UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Aleksandar Prokić

Karakterizacija problema zadovoljenja uslova širine 1

-master rad-

Mentor: dr Petar Marković

Novi Sad, 2017.

Sadržaj

Glava 1

Problem zadovoljenja uslova

Razni kombinatorni problemi se mogu izraziti pomoću problema zadovoljenja uslova (CSP). Kod ove teorije cilj je naći preslikavanje skupa promenljivih u dati skup tako da zadovoljava određene uslove. U veštačkoj inteligenciji ovaj pristup je prihvaćen kao pogodan i efikasan način za modeliranje i rešavanje mnogih problema iz realnog života kao što su planiranje, obrada slike, analiza programskog jezika i razumevanje prirodnih jezika. CSP se koristi u bazama podataka, u teoriji složenosti, kao i u kombinatornoj optimizaciji. Još jedna praktična strana je ta što je uslovno programiranje, tj. rešavanje konkretnih problema koji su predstavljeni kao instanca CSP, oblast koja se brzo razvija sa svojim međunarodnim časopisima i konferencijama.

Jedan od lakših problema zadovoljenja uslova je problem osam dama: treba postaviti osam dama na šahovsku tablu tako da se nikoje dve dame ne napadaju. Pa možemo pretpostaviti da su horizontalni redovi table promenljive, a vertikalni redovi su moguće vrednosti, tako dodeljivanje vrednosti promenljivama predstavlja postavljanje dame na odgovarajuće polje table. Činjenica da se dame ne smeju napadati može biti predstavljenja kao uslov C_{ij}, po jedan za svaki par promenljivih i, j, gde uslov C_{ij} dozvoljava jedino parove (k, l) takve da dama na poziciji (i, k) ne napada damu na poziciji (j, l). Lako je videti da svako rešenje ovog problema odgovara traženom postavljanju osam dama.

Sada ćemo dati formalnu definiciju problema zadovoljenja uslova.

Definicija 1.0.1 *Instancu problema zadovoljenja uslova čine:*

1. *konačan skup promenljivih, V. Zbog jednostavnosti pretpostavimo da je $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$;*

2. *konačan domen vrednosti, D;*
3. *konačan skup uslova* $\{C_1, ..., C_q\}$*; svaki uslov* C_i $(1 \leq i \leq q)$ *je par* (s_i, R_i) *gde:*
   - s_i *je torka promenljivih dužine* k_i*, zvana polje uslova;*
   - R_i *je* k_i*-arna relacija nad D, zvana relacija uslova.*

Za svaki uslov (s_i, R_i), torke u R_i predstavljaju dozvoljene vrednosti za promenljive iz s_i. Dužina s_i i torki iz R_i se naziva arnost uslova.

Rešenje problema zadovoljenja uslova je funkcija koja preslikava promenljive u domen tako da slika svakog polja ograničenja je element odgovarajuće relacije ograničenja.

Sada ćemo dati neke primere poznatih problema i njihovu reprezentaciju kao probleme zadovoljenja uslova.

Primer 1.0.1 Najočigledniji algebarski primer CSP-a je problem rešavanja sistema jednačina: da li dati sistem linearnih jednačina nad konačnim poljem F ima rešenje? Jasno, u ovom primeru svaka pojedinačna jednačina je uslov, gde promenljive iz jednačine formiraju polje ograničenja i skup svih torki koje su rešenja ove jednačine predstavljaju relaciju ograničenja.

Primer 1.0.2 U iskaznom računu 3-SAT problem je određen sa iskaznom formulom koju čine klauzule, a svaku klauzulu čini disjunkcija tri literala (promenljivih ili negacija promenljivih), i postavlja se pitanje da li se promenljivama mogu dodeliti vrednosti tako da formula bude tačna.

Pretpostavimo da je $\Phi = \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$ jedna takva formula, gde su ϕ_i klauzule. Pitanje zadovoljenja formule Φ možemo izraziti kao CSP $(V, \{0, 1\}, \mathcal{C})$, gde je V skup promenljivih koje se pojavljuju u formuli i $\mathcal{C}$ skup uslova $\{(s_1, \rho_1), .., (s_n, \rho_n)\}$, gde je svaki uslov (s_k, ρ_k) konstruisan na sledeći način: s_k je lista promenljivih koje se pojavljuju u ϕ_k i ρ_k se sastoji od svih torki za koje je formula ϕ_k tačna. Stoga, svaki 3-SAT problem se može predstaviti kao CSP.

Prethodni primer nam sugeriše da se svaki CSP može predstaviti u logičkoj formi. Zaista, koristeći standardno predstavljanje relacija i predikata, CSP možemo zapisati kao formulu prvog reda $\rho_1(s_1) \wedge ... \wedge \rho_q(s_q)$ gde je ρ_i $(1 \leq i \leq q)$ predikat nad D i $\rho_i(s_i)$ znači da je ρ tačno za torku s_i. Onda se postavlja pitanje da li je data formula zadovoljiva. Ova forma se obično koristi u bazama podataka.

Primer 1.0.3 Relacijska baza podataka je konačan skup tabela. Tabele čine šeme i instance, gde je šema konačan skup osobina, a svaka osobina ima svoj skup mogućih vrednosti, označen kao domen. Instanca je konačan skup redova, gde svaki red predstavlja preslikavanje osobine šeme u domen te osobine.

Standardan problem kod relacijskih baza podataka je problem konjuktivnog upita. Kod ovog problema se pitamo da li konjuktivni upit u relacijskoj bazi podataka, odnosno upit u obliku $\rho_1 \wedge ... \wedge \rho_n$ gde su $\rho_1, .., \rho_n$ atomične formule, ima rešenje.

Konjuktivni upit nad relacijskom bazom podataka odgovara problemu zadovoljenja uslova tako što: osobine zamenimo sa promenljivama, tabele sa uslovima, šeme sa poljima uslova, instance sa relacijama uslova i vrste sa torkama. Stoga je konjuktivni upit ekvivalentan sa CSP primerom kod koga su promenljive iste kao i promenljive upita. Za svaku atomičnu formulu ρ_i u upitu, postoji uslov C takav da je polje uslova od C lista promenljivih od ρ_i i relacija uslova od C je skup modela za ρ_i.

Još jedna preformulacija problema zadovoljenja uslova je problem homomorfizma: ovde se postavlja pitanje da li postoji homomorfizam između dve relacijske strukture. Neka je $\tau = (R_1, ..., R_k)$ lista relacijskih imena sa određenom arnosti za svako relacijsko ime. Neka su $\mathcal{A} = (A; R_1^{\mathcal{A}}, ..., R_k^{\mathcal{A}})$ i $\mathcal{B} = (B; R_1^{\mathcal{B}}, ..., R_k^{\mathcal{B}})$ relacijske strukture tipa τ. Preslikavanje $h : A \to B$ se naziva homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako je za sve $1 \leq i \leq k$, $(h(a_1), ..., h(a_m)) \in R_i^{\mathcal{B}}$ kad god je $(a_1, ..., a_m) \in R_i^{\mathcal{A}}$. U tom slučaju pišemo $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Dobijamo da je problem homomorfizma isto što i CSP čim zamislimo elemente iz A kao promenljive, elemente iz B kao vrednosti, torke iz relacija iz $\mathcal{A}$ kao polje uslova i relacije iz $\mathcal{B}$ kao relacije uslova. Tada je jasno da je rešenje ovog CSP-a tačno homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.

Sada ćemo dati dobro poznate kombinatorne probleme i njihovu reprezentaciju kao probleme zadovoljenja uslova.

Primer 1.0.4 Za svaki prirodan broj k, instancu problema k-obojivosti čini graf G. Postavlja se pitanje da li čvorovi grafa G mogu da se oboje sa k boja tako da susedni čvorovi budu obojeni različitim bojama.

Sledi da se svako bojenje grafa može predstaviti kao CSP gde je $\mathcal{A} = G$ i $\mathcal{B}$ je kompletan graf sa k čvorova, K_k.

Primer 1.0.5 Problem kompletnog podgrafa čine graf G i prirodan broj k. Pitanje je da li G ima podgraf izomorfan sa kompletnim grafom K_k,

Sledi da se svaki problem kompletnog podgrafa može predstaviti kao problem homomorfizma iz K_k u graf G (koji je ulaz). Ovo nije CSP, jer je fiksiran domen homomorfizma dok je u CSP-u fiksiran kodomen.

Međutim, možemo predstaviti K_k kao egzistencijalno zatvorenu logičku formulu ϕ_k u kojoj je deo pod kvantifikatorima konjunkcija relacija između proizvoljne dve različite promenljive i između nijedne dve iste. Inače, ovakve formule se nazivaju primitivno-pozitivne formule. Za tu fiksiranu formulu ϕ_k, pitanje da li je graf G (bez petlji) zadovoljava je ekvivalentno pitanju da li G ima podgraf izomorfan sa kompletnim grafom K_k, pa je ovo bar problem *provere modela* (model checking), šire klase problema nego CSP u kojima se pitamo da li model zadovoljava formulu.

Primer 1.0.6 Problem Hamiltonovog grafa čini graf $G = (V; E)$. Pitanje je da li za graf G postoji Hamiltonova kontura, odnosno kontura koja sadrži sve čvorove grafa G. Problem Hamiltonovog grafa se može predstaviti kao problem homomorfizma za $\mathcal{A} = (V; C_V, \neq_V)$ i $\mathcal{B} = (V; E, \neq_V)$, gde $\neq_V$ označava relaciju nejednakosti na V i C_V je proizvoljan cikličan graf sa čvorovima iz V. Ponovo nije u pitanju CSP problem, ali jeste problem provere modela.

Primer 1.0.7 Problem izomorfizma grafova bez petlji $G = (V; E)$ i $G' = (V'; E')$, tako da je $|V| = |V'|$. Pitanje je da li postoji bijekcija između V i V' tako da su čvorovi iz G susedni ako i samo ako su susedne njihove slike u G'. Sledi da se svaki problem izomorfizma grafova može predstaviti kao problem homomorfizma grafova za $\mathcal{A} = (V; E, \bar{E})$ i $\mathcal{B} = (V'; E', \bar{E}')$, gde $\bar{E}$ označava skup svih parova iz $\neq_V$ koji nisu u E. Ponovo je u pitanju problem provere modela koji nije CSP.

Kao i kod drugih računskih problema, nije samo standardna verzija CSP-a zanimljiva. Postoji mnogo zanimljivih problema koji se proučavaju, kao što su: koliko dati problem zadovoljenja uslova ima rešenja, nalaženje rešenja minimalne težine u odnosu na neku unapred zadanu težinsku funkciju, da li je za data dva problema sa istim skupom promenljivih svako minimalno rešenje prvog takođe rešenje drugog problema, da li dva data problema imaju isti skup rešenja, nalaženje svih rešenja datog problema...

Glava 2

Problemi širine 1

2.1 Uvod

Pošto rešavanje problema zadovoljenja uslova može biti NP-kompletno, postavlja se prirodno i važno pitanje: kakve restrikcije opšteg problema nam osiguravaju polinomnu složenost.

U ovom radu ćemo proučavati karakterizaciju složenosti rešenja problema zadovoljenja uslova u kome svako ograničenje pripada fiksnom skupu zvanom baza. Feder i Vardi su definisali ovu klasu problema zadovoljenja uslova, dok pristup koji su započeli Jeavons, Cohen i Gyssens u [8, 9] se oslanja na činjenicu da polinomna složenost problema zadovoljenja uslova sa određenim relacijama zavisi od algebarskih osobina skupa relacija koje se javljaju u problemu. Ovaj pristup nas dovodi do identifikacije nekoliko klasa problema zadovoljenja uslova polinomne složenosti. Ove godine su najavljena dva rešenja opšte karakterizacije problema zadovoljenja uslova polinomne složenosti ([5] i [22]) i ta karakterizacija je data postojanjem jedne kompatibilne algebarske operacije.

Metode lokalne konzistencije su se intezivno proučavale kao osnovni alat za rešavanje problema zadovoljenja uslova. Ukratko, osnovna ideja kod metoda lokalne konzistencije je sledeća: Kad se može naći nekonzistentan par uslova onda se svakom može smanjiti relacija uslova tako da su novi uslovi međusobno konzistentni. Ovo daje ekvivalentan problem jer izbrisane torke svakako ne pripadaju rešenju. Međutim, vremenska složenost ovog postupka može biti eksponencijalna ako nekonzistenciju moramo detektovati projekcijom na ceo presek polja uslova ili neki njegov veliki podskup. Umesto toga, mi projektujemo uslove na mali podskup preseka polja uslova (veličine manje od neke unapred zadate konstante) i tražimo nekonzistencije.

Ponekad je moguće odlučiti egzistenciju rešenja problema zadovoljenja uslova proveravanjem konzistencije svih podproblema do odgovarajuće veličine. Pošto postoje problemi koji ne mogu biti rešeni lokalno konzistentnim metodama, ostaje veliki deo posla da bi izveli uslove koji garantuju da problem može biti rešen lokalno konzistentnom metodom. Taj posao je završen u radovima [3] i kasnije rafiniran u [2] i dobijeno je da je dovoljno gledati restrikcije na dvoelementne skupove koordinata, ako ikakva lokalna konzistencija radi. Specijalan slučaj kad je dovoljno gledati samo projekcije na jednu koordinatu je glavna tema ovog rada.

U ovom poglavlju posmatraćemo familiju lokalno konzistentnih metoda zvanih (j, k)-konzistentne, dobijenih od pojma ograničene širine Datalog programa. Za klasu problema rešivih pomoću (j, k)-konzistencije kažemo da su problemi širine (j, k). Pitanje da li problem zadovoljenja uslova ima širinu (j, k) za $k > j \geq 2$ je razrešeno u [2], uz korišćenje neke od operacija koje karakterišu algebarski tu osobinu, kao one pronađene u radovima [18], [17], [4] i [14].

Zanimaće nas preostali slučaj, dakle $(1, k)$-konzistencija. Klasa problema koja se može rešiti primenom $(1, k)$-konzistencije za neko fiksno k se naziva klasa širine 1. Ova klasa sadrži neke poznate familije polinomne složenosti kao što su Horn, problemi konstante i problemi kompatibilni sa polumrežnom operacijom. Glavni rezultat ovog poglavlja je karakterizacija problema širine 1 pomoću kompatibilnih operacija. Predstavićemo dovoljan algebarski uslov za skup relacija takav da bilo koji problem zadovoljenja koji za bazu ima taj skup relacija može biti rešen (u polinomnom vremenu) koristeći $(1, k)$-konzistenciju za neko k. Štaviše, pokazaćemo da je taj uslov neophodan.

Sa ovom novom karakterizacijom podsetićemo se već poznatih familija polinomne složenosti, kao što su problem konstante i problemi kompatibilni sa polumrežom, videćemo da se uklapaju u zajedničku šemu, odnosno, pokazaćemo da su to posebni slučajevi problema širine 1. Štaviše, izvešćemo novu familiju zvanu CSCI (Constant Semiprojection Commutative Idempotent) koristeći čisto algebarske argumente.

