje nastavnik ima uvid u nivo razumevanja i razmišljanja svakog učenika, a to mu može pomoći da razume koncepte i zablude na kojima se zasnivaju njihovi zaključci.

U tradicionalnoj nastavi matematike nastavnik se nalazi u centru aktivnosti, on je taj koji matematičke ideje prenosi učenicima [23]. Ovakva nastava od učenika ne zahteva previše angažovanja, oni usvajaju nastavnikove modele i ideje i prema njima pristupaju rešenju problema. Časovi bi se mogli organizovati tako da učenici rade u parovima, grupama ili da je celo odeljenje uključeno u diskusiju. Na ovaj način učenici diskutuju o strategijama rešavanja zadataka, razmatraju da li je nečije rešenje efikasniji i lakši način rešavanja problema. Uloga nastavnika kao rukovodioca diskusije je da održi red u diskutovanju i napravi redosled kojim će učenici izlagati svoje ideje. Pri tome, nije loše odabrati manje sofisticiraniju strategiju kao prvu za razmatranje, jer prezentovanje „savršenog odgovora“ na početku prekida diskusiju [38].

Naravno, poželjno je uključiti sve učenike u diskusiju, ako je potrebno dodatno analizirati i jednostavnim jezikom objašnjavati neke probleme kako bi svi mogli da prate razgovor. Nastavnici bi trebali da neguju algebarsko mišljenje i prilikom učenja drugih matematičkih koncepata, tako što bi pomagali učenicima da obrate pažnju na matematičke proporcije, relacije i pravilnosti. Dajući učenicima mogućnost istraživanja matematičkih problema prihvatanjem postojanja različitih pristupa rešavanja problema, dobijaju se moćni alati matematičkog mišljenja i stiču se iskustva o korisnosti matematike [38].

2.9 Polinomi

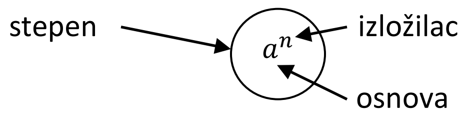
Pojam polinoma i operacije sa njima predstavljaju važan algebarski sadržaj u osnovnoj školi. Polinomi se obrađuju u sedmom razredu osnovne škole, upravo kada je primećeno manje interesovanje učenika za matematiku, kao i značajno slabiji rezultati na kontrolnim vežbama.

Poslednjih godina razumevanje pojma polinoma i osnovnih operacija sa njima je sve slabije, zbog čega učenici kasnije imaju problema i sa razumevnjem složenijih zadataka iz ove oblasti koji se obrađuju u srednjoj školi. Jedan od razloga zbog kog dolazi do poteškoća u razumevanju polinoma je taj što učenici ne usvoje dobro pojam stepena. Zbog toga, pre uvođenja pojma polinoma, potrebno je ponoviti šta je stepen i važne osobine stepena.

$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ pišemo a^n, gde je a bilo koji realan, a n bilo koji prirodan broj.

U udžbeniku za sedmi razred osnovne škole [17] navodi se sledeća definicija stepena:

Proizvod u kome se pojavljuje samo realni broj a kao činilac n puta ($n \in \mathbb{N}$) nazivamo n-tim stepenom broja a. Broj a je osnova stepena a^n, a broj n je izložilac stepena a^n.



***Osobine stepena**:*

Množenje stepena jednakih osnova:

$$5^2 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5}_{2} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3} = 5^{2+3} = 5^5, \text{ tj.} \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m},\ n, m \in \mathbb{N}$$

Deljenje stepena jednakih osnova:

$$5^6 : 5^3 = \frac{5^6}{5^3} = \frac{\overbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}^{6}}{\underbrace{5\cdot5\cdot5}_{3}} = 5^{6-3} = 5^3, \text{ tj.} \qquad a^n : a^m = a^{n-m},\ n, m \in \mathbb{N}, n > m, a \neq 0$$

$$5^1 = 5, 5^0 = 1 \text{ , tj.} \qquad a^1 = a,\ a^0 = 1, a \neq 0$$

Stepen proizvoda i količnika:

$$(5 \cdot 8)^4 = (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 8) = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) = 5^4 \cdot 8^4, \text{ tj.}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5^3}{8^3}, \text{ tj.} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ n \in \mathbb{N}, b \neq 0$$

Stepen stepena:

$$(5^3)^4 = 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 = 5^{3+3+3+3} = 5^{3\cdot4} = 5^{12}, \text{ tj.} \qquad (a^n)^m = a^{n\cdot m},\ n, m \in \mathbb{N}$$

U većini udžbenika za osnovnu školu uvodi se sledeća definicija polinoma i objašnjenja pojma monoma, binoma i trinoma:

Polinomi su algebarski izrazi dobijeni pomoću znakova brojeva, znakova promenljivih i znakova operacija sabiranja, oduzimanja i množenja $(+, -, \cdot)$.

Na primer, izrazi $7a, 5{,}7 - 4x, 5x^2 + 7x - \frac{2}{3}, \frac{x+3}{5}, a^3b^2 + ab^5 + \sqrt{5}$ jesu polinomi, dok izrazi $\frac{1}{x}$ i $\frac{3}{6+a}$ nisu polinomi.

***Vrste polinoma**:*

Monomi su polinomi u kojima se od znakova operacija pojavljuje samo znak za množenje $(\cdot)$. Dakle, to su izrazi koje dobijamo od znakova brojeva, znakova promenljivih i znaka za množenje. Na primer, ako su x, y, a, b, c promenljive, izrazi $5, x, 5x, 5x^2, x^3y^2, -6a^5bc^2$ jesu monomi (sa jednom ili više promenljivih), dok izrazi $5 - x, 5x + x^2$ to nisu.

Brojevna konstanta u monomu naziva se koeficijent tog monoma. Za monome koji se razlikuju samo u koeficijentu kažemo da su slični, , na primer $4x$ i x su slični monomi sa jednom promenljivom, a $-3a^2b$ i $\sqrt{5}a^2b$ su slični monomi sa dve promenljive.

Ako su A i B dva neslična monoma, onda izraz $A + B$ nazivamo *binomom*, a za monome A i B kažemo da su članovi binoma $A + B$. Često se kaže da su binomi dvočlani polinomi. Na primer, ako su a, b, x promenljive, izrazi $1 + x$, $a + b, a^3 + 3b^2$ su binomi.

