



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU



Aleksandra Ivković

Fraktalna geometrija Koch-ove krive

- master rad -

Novi Sad, 2019.

Predgovor

Fraktalna geometrija jedna je od najmlađih oblasti matematike koja je svoju popularnost stekla zahvaljujući radovima matematičara Benoit Mandelbrot¹-a koji je ovu oblast iskoristio da opiše pojave i objekte u prirodi koje je nemoguće opisati pomoću Euklidove geometrije. Značaj ovog koncepta ubrzo su uvideli i druge discipline kao što su biološke nauke, fizika, geološke i kompjuterske nauke itd. Tokom godina, fraktalna geometrija je razvijana, pa se tako došlo do pojma fraktalne dimenzije, slučajnih i multifraktala, kao i njene povezanosti sa dinamički sistemima, teorijom verovatnoće, teorijom haosa, kompleksnom analizom, algebrrom i mnogim drugim oblastima matematike. Možemo uvideti da je fraktalna geometrija sveprisutna u raznim disciplinama, što je autoru bila inspiracija za ovaj rad.

Posebno interesantna je i fraktalna kriva koja nosi naziv po švedskom matematičaru Helge Von Koch²-u, danas veoma značajna u istraživanjima fraktalne antene. Predmet istraživanja ovog rada jeste fraktalna geometrije Koch-ove krive i načini na koje se ona može generisati. Rad je podeljen na četiri celline, a svaka celina sastoji se od teorijskog uvida i primene teorije na Koch-ovu krivu u cilju otkrivanja nekih njenih osobina i načina na koje je možemo generisati koristeći druge oblasti matematike.

U prvom poglavlju, definisani su osnovni pojmovi frakタルni geometrije kao što su definicija fraktala, njihove osobine i klasifikacija. Pokazana je geometrijska konstrukcija Koch-ove krive i pahulje, a zatim je izračunata dužina ove krive i površina koju ona ograničava. Takođe, definisana je fraktalna, odnosno Hausdorff-ova dimenzija i ukazano je na neke od primena ove dimenzije u drugim naukama. Na kraju su pokazane tri možda najpopularnije metode za izračunavanje dimenzije fraktala - metod samosličnosti, Richardson-ova i Minkowski-Bouligand-ova metoda.

Naredno poglavlje sastoji se od teorijskog uvida, gde su definisani osnovni pojmovi topologije neophodni za definisanje sistema iterativnih funkcija (IFS) pomoću kojeg se, koristeći dva algoritma, mogu generisati fraktali. U drugom delu ovog poglavlja iskorišćen je deterministički algoritam kako bi se dobila Koch-ova kriva.

Treće poglavlje u uvodnom delu sadrži osnovne pojmove algebre jezika i formalne gramatike potrebne za definisanje L-sistema koje kasnije koristimo kako bismo, pomoću kornjačine interpretacije datog sistema, generisali Koch-ovu krivu. Za pravljenje slika u ovom delu korišćen je Python programski jezik koji ima mogućnost kornjačine interpretacije reči.

U poslednjem poglavlju, definisana je Thue-Morse-ova reč i pokazane su neke njene osobine. Nakon toga, pokazano je da je ova reč zapravo specijalan L-sistem, te da se kornjačina interpretacije reči može iskoristiti ponovo, kao i da se Koch-ova kriva može dobiti kao granična vrednost niza Thue-Morse-ovih reči. Za pravljenje slika i ovom delu korišćen je programski jezik Python.

Novi Sad, mart 2019.

Aleksandra Ivković

¹Benoit B. Mandelbrot (1924 - 2010), poljski matematičar koji se školovao u Francuskoj i smatra se ocem frakタルne geometrije.

²Helge von Koch (1870 - 1924), švedski matematičar poznat po Koch-ovoj pahulji, jednog od najranije otkrivenih fraktala.

Sadržaj

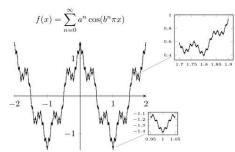
Predgovor	i
1 Osnovni pojmovi fraktalne geometrije i Koch-ova kriva	1
1.1 Definicija, osobine i podela fraktala	3
1.2 Geometrijska konstrukcija Koch-ove krive, njena dužina i površina	5
1.3 Fraktalna dimenzija, metode za njeno izračunavanje i dimenzija Koch-ove krive	9
1.3.1 Hausdorff-ova dimenzija	12
1.3.2 Metod samosličnosti	14
1.3.3 Richardson-ova metoda	15
1.3.4 Minkowski–Bouligand-ova metoda	17
2 Sistemi iterativnih funkcija (IFS) i Koch-ova kriva	19
2.1 Osnovni pojmovi iz topologije i definicija IFS-a	20
2.2 Konstrukcija Koch-ove krive pomoću determinističkog algoritma	26
3 L-sistemi i Koch-ova kriva	29
3.1 Osnovni pojmovi algebre jezika i formalne gramatike i definisanje L-sistema	29
3.2 Generisanje Koch-ove krive pomoću L-sistema	33
4 Thue-Morse-ove reči i Koch-ova kriva	36
4.1 Definicija i osnovne osobine Thue-Morse-ove reči	36
4.2 Koch-ova kriva kao granična vrednost niza Thue-Morse-ovih reči	41
Zaključak	47
Literatura	48
Biografija	49

Glava 1

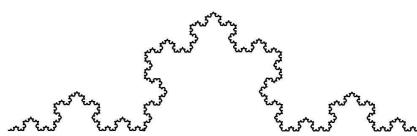
Osnovni pojmovi fraktalne geometrije i Koch-ova kriva

Oblast matematike zvana fraktalna geometrija rađa se krajem XIX veka, u vreme kada se u umetnosti razvijaju impresionizam, kubizam i modernizam, kao i jazz pravac u muzici i funkcionalnost pre svega u arhitekturi. Dobro poznat primer u arhitekturi jeste Eiffel-ov toranj koji je sagrađen 1889. godine i čija struktura uključuje samosličnu konstrukciju, napravljenu radi minimalizacije težine kao i što efikasnije iskoristivosti materijala. Sve do tada svetu je bila poznata samo Euclidova geometrija koja nije mogla da opiše sve pojave u prirodi te je objekte nepravilnih oblika klasifikovala kao patološke. Ovakvi objekti, međutim, privukli su pažnju poznatih matematičara kao što su Weierstrass¹, Von Koch, Cantor², Peano³, Poincaré⁴, Fatou⁵, Julia⁶ itd.

Tako, 1872. godine, Weierstrass počinje da izučava krive koje su neprekidne, ali nemaju tangentu ni u jednoj tački (tzv. Weierstrass-ova funkcija), zatim Cantor 1883. godine predstavlja skup danas poznat kao Cantor-ov trijedasti (trojni) skup, a Klein⁷ i Poincaré krajem XIX veka dolaze do danas poznatih samo-inverznih fraktala.



Slika 1.1: Weierstrass-ova funkcija.



Slika 1.2: Koch-ova kriva.

Početkom XX veka, 1904. godine, Helge Von Koch inspirisan radovima Weierstrass-a i Poincaré-a daje geometrijsku definiciju samoslične krive koju danas nazivamo Koch-ova kriva ili Koch-ova pahulja. Svoj doprinos fraktalnoj geometriji dao je i Sierpiński⁸ 1915. godine konstrukcijom svog

¹Karl Weierstrass (1815 - 1897), nemački matematičar često nazivan ocem moderne analize.

²Georg Cantor (1845 - 1918), nemački matematičar i otac teorije skupova.

³Giuseppe Peano (1858 - 1932), italijanski matematičar i glotolog, poznat po svojim radovima iz oblasti matematičke logike i teorije skupova.

⁴Henri Poincaré (1854 - 1912), francuski matematičar, fizičar i inženjer, koji je doprineo svim granama matematike koje su postojale za vreme njegovog života.

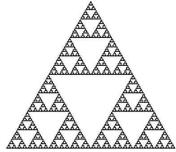
⁵Pierre Fatou (1878 - 1929), francuski matematičar i astronom koji je izučavao više oblasti analize.

⁶Gaston Julia (1893 - 1978), francuski matematičar koji je došao do formule koja daje fraktal nazvan po njemu.

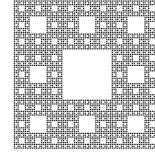
⁷Felix Klein (1849 - 1925), nemački matematičar poznat po radovima iz oblasti teorije grupa, kompleksne analize i ne-euklidske geometrije.

⁸Waclaw Sierpiński (1882 - 1969), poljski matematičar koji je poznat po svojim doprinosima teoriji skupova (izučavao Aksiomu izbora i Kontinuum hipotezu), teoriji brojeva i topologiji. Tri poznata fraktala nazvana su po

poznatog trougla, a ubrzo nakon toga i konstrukcijom tepiha Sierpińskog.



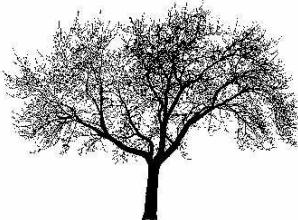
Slika 1.3: Sierpiński trougao.



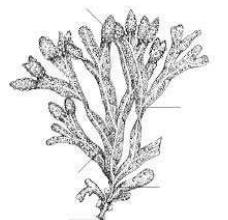
Slika 1.4: Sierpiński tepih.

Nakon toga, dva francuska matematičara, Fatou i Julia dolaze do rezultata iz oblasti kompleksnih dinamičkih sistema koji su veoma značajni za istraživanje ponašanja pojedinih fraktala. Još jedno od novijih otkrića jeste Lévy C kriva koju je 1938. prezentovao Lévy⁹.

Tokom decenija, naučnici su objavljivali radove o objektima koji su nepravilnih oblika i koji se ne mogu objasniti pomoću Euklidove geometrije. Međutim, nisu nailazili na odobravanje tadašnje javnosti i tek posthumno njihova otkrića dolaze do izražaja. Mandelbrot je izučavao njihove radove i uočio osobine koje su zajedničke za sve ove objekte. 1975. godine, u svom radu *"Fractals: Form, Chance and Dimension"*, on sve ove objekte objedinjuje pod pojmom "fraktal" (lat. *fractus* što znači slomljen ili izlomljen) i daje svoju definiciju, kao i grafički prikaz svih ovih objekata.



Slika 1.5: Grananje kod drveća manifestuje samosličnost.



Slika 1.6: Dihotomo grananje kod mrke alge (lat. *Pheophyta*)

Danas se Mandelbrot smatra začetnikom fraktalne geometrije, jer je upravo njegov rad doprineo popularizaciji ove oblasti matematike koja je pre njega bila kritikovana i osporavana. Značaj ove oblasti možemo uvideti u nekoliko različitih naučnih disciplina.

Jedna od najznačajnijih primena fraktalne geometrije jeste u biološkim istraživanjima, gde se koristi radi analize ili predviđanja različitih bioloških procesa i fenomena kao što su:

- struktura ćelija, proteina i hromozoma kod DNK,
- fizika zemljišta,
- nervni sistem [17],
- struktura biljaka i gljiva,
- kretanje organizama,
- dihotomi sistem grananja,
- DNK nizovi itd.

Još značajnija od bioloških istraživanja jeste primena u kompjuterskim naukama. Fraktalna geometrija nam omogućava da kompresujemo fotografije [8][4], kao i da reprodukujemo, u virtuelnom njemu.

⁹Paul Lévy (1886 - 1971), francuski matematičar koji se najviše bavio teorijom verovatnoće.

okruženju, kompleksne šare i neregularne oblike koristeći jednostavne algoritme koje kompjuteri izvršavaju [9]. Na primer, popularni serijali poput Star Wars i Star Trek-a najbolji su primer primene fraktala u produkciji specijalnih efekata.



Slika 1.7: Fotografija galaksije nastala korišćenjem fraktalne geometrije i računara.

Takođe, novija istraživanja primenjuju ovu vrstu geometrije u kontroli saobraćaja u mrežama poput LAN-a, MAN-a, WAN-a i Internet-a. Za male uređaje, kao što su mobilni telefoni, proizvode se antene u obliku fraktala koje mogu koristiti širok spektar frekvencija pritom ne zauzimajući mnogo mesta [6].

Sada kada smo videli široku primenu i značaj ove grane matematike, prelazimo na definiciju fraktala, kao i njihovu podelu, za koje ćemo koristiti [2].

1.1 Definicija, osobine i podela fraktala

Intuitivno, fraktal je fragmentiran geometrijski lik koji se može razložiti na manje delove tako da svaki od njih, makar približno, bude umanjena (skalirana) kopija celine. Drugim rečima, to su objekti koji daju jednak nivo detalja nezavisno od rezolucije koju koristimo. Ova osobina naziva se samosličnost. Osim toga, njihova dimenzija ne mora biti ceo broj i Mandelbrot je 1975. dao nešto matematički precizniju definiciju ovog pojma koristeći upravo ovu osobinu:

1.1.1. Definicija *Fraktal je skup čija je Hausdorff¹⁰-Besicovitch¹¹ dimenzija strogo veća od topološke dimenzije.*

Hausdorff-Besicovitch-evu dimenziju detaljnije ćemo objasniti kasnije u ovom poglavlju, kao i njen značaj u razumevanju fraktala. Kao što vidimo, postoji više definicija koje nam približavaju njihovu strukturu. Možemo ih objediniti i reći da su to objekti koji obično imaju sledeće osobine:

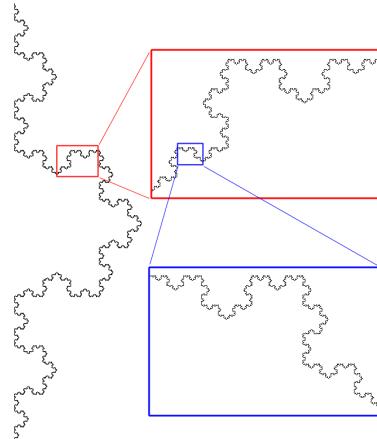
- previše su nepravilni (iregularni) da bi bili opisani Euklidovom geometrijom,
- imaju finu strukturu do proizvoljno malih skaliranja,
- poseduju osobinu samosličnosti,
- imaju jednostavnu rekurzivnu definiciju,
- i njihova Hausdorff-Besicovitch-eva dimenzija je strogo veća od topološke dimenzije.

¹⁰Felix Hausdorff (1868 - 1942), nemački matematičar i jedan od osnivača moderne topologije.

¹¹Abram Samoilovitch Besicovitch (1891 - 1970), ruski matematičar koji je mahom radio istraživanja na kombinatornim metodama i u realnoj analizi.

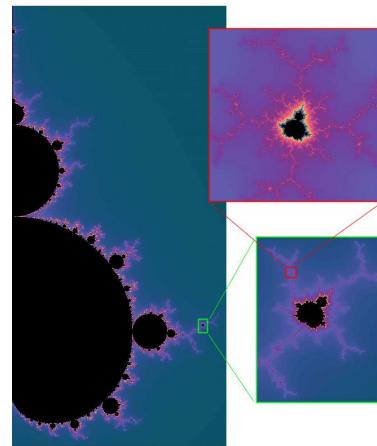
Iako svaki fraktal poseduje osobinu samosličnosti, ne poseduju isti stepen, odnosno istu vrstu samosličnosti. Neki od ovih objekata se mogu naći u prirodi, dok su drugi samo rezultat numeričkih formula. Pokazalo se da do obe grupe možemo doći pomoću matematičkih jednačina i prema tome, možemo ih podeliti na sledeći način:

1. Potpuno samoslični fraktali - sadrže kopije koje su slične celom fraktalu. Primeri ove grupe su trougao Sierpinskog, Koch-ova kriva, Hilbert-ova kriva, Cantor-ov skup itd.



Slika 1.8: Koch-ova kriva i manifestacija potpune samosličnosti.

2. Kvazi samoslični fraktali - sadrže male kopije sebe koje nisu slične celom fraktalu. Ovoj grupi pripadaju Mandelbrot-ov skup i Julia skup.

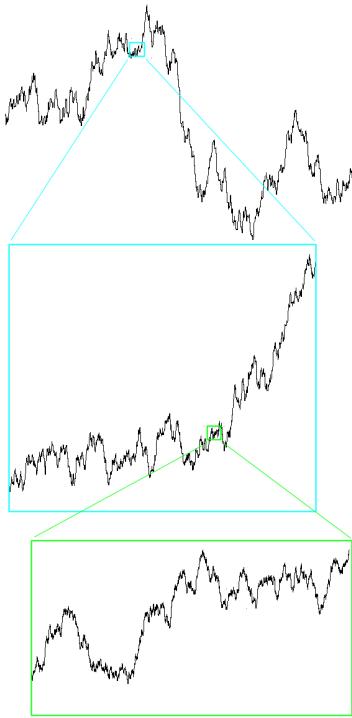


Slika 1.9: Možemo videti da Mandelbrot-ov skup sadrži umanjene kopije sebe, ali one nisu potpuno slične celom fraktalu.

3. Statistički samoslični fraktali - ne sadrže kopije samog sebe, ali neke njegove osobine ostaju iste pri različitim procenama. Brown¹²-ovo kretanje i Perlin¹³-ov šum su primeri ove grupe.

¹²Robert Brown (1773 - 1858), škotski botaničar i paleobotaničar koji je značajno doprineo razvoju botanike. Poznat po izučavanju tzv. Brown-ovog kretanja.

¹³Kenneth Perlin (1957 -), američki matematičar, zaslužan za otkriće danas poznatog Perlin-ovog šuma koji se koristi u kompjuterskoj grafici za produkciju realističnih fraktnih tekstura i svetlosnih efekata.



Slika 1.10: Primer buke kod koje nemamo kopije celine, ali u svakom od umanjenih delova krive očigledna je konstantnost Hausdorff-Besicovitch-eve dimenzije.

Fraktale je moguće klasifikovati i po načinu njihovog nastanka. Sistemi iterativnih funkcija (IFS) je jedan od načina koji ćemo detaljnije objasniti u narednom poglavlju. Zatim, postoje fraktali definisani rekurzivnim formulama i na kraju, slučajni fraktali koji nastaju crtanjem grafova nekih stohastičkih procesa. Dakle, prema načinu nastanka fraktale možemo podeliti na sledeći način:

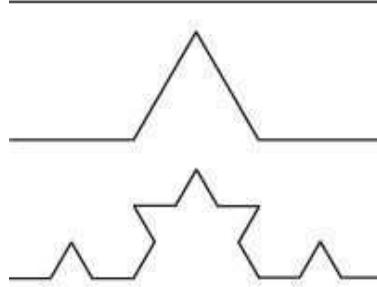
1. Geometrijski fraktali - nastali pomoću IFS-a. Ovaj način daje nam potpuno samoslične figure.
2. Algebarski fraktali - definisani rekurzivnim formulama i zapravo kvazi samoslični fraktali.
3. Stohastički fraktali - nastali crtanjem grafova nekih stohastičkih procesa, odnosno statistički samoslični fraktali.