Motivacija za ove rezultate je došla iz alternativne karakterizacije problema širine 1 Federa i Vardija [15]. U [15] se identifikuju tri glavne familije polinomne složenosti, slične sa podgrupama, strogo ograničene širine i problemi širine 1 koristeći pojmove iz Database teorije (Datalog programa) i teorije grupa. Ove tri klase uključuju sve prethodno poznate probleme izračunljive u polinomnom vremenu. U [7], familija problema striktno ograničene širine je okarakterisana pomoću kompatibilnih operacija.

2.2 Preliminarni rezultati i definicije

2.2.1 Kompatibilnost operacija

Kao što smo rekli glavni rezultat ovog poglavlja je definisanje svih mogućih restrikcija nad ograničenjima da bi osigurali širinu 1. Glavni deo rada je proučavanje skupa problema definisanog na nekoj fiksnoj bazi (skupu relacija) na fiksiranom nepraznom konačnom domenu i složenosti problema zadovoljenja na tom skupu relacija.

Definicija 2.2.1 *Za svaki skup relacija Γ, C_Γ je problem definisan sa:*

1. *Data je instanca problema zadovoljenja uslova $\mathcal{P}$, u kome su sve relacije ograničenja elementi od Γ.*
2. *Pitanje: Da li ulazno $\mathcal{P}$ ima rešenje?*

Svaka operacija definisana na elementima skupa D se može proširiti do operacije na n-torkama elemenata D (za bilo koje n) računajući operaciju komponentu po komponentu:

Definicija 2.2.2 *Neka je $f : D^k \to D$ operacija arnosti k nad D. Za svaku kolekciju n-arnih torki $t_1, t_2, ..., t_k \in D^n$, definišemo torku $f(t_1, ..., t_k)$ na sledeći način:*

$$f(t_1, ..., t_k) = (f(t_1[1], ..., t_k[1]), f(t_1[2], ..., t_k[2], f(t_1[n], ..., t_k[n]).$$

Koristeći ovu definiciju, sada ćemo definisati kompatibilnost operacija i relacija.

Definicija 2.2.3 *Neka je R relacija nad domenom D, neka je $f : D^k \to D$ operacija arnosti k nad D. Kažemo da je R kompatibilna sa f (f je kompatibilna sa R ili f je polimorfizam od R) ako za sve $t_1, t_2, ..., t_k \in R$,*

$$f(t_1, ..., t_k) \in R.$$

Kažemo da je operacija f kompatibilna sa bazom Γ ako je f kompatibilna sa svakom relacijom iz Γ. Sledeća lema nam govori da osobina biti kompatibilan sa operacijom je očuvavanje neke operacije nad relacijama.

Lema 2.2.1 *Neka su R i R_1 n-arne relacije nad domenom D i neka je R_2 m-arna relacija nad domenom D. Neka su sve tri relacije R, R_1 i R_2 kompatibilne sa nekom operacijom f. Sledeće relacije su takođe kompatibilne sa f.*

1. *Dekartov proizvod, $R_1 \times R_2$ definisan da bude $(n+m)$-arna relacija*

$$R_1 \times R_2 = \{(t[1], t[2], ..., t[n+m]) \mid (t[1], t[2], ..., t[n]) \in R_1 \wedge \\ (t[n+1], t[n+2], ..., t[n+m]) \in R_2\}$$

2. *Jednakosna selekcija $\sigma_{i=j}(R)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ definisana da bude n-arna relacija*

$$\sigma_{i=j}(R) = \{t \in R | t[i] = t[j]\}$$

3. *Projekcija $\pi_{i_1,...,i_k}(R)$ gde je $(i_1, ..., i_k)$ lista indeksa izabranih iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$, definisana da bude relacija arnosti k*

$$\pi_{i_1,...,i_k}(R) = \{(t[i_1], ..., t[i_k]) | t \in R\}$$

Dokaz. Sledi direktno iz definicije.

Skup svih relacija koje se mogu dobiti od datog skupa relacija Γ, koristeći Dekartov proizvod, jednakosnu selekciju i projekciju označićemo sa Γ^+. Stoga svaka operacija kompatibilna sa Γ je kompatibilna sa Γ^+ takođe.

S druge strane, osobina biti kompatibilan sa nekom operacijom se očuvava pomoću nekih operacija na funkcijama.

Lema 2.2.2 *Neka je $g : D^m \to D$ m-arna funkcija i neka je $f_1, f_2, ..., f_m : D^n \to D$ n-arna funkcija. Ako su $g, f_1, f_2, ..., f_m$ kompatibilne sa R, za neku relaciju R, onda su sledeće funkcije takođe kompatibilne sa R:*

1. *Kompozicija $g(f_1, f_2, ..., f_m)$ definisana kao n-arna operacija*

$$g(f_1, f_2, ..., f_m)(x_1, ..., x_n) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

2. *Za svako $j \leq k$, projekcija $proj_{j,k}$ definisana kao operacija arnosti k*

$$proj_{j,k}(x_1, ..., x_k) = x_j$$

Dokaz. Sledi iz definicje.

Svaki skup operacija zatvoren za kompozicije i koji sadrži sve operacije projekcija se naziva klon. U [16] je ustanovljeno da složenost C_Γ određena skupom kompatibilnih operacija sa Γ. Kažemo da operacija f garantuje polinomnu složenost ako je za svaku bazu Γ kompatibilnu sa f, klasa C_Γ je polinomne složenosti. Na osnovu ovoga pristupa, neke funkcije koje garantuju polinomnu složenost su pronađene, kao što su blizu-jednoglasne operacije, koset-generatorne operacije, polumrežne operacije, operacije konstante, Maljcevljeve operacije, gmm operacije, "edge" operacije, Jonsonove operacije i tako dalje. Konačno, najavljena su dva dokaza koji tvrde da slabe blizu-jednoglasne operacije garantuju polinomnu složenost (već pomenuti preprinti [5] i [22]), pa kako odsustvo kompatibilnih slabih blizu-jednoglasnih operacija garantuje NP-kompletnu složenost (na osnovu [6]), ti radovi tvrde da su kompletirali klasifikaciju složenosti problema zadovoljenja uslova.

2.2.2 Lokalna konzistencija

Metode lokalne konzistencije su metode odbijanja, slična je metodi rezolucije za iskazne formule u konjuktivnoj normalnoj formi. Lokalna konzistencija se može definisati na različite načine, ali svi se oni uklapaju u istu šemu: metod lokalne konzistencije uzima konkretno $\mathcal{P}$ i dodaje sve uslove koji slede iz $\mathcal{P}$ do određene arnosti. Uslov $(s, \emptyset)$ sa praznom relacijom uslova se naziva prazno ograničenje. Ako se tokom procesa primene konzistencije doda neko prazno ograničenje, onda očigledno $\mathcal{P}$ nema rešenje. Nažalost, obrnuto nije uvek tačno, odnosno odsustvo praznog ograničenja ne implicira egzistenciju rešenja. Tako da je interesantna tema istraživanja pronaći pod kojim uslovima nad skupom uslova relacija Γ, određen nivo lokalne konzistencije (uz odsustvo praznih ograničenja) garantuje egzistenciju rešenja.

Definicija 2.2.4 *Neka je $\mathcal{P}$ problem zadovoljenja uslova sa skupom promenljivih V, domenom D i skupom uslova C. Za svaki podskup W od V restrikcija od $\mathcal{P}$ na W, označena sa $\mathcal{P}^*_W$ je problem zadovoljenja sa skupom promenljivih W i domenom D, gde su ograničenja dobijena od ograničenja iz $\mathcal{P}$ eliminišući sva ograničenja čije polje ograničenja nije celo sadržano u W. Tako da, ograničenje (s, R) je u $\mathcal{P}^*_W$ ako i samo ako (s, R) je u $\mathcal{P}$ i svaki element torke s je u W.*

Definicija 2.2.5 *Problem zadovoljenja uslova $\mathcal{P}$ sa skupom promenljivih V je (j, k)-konzistentan $(0 \leq j \leq k)$ ako za sve skupove promenljivih W, W',* *takvih da $W \subseteq W' \subseteq V$ i sadrže najviše j i k promenljivih respektivno, svako rešenje za $\mathcal{P}^*_W$ može biti prošireno do rešenja na $\mathcal{P}^*_{W'}$.*

Neformalno, problem je (j,k)-konzistentan ako svako parcijalno rešenje na bilo kom skupu sa najviše j promenljivih može da se proširi do parcijalnog rešenja na nekom nadskupu koji sadrži najviše k promenljivih.

Pošto se u literaturi pojavljuje nekoliko sličnih definicija konzistencije verujemo da je prikladno da pomenemo i njih. Neformalno možemo reći da su različite definicije konzistencije dobijene na osnovu načina kako definišu podprobleme. Grubo, pojmovi konzistencije mogu biti podeljeni na dva glavna tipa: (1) konzistencija bazirana na promenljivama i (2) konzistencija bazirana na relacijama.

Kod konzistencije bazirane na promenljivama podproblem je određen kao podproblem koji sadrži sve restrikcije "koje se odnose" na skup promenljivih. Konzistencija bazirana na promenljivama je privukla mnogo više pažnje od bazirane na relacijama. Postoje različiti pojmovi konzistencije u zavisnosti kako je "odnositi se" definisano. Često, podproblem "odnositi se" na skup promenljivih W je definisan kao podproblem koji sadrži sva ograničenja sa poljem striktno sadržanim u W, kao što je i definisano u ovom radu. Ovaj pojam konzistencije je blizak pojmu definisanom ovde. Tačnije, k-konzistencija u [9] odgovara tačno $(k-1,k)$-konzistenciji, kako je ovde definisana. U nekim drugim slučajevima, problem "odnositi se" na skup promenljivih W je definisano kao problem koji sadrži projekcije svih ograničenja na W. Obe definicije su ekvivalentne za potrebe ovog poglavlja ako je k dovoljno veliko (što nećemo ovde dokazati). Odabrali smo ovu definiciju konzistencije da bi olakšali dokaze. Konačno, konzistencija bazirane na relacijama je komplikovaniji pojam koji je zastareo u svom originalnom obliku, ali jedan hibridni pojam koji ujedinjuje relacijsku konzistentnost i konzistentnost po promenljivama je onaj koji se u [2] koristi za punu karakterizaciju ograničene širine, pa je i najznačajniji. No mi se držimo (j,k)-konzistencije po promenljivama koju smo definisali jer je lakša.

Za dat problem zadovoljenja uslova $\mathcal{P}$, postoji neki problem $\mathcal{P}'$ takav da je (1) Svako ograničenje iz $\mathcal{P}$ je i u $\mathcal{P}'$, (2) $\mathcal{P}'$ je (j,k)-konzistentno i (3) $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ imaju isti skup rešenja. Problem $\mathcal{P}'$ se ponaša kao (j,k)-konzistentan problem povezan sa $\mathcal{P}$. CSP literatura sadrži neke efikasne metode za izvršavanje određenih nivoa konzistencije. Ovde ćemo predstaviti algoritam, zvan $Cons_{(j,k)}$ (j,k su fiksirani), koji sprovodi (j,k)-konzistenciju.

Algoritam $Cons_{(j,k)}$
Ulaz: $\mathcal{P}$
$\mathcal{P}' = \mathcal{P}$
ponavljati
za svaki podskup W takav da je $|W| \leq j$
za svaki nadskup W' od W takav da je $|W'| \leq k$
za svaku torku $s = (x_1, ..., x_i)$ sa promenljivama iz W
neka je R projekcija od $\mathcal{P}'^*_{W'}$ na s, odnosno
$R = \{(\mu(x_1), ..., \mu(x_i)) : \mu$ je rešenje od $\mathcal{P}'^*_{W'}\}$
(R sadrži slike od s koje se mogu proširiti do rešenja na $\mathcal{P}'^*_{W'}$)
ako (s, R) nije u $\mathcal{P}'$ onda dodajemo (s, R) u $\mathcal{P}'$.
sve dok ni jedno ograničenje nije dodato.
vratimo $\mathcal{P}'$.

U suštini, algoritam traži podskupove $W \subseteq W'$ promenljivih koji ne zadovoljavaju uslove (j, k)-konzistencije i dodaje odgovarajuća ograničenja sve do trenutka kada problem $\mathcal{P}'$ zadovoljava uslove (j, k)-konzistencije i ni jedno ograničenje nije dodato. Za fiksne j, k algoritam $Cons_{(j,k)}$ radi u polinomnom vremenu u odnosu na veličinu zadatog problema $\mathcal{P}$.

Primetimo da su ograničenja dodata u algoritmu $Cons_{(j,k)}$ minimalna u smislu da za sve (j, k)-konzistentne probleme $\mathcal{P}'$ pridružene $\mathcal{P}$ i svaku promenljivu x_i $(1 \leq i \leq n)$, svako rešenje za $\mathcal{P}'^*_{x_i}$ je rešenje za $(Cons_{(j,k)}(\mathcal{P}))^*_{x_i}$.

Štaviše, za svako ograničenje (s, R) dodato u algoritmu, relacija R je projekcija podproblema $\mathcal{P}'^*_{W'}$ na s. Pošto sve relacije vezane za problem zajedno sa uslovljenim relacijama iz Γ mogu biti dobijene kao niz Dekartovog proizvoda i jednakosne selekcije relacija iz Γ. Imamo da ako $\mathcal{P} \in C_\Gamma$, onda $\mathcal{P}' \in C_{\Gamma+}$. Kako skupova W i W' ima polinomno mnogo, a i rešavanje restrikovanog problema na W' se može izvršiti u polinomnom vremenu, sledi da se i do problema $\mathcal{P}'$ može doći u polinomnom vremenu.

Definicija 2.2.6 *Za instancu problema zadovoljenja uslova $\mathcal{P}$ kažemo da ima širinu (j, k) ako: $\mathcal{P}$ ima rešenje ako i samo ako svaka (j, k)-konzistentna instanca problema pridružena $\mathcal{P}$ ne sadrži prazno ograničenje $(s, \emptyset)$. Slično, skup relacija Γ nad D ima širinu (j, k) ako svaka instanca problema zadovoljenja uslova $\mathcal{P}$ ima širinu (j, k). Osim toga kaže se da Γ ima širinu j ako ima širinu (j, k) za neko fiksno k.*

Stoga, skup relacija Γ ima širinu (j,k) ako i samo ako je svaki problem u C_Γ rešiv primenom (j,k)-konzistencije (npr. koristeći prethodni algoritam). Posledica toga je da je svaki problem u C_Γ rešiv u polinomnom vremenu, pošto je za fiksne j i k, moguće izvršiti (j,k)-konzistenciju u polinomnom vremenu u odnosu na veličinu problema.

Feder i Vardi [15] su dali alternativnu karakterizaciju ovih pojmova u terminima Datalog programa. Datalog programi su daleko izvan ovog rada. Ali bez obzira, spomenućemo da je pojam širine ovde definisan ekvivalentan pojmu širine definisanom u [15].