Ako su A, B i C tri neslična monoma, onda izraz $A + B + C$ nazivamo *trinomom,* a za monome A, B i C kažemo da su članovi trinomac $A + B + C$. Kaže se i da su trinomi tročlani polinomi. Na primer, ako su a, x, y i z promenljive, izrazi $1 + 2a + a^2$ $, x - y + z$, $4x^2y + x^3z - \frac{2}{3}y^2z$ jesu trinomi.

Za polinome sa više od tri člana ne postoji poseban naziv.

Polinom po promenljivoj x je izraz $P = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Ako je $a_n \neq 0$ broj n se naziva stepen polinoma, koeficijent a_n je vodeći koeficijent, sabirak a_nx^n je vodeći monom, a sabirak a_0 je slobodan član tog polinoma. Ako je $a_n = 1$ polinom se naziva monični polinom. Polinom je linearan ako je $n = 1$, kvadratni ako je $n = 2$, kubni ako je $n = 3$.

U nastavku je dato nekoliko primera časova na kojima se obrađuju polinomi i operacije sa njima, po nastavnom planu i programu za sedmi razred osnovne škole.

Primer časa 1.

Razred	**VII**
Naziv predmeta	Matematika (redovna nastava)
Nastavna tema	Racionalni algebarski izrazi
Nastavna jedinica	**Sabiranje polinoma.Suprotni polinomi.Oduzimanje polinoma.**
Tip časa	**Obrada**

Oblik rada	Frontalni, individualni
Nastavna sredstva	Tabla, kreda, udžbenik, zbirka
Nastavne metode	Metoda razgovora, metoda ilustracije
Cilj nastavnog rada	Učenici treba da: • upoznaju pojam polinoma i monoma; • umeju da kod datih monoma razlikuju koeficijent od promenljivog dela monoma; • umeju da uoče slične monome; • razvijaju logičko, analitičko i algoritamsko mišljenje; • razvijaju koncentraciju, sposobnost za uporan i predan rad, postupnost i sistematičnost u radu.

Mogući tok časa	**Komentar**
1. Uvodni deo časa	
Kratko podsećanje: Navedi nekoliko primera monoma. Kako se naziva brojevna konstanta u monomu? Šta kažemo za monome koji se razlikuju samo u koeficijentu?	Uvodni deo časa ne treba da traje duže od 5 minuta.
2. Glavni deo časa	
Primer: Koji polinom je zbir monoma $2a$ i $7a$? Odgovor: Monomi $2a$ i $7a$ su slični, a njihov zbir računamo koristeći distributivni zakon: $2a+7a=(2+7)a=9a$ Dakle, zbir sličnih monoma je njima sličan monom čiji je koeficijent jednak zbiru koeficijenata datih monoma (monoma sabiraka). Ako je M monom, a α i β realni brojevi, tada je $\alpha\mathrm{M}+\beta\mathrm{M}=(\alpha+\beta)\mathrm{M}$.	Glavni deo časa treba da traje oko 35 minuta.

Polinom je sređen ako je zapisan kao zbir nesličnih monoma. Svaki polinom se može prevesti u sređen oblik sabiranjem njegovih sličnih monoma Radi preglednosti, sređene polinome zapisujemo tako da stepeni monoma opadaju. Primer: Pišemo x^3+2x^2+3x+1,a ne $3x+x^3+1+2x^2$. Primer. Dati su polinomi $A=2x+3y$; $B=a^2-4a+11$; $C=x^3y-2y^3+5yx^3$ i $D=6+6ab-36a^2b^2$? Koji od njih su sređeni? Primer. Učenici treba da date polinome zapišu u sređenom obliku: a) $3a^2-15+5a-6a^2+7$; б) $8x^3-6x^2-2x^3-x+11x^2+43x$. Polinome čiji je zbir jednak nuli nazivamo međusobno suprotnim polinomima, tj. polinomi P i $-P$ su međusobno suprotni polinomi jer je $P+(-P)=0$. Zadatak. Odredi suprotan polinom polinomu P ako je: a) $P=3x$; b) $P=4a^2-5a$.	Na časovima obrade ove nastavne teme treba insistirati na razvijanju sistematičnosi prilikom rešavanja zadataka. Pored sistematičnosti, urednost, postupnost, pa i strpljenje neophodni su prilikom rešavanja pomenutih zadataka. Dobro je poznato da su nepregledno i neuredno zapisivanje često uzrok grešaka i to treba napominjati učenicima.

Zadatak. Odredi zbir monoma: a) $2x\ i\ 3x$; b) $\frac{2}{7}x\ i\ 0.7x$; c) $3.4ab\ i\ 0{,}5ab$. Sabiranje polinoma vršimo primenom zakona komutativnosti i asocijativnosti operacije sabiranja. Pre sabiranja pogodno je polinome napisati u sređenom obliku. Zbir dva polinoma određujemo tako što saberemo slične monome, a preostale monome iz oba polinoma prepišemo. Zadatak. Naći zbir polinoma: a) $P = a^2 + 5a - 3$ i $Q = -3a^2 + 1$; b) $A = 2x^2 + 3$ i $B = x - 4$.	Napisati onoliko primera koliko ima učenika u odeljenju, prilagođavajući težinu zadatka svakom učeniku. Nastavnik ispisuje na tabli zadatke koje učenici samostalno rešavaju. On dalje prati rad učenika, usmerava ih na pravilno rešavanje zadataka, daje instrukcije i neophodna i dodatna objašnjenja, bodri učenike da slobodno pitaju sve što im nije jasno.
3. Završni deo časa	
Za domaći zadatak, tj. uvežbavanje realizovanih sadržaja, zadati odabrane zadatke iz zbirke.	Završni deo časa treba da traje oko 5 minuta. Cilj domaćeg zadatka je da obezbedi samostalan rad učenika na usvajanju sadržaja realizovanih u toku časa.

Napomenimo, uvodni zadaci koji se prikazuju učenicima treba da budu lakši i kraći. Kasnije zadavati složenije zadatke, tražiti od učenika da svoja rešenja zapisuju postupno i pregledno, kako bi celo odeljenje moglo da prati nastavu. Kod sabiranja monoma treba zadavati primere gde je dat zbir nesličnih monoma, jer učenici često ne shvataju da različite objekte ne mogu da sabiraju (jedan pogrešno uradjen primer je $5x^2 + 3x^3 = 8x^5$, a ovakve greške se u praksi redovno ponavljaju). Takođe, jedna od čestih grešaka koju učenici prave pri oduzimanju polinoma je ta što ne vode računa kod oslobađanja od zagrada, vrlo često promene znak samo nekim članovima (najčešće samo prvom), ili čak nijednom članu polinoma unutar zagrade.