1.2 Geometrijska konstrukcija Koch-ove krive, njena dužina i površina

Helge Von Koch u svom radu 1904. godine opisao je neprekidan proces u kom na stranicama jednakostrošnog trougla dodaje umanjene jednakostrošne trouglove. Dobijenu krivu nazvao je pahulja i to je upravo danas poznata Koch-ova pahulja ili Koch-ova kriva. Koch je prezentovao krivu koja je odmah prouzrokovala dve matematičke dileme u ono vreme. Prvo je postavljeno pitanje kako je moguće da ova neprekidna kriva ni u jednoj tački nije diferencijabilna, odnosno da se ni u jednoj njenoj tački ne može povući tangentu. Drugo pitanje koje se nametalo jeste kako ova neprekidna kriva koja je beskonačne dužine bez preklapanja ni u jednoj tački može da ograničava

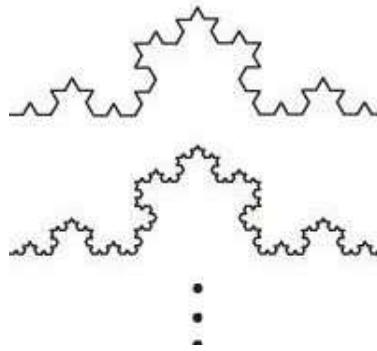
konačnu površinu. Mi ćemo u nastavku pokazati geometrijski pristup konstrukciji Koch-ove krive, koji je Koch predstavio, kao i da je ova kriva beskonačne dužine, pri čemu ograničava površinu koja je konačna. Oslanjaćemo se na [15].

Konstrukcija Koch-ove krive počinje jediničnom duži koja se naziva inicijator. Inicijator zapravo predstavlja nultu iteraciju ove krive. Prvu iteraciju dobijamo tako što početnu jediničnu duž podelimo na tri jednakata dela, pa srednji deo zamenimo sa dve jednakate dužine koje zaklapaju ugao od 60° . Time dobijamo krivu koja se sastoji od četiri jednakata segmenta, svaki dužine $\frac{1}{3}$ i ona se naziva generator. Narednu iteraciju dobijemo tako što svaki od segmenata prethodne iteracije zamenimo skaliranom verzijom generatora.



Slika 1.11: Prve tri iteracije za dobijanje Koch-ove krive.

Dakle, počevši od inicijatora koji ima jedan segment dužine jedan, dolazimo do krive u prvoj iteraciji koja ima četiri segmenta, svaki dužine $\frac{1}{3}$. Zatim u narednom koraku, kriva ima 16 segmenta, svaki dužine $\frac{1}{9}$ itd. Beskonačnom primenom ovog postupka dolazimo do tzv. Koch-ove krive.



Slika 1.12: Četvrta i peta iteracija za dobijanje Koch-ove krive.

Ako sa n označimo broj iteracija (koraka) prilikom konstrukcije, sa N_n broj segmenata u datom koraku i sa s_n dužinu segmenta u datom koraku, onda iz gore prikazane konstrukcije možemo zaključiti da će Koch-ova kriva u n -toj iteraciji imati $N_n = 4 \cdot N_{n-1} = 4^n$ segmenata, gde će svaki biti dužine $s_n = \frac{s_{n-1}}{3} = \frac{1}{3^n}$. Ove formule možemo uopštiti na sledeći način: ako je inicijator dužine S umesto jedinične duži, onda se broj segmenata u n -tom koraku može predstaviti kao

$$N_n = 4 \cdot N_{n-1} = 4^n$$

dok je dužina segmenta

$$s_n = \frac{s_{n-1}}{3} = \frac{S}{3^n}.$$

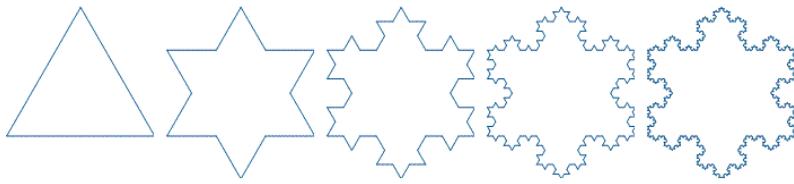
Odavde je dužina krive data sa

$$P_n = N_n \cdot s_n = 4^n \cdot \frac{S}{3^n} = S \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

pa kada $n \rightarrow \infty$, sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty, \quad \left|\frac{4}{3}\right| > 1.$$

Dakle, Koch-ova kriva konstruisana iznad zaista ima beskonačnu dužinu. Ako bismo sada umesto jedinične duži u gornjoj konstrukciji uzeli jednakostranični trougao čije su stranice dužine jedan, dobili bismo još jednu varijantu Koch-ove krive. Neka je sada inicijator baš takav trougao, a oznake za broj koraka, broj i dužinu segmenata iste su kao kod prethodne konstrukcije. Dobijemo sledeće objekte:



Slika 1.13: Konstrukcija Koch-ove pahulje.

U prvom koraku, svaku stranicu trougla podelimo na tri dela i srednje parče zamenimo sa umanjenom kopijom inicijatora, a to je upravo jednakostranični trougao čije su stranice dužine $s = \frac{1}{3}$. Na taj način dolazimo do generatora koji ima $N = 3 \cdot 4$ segmenta. U sledećem koraku ponovo svaki segment podelimo na tri dela i srednje parče zamenimo sa umanjenom kopijom inicijatora. Dobijena figura ima $N = 3 \cdot 4^2$ segmenata dužine $s = \frac{1}{3^2}$. Kao što vidimo, u n -toj iteraciji broj segmenata biće $N = 3 \cdot 4^n$ i svaki će biti dužine $s = \frac{1}{3^n}$. Ako kao u prethodnom slučaju umesto jednakostraničnog trougla čije su stranice dužine jedan uzmemo za inicijator jednakostranični trougao čije su stranice proizvoljne dužine, onda ove formule možemo uopštiti na sledeći način. Neka je dužina stranice trougla jednaka S . Tada je broj segmenata u n -tom koraku moguće izraziti kao

$$N_n = N_{n-1} \cdot 4 = 3 \cdot 4^n,$$

dok je dužina segmenta

$$s_n = \frac{s_{n-1}}{3} = \frac{S}{3^n}.$$

Odavde je dužina krive data sa

$$P_n = N_n \cdot s_n = 3 \cdot S \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

pa kada $n \rightarrow \infty$, sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot S \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty, \quad \left|\frac{4}{3}\right| > 1.$$

Dakle, Koch-ova pahulja je takođe beskonačne dužine. Međutim, ova kriva je zatvorena i može se pokazati da je površina koju ona opisuje konačna. Neka je broj dodatih trouglova u n-tom koraku T_n . Ovaj broj možemo naći iz

$$T_n = N_{n-1} \cdot 3 = 4^{n-1} \cdot 3 = \frac{3}{4} \cdot 4^n.$$

Ako sa a_n obeležimo površinu trougla dodatog u n-toj iteraciji, onda se površina tog trougla može naći iz

$$a_n = \frac{a_n}{9} = \frac{a_0}{9^n},$$

gde je a_0 površina inicijatora. Ukupna dodata površina u n-toj iteraciji je onda

$$b_n = T_n \cdot a_n = \frac{3}{4} \cdot 4^n \cdot \frac{a_0}{9^n} = \frac{3}{4} \cdot a_0 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

odakle sledi površina pahulje A_n u n-toj iteraciji

$$\begin{aligned} A_n &= a_0 + \sum_{k=1}^n b_k = \\ &= a_0 + \left(\frac{3}{4} a_0 \frac{4}{9} + \frac{3}{4} a_0 \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \frac{3}{4} a_0 \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) = \\ &= a_0 + \frac{3}{4} a_0 \left(\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) = \\ &= a_0 \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k \right) = \\ &= a_0 \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k \right) = \\ &= a_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) \right) = \\ &= a_0 \left(1 + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) = \\ &= a_0 \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right), \end{aligned}$$

pa je konačno

$$A_n = \frac{a_0}{5} \left(8 - 3 \left(\frac{4}{9}\right)^n \right). \quad (1.1)$$

Kada $n \rightarrow \infty$, dobijamo

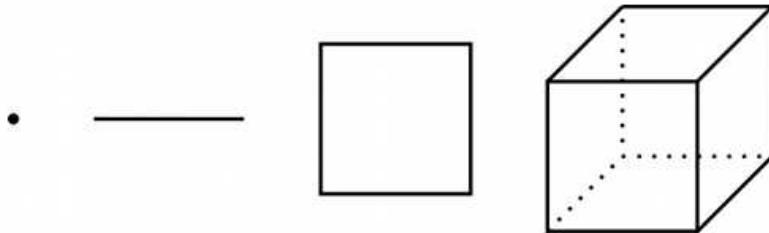
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0}{5} \left(8 - 3 \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) = \frac{8}{5} a_0, \quad \left| \frac{4}{9} \right| < 1.$$

Dolazimo do površine pahulje koja je jednaka $\frac{8}{5}$ od površine inicijatora a_0 , pa tako ako je S dužina njegove stranice, znamo da je površina pahulje

$$\frac{2S^2\sqrt{3}}{5}. \quad (1.2)$$

1.3 Fraktalna dimenzija, metode za njeno izračunavanje i dimenzija Koch-ove krive

U Euklidovojoj geometriji susrećemo se sa oblicima kao što su tačka, prava, kvadrat, kocka itd. čije dimenzije tačno znamo kako da odredimo i to su uvek celobrojne veličine - tačka je dimenzije 0, prava dimenzije 1, kvadrat dimenzije 2, kocka 3 itd. U ovom poglavlju predstavljamo novu dimenziju, koja ne mora biti celobrojna vrednost i daćemo neke metode za njeno izračunavanje, pri čemu ćemo za to koristiti izvore [6] i [14].



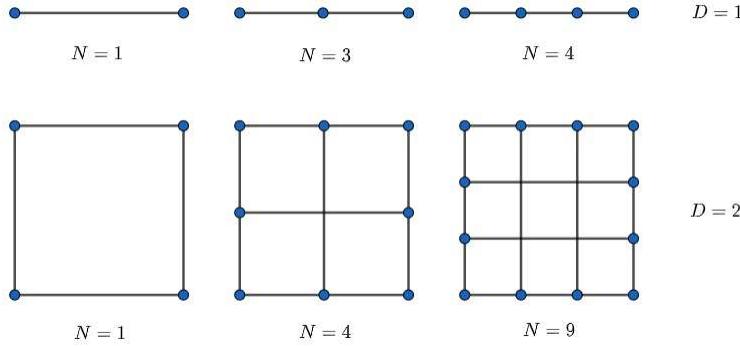
Slika 1.14: Tačka, prava, kvadrat i kocka u klasičnoj geometriji.

Pokažimo sada kako možemo doći do formule za određivanje dimenzije neke euklidske figure pomoću odnosa broja segmenata i faktora skaliranja. Počnimo od duži dužine jedan, koju ćemo prvo skalirati za $\frac{1}{2}$. Time dobijemo dve umanjene kopije početne duži, obe dužine $\frac{1}{2}$. Da bismo prekrili jediničnu duž potrebna su nam dva segmenta. Ako početnu duž skaliramo za $\frac{1}{3}$, dolazimo do tri umanjene kopije početne duži, sve tri dužine $\frac{1}{3}$ i da bismo prekrili jediničnu duž potrebna su nam tri segmenta itd. Ovaj postupak možemo ponoviti beskonačno mnogo puta. Primetimo da u svakom koraku važi:

$$2 = \frac{1}{1/2}, \quad 3 = \frac{1}{1/3}, \quad 4 = \frac{1}{1/4}, \quad \dots$$

U opštem slučaju, važi sledeći odnos broja segmenata i faktora skaliranja:

$$N(s) = \frac{1}{s}.$$



Slika 1.15: Primer skaliranja i prekrivanja prave i kvadrata.

Da bismo prekrili jedinični kvadrat potrebne su nam četiri skalirane kopije početnog kvadrata za faktor $\frac{1}{2}$, ili 9 skaliranih kvadrata za faktor $\frac{1}{3}$ itd. Ponovo možemo uočiti šablon i da u oba slučaja važi:

$$4 = \left(\frac{1}{1/2}\right)^2, \quad 9 = \left(\frac{1}{1/3}\right)^2, \quad \dots$$

U oštem slučaju, važi sledeći odnos broja segmenata i faktora skaliranja:

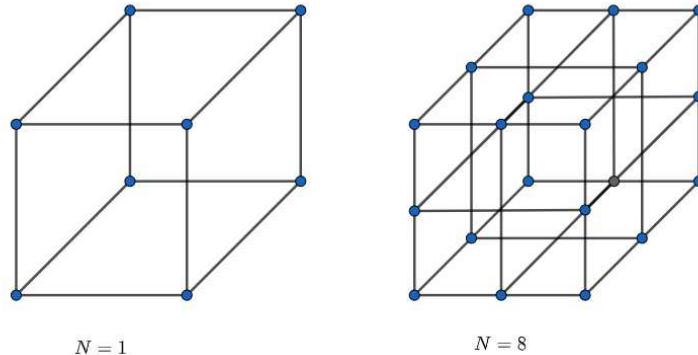
$$N(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^2.$$

Posmatrajmo sada šta se dešava sa kockom čije su stranice takođe dužine jedan. Da bismo prekrili ovu kocku neophodno nam je osam umanjenih kopija za faktor $\frac{1}{2}$ ili 27 umanjenih kopija za faktor $\frac{1}{3}$ itd. Primetimo da važi

$$8 = \left(\frac{1}{1/2}\right)^3, \quad 27 = \left(\frac{1}{1/3}\right)^3, \quad \dots$$

pa možemo zaključiti da, u opštem slučaju, odnos broja segmenata i faktora skaliranja izgleda ovako:

$$N(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^3.$$



Slika 1.16: Primer skaliranja i prekrivanja kocke.

Ako sa D obeležimo euklidsku dimenziju ovih figura, na osnovu prethodno pokazanog, možemo zapisati odnos ovih veličina kao

$$N(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^D. \quad (1.3)$$

Primenom logaritamske funkcije na ovu jednakost, dolazimo do formule za izračunavanje dimenzije euklidske figure. Primenom iste možemo proveriti dimenzije gore navedenih figura, za koje unapred znamo dimenziju.

$$\text{Duž: } s = \frac{1}{2}, \quad N(s) = \left(\frac{1}{1/2}\right)^D \Rightarrow D = \frac{\log N(s)}{\log \frac{1}{1/2}} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$$

$$\text{Kvadrat: } s = \frac{1}{3}, \quad N(s) = \left(\frac{1}{1/3}\right)^D \Rightarrow D = \frac{\log N(s)}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

$$\text{Kocka: } s = \frac{1}{4}, \quad N(s) = \left(\frac{1}{1/4}\right)^D \Rightarrow D = \frac{\log N(s)}{\log \frac{1}{1/4}} = \frac{\log 64}{\log 4} = 3$$

Međutim, Hausdorff i Besicovitch pokazali su da postoje objekti, kako u prirodi tako i u matematici, čije su dimenzije neke veličine između dimenzija u klasičnoj geometriji, odnosno objekti čije dimenzije ne moraju biti celobrojne vrednosti. Mandelbrot u svojoj knjizi *The Fractal Geometry of Nature* [13] kaže:

”Oblaci nisu sfere, planine nisu konusi, obale nisu krugovi, kora drveta nije glatka, niti munje putuju pravolinijski.”

i sa pojmom frakta uvedi i pojam fraktalne (parcijalne) dimenzije koja je danas možda najznačajnija osobina frakta. Prvobitno, analizirajući Richardson-ove radeve na temu dužine obale, Mandelbrot je došao do veličine koja ukazuje na odnos broja segmenata lenjira neophodnih za merenje i faktora skaliranja, odnosno dužine lenjira. Primetio je i da dobijena dužina postaje preciznija sa smanjenjem dužine segmenata lenjira. Ovaj način definisanja dimenzije frakta, upoređivanjem kako se detalj u fraktalnom šablonu menja prilikom promene faktora skaliranja, samo je jedan od mogućih načina za definisanje ovog pojma. Od tada, mnogi matematičari dali su formalne definicije bazirajući se na osnovnu ideju Mandelbrotu.

Može se reći i da dimenzija frakta ne ukazuje samo na njegovu kompleksnost detalja, nego i na stepen njegove neregularnosti, kao i na to u kojoj meri ispunjava neki euklidski prostor. Na primer, kriva čija je fraktalna dimenzija jednaka 1.10 ponaša se skoro kao obična linija čija je dimenzija 1, ali kriva čija je fraktalna dimenzija jednaka 1.9 kreće se kroz prostor vrlo slično površi. Površ fraktalne dimenzije 2.1 ponaša se vrlo slično običnoj ravni, ali ako je njena fraktalna dimenzija jednaka 2.9, ova površ se kreće i savija u prostoru na način blizak ispunjavanju samog prostora kao zapremina. Ako posmatramo Koch-ovu krivu, koja je potpuno samosličan fraktal, njena euklidска dimenzija jednaka je 1. Međutim, mi ćemo u nastavku pokazati da je njena fraktalna dimenzija strogo veća od 1, tačnije ≈ 1.262 , što ukazuje da je nivo detalja ove krive prevelik da bi se smatrala jednodimenzionalnom, ali i premali da bi se smatrala dvodimenzionalnom krivom.

Značaj dimenzije frakta naročito je vidljiv u biomedicinskim istraživanjima, gde se koristi za analizu ćelija, tkiva i njihovog funkcionisanja. Istraživanja su pokazala da nivoi biološke organizacije (ćelijske, tkivne, organske) imaju samoslične strukture u okviru definisanog domena merenja i da mogu biti okarakterisane fraktalnom dimenzijom. Fraktalna dimenzija nekog biološkog sistema ukazuje nam na kompleksnost njegove grade i funkcije. Takođe, može poslužiti

za određivanje degenerativnih promena u takvim sistemima. Na primer, pri proceni stepena maligniteta i utvrđivanju morfoloških, anatomske i fizioloških razlika koje postoje između zdravih i obolelih ćelija (kanceri dojke, jajnika, jetre, grlića materice), koristi se upravo fraktalna dimenzija. Analizama je utvrđeno da veće vrednosti fraktalne dimenzije odgovaraju kasnijem stadijumu razvoja karcinoma, odnosno kancer grlića materice zavisi od dimenzije ćelija [10].

Kako smo već ustanovili da se fraktalna dimenzija može definisati na više načina, tako postoji i više metoda za njeno određivanje. Za neke frakdale sve ove dimenzije se poklapaju, ali u opštem slučaju one nisu jednake. Neki pristupi su zgodni za teorijsko određivanje, dok su drugi prilagodljiviji u praksi. Neke od dimenzija su:

- Hausdorff-ova dimenzija
- Dimenzija samosličnosti
- Box-counting dimenzija
- Richardson-ova dimenzija
- Dimenzija korelacije
- Dimenzija mase
- Dimenzija odnosa obima i površine itd.