2.3 Problem širine 1

Sada ćemo proučavati klasu problema koja može biti rešena primenom $(1,k)$-konzistencije za neko fiksno k, takođe zvani problemi širine 1. Pojam $(1,k)$-konzistencije je prirodno uopštenje konzistencije po lukovima za nebinarne probleme.

U ovom poglavlju ćemo dokazati da je familija sa bazom širine 1 potpuno određena u terminima zatvorenih funkcija. Konkretno, videćemo da za svaku bazu Γ, C_Γ je rešivo primenom $(1,k)$-konzistencije za neko $k \geq 1$ ako i samo ako su zadovoljeni neki uslovi nad skupom zatvorenih funkcija. Prvo ćemo se upoznati sa pojmom skupovne funkcije.

Skupovna funkcija je svaka funkcija $f : \mathcal{P}(D) \setminus \{\emptyset\} \to D$ gde je D proizvoljan skup i $\mathcal{P}(D)$ je skup svih podskupova skupa D.

Za svaku skupovnu funkciju f postoji familija funkcija pridruženih f $\{f_i : i = 1, 2, ...\}$, gde je za svako i, $f_i : D^i \to D$ dato sa

$$f_i(x_1, ..., x_i) = f(\{x_1, ..., x_i\}).$$

Neka je f skupovna funkcija nad D i neka je R neka relacija nad D, kažemo da su f i R kompatibilne ako je familija funkcija pridruženih f kompatibilna sa R (definicija 2.2.3).

Teorema 2.3.1 *Neka je Γ konačan skup relacija nad D. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(*a*) *Skup Γ je širine 1;*

(*b*) *Γ je kompatibilan sa nekom skupovnom funkcijom.*

Da bismo dokazali teoremu 3.1.1 potrebno je da definišemo neke pojmove i dokažemo pomoćna tvrđenja.

Definicija 2.3.1 *Za dat skup relacija Γ, posmatrajmo problem zadovoljenja uslova $\mathcal{C}(\Gamma)$ definisan sa:*
Promenljive u $\mathcal{C}(\Gamma)$ su neprazni podskupovi A od D. Za relaciju R u Γ arnosti k, postoji uslov $((A_1, A_2, ..., A_k), R$ u $\mathcal{C}(\Gamma)$, A_i ne moraju biti disjunktni, ako za sve $1 \leq i \leq k$ i sve a_i iz A_i postoje elementi a_j u preostalim A_j takvi da $(a_1, a_2, ..., a_k) \in R$.

Postoji alternativna karakterizacija uslova iz $\mathcal{C}(\Gamma)$: lako je proveriti da je uslov $R(A_1, ..., A_k)$ u $\mathcal{C}(\Gamma)$ ako i samo ako postoje neke torke $t_1, ..., t_m$ u R takvi da $\{t_1[l], t_2[l], ..., t_m[l]\} = A_l$ za sve $1 \leq l \leq k$.

Definicija 2.3.2 *Neka su date familija operacija $\mathcal{F}$ i familija relacija $\mathcal{R}$ na skupu A. Definišimo:*

$$Inv(\mathcal{F}) = \{r : (\exists n > 0) r \subseteq A^n \ i \ (\forall f \in \mathcal{F}) \ r \text{ je kompatibilno sa } f\}$$

$$Pol(\mathcal{R}) = \{f : (\exists n \geq 0) f : A^n \to A \ i \ (\forall r \in \mathcal{R}) \ f \text{ je kompatibilno sa } r\}$$

Teorema 2.3.2 *Neka je data familija operacija $\mathcal{F}$ na konačnom skupu A. Ako je familija $\mathcal{F}$ klon, odnosno sadrži sve projekcije i zatvorena je za kompoziciju, onda $Pol(Inv(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.*

Dokaz. Neka $f \in \mathcal{F}$. Tada je f kompatibilno sa svakom relacijom iz $Inv(\mathcal{F})$, pa je $f \in Pol(Inv(\mathcal{F}))$, odnosno $\mathcal{F} \subseteq Pol(Inv(\mathcal{F}))$. Ostaje samo da pokažemo da za svaku operaciju g arnosti m koja nije u $\mathcal{F}$ postoji relacija u $Inv(\mathcal{F})$ takva da nije kompatibilna sa g. Neka je g operacija arnosti m na skupu A. Formirajmo matricu T dimenzije $|A|^m \times m$ čije su vrste baš sve m-torke sa elementima iz skupa A. Za svaku operaciju $f \in \mathcal{F}$ arnosti r i svaku matricu F dimenzije $|A|^m \times r$ sa kolonama uzetim iz T i elementima b_{ij} formiramo vektor kolone $f(F)$ veličine $|A|^m$, čiji su elementi $t_j = f(b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jr})$, za $1 \leq j \leq |A|^m$. Ako $f(F)$ nije kolona u T onda nalepimo tu kolonu na matricu T i dobijamo novu matricu T_1 dimenzije $|A|^m \times (m + 1)$. Na ovaj način možemo da pridružimo kolone matrici T sve dok ne dođemo do matrice T_0 sa $|A|^m$ vrsta takvih da za svaku operaciju f iz $\mathcal{F}$ i svaku matricu F sa kolonama iz T_0 vektor kolone $f(F)$ će biti u T_0. Indukcijom po rednom broju kolone u T_0 može se dokazati da je svaka kolona u T lista rezultata neke operacije iz $\mathcal{F}$ na sve m-torke iz T. Baza su prvih m kolona koje su projekcije, a kad god dodamo kolonu, tu smo primenili neku operaciju iz $\mathcal{F}$ na prethodno dobijene kolone. Ako je $g(T)$ kolona u T_0 onda g može biti dobijeno pomoću operacija iz $\mathcal{F}$, tako da možemo pretpostaviti da $g(T)$ nije u T_0. Od T_0 formiraćemo relaciju P_0 arnosti $|A|^m$ koja sadrži sve vrste iz T_0^T (transponovane matrice od T_0). Iz definicije sledi da je P_0 u $Inv(\mathcal{F})$ ali nije kompatibilno sa g. Sledi da je $\mathcal{F} = Pol(Inv(\mathcal{F}))$.

Definicija 2.3.3 *Kažemo da je familija relacija zatvorena ako sadrži unarnu relaciju A i ako je zatvorena za Dekartov proizvod, jednakosnu selekciju $\sigma_{i=j}$ i projekciju $\pi_{i_1,...,i_k}$.*

Lema 2.3.1 *Zatvorena familija relacija je zatvorena i za presek.*

Dokaz. Neka je data zatvorena familija relacija $\mathcal{R}$ i neka su $P, Q \in \mathcal{R}$ n-arne relacije. Tada je

$$P \cap Q = \pi_{1,...,n}(\sigma_{1=n+1}(\sigma_{2=n+2}(...\sigma_{n=2n}(P \times Q)...))).$$

■

Teorema 2.3.3 *Neka je data zatvorena familija relacija $\mathcal{R}$ na konačnom domenu. Tada je*

$$Inv(Pol(\mathcal{R})) = \mathcal{R}.$$

Dokaz. Teorema 8.4. u [1].

Teorema 2.3.4 *Neka je data familija relacija $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ je zatvorena ako i samo ako su sve relacije iz $\mathcal{R}$ definabilne pomoću primitivno pozitivnih formula (pp formula), odnosno pomoću formula*

$$(\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)(R_1(y_1^1, ..., y_{r_1}^1) \wedge ... \wedge R_k(y_1^k, ..., y_{r_k}^k)),$$

gde $y_1, ..., y_m \in \{y_1^1, ..., y_{r_1}^1, ..., y_1^k, ..., y_{r_k}^k\}$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je data pp formula $(\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)(R_1(y_1^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{r_k}^k))$. Tada je $R_1(y_1^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{r_k}^k)$ ekvivalentno sa $R(y_1^1,...,y_{r_1}^1,...,y_1^k,...,y_{r_k}^k)$, gde je R dobijeno Dekartovim proizvodom R_1, ..., R_k, ako se neke promenljive y_i^j ponavljaju možemo jednakosnom selekcijom dodati te uslove, dok kvantifikovanim promenljivama odgovara projekcija bez tih promenljivih.
($\Leftarrow$) Unarna relacija A je data pp formulom $A(x)$.

Neka su date dve relacije definabilne pomoću pp formula, i to $(\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)(R_1(y_1^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{r_k}^k))$ i $(\exists z_1)(\exists z_2)...(\exists z_n)$ $(Q_1(z_1^1,...,z_{t_1}^1)\wedge...\wedge Q_l(z_1^l,...,z_{t_l}^l))$. Pretpostavimo da je $\{y_1^1,...,y_{r_1}^1,...,y_1^k,...,y_{r_k}^k\}\cap\{z_1^1,...,z_{t_1}^1,...,z_1^l,...,z_{t_l}^l\}=\emptyset$, ako nije, onda možemo preimenovati promenljivo tako da to bude zadovoljeno. Tada je Dekartov proizvod dat formulom $((\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)$ $(R_1(y_1^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{r_k}^k)))\wedge((\exists z_1)(\exists z_2)...(\exists z_n)(Q_1(z_1^1,...,z_{t_1}^1)\wedge...\wedge Q_l(z_1^l,...,z_{t_l}^l)))$, što je ekvivalentno sa pp formulom $(\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)(\exists z_1)(\exists z_2)$ $...(\exists z_n)(R_1(y_1^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{r_k}^k)\wedge Q_1(z_1^1,...,z_{t_1}^1)\wedge...\wedge Q_l(z_1^l,...,z_{t_l}^l))$.

Jednakosna selekcija $\sigma_{x_i=x_j}$ relacije date pp formulom $(\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)$ $(R_1(y_1^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{r_k}^k))$ je data pp formulom $(\exists y_1)(\exists y_2)...(\exists y_m)$ $(R_1(y_1^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{r_k}^k)\wedge R_1(y_1^1,...,y_{i-1}^1,y_j^1,y_{i+1}^1,...,y_{j-1}^1,y_i^1,y_{j+1}^1,...,y_{r_1}^1)\wedge...\wedge R_k(y_1^k,...,y_{i-1}^k,y_j^k,y_{i+1}^k,...,y_{j-1}^k,y_i^k,y_{j+1}^k,...,y_{r_k}^k))$.

Projekcija π_i neke relacije odgovara pp formuli te relacije tako da su joj egzistencijalno kvantifikovane sve promenljive osim i-te, dok se $\pi_{i_1,...,i_k}$ može dobiti na sličan način, s tim da se proizvoljan redosled projekcija može dobiti permutovanjem slobodnih promenljivih.

$\blacksquare$

Definicija 2.3.4 *Neka je* $\mathbf{A}$ *algebra i* $S\subseteq A$. *Tada je*

$$Sg(X)=\bigcap\{B : X\subseteq B \text{ i } X \text{ je poduniverzum od } \mathcal{A}\}$$

poduniverzum generisan sa X.

Definicija 2.3.5 *Neka je* $\mathbf{A}$ *algebra i* $S\subseteq A$. *Definišemo sledeći skup*

$$E(S)=S\cup\{f(a_1,...,a_n) : f \text{ je } n\text{-arna operacija algebre } \mathcal{A}, \text{ za neko } n\geq 0, \text{ i } a_1,...,a_n\in S\}.$$

Za svako $n\geq 0$ *definišemo* $E^n(S)$ *na sledeći način*

$$E^0(S)=S$$
$$E^{n+1}(S)=E(E^n(S)).$$

Lema 2.3.2 *Neka je* $\mathbf{A}$ *algebra i* $S \subseteq A$. *Tada važi*

$$Sg(S) = \bigcup\{E^n(S) : n \geq 0\}.$$

Dokaz. ($\subseteq$) Kako je $S \subseteq \bigcup\{E^n(S) : n \geq 0\}$, dovoljno je pokazati da je $\bigcup\{E^n(S) : n \geq 0\}$ poduniverzum. Neka je f n-arna operacija algebre $\mathcal{A}$ i neka je t n-torka sa elementima iz $\bigcup\{E^n(S) : n \geq 0\}$. Kako je $E^0(S) \subseteq E^1(S) \subseteq ...$, sledi da je svaki element n-torke t iz $E^m(S)$, za neko dovoljno velimo m. Ali tada je $f(t) \in E^{m+1} \subseteq \bigcup\{E^n(S) : n \geq 0\}$.

($\supseteq$) Kako je $Sg(S)$ presek svih poduniverzuma koji sadrže S, dovoljno je pokazati da je, za svako $n \geq 0$, $E^n(S) \subseteq B$, gde je B poduniverzum koji sadrži S. Što se lako dokazuje indukcijom.

■

Lema 2.3.3 *Neka je* $S \subseteq A^n$. *Tada je*

$$\pi_i(Sg(S)) = Sg(\pi_i(S)).$$

Dokaz. ($\subseteq$) Kako je $\pi_i(Sg(S)) = \pi_i(\bigcup\{E^k(S) : k \geq 0\}) = \bigcup\{\pi_i(E^k(S)) : k \geq 0\}$, pokazaćemo indukcijom da važi $\pi_i(E^k(S)) \subseteq Sg(\pi_i(S))$, za sve $k \geq 0$. Za $k = 0$ imamo $\pi_i(E^0(S)) = \pi_i(S)$, što je podskup od $Sg(\pi_i(S))$.

Pretpostavimo da je $\pi_i(E^k(S)) \subseteq Sg(\pi_i(S))$. Tada je $\pi_i(E^{k+1}(S)) = \pi_i(E^k(S)) \cup \pi_i(\{f(t_1, ..., t_m) : f$ je m-arna operacija na A^n (pa i na A), za neko $m \geq 0$, i $t_1, ..., t_m \in E^k(S)\})$. Imamo da $proj_{i,n}(t_1), ..., proj_{i,n}(t_m) \in \pi_i(E^k(S)) \subseteq Sg(\pi_i(S))$, za sve $t_1, ..., t_m \in E^k(S))$. Pa $f(proj_{i,n}(t_1), ..., proj_{i,n}(t_m)) \in Sg(\pi_i(S))$, odnosno $\pi_i(E^{k+1}(S)) \subseteq Sg(\pi_i(S))$.

($\supseteq$) Slično kao i za prethodni slučaj, $Sg(\pi_i(S)) = \bigcup\{E^n(\pi_i(S)) : n \geq 0\}$. Pokazaćemo indukcijom da važi $E^k(\pi_i(S)) \subseteq \pi_i(Sg(S))$, za sve $k \geq 0$. Za $k = 0$ imamo $E^0(\pi_i(S)) = \pi_i(S)$, što je podskup od $\pi_i(Sg(S))$.