Prilog za čas: Sava je učenik sedmog razreda. Na kontrolnoj vežbi iz matematike rešio je sve zadatke. Međutim, potkrale su mu se neke greške. Tvoj zadatak je da pronađes greške i zaokružiš ih hemijskom olovkom. Zatim u koloni u kojoj piše „tvoje rešenje“ reši ispravno zadatke koje je Sava pogrešno uradio. Pokušaj da oceniš njegovu kontrolnu vežbu.

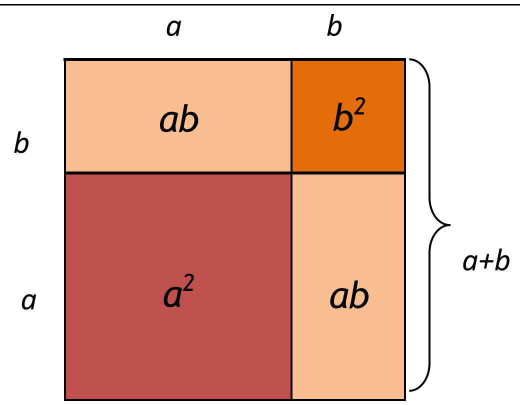
Zadatak	Savino rešenje	Tvoje rešenje
1. Izračunaj vrednost izraza za $x = -1$: $(7 + 3x)(4 - x)$.	$(7 + 3 - 1)(4 + 1) = 9 \cdot 5 = 45$	
2.Saberi monome: $7a^2 + a^2 =$	$8a^2$	
3.Sredi polinom po opadajućim stepenima: $5e^3 - 3 + 2e + 6e^2 - e^4$	$e^4 - 5e^3 + 6e^2 + 2e - 3$	
4.Uprosti izraz: $a - 2b + 4 - 3a + 2b - 5 =$	$4a - 2b + 4 + 2b - 5 =$ $4a + 4 - 5 = 4a - 1$	
5.Saberi polinome *A* i *B*: $A = x^2 + 3x - 0,5$ $B = 11x^2 - 7x - 2,2$	$A + B =$ $= x^2 + 3x - 0,5 + 11x^2 - 7x - 2,2$ $= 12x^2 + 10x - 2,7$	
6. Izračunaj *y* ako je $10y - (-y + 1) = 11$	$10y - (-y + 1) = 11$ $10y + y - 1 = 11$ $11y - 1 = 11$ $10y = 11$ $Y = 1,1$	

Ovakav način zadavanja zadataka učenicima može biti zanimljiv, oni su ti koji pregledaju i ocenjuju nečiji rad, pa će se samim tim potruditi da bolje obave svoj zadatak.

Primer časa 2.

Razred	**VII**
Naziv predmeta	Matematika (redovna nastava)
Nastavna tema	Racionalni algebarski izrazi
Nastavna jedinica	**Kvadrat zbira i kvadrat razlike**
Tip časa	**Obrada**
Oblik rada	Frontalni
Nstavna sredstva	Tabla, kreda, udžbenik, zbirka
Nastavne metode	Metoda razgovora, metoda rešavanja zadataka
Cilj nastavnog rada	• usvajanje pravila za računanje kvadrata binoma • razlikovanje kvadrata razlike od kvadrata zbira • grafička interpretacija kvadrata binoma-usvajanje

Mogući tok časa	**Komentar**
1. Uvodni deo časa	
Na početku obnoviti sa učenicima šta je kvadrat realnog broj, kako se zapisuje i kako se izračunava. Usmeno postaviti neka pitanja: Koliki je kvadrat broja 6? Koliki je kvadrat broja – 5? Kolika je vrednost izraza -4^2?	Uvodni deo časa ne treba da traje duže od 5 minuta.
2. Glavni deo časa	
• Nastavnik predaje teorijski deo, uz zapis na tabli i projektovanje slike. • Formulu za kvadrat binoma zapisati i rečima na tabli.	Na časovima obrade ove nastavne teme treba insistirati na razvijanju sistematičnosi prilikom rešavanja zadataka. Pored sistematičnosti, urednost, postupnost, pa i strpljenje neophodni su prilikom rešavanja pomenutih zadataka.

<table>
<tr>
<td>


Neka su A i B dva neslična monoma. Izraz oblika $(A+B)^2$ predstavlja kvadrat binoma $A+B$.

$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B = A^2 + 2AB + B^2$

Kvadrat binoma jednak je zbiru kvadrata članova tog binoma i njihovog dvostrukog proizvoda.

Formula za kvadrat binoma važi i ako su A i B bilo koji polinomi.

Izraz oblika $(A-B)^2$ predstavlja kvadrat razlike monoma A i B. Izvodimo opšti obrazac koji ćemo koristiti kada bude potrebno.

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Dalje se rade odabrani zadaci iz zbirke.

Zadatak 1. Odredi kvadrat binoma P ako je:

a) $P = 4a - 3$;
b) $P = 9x - \frac{4}{7}y$;
c) $P = -6a - 5b$.

Zadatak 2. Date trinome zapiši kao kvadrat binoma:
</td>
<td>
Dobro je poznato da su nepregledno i neuredno zapisivanje često uzrok grešaka i to treba napominjati učenicima.
</td>
</tr>
</table>

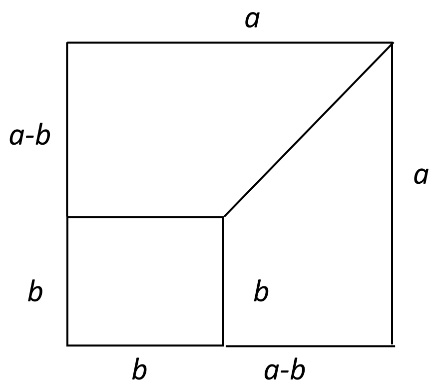
a) $1 - 10x + 25x^2$; b) $49a^2 + 28ab + 4b^2$; c) $9a^2b^2 + 3ab + \frac{1}{4}$. *Zadatak 3.* Ako je $A = 3x + 1, B = 2x - 3, C = 2 - x$, odredi: a) $A^2 + B^2 + C^2$; b) $(A + C)^2 - B^2$; c) $A^2 - B^2 + A \cdot C$.	
3. Završni deo časa	
Za domaći zadatak, tj. uvežbavanje realizovanih sadržaja, zadati odabrane zadatke iz zbirke.	Završni deo časa treba da traje oko 5 minuta. Cilj domaćeg zadatka je da obezbedi samostalan rad učenika na usvajanju sadržaja realizovanih u toku časa.