Najstarija i najpoznatija jeste Hausdorff-ova dimenzija ili Hausdorff-Besicovich-eva dimenzija koja je zgodna u slučaju teorijskog istraživanja fraktalne dimenzije. Druge metode su mnogo primenljivije u praktičnim istraživanjima u drugim naučnim disciplinama. Mi ćemo u ovom poglavlju detaljnije objasniti Hausdorff-ovu dimenziju i tri metode koje se često koriste - metoda samosličnosti, Richardson-ova i Minkowski-Bouligand-ova metoda.

1.3.1 Hausdorff-ova dimenzija

Prvi zapisi o fraktalnoj dimenziji pojavili su se u Hausdorff-ovim radovima iz 1918. godine. Definicija dimenzije koju je tada dao, danas je poznata pod nazivom Hausdorff-ova dimenzija i vrlo je nepraktična za primenu. Čak i za najjednostavnije frakdale veoma je teško izračunati je, što implicira da je za složenije strukture skoro nemoguće odrediti je. Samim tim ova dimenzija nije najpopularniji izbor van teorijskih okvira, ali ćemo je mi ovde uvesti jer je svakako baza za sve dimenzije i metode koje su kasnije razvijene. U nastavku se oslanjamamo na [2] i [14].

U ovom delu daćemo definiciju Hausdorff-ove dimenzije za skupove A koji se nalaze u Euklidovom prostoru

$$\mathbb{R}^n = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Samim tim prvo ćemo se podsetiti osnovnih pojmoveva vezanih za metrički prostor, a zatim ćemo definisati Hausdorff-ovu meru i Hausdorff-ovu dimenziju.

1.3.1. Definicija *Neka je X neprazan skup. Preslikavanje $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je metrika na X ako važi:*

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \text{ akko } x = y;$$

$$(M3) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(M_4) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Uređeni par (X, d) je metrički prostor, a broj $d(x, y)$ rastojanje elemenata x i y .

Sledeći pojam koji nam je neophodan jeste otvoren pokrivač nekog skupa iz X te uvodimo sledeće pojmove.

1.3.2. Definicija U metričkom prostoru (X, d) otvorena lopta sa centrom u tački $x \in X$ poluprečnika $\varepsilon > 0$ je skup $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ svih tačaka $y \in X$ takvih da je $d(x, y) < \varepsilon$, tj.

$$\mathcal{B}_\varepsilon(x) = \mathcal{B}(\varepsilon, x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

1.3.3. Definicija Podskup O skupa X je otvoren ako za sve elemente tog skupa postoji otvorena lopta $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ sa centrom u tački x i poluprečnika ε koja je u potpunosti unutar skupa O , tj.

$$\forall x \in X \quad \exists \mathcal{B}_\varepsilon(x) : \quad \mathcal{B}_\varepsilon(x) \subset O.$$

1.3.4. Definicija Kolekcija otvorenih skupova $\{O_1, O_2, \dots\}$ naziva se otvoreni pokrivač skupa A ako važi

$$A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} O_i.$$

Specijalno, ako je familija otvorenih skupova konačna i važi inkluzija iznad, onda je $\{O_1, O_2, \dots\}$ konačan otvoren pokrivač skupa A .

Metrika na skupu \mathbb{R}^n definisana je sa

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - y_i)^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

te je (\mathbb{R}^n, d) metrički prostor. Ako je A podskup skupa \mathbb{R}^n i $\{O_1, O_2, \dots\}$ familija otvorenih skupova iz \mathbb{R}^n , onda je data familija otvoren pokrivač skupa A ako važi

$$A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} O_i.$$

Takođe, dijametar skupa A definišemo sa

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Sada možemo preći na definiciju Hausdorff-ove mere i Hausdorff-ove dimenzije. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ i neka je $s \geq 0$. Definišemo skup

$$h_\varepsilon^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(O_i)^s \mid \{O_1, O_2, \dots\} \text{ pokrivač skupa } A \text{ takav da je } \text{diam}(O_i) < \varepsilon\right\}. \quad (1.4)$$

Dakle, uzimamo sve otvorene pokrivače skupa A čiji skupovi O_i imaju dijametar strogo manji od ε . Za svaki takav pokrivač uzimamo dijametre skupova koji čine pokrivač, podižemo ih na stepen s i sumiramo. Ova suma može biti konačna ili beskonačna. Uočimo da ukoliko smanjimo ε broj mogućih pokrivača skupa A se takođe smanji, pa možemo reći da se infimum ovog skupa povećava smanjenjem ε , odnosno kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Sada možemo definisati limit za $h_\varepsilon^s(A)$, odnosno upravo Hausdorff-ovu meru.

1.3.5. Definicija Za skup $h_\varepsilon^s(A)$ definisan sa (1.4), granična vrednost

$$h^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon^s(A)$$

naziva se s-dimenzionalna Hausdorff-ova mera skupa A .

Po konvenciji, $h^s(\emptyset) = 0$. Nije teško uočiti da $h^1(A)$ predstavlja dužinu glatke krive, $h^2(A)$ površinu glatke površi itd. Hausdorff je dokazao sledeću teoremu, kojom dolazimo do pojma Hausdorff-ove dimenzije.

1.3.6. Teorema Neka je $n \in \mathbb{N}$ i A ograničen podskup metričkog prostora (\mathbb{R}^n, d) . Neka je $h^s(A)$ funkcija definisana u definiciji 1.3.5. Tada postoji jedinstveno $D_H \in [0, n]$ takvo da

$$h^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{ako je } s < D_H \\ 0 & \text{ako je } s > D_H \end{cases}, \quad s \geq 0$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [7]. □

Dakle, za različite vrednosti $s \in [0, \infty)$, funkcija $h^s(A)$ uzima tačno tri vrednosti - nulu, neki realan broj i beskonačnost. Sledi definicija Hausdorff-ove dimenzije.

1.3.7. Definicija Neka je $n \in \mathbb{N}$ i A ograničen podskup metričkog prostora (\mathbb{R}^n, d) . Broj D_H iz prethodne teoreme naziva se Hausdorff-Besicovich-eva dimenzija skupa A , u oznaci $D_H(A)$, i važi

$$D_H(A) = \inf\{s \mid h^s(A) = 0\} = \sup\{s \mid h^s(A) = \infty\}.$$

Za $s = D_H(A)$, Hausdorff-ova $D_H(A)$ -dimenzionalna mera se koristi za upoređivanje veličina fraktala čije su fraktalne dimenzije jednake. Fraktal, čija je mera $H^{D_H(A)}(A)$ veća, smatra se većim fraktalom. Ukoliko su fraktalne dimenzije različite, kažemo da je veći onaj čija je fraktalna dimenzija veća.

Mi ćemo u nastavku ovog poglavlja izračunati dimenziju Koch-ove krive koristeći metode koje su primenljivije u biološkim istraživanjima, za razliku od Hausdorff-ovog teorijskog pristupa.

1.3.2 Metod samosličnosti

Metod samosličnosti koristi promenu veličine (dužine, površine, zapremine, ...) u odnosu na menjanje broja iteracija kod potpuno samosličnih objekata, te otuda i naziv. Ovom metodom dobija se dimenzija koja je vrlo precizna. Račun je poprilično pravolinijski i može se pronaći u uvodu knjige [6] ili u [14]. Naime, podsetimo se fomule koju smo koristili za određivanje dimenzije euklidskih figura

$$N(s) = \frac{1}{s^D}, \tag{1.5}$$

gde je D dimenzija, $N(s)$ broj delova objekta u odnosu na s , a s faktor skaliranja. Ako sada primenimo logaritamsku funkciju na jednakost (1.4), dobijemo

$$\log N(s) = \log \left(\frac{1}{s^D} \right)$$

odnosno

$$\log N(s) = \log \left(\frac{1}{s} \right)^D.$$

Tada iz osnovnih osobina logaritama sledi

$$\log N(s) = D \cdot \log\left(\frac{1}{s}\right),$$

pa se dimenzija D može dobiti iz sledeće jednakosti

$$D = \frac{\log N(s)}{\log \frac{1}{s}}, \quad (1.6)$$

odnosno formula za određivanje dimenzije objekta u euklidskoj geometriji može se iskoristiti za određivanje dimenzije potpuno samosličnih fraktala. Kada $s \rightarrow 0$, fraktalna dimenzija dobija se kao

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log \frac{1}{s}}. \quad (1.7)$$

Primetimo da je ova metoda pogodna za izračunavanje fraktalne dimenzije Koch-ove krive, s obzirom da ona pripada potpuno samosličnim fraktalima. Pokazali smo kako se ona geometrijski konstruiše i rekli da u n -toj iteraciji imamo $N = 4^n$ segmenata, gde je svaki dužine $s = \frac{1}{3^n}$, u slučaju kada je inicijator duž dužine jedan. Sada pomoću jednakosti (1.4) dolazimo do sledećeg:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & D = \frac{\log 1}{\log 1} = 1 \\ n = 1 : \quad & D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262 \\ n = 2 : \quad & D = \frac{\log 16}{\log 9} \approx 1.262 \\ & \vdots \end{aligned}$$

pa je fraktalna dimenzija Koch-ove krive $D \approx 1.262$.

1.3.3 Richardson-ova metoda

Richardson¹⁴-ova metoda za izračunavanje fraktalne dimenzije poznata je još i pod nazivom dimenzija kompasa ili *varying slope dimension*. Iako nije precizna kao metoda za računanje dimenzije kod potpuno samosličnih fraktala, ova metoda nam omogućava da sračunamo fraktalnu dimenziju prirodnih objekata koji nisu potpuno samoslični. Da bismo razumeli Richardson-ov postupak koristićemo [14], a za primer ćemo uzeti dužinu obale Velike Britanije. Koristeći lenjir, povlačimo linije duž obale, a zatim upoređujemo dužine povučenih duži i dužinu lenjira, koja je u našem slučaju upravo faktor skaliranja. Što preciznije su ove dve mere, to je precizniji i dobijeni rezultat.



Slika 1.17: Povlačenje duži duž obale Velike Britanije sa različitim skalama.

¹⁴Lewis Fry Richardson (1881 - 1953), britanski matematičar, fizičar, meteorolog i psiholog koji je postavio temelje modernih matematičkih metoda za prognozu vremena.

Dakle, neka je p dužina povučene duži uz obalu, a s faktor skaliranja. Uzmimo logaritamsku vrednost ovih dužina i obeležimo tačku $\frac{\log p}{\log s}$ na grafu. Ako ovo uradimo za sve vrednosti definisanih parametara, dobićemo linearan grafik funkcije čiji je položaj određen sa dva parametra - nagib grafa i početna tačka grafa. Nagib d je značajan u određivanju dimenzije obale, pa se Richardson-ova formula za izračunavanje fraktalne dimenzije definiše kao

$$D_s = 1 + d. \quad (1.8)$$

Pokažimo u nastavku kako možemo doći do dimenzije Koch-ove krive koristeći ovu metodu.

U prethodnom odeljku došli smo do opštih formula za dobijanje broja segmenta, faktora skaliranja i same dužine Koch-ove krive. Podsetimo se ovih jednakosti u slučaju kada je inicijator jedinična duž:

$$S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

gde s_n označava faktor skaliranja, a P_n dužinu krive u n -toj iteraciji. Kako je

$$\frac{\log \frac{4}{3}}{\log \frac{1}{3}} = 1, \quad \frac{\log \left(\frac{4}{3}\right)^2}{\log \frac{1}{3}} = 2, \quad \dots$$

dolazimo do jednakosti

$$\frac{\log P_n}{\log \frac{1}{3}} = n$$

i analogno

$$\frac{\log \frac{1}{s_n}}{\log \frac{1}{3}} = n,$$

pa izjednačavanjem poslednje dve jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{\log \frac{1}{s_n}}{\log \frac{1}{3}} &= n = \frac{\log P_n}{\log \frac{4}{3}} \\ \log P_n &= \frac{\log \frac{4}{3} \cdot \log \frac{1}{s_n}}{\log \frac{1}{3}} \\ \log P_n &= \frac{\log \frac{4}{3}}{\log \frac{1}{3}} \cdot \log \frac{1}{s_n} \end{aligned}$$

odakle je konačno

$$d = \frac{\log P_n}{\log s_n} = \frac{\log \frac{4}{3}}{\log 3}.$$

Daljim korišćenjem odgovarajućeg logaritma, u ovom slučaju \log_3 , dobijemo nagib

$$d = \log_3 \frac{3}{4} \approx 0.26$$

odakle iz (1.7) fraktalna dimenzija Koch-ove krive iznosi

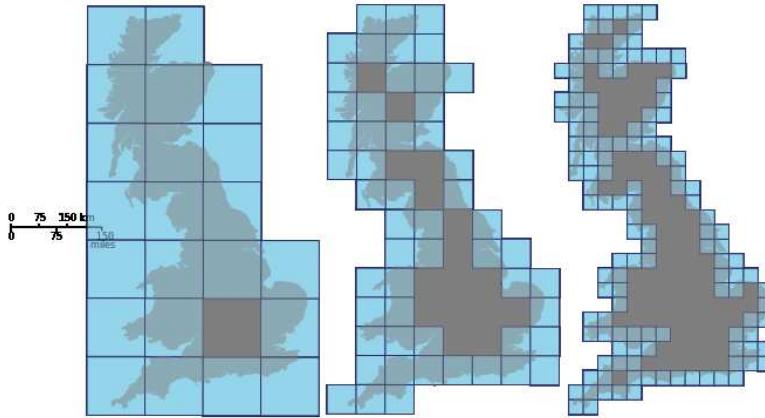
$$D = 1 + d \approx 1.26.$$

Primetimo da smo istu veličinu dobili i korišćenjem prethodne metode.

1.3.4 Minkowski–Bouligand-ova metoda

Minkowski¹⁵-Bouligand¹⁶-ova metoda naziva se još i *Box-counting metoda* i ona je najčešće korišćena metoda za određivanje fraktalne dimenzije, jer je prilagodiva raznim prirodnim objektima. Njom aproksimiramo dimenzije komplikovanih objekata kod kojih ne možemo da primenimo ni jednu od prethodnih metoda. Takođe, pomoću ove metode možemo izračunati fraktalne dimenzije veoma malih objekata poput Cantor-ove prašine do dimenzije planinskog venca. Obzirom da je ova metoda najčešće korišćena u praksi, ona se može pronaći u bilo kojoj knjizi o fraktalima i fraktalnoj dimenziji, a mi ćemo u radu koristiti [6].

Da bismo izračunali dimenziju dvodimenzionalnog objekta, počnemo tako što objekat prekrivemo nekom minimalnom mrežom. Zatim uporedimo dimenzije mreže sa brojem kvadrata koji sadrže bar deo objekta. Odnos dimenzije mreže i broja kvadrata daće nam dimenziju samog objekta.



Slika 1.18: Primer prekrivanja obale Velike Britanije različitim mrežama.

1.3.8. Napomena Iako ova metoda u većini slučajeva daje precizan rezultat, ona se ne može koristiti apsolutno uvek. Recimo, ako koristimo pločice da prekrijemo objekat, izračunata dimenzija ne sme biti veća od 2, jer fraktalna dimenzija ne može biti veća od dimenzija ploča korišćenih za merenje.

Da bismo odredili dimenziju trodimenzionalnog objekta, umesto mreže ploča ili kvadrata koristimo mreže kocki ili kvadra, a zatim upoređujemo dimenziju, npr. kvadra sa brojem "kutija" koje sadrže objekat. Nama je u ovom slučaju značajnija dvodimenzionalna mreža, jer ćemo box-counting metodu iskoristiti da izračunamo fraktalnu dimenziju Koch-ove krive.

Ako posmatramo dva različita prekrivanja neke figure, odnosno prekrivanja sa dve različite mreže takve da je rezolucija prve mreže $1/s_a$, a rezolucija druge mreže $1/s_b$, onda je opšta formula za izračunavanje fraktalne dimenzije pomoću box-counting metode data sa

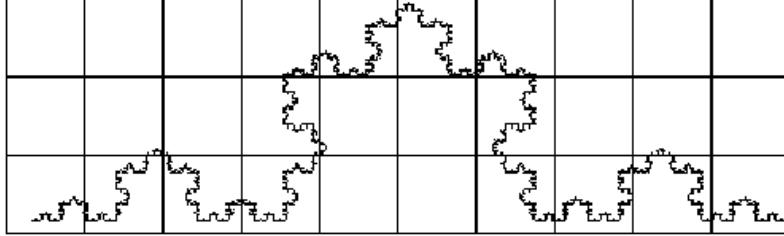
$$D = \frac{\log(n(a)) - \log(n(b))}{\log(1/s_a) - \log(1/s_b)}, \quad (1.9)$$

gde je $n(a)$ funkcija broja kvadrata prve mreže koji sadrže deo objekta, $n(b)$ funkcija broja kvadrata druge mreže koji sadrže deo objekta. U nastavku ćemo koristiti tri različite mreže kako bismo pokazali preciznost dobijenih rezultata.

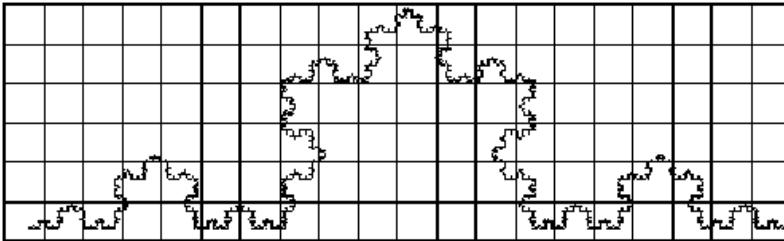
¹⁵Hermann Minkowski (1864 - 1909), nemački matematičar koji je razvio geometriju brojeva.

¹⁶George Louis Bouligand (1889 - 1979), francuski matematičar, najpoznatiji po metodu za nalaženje fraktalne dimenzije koja nosi njegovo ime.

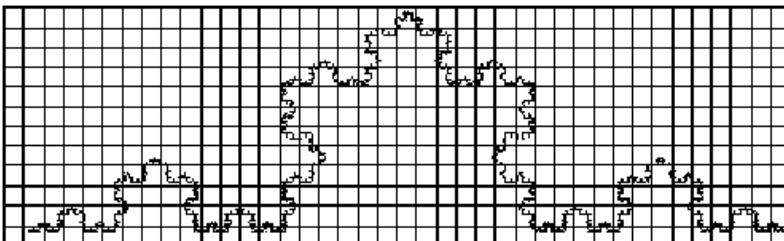
Posmatrajmo Koch-ovu krivu prekrivenu mrežom jediničnih kvadrata. Broj kvadrata koji sadrže deo krive jednak je 18 od mogućih 30. Zatim je posmatramo u mreži od 60 kvadrata dimenzije 0.5×0.5 od kojih 41 sadrži krivu i na kraju uzmememo treću mrežu koja sadrži 480 kvadrata od kojih 105 sadrži krivu.