Pretpostavimo da je $E^k(\pi_i(S)) \subseteq \pi_i(Sg(S))$. Tada je $E^{k+1}(\pi_i(S)) = E^k(\pi_i(S)) \cup \{f(a_1, ..., a_m) : f$ je m-arna operacija na A, za neko $m \geq 0$, i $a_1, ..., a_m \in E^k(\pi_i(S))\}$. Odnosno, $a_1, ..., a_m \in \pi_i(Sg(S))$, pa postoje n-torke $t_1, ..., t_m \in Sg(S)$ takve da $proj_{i,n}(t_j) = a_j$, za $1 \leq j \leq m$. Tada $f(t_1, ..., t_m) \in Sg(S)$, odnosno $f(a_1, ..., a_m) \in \pi_i(Sg(S))$, za sve $a_1, ..., a_m \in E^k(\pi_i(S))$. Dobijamo $E^{k+1}(\pi_i(S)) \subseteq \pi_i(Sg(S))$.

■

Teorema 2.3.5 *Ako je skup relacija* Γ *širine* 1*, onda* $\mathcal{C}(\Gamma)$ *ima rešenje.*

Dokaz. Neka je Γ konačan skup relacija na skupu A i neka je data instanca problema $\mathcal{C}(\Gamma) = (V, A, C)$, gde je $V = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ i $C = \{((A_1, ..., A_k), R) | A_1, ..., A_k \in V, R \in \Gamma, ar(R) = k$ i postoje torke $t_1, ..., t_m \in R$ takve da $\pi_i(\{t_1, ..., t_m\}) = A_i$, $1 \leq i \leq k\}$.

Sada ćemo napraviti instancu $\mathcal{C}(\Gamma)'$ takvu da je: 1-konzistentna, za sve $((A_1, ..., A_k), R) \in C$ postoji jedinstven uslov u $\mathcal{C}(\Gamma)'$ takav da $R_{A_1,...,A_k} \subseteq R$, neprazna je i $R_{A_1,...,A_k}$ je pp definabilna od Γ.

Definišemo $R_{A_1,...,A_k} = R \cap (Sg(A_1) \times Sg(A_2) \times ... \times Sg(A_k))$. Dokažimo da je $\pi_i(R_{A_1,...,A_k}) = Sg(A_i)$, za sve $1 \leq j \leq k$. Smer $\subseteq$ je trivijalan, a na osnovu prethodne leme imamo $Sg(A_i) = Sq(\pi_i(\{t_1, ..., t_m\})) = \pi_i(Sg(\{t_1, ..., t_m\})) \subseteq \pi_i(R \cap (Sg(A_1) \times ... \times Sg(A_k))) = R_{A_1,...,A_k}$, čime smo dokazali tvrđenje. Kako je $Sg(A_i)$ definabilno pomoću pp formula dobijenih od relacija iz Γ, sledi da $Sg(A_i) \in Inv(Pol(\Gamma))$, a $Inv(Pol(\Gamma))$ je zatvoreno za Dekartov proizvod i presek, pa $R_{A_1,...,A_k} \in Inv(Pol(\Gamma))$. Kako smo dodali samo konačno mnogo relacija iz $Inv(Pol(\Gamma))$ i Γ ima širinu 1 sledi da i novi skup relacija Γ' ima širinu 1. Relacije $R_{A_1,...,A_k}$ su neprazne zato što su skupovi A_i bili neprazni. Kako je za svako $B \subseteq A$ $Sg(B)$ jednoznačno određeno, sledi $(1, l)$-konzistencija $\mathcal{C}(\Gamma)'$, gde je l konstanta izabrana da bude veća ili jednaka od svih arnosti relacija u Γ. Iz toga sledi da postoji rešenje instance $\mathcal{C}(\Gamma)'$. Kako je $R_{A_1,...A_k} \subseteq R$, sledi da je to rešenje i instance $\mathcal{C}(\Gamma)$.

■

Dokaz teoreme 2.3.1 $[(a) \Rightarrow (b)]$ Neka je h rešenje problema $\mathcal{C}(\Gamma)$ (egzistencija takvog rešenja je osigurana teoremom 2.3.5) i neka je f^h skupovna funkcija definisana sa:

$$f^h(A_i) = h(A_i).$$

Pokazaćemo da je f^h kompatibilna sa Γ: neka je m prirodan broj i $m > 1$, neka je R neka relacija arnosti k iz Γ i neka su $t_1, t_2, ..., t_m$ (ne nužno različite) torke u R. Neka su A_i $(1 \leq i \leq k)$ podskupovi od D takvi da:

$$A_i = \{t_l[i] : 1 \leq l \leq m\},\ 1 \leq i \leq k$$

Na osnovu konstrukcije $R(A_1, A_2, ..., A_k)$ se pojavljuje u $\mathcal{C}(\Gamma)$, pa ih h zadovoljava. Tada imamo

$$(h(A_1), h(A_2), ..., h(A_k)) = (f^h(A_1), f^h(A_2), ..., f^h(A_k)) = f^h_m(t_1, ..., t_m) \in R.$$

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Neka je Γ skup relacija nad D kompatibilan sa f. Neka je k maksimalna arnost relacija iz Γ. Pokazaćemo da je primena $(1,k)$-konzistencije dovoljna da se odluči zadovoljivost. Neka je $\mathcal{P}$ bilo koji problem u C_Γ i neka je $\mathcal{P}'$ problem dobijen primenom $(1,k)$-konzistencije na $\mathcal{P}$. Za svaku promenljivu x, označimo sa D_x skup vrednosti koje se mogu dodeliti promenljivoj x, odnosno skup rešenja problema $\mathcal{P}'$ restrikovano na x: $D_x = \mathcal{P}^*_{\{x\}}$.

Posmatrajmo vektor t koji svakoj promenljivoj x dodeljuje vrednost skupovne funkcije nad D_x, to je

$$t(x) = f(D_x).$$

Pokazaćemo da je t rešenje. Neka je $((x_1, x_2, ..., x_m), R)$ neko ograničenje u $\mathcal{P}$. Jasno, $D_{x_i} \subseteq \pi_i R$ $(1 \leq i \leq m)$. Posmatrajmo sada, podskup R' od R, dobijen tako da svaka promenljiva x koja se pojavljuje u polju ograničenja ima vrednost u D_x. Formalnije,

$$R' = R \cap (D_{x_1} \times ... \times D_{x_m}).$$

Kako je D_{x_i} dobijeno primenom $(1,k)$-konzistencije, imamo da je $D_{x_i} = \pi_i(R')$ $(1 \leq i \leq m)$. Neka su $t_1, t_2, ..., t_l$ torke u R'. Pošto je R kompatibilno sa f_l, imamo:

$$f_l(t_1, t_2, ..., t_l) = (f(D_{x_1}), f(D_{x_2}), ..., f(D_{x_m})) \in R.$$

Pa t zadovoljava R.

$\blacksquare$

Karakterizacija problema širine 1 pomoću kompatibilnih funkcija je teoretski interesantna ali nije potpuno zadovoljavajuća. Prvo, ako hoćemo da koristimo karakterizaciju da bi proverili da li data baza Γ ima širinu 1 onda moramo proveriti uslove kompatibilnosti za beskonačnu familiju operacija.

U stvari moguće je, za dato konačno Γ, da ograničimo arnost operacija koje posmatramo.

Teorema 2.3.6 *Neka je Γ konačan skup relacija nad D, neka je m maksimalan broj torki bilo koje relacije iz Γ i neka je f skupovna funkcija nad D. Ako je f_m kompatibilno sa Γ onda je i f kompatibilno sa Γ.*

Dokaz. Za svaku skupovnu funkciju f i svako $k > 0$, f_k pripada svakom klonu koji sadrži f_{k+1}. Posmatrajmo identitet:

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_k) = f_{k+1}(x_1, x_2, ..., x_k, x_k).$$

Taj identitet važi za sve skupovne funkcije zato što $\{x_1, x_2, ..., x_k, x_k\} = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Dakle, za sve $k < m$ važi da su f_k kompatibilne sa Γ.

Za slučaj $k > m$, neka je R neka relacija iz Γ, neka je $k > m$ i neka su $t_1, t_2, ..., t_k$ torke u R. Kako je $k > m$, neke torke se ponavljaju. Posmatrajmo podlistu od m torki $t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_m}$ iz kojih smo izbacili samo one koje se ponavljaju, odnosno takve da $\{t_j : 1 \leq i \leq k\} = \{t_{i_j} : 1 \leq j \leq m\}$. Na osnovu konstrukcije skupovnih funkcija imamo:

$$f_k(t_1, t_2, ..., t_k) = f_m(t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_m}) \in R.$$

Dakle, f_k je kompatibilna sa R, pa kako je R proizvoljna relacija u Γ, onda je f_k kompatibilna i sa Γ.

■

Bilo bi interesantno otarasiti se zavisnosti od broja torki, tj. da dokažemo da je baza kompatibilna sa skupovnim funkcijama proveravanjem jedino osobina zatvorenosti do neke fiksne arnosti (nezavisno od veličine domena i baze). To važi za dvoelementni slučaj, pošto je poznato da je svaki klon u na dvoelementnom skupu konačno generisan [20, 21] ali je netačno za veće domene. Sledi kontraprimer.

Primer 2.3.1 Neka je $D = \{0, 1, 2, ..., d\}$ domen veličine $|D| > 2$. Posmatrajmo skupovnu funkciju $f : \mathcal{P}(D) \setminus \emptyset \to D$ definisanu sa:

$$f(S) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } S = \{0, 1\} \\ 2, & \text{inače} \end{cases}$$

Za svako m, posmatrajmo m-arnu relaciju R_m koja sadrži sve torke takve da ili (1) tačno jedna komponenta te torke je 1 a preostalih $m-1$ su nule, ili (2) najmanje jedna komponenta torke je 2. Tvrdimo da je f_k kompatibilno sa R_m ako i samo ako je $k < m$. Ako $k < m$ i $t_1, \ldots, t_k \in R_m$, onda ili postoje i, j takvi da $t_i[j] = 2$ ili je za sve $1 \leq i \leq k$ tačno jedna komponenta torke t_i jednaka 1, a preostalih $m - 1$ su nule. U prvom slučaju $f_k(t_1, ..., t_k)[j] = 2$, pa $f_k(t_1, ..., t_k) \in R_m$. U drugom slučaju, kako $k < m$, mora da postoji prirodan broj $j \in [1, m]$ takav da j-ta komponenta $t_i[j] = 0$ za sve i. Ponovo, $f_k(t_1, ..., t_k)[j] = f_k(0, 0, ..., 0) = 2$, pa $f_k(t_1, ..., t_k) \in R_m$.

Sa druge strane, ako $k \geq m$, neka je za sve $i \leq m$, $t_i[i] = 1$ i $t_i[j] = 0$ ako $i \neq j$, dok za $k \geq i > m$ neka $t_i = t_m$. Tada $f_k(t_1, ..., t_k) = (0, 0, \ldots, 0) \notin R_m$.

Kao posledicu dobijamo da za svaku vrednost k postoji neka baza data sa $\Gamma_k = \{R_{k+1}\}$ takva da je f_k kompatibilno sa Γ_k ali f nije.

2.4 Primena kompatibinosti

Koristeći karakterizaciju problema širine 1 dokazanoj u teoremi 2.3.1 moguće je preformulisati neke već poznate klase problema polinomne složenosti i definisati neke nove. Od sada, kažemo da funkcija (ili skup funkcija) garantuje polinomnu složenost ako za svaku bazu Γ kompatibilnu sa njom, C_Γ je polinomne složenosti.

2.4.1 Konstantne operacije

Unarna funkcija f_1 koja preslikava svaki element u fiksni element $d \in D$ se naziva konstantna funkcija. Svaka relacija kompatibilna sa f_1 sadrži torku $(d, d, ..., d)$ i stoga operacija f_1 garantuje polinomnu složenost, odnosno za svako Γ kompatibilno sa f_1, C_Γ je polinomne složenosti.

Konstantne operacije su poseban slučaj problema širine 1. Pošto su klonovi zatvoreni za dodavanja nebitnih promenljivih, za sve $i > 0$, funkcija $f_i : D^i \to D$ data sa $f_i(x_1, ..., x_i) = f_1(x_1) = d$ pripada svakom klonu koji sadrži f_1. Kao posledicu dobijamo da je skup relacija Γ kompatibilan sa f_1 kompatibilan i sa skupovnom funkcijom $f : \mathcal{P}(D) \setminus \emptyset \to D$ datom sa $f(S) = d$.

2.4.2 Polumrežne operacije

Binarna operacija f se naziva polumrežom ako je asocijativna, komutativna i idempotentna. Klasa CSP problema kompatibilnih sa polumrežnim operacijama je rešena u polinomnom vremenu u [10].

Neka je f polumrežna operacija. Nije teško primetiti da je, kao posledica osobina polumreže, funkcija g data sa

$$g(\{x_1, x_2, ..., x_i\}) = f(x_1, f(x_2, ..., f(x_{i-1}, x_i)...))$$

dobro definisana skupovna funkcija. Za svako i, g_i se može dobiti kao niz kompozicija funkcije f. Stoga, svaka baza kompatibilna sa f je takođe kompatibilna i sa g.

2.4.3 Klasa CSCI (Constant Semiprojection and Commutative Idempotent)

Sada ćemo identifikovati novu familiju kompatibilnih operacija koje impliciraju širinu 1, odnosno postojanje kompatibilne skupovne funkcije. Ova nova klasa je dobijena od klase polumreža zamenjujući uslov asocijativnosti kompatibilnošću sa posebnom vrstom poluprojekcije. Prvo nam treba sledeća definicija:

Neka je D konačan skup. Poluprojekcija f je funkcija arnosti $k \geq 3$ takva da za neki indeks $1 \leq i \leq k$, $f(x_1, ..., x_k) = x_i$, kad god je $|\{x_1, ..., x_k\}| < k$. Štaviše, f se naziva konstantna poluprojekcija ako je $f(x_1, ..., x_k) = d$ za neko fiksno $d \in D$ kada uslov poluprojekcije nije zadovoljen, odnosno kada je $|\{x_1, ..., x_k\}| = k$.

Teorema 2.4.1 *Neka je Γ konačan skup relacija kompatibilan sa nekom CI operacijom f i sa nekom konstantnom poluprojekcijom g arnosti* 3. *Tada je C_Γ širine 1.*

Dokaz. Dokaz ima dva glavna dela. Prvo, zapazimo da poluprojekcija može biti proširena do proizvoljne arnosti. Neka je g_k konstantna poluprojekcija arnosti k gde je projektovana prva promenljiva i konstanta je d. Onda, za svako $j > k$, funkcija g_j arnosti j data sa:

$$g_j(x_1, ..., x_j) = \begin{cases} x_1, & \text{ako je } |\{x_1, ..., x_j\}| < k \\ d, & \text{inače} \end{cases}$$

pripada svakom klonu koji sadrži g_k. Videćemo da za svako $j > k$, g_j može biti dobijeno kao niz kompozicija koristeći samo g_k i projekcije.