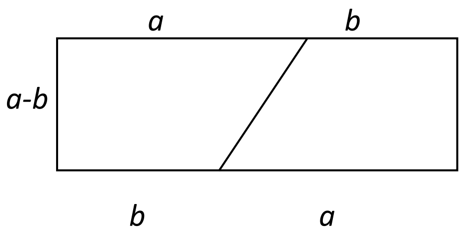
Uglavnom za proizvoljne polinome koristimo slova $A, B, C, \ldots$ Kada uvedemo formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata gde su A i B proizvoljni monomi, deluje da je učenicima jasno kako da primenjuju te formule. Međutim, u praksi se dešava da oni ne znaju šta može da stoji umesto slova A i B, pa kada im zadamo da odrede, na primer, kvadrat binoma x i y, odnosno $(x + y)^2$, ne dobijemo odgovor. Učenici često ne razumeju da i ako promenimo imena promenljivih formule i dalje važe [20].

Primer časa 3.

Razred	**VII**
Naziv predmeta	Matematika (redovna nastava)
Nastavna tema	Racionalni algebarski izrazi
Nastavna jedinica	**Razlika kvadrata**
Tip časa	**Obrada**
Oblik rada	Frontalni
Nstavna sredstva	Tabla, kreda, udžbenik, zbirka
Nastavne metode	Metoda razgovora, metoda rešavanja zadataka
Cilj nastavnog rada	• usvajanje pravila za računanje razlike kvadrata • razlikovanje kvadrata razlike od razlike kvadrata • uvežbavanje pravila za računanje razlike kvadrata

Mogući tok časa	Komentar
1. Uvodni deo časa	
Kako se zove izraz $2x-7$? (razlika monoma $2x$ i 7).	Uvodni deo časa ne treba da traje duže od 5 minuta.
2. Glavni deo časa	
Početnu postavku zadatka I dobijeno rešenje napisati na table posebno. $$(2x-7)(2x+7)=4x^2-49$$ Kako se zove izraz $2x-7$? (razlika monoma $2x$ i 7). Kako se zove izraz $2x+7$? (zbir monoma $2x$ i 7) Kako se zove izraz $(2x-7)(2x+7)$? (proizvod razlike i zbira monoma $2x$ i 7) Kako se zove izraz $4x^2-49$? (razlika monoma $4x^2$ i 49) Da li monomi $4x^2$ i 49 imaju veze sa monomima sa leve strane jednakosti? (49 je kvadrat broja 7, $4x^2$ je kvadrat monoma $2x$) Kako bismo sada nazvali izraz $4x^2-49$? (razlika kvadrata monoma $2x$ i 7) Dakle, izraze koji su dati kao binomi i to kao razlika monoma i ti monomi su kvadrati možemo rastaviti na proizvod zbira i razlike tih monoma. • Nastavnik predaje teorijski deo, uz zapis na tabli i projektovanje slike. • Formulu za razliku kvadrata zapisati i rečima na tabli.	Na časovima obrade ove nastavne teme treba insistirati na razvijanju sistematičnosi prilikom rešavanja zadataka. Pored sistematičnosti, urednost, postupnost, pa i strpljenje neophodni su prilikom rešavanja pomenutih zadataka. Dobro je poznato da su nepregledno i neuredno zapisivanje često uzrok grešaka i to treba napominjati učenicima.





Neka su A i B dva neslična monoma. Izraz oblika $A^2 - B^2$ predstavlja razliku kvadrata monoma A i B.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Dalje se rade odabrani zadaci iz zbirke.

Zadatak 1. Razliku kvadrata zapiši u obliku proizvoda:

a) $x^2 - 1$;
b) $4x^2 - 5$;
c) $36a^2 - 49b^2$.

Zadatak 2. Koristeći razliku kvadrata izračunaj:

a) $91^2 - 9^2$;
b) $87^2 - 77^2$;
c) $\left(7\frac{3}{4}\right)^2 - \left(2\frac{1}{4}\right)^2$.

Zadatak 3. Uprosti izraze:

a) $(a-1)(a+1) + 5a(2a-1)$;

b) $(6a-5b)(6a+5b)+(2a+1)(5a-18a)$; c) $4\cdot(a-5)(a+5)-(2a-3)(2a+3)$. *Zadatak 4.* Reši jednačine: a) $(x+3)(x-3)-(x^2-4x)=9$; b) $(2-y)(2+y)-(6y-y^2)=4$; c) $(x+2)^2-(x-3)(x+3)=1$.	
3. Završni deo časa	
Ponoviti sa učenicima formulu za izračunavanje razlike kvadrata. Za domaći zadatak, tj. uvežbavanje realizovanih sadržaja, zadati odabrane zadatke iz zbirke.	Završni deo časa treba da traje oko 5 minuta. Cilj domaćeg zadatka je da obezbedi samostalan rad učenika na usvajanju sadržaja realizovanih u toku časa.

Napomena: U praksi se dešava da pojedini učenici ne zapamte formulu za razliku kvadrata, pa do rešenja dolaze množeći svaki član iz prve zagrade sa svim članovima iz druge zagrade. Greška koja se često dešava pri množenju svakog člana sa svakim je ta da učenici ne znaju dokle su stigli, pa neki član izostave. U tome im može pomoći docrtavanje strelica, na primer:

$$(2-x)\cdot(x^2+3x-1)=2x^2+6x-2-x^3-3x^2+x=-x^3-x^2+7x-2$$

Sledeća važna lekcija iz polinoma je rastavljanje polinoma na činioce. Za polinom koji je predstavljen u obliku proizvoda drugih polinoma kažemo da je rastavljen na činioce. Učenicima često nije jasno šta znači rastaviti polinom na činioce i zašto to rade. Zato u zadacima treba insistirati na rastavljanju polinoma na činioce, kako bi uvideli da pojedine probleme najlakše mogu rešiti na taj način.

Polinomi imaju značajnu primenu u svim oblastima matematike (na primer rastavljanje polinoma na činioce u rešavanju jednačina, dokazivanju Pitagorine teoreme), kao i u fizici, hemiji, informatici, astronomiji. U osnovnoj školi polinomi predstavljaju prvi susret učenika sa algebrom, kroz lekcije vezane za polinome i operacije sa njima učenici uče algebarsku notaciju i razvijaju algebarsko mišljenje, koje im može biti od pomoći pri rešavanju raznih zadataka iz svih oblasti matematike.

Neki zanimljivi zadaci

Zadaci su preuzeti iz [29].

<u>*Zadatak 1.*</u> Dužina jedne katete pravouglog trougla je 18 cm, a zbir dužina druge katete i hipotenuze je 54 cm. Odredi površinu tog trougla.