Slika 1.19: Koch-ova kriva prekrivena mrežom jediničnih kvadrata.



Slika 1.20: Koch-ova kriva prekrivena mrežom kvadrata dimenzije 0.5×0.5 .



Slika 1.21: Koch-ova kriva prekrivena mrežom kvadrata dimenzije 0.25×0.25 .

U sledećem koraku upoređujemo rezultate:

$$D_{\frac{1}{2},1} = \frac{\log 41 - \log 18}{\log 2 - \log 1} \approx 1.19$$

$$D_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}} = \frac{\log 105 - \log 41}{\log 4 - \log 2} \approx 1.36$$

$$D_{\frac{1}{4},1} = \frac{\log 105 - \log 18}{\log 4 - \log 1} \approx 1.27$$

Na osnovu ove tri mreže, vidimo da je srednja vrednost jednaka 1.27 što je blizu Hausdorff-ove dimenzije naše krive. Ako bismo uzeli još više mreža, sa finijom podelom, dobili bismo vrednosti koje bi upadale u određeni interval i bile još preciznije od gore dobijenih. Ono što još možemo da uradimo jeste da skiciramo graf odnosa $\log n()$ i $\log \frac{1}{3}$ i pomoću parametra nagiba funkcije odredimo fraktalnu dimenziju.

Glava 2

Sistemi iterativnih funkcija (IFS) i Koch-ova kriva

Sistem iterativnih funkcija (IFS) je definisao Hutchinson 1981. godine, ali je svoju popularnost stekao kada je Barnsley¹ 1988. objavio rad pod nazivom *Fractals everywhere* [2] koji smo koristili za definisanje osnovnih pojmoveva iz topologije i sistema iterativnih funkcija. Primeri najranijih fraktala koji se mogu konstruisati na ovaj način jesu Cantor-ov skup i De Rham²-ova kriva.



Slika 2.1: Primer De Rham-ove krive.

Ovaj način generisanja fraktala daje nam najčešće objekte sa visokim nivoom samosličnosti. Obzirom da smo u prvom poglavlju pokazali da takvi fraktali nastaju kao beskonačna unija kopija samog sebe, gde je svaka kopija transformisana na određeni način, jasno je da će IFS biti pogodan način za generisanje istih. Pokazaćemo da su ove transformacije sadržane u sistemu funkcija, koje su uglavnom afine i kontraktivne. Takođe, pokazaćemo da je tzv. atraktor IFS-a upravo fraktal i dva najčešće korišćena algoritma za generisanje, od kojih ćemo jedan iskoristiti da pokažemo kako se Koch-ova kriva može dobiti kao atraktor IFS-a.

Iako IFS fraktali mogu biti bilo koje dimenzije, oni su uglavnom generisani u 2-dimenzionalnom prostoru, pa ćemo tako i mi ovde uraditi.

¹Michael Barnsley (1946 -), britanski matematičar koji se bavi istraživanjem i razvijanjem fraktalne kompresije.

²Georges de Rham (1903 - 1990), švajcarski matematičar poznat po svom doprinosu diferencijalnoj topologiji.

2.1 Osnovni pojmovi iz topologije i definicija IFS-a

Nakon definicije metričkog prostora, neophodno nam je da uvedemo pojam kompletognog (ili potpunog) metričkog prostora. Da bismo to uradili, definišemo prvo posebnu klasu nizova, a to su Cauchy³-jevi nizovi.

2.1.1. Definicija Niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz X je Cauchy-jev ako važi sledeći uslov:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n, m \in \mathbb{N}) (n, m > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n, p \in \mathbb{N}) (n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon).$$

2.1.2. Definicija Niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz X konvergira ka $x \in X$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0(\varepsilon)) d(x_n, x) < \varepsilon.$$

2.1.3. Teorema Ako je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz X konvergentan, onda je on i Cauchy-jev.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Ako je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz X konvergentan, odnosno ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$, onda možemo odrediti $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$: $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sada, za sve $n, m \geq n_0$ važi

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je po definiciji ovaj niz Cauchy-ev. □

U proizvoljnom metričkom prostoru obratno ne mora da važi! Slede definicija kompletognog i definicija kompaktnog metričkog prostora:

2.1.4. Definicija Metrički prostor (X, d) je kompletan ako u njemu svaki Cauchy-ev niz konvergira.

2.1.5. Definicija Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Skup A je kompaktan ako iz svake familije otvorenih skupova $\{O_i\}_{i \in I}$ za koju važi

$$A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

može da se izdvoji konačna familija skupova $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_k}$ tako da je

$$A \subset \bigcup_{j=1}^k O_{i_j},$$

odnosno ako postoji konačan pokrivač skupa A . Ako je $A = X$ kažemo da je (X, d) kompaktan metrički prostor.

Na metričkom prostoru možemo definisati sledeće preslikavanje:

2.1.6. Definicija Kontrakcija ili funkcija kontrakcije, na metričkom prostoru (X, d) je funkcija $\omega : X \rightarrow X$ takva da

$$d(\omega(x), \omega(y)) \leq \gamma \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

za neku realnu konstantu $\gamma \in [0, 1)$ koju nazivamo faktor kontrakcije.

³Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), francuski matematičar, jedan je od tvoraca teorije funkcija kompleksne promenljive.

2.1.7. Lema Neka je $\omega : X \rightarrow X$ kontraktivno preslikavanje na metričkom prostoru (X, d) . Tada je preslikavanje ω neprekidno.

Dokaz. Neka je dato $\varepsilon > 0$ i neka je $\gamma > 0$ faktor kontrakcije ω . Tada za $d(x, y) < \delta$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{\gamma}$ važi

$$d(\omega(x), \omega(y)) \leq \gamma d(x, y) < \varepsilon, \quad \forall x, y \in X,$$

odnosno ω je neprekidno preslikavanje. \square

2.1.8. Teorema Neka je $\omega : X \rightarrow X$ kontraktivno preslikavanje na metričkom prostoru (X, d) . Tada ω ima jedinstvenu fiksnu tačku $x^* \in X$ i za sve $x \in X$ niz $\omega^n(x)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergira ka x^* , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n(x) = x^*, \quad \forall x \in X.$$

Dokaz. Neka je $x \in X$ i neka je $\gamma \in [0, 1)$ faktor kontrakcije preslikavanja ω . Tada je za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$d(\omega^n(x), \omega^m(x)) \leq \gamma^{\min\{n, m\}} d(x, \omega^{|n-m|}(x)).$$

Ako je $k = 0, 1, 2, \dots$, onda važi

$$\begin{aligned} d(x, \omega^k(x)) &\leq d(x, \omega(x)) + d(\omega(x), \omega^2(x)) + \dots + d(\omega^{k-1}(x), \omega^k(x)) \\ &\leq (1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{k-1}) d(x, \omega(x)) \\ &\leq \frac{1}{1 - \gamma} d(x, \omega(x)) \end{aligned}$$

pa zamenom ove u prvu nejednakost dobijemo

$$d(\omega^n(x), \omega^m(x)) \leq \gamma^{\min\{n, m\}} \frac{1}{1 - \gamma} d(x, \omega(x))$$

odakle sledi da je niz $\{\omega^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ Cauchy-ev. Kako je (X, d) kompletan metrički prostor, Cauchy-ev niz ima graničnu vrednost $x^* \in X$, odnosno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n(x) = x^*.$$

Hoćemo da pokažemo da je x^* i fiksna tačka kontrakcije ω . Kako je ω kontrakcija, iz leme 2.1.7., sledi da je ω neprekidna, pa važi

$$\omega(x^*) = \omega\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(\omega^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega^{n+1}(x) = x^*.$$

Dakle, x^* jeste fiksna tačka kontrakcije ω . Sada ostaje da pokažemo da je ona jedinstvena. Pretpostavimo da su $x^*, y^* \in X$ dve fiksne tačke preslikavanja ω , tj. važi $\omega(x^*) = x^*$ i $\omega(y^*) = y^*$. Tada je

$$d(x^*, y^*) = d(\omega(x^*), \omega(y^*)) \leq \gamma \cdot d(x^*, y^*)$$

odnosno kako je $\gamma \in [0, 1)$

$$d(x^*, y^*) < d(x^*, y^*)$$

što je u kontradikciji sa definicijom metrike, pa je fiksna tačka x^* jedinstvena. \square

Sada želimo da definišemo nov kompletan metrički prostor na skupu svih podskupova skupa X sa novom metrikom. Na tom prostoru definisaćemo kontraktivno preslikavanje.

2.1.9. Definicija Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Tada sa $H(X)$ obeležavamo skup nepraznih kompaktnih podskupova skupa X .

Na (X, d) kompletnom metričkom prostoru, gde je $x \in X$ i $A, B \in H(X)$, rastojanje tačke x od skupa B , u oznaci $d(x, B)$, definisano je sa

$$d(x, B) = \min_{y \in B} d(x, y)$$

a rastojanje između skupova A i B , u oznaci $d(A, B)$, definisano je sa

$$d(A, B) = \max_{a \in A} d(a, B).$$

Koristeći ova rastojanja može se definisati Hausdorff-ovo rastojanje na sledeći način.

2.1.10. Definicija *Hausdorff-ovo rastojanje ili Hausdorff-ova metrika h je rastojanje između tačaka A i B skupa $H(X)$ definisano sa*

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Sledeća lema daje nam osobinu Hausdorff-ove metrike koju ćemo koristiti kasnije.

2.1.11. Lema *Za sve skupove $B, C, D, E \in H(X)$ važi*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}.$$

Dokaz. Da bismo dokazali osobinu iznad, oslanjaćemo se na dve osobine prethodno definisanih rastojanja skupa od tačke i skupa od nekog drugog skupa. Dakle, neka su $A, B, C, D, E \in H(X)$. Tada važi:

- Ako je B podskup skupa C , onda je $d(x, C) \leq d(x, B)$, za neku tačku $x \in X$. Po definiciji sledi da je

$$d(x, C) = \min_{y \in C} d(x, y) \leq \min_{y \in B} d(x, y) = d(x, B).$$

- Za sve $A, B, C \in H(X)$ važi

$$d(A \cup B, C) = \max\{d(A, C), d(B, C)\}$$

Ovo sledi iz

$$d(A \cup B, C) = \max_{x \in A \cup B} d(x, C) = \max\{\max_{x \in A} d(x, C), \max_{x \in B} d(x, C)\} = \max\{d(A, C), d(B, C)\}.$$

Sada koristeći ove dve osobine možemo pokazati da je

$$\begin{aligned} h(B \cup C, D \cup E) &= \max\{d(B \cup C, D \cup E), d(D \cup E, B \cup C)\} \\ &= \max\{\max\{d(B, D \cup E), d(C, D \cup E)\}, \max\{d(D, B \cup C), d(E, B \cup C)\}\} \\ &\leq \max\{\max\{d(B, D), d(C, E)\}, \max\{d(D, B), d(E, C)\}\} \\ &= \max\{\max\{d(B, D), d(D, B)\}, \max\{d(E, C), d(C, E)\}\} \\ &= \max\{h(B, D), h(C, E)\}. \end{aligned}$$

□

2.1.12. Lema *Neka je $\omega : X \rightarrow X$ neprekidno preslikavanje na metričkom prostoru (X, d) . Tada funkcija ω preslikava $H(X)$ u $H(X)$.*

Dokaz. Neka je A neprazan kompaktan podskup skupa X . Tada je očigledno da je i $\omega(A) = \{\omega(x) \mid x \in A\}$ neprazan skup. Ostaje još da pokažemo da je $\omega(A)$ kompaktan. Neka je $\{y_n = \omega(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ beskonačan niz u A . Odatle važi da je i $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beskonačan niz u A . Kako je A kompaktan skup, postoji podniz $\{x_{N_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ niza $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ koji konvergira ka nekoj tački $x^* \in X$. Preslikavanje ω je neprekidno, pa sledi da i podniz $\{y_{N_n} = \omega(x_{N_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka tački $y^* = \omega(x^*) \in \omega(A)$. Odavde po definiciji kompaktnog skupa sledi da je i skup $\omega(A)$ kompaktan. \square

Sledeća lema nam pokazuje kako od kontrakcije na metričkom prostoru (X, d) možemo doći do kontrakcije na novom metričkom prostoru $(H(X), h)$.

2.1.13. Lema Neka je $\omega : X \rightarrow X$ kontraktivno preslikavanje na metričkom prostoru (X, d) sa faktorom kontrakcije γ . Preslikavanje $\omega : H(X) \rightarrow H(X)$ definisano sa

$$\omega(B) = \{\omega(x) : x \in B\}, \quad \forall B \in H(X)$$

je kontrakcija na prostoru $(H(X), h(d))$ sa faktorom kontrakcije γ .

Dokaz. Iz leme 2.1.7. sledi da je preslikavanje ω neprekidno, pa iz leme 2.1.11. ω preslikava $H(X)$ u samog sebe. Neka su sada dati skupovi $B, C \in H(X)$. Tada je

$$\begin{aligned} d(\omega(B), \omega(C)) &= \max_{x \in B} \min_{y \in C} \{d(\omega(x), \omega(y))\} \\ &\leq \max_{x \in B} \left\{ \min_{y \in C} \{\gamma \cdot d(x, y)\} \right\}. \end{aligned}$$

Analogno se dobije $d(\omega(C), \omega(B)) \leq \gamma \cdot d(C, B)$. Sada iz definicije 2.1.10. i prethodno dobijenog sledi

$$\begin{aligned} h(\omega(B), \omega(C)) &= \max\{d(\omega(B), \omega(C)), d(\omega(C), \omega(B))\} \\ &\leq \gamma \cdot \max\{d(B, C), d(C, B)\} \\ &\leq \gamma \cdot d(B, C) \end{aligned}$$

pa je ω kontrakcija na $H(X)$ sa faktorom γ . \square

Obzirom da će nam u nastavku biti neophodna, na kompletnom metričkom prostoru (X, d) kolekciju kontrakcija označavaćemo sa

$$\omega_n : X \rightarrow X, n = 1, 2, \dots, N,$$

gde su $0 \leq \gamma_n < 1$ faktori kontrakcije koji odgovaraju svakoj ω_n . Sledeća lema daje nam konstrukciju kontraktivnog preslikavanja na metričkom prostoru $(H(X), h(d))$.

2.1.14. Lema Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\{\omega_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ konačna familija kontraktivnih preslikavanja na $(H(X), h(d))$, gde svaka kontrakcija ω_n ima faktor kontrakcije $\gamma_n, n = 1, 2, \dots, N$. Preslikavanje $W : H(X) \rightarrow H(X)$ definisano sa

$$W(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup \dots \cup \omega_N(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B), \quad \forall B \in H(X)$$

je kontraktivno preslikavanje sa faktorom kontrakcije $\gamma = \max\{\gamma_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po N .

- Ako je $N=1$, za neko $B \in H(X)$: $W(B) = \omega_1(B)$, pa je W očigledno kontrakcija.
Ako je $N=2$, za neko $B, C \in H(X)$: $W(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B)$ i $W(C) = \omega_1(C) \cup \omega_2(C)$, pa

je tada koristeći osobinu Hausdorff-ove metrike i činjenice da su ω_1 i ω_2 kontrakcije

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(\omega_1(B) \cup \omega_2(B), \omega_1(C) \cup \omega_2(C)) \\ &\leq \max\{h(\omega_1(B), \omega_1(C)), h(\omega_2(B) \cup \omega_2(C))\} \\ &\leq \max\{\gamma_1 \cdot h(B, C), \gamma_2 \cdot h(B, C)\} \\ &\leq \max\{\gamma_1, \gamma_2\} \cdot h(B, C), \end{aligned}$$

odnosno W je kontrakcija sa faktorom $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

- Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n = 1, 2, \dots, N$, odnosno

$$h\left(\bigcup_{n=1}^N \omega_n(B), \bigcup_{n=1}^N \omega_n(C)\right) \leq \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\} \cdot h(B, C), \quad \forall B, C \in H(X).$$

- Pokazujemo da tvrđenje važi za $N + 1$. Neka je za neke $B, C \in H(X)$:

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N+1} \omega_n(B), \quad W(C) = \bigcup_{n=1}^{N+1} \omega_n(C).$$

Tada je koristeći osobinu Hausdorff-ove metrike, induksijsku pretpostavku i činjenicu da su $\omega_1, \dots, \omega_{N+1}$ kontrakcije

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h\left(\bigcup_{n=1}^{N+1} \omega_n(B), \bigcup_{n=1}^{N+1} \omega_n(C)\right) \\ &\leq h\left(\bigcup_{n=1}^N \omega_n(B) \cup \omega_{N+1}(B), \bigcup_{n=1}^N \omega_n(C) \cup \omega_{N+1}(C)\right) \\ &\leq \max\{h\left(\bigcup_{n=1}^N \omega_n(B), \bigcup_{n=1}^N \omega_n(C)\right), h(\omega_{N+1}(B), \omega_{N+1}(C))\} \\ &\leq \max\{\max\{\gamma_1, \dots, \gamma_N \cdot h(B, C)\}, \gamma_{N+1} \cdot h(B, C)\} \\ &= \max\{\max\{\gamma_i \mid i = 1, \dots, N\}, \gamma_{N+1}\} \cdot h(B, C) \\ &= \max\{\gamma_i \mid i = 1, \dots, N+1\} \cdot h(B, C), \end{aligned}$$

odnosno W je kontrakcija s faktorom $\max\{\gamma_i \mid i = 1, \dots, N+1\}$.

□

2.1.15. Definicija Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka je $\omega_n : X \rightarrow X, n = 1, 2, \dots, N$, konačna kolekcija kontrakcija, gde svako preslikavanje ω_n ima faktor kontrakcije γ_n . Tada se

$$\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$$

naziva sistem iterativnih funkcija (IFS) sa faktorom kontrakcije $\gamma = \max\{\gamma_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Za kontrakciju W definisamo iteracije na sledeći način: za $B \in H(X)$ i $n \in \mathbb{N}_0$

$$W^0(B) = B, \quad W^1(B) = W(B), \quad \dots, \quad W^{n+1}(B) = W \circ W^n(B) = W(W^n(B)) \quad \text{itd.}$$

Sledi najznačajnija teorema u ovom poglavlju.

2.1.16. Teorema Neka je $\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ sistem iterativnih funkcija sa faktorom kontrakcije γ . Tada je transformacija $W : H(X) \rightarrow H(X)$ definisana sa

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(B), \quad \forall B \in H(X),$$

kontrakcija na kompletном metričkom prostoru $(H(X), h(d))$ sa faktorom kontrakcije γ , tj.

$$h(W(B), W(C)) \leq \gamma \cdot h(B, C).$$

Jedinstvena fiksna tačka $A \in H(X)$ je

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N \omega_n(A),$$

i data je sa

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B), \quad \forall B \in H(X).$$

Fiksna tačka $A \in H(X)$ naziva se atraktor IFS-a.