Dokazujemo indukcijom. Pretpostavimo da g_j, gde je $j \geq k$, pripada klonu. Operacija g_{j+1} može se dobiti od g_j na sledeći način:

$$\begin{aligned} g_{j+1}(x_1, ..., x_{j+1}) = g_j(g_j(...g_j(g_j(x_1, ..., x_j), x_2, ... \\ ..., x_{j-1}, x_{j+1}), ...), x_3, ..., x_{j+1}) \end{aligned}$$

Ako $|\{x_1, ..., x_{j+1}\}| < k$, onda $g_j(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j+1}) = x_1$ za sve $i = 2, 3, ..., j+1$. Primenom tih jednakosti redom za $i = j+1$, $i = j$ i tako sve do

$i = 2$, izraz $g_j(g_j(...g_j(g_j(x_1,...,x_j),x_2,...x_{j-1},x_{j+1}),...),x_3,...,x_{j+1})$ se svodi na x_1.
Ako je $|\{x_1,...,x_{j+1}\}| \geq k$ možemo razlikovati dva slučaja, kada je $|\{x_1,...,x_j\}| \geq k$ i kada je $|\{x_1,...,x_j\}| = k-1$. U prvom slučaju imamo $g_j(x_1,...,x_j) = d$ i pošto je g_j defisano kao projekcija prve koordinate ili je d sledi da je $g_{j+1}(x_1,...,x_{j+1}) = d$. U drugom slučaju imamo da se x_{j+1} razlikuje od svih ostalih x_k, gde je $1 \leq k \leq j$, a kako je $j > k$ sledi da postoje neki $1 \leq n < m \leq j$ takvi da su $x_n = x_m$ (neka je m najveće takvo). Tada je $g_j(x_1,...,x_m,x_{m+2},...,x_{j+1}) = x_1$, a $g_j(x_1,...,x_{m-1},x_{m+1},...,x_{j+1}) = d$ zato što je $|\{x_1,...,x_{m-1},x_{m+1},...,x_{j+1}\}| = k$ i sada, kao i u prvom slučaju, imamo da je $g_{j+1}(x_1,...,x_{j+1}) = d$. Odnosno to važi kad god je $|\{x_1,...,x_{j+1}\}| \geq k$.

Sada posmatrajmo skupovnu funkciju h datu sa:

$$h(S) = \begin{cases} f(S), & \text{ako je } |S| \leq 2 \\ d, & \text{inače} \end{cases}$$

Za svako $k > 3$, funkcija h_k može biti dobijena kao niz kompozicija koristeći f i g_k na sledeći način:

$$h_k(t_1,t_2,...,t_k) = f(...f(f(g_k(t_1,t_2,...,t_k),g_k(t_2,t_3,...,t_1)),...,\\ ...,g_k(t_3,t_4,...,t_2)),...,g_k(t_k,t_1,...,t_{k-1})).$$

■

Kao posledicu dobijamo da svaki klon koji sadrži f i g sadrži i h_k za sve $k \geq 3$. Za $k \leq 2$ imamo jednakosti: $h_2(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$ i $h_1(x_1) = f(x_1,x_1)$. Tada je skupovna funkcija h kompatibilna sa svakom relacijom kompatibilnom sa f i g.

Za klase konstantnih operacija i polumrežnih operacija smo pokazali da su polinomne složenosti. Klasa CSCI nije bila ispitana pre karakterizacije širine 1. Važno je znati da li je polinomna složenost klase CSCI jednostavna posledica prethodno poznatih klasa polinomnih relacija ili je nova klasa problema polinomne složenosti koja još nije otkrivena. Pokazaćemo da klasa CSCI uključuje probleme koji ne mogu biti obračunati u okviru kompatibilnih operacija kao što je u [10] dobijena relacijom koja nas dovodi do problema polinomne složenosti ali ne pripada klasama koje su bile poznate do objavljivanja rada o širini 1. Te klase su klase koset generatornih operacija, blizu-jednoglasnih operacija i nekih skupovnih operacija, poznatih kao konstantne operacije i polumrežne operacije.

Prema tome, neophodno je da pokažemo da postoji neka CI funkcija φ i neka konstantna poluprojekcija ϕ arnosti 3 i neka relacija $\mathcal{R}$, i da su svi definisani nad istim domenom D, takvi da φ i ϕ očuvavaju $\mathcal{R}$, ali ni jedna od pomenutih klasa polinomne složenosti ne očuvava $\mathcal{R}$.

Neka je $D = \{0, 1, 2\}$ domen. Neka je $\varphi : D^2 \to D$ komutativna i idempotentna operacija data Kejlijevom tablicom

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	1
2	2	1	2

Operacija φ je turnir, poznata je kao kamen-papir-makaze algebra. Neka je $\mathcal{R}$ ternarna relacija sa torkama

$$\begin{gathered}\{(0,0,1)\\(0,2,1)\\(0,2,2)\\(1,0,2)\}\end{gathered}$$

Direktno se proverava da je $\mathcal{R}$ kompatibilna sa φ. Štaviše, pošto svaka kolona sadrži samo dve različite vrednosti, $\mathcal{R}$ je kompatibilno sa svim poluprojekcijama (samim tim $\mathcal{R}$ je kompatibilno sa svim konstantnim poluprojekcijama arnosti 3).

Malo teži posao je pokazati da relacija $\mathcal{R}$ nije kompatibilna sa pomenutim operacijama polinomne složenosti. Analiziraćemo po slučajevima.

Koset generatorne operacije Koset generatorne operacije [13] su direktno uopštenje afinih operacija [10] na neabelove grupe. Za svaku koset generatornu operaciju $f : D^3 \to D$ postoji neka grupa $(D; \cdot, ^{-1})$ takva da je $f(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$. Kao posledicu [13] dobijamo da svaka n-arna relacija R kompatibilna sa f je desni koset podgrupe grupe $(D; \cdot, ^{-1})^n$. Stoga, $\mathcal{R}$ nije kompatibilna sa bilo kojom koset generatornom operacijom zato što u konačnim grupama kardinalnost svakog koseta deli red grupe.

Blizu-jednoglasne operacije Operacija $f : D^k \to D$ $(k \geq 3)$ se naziva blizu-jednoglasna operacija ako za sve $x, y \in D$ važi

$$\varphi(x, y, y, ..., y) = \varphi(y, x, y, ..., y) = ... = \varphi(y, y, ..., y, x) = y.$$

U [14] je pokazano da je zatvaranje ispod blizu-jednoglasne operacije dovoljno da garantuje polinomnu složenost problema zadovoljenja uslova. Da bi pokazali da nijedna blizu-jednoglasna operacija ne očuvava $\mathcal{R}$ potrebno je detaljno ispitivanje. Ispitivaćemo posebno za svaku arnost k.

Za $k = 3$ ispitivanje je jednostavno. Za svaku ternarnu blizu-jednoglasnu operaciju m (takođe zvana većinska operacija) imamo

$$m((0,0,1),(0,2,2),(1,0,2)) = (0,0,2) \notin \mathcal{R}.$$

Stoga, operacija m ne očuvava $\mathcal{R}$.

Sada, pretpostavimo da je $k \geq 4$. Neka je m blizu-jednoglasna operacija arnosti k nad domenom D koja je kompatibilna sa $\mathcal{R}$. Kako je $m(0,2,...,2) = 2$ i $m(0,0,...,0,2) = 0$ onda postoji neki prirodan broj $1 \leq n \leq k-2$ takav da su zadovoljeni sledeći uslovi:

- $m(\overbrace{0,...,0}^{n},2,...,2) = 1$, ili
- $m(\overbrace{0,...,0}^{n},2,...,2) = 2$ i $m(\overbrace{0,...,0}^{n+1},2,...,2) = 0$

U prvom slučaju imamo kontradikciju sa

$$m(\overbrace{(1,0,2),...,(1,0,2)}^{n},(0,2,2),...,(0,2,2)) = (x,1,2) \in \mathcal{R}$$

(Nemoguće za bilo koju vrednost x).

U drugom slučaju imamo,

$$m(\overbrace{(1,0,2),...,(1,0,2)}^{n},(0,0,1),(0,2,2),...,(0,2,2)) = (x,0,2) \in \mathcal{R}$$

$$m(\overbrace{(1,0,2),...,(1,0,2)}^{n},(0,2,2),(0,2,2),...,(0,2,2)) = (x,2,2) \in \mathcal{R}$$

Imamo kontradikciju pošto nijedna vrednost x ne može istovremeno da zadovoljava oba uslova.

Konstantne operacije Sledi odmah iz činjenice da $\mathcal{R}$ ne sadrži nijednu torku oblika (d, d, d).

Polumrežne operacije Neka je f polumrežna operacija kompatibilna sa $\mathcal{R}$. Prisetimo se da polumrežna operacija $f(x, y)$ definiše parcijalno uređenje $x \leq y$ ako i samo ako $f(x, y) = x$, i f je operacija infimuma u tom uređenju. Pokažimo da je $f(0, 1) \neq 1$. Ako bi bilo $f(0, 1) = 1$, dobili bismo $f((0, 2, 1), (1, 0, 2)) = (1, 0, 2)$ iz čega imamo $1 < 0$, $0 < 2$ i $2 < 1$. Što nije parcijalno uređenje (pa ni polumrežno). Naravno, ne može počinjati ni sa 2, jer nijedna torka u $\mathcal{R}$ ne počinje tako, pa počinje sa 0.

Ne može biti ni $f((0, 2, 1), (1, 0, 2)) = (0, 2, 1)$. Zato što bismo ponovo dobili krug, ovog puta $0 < 1$, $2 < 0$ i $1 < 2$, što je nemoguće. Pa mora važiti

$$f((0, 2, 1), (1, 0, 2)) = (0, 0, 1) \text{ ili } (0, 2, 2).$$

U prvom slučaju imamo kontradikciju s obzirom da je $f((0, 2, 2), (1, 0, 2)) = (0, 0, 2) \notin \mathcal{R}$. Za drugi slučaj uzmimo $f((0, 0, 1), (1, 0, 2)) = (0, 0, 2) \notin \mathcal{R}$.

Glava 3

Problemi širine 2

3.1 Uvod

Neka je **B** konačna relacijska struktura. Kod problema zadovoljenja uslova nad **B**, CSP(**B**), data nam je konačna relacijska struktura **A** i naš cilj je da ispitamo da li je **A** homomorfno sa **B**. Motivisani Hipotezom o dihotomiji Federa i Vardija [15] koja tvrdi da za svako **B**, CSP(**B**) je ili polinomne ili NP-kompletne složenosti, želimo da za datu strukturu **B** odredimo da li je CSP(**B**) rešiv u polinomnom vremenu ili ne. Svi poznati **P**-problemi rešeni su u upitnom jeziku Datalog. Datalog programi su parametrizovani na nekoliko načina, definišući širinu na više načina. Među njima, relacijska širina koju je uveo Bulatov je značajno zanimljiva. Interesantna osobina relacijske širine je što što ne zavisi od arnosti relacija iz **B**, što je čini posebno zanimljivom za algebarski pristup CSP-u. Iako su Feder i Vardi su dali kompletnu karakterizaciju koja odlučuje da li struktura **B** dovodi do problema zadovoljenja uslova, CSP(**B**) širine 1, malo je poznato za veće širine. Za $k = 2$ ili $k \geq 4$ nemamo primere problema prave relacijske širine k, odnosno strukture **B** koje imaju širinu k ali nemaju širinu $k-1$. U ovom poglavlju ćemo pokazati da ne postoje problemi prave relacijske širine 2, odnosno pokazaćemo da svaki problem zadovoljenja uslova širine 2 je takođe širine 1.

Neka je jezik konačan skup relacijskih simbola. Sa τ ćemo označavati jezik. Sa $r = \rho(P) \geq 0$ ćemo označavati arnost relacijskog simbola P iz τ.

τ-struktura **A** se sastoji od skupa A, koji se naziva univerzum od **A**, i relacija $P^{\mathbf{A}} \subseteq A^r$ za svaki relacijski simbol $P \in \tau$ gde je r arnost od P. Zbog lakše notacije, kažemo da $P(a_1, ..., a_r)$ važi u $\mathbf{A}$ umesto $(a_1, ..., a_r) \in P^{\mathbf{A}}$. Sve strukture smatramo da su konačne.

Homomorfizam τ-strukture $\mathbf{A}$ u τ-strukturu $\mathbf{B}$ je preslikavanje $h : A \to B$ takvo da za svako r-arno $P \in \tau$ i svako $(a_1, ..., a_r) \in P^{\mathbf{A}}$, imamo da $(h(a_1), ..., h(a_r)) \in P^{\mathbf{B}}$. Kažemo da je $\mathbf{A}$ homomorfno sa $\mathbf{B}$ i obeležavamo sa $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ako postoji homomorfizam iz $\mathbf{A}$ u $\mathbf{B}$.

Neka je $\mathbf{A}$ τ-struktura i $f : A \to B$ je preslikavanje univerzuma od $\mathbf{A}$ u konačan skup B, definišemo homomorfnu sliku od $\mathbf{A}$ za f, $f(A)$, da bude τ-struktura sa domenom $f(A)$ i tako da za sve $P \in \tau$ arnosti r važi

$$P^{f(A)} = \{(f(a_1), ..., f(a_r)) \mid (a_1, ..., a_r) \in P^{\mathbf{A}}\}.$$

Definišemo uniju $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ τ-struktura $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ da bude τ-struktura sa univerzumom $A \cup B$ takva da je $P^{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = P^{\mathbf{A}} \cup P^{\mathbf{B}}$ za svako $P \in \tau$.
Za svako preslikavanje f i $I \subseteq dom(f)$ označimo sa f_I restrikciju od f na I. Za svaka f, g parcijalna preslikavanja iz A u B, pišemo $f \subseteq g$ ako je $dom(f) \subseteq dom(g)$ i $g_{dom(f)} = f$. Kažemo da je g ekstenzija od f, odnosno f je restrikcija od g.

Definicija 3.1.1 *Neka su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ τ-strukture i neka je $k \geq 1$. k-minimalna familija za $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ je neprazan skup H parcijalnih preslikavanja, sa domenima kardinalnosti najviše k, iz A u B takvih da za svako $h \in H$ važi:*

(i) *za svaki torku $P(a_1, ..., a_m)$ u $\mathbf{A}$ postoji neka torka $P(b_1, ..., b_m)$ u $\mathbf{B}$ takva da $h(a_i) = b_i$ ako $a_i \in dom(h)$ i za svaki podskup I od $a_1, ..., a_m$ takav da $|I| \leq k$, postoji preslikavanje h' iz H takvo da $h'(a_i) = b_i$ za svako $a_i \in I$.*

(ii) *$h' \in H$ za svako $h' \subseteq h$.*

(iii) *ako je $dom(h) < k$ tada za svako $a \in A$, postoji neko $h' \in H$ takvo da $a \in dom(h')$ i $h \subseteq h'$.*

Lema 3.1.1 *Neka su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ τ-strukture i neka je $k \geq 1$. Ako je $\mathbf{A}$ homomorfno sa $\mathbf{B}$ i ako postoji k-minimalna familija H za $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ tada postoji k-minimalna familija za $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.*

Dokaz. Neka je f homomorfizam iz $\mathbf{A}$ u $\mathbf{B}$ i definišemo G da bude skup koji sadrži svako preslikavanje h iz H domena $f(I)$, za svako $I \subseteq A$ veličine najviše k, odnosno sadrži preslikavanja $h \circ f_I$. Dokažimo da je G k-minimalna familija za $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$.