Rešenje:

Sa c označimo hipotenuzu, a sa a i b katete datog pravouglog trougla.

Dakle, imamo $a = 18$ cm, $b + c = 54$ cm, $P =$? Odavde imamo $b = 54 - c$.

Pošto se radi o pravouglom trouglu, znamo da važi Pitagorina teorema:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dalje, zamenimo u ovu jednakost ono što nam je dato u zadatku:

$$c^2 = 18^2 + (54 - c)^2$$

$$c^2 = 324 + 54^2 - 2 \cdot 54 \cdot c + c^2$$

$$c^2 = 324 + 2\,916 - 108c + c^2$$

$$c^2 + 108c - c^2 = 3240$$

$$108c = 3240$$

$$c = 3240 : 108 = 30$$

Dalje je lako izračunati da je $b = 54 - 30 = 24$ cm i $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216$ cm^2.

Zadatak 2. Dokaži da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja deljiva sa 8.

Rešenje:

Parne brojeve možemo predstaviti u obliku $2k, k \in \mathbb{Z}$, a njemu susedne neparne u obliku $2k - 1$ i $2k + 1$. Tada imamo:

$$(2k-1)^2 - (2k+1)^2 = \big((2k+1) - (2k-1)\big) \cdot \big((2k+1) + (2k-1)\big)$$

$$= (2k + 1 - 2k + 1) \cdot (2k + 1 + 2k - 1) = 2 \cdot 4k = 8k$$

Dobijeni broj $8k$ je deljiv sa 8, čime smo dokazali ono što je traženo u zadatku.

Zadatak 3. Ako su u trouglu ABC stranice $a = x^2 - y^2, b = 2xy$ i $c = x^2 + y^2, x > y$, dokaži da je taj trougao pravougli.

Rešenje:

Proverićemo da li za dati trougao važi Pitagorina teorema, tj. $c^2 = a^2 + b^2$. Prema tome,

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

što je tačna jednakost, znači važi Pitagorina teorema pa je ΔABC pravougli.

2.10 Neke misli o algebri

Navodimo nekoliko razmatranja metodičara matematike o tome šta je algebarsko mišljenje.

Greenes and Findel (1998): Velike ideje algebarskog mišljenja uključuju predstavljanje, proporcije, balans, značenje promenljivih, šablone i funkcije, induktivno i deduktivno zaključivanje [14].

Herbert and Brown (1997): Algebarsko mišljenje je korišćenje matematičkih simbola i alata za analizu različitih situacija posredstvom: (1) izdvajanja informacija iz date situacije... (2) predstavljanja tih informacija rečima matematike, dijagramima, tabelama, grafovima i jednačinama... i (3) tumačenje i primena matematičkih rezultata, kao što je pronalaženje nepoznate vrednosti , testiranje pretpostavki i utvrđivanje funkcionalnih odnosa [15].

Kaput (NCTM, 1993): Algebarsko mišljenje uključuje konstrukciju i reprezentaciju obrazaca i pravilnosti, opreznu generalizaciju i, što je najvažnije, aktivno istraživanje i pretpostavljanje.

Kieran and Chalouh (1993): Algebarsko mišljenje uključuje razvoj matematičkog zaključivanja unutar algebarskog okvira pronalaženjem značenja algebarskih simbola i operacija aritmetičkim terminima [22].

Usiskin (1997): Algebra je jezik. Ovaj jezik ima pet glavnih aspekata: (1) varijable (nepoznate), (2) formule, (3) generalizaciju šablona, (4) prazna mesta, (5) relacije. Ako se u bilo koje vreme o ovim idejama razgovara sa decom od obdaništa pa nadalje, tada postoji mogućnost da se uvede algebarski jezik [35].

Vance (1998): Algebra se ponekad definiše kao uopštena aritmetika ili kao jezik za generalizaciju aritmetike. Međutim, algebra je više od skupa pravila za manipulaciju simbolima: to je jedan poseban način mišljenja [37].

Kieren (2004): Razvoj algebarskog mišljenja u ranijim godinama školovanja podrazumeva razvoj posebnog načina mišljenja koje uključuje analiziranje relacija između veličina, isticanje struktura, proučavanje promena, generalizaciju, problematiku rešavanja problema / zadataka, modeliranje, procenjivanje [21].

Glava 3

Uspeh učenika u školi

3.1 Uloga nastavnika i uspeh učenika u nastavi matematike

Uspeh učenika iz bilo kog predmeta uslovljen je različitim činiocima. Nastavnik je jedan od njih, koji svojim postupcima i načinom rada određuje kvalitet rada i stepen ostvarenog uspeha učenika. Od načina na koji ostvaruje svoju profesionalnu ulogu zavisi organizacija nastave i nastavnih aktivnosti, kvalitet nastavnih časova, kao i nivo motivacije učenika i međusobni odnosi u odeljenju [38].

Nekada su nastavnici imali dominantnu ulogu u nastavi, izlagali su gradivo koje su učenici slušali i zapisivali. Danas, nastavnici nisu jedini izvor informacija, pa su neophodni drugačiji pristupi podučavanju, potrebno je učenike što više uključivati u nastavu i posvetiti pažnju razvoju interesovanja i motivacije učenika za nastavne sadržaje.

Kako matematika obično nije omiljeni predmet među učenicima, pred nastavnicima matematike je vrlo težak zadatak jer treba da ostvare propisani nastavni program, a da pri tome učenicima približe matematiku i olakšaju učenje. Da bi se učenici zainteresovali za matematiku, oni najpre treba da je razumeju, da postignu početni uspeh u radu i pronađu razloge zbog kojih će nastaviti aktivnije da uče [38].

Učenici iz matematike uglavnom postižu slabije rezultate u odnosu na ostale nastavne predmete, a primećuje se i lošiji uspeh iz matematike u višim razredima osnovne škole u odnosu na uspeh iz istog predmeta u nižim razredima, što se može pripisati većoj složenosti matematičkih zadataka, što iziskuje i povećanje zahteva za ulaganjem truda.

Ovo se posebno primećuje kod učenika sedmog razreda, kada nastavni sadržaji iz matematike prelaze sa aritmetike, koja je do tada bila dominantna, na algebru.