Sada kada smo definisali IFS, kao i njegov atraktor, pokazaćemo kako se on implementuje u dvodimenzionalnom prostoru, odnosno u slučaju kada imamo IFS $\{\mathbb{R}^2; \omega_n : n = 1, 2, \dots, N\}$, gde su ω_n afina preslikavanja.

Znamo da je afina transformacija u ravni $\omega_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oblika

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \omega_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix},$$

gde je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna tačka u ravni. Matrica A_n data sa

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

je kombinacija rotacije, skaliranja i smicanja, transformacija u ravni koje su obično izražene preko linearnih jednačina, a vektor

$$\begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

predstavlja translaciju u ravni.

Postoje dva algoritma za generisanje atraktora IFS-a: deterministički i stohastički. Mi ćemo ovde definisati oba:

- Deterministički algoritam.

Neka je $\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ IFS definisan iznad. Izaberemo kompaktan skup $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ i računamo sukcesivno A_1, A_2, \dots, A_n koristeći

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^n \omega_j(A_n), \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

Na taj način dobijamo niz podskupova $A_n \subset H(X), n = 0, 1, 2, \dots$, pa na osnovu prethodne teoreme ovaj niz konvergira ka atraktoru IFS-a.

- Stohastički algoritam.

Neka je $\{X; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ IFS definisan iznad, gde je $p_n > 0$ verovatnoća dodeljena kontrakciji ω_n , za $n = 1, 2, \dots, N$, takva da je $\sum_{i=1}^N p_n = 1$ i

$$p_i \approx \frac{|det(A_n)|}{\sum_{n=1}^N |A_n|} = \frac{|a_n d_n - b_n c_n|}{\sum_{n=1}^N |a_n d_n - b_n c_n|}.$$

Izaberemo $x_0 \in X$ i izračunamo rekurzivno

$$x_n \in \{\omega_1(x_{n-1}), \omega_2(x_{n-1}), \dots, \omega_N(x_{n-1})\}$$

za $n = 1, 2, \dots$. Na taj način dobijamo niz podskupova $x_n \subset X, n = 0, 1, 2, \dots$ koji ponovo na osnovu prethodne teoreme konvergira ka atraktoru IFS-a.

2.2 Konstrukcija Koch-ove krive pomoću determinističkog algoritma

Nakon što smo uveli osnovne pojmove i definisali IFS, pokazaćemo kako se pomoću determinističkog algoritma može generisati Koch-ova kriva i pritom ćemo koristiti rad [5].

Prvo ćemo se podsetiti matrične reprezentacije rotacije u ravni. Dakle, rotaciona matrica

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

rotira tačke u ravni oko koordinatnog početka u smeru suprotnom od kazaljke na satu za ugao θ . Pa tako ako želimo da rotiramo tačku (x, y) koristimo proizvod $R(x, y)$. Takođe, ako želimo da rotiramo tačku u smeru kazaljke na satu, onda umesto za ugao θ uzimamo ugao $-\theta$, pa je matrica rotacije

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Mi ćemo u nastavku kontrakcije zapisivati u obliku

$$\omega(x, y) = (a_n x + b_n y + e_n, c_n x + d_n y + f_n).$$

Na osnovu geometrijske konstrukcije Koch-ove krive opisane u (1.2) znamo da je inicijator jedinična duž koju skaliramo za $\frac{1}{3}$, a zatim sredinu skalirane duži zamenimo sa dve jednakе dužine koje zaklapaju ugao od 60° . Na taj način dobijamo generator Koch-ove krive itd. U ovom odeljku nas interesuje kako ove geometrijske transformacije opisane u (1.2) možemo definisati pomoću niza kontraktivnih preslikavanja tako da, sukcesivnom primenom definisanih kontrakcija na inicijator, dobijemo niz krivih koje konvergiraju ka Koch-ovojoj krivoj. Pokazaćemo da se naša kriva može dobiti kao atraktor IFS-a koji čine četiri kontraktivna preslikavanja.

Vodenjem geometrijskom konstrukcijom, definisatićemo odgovarajuće kontrakcije. Dakle, znamo da u prvom koraku imamo skaliranje duži za faktor $\frac{1}{3}$ te ćemo prvu kontrakciju definisati tako da upravo to uradi:

$$\omega_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\omega_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right).$$

U sledećem koraku želimo da segment dužine $\frac{1}{3}$ rotiramo za $\frac{\pi}{3}$ i transliramo tako da mu početna tačka bude u $(\frac{1}{3}, 0)$. Dakle, druga kontrakcija će sadržati još i rotaciju i translaciju:

$$\omega_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{3}) & \frac{1}{3} \sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \frac{1}{3} \sin(\frac{\pi}{3}) & \frac{1}{3} \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

odnosno

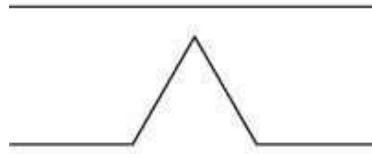
$$\omega_2(x, y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \right).$$

Treće preslikavanje će ponovo sadržati rotaciju i translaciju tako da segment dužine $\frac{1}{3}$ rotira za $-\frac{\pi}{3}$ i translira u tačku $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$:

$$\omega_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cos(-\frac{\pi}{3}) & \frac{1}{3} \sin(\frac{\pi}{3}) \\ \frac{1}{3} \sin(-\frac{\pi}{3}) & \frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\omega_3(x, y) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6} \right).$$



Slika 2.2: Inicijator i generator Koch-ove krive.

Poslednja kontrakcija biće slična prvoj, jer ako posmatramo sliku generatora Koch-ove krive vidimo da nam ponovo treba skalirani segment dužine $\frac{1}{3}$ samo transliran za vektor $(\frac{2}{3}, 0)$:

$$\omega_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

odnosno

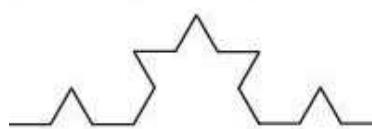
$$\omega_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right).$$

Po uzoru na teorijski uvod o IFS-u, A_0 će biti oznaka za inicijator, koji od ranije znamo da je kompaktan skup, a koristeći deterministički algoritam

$$A_1 = \omega_1(A_0) \cup \omega_2(A_0) \cup \omega_3(A_0) \cup \omega_4(A_0)$$

je upravo generator Koch-ove krive A_1 . Nastavljamo da primenjujemo kontraktivna preslikavanja, ali sada na dobijeni generator. Time dobijamo krivu koja je treća iteracija u geometrijskoj konstrukciji:

$$A_2 = \omega_1(A_1) \cup \omega_2(A_1) \cup \omega_3(A_1) \cup \omega_4(A_1).$$



Slika 2.3: Treća iteracija Koch-ove krive.

Primetimo da kontrakcije primenjene na generator svaki segment koji je sada dužine $\frac{1}{3}$, pomoću rotacije, translacije i faktora skaliranja, zamenjuju umanjenom kopijom generatora. Ako nastavimo postupak, dolazimo do n-te iteracije Koch-ove krive:

$$A_n = \omega_1(A_{n-1}) \cup \omega_2(A_{n-1}) \cup \omega_3(A_{n-1}) \cup \omega_4(A_{n-1})$$

i do niza kompaktnih podskupova $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset H(\mathbb{R}^2)$ koji na osnovu teoreme 2.1.16. konvergira ka atraktoru IFS-a $\{\mathbb{R}^2; \omega_n, n = 1, 2, \dots, N\}$, odnosno ka Koch-ovoj krivoj.

Pomoću konačnog niza kontraktivnih preslikavanja moguće je doći i do Koch-ove pahulje. IFS se sastoji od osam kontrakcija i to su:

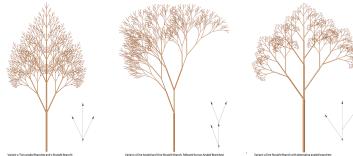
$$\begin{aligned}\omega_1(x, y) &= \left(-\frac{|x|}{3} - \frac{1}{2}, \frac{y}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ \omega_2(x, y) &= \left(\frac{|y|}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}, -\frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \omega_3(x, y) &= \left(-\frac{|x|}{3} - \frac{1}{2}, \frac{y}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ \omega_4(x, y) &= \left(\frac{|y|}{3} - \frac{1}{2}, \frac{|x|}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \omega_5(x, y) &= \left(\frac{|x|}{3} + \frac{1}{2}, \frac{y}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ \omega_6(x, y) &= \left(-\frac{|y|}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}, \frac{|x|}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \omega_7(x, y) &= \left(\frac{|x|}{3} + \frac{1}{2}, \frac{y}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ \omega_8(x, y) &= \left(-\frac{|y|}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}, -\frac{|x|}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}$$

Svaka od njih ponovo predstavlja transformacije u ravni u koje se mi ovde nećemo udubljivati, ali se detaljnija konstrukcija istih može pronaći u [5].

Glava 3

L-sistemi i Koch-ova kriva

1968. godine, biolog i botaničar Aristid Lindenmayer¹ došao je do načina za opisivanje razvoja jednostavnih višećelijskih organizama, kao što su bakterije, alge i ćelije biljaka. Njegovo formalno matematičko otkriće poznato je pod nazivom L-sistemi ili Lindenmayer-ovi sistemi i među prvima koji su objavljeni bili su L-sistemi za modeliranje razvoja crvene alge *Callithamnion roseum* i modrozelene alge *Anabaena catenula*. Kasnije su ti L-sistemi prošireni kako bi opisivali više biljke i složenije strukture grananja.



Slika 3.1: Primer drveća generisanog pomoću L-sistema.

Korak dalje u interpretaciji L-sistema otišli su Szilard² i Quinton 1979. godine kada su pokazali da se L-sistemima mogu generisati fraktali. U ovom poglavlju uvešćemo neke od osnovnih pojmoveva algebre jezika i formalne gramatike [12] kako bismo definisali L-sisteme, a zatim ćemo pokazati kako se Koch-ova kriva može generisati pomoću ovog sistema [14].

3.1 Osnovni pojmovi algebre jezika i formalne gramatike i definisanje L-sistema

Definišemo prvo azbuku i jezik nad datom azbukom.

3.1.1. Definicija Neka je Σ neprazan konačan skup simbola. Skup Σ nazivamo azbuka ili alfabet. Svaki konačan niz simbola iz Σ nazivamo reč ili string nad Σ , a reč koja ne sadrži nijedan simbol je prazna reč i nju ćemo označavati sa ε . Skup svih reči nad Σ označavaćemo sa Σ^* , a skup svih nepraznih reči nad Σ označavaćemo sa Σ^+ ($\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$). Dužina reči ω , u oznaci $|\omega|$, jeste broj simbola u ω .

¹Aristid Lindenmayer (1925 - 1989), mađarski biolog i botaničar, profesor univerziteta u Utrehtu, poznat po formulisanju L-sistema.

²Andrew L. Szilard mađarski informatičar, profesor emeritus zapadnog univerziteta u Ontariu.

3.1.2. Definicija Neka je Σ neka azbuka. Svaki podskup L skupa svih reči Σ^* nad Σ zovemo jezik nad Σ . Kažemo da je L konačan jezik ako sadrži konačan broj reči. Na skupu $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ svih jezika nad Σ definišemo sledeće operacije: za sve $X, Y \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$

sabiranje: $X + Y = X \cup Y$

konkatenacija: $X \cdot Y = \{\omega_1 \cdot \omega_2 \mid \omega_1 \in X \wedge \omega_2 \in Y\}$

iteracija: $X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$

stepenovanje: $X^0 = \{\varepsilon\}, X^{n+1} = X^n \cdot X$

Algebru $\mathcal{L}_\Sigma = (\mathcal{P}(\Sigma^*), +, \cdot, \varepsilon, *)$ zovemo algebra jezika nad Σ .

3.1.3. Primer Neka je $\Sigma = \{a, b\}$ dvoelementna azbuka. Skup $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, aab, \dots\}$ je skup svih reči nad azbukom Σ . Dužina reči je

$$|\varepsilon| = 0, |a| = |b| = 1, |aa| = |bb| = |ab| = |ba| = 2, \text{ itd.}$$

Svaki podskup L iz skupa svih reči Σ^* jeste jedan jezik nad azbukom Σ . Ako su $X = \{aa, bb, ab, ba\}$ i $Y = \{aaa, bbb, aab, aba, baa, bba, bab, abb\}$ dva jezika nad azbukom Σ^* , onda je zbir ova dva jezika

$$X + Y = \{aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, aab, aba, baa, bba, bab, abb\},$$

a proizvod

$$X \cdot Y = \{aaaa, aabb, aaab, aaaba, aabaa, \dots, baaab, baaba, babaa, babba, babab, baabb\}.$$

Stepen skupa X je

$$X^0 = \{\varepsilon\}, X^1 = X, X^2 = X \cdot X = \{aaaa, aabb, aaab, aaaba, \dots, baaab, baab, baba\} \text{ itd.}$$

dok je iteracija skupa X

$$X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n = \{\varepsilon\} \cup X \cup X^2 \cup X^3 \cup \dots$$

Sada možemo uvesti osnovne pojmove formalne gramatike pomoću kojih ćemo definisati L-sisteme. Formalne gramatike su sistemi prerađe stringova (eng. *rewriting systems*) koje je 1957. godine uveo Noam Chomsky³.

3.1.4. Definicija Formalna ili generativna gramatika \mathcal{G} je uređena četvorka

$$(V, T, S, P),$$

gde su V i T konačni disjunktni skupovi, $S \in V$, a P je konačan skup uređenih parova (α, β) , gde su $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ i reč α sadrži bar jedan simbol iz V .

Ako je \mathcal{G} formalna gramatika, onda kažemo da je V skup neterminalnih (nezavršnih) simbola, T skup terminalnih (završnih) simbola, S početni simbol ili aksiom i P skup produkcija. Po konvenciji, važe sleće oznake:

- produkcije (α, β) obeležavamo sa $\alpha \rightarrow \beta$

³Noam Chomsky (1928 -), američki lingvista, filozof i istoričar, smatra se ocem moderne lingvistike.

- A, B, C, D, E i S će označavati neterminalne simbole i S će biti početni simbol
- a, b, c, d, e i cifre će označavati terminalne simbole
- X, Y, Z će označavati simbole koji su terminalni ili neterminalni
- u, v, w, x, y, z će označavati terminalne reči sastavljene od terminalnih slova
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ će označavati reči sastavljene od terminalnih i neterminalnih slova.

3.1.5. Definicija Neka je \mathcal{G} formalna gramatika. Definišemo binarnu relaciju neposredne posledice ili neposredne izvodljivosti \Rightarrow na skupu $(V \cup T)^*$ na sledeći način: ako $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$, onda $\alpha \Rightarrow \beta$ ako i samo ako postoji $\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup T)^*$ i postoji produkcija $\gamma \rightarrow \delta$ iz P takva da je

$$\alpha = \alpha_1\gamma\alpha_2 \text{ i } \beta = \alpha_1\delta\alpha_2.$$

Relaciju \Rightarrow na skupu $(V \cup T)^*$ definišemo kao refleksivno-tranzitivno zatvoreno zatvorenje relacije \Rightarrow . Jezik definisan ovom gramatikom je jezik $L(\mathcal{G})$ definisan sa $L(\mathcal{G}) = \{\omega \in T^* \mid S \xrightarrow{*} \omega\}$.

Na osnovu definicije refleksivno-tranzitivnog zatvorenja relacije \Rightarrow imamo da je $\alpha \Rightarrow \beta$ ako i samo ako $\alpha = \beta$ ili postoji konačan niz reči $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ iz $(V \cup T)^*$ takav da je

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_n \text{ i } \alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}, \text{ za } 1 \leq i < n.$$

Svaki konačan niz reči $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ iz $(V \cup T)^*$ takav da je $\alpha_1 = S$ i $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$, za sve $1 \leq i < n$ zovemo izvođenje reči α_n u gramatici \mathcal{G} . U svakom koraku izvođenja primenjuje se tačno jedna produkcija.

3.1.6. Primer Neka $\mathcal{G} = (V, T, S, P)$ formalna gramatika zadata produkcijama

$$S \rightarrow aS \quad \text{i} \quad S \rightarrow \epsilon.$$

Tada je S jedini neterminalni simbol i početni simbol, a a jedini terminalni simbol i jezik generisan gramatikom \mathcal{G} je

$$L(\mathcal{G}) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Sada možemo definisati sisteme prerade reči kod kojih u svakom koraku izvođenja sva slova reči zamenjujemo istovremeno u skladu sa datim produkcijama. Ove sisteme nazivamo Lindenmayer-ovim sistemima i kod njih nema neterminalnih simbola.

3.1.7. Definicija Neka su $m, n \in \mathbb{N}_0$. (m, n) L-sistem je uređena trojka

$$\mathcal{G} = (\Sigma, P, \omega_0),$$

gde je Σ neprazna, konačna abzuka, P konačan skup produkcija, odnosno uređenih četvorki (u, a, v, α) , gde je $u \in \bigcup_{i=0}^m \Sigma^i$, $a \in \Sigma$, $v \in \bigcup_{i=0}^n \Sigma^i$ i $\alpha \in \Sigma^*$, a $\omega_0 \in \Sigma^+$ početna reč.

U nastavku, produkcije ćemo obeležavati sa $(u, a, v) \rightarrow \alpha$. Kao i kod formalne gramatike \mathcal{G} , definišemo binarnu relaciju na L-sistemu.

3.1.8. Definicija Neka je $\mathcal{G} = (\Sigma, P, \omega_0)$ (m, n) L-sistem, $a_1, \dots, a_k \in \Sigma$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Sigma^*$. Binarnu relaciju neposredne posledice ili neposredne izvodljivosti $\xrightarrow{\mathcal{G}}$ na Σ^* definišemo na sledeći način:

- ako je $m=0$ i $n=0$, onda $a_1 \dots a_k \xrightarrow{\mathcal{G}} \alpha_1 \dots \alpha_k$ ako

$$(\epsilon, a_i, \epsilon) \rightarrow \alpha_i \in P, \text{ za sve } i = 1, \dots, k;$$

- ako je $m = 0$ i $n \neq 0$, onda $a_1 \dots a_k \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} \alpha_1 \dots \alpha_k$ ako $(\varepsilon, a_i, a_{i+1} \dots a_{i+n}) \rightarrow \alpha_i \in P$, za sve $i = 1, \dots, k$, gde je $a_j = \varepsilon$, za $j > k$;
- ako je $m \neq 0$ i $n = 0$, onda slično kao u prethodnom slučaju.
- ako je $m \neq 0$ i $n \neq 0$, onda $a_1 \dots a_k \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} \alpha_1 \dots \alpha_k$ ako $(a_{i-m} \dots a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \dots a_{i+n}) \rightarrow \alpha_i \in P$, za sve $i = 1, \dots, k$, gde je $a_j = \varepsilon$, za $j < 1$ ili $j > k$.