Kako je za svako $g \in G$, $g = h \circ f_I$ i $|I| \leq k$, sledi da je g parcijalno preslikavanje skupa A u skup C čija kardinalnost domena je manja ili jednaka od k i:

(i) ako je $P(a_1, ..., a_m)$ u $\mathbf{A}$ tada je $P(f(a_1), ..., f(a_m))$ u $\mathbf{B}$, pa postoji $P(c_1, ..., c_m)$ u $\mathbf{C}$ i ako je $a \in dom(g)$, onda $g(a_i) = h(f(a_i)) = c_i$. Za svaki podskup I od $a_1, ..., a_m$ takav da $I \leq k$ važi $|f(I)| \leq k$ pa postoji preslikavanje h' iz H takvo da je $h'(f(a_i)) = c_i$ za sve $a_i \in I$, odnosno traženo preslikavanje je $g' = h' \circ f$.

(ii) ako je $g' \subseteq g$, tada je $g' = h' \circ f_J$, gde je $J \subseteq I$ i $h' \subset h$, pa $g' \in G$.

(iii) ako je $dom(g) < k$ i $a \in A$, kako je $g = h \circ f_I$ za neko $h \in H$ i $I \subseteq A$, $|I| < k$. Pa kako je i $dom(h) < k$ sledi da postoji neko $h' \in H$ takvo da $f(a) \in dom(h')$ i $h \subseteq h'$, odnosno $h' \circ f = g' \in G$ i $a \in dom(g')$, $g \subseteq g'$.

■

Postoji veoma jednostavan postupak, zvan k-minimalan test, koji nam za dve relacijske strukture $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ govori da li postoji k-minimalna familija za $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (zapravo pronalazi jednu takvu familiju). k-minimalan test počinje sa familijom H parcijalnih preslikavanja iz A u B čiji je domen najviše veličine k. Zatim iterativno uklanja preslikavanja iz H koja ne zadovoljavaju uslove $(1 - 3)$ k-minimalne familije. Pošto je broj parcijalnih preslikavanja iz A u B sa domenom veličine k ograničen sa $|A|^k|B|^k$ k-minimalan test radi u polinomnom vremenu. Kažemo da $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ prolazi k-minimalan test ako je rezultujući skup H neprazan, u suprotnom ne prolazi. Struktura $\mathbf{B}$ ima relacijsku širinu k ako je $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ za svaku strukturu $\mathbf{A}$ takvu da $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ prolazi k-minimalan test.

Glavni rezultat ovog poglavlja je

Teorema 3.1.1 *Svaka struktura koja ima relacijsku širinu 2 ima takođe širinu 1.*

Neka je $m \geq 1$. Kontura dužine m u τ-strukturi $\mathbf{A}$ je kolekcija m različitih torki $P_0(a_1^0, ..., a_{r_0}^0), ..., P_{m-1}(a_1^{m-1}, ..., a_{r_{m-1}}^{m-1})$ koje su tačne u $\mathbf{A}$ takve da je kardinalnost skupa $\{a_j^i \mid 0 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq r_i\}$ je manja od $1 + \sum_{0 \leq i \leq m-1}(r_i - 1)$.

Petlja je kontura dužine 1. Obim τ-strukture je dužina njegove najkraće konture.

Teorema 3.1.2 *[19](Lema retke neuporedivosti) Neka su k, l pozitivni celi brojevi i neka je* $\mathbf{A}$ *struktura. Tada postoji struktura* $\mathbf{G}$ *sa sledećim osobinama:*

1. $\mathbf{G}$ *je homomorfno sa* $\mathbf{A}$

2. *Za svaku strukturu* $\mathbf{B}$ *sa najviše k elemenata,* $\mathbf{A}$ *je homomorfno sa* $\mathbf{B}$ *ako i samo ako je* $\mathbf{G}$ *homomorfno sa* $\mathbf{B}$

3. $\mathbf{G}$ *ima obim $\geq l$.*

3.2 k-relacijska stabla

Definicija 3.2.1 *Neka je* $\mathbf{T}$ *relacijska struktura i neka je I podskup od T takav da $|I| \leq k$. Par $(\mathbf{T}, I)$ se naziva k-relstablo (relacijsko stablo) ako*

(1) $\mathbf{T}$ *sadrži samo jednu torku čiji se elementi ne ponavljaju i I je podskup elemenata te torke veličine najviše k, ili*

(2) postoji konačna kolekcija $(\mathbf{T}_j, I_j)$, $j \in J$ k-relstabala i $e_1, ...e_n \in T$, $n \geq 0$ takvi da za sve $j \in J$, $T_j \cap \{e_1, ..., e_n\} \subseteq I_j$ i za sve $i, j \in J$, $T_i \cap T_j \subseteq \{e_1, ..., e_n\}$, i

   (a) $\mathbf{T}$ *je unija torke $P(e_1, ..., e_n)$ (za neko n-arno $P \in \tau$) i $\bigcup_{j \in J} \mathbf{T}_j$, i $I \subseteq \{e_1, ..., e_n\}$ ili*

   (b) $\mathbf{T} = \bigcup_{j \in J} \mathbf{T}_j$ *i $I = \{e_1, ..., e_n\}$, ili*

(3) postoji k-relacijsko stablo $(\mathbf{T}, I')$ takvo da $I \subseteq I'$.

Konačno, struktura $\mathbf{T}$ *je k-relstablo ako je $(\mathbf{T}, \emptyset)$ k-relstablo.*

Generalno, relacijska struktura $\mathbf{A}$ se naziva stablo ako nema kontura. U našoj terminologiji, stabla su 1-restabla.

Teorema 3.2.1 *Neka su* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *strukture i neka je $k \geq 1$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ *prolazi k-minimalan test*

(b) *postoji k-minimalna familija za* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

Štaviše, ako je $\mathbf{A}$ *bez petlji tada su (a) i (b) takođe ekvivalentna sa:*

(c) *svako k-relstablo homomorfno sa* $\mathbf{A}$ *je homomorfno i sa* $\mathbf{B}$

Dokaz. $[(a) \Leftrightarrow (b)]$. Ovo je zapravo dokaz tačnosti k-minimalnog testa, što je pravolinijski.
$[(b) \Rightarrow (c)]$ Neka je H k-minimalna familija za $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Pokazaćemo da ako je $(\mathbf{T}, I)$ k-relacijsko stablo, f homomorfizam iz $\mathbf{T}$ u $\mathbf{A}$ i neka je h preslikavanje iz H takvo da je $dom(h) = f(I)$ tada postoji homomorfizam g iz $\mathbf{T}$ u $\mathbf{B}$ takvo da je $g_I = (h \circ f_I)$. Dokaz dajemo indukcijom po strukturi $(\mathbf{T}, I)$.

(1) $\mathbf{T}$ je samo torka $P(e_1, ..., e_n)$ i I je bilo koji podskup od $\{e_1, ..., e_n\}$ takav da je $|I| \leq k$. Neka je $P(a_1, ..., a_n)$ slika od $P(e_1, ..., e_n)$ dobijena preslikavanjem f. Neka je $P(b_1, ..., b_n)$ torka u $\mathbf{B}$ koja postoji zato što h zadovoljava uslov (i) k-minimalne familije. Preslikavanje $g : \{e_1, ..., e_n\} \to B$, $g(e_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$, zadovoljava potrebne uslove.

$(2a)$ Neka je $P(a_1, ..., a_n)$ slika od $P(e_1, ..., e_n)$ dobijena preslikavanjem f. Neka je $P(b_1, ..., b_n)$ torka u $\mathbf{B}$ koja postoji zato što h zadovoljava uslov (i) k-minimalne familije. Stavimo da je $g(e_i) = b_i$ za $1 \leq i \leq n$. Na ostatku skupa T g definišemo na sledeći način:
Za $j \in J$, posmatrajmo preslikavanje $h'_j : f(I_j) \cap \{a_1, ..., a_n\} \to B$ definisano sa $h'_j(a_i) = b_i$, za $a_i \in dom(h'_j)$. Uslov (ii) k-minimalne familije garantuje da $h'_j \in H$. Štaviše, na osnovu uslova (iii) k-minimalne familje, H sadrži ekstenziju h_j od h'_j sa domenom $f(I_j)$. Na osnovu indukcijske hipoteze postoji homomorfizam g_j iz $\mathbf{T}_j$ u $\mathbf{B}$ takav da $g_j(e) = h_j(f(e))$ za svako $e \in I_j$. Definišemo $g(e) = g_j(e)$ za svako $j \in J$ i svako $e \in T_j$. Preslikavanje g zadovoljava potrebne uslove, zato što su $T_j \backslash \{e_1, ..., e_n\}$ disjunktni skupovi i po hipotezi g_j su homomorfizmi.

$(2b)$ $(\mathbf{T}, I)$ je dobijeno pravilom $(2b)$. Definišemo $g(e) = h(f(e))$ za sve $e \in I$ i proširimo g na ostatak od T kao u prethodnom slučaju.

(3) $(\mathbf{T}, I)$ je dobijeno pravilom (3) od $(\mathbf{T}, I')$ gde $I \subseteq I'$. Na osnovu osobine (iii) od H postoji h' definisano na $f(I')$ koje proširuje h. Pa preslikavanje g koje zadovoljava potrebne uslove, postoji za $(\mathbf{T}, I')$, f i h' .

[$(c) \Rightarrow (a)$] Pokazaćemo da za svako preslikavanje h uklonjeno iz H k-minimalnim testom postoji k-relacijsko stablo $(\mathbf{T}, I)$, neki homomorfizam f iz $\mathbf{T}$ u $\mathbf{A}$, gde je f_I injektivno, $f(I) = dom(h)$, i za svaki homomorfizam $g : \mathbf{T} \to \mathbf{B}$, $g_I \neq (h \circ f_I)$. Ovo ćemo pokazati indukcijom po redosledu izbacivanja preslikavanja h.

Ako je h uklonjeno u prvoj iteraciji, tada je neophodan uslov (i) k-minimalne familije oboren sa h. Stavimo da je $\mathbf{T}$ struktura koja sadrži samo torku $P(a_1, ..., a_n)$ datu uslovom, definišemo f da bude identično preslikavanje i neka je $I = dom(h)$.

Pretpostavimo sada da je h uklonjeno u nekoj kasnijoj iteraciji. Razmatraćemo slučajeve u zavisnosti koji uslov k-minimalne familije je oboren sa h.

(i) Neka je $P(a_1, ..., a_n)$ torka zbog koje h mora da bude eliminisana i neka je h_j, $j \in J$ skup preslikavanja sa domenom u potpunosti sadržanom u $\{a_1, ..., a_n\}$ koja su prethodno uklonjena iz H. Za svako $j \in J$, neka su $(\mathbf{T}_j, I_j)$ i f_j k-relacijsko stablo i preslikavanje respektivno za h_j. Adekvatnim preimenovanjem elemenata $\mathbf{T}_j$ možemo pretpostaviti da je f_j restrikovano na I_j identičko i da su sve druge promenljive nove, odnosno $I_j = T_j \cap \{a_1, ..., a_n\}$. Takođe možemo pretpostaviti da osim elemenata iz skupa $\{a_1, ..., a_n\}$ svaka dva od ovakvih struktura nemaju drugih zajedničkih elemenata, odnosno, za sve $i \neq j \in J$, $T_i \cap T_j \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$. Sada ćemo definisati $(\mathbf{T}, I)$ i f. $(\mathbf{T}, I)$ je konstruisano na osnovu pravila $(2a)$ sa $(\mathbf{T}_j, I_j)$, $j \in J$, torke $P(a_1, ..., a_m)$, i $I = dom(h)$. $f(x)$ je definisano da bude identičko ako $x \in \{a_1, ..., a_n\}$ i $f_j(x)$ ako $x \in T_j$, inače. Tada $(\mathbf{T}, I)$ i f zadovoljavaju potrebne uslove.

(ii) Postoji neko $h \subseteq h'$ takvo da je h' prethodno uklonjeno iz H. Neka su $(\mathbf{T}', I')$ i f' dobijeni iz indukcijske hipoteze. U ovom slučaju samo stavimo $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$, $I = dom(h)$ i $f = f'$.

(iii) U ovom slučaju, h je eliminisano zato što je $|dom(h)| = n < k$ i postoji neko a takvo da H ne sadrži ekstenziju od h definisanu nad a. Dakle, svaka moguća ekstenzija $h_j : dom(h) \cup \{a\}$, $j \in J$ od h je prethodno uklonjena iz H. Za svako $j \in J$, postoji pogodno $(\mathbf{T}_j, I_j)$ i f_j. Neka je $dom(h) = \{a_1, ..., a_n\}$ i preimenujmo promenljive strukture $\mathbf{T}_j$, $j \in J$ tako da za sve $j \in J$, $T_j \cap \{a_1, ..., a_n\} \subseteq I_j$, f_j je identičko na $T_j \cap \{a_1, ..., a_n\}$, i za sve $i \neq j \in J$, $T_i \cap T_j \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$. Postavimo da

$\mathbf{T}$ bude $\bigcup_{j\in J}\mathbf{T}_j$, $I = \{a_1, ..., a_n\}$, i $f(x)$ je identičko ako $x \in \{a_1, ..., a_n\}$ i $f_j(x)$ gde $x \in T_j$, inače. $(\mathbf{T}, I)$ i f zadovoljavaju tražene uslove.

Konačno smo kontrapozicijom dokazali implikaciju. Ako k-minimalan test ne prolazi tada preslikavanje h sa praznim domenom je uklonjeno, pa kako za $I = \emptyset$ važi da za svaki homomorfizam $g : \mathbf{T} \to \mathbf{B}$ mora biti ispunjeno $g_I \neq (h \circ f_I)$, sledi da ne postoji homomorfizam g. Ovo implicira da je uslov (c) netačan.

$\blacksquare$

Da bismo dokazali glavnu teoremu koristićemo obstrukciju kao karakterizaciju relacijske širine.

Definicija 3.2.2 *Neka je* $\mathbf{B}$ *τ-struktura. Skup* $\mathcal{O}$ *τ-struktura je obstruktivni skup za* $\mathbf{B}$ *ako za svaku τ-strukturu* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{B} \textit{ ako i samo ako } \forall \mathbf{O} \in \mathcal{O}, \mathbf{O} \not\to \mathbf{A}$$

Primetimo da direktnom primenom prethodne teoreme se može pokazati da struktura ima relacijsku širinu k ako i samo ima obstruktivni skup koga čine k-relacijska stabla. Ovo će biti dovoljno da pokažemo našu glavnu teoremu, verujemo da je zanimljivo da se upoznamo sa novom klasom relacijskih struktura, koje ćemo zvati k-urelstablo (od uopšteno relstablo). Pojam k-urelstablo je pravo uopštenje k-relstabla ali kao što ćemo videti u narednoj teoremi pojmovi su ekvivalentni kada budemo definisali obstrukciju. Razlog zbog kog mislimo da pojam k-urelstabla može biti zanimljiv je taj što je definisano za stablo-dekompoziciju kao i za nekoliko drugih srodnih pojmova kao što je širina stabla.