3.2 Analiza uspeha učenika iz matematike u šestom i sedmom razredu osnovne škole

Ovom analizom su obuhvaćena četiri odeljenja sedmog razreda osnovne škole „Zmaj Jova Jovanović“ iz Rume, od kojih su dva odeljenja od po 20 učenika, jedno odeljenje od 19 učenika i jedno odeljenje od 22 ucenika. Analiziran je uspeh svih učenika iz matematike na kraju šestog razreda, kao i uspeh istih učenika iz matematike na kraju drugog polugodišta sedmog razreda, kako bi se uporedili uspesi u pomenutim razredima jer nastavnici primećuju slabije interesovanje učenika za matematiku u sedmom razredu, kao i dobijanje lošijih ocena na kontrolnim i pismenim zadacima.

Svi učenici pohađaju istu osnovnu školu, učili su iste matematičke sadržaje. Dodatna nastava izvodi se u svim odeljenjima u kojima ima učenika zainteresovanih za takmičenje i onih koji žele da poboljšaju svoj uspeh, a dopunsku nastavu izvode svi nastavnici u skladu sa rasporedom i potrebama učenika.

Selektovani uzorak na osnovu kog je rađeno istraživanje je grupisan tako da se obrađuju podaci o ukupnom broju odličnih, vrlo dobrih, dobrih i dovoljnih ocena na kraju drugog polugodišta za ova četiri odeljenja. Nedovoljnih ocena kao i neocenjenih učenika nije bilo. Pored toga, obrađeni su i podaci o prosečnoj oceni iz matematike na kraju šestog i na kraju sedmog razreda. Navedeni podaci su predstavljeni u Tabeli 1. i Tabeli 2.

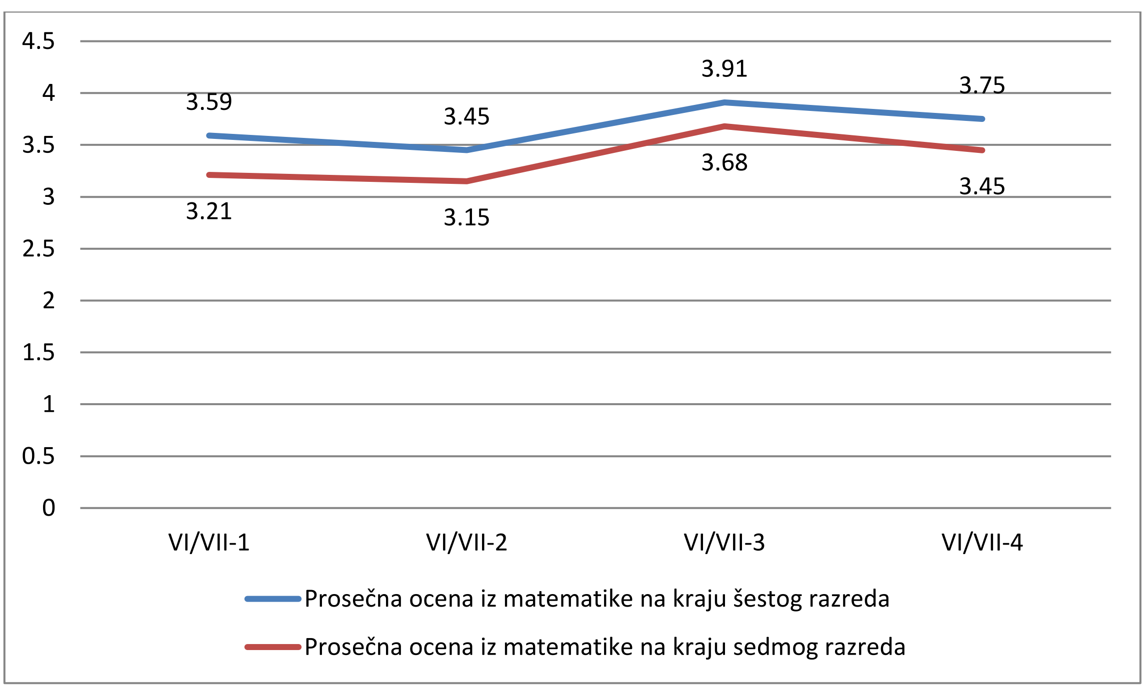
Odeljenja	**VI-1**	**VI-2**	**VI-3**	**VI-4**
Broj učenika u odeljenju	**19**	**20**	**22**	**20**
Ukupno odličnih ocena	5	5	7	8
Ukupno vrlo dobrih ocena	4	5	8	3
Ukupno dobrih ocena	7	4	5	5
Ukupno dovoljnih ocena	3	6	2	4
Prosečna ocena odeljenja	3,59	3,45	3,91	3,75

Tabela 1. Ocene iz matematike na kraju šestog razreda osnovne škole

Odeljenja	VII-1	VII-2	VII-3	VII-4
Broj učenika u odeljenju	**19**	**20**	**22**	**20**
Ukupno odličnih ocena	3	3	7	6
Ukupno vrlo dobrih ocena	3	2	5	2
Ukupno dobrih ocena	8	10	6	7
Ukupno dovoljnih ocena	5	5	4	5
Prosečna ocena odeljenja	3,21	3,15	3,68	3,45

Tabela 2. Ocene iz matematike na kraju sedmog razreda osnovne škole

Kako bismo bolje uvideli promene u uspehu, grafički su prikazane prosečne ocene šestog i sedmog razreda.



Slika 5. Prosečne ocene iz matematike na kraju šestog i na kraju sedmog razreda

Na osnovu prikazanog, primetimo da su prosečne ocene po odeljenjima u sedmom razredu niže u odnosu na prosečne ocene po odeljenjima u šestom razredu. Odeljenje koje je imalo najvišu prosečnu ocenu u šestom razredu (VI-3) ostalo je odeljenje sa najvišom prosečnom ocenom i u sedmom razredu, mada je ona nesto niža u odnosu na ocenu u šestom. Odeljenje koje je bilo najslabije u šestom razredu, ostalo je najslabije i u sedmom.

Ako bismo posmatrali pojedinačno ocene učenika po odeljenjima možemo da uočimo sledeće, najveći broj učenika koji je u šestom razredu imao ocenu vrlo dobar i dobar ima nižu ocenu u sedmom razredu. Broj odlično ocenjenih učenika se neznatno smanjio u sedmom razredu, dok je broj dovoljnih ocena povećan. Jedan od razloga je i taj što učenici koji su imali odlične ocene na kraju šestog razreda nastavljaju da se trude i u narednom razredu, dolaze na dodatne i dopunske časove ukoliko su im potrebna dodatna objašnjenja, kako bi održali dotadašnji odličan uspeh. Mnogi učenici gube interesovanje kako se gradivo usložnjava, te zbog toga dobijaju i lošije ocene. Kada bismo učenike pitali šta je razlog lošijih ocena, verovatno bi odgovorili da je gradivo teže i komplikovanije. Možemo se zapitati da li je jedan od razloga i taj što se baš u sedmom razredu aritmetika zamenjuje algebrom, koja je do tada učenicima bila nepoznata, kao i da li bi situacija bila drugačija da su učenici u nižim razredima, možda već kod učitelja, bili podvrgnuti metodama algebarskog načina mišljenja i rešavanja zadataka.