Relaciju $\xrightarrow[\mathcal{G}]{*}$ na Σ^* definišemo kao refleksivno-tranzitivno zatvorenoje relacije \Rightarrow , pa je iz definicije refleksivno-tranzitivnog zatvorenja $\omega \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} v$ ako i samo ako $\omega = v$ ili postoji konačan niz $v_1, \dots, v_l \in \Sigma^*$ takav da je

$$v_1 = \omega, \quad v_l = v \text{ i } v_i \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} v_{i+1}, \quad 1 \leq i < l.$$

Jezik generisan sa \mathcal{G} je

$$L(\mathcal{G}) = \{v \in \Sigma^* \mid \omega_0 \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} v\}.$$

Svaki konačan niz reči $v_1, \dots, v_l \in \Sigma^*$ takav da $v_1 = \omega_0$ i $v_i \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} v_{i+1}$, za sve $1 \leq i < l$, zovemo izvođenje reči v_l u (m,n) L-sistemu. Uočimo da iz definicije relacije $\xrightarrow[\mathcal{G}]{*}$ u svakom koraku izvođenja na svako slovo u reči primjenjuje se tačno jedna produkcija.

3.1.9. Primer Neka je data jednoelementna abzuka $\Sigma = \{a\}$, produkcija $a \rightarrow a^2$ i početno slovo $\omega_0 = a$. Ako bismo izvodili reči kao kod formalnih gramatika, u jednom koraku izvođenja bismo mogli samo jedno a da zamenimo sa a^2 , te bi uzastopnom primenom produkcije dobili niz reči a^3, a^4, a^5, \dots . Dakle, jezik generisan ovom gramatikom bio bi

$$\{a^n \mid n \geq 3\}.$$

Pokazali smo kako izgleda dobijeni jezik u formalnoj gramatici, a sada ćemo pokazati kako izgleda dobijeni jezik u L-sistemu. U jednom koraku izvođenja svako a možemo da zamenimo sa a^2 , pa se dobije niz reči

$$\begin{aligned} a^3 &= a \cdot a \cdot a \\ a^6 &= a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \\ a^{12} &= a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dobijeni jezik možemo zapisati kao $\{a^{3 \cdot 2^i} : i \geq 0\}$. Uočimo da je niz a^3, a^6, a^{12} izvođenje reči a^{12} u L-sistemu.

Najjednostavniji jesu upravo $(0,0)$ L-sistemi, koji se u literaturi mogu pronaći u oznaci $0L$. Ovakve L-sisteme nazivamo kontekstno slobodnim i sve produkcije u sistemu su oblika

$$(\varepsilon, a, \varepsilon) \rightarrow \alpha \quad \text{odnosno} \quad a \rightarrow \alpha.$$

U nastavku ćemo se koristiti upravo $0L$ L-sistemima.

3.2 Generisanje Koch-ove krive pomoću L-sistema

Pokazali smo kako se Koch-ova kriva geometrijski konstruiše počevši od jedinične duži, te je jasno da pri generisanju krive pomoću L-sistema moramo u samom sistemu imati informacije o geometriji fraktala. Za grafičku interpretaciju reči dobijenih L-sistemom Szilard i Quinton su koristili programski jezik LOGO-style kornjača (eng. *turtle graphics*), koji ćemo i mi koristiti i čiju ćemo funkcionalnost opisati u nastavku.

Zamislimo kornjaču koja se nalazi na listu papira i koja svojim pomeranjem može i ne mora da ostavlja trag na papiru. Ona reaguje na određene komande koje su zadate u vidu simbola koji mogu biti obična slova ili znakovi kao što su $+/-$. Pa neka su tako sledeći simboli, odnosno komande, definisane kao:

- | | |
|-----|---|
| F | Pomeri se napred za korak dužine d i nacrta duž od početnog do krajnjeg stanja. |
| f | Pomeri se napred za korak d bez crtanja duži. |
| $+$ | Skreni levo (smer suprotan od kazaljke na satu) pod uglom δ . |
| $-$ | Skreni desno (smer kazaljke na satu) pod uglom δ . |

Obratimo pažnju da smo gore pomenuli stanje kornjače. Ono je neophodno preciznije definisati kao (x, y, α) , gde koordinate (x, y) predstavljaju poziciju kornjače, a ugao α pravac njenog kretanja. Ako je zadata dužina koraka d i priraštaj ugla δ , onda se kornjačino stanje promeni svaki put kada su komande interpretirane, pa možemo izvesti sledeću tabelu:

Komanda	Stanje kornjače (x, y, α) se menja u
F	$(x + d \cos \alpha, y + d \sin \alpha)$
f	$(x + d \cos \alpha, y + d \sin \alpha)$
$+$	$(x, y, \alpha - \delta)$
$-$	$(x, y, \alpha + \delta)$

Ukoliko kornjača nađe na neki drugi simbol ona ga ignoriše.

Neka je sada ω reč nad azbukom $\Sigma = \{F, f, +, -\}$, (x_0, y_0, α_0) početno stanje kornjače, a d i δ fiksirani parametri. Slika ili skup duži koju nacrta kornjača interpretirajući reč ω naziva se kornjačina interpretacija reči ω . Ovakav način interpretacije reči možemo primeniti na reči generisane L-sistemom nad azbukom Σ . Pogledajmo kako to izgleda u slučaju Koch-ove krive.

U geometrijskog konstrukciji, pokazanoj u (1.2), u svakom koraku duž zamenjujemo sa novim segmentom koji se sastoji od četiri linije. Ovaj segment se može opisati pomoću sledećeg stringa:

$$F + F - -F + F,$$

gde za ugao δ biramo 60° . Dakle, kornjača se iz početnog stanja $(0, 0, 0)$ pomera napred za korak d i pritom crta duž (F). Zatim se okreće levo za 60° u smeru suprotnom od kazaljke na satu (+) i pomera napred za korak d , ponovo crtajući duž (F). Zatim se okreće u desno, tj. u smeru kazaljke na satu za 120° (--) i pomera napred za korak d crtajući duž (F). Na kraju se rotira u levo za 60° (+) i pomera napred za korak d ponovo crtajući duž (F). Lako se uvidi da je dobijeni trag koji kornjača ostavi upravo druga iteracija u geometrijskoj konstrukciji krive. Shodno tome, čitav

GLAVA 3. L-SISTEMI I KOCH-OVA KRIVA

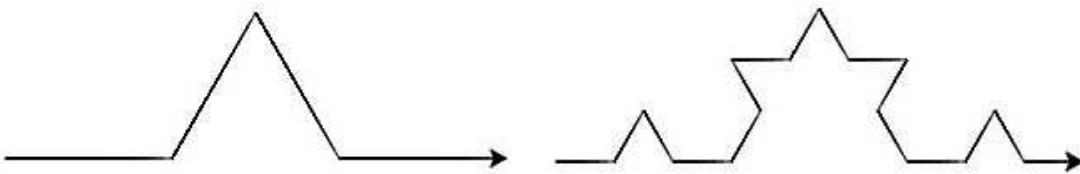
proces opisan u 1.2 može se opisati sledećim L-sistemom:

$$\begin{aligned}
 \text{Azbuka: } & \Sigma = \{F, f, +, -\} \\
 \text{Aksioma: } & \omega_0 = F \\
 \text{Produkcije: } & F \rightarrow F + F --F + F \\
 \text{Priraštaj: } & \delta = 60^\circ
 \end{aligned}$$

Počevši od aksiome, niz stringova koji se dobije primenom pravila L-sistema je sledeći:

$$\begin{aligned}
 & F \\
 & F + F --F + F \\
 & F + F --F + F + F + F --F + F --F + F + F + F --F + F \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Dužina koraka d u svakoj sledećoj iteraciji tri puta je manja od dužine u prethodnoj, odnosno dolazi do skaliranja za $\frac{1}{3}$. Jasno se može uočiti povezanost Koch-ove geometrijske konstrukcije i konstrukcije pomoću interpretacije reči u L-sistemu, jer inicijator odgovara baš ω_0 , dok je generator predstavljen sa desnom stranom produkcije u sistemu.



Slika 3.2: Kriva dobijena primenom produk-

Slika 3.3: Kriva dobijena dvostrukom pri-
menom produkcije na F .

U (1.2) smo pokazali i kako se, osim Koch-ove klasične krive, može geometrijski konstruisati i Koch-ova pahulja koja ograničava površ konačne površine. Kako za opisivanje Koch-ove krive, tako i za pahulju možemo koristiti L-sisteme. Pa, kako je inicijator u konstrukciji Koch-ove pahulje jednakostračni trougao, sledeći string se može iskoristiti za njegov opis:

$$F --F --F,$$

gde za ugao δ biramo 60° . Dakle, kornjača se iz početnog stanja pomera napred za korak dužine d crtajući pritom duž (F). Zatim se okreće desno za 120° u smeru kazaljke na satu ($--$) i pomera napred za korak d , ponovo crtajući duž (F). Na kraju ponavlja prethodnu rotaciju ($--$) i pomeranje napred (F) i time dobijamo trag koji predstavlja jednakostračni trougao čije su stranice dužine d . Znamo da se u svakom sledećem koraku stranica trougla zamenjuje novim segmentom koji je upravo generator kod geometrijske konstrukcije Koch-ove krive, te se L-sistem koji opisuje pahulju može definisati kao:

$$\begin{aligned}
 \text{Azbuka: } & \Sigma = \{F, f, +, -\} \\
 \text{Aksioma: } & \omega_0 = F --F --F \\
 \text{Produkcije: } & F \rightarrow F + F --F + F \\
 \text{Priraštaj: } & \delta = 60^\circ
 \end{aligned}$$

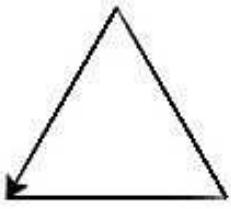
Počevši od aksiome, niz stringova koji se dobije primenom ovog L-sistema je sledeći:

$F --F--F$

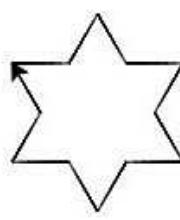
$F + F --F + F$

\vdots

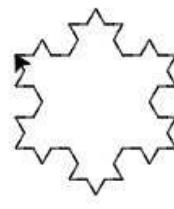
Dužina koraka d je ponovo u svakoj sledećoj iteraciji tri puta manja od koraka u prethodnoj iteraciji, obzirom na faktor skaliranja.



Slika 3.4: Inicijator $F --F--F$ Koch-ove pahulje.



Slika 3.5: Pahulja dobijena primenom produkциje na $F --F--F$.

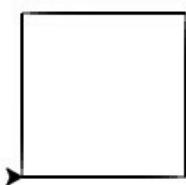


Slika 3.6: Pahulja dobijena dvostrukom primenom produkcijske pravile na $F --F--F$.

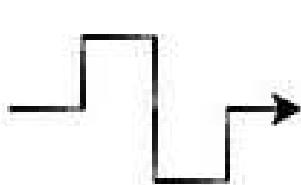
Na ovaj način se može opisati i bilo koja modifikacija Koch-ove krive i pahulje. Recimo, umesto jedinične duži ili jednakostraničnog trougla možemo uzeti inicijator koji je kvadrat stranica dužine d , a za generator cik-cak krivu na slici 3.8. Obe ovakve krive se mogu opisati nizom stringova, te ako posmatramo L-sistem:

$$\begin{aligned} \text{Azbuka: } & \Sigma = \{F, f, +, -\} \\ \text{Aksioma: } & \omega_0 = F + F + F + F \\ \text{Producija: } & F \rightarrow F + F - F - FF + F + F - F \\ \text{Priraštaj: } & \delta = 90^\circ \end{aligned}$$

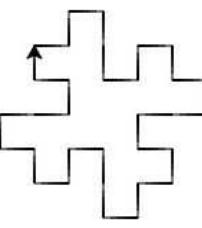
uzastopnim ponavljanjem pravila sistema dolazimo do tzv. Koch-ovog ostrva.



Slika 3.7: Inicijator Koch-ovog ostrva.



Slika 3.8: Generator Koch-ovog ostrva.



Slika 3.9: Koch-ovo ostrvo dobijeno primenom produkcijske pravile na $F + F + F$.

Lindemayer-ovim sistemima se mogu generisati mnogi fraktali, uključujući i razne varijacije Koch-ove krive. Takođe, kornjačina interpretacija se može proširiti dodavanjem novih simbola azbuci $\Sigma = \{F, f, +, -\}$ ili čak asociranjem parametara kao što je dužina koraka sa određenim simbolom azbuke, te bi kornjača, prilikom interpretacije određenog simbola, znala koja je dužina koraka koju treba da iscrta itd. Definisanje takvih parametara je prisutno u tzv. parametarskim L-sistemima i omogućava širu primenu, naročito u kreiranju bioloških modela. Više detalja o ovome, kao i drugim proširenjima L-sistema i njegovim primenama, čitalac može pronaći u [16].

Glava 4

Thue-Morse-ove reči i Koch-ova kriva

Thue¹-Morse²-ova reč predstavlja binarni niz,

$$01101001100101101001011001101001\dots$$

odnosno niz nula i jedinica, koji je izučavan još 1851. godine od strane Prouhet³-a. Međutim, Prouhet nije eksplicitno spominjao ovaj niz brojeva, već je to 1906. godine učinio Thue koji je ovaj niz koristio za izučavanje kombinatorike nad rečima. Iako je već ranije pomenut, ovaj niz reči doživljava popularnost 1921. godine kada ga je Morse primenio u svojim radovima iz oblasti diferencijalne geometrije. Shodno tome u literaturi se ova reč naziva Thue-Morse-ova ili Prouhet-Thue-Morse-ova reč. U ovom poglavlju ćemo prvo definisati ovakav niz reči i pokazati neke njihove osobine [1][3][11]. Zatim ćemo doći do Thue-Morse-ovog niza kao specijalnog L-sistema i Koch-ove krive kao granične vrednosti tog niza [11].

4.1 Definicija i osnovne osobine Thue-Morse-ove reči

Kao i kod L-sistema, abzuku ćemo označavati sa Σ , svaki niz simbola iz Σ biće reč nad abzukom Σ , gde ćemo praznu reč ponovo označavati sa ε . Skup svih konačnih reči nad Σ označavaćemo sa Σ^* , a sada ćemo uvesti i oznaku za skup svih reči Σ^∞ , konačnih i beskonačnih nad Σ . Dužina reči ω , tj. broj simbola u ω , označavaćemo sa $|\omega|$. U nastavku će nam biti neophodan i pojam prefiksa neke reči, pa ako su $\omega_1 \in \Sigma^\infty$ i $\omega_2 \in \Sigma^*$, kažemo da je reč ω_1 prefiks reči ω_2 ako postoji reč $\omega \in \Sigma^\infty$ takva da je $\omega_2 = \omega_1\omega$. Takođe, za reč ω nad binarnom abzukom $\{0, 1\}$ definišemo komplement reči ω , u oznaci $\bar{\omega}$, kao reč koja se od ω dobija tako što se svako pojavljivanje simbola 0 zameni simbolom 1, i obratno. Ovde će nam od značaja biti operacija konkatenacije ili nadovezivanja koju smo takođe definisali u prethodnom poglavljiju. Dakle, ako su $\omega_1 \in \Sigma^\infty$ i $\omega_2 \in \Sigma^*$ neke reči date sa $\omega_1 = aaa$ i $\omega_2 = bab$, operacija nadovezivanja ili konkatenacije stringova je definisana kao

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = aaa \cdot bab = aaabab.$$

¹Axel Thue (1863 - 1922), norveški matematičar, poznat po svojim radovima iz oblasti kombinatorike i diofantovih aproksimacija.

²Marston Morse (1892 - 1977), američki matematičar, poznat po radovima iz oblasti matematičke analize i diferencijalne topologije.

³Eugène Prouhet (1817 - 1867), francuski matematičar koji je prvi dao rešenje problema iz teorije brojeva pod nazivom *Prouhet-Tarry-Escott problem*.

Nakon osnovnih pojmova iz algebre jezika, od kojih su neki već definisani kod L-sistema, prelazimo na definiciju funkcije morfizma koja će nam trebati u nastavku ovog poglavlja.

4.1.1. Definicija Neka su Σ i Ω dva alfabeta. Funkcija $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Omega^*$ naziva se morfizam ako je za sve konačne reči $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma^\infty$ ispunjeno

$$\varphi(\omega_1\omega_2) = \varphi(\omega_1) \cdot \varphi(\omega_2).$$

4.1.2. Napomene

1. Ako je $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ morfizam, onda φ možemo primenjivati više puta. Dakle, za $k \in \mathbb{N}$ i $\omega \in \Sigma^*$

$$\varphi^0(\omega) = \omega \quad \text{i} \quad \varphi^k(\omega) = \varphi(\varphi^{k-1}(\omega)).$$

2. Ako za morfizam $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ i neko $a \in \Sigma$ važi da je a prefiks reči $\varphi(a)$, odnosno postoji $\omega \in \Sigma^\infty$ takvo da je $\varphi(a) = aw$, onda je dobro definisana reč

$$\varphi^\infty(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^k(a).$$

Za sve $k \in \mathbb{N}$, koristeći prethodnu napomenu i definiciju morfizma:

$$\varphi^{k+1}(a) = \varphi^k(\varphi(a)) = \varphi^k(aw) = \varphi^k(a) \cdot \varphi^k(w),$$

pa je $\varphi^k(a)$ prefiks reči $\varphi^{k+1}(a)$, za sve $k \in \mathbb{N}$. To znači da je limes niza $\{\varphi^k(a)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dobro definisan i reč $\varphi^\infty(a)$ je fiksna tačka morfizma φ .

Posmatramo morfizam $\varphi : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}^*$ definisan sa

$$\varphi(0) = 01 \quad \text{i} \quad \varphi(1) = 10.$$

Ako je $\omega = 0100$, onda je $\varphi(\omega) = 01100101$. Pošto je $a \in \{0, 1\}$ prefiks reči $\varphi(a)$, možemo pronaći reč $\varphi^\infty(a)$, u skladu sa prethodnom napomenom. Uzmemo za $a = 0$. Tada je $\varphi(a) = 01$, zatim $\varphi^2(a) = 0110$, ... ,

$$\varphi^\infty(a) = 0110100110010110\dots,$$

a to je upravo Thue-Morse-ova reč. Navedeni morfizam je Thue-Morse-ov morfizam. Ova dva pojma definišemo u nastavku.

4.1.3. Definicija Neka je $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ niz nad skupom $\{0, 1\}$ definisan rekurzivno sa

$$t_0 = 0, \quad t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = \bar{t_n}, \quad n \geq 0,$$

gde je za $t \in \{0, 1\}$, $\bar{t} = 1 - t$. Ovako definisani niz zovemo Thue-Morse-ov niz, a reč koju taj niz generiše Thue-Morse-ova reč i označavamo je sa TM .