Definicija 3.2.3 *Neka je* $\mathbf{A}$ *τ-struktura. Stablo-dekompozicija od* $\mathbf{A}$ *je par (T, φ) gde je T stablo i $\varphi : V(T) \to \mathcal{P}(A)$ je preslikavanje koje svakom čvoru od T dodeljuje skup elemenata iz A, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *čvorovi koji sadrže bilo koji dati element iz A formiraju podstablo,*

2. *za bilo koju torku bilo koje relacije iz* $\mathbf{A}$*, postoji čvor u T koji sadrži sve elemente iz te torke.*

Zbog lakše notacije kažemo da čvor $v \in V(T)$ sadrži element $a \in A$ ako $a \in \varphi(v)$.

Definicija 3.2.4 *τ-struktura $\mathbf{A}$ je k-uopšteno relacijsko stablo (ili k-urelstablo) ako postoji stablo-dekompozicija (T, φ) od $\mathbf{A}$ takvo da:*

(i) dva različita čvora u T imaju najviše k zajedničkih elemenata

(ii) za svaki čvor t iz T postoji torka u $\mathbf{A}$ koja sadrži svaki element iz t ili je t veličine najviše k.

Lema 3.2.1 *Neka je $\mathbf{T}$ struktura i neka je $k \geq 1$. Ako je $\mathbf{T}$ k-relstablo tada je takođe i k-urelstablo.*

Dokaz. Pokazaćemo indukcijom po strukturi da ako je $(\mathbf{T}, I)$ k-relstablo onda postoji stablo-dekompozicija (T, φ) od A i čvor $v \in T$ tako da je $\varphi(v) = I$.

(1) $\mathbf{T}$ je samo torka $P(e_1, ..., e_n)$ i I je bilo koji podskup od $\{e_1, ..., e_n\}$ takav da je $|I| \leq k$. Tada je $V(T) = \{v\}$ i $\varphi(v) = \{e_1, ..., e_n\}$.

(2a) $\mathbf{T}$ je unija torke $P(e_1, ..., e_n)$ i $\bigcup_{j \in J} \mathbf{T}_j$, $I \subseteq \{e_1, ..., e_n\}$. Pa pretpostavimo da za $(\mathbf{T}_j, I_j)$ postoji stablo-dekompozicija (T_j, φ_j) i čvorovi $v_j \in T_j$ takvi da je $\varphi_j(v_j) = I_j$. Tada se traženo stablo T dobija od stabala T_j i novog čvora v, tako što v spojimo sa čvorovima v_j, $j \in J$. A traženo preslikavanje je $\varphi(u_j) = \varphi_j(u_j)$, za $u_j \in T_j$ i $\varphi(v) = I$.

(2b) $\mathbf{T} = \bigcup_{j \in J} \mathbf{T}_j$ i $I = \{e_1, ..., e_n\}$. Pa se stablo-dekompozicija dobija isto kao u prethodnom slučaju.

(3) postoji k-relacijsko stablo $(\mathbf{T}, I')$ takvo da $I \subseteq I'$ i za njega postoji stablo-dekompozicija (T, φ), koje je traženo i za $(\mathbf{T}, I)$.

■

Obrnuto ne važi, posebno što k-relstablo, za proizvoljno k, ne može imati petlje. Ali ovo nije jedini razlog: posmatrajmo na primer strukturu $\mathbf{A}$ sa čvorovima $a_1, ..., a_k$, $k \geq 2$, i sa samo jednom relacijom arnosti k sa torkama $(a_1, ..., a_k)$ i $(a_2, ..., a_k, a_1)$. Struktura $\mathbf{A}$ nije $(k-1)$-relstablo ali je sigurno 1-urelstablo (pa i $(k-1)$-urelstablo) što se pokazuje pomoću dekompozicije stabla koje sadrži jedan jedini čvor v sa $\varphi(v) = \{a_1, ..., a_k\}$. Međutim može se pokazati da ako struktura ima obstruktivni skup sačinjen od k-urelstabala tada takođe postoji obstruktivni skup sačinjen od k-relstabala.

Teorema 3.2.2 *Neka ja* $\mathbf{B}$ *struktura i* $k \geq 1$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $\mathbf{B}$ *ima relacijsku širinu* k*;*

(b) $\mathbf{B}$ *ima obstruktivni skup sačinjen od* k*-relstabala;*

(c) $\mathbf{B}$ *ima obstruktivni skup sačinjen od* k*-urelstabala.*

Dokaz. Ekvivalencija između (a) i (b) je direktna posledica teoreme 3.2.1 iako su potrebne male dopune da bi se dokazalo, mora se pretpostaviti da je struktura $\mathbf{A}$ bez petlji.

$[(a) \Rightarrow (b)]$ Treba da pokažemo da ako je $\mathbf{B}$ struktura sa relacijskom širinom k i $\mathbf{A}$ struktura (ne mora biti bez petlji) koja nije homomorfna sa $\mathbf{B}$ (odnosno ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) ne prolazi k-minimalan test), tada postoji neko k-relstabla homomorfno sa $\mathbf{A}$ i nije homomorfno sa $\mathbf{B}$. Na osnovu Leme retke neuporedivosti, ako $\mathbf{A}$ nije homomorfno sa $\mathbf{B}$ onda postoji neka struktura bez petlji $\mathbf{G}$ takva da je homomorfna sa $\mathbf{A}$ i nije homomorfna sa $\mathbf{B}$. Teorema 3.2.1 daje da postoji k-relstablo $\mathbf{C}$ homomorfno sa $\mathbf{G}$ (pa i sa $\mathbf{A}$) i koje nije homomorfno sa $\mathbf{B}$.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Neka je $\mathbf{B}$ struktura koja zadovoljava uslov (b) i neka je $\mathbf{A}$ struktura koja nije homomorfna sa $\mathbf{B}$. Ponovo na osnovu Leme o retkoj neuporedivosti, postoji neka struktura bez petlji $\mathbf{G}$ homomorfna sa $\mathbf{A}$, a nije sa $\mathbf{B}$. Na osnovu teoreme 3.2.1, ne postoji k-minimalna strategija za $(\mathbf{G}, \mathbf{B})$, što na osnovu leme 3.1.1 implicira da ne postoji k-minimalna strategija za $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

$[(b) \Rightarrow (c)]$ sledi na osnovu leme 3.2.1 pa je ostalo jedino još da pokažemo da $[(c) \Rightarrow (b)]$. Neka je $\mathbf{B}$ struktura koja zadovoljava uslov (c) i neka je $\mathcal{O}$ obstruktivni skup za $\mathbf{B}$ koji se sastoji od k-urelstabala. Jedino je neophodno pokazati da za svako $\mathbf{A}$ koje nije homomorfno sa $\mathbf{B}$ postoji homomorfizam iz nekog k-relstabla $\mathbf{C}$ u $\mathcal{O}$ u $\mathbf{A}$. Ponovo na osnovu Leme retke neuporedivosti, ako $\mathbf{A}$ nije homomorfno sa $\mathbf{B}$ tada postoji struktura $\mathbf{G}$ čiji je obim bar 3 koja je homomorfna sa $\mathbf{A}$ i nije sa $\mathbf{B}$. Stoga postoji neko $\mathbf{C}$ u $\mathcal{O}$ takvo da je homomorfno sa $\mathbf{G}$ (pa i sa $\mathbf{A}$). Pokazaćemo da je $\mathbf{C}$ stvarno k-relstablo. Neka je (T, φ) stablo-dekompozicija od $\mathbf{C}$ koje zadovoljava uslove definicije 3.2.4. Primetimo da u stablo-dekompoziciji T možemo zameniti bilo koju granu (v, v') u T sa dve grane (v, u), (u, v') gde je u nov čvor takav da $\varphi(u) = \varphi(v) \cap \varphi(v')$ pri čemu opet dobijamo stablo-dekompoziciju koje zadovoljava uslove definicije 3.2.4. Stoga možemo pretpostaviti bez gubljenja opštosti da je za svaku granu (v, v') u T $\varphi(v) \subseteq \varphi(v')$ ili $\varphi(v') \subseteq \varphi(v)$. Štaviše, uslov (ii) k-urelstabla garantuje da ne postoji grana u T između dva čvora veličine veće od k. Takođe možemo pretpostaviti dodavanjem čvora ako je neophodno da T sadrži bar jedan čvor veličine najviše k. Pokazaćemo indukcijom po broju čvorova u T da ako je v čvor u T veličina najviše k, tada $(\mathbf{C}, \varphi(v))$ je k-relstablo. Za bazni slučaj pretpostavićemo da T sadrži samo jedan čvor veličine najviše k. Kako $\mathbf{C}$ ima najviše k čvorova i rezultat sledi iz zapažanja da ponavljanjem primenjivanja pravila (1), (2b) i (3) k-relstabla moguće je generisati sve strukture sa najviše k čvorova (zaista, lako je primetiti da iterativnom primenom ovih pravila možemo generisati sve strukture sa stablo-dekompozicijom koje se sastoje samo od čvorova veličine najviše k). Za indukcijski korak, pretpostavimo prvo da svi susedi v_j, $j \in J$, od v, imaju veličinu najviše k. Neka su T_j, $j \in J$, sve komponente povezanosti u T posle uklanjanja čvora v, i neka su $\mathbf{C}_j$, $j \in J$, podstrukture od $\mathbf{C}$ indukovane sa $\bigcup_{u \in T_j} \varphi(u)$. Na osnovu indukcijske hipoteze $(\mathbf{C}_j, \varphi(v_j))$, $j \in J$ je k-relstablo. Takođe, ako je $\mathbf{C}'$ podstruktura od $\mathbf{C}$ indukovana sa $\varphi(v)$, tada je na osnovu indukcijske hipoteze $(\mathbf{C}', \varphi(v))$ k-relstablo. Konačno $\mathbf{C}$ je dobijeno od $(\mathbf{C}_j, \varphi(v_j))$, $j \in J$, i $(\mathbf{C}', \varphi(v))$ korišćenjem pravila (2b).

Ako čvor v ima suseda v' veličine veće od k onda neka je v_j, $j \in J$ skup suseda (uključujući i v) od v'. Neka su T_j, $j \in J$ sve komponenete povezanosti u T posle uklanjanja v', i neka su $\mathbf{C}_j$, $j \in J$ podstrukture od $\mathbf{C}$ indukovane sa $\bigcup_{u \in T_j} \varphi(u)$. Kako za svako $j \in J$, v_j ima veličinu najviše k, $(\mathbf{C}_j, \varphi(v_j))$ je k-relstablo. Posmatrajmo sada v'. Kako je veličina od $\varphi(v')$ veća od k postoji torka $t = P(e_1, ..., e_n)$ u $\mathbf{C}$ koja sadrži sve čvorove u $\varphi(v')$. Takođe, uslov (2) stablo-dekompozicije garantuje da su svi elementi od t sadržani u čvoru v^* u T. Ovaj čvor bi trebao da bude tačno v' inače bi u suprotnom presek $\varphi(v') \cap \varphi(v^*)$ što je $\varphi(v')$ bi trebao da bude veći od k. Stoga je $\varphi(v')$ upravo $\{e_1, ..., e_n\}$. Neka je t_j, $j \in J'$ klasa svih torki iz $\mathbf{C}$ različitih od t i potpuno sadržanih u $\{e_1, ..., e_n\}$. Možemo zaključiti da za svako $j \in J'$, t_j je arnosti 1 zato što bi u suprotnom slika torki t i t' u $\mathbf{G}$ bila kontura dužine najviše 2 što je nemoguće (primetimo sada da je najvažnije to da su svi elementi od t_j sadržani u t kao par $(\mathbf{D}_j, \{e_{i_j}\})$ gde je $\mathbf{D}_j$ struktura koja sadrži samo torku t_j i e_{i_j} je jedini element k-relstabla. Konačno, $(\mathbf{C}, \varphi(v))$ je dobijeno primenom pravila (2a) za $t = P(e_1, ..., e_n)$ i k-relstabla $(\mathbf{C}_j, v_j)$, $j \in J$ i $(\mathbf{D}_j, \{e_{i_j}\})$, $j \in J'$ (ovde smo takođe koristili činjenicu da je $\varphi(v)$ obavezno sadržano u $\varphi(v'))$.

■

Lema 3.2.2 *Svako 2-urelstablo sa obimom najmanje 3 ne sadrži konturu.*

Dokaz. Dokazaćemo svođenjem na kontradikciju. Neka je

$$P_0(a_1^0, ..., a_{r_1}^0), ..., P_{m-1}(a_1^{m-1}, ..., a_{r_{m-1}}^{m-1})$$

kontura u $\mathbf{A}$ i pretpostavimo da je m minimalno. Stoga je $r_i \geq 2$ za $i = 0, ..., m-1$. Štaviše, na osnovu minimalnosti m možemo pretpostaviti da postoje različiti elementi $a_0, ..., a_{m-1} \in A$ takvi da za sve $0 \leq i \neq j \leq m-1$, i-ta i j-ta torka dele jedino element a_i ako je $i+1 = j(mod\ m)$ i nijedan drugi inače.

Neka je (T, φ) pogodno stablo-dekompozicija od $\mathbf{A}$ koje potvrđuje da je $\mathbf{A}$ 2-urelstablo. Na osnovu definicije stablo-dekompozicije, za svako $0 \leq i \leq m-1$, T sadrži čvor, nazovimo ga n_i, koji sadrži $\{a_1^i, ..., a_{r_i}^i\}$. Kako je $r_i \geq 2$, tada na osnovu definicije 3.2.4, n_i bi trebalo da bude tačno $\{a_1^i, ..., a_{r_i}^i\}$, ne možemo imati dve različite torke koji sadrže $\{a_1^i, ..., a_{r_i}^i\}$ pošto bi to bila kontura dužine 2. Posmatrajmo sledeću šetnju u T: počinjemo u n_0 i pratimo jedinstveni put od n_0 do n_1, onda nastavljamo jedinstvenim putem od n_1 do n_2, i tako nastavljamo sve do puta od n_{m-1} do n_0 čime se šetnja vraća u n_0. Za početak pokažimo da kada stignemo do čvora n_1 po prvi put, šetnja mora da promeni smer, tj. prolazi kroz neke čvorove u kojima smo već bili. Zaista, neka je $i \geq 1$ takvo da smo prešli ponovo preko n_1 tokom puta od n_i do n_{i+1} $(mod\ m)$. Na osnovu definicije stablo-dekompozicije svaki čvor na putu od n_i do n_{i+1} sadrži a_i i stoga a_i pripada n_1. Ali ovo je jedino moguće ako je $i = 1$ i stoga šetnja mora menjati smer, tj. ići unazad.

Šetnja zatim nastavlja putem od n_1 do n_2. Svaki čvor na ovom delu sadrži a_1 i stoga zbog istog razloga ne može preći preko n_0. Pa postoji neki čvor u koji zaustavlja put da ide prema n_0 i grana se u različitim smerovima. Sigurno $\{a_0, a_1\} \subseteq u$ pošto u razdvaja oba na putu od n_0 ka n_1 i put od n_1 ka n_2. Kasnije tokom šetnje, mora se preći ponovo preko u, recimo tokom puta od čvora n_i do n_{i+1} $(mod\ m)$ za neko $i \geq 2$. Stoga u sadrži a_i takođe. Pošto je u kardinalnosti bar 3 postoji torka u $\mathbf{A}$ koja sadrži $\{a_0, a_1, a_2\}$. Ova torka zajedno sa torkom $P_1(a_1^1, ..., a_{r_1}^1)$ predstavlja konturu dužine 2, što je nemoguće.

■

Dokaz. (Teoreme 3.1.1)
Neka je $\mathbf{B}$ struktura sa relacijskom širinom 2. Pokazaćemo da ako je $\mathbf{A}$

struktura koja nije homomorfna sa $\mathbf{B}$ onda $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ne prolazi 1-minimalni test. Na osnovu Leme retke neuporedivosti, ako $\mathbf{A}$ nije homomorfno sa $\mathbf{B}$ onda postoji struktura $\mathbf{G}$ obima najmanje 3 koja je homomorfna sa $\mathbf{A}$ i nije homomorfna sa $\mathbf{B}$. Na osnovu teoreme 3.2.2 postoji neko 2-urelstablo $\mathbf{C}$ koje je homomorfno sa $\mathbf{G}$ ali nije sa $\mathbf{B}$. Izaberimo takvo $\mathbf{C}$ sa minimalnim brojem torki. Pokazaćemo da je obim od $\mathbf{C}$ bar 3, pa na osnovu leme 3.2.2, $\mathbf{C}$ je stablo, odnosno nema kontura. Na osnovu kompozicije homomorfizama $\mathbf{C}$ je homomorfno sa $\mathbf{A}$ ali nije sa $\mathbf{B}$. Pa na osnovu teoreme 3.2.1, $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ne prolazi 1-minimalni test.

Jedino nam preostaje da pokažemo da ako je $\mathbf{C}$ 2-urelstablo sa minimalnim brojem torki homomorfno sa $\mathbf{G}$ ali ne i sa $\mathbf{B}$ onda $\mathbf{C}$ nema kontura dužine kraće ili jednake od 2. Jasno, ako $\mathbf{G}$ ima konturu dužine 1 onda je njena slika u $\mathbf{G}$ takođe kontura dužine 1 što je nemoguće. Isti razlog neće uvek upaliti za konturu dužine 2. Zaista, ako je $P_0(a_1^0, ..., a_{r_0}^0)$, $P_1(a_1^1, ..., a_{r_1}^1)$ kontura od $\mathbf{C}$ i h je homomorfizam iz $\mathbf{C}$ u $\mathbf{G}$, moguće je da slika $P_0(h(a_1^0), ..., h(a_{r_0}^0))$, $P_1(h(a_1^1), ..., h(a_{r_1}^1))$ nije kontura od $\mathbf{G}$ ako su dve torke slika jedna ista torka. Pa možemo pretpostaviti da su dva predikata ista i zbog lakše notacije pišemo $P = P_0 = P_1$ i $r = r_0 = r_1$, pošto su to arnosti jednog istog predikata P.

Definišemo preslikavanje $f : C \to C$ sa $f(a_i^1) = a_i^0$ za sve $i = 1, ..., r$ i f je identičko u svim ostalim slučajevima. Jasno, slika dobijena sa f, $f(C)$, je homomorfna sa $\mathbf{G}$, zato što $h(a_i^0) = h(a_i^1)$ za sve $i = 1, ..., r$ i nije homomorfno sa $\mathbf{B}$. Pokazaćemo da je $f(C)$ 2-urelstablo, što je u kontradikciji s minimalnošću $\mathbf{C}$ jer $f(C)$ ima jednu torku manje u relaciji P.

Neka je (T, φ) pogodno stablo-dekompozicija od $\mathbf{C}$ i neka je u_0 čvor u T koji sadrži $\{a_1^0, ..., a_r^0\}$. Nije teško primetiti da je zaista $\varphi(u_0)$ tačno $\{a_1^0, ..., a_r^0\}$ pošto bi u suprotnom $\varphi(u_0)$ bilo veličine bar 3 i morali bi svi čvorovi u njemu da budu sadržani u torki t. Ovo je nemoguće zato što bi slika dobijena sa h od t i $P(a_1^0, ..., a_r^0)$ konstruisali konturu dužine 2 u $\mathbf{G}$. Iz istog razloga postoji čvor u_1 u T takav da $\varphi(u_1) = \{a_1^1, ..., a_r^1\}$. Iz uslova (i) 2-urelstabla, torke $P_0(a_1^0, ..., a_{r_0}^0)$, $P_1(a_1^1, ..., a_{r_1}^1)$ dele tačno dva elementa i zbog lakše notacije pretpostavićemo da su zajednički elementi tačno prva dva i pišemo $a_1 = a_1^0 = a_1^1$ i $a_2 = a_2^0 = a_2^1$.

Skup čvorova od T se može podeliti na dva skupa čvorova V_0 i V_1 tako da:

- V_0 i V_1 su povezani u T,
- $\bigcup_{v \in V_0} \varphi(v) \cap \bigcup_{v \in V_1} \varphi(v) = \{a_0, a_1\}$, i

- $u_i \in V_i$, za $i = 0, 1$.

Podela se može dobiti na sledeći način: definišemo V_0 da bude skup elemenata do kojih se može doći iz u_0 bez prolaska kroz u_1 i V_1 je skup ostalih čvorova. V_0 i V_1 očigledno zadovoljavaju treći uslov, dok prvi sledi iz toga što je T stablo. Ako pretpostavimo se u preseku iz drugog uslova pojavljuje i neki treći element, kako čvorovi koji sadrže taj element formiraju podstablo, onda taj element morao biti neki od a_i^1, za neko $3 \leq i \leq r$. Pa kako se iz u_0 može doći do čvora koji sadrži a_i^1 bez prolaska kroz u_1, sledi da u_1 i neki njegov sused imaju 3 zajednička elementa što je u kontradikciji sa uslovom (i) 2-urelstabla. Pa je ispunjen i drugi uslov.

Za $i = 0, 1$, neka je $\mathbf{C}_i$ podstruktura od $\mathbf{C}$ indukovana sa $\bigcup_{v \in V_i} \varphi(v)$. Tada je $f(\mathbf{C}) = f(\mathbf{C}_0) \cup f(\mathbf{C}_1) = \mathbf{C}_0 \cup f(\mathbf{C}_1)$. $\mathbf{C}_0$ je očigledno 2-relstablo i zaista stablo-dekompozicija (T_0, φ_0) od $\mathbf{C}_0$ se može dobiti restrikcijom (T, φ) na čvorove iz V_0. Pošto je f bijekcija definisana nad $\mathbf{C}_1$, tada odgovarajuća stablo-dekompozicija (T_1, φ_1) od $\mathbf{C}_1$ može biti dobijena definisanjem T_1 kao restrikcije od T nad V_1 i $\varphi_1(v) = \{f(a) \mid a \in \varphi(v)\}$, $v \in V_1$. Definišemo T' da bude stablo dobijeno kao unija T_0 i T_1 i spajanjem čvorova u_0 i u_1. Definišemo $\varphi' : V(T') \to f(C)$ da bude $\varphi_0(v)$ ako $v \in T_0$ i $\varphi_1(v)$ ako $v \in T_1$. Par (T', φ') je traženo stablo-dekompozicija od $f(\mathbf{C})$.

$\blacksquare$

Literatura

[1] E. Aichinger. Basic of clone theory, www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/UniversalAlgebra/s11/clonebasics2.pdf

[2] L. Barto. The collapse of the bounded width hierarchy. J. Logic Comput. 26 (2016), no. 3, 923943

[3] L. Barto and M. Kozik. Constraint satisfaction problems solvable by local consistency methods. J. ACM 61 (2014), no. 1, Art. 3, 19 pp.

[4] Z. Brady. Examples, Counterexamples and Structure in Bounded Width Algebras (preprint). *http://math.stanford.edu/ notzeb/bounded-width.pdf.*

[5] A. Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform CSPs (preprint). *https://arxiv.org/abs/1703.03021.*

[6] A. Bulatov, P. Jeavons and A. Krokhin. Classifying the complexity of constraints using finite algebras. SIAM J. Comput. 34 (2005), no. 3, 720742.

[7] D. Cohen, M.C. Cooper and P. Jeavons. Constraints, Consistency and Closure. *Artificial Intelligence*, 101:251-265, 1998.

[8] D. Cohen, M. Gyssens and P. Jeavons. A Unifying Framework for Tractable Constraints. In *1st International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, CP'95, Cassis (France), September 1995*, volume 976 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276-291, Berlin/New York, 1995. Springer-Verlag.

[9] D. Cohen, M. Gyssens and P. Jeavons. A Test for Tractability. In *2nd International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming CP'96*, volume 1118 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 267-281, Berlin/New York, August 1996. Springer-Verlag.

[10] D. Cohen, M. Gyssens and P. Jeavons. Closure Properties of Constraints. *Jornal of the ACM*, 44(4):527-548, July 1997.

[11] V. Dalmau. There are no pure relational width 2 constraint satisfaction problems. Inform. Process. Lett. 109 (2009), no. 4, 213218.

[12] V. Dalmau and J. Pearson. Set Functions and Width 1. In *5th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, (CP'99)*, volume 1713 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 159-173, Berlin/New York, 1999. Springer-Verlag.

[13] V. Dalmau and P. Jeavons. Learnability of Quantified Formulas. *In 4t European Conference on Computational Learning Theory Eurocolt '99, volume 1572 of Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 63-78, Berlin/New York, 1999. Springer-Verlag.

[14] N. Draganić, P. Marković, V. Uljarević and S. Zahirović. A characterization of idempotent strong Malcev conditions for congruence meet-semidistributivity in locally finite varieties (preprint). *http://people.dmi.uns.ac.rs/ markovicp/papers/2017-MalcevSD%28meet%29-preprint.pdf*

[15] T. Feder and M.Y. Vardi. The Computational Structure of Monotone Monadic SNP and Contraint Satisfaction: A Study through Datalog and Group Theory. *SIAM J. Computing*, 28(1):57-104, 1998.

[16] P. Jeavons. On the Algebraic Structure of Combinatorial Problems. *Theoretical Computer Science*, 200:185-204, 1998.

[17] J. Jovanović, P. Marković, R. McKenzie and M. Moore. Optimal strong Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity in locally finite varieties. Algebra Universalis 76 (2016) no. 3, 305-325.

[18] M. Kozik, A. Krokhin, M. Valeriote nd R. Willard. Characterizations of several Maltsev conditions. Algebra Universalis 73 (2015) no. 3-4, 205-224.

[19] J. Nešetril and V. Rödl. Chormatically Optimal Rigid Graphs. *J. Comb. Theory, Series B*, 46:122-141, 1989.

[20] N. Pippenger. *Theories of Computability*. Cambridge University Press, 1997.

[21] E.L. Post. *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic*, volume 5 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton, N.J, 1941.

[22] D. Zhuk. The Proof of CSP Dichotomy Conjecture (preprint). *https://arxiv.org/abs/1704.01914*.

Biografija

Aleksandar Prokić je rođen 18. oktobra 1993. u Šapcu. Osnovnu školu „Nikola Tesla" u Dublju završava 2008. Godine 2012. završava „Mačvansku srednju školu" u Bogatiću kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. Osnovne studije završava 2016. godine sa prosečnom ocenom 10,00 i iste godine upisuje master studije, smer Master profesor matematike. Položio je sve ispite predviđene planom i programom sa prosečnom ocenom 10,00 i time stekao pravo na odbranu ovog rada.

Novi Sad, oktobar 2017.

Aleksandar Prokić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Aleksandar Prokić
VR

Mentor: dr Petar Marković
MN

Naslov rada: Karakterizacija problema zadovoljenja uslova širine 1
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2017.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: (3, 54, 22, 1, 0, 0, 0)
(broj poglavlja, strana, literalnih citata, tabela, slika, grafika, priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Univerzalna algebra
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Problem zadovoljenja uslova, relacijska širina, relacijska struktura
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Cilj ovog rada je upoznavanje sa problemima zadovoljenja uslova, kao i karakterizacija problema širine 1. Prva glava sadrži definiciju i neke primere

problema zadovoljenja uslova. U drugoj glavi se definiše širina problema zadovoljenja preko (j, k)-konzistencije, a zatim se dokazuje glavna teorema ovog rada, da skup relacija ima širinu 1 ako i samo ako je kompatibilan sa nekom skupovnom funkcijom. Zatim je data definicija funkcije koja garantuje polinomnu složenost, kao i neke klase tih funkcija. U trećoj glavi se definiše širina problema zadovoljenja uslova preko k-minimalne familije. Zatim se preko k-relstabala i k-urelstabala pokazuje da svaka relacijska struktura koja ima širin 2 ima takođe širinu 1, odnosno nema pravu širinu 2.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 23.06.2017.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Mentor: dr Petar Marković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
Član: Petar Đapić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Aleksandar Prokić
AU

Mentor: Aleksandar Prokić, Ph. D.
MN

Title: Characterization of Constraint Satisfaction Problems of width 1
TI

Language of abstract: English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: 3 chapters/54 pages/1 tables/22 refences
PD

Scientifictield: Mathematics
SF

Scientific discipline: Univesal Algebra
SD

Subject/Key words: Constraint Satisfaction Problem, Width 1, Relation structure
SKW

Holding data: Library of Department of Mathematics and Inforatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master's paper describes Constraint Satisfaction Problems and Characterization of Constraint Satisfaction Problems of width 1. Starting section consists of the definition and examples of Constraint Satisfaction Problems. In the second section, we give the definition of width using (j, k)-consistency. Next we prove the main theorem, claiming that a set of relations has width 1 if and only if that set is compatible with some set function. We give examples of functions which guarantee tractability. In the third section, we define relational width of Constraint Satisfaction Problems using the con-

cept of a k-minimal family. We prove, using k-reltrees and k-greltrees, that every relational structure with width 2 has also width 1, i.e. there are no relations of pure relational width 2.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 23.06.2017.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB
President: Ivica Bošnjak, Ph.D., associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Petar Marković, Ph.D., full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, mentor
Member: Petar Đapić, Ph.D., docent, Faculty of Science, University of Novi Sad