Zaključak

Prema velikom broju učenika, pa čak i velikom broju odraslih, aritmetika se odnosi na izračunavanja sa brojevima zasnovanim na određenom pravilu, bez uspostavljanja bilo kakvog odnosa između datih brojeva. Takvo mišljenje predstavlja prepreku koja pojedince sprečava da razumeju stvarno značenje aritmetičkih operacija. Da bi se to izbeglo, neophodno je kod učenika razvijati matematičke veštine zaključivanja, što se može postići zadavanjem već pomenutih tačno/netačno ili zadataka otvorenog tipa. Na ovaj način daje se smisao aritmetičkim operacijama što otvara vrata za razvoj algebarskog mišljenja [8].

Možda postoji mnogo razloga da se algebra posmatra kao naprednija grana matematike od aritmetike i zato se u nastavnom planu i programu za osnovne škole i uvodi posle aritmetike. Ali, postoje ubedljiviji razlozi za uvođenje algebre kao sastavnog dela ranog matematičkog obrazovanja. Računska tačnost jeste važna, ali ako previše govorimo o konkretnoj prirodi aritmetike rizikujemo da učenicima pružimo samo površan pogled na matematiku i obeshrabrujemo njihove pokušaje generalizacije [8].

Prihvatanje pojma rana algebra u cilju poboljšanja nastave elementarne matematike u nižim razredima osnovne škole podrazumeva promenu nastavnih planova i programa iz matematike za te razrede [9]. Grupa istraživača iz [8] iznela je stav da je to moguće raditi, a da se pri tome ne zahteva izmena čitavog nastavnog programa matematike za niže razrede osnovne škole, dok James Kaput i Maria Blanton u [19] smatraju da osnovnoškolski realizatori nastave matematike imaju malo iskustva u dosezanju ciljeva povezivanja aritmetičkih tvrdnji sa aktivnostima uopštavanja i formalizacije.

Ubacivanje algebarskih sadržaja u nastavu matematike u nižim razredima osnovne škole nije nimalo jednostavan zadatak. Prednosti koje donosi ovaj koncept su velike, počevši od boljeg razumevanja aritmetike, olakšavanja učenja algebre u višim razredima, pa sve do jasnijeg razumevanja i boljeg snalaženja u svakodnevnim životnim situacijama [10].

Biografija

Aljehina Laketić rođena je 31.07.1990. u Rumi. Osnovnu školu „Veljko Dugošević“ u Rumi završila je 2005. godine kao odličan učenik. Iste godine upisuje društveno-jezički smer Gimnazije „Stevan Puzić“ u Rumi, koju završava 2009. godine, takođe kao odličan učenik. Potom je upisala osnovne akademske studije matematike na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Diplomirala je u februaru 2015. godine sa prosečnom ocenom 7,86. Master studije upisala je iste godine na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Od aprila 2016. do septembra 2019. radi kao nastavnik matematike u osnovnoj školi „Zmaj Jova Jovanović“ u Rumi, a od septembra 2019. kao profesor matematike u Gimnaziji „Stevan Puzić“, takođe u Rumi.

Novi Sad, 2019. Aljehina Laketić

Literatura

[1] Ayu Apsari, R. *Bridging Between Arithmetic and Algebra: Using Patterns to Promote Algebraic Thinking,* Faculty of Teacher Training and Education Sriwijaya University, 2015.

[2] Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., Lepage, A.: *Arithmetical and Algebraic Thinking in Problem-Solving*, PME 16, Vol I, 65-72, 1992.

[3] Blanton, M.L. *Algebra and the elementary classroom: transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, Heinemann, 2008.

[4] Breiteig, T., Grevholm, B. *The Transition from Arithmetic to Algebra: To Reason, Explain, Argue, Generalize and Justify,* Agder University College, Norway, 2006.

[5] Carpenter, T., Levi, L. *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades,* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Madison, 2000.

[6] Carpenter, T., Franke, M., Levi, L. *Thinking Algebraically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School,* Heinemann, Portsmouth, NH, 2003.

[7] Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. *Early Algebra, Early arithmetic: Treating Operations as Fuctions,* In: Maria l. Fernandez (Ed.) The 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psyhology of Mathematics Education, Arizona, 2000.

[8] Carraher, D. W., Schliemann, A. D, Brizuela, B. M., Earnest, D. *Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education,* Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), 87-115., 2006.

[9] Crvenković, S., Romano, D. A. *Rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje,* U: Metodički aspekti nastave matematike, Treća međunarodna konferencija MATM 2014 (14.-15. Juna 2014, Fakultet pedagoških nauka Jagodina), 2014.

[10] Cvijanović, G. *Konceptualizacija pojma rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje,* Istraživanje matematičkog obrazovanja, Vol. VIII, Broj 14,1-8, 2016.

[11] Čanić-Mlađenović, T. *Procvat algebre u 19. veku u Engleskoj,* Specijalistički rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2008.

[12] Dadić, Ž. *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici,* Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[13] Dekker, T., Dolk, M. *From arithmetic to algebra*. In P. Drijvers (Ed.), Secondary algebra education: Revisiting topic and themes and exploring the unknowns (pp. 69-87). Rotterdam: Sense Publishers, 2011.

[14] Greenes, C., Findell, C. *Algebra Puzzles and Problems (Grade 7*), Mountain View, CA: Creative Publications, 1998.

[15] Herbert, K., Brown, r. *Patterns as Tools for Algebraic Reasoning,* Teaching Children Mathematics, 340-344, 1997.

[16] Herstein, I. N. *Topics in Algebra,* Blaisdell Pub. Co. Mass, 1964.

[17] Ikodinović, N., Dimitrijević, S. *Matematika 7: Udžbenik za sedmi razred osnovne škole,* Klett, Beograd, 2009.

[18] Kaput, J. J. *What is Algebra? What is Algebraic Reasoning?*, In: Kaput, J., Carraher, D. and Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades,* Lawrence Erlbaum Associates/Taylor Francis Group, New York, 2008.

[19] Kaput, J. J., Blanton, M. *Algebrafying the Elementary Mathematics Experience,* In: Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent, J. (Eds.), Proceeding of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra, Vol. 1, 344-351, 2001.