Uvedimo sledeću oznaku:

Sa TM_n označavamo prefiks Thue-Morse-ove reči dužine 2^n , $n \geq 0$.

Na osnovu definicije, početak Thue-Morse-ove reči je

$$TM = 011010011001011010010110\dots$$

a svaki

$$TM_0 = 0$$

$$TM_1 = 01$$

$$TM_2 = 0110$$

$$TM_3 = 01101001$$

⋮

je prefiks Thue-Morse-ove reči, redom dužine jedan, dva, četiri, osam itd. Sada ćemo definisati Thue-Morse-ov morfizam, kako bismo pomoću njega dali još jednu definiciju Thue-Morse-ove reči.

4.1.4. Definicija *Thue-Morse-ov morfizam je preslikavanje $\varphi : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ definisano sa*

$$\varphi(0) = 01, \quad \varphi(1) = 10.$$

Ako je ω neka reč nad $\{0, 1\}$ i φ Thue-Morse-ov morfizam, onda važi:

$$\varphi(\bar{\omega}) = \overline{\varphi(\omega)}.$$

4.1.5. Primer Neka je $\omega = 010$ i φ Thue-Morse-ov morfizam. Tada je $\bar{\omega} = 101$ i sledi da je

$$\varphi(\bar{\omega}) = \varphi(101) = \varphi(1)\varphi(0)\varphi(1) = 100110$$

$$\overline{\varphi(\omega)} = \overline{\varphi(010)} = \overline{\varphi(0)\varphi(1)\varphi(0)} = \overline{011001} = 100110,$$

odnosno sledi upravo jednakost

$$\varphi(\overline{010}) = \overline{\varphi(010)}.$$

4.1.6. Teorema *Thue-Morse-ova reč je fiksna tačka Thue-Morse-ovog morfizma φ , odnosno važi $\varphi(TM) = TM$. Štaviše, TM i \overline{TM} su jedine fiksne tačke morfizma φ .*

Dokaz. Neka je ω reč nad abzikom $\{0, 1\}^*$ i neka je ω_n n-to slovo reči ω , za $n \geq 0$. Za svako slovo $a \in \{0, 1\}^*$ važi:

$$\varphi(a) = a\bar{a}.$$

Ako ω zapišemo kao

$$\omega = \omega_0\omega_1\omega_2\dots\omega_n\omega_{n+1}\dots,$$

onda je za $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \varphi(\omega_0)\varphi(\omega_1)\varphi(\omega_2) \dots \varphi(\omega_n)\varphi(\omega_{n+1})\dots \\ &= \omega_0\bar{\omega}_0\omega_1\bar{\omega}_1\omega_2\bar{\omega}_2 \dots \omega_n\bar{\omega}_n\omega_{n+1}\bar{\omega}_{n+1}, \end{aligned}$$

pa važi:

$$\varphi(\omega_0) = \varphi(\omega)_0\varphi(\omega)_1$$

$$\varphi(\omega_1) = \varphi(\omega)_2\varphi(\omega)_3$$

$$\varphi(\omega_2) = \varphi(\omega)_4\varphi(\omega)_5$$

⋮

$$\varphi(\omega_n) = \varphi(\omega)_{2n}\varphi(\omega)_{2n+1}$$

Kako je za sve $n \geq 0 : \omega_n \in \{0, 1\}^*$, iz prethodnih jednakosti sledi

$$\varphi(\omega_n) = \omega_n\bar{\omega}_n = \varphi(\omega)_{2n}\varphi(\omega)_{2n+1},$$

odnosno važi

$$\omega_n = \varphi(\omega)_{2n} \quad \text{i} \quad \overline{\omega_n} = \varphi(\omega)_{2n+1}.$$

Ako je ω fiksna tačka morfizma φ , onda iz dobijenih jednakosti sledi

$$\omega_n = \omega_{2n} \quad \text{i} \quad \overline{\omega_n} = \omega_{2n+1},$$

pa za $\omega_0 = 0$ imamo da je po definiciji ω baš Thue-Morse-ova reč, a ako je $\omega_0 = 1$, onda je ω baš \overline{TM} . Odavde sledi da su ω i $\overline{\omega}$ jedine fiksne tačke morfizma φ . \square

Sada kada znamo šta je Thue-Morse-ova reč može se prethodno navedeno povezati sa Koch-ovom krivom. Thue-Morse-ov niz i Koch-ova kriva imaju nekoliko zajedničkih osobina. Kako kriva tako i Thue-Morse-ova reč definisane su iterativno. Štaviše, obe poseduju osobinu samosličnosti koju smo opisali u prvoj glavi. Za Thue-Morse-ov niz kažemo još i da je fraktalan, odnosno samosličan, što možemo videti ako iz niza

$$0110100110010110\dots$$

izbacimo svaki drugi simbol:

$$0\cancel{1}\cancel{0}1\cancel{0}1\cancel{0}1\dots$$

tj. dobijemo upravo početni niz

$$01101001\dots$$

Nije teško uočiti da se Thue-Morse-ova reč može dobiti pomoću L-sistema i to na sledeći način. Neka je $\Sigma = \{0, 1\}$ azbuka, $S = 0$ početna reč i P skup sledećih produkcija:

$$0 \rightarrow 01 \quad \text{i} \quad 1 \rightarrow 10.$$

Tada je (Σ, S, P) upravo L-sistem kojim generišemo Thue-Morse-ove reči, pa možemo reći da je ovo jedna vrsta L-sistema. To znači da LOGO-style kornjaču možemo iskoristiti i za grafičku reprezentaciju Thue-Morse-ovih reči. Rekli smo da za dati alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ i definisan morfizam $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ takav da je $\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 10$, dobijamo niz reči $\{\varphi^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ nad Σ^*

$$0, 01, 0110, 01101001, \dots$$

počevši od $\omega_0 = 0$, koji konvergira ka tzv. Thue-Morse-ovoj reči

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(0) = 0110100110010\dots$$

Ako sada umesto nula i jedinica za alfabet uzmemo $\Sigma = \{F, L\}$, gde F i L predstavljaju komande za kornjaču u ravni, možemo grafički pokazati da niz Thue-Morse-ovih reči konvergira ka fraktalu. Neka su komande sledeće:

- F Pomeri se napred za korak dužine d i nacrtaj duž od početnog do krajnjeg stanja.
- f Pomeri se napred za korak d bez crtanja duži.
- L Skreni levo (smer suprotan od kazaljke na satu) pod uglom δ .

Dakle, slično kao što smo definisali kod L-sistema definišemo i ovde komande za kornjaču, ovog puta nešto drugačije. L predstavlja rotaciju u smeru suprotnom od kazaljke na satu, za neki fiksni ugao δ , dok F ostaje nepromenjeno u odnosu na L-sisteme. Promenu stanja kornjače možemo prikazati na isti način kao što smo to uradili u trećem poglavlju:

Komanda	Stanje kornjače (x, y, α) se menja u
F	$(x + d \cos \alpha, y + d \sin \alpha)$
f	$(x + d \cos \alpha, y + d \sin \alpha)$
L	$(x, y, \alpha - \delta)$

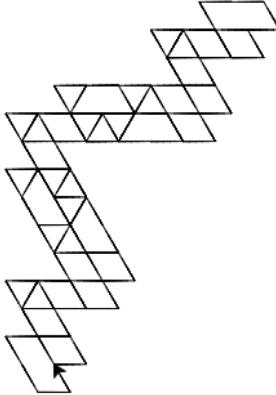
Sada, ako je $\Sigma = \{F, L\}$ i $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, prefiksi Thue-Morse-ove reči se mogu dobiti kao

$$TM_n = \varphi^n(F) \quad \text{i} \quad \overline{TM}_n = \varphi(L).$$

Prefiksi su sledeći:

$$\begin{aligned} TM_1 &= \varphi^1(F) = FL \\ TM_2 &= \varphi^2(F) = FLLF \\ TM_3 &= \varphi^3(F) = FLLFLFFL \\ TM_4 &= \varphi^4(F) = FLLFLFFLLFFLFLLF \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ako bismo ovaj niz reči prikazali grafički, koristeći kornjačinu grafiku, videli bismo da reči parnog indeksa $TM_8, TM_{10}, TM_{12}, TM_{14}, \dots$ počinju da liče na Koch-ovu krivu. U nastavku dajemo osobinu niza reči oblika $\{TM_{2n}, \overline{TM}_{2n}\}$, jer će se kasnije pokazati da upravo ovakav niz prefiksa Thue-Morse-ove reči konvergira ka Koch-ovojoj krivoj.



Slika 4.1: Kornjačina interpretacija prefiksa TM_8 .

4.1.7. Lema Za sve $n \in \mathbb{N}$:

$$TM_{2n+2} = TM_{2n} \overline{TM}_{2n} \overline{TM}_{2n} TM_{2n}$$

$$\overline{TM}_{2n+2} = \overline{TM}_{2n} TM_{2n} TM_{2n} \overline{TM}_{2n},$$

odnosno reči oblika $\{TM_{2n}, \overline{TM}_{2n}\}$ su palindromi.

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po n . Pokazaćemo da važi prva jednakost:

- Ako je $n = 0$, onda je $TM_2 = TM_0 \overline{TM}_0 \overline{TM}_0 TM_0 = FLLF$.

- Pretpostavimo da tvrđenje važi za n , odnosno da je

$$TM_{2n+2} = TM_{2n} \overline{TM}_{2n} \overline{TM}_{2n} TM_{2n}.$$

- Pokazujemo da tvrđenje važi za $n + 1$, odnosno da je

$$TM_{2n+4} = TM_{2n+2}\overline{TM}_{2n+2}\overline{TM}_{2n+2}TM_{2n+2}.$$

$$\begin{aligned} TM_{2n+2}\overline{TM}_{2n+2}\overline{TM}_{2n+2}TM_{2n+2} &= TM_{2n}\overline{TM}_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n}\overline{TM}_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n} \\ &\quad \overline{TM}_{2n}\overline{TM}_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n}TM_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n} \\ &= TM_{2n}\overline{TM}_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n}TM_{2n}\overline{TM}_{2n} \\ &\quad \overline{TM}_{2n}TM_{2n}TM_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n}\overline{TM}_{2n}TM_{2n} \\ &= TM_{2n+1}\overline{TM}_{2n+1}\overline{TM}_{2n+1}TM_{2n+1}\overline{TM}_{2n+1}TM_{2n+1} \\ &\quad TM_{2n+1}\overline{TM}_{2n+1} \\ &= TM_{2n+2}\overline{TM}_{2n+2}\overline{TM}_{2n+2}TM_{2n+2} \\ &= TM_{2n+3}\overline{TM}_{2n+3} \\ &= TM_{2n+4} \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i druga jednakost iz tvrđenja. \square

Osobina da su reči $\{TM_{2n}, \overline{TM}_{2n}\}$ palindromi nama je od značaja jer garantuje da će grafička reprezentacija ovih reči biti simetrična, što znamo da je jedna od osobina Koch-ove krive.

4.2 Koch-ova kriva kao granična vrednost niza Thue-Morse-ovih reči

Kao i ranije, oslanjamo se na pokazanu Koch-ovu geometrijsku konstrukciju u (1.2), te hoćemo da pokažemo da niz konvergira ka standardnoj Koch-ovoj krivoj. Koristićemo rezultate do kojih su došli Ma i Holdener u svom radu *When Thue-Morse meets Koch*, te se sve definicije, leme, teoreme, kao i njihovi dokazi mogu pronaći u [11].

Neka je fiksiran ugao $\delta = \frac{\pi}{3}$, odnosno kornjača se uvek rotira za ugao od 60° . Znamo da je Koch-ova kriva generisana pomoću L-sistema tako što je F dato za početnu reč, a $F \rightarrow F + F - F + F$ jedina produkcija, gde su + i - rotacije za ugao $\frac{\pi}{3}$ u smeru suprotnom, odnosno u smeru kazaljke na satu. Neka je $\mathcal{K} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ morfizam takav da je

$$\mathcal{K}(F) = FL^5FL^2FL^5F \quad \text{i} \quad \mathcal{K}(L) = L,$$

gde je (Σ^*, \cdot) monoid reči nad Σ . Producija data L-sistemom odgovara upravo morfizmu \mathcal{K} . Primetimo da se $FL^5FL^2FL^5F$ može faktorisati na dva načina:

1. $(FL^4)(LFL)(LFL)(L^4F)$
2. $(FL)(L^4FL)(LFL^4)(LF)$.

Ako definišemo $0 := L^4FL^4$ i $1 := LFL$ i prepostavimo da je prazna reč $\varepsilon = L^6$ (obzirom da

predstavlja rotaciju za 2π kornjača se vraća u početnu poziciju), dobijemo:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(0) &= \mathcal{K}(L^4FL^4) = \mathcal{K}(L^4)\mathcal{K}(F)\mathcal{K}(L^4) = \\ &= (\mathcal{K}(L))^4(FL^4)(LFL)(LFL)(L^4F)(\mathcal{K}(L))^4 = \\ &= L^4(FL^4)(LFL)(LFL)(L^4F)L^4 = \\ &= L^4(FL^4)11(L^4F)L^4 = \\ &= 0110 = \\ &= \varphi^2(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(1) &= \mathcal{K}(LFL) = \mathcal{K}(L)\mathcal{K}(F)\mathcal{K}(L) = \\ &= L(FL)(L^4FL)L^6(LFL^4)(LF)L = \\ &= L(FL)(L^4FL)L^3L^3(LFL^4)(LF)L = \\ &= (LFL)(L^4FL^4)(L^4FL^4)(LFL) = \\ &= 1001 = \\ &= \varphi^2(1)\end{aligned}$$

Primetimo da su dva morfizma u sledećem odnosu:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(F) &= \varphi^2(F) \\ \mathcal{K}(L) &= \varphi^2(L)\end{aligned}$$

Sledeća teorema daje nam njihov odnos u opštem slučaju.

4.2.1. Lema Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i neka je $\varepsilon = L^6$ prazna reč u skupu svih reči nad azbukom $\Sigma = \{F, L\}$. Tada važe sledeći identiteti:

1. $\mathcal{K}^n(L^4FL^4) = \varphi^{2n}(L^4FL^4)$
2. $\mathcal{K}^n(LFL) = \varphi^{2n}(LFL)$.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n.

- Ako je $n = 0$, onda važi:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^0(L^4FL^4) &= L^4FL^4 = \varphi^0(L^4FL^4) \\ \mathcal{K}^0(LFL) &= LFL = \varphi^0(LFL).\end{aligned}$$

- Prepostavimo da tvrđenje važi za n, odnosno da važe identiteti:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^n(L^4FL^4) &= \varphi^{2n}(L^4FL^4) \\ \mathcal{K}^n(LFL) &= \varphi^{2n}(LFL).\end{aligned}$$

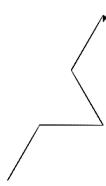
- Pokazujemo da tvrđenje važi za $n + 1$. Koristeći bazu i induksijsku prepostavku, sledi

$$\begin{aligned}\varphi^{2n+2}(L^4FL^4) &= \varphi^{2n}(L^4FL^4)\varphi^2(L^4FL^4) \\ &= \mathcal{K}^n(L^4FL^4)\mathcal{K}(L^4FL^4) \\ &= \mathcal{K}^{n+1}(L^4FL^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{2n+2}(LFL) &= \varphi^{2n}(LFL)\varphi^2(LFL) \\ &= \mathcal{K}^n(LFL)\mathcal{K}(LFL) \\ &= \mathcal{K}^{n+1}(LFL)\end{aligned}$$

□

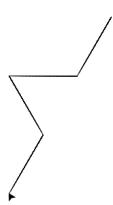
Ako pogledamo kornjačinu interpretaciju stringova L^4FL^4 i LFL , vidimo da su to zapravo inicijatori u geometrijskoj konstrukciji, te je $\mathcal{K}(L^4FL^4)$ i $\mathcal{K}(LFL)$ generator krive, $\mathcal{K}^2(L^4FL^4)$ i $\mathcal{K}^2(LFL)$ su treća iteracija u konstrukciji itd. U oba slučaja dolazimo do n-te iteracije krive, samo je dobijena kriva zarotirana u zavisnosti od stepena L koji je u stringu. Shodno tome, direktna posledica ove leme jeste da niz $\{\varphi^{2n}(L^4FL^4)\}_{n \in \mathbb{N}}$ predstavlja jedan od načina na koji se može kodirati i generisati Koch-ova kriva.



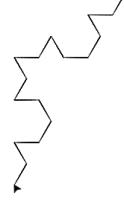
Slika 4.2: Generator Koch-ove krive kodiran pomoću $\mathcal{K}(LFL)$.



Slika 4.3: Treća iteracija Koch-ove krive kodirana pomoću $\mathcal{K}^2(LFL)$.



Slika 4.4: Generator Koch-ove krive kodiran pomoću $\mathcal{K}(L^4FL^4)$.



Slika 4.5: Treća iteracija Koch-ove krive kodirana pomoću $\mathcal{K}^2(L^4FL^4)$.

U nastavku će nam od značaja biti stanje kornjače i pokazaćemo na koji način se može odrediti njena pozicija. Pre toga, obeležimo stanje kornjače kao uređeni par (\vec{r}, \hat{v}) , gde je $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ vektor pozicije i \hat{v} jedinični vektor koji opisuje pravac kornjače. Definisane komande F i L reprezentuju transformacije u ravni, pa ćemo sa T_F označavati transformaciju koja nastane usled kornjačine interpretacije simbola F , a sa T_L ćemo označavati transformaciju koja nastane usled kornjačine interpretacije simbola L . Ove transformacije su definisane sa:

$$T_F : (\vec{r}, \hat{v}) \rightarrow (\vec{r} + \hat{v}, \hat{v})$$

$$T_L : (\vec{r}, \hat{v}) \rightarrow (\vec{r}, R_\delta \hat{v}),$$

gde je za fiksiran ugao $\delta = \frac{\pi}{3}$

$$R_\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

matrica rotacije, a $L^6 = \varepsilon$. Kako je svaka reč ω nad azbukom Σ niz simbola F i L , svaka reč ima jedinstvenu reprezentaciju $\omega = \prod_{i=1}^k L^{n_i} F^{m_i}$, gde su $n_i, m_i \geq 0$, a interpretacija reči ω je transformacija u ravni koju ćemo obeležavati sa T_ω i ona je data sa

$$T_\omega : (\vec{r}, \hat{v}) \rightarrow (\vec{r} + M\hat{v}, R\hat{v}),$$

gde je M matrica oblika $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ za neko $x, y \in \mathbb{R}$, a $R = R_\delta^k$, $k > 0$. Uređeni parovi $(M, R) \in \mathcal{G} = M_2(\mathbb{R}) \times \langle R_\delta \rangle$ tada čine grupu u odnosu na operaciju

$$(M_1, R_1)(M_2, R_2) = (M_1 + R_1 M_2, R_1 R_2)$$

i postoji homomorfizam $\psi : \Sigma^* \rightarrow \mathcal{G}$ takav da je

$$\psi(\omega) = \left(\sum_{j=1}^k m_j R_\delta^{\sum_{i=1}^j n_i}, R_\delta \sum_{i=1}^k n_i \right).$$

Ako je početno stanje kornjače $(\vec{r}_0, \hat{v}_0) = ((0,0), (0,1))$, onda se njeno novo stanje nakon transformacije T_ω može naći pomoću definisanog homomorfizma i projekcija $\pi_1 \circ \pi_2 - \pi_1 \circ \phi(\omega) \cdot \hat{v}$ i $\pi_2 \circ \phi(\omega) \cdot \hat{v}$ predstavljaju redom poziciju i pravac kornjače. Koristeći definisani homomorfizam ϕ definišemo novo preslikavanje koje će nam dati samo poziciju kornjače nakon transformacije T_ω .

4.2.2. Definicija Neka je dat vektor pravca $\hat{v}_0 = (0, 1)$ i neka je preslikavanje $\phi_0 : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisano sa $\phi(M) = M \cdot \hat{v}_0$. Pozicioni homomorfizam $g : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ je kompozicija $g = \phi_0 \circ \pi_1 \circ \psi$.

Ako sa G obeležimo skup $\{g(\omega) \mid \omega \in \Sigma^*\}$, na njemu možemo definisati binarnu operaciju \odot na sledeći način:

$$g(\omega_1) \odot g(\omega_2) = g(\omega_1) + \pi_2 \circ \psi(\omega_1) \cdot g(\omega_2).$$

Lako se pokaže da je (G, \odot) grupa i da je preslikavanje g homomorfizam. Operacija \odot i homomorfizam g biće nam od koristi kasnije u radu.

Koristeći uvedenu reprezentaciju reči $\omega \in \Sigma^*$ i vektor pozicije i vektor pravca kornjače, hoćemo da pronađemo poziciju i pravac kornjače koja interpretira Thue-Morse-ove reči TM_{2n} i \overline{TM}_{2n} .

4.2.3. Lema Neka su ω_1 i ω_2 reci nad Σ^* čije su pozicije $\pi_1 \circ \psi(\omega_1) = M_1$ i $\pi_1 \circ \psi(\omega_2) = M_2$, a pravci jednaki $\pi_2 \circ \psi(\omega_1) = \pi_2 \circ \psi(\omega_2) = R_\delta^2$. Tada za sve $n \geq 0$:

$$1. \pi_2 \circ \psi(\varphi^{2n}(\omega_1)) = \pi_2 \circ \psi(\varphi^{2n}(\omega_2)) = R_\delta^2,$$

$$2. \pi_1 \circ \psi(\varphi^{2n}(\omega_1)) = \frac{3^n+1}{2} M_1 - \frac{3^n-1}{2} M_2,$$

$$\pi_1 \circ \psi(\varphi^{2n}(\omega_2)) = \frac{3^n+1}{2} M_2 - \frac{3^n-1}{2} M_1.$$

Koristeći prethodnu lemu možemo naći tačnu poziciju i pravac kornjače koja interpretira Thue-Morse-ove prefikse. Naredna lema nam u (1) daje pravac kornjače, a u (2) poziciju kornjače u zavisnosti od toga da li interpretira TM_{2n} ili \overline{TM}_{2n} .

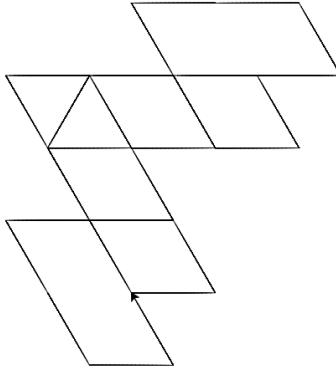
4.2.4. Lema Za sve $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$1. \pi_2 \circ \psi(TM_{2n}) = \pi_2 \circ \psi(\overline{TM}_{2n}) = R_\delta^2,$$

$$2. \pi_1 \circ \psi(TM_{2n}) = \frac{3-3^{n-1}}{2} R_\delta,$$

$$\pi_1 \circ \psi(\overline{TM}_{2n}) = \frac{3+3^{n-1}}{2} R_\delta$$

Ako se prisetimo geometrijske konstrukcije Koch-ove krive, jos dva pojma su nam bila od značaja, a to su dužina segmenta i faktor skaliranja. Upravo zbog toga ćemo ih i ovde definisati koristeći pozicioni homomorfizam. Obzirom da bas TM_6 liči na generator krive, navedene pojmove ćemo definisati kada je $n \geq 3$.



Slika 4.6: Kornjačina interpretacija prefiksa TM_6 .

4.2.5. Definicija Dužina segmenta, u oznaci l_n za $n \geq 3$, definiše se kao dužina vektora $\overrightarrow{g(\overline{TM}_{2n})}$, odnosno $l_n = |\overrightarrow{g(TM_{2n})}|$. Faktor skaliranja definiše se kao $S_n = l_3/l_n$, za $n \geq 3$.

Koristeći lemu 4.2.4. i početno stanje $(\vec{r}_0, \hat{v}_0) = ((0,0), (0,1))$ možemo tačno da izračunamo dužinu segmenta i faktor skaliranja:

$$l_n = |\overrightarrow{g(TM_{2n})}| = \left| \vec{r}_0 + \frac{3 - 3^{n-1}}{2} R_\delta \hat{v}_0 \right| = \left| \frac{3 - 3^{n-1}}{2} R_\delta \hat{v}_0 \right| = \frac{3^{n-1} - 3}{2}$$

$$S_n = \frac{l_3}{l_n} = \frac{3}{l_n} = \frac{2}{3^{n-2} - 1}.$$

U sledećem koraku želimo da definišemo preslikavanje koje će svaki prefiks TM_{2n} ili \overline{TM}_{2n} preslikati u odgovarajuću poligonalnu krivu. Neka je $S \subset \Sigma^*$ i neka je $H(\mathbb{R}^2)$ skup svih nepraznih kompaktnih podskupova skupa \mathbb{R}^2 . Podsetimo se da smo skup $H(\mathbb{R}^2)$ definisali kod IFS-a i da smo pokazali da je $(H(\mathbb{R}^2), h)$ kompletan metrički prostor, gde je h Hausdorff-ova metrika. Preslikavanje $K : S \rightarrow H(\mathbb{R}^2)$ je poligonalno preslikavanje takvo da je za $s \in S$

$$K[s] = \{\alpha g(s) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\},$$

gde je g pozicioni homomorfizam. Preslikavanje K se može proširiti na skup svih reči nad S tako da je za sve $X, Y \in S^*$

$$K[XY] = K[X] \cup (g(X) \odot K[Y]),$$

gde je $g(X) \odot K[Y] = g(X) + \pi_2 \circ \psi(X) \cdot K[Y]$. Ispitivanjem specijalnog poligonalnog preslikavanja $K_{2k} : \{TM_{2k}, \overline{TM}_{2k}\}^* \rightarrow H(\mathbb{R}^2)$, Ma i Holdener su došli do sledeće dve leme, a nakon toga i konvergencije.

4.2.6. Lema Neka je $(H(\mathbb{R}^2), h)$ metrički prostor i neka je $3 \leq k < n$. Tada za bilo koje dato $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno veliko $N \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq N$

$$h(S_n K_{2k}[TM_{2n}], S_n K_{2k+2}[TM_{2n}]) < \varepsilon.$$

Dakle, prethodna lema kaže da što je k veće, razlika između dva uzastopna poligonalna preslikavanja K_{2k} i K_{2k+2} primenjena na neko TM_{2n} i skalirana za S_n je sve manja. Na osnovu ovog rezultata, može se pokazati naredna lema koja nam daje razliku između bilo koje dve poligonalne krive.

4.2.7. Lema Neka je $(H(\mathbb{R}^2), h)$ metrički prostor i neka su $j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $3 \leq j \leq k$. Tada za bilo koje dato $\varepsilon > 0$ postoji dovoljno veliko $N \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq N$

$$h(S_n K_{2j}[TM_{2n}], S_n K_{2k}[TM_{2n}]) < \varepsilon.$$

Prethodne dve leme su ključne u dokazivanju konvergencije poligonalnih krivih $\{S_n K_{2k}[TM_{2n}]\}_{n \geq 3}$ u metričkom prostoru $(H(\mathbb{R}^2), h)$. Sledi teorema o konvergenciji niza poligonalnih krivih:

4.2.8. Teorema Neka je za $n \geq 8$

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ \frac{n+1}{2} & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

Tada niz kompaktnih skupova $\{S_n K_{2k}[TM_{2n}]\}_{n \geq 8}$ konvergira u metričkom prostoru $(H(\mathbb{R}^2), h)$.

Kako je $(H(\mathbb{R}^2), h)$ kompletan metrički prostor, sledi da niz $\{S_n K_{2k}[TM_{2n}]\}_{n \geq 5}$ konvergira ka nekom kompaktnom skupu. Sledeća teorema kaže da je taj skup baš Koch-ova kriva.

4.2.9. Teorema Neka je za $n \geq 5$

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ \frac{n+1}{2} & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

Tada niz kompaktnih skupova $\{S_n K_{2k}[TM_{2n}]\}_{n \geq 5}$ konvergira ka Koch-ovojoj krivi u metričkom prostoru $(H(\mathbb{R}^2), h)$.

Dakle, na osnovu prethodne teoreme i svega navedenog vidimo da se Koch-ova kriva zaista može kodirati pomoću Thue-Morse-ovih reči $\{TM_{2n}\}_{n \geq 3}$.

Zaključak

U ovom master radu prezentovani su osnovni pojmovi fraktalne geometrije, kao i geometrijska konstrukcija i osobine Koch-ove krive. Ukažano je na značaj ove oblasti matematike i koliko su osobine fraktala i fraktalna dimenzija značajni u drugim naučnim oblastima, te su pokazane i neke od najpoznatijih metoda za određivanje ove dimenzije. Box-counting metoda je najčešće korićena prilikom određivanja fraktalne dimenzije nekog objekta, a u novijim istraživanjima o kanceru, pokazalo se da ćelije kancera manifestuju osobine fraktala, te da se određivanjem dimenzije ovih ćelija može doći do zaključka o stepenu razvoja i tipu ovakvih ćelija.

Takođe, osobina samosličnosti koji fraktali poseduju, pokazala se značajna i u drugim istraživanjima, a da su oni zaista svuda oko nas još jednom je dokazano, ovog puta rezultatima poljskih naučnika koji su analizirali književna dela. Naime, naučnici sa Instituta za nuklearnu fiziku u Poljskoj analizirajući više od sto dela svetske književnosti otkrili su korelaciju između pojedinačnih delova i celine. Pokazalo se da je u većini ispitanih tekstova svaki deo teksta imao strukturu sličnu celini, odnosno svaka rečenica je imala strukturu nalik na strukturu cele knjige. Štaviše, pokazalo se da romani koji prate tok svesti razvijaju strukturu sličnu onoj koju imaju tzv. multifraktali.

S druge strane, obzirom da živimo u eri interneta, kompjutera, mobilnih telefona itd., posebno nam je značajan razvoj antena koje doprinose svakodnevnoj lagodnosti korisnika. Upravo zbog toga, sve osobine i metode definisane u ovom radu prikazane su na primeru Koch-ove krive koja je od velikog značaja za razvoj fraktalnih antena. Naime, neke varijacije Koch-ove krive poseduju osobinu ispunjavanja prostora koja omogućava da fraktalna antena sa velikim nivoom odziva bude svedena na minimalne dimenzije. Osim prednosti dimenzije, ove antene pokazale su i širok opseg i mogućnost rada na više opsega, odnosno sve ono što savremeno društvo zahteva.

Zbog svega prethodno rečenog, prikazana su tri načina na koje se Koch-ova kriva, ali i drugi fraktali, mogu generisati koristeći sisteme iterativnih funkcija, L-sisteme ili Thue-Morse-ovu reč. Ovi načini ne samo da imaju veliki značaj u razvoju kompjuterske grafike, već i u drugim naučnim oblastima. Recimo, na jednoj od konferencija iz oblasti fraktalne geometrije, naučnici su postavili pitanje generisanja fraktalnih zvukova i muzike. Obzirom da talasi imaju samosličnu strukturu, postavilo se pitanje da li oni generišu i fraktalni zvuk prilikom udara, kao i da li lom stakla ili grmljavina generišu ovaj šablon u zvuku, odnosno da li je moguće kreirati fraktalni zvuk kao što to činimo sa fotografijama. Do jasnih odgovora još nisu došli, ali su početni rezultati ukazali da neki vid korelacije postoji.

Možemo primetiti da se fraktalna geometrija razvija u svima pravcima i da je sveprisutna, čak i u manje uočljivim objektima i pojavama i da možemo očekivati još mnoga iznenađenja.

Literatura

- [1] Allouche, J.-P., Shallit, J. The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence. *Sequences and their applications*. Springer London p. 1-6, 1999.
- [2] Barnsley, M. *Fractals everywhere*. Academic Press London, 1988.
- [3] Berstel, J., Lauve, A., Reutenauer, C., Saliola, F. *Combinatorics on Words: Christoffel Words and Repetitions in Words*. Université de Montréal and American Mathematical Society, 2008
- [4] Dekking, M., Lévy Véhel, J., Lutton, E., Tricot, C. *Fractals: theory and applications in engineering*. Springer London, 1999.
- [5] Demir, B. Özdemir, Y., Saltan, M. The Snowflake Curve as an Attractor of an IFS. *Communication of the Korean Mathematical Society.*, **28**(1):155–162, 2013.
- [6] Falconer, K. *Fractal geometry: Mathematical Foundations and Applications (3rd edition)*. Wiley, 2014.
- [7] Feder, J. *Fractals*. Springer New York, 1988.
- [8] Fisher, Y. *Fractal Image Compression: Theory and Applications*. Springer, 1996.
- [9] Haeseler, F. V., Peitgen, H.-O., Sakas, G., Englert, G., Encarnaçāo, J.-L. *Fractal Geometry and Computer Graphics* Springer-Verlang, 1992.
- [10] Jayalitha G., Uthayakumar, P. Recognition of Cervical Cancer Based on Fractal Dimension. *Advances in recent technologies in communication and Computing (ARTCOM), Kerala, India.*, :532–536, 2009.
- [11] Ma, J., Holdener, J. When Thue-Morse meets Koch. *Fractals*, **Vol. 13**(No. 03):191–206, 2005.
- [12] Madarász Szilágyi, R., Crvenković, S. *Uvod u teoriju automata i formalnih jezika*. Univerzitet u Novom Sadu, 1995.
- [13] Mandelbrot, B. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Co., New York, 1983.
- [14] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D. *Chaos and Fractals 2nd edition*. Springer New York, 2004.
- [15] Pesin, Y., Chimenhaga, V. *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2009.
- [16] Prusinkiewicz, P., Hanan, J., Lindenmayer, A., Fracchia, F., Krishivasan, K. *Lindenmayer Systems, Fractals and Plants*. Springer-Verlang, 1989.
- [17] Werner, G. Fractals in the nervous system: conceptual implications for theoretical neuroscience. *Front Physiol.*, **1**:1–28, 2010.

Biografija



Aleksandra Ivković rođena je 21.8.1992. godine u Zrenjaninu, Srbija. Osnovnu školu „Dositej Obradović“ u Zrenjaninu završila je 2007. godine kao nosilac Vukove diplome. Zatim je upisala prirodno-matematički smer Zrenjaninske gimnazije. Nakon završetka iste 2011. godine, upisala je osnovne akademske studije matematike na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Studije je završila 2016. godine sa prosečnom ocenom 8.41. Master studije upisala je iste godine na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Nakon upisa master studija, kao stipendista Erasmus+ programa, odlazi na Fakultet prirodnih nauka u Banskoj Bistrici, Slovačka, gde provodi pet meseci fokusirajući se na usavršavanje iz oblasti statistike i programiranja. Sve ispite predviđene planom i programom položila je 2018. godine sa prosečnom ocenom 8.76, čime je stekla uslov za odbranu master rada i završetak studija.

Novi Sad, mart 2019.

Aleksandra Ivković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Aleksandra Ivković

AU

Mentor: Dr Sanja Konjik, vanr. prof.

MN

Naslov rada: Fraktalna geometrija Koch-ove krive

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2019.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: (4, 49, 17, 2, 39, 0, 0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Fraktalna geometrija

ND

Ključne reči: Fraktal, fraktalna dimenzija, Koch-ova kriva, Sistemi iterativnih funkcija, IFS, L-sistemi, Thue-Morse-ova reč

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

U ovom master radu bavimo se fraktalnom geometrijom Koch-ove krive i načinima na koje se ona može generisati. Rad je podeljen na četiri glave, pri čemu su u prvoj glavi definisani neki od osnovnih pojmoveva fraktalne geometrije, kao što je fraktalna dimenzija, i pokazana je geometrijska konstrukcija Koch-ove krive i njene osobine. Takođe su predstavljene tri metode za izračunavanje fraktalne dimenzije i izračunata je dimenzija Koch-ove krive koristeći date metode. Naredne tri glave posvećene su generisanju Koch-ove krive koristeći sisteme iterativnih funkcija, L-sisteme i Thue-Morse-ovu reč. Svaka od ovih glava sastoji se od dve celine - uvodnih pojmoveva iz navedene oblasti i primene definisanih pojmoveva kako bismo dobili Koch-ovu krivu.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 31.1.2019.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: Dr. Rozalia Madarász Szilágyi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Milica Žigić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Sanja Konjik, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: Dr Jelena Stojanov, docent, Tehnički fakultet Mihajlo Pupin, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monographic type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master thesis

CC

Author: Aleksandra Ivković

AU

Mentor: Sanja Konjik, PhD

MN

Title: Fractal Geometry of the Koch curve

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian/English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2019.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: (4, 49, 17, 2, 39, 0, 0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Fractal geometry

SD

Key words: Fractal, fractal dimension, Koch curve, Iterated function systems, IFS, L-systems, Thue-Morse word

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

In this master thesis we are exploring fractal geometry of the Koch curve and some of the techniques we can use to generate the curve. Thesis itself is divided into four chapters, where in the first one we have given definitions of some basic terms in fractal geometry, such as fractal dimension, and the geometric construction of the Koch curve alongside with some of its basic properties. Furthermore, three methods for calculating fractal dimension have been represented and the dimension of the Koch curve has been calculated using the methods defined. The next three chapters are dedicated to generating the Koch curve using the Iterated function systems, L-systems and the Thue-Morse word. Each of these chapters consists of two sections - introductory one on the related topic and the one demonstrating the application of the theory defined in order to generate the Koch curve.

Accepted by the Scientific Board on: 31.1.2019.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Rozalia Madarász Szilágyi, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Milica Žigić, Assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Member: Dr. Sanja Konjik, Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Jelena Stojanov, Assistant professor, Technical Faculty Mihajlo Pupin, University of Novi Sad