[20] Karjaković, A. *Oblici matematičkog mišljenja: algebarsko i geometrijsko, Diplomski rad,* Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike, Osijek, 2014.

[21] Kieran, C. *Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it?,* The Mathematics Educator, 8(1), 139-151, 2004.

[22] Kieran, C., Chalouh, L.: *Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra*; In Research ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics (edited by Douglas T. Owens). Reston, VA: NCTM, 1993.

[23] Kiziltoprak, A., Köse, N. *Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra,* Vol 10, International Electronic Journal of Elementary Education, 2017.

[24] Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics,* Mathematics Learning Study Committee, National Research Council, 2001.

[25] Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M., Gardiner, M. *Build an Early Foundation for Algebra Success,* Phi Delta Kappan, v97 n6,65-68, 2016.

[26] Koehler, J. L. *Learning to think relationally: Thinking relationally to learn*, University of Wisconsin-Madison, Retrieved from ProQuest Dissertations and Theses. (AAT 3143187), 2004.

[27] Kurnik, Z. *Generalizacija, Matematika i škola,* 4, 147-154, 2000.

[28] Molina, M., Castro, E., Ambrose, R. *Enriching Arithmetic Learning by Promoting relational Thinking ,* The International Journal of Learning, 12(5), 265-270, 2005.

[29] Milojević, S., Vulović, N. *Matematika 7: zbirka zadataka sa rešenjima,* Klett, Beograd, 2010.

[30] Popović, B., Bulović, N., Anokić, P., Kandić, M. *Udžbenik za drugi razred osnovne škole-1 deo,* Klett, Beograd, 2019.

[31] Romano, D. A. *Šta je algebarsko mišljenje?,* MAT-KOL, XV (2), 19-29, 2009.

[32] Sfard, A. *On the Dual Nature of Mathematical Concepts: Reflections on Processes and Objects as Different sides of the Same Coin*, Educational Studies in Mathematics, 22(1), 191-228, 1991.

[33] Stevanović, S., Crvenković, S., Romano, D. A. *Jedan primjer analize aritmetičkog i ranoalgebarskog mišljenja,* Inovacije u nastavi, Beograd, 2014.

[34] Tall, D., Thomas, M. *Encouraging Versatile Thinking in Algebra Using the Computer,* Educational Studies in Mathematics, 22, 125-147, 1991.

[35] Usiskin, Z*. Doing Algebra in Grades K-4*, Teaching children Mathematics, 3, 346-356, 1997.

[36] Van Amerom, B. A., *Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra,* Educational Studies in Mathematics, 54(1), 63-75, 2003.

[37] Vance, J. *Number Operations from an Algebraic Perspective*, Teaching Children Mathematics, 4 ,282-285, 1998.

[38] Vučinić, D. S., *Uloga nastavnika i uspeh učenika u nastavi matematike,* Doktorska disertacija, Filozofski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 2018.

[39] Warren, E., Cooper, T. *Introducing Functional Thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching,* Contemporary Isues in Early Childhood, 6(2), 150-162, 2005.

[40] Weyl, H. *Part I. topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension,* American Mathematical Monthly, 102, No.5: 453-460, 1995.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *Monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *Master rad*
VR
Autor: *Aljehina Laketić*
AU
Mentor: *dr Đurđica Takači*
MN
Naslov rada: *Aritmetika i algebra u ranom matematičkom obrazovanju*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *srpski i engleski*
JI
Zemlja publikovanja: *Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2019*.
GO
Izdavač: *Autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu,Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada*: 3 poglavlja/ 52 strane/ 40 referenci/ 5 slika/ 2 tabele*
FO
Naučna oblast: *Matematika*
NO
Naučna disciplina: *Metodika matematike*
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: *aritmetika, algebra, rana algebra, generalizacija, uloga znaka jednakosti, polinomi, analiza uspeha učenika*
PO
UDK:
Čuva se: *Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: *Tema ovog master rada je povezivanje aritmetike i algebre u ranom matematičkom obrazovanju, u nižim razredima osnovne škole. Rad je podeljen na tri dela. U prvom delu dajemo kratak istorijat algebre i razmatramo uzroke problema koji nastaju pri prelasku sa aritmetike na algebru. Drugi deo je posvećen teorijskoj pozadini aritmetike i algebre, uvodimo pojam rane algebre i navodimo osnovne elemente ranoalgebarskog mišljenja. Dato je nekoliko priprema za čas nastavne teme „Polinomi". U trećem delu je data analiza uspeha učenika iz matematike na kraju šestog i na kraju sedmog razreda osnovne škole i razmatranje mogućih uzroka slabijih ocena u sedmom razredu u poređenju sa ocenama iz šestog razreda*.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *05.09.2019*.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Rozália Sz. Madáras, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*
Član: *dr Đurđica Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor*
Član: *dr Mirjana Štrboja, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *Monograph type*
DT
Type of record: *Printed text*
TR
Contents Code: *Master's thesis*
CC
Author: *Aljehina Laketić*
AU
Mentor: *Đurđica Takači, Ph.D.*
MN
Title: *Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education*
TI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *Serbian and English*
LA
Country of publication*: Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2019.*
PY
Publisher: *Author's reprint*
PU
Publication place: *Novi Sad*, *Department of Matematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description*: 3 chapters/ 52 pages/ 40 references/ 5 pictures/ 2 tables*
PD
Scientific field: *Mathematics*
SF
Scientific discipline: *Methodology of Mathematics*
SD

Subject/ Key words: *arithmetics, algebra, generalisation, early algebra, meaning of the equal sign, polynomials, students success analysis*
S/KW
UC:
Holding data:*The Library of Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad*
HD
Note:
N

Abstract: *The subject of this master's thesis is combining arithmetics and algebra in early mathematical education during the lower grades of primary school. The thesis is divided into three sections. The first section provides a brief history of algebra and looks into the cause of problems which occure during the transition from arithmetics to algebra. The second section of the thesis introduces the theoretical background of arithmetics and algebra, defines the term "early algebra" and states the basic elements of early-algebraic reasoning. Several preparations for the lecture "Polynomials" are presented in the section. The third and final section is an analysis of student final marks in mathematics at the end of sixth and seventh grade of primary school and speculation of probable causes behind students getting lower marks in the seventh grade compared to the sixth grade.*
AB

Accepted by the Scientific Board on: *September 5, 2019.*
ASB
Defended on:
DE
Defend board:
DB
President: *Rozália Sz. Madáras, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*
Member: *Đurđica Takači, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor*
Member*: Mirjana Štrboja, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad*