Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Aleksandar Janjoš

Linearno uređena topologija

Master rad

Mentor:

Dr Aleksandar Pavlović

2017, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor

Moram biti iskren, nisam imao predstavu čime ćemo se moje kolege i ja sve baviti u toku studija matematike. Jedna od stvari o kojima nisam znao gotovo ništa jeste i topologija, koja me je do danas najviše oduševila, kao ambicija objedinjavanja srodnih rezultata iz analize, geometrije, logike i algebre, sa kojima smo se do tada susreli.

Prva ideja o topologiji potiče još od Lajbnica, i pojmova koje je on okarakterisao kao geometrija i analiza prostora (geometria situs i analysis situs su pojmovi koje je isticao), a za prve teoreme i zaključke u topologiji smatraju se Ojlerov problem koningsbergških mostova i polihedronska formula. Kao samostalna disciplina topologija se ipak javlja tek u 20. veku, u kojem su se neki od najvećih matematičara toga doba bavili upravo zasnivanjem same topologije. Kroz razvoj topologije kao osobine postavljena su različita opšta pitanja, kao što je i sumnja u preveliku opštost teorije koja bi obuhvatala sve i svašta, pitanje klasifikacije topoloških prostora, ali i kakvih to sve topoloških prostora ima.

Kroz master rad pozabavićemo se pojmom linearno uređenih topologija i različitim osobinama istih, prateći probleme navedene u knjizi „General Topology“ autora Ryszard Engelking-a. Videćemo različite osobine konkretnih linearno uređenih topoloških prostora, kao i međusobnu zavisnost pojedinih osobina.

U poglavlju 1 (Uvod) biće reči o osnovnim topološkim pojmovima i baziènoj aparaturi kojom ćemo se koristiti. Akcenat će biti na osnovnim tvrđenjima i činjenicama vezanim za pojmove: separabilnosti, kompaktnosti, povezanosti, baza topologije, ali i aksiomama separacije, osobinama prostora o kojima će biti reči u radu. Podsetićemo se osnovnih pojmova vezanih za linearna uređenja, funkcije i skupove, ali definisati i ordinale, kardinale i kardinalne funkcije.

Poglavlje 2 posvećeno je definisanju linearno uređene topologije, preko baze koju ćemo zadati na osnovu linearnog uređenja na nekom skupu, a biće naglašena i podbaza koju ćemo koristiti u nekim dokazima. Dalje, pokazaćemo da je svaki linearno uređen prostor normalan prostor koristeći se pojmom diskretnog podskupa i specijalne osobine koju diskretni podskup ima na linearno uređenom skupu. Na kraju poglavlja, biće reči i o sekvencijalnim prostorima i prvoj aksiomi prebrojivosti, koju zadovoljavaju sekvencijalni linearno uređeni prostori.

U poglavlju 3 videćemo neke rezultate vezane za potprostore linearno uređenih prostora, kao i sam dokaz nasledne normalnosti svakog linearno uređenog prostora, do kojeg ćemo doći na osnovu nekoliko rezultata vezanih za potprostore. Videćemo da se na linearno gustim i konveksnim podskupovima indukovana topologija slaže sa linearno uređenom topologijom koju formira restrikcija linearnog uređenja na tom podskupu. Bavićemo se osobinama konveksnog podskupa, i pokazati da se svaki podskup linearno uređenog skupa može razložiti na konveksne komponente. Ova osobina pokazaće se kao ključna u dokazu nasledne normalnosti.

Poglavlje 4 sadrži neke rezultate vezane za kompaktnost linearno uređenih prostora.

Tu ćemo videti uslov da linearno uređen prostor bude kompaktan, ali će biti reči i o konkretnim primerima (leksikografskom uređenju, prirodnom poretku među ordinalima). Upoznaćemo se sa pojmom kompaktifikacije, i dati precizan prikaz univerzalne kompaktifikacije svih linearno uređenih topoloških prostora. Do kompaktifikacije dolazimo preko pojma Dedekindovog preseka, i linearnog uređenja na skupu svih Dedekindovih preseka linearno uređenog prostora. Nakon ispitivanja prostora sa leksikografskim uređenjem, dotaći ćemo se i kardinalnih funkcija i njihovih specifičnih odnosa na linearno uređenim prostorima. Osobina koja će najviše figurisati jeste osobina Dedekindove kompletnosti, koja je ekvivalentan uslov kompaktnosti prostora za linearno uređene topološke prostore.

U poglavlju 5 pozabavićemo se pojmom povezanosti, i dati uslov kada je linearno uređen prostor povezan. Ključnu ulogu igraće prostori koji zadovoljavaju osobinu linearnog kontinuuma, tj. imaju osobine Dedekindove kompletnosti i gustog uređenja. Takođe, biće reči i o nekim specijalnim osobinama, koje proizilaze iz povezanosti linearno uređenih prostora, gde ćemo ponovo videti koliku ulogu igra osobina linearnog kontinuuma. Dotaći ćemo se i specijalnog odnosa linearno uređenih prostora sa realnom pravom i intervalima realnih brojeva.

Poglavlje 6 sadržaće zaključak.

Glava 1

Uvod

1.1 Skupovi, relacije i funkcije

U uvodu navodimo najbitnije pojmove iz oblasti algebre i topologije koje ćemo koristiti kroz rad, i koji su nam potrebni za razumevanje linearno uređenih topoloških prostora. Kao bazu korišćeni su [3], [6] i [12]. U prvom delu uvoda, uvešćemo notaciju koju ćemo koristiti sa osnove operacije sa skupovima, dati definicije osnovnih pojmova i na kraju završiti sa ordinalima i kardinalima, kao i linearnim uređenjem.

Počnimo sa skupovima, osnovnim alatom topologije. Skup A je podskup skupa B akko je svaki element skupa A ujedno element i skupa B. To ćemo označavati sa $A \subseteq B$, gde, ako želimo da naglasimo da je skup A strogo sadržan u skupu B (znamo da A i B nisu jednaki), koristimo oznaku $A \subset B$. Istaknimo i prazan skup, u oznaci $\emptyset$, koji ne sadrži niti jedan element, i podskup je svakog skupa. Partitivan skup skupa X,u oznaci $P(X)$, jeste skup svih njegovih podskupova. Napomenimo i standardne oznake za skupove brojeva koje ćemo koristiti u radu. Skup prirodnih brojeva obeležavaćemo sa $\mathbb{N}$, skup celih sa $\mathbb{Z}$, skup racionalnih sa $\mathbb{Q}$, a skupove realnih i kompleksnih sa $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Osnovne operacije među skupovima su presek, unija i razlika skupova koje označavamo standardno $\cap, \cup$ i $\setminus$. Takođe napomenimo da za kolekciju skupova $A_1, A_2, ..., A_k$, za $k \in \mathbb{N}$, presek $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ označavamo sa $\bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i$, a uniju $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ sa $\bigcup_{1 \leq i \leq k} A_i$. Familijom nazivamo svaku kolekciju skupova, ili kako neki autori zapisiju, skupom koji sadrži skupove. Celu priču unije i preseka prenosimo i na proizvoljne familije skupova, koje indeksiramo po nekom indeksnom skupu I, za $\mathcal{A} = \{A_i | \ i \in I\}$ unija i presek familije su: $\bigcup_{i \in I} A_i$ i $\bigcap_{i \in I} A_i$, ili u nekom slučajevima gde familije navodimo bez indeksnog skupa uniju i presek familije označavamo sa $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ i $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Naravno, potrebno je takođe naznačiti šta unija i presek familije nekih skupova zapravo predstavljaju. Za familiju $\mathcal{A}$ unija i presek familije su skupovi:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x | \ (\exists A \in \mathcal{A}) x \in A\}, \quad \bigcap \mathcal{A} = \{x | \ (\forall A \in \mathcal{A}) x \in A\}.$$

Istaknimo i da se presek familije definiše samo kada govorimo o nepraznoj familiji, tj. kada $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Skupove sa konačno mnogo elemenata, npr. skup koji sadrži elemente $x_1, x_2, ..., x_k$, $k \in \mathbb{N}$, obeležavamo sa $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Naravno, pridržavamo se notacije i ideje da nije bitno kojim redom navodimo elemente skupa. Skupovi, kod kojih nam je bitan redosled navođenja elemenata jesu uređene n-torke (skupovi sa n elemenata kod koji je bitan redosled navođenja), gde ističemo uređene parove. Za a, b uređen par u oznaci (a, b) ili $\langle a, b \rangle$ jeste skup $\{a, \{a, b\}\}$. Pošto topološke prostore, kao i rezove, navodimo kao uređene parove, koristićemo standardnu notaciju za uređene parove gde će se u daljem tekstu moći zaključiti kada je reč o intervalima, a kada sa uređenim parovima iz konteksta samih dokaza i teorema (ovde pogotovo treba naglasti glavu 4, i priču o kompaktifikaciji).

Dekartov proizvod skupova X i Y, u oznaci $X \times Y$ jeste skup svih uređenih parova (x, y), gde je $x \in X$ i $y \in Y$. Svaki podskup Dekartovog proizvoda $X \times Y$ jeste relacija. Relacija $f \subset X \times Y$ je funkcija, ili preslikavanje, iz X u Y ako za svako $x \in X$ postoji $y \in Y$ takvo da je $(x, y) \in f$ i ako je y jedinstveno određeno za x, tj. ako imamo $(x, y) \in f$ i $(x, y') \in f$ onda je $y = y'$. Skup X nazivamo domenom, a skup Y skupom slika funkcije f.

Ako imamo funkciju f iz skupa X u skup Y, tada jedinstvenu vrednost y za $x \in X$ označavamo i sa $f(x)$. Definišemo i direktnu sliku skupa $A \subset X$, za funkciju f, podskup skupa slika Y:

$$f(A) = f[A] = \{y \in Y|\ y = f(x),\ \text{za neko } x \in A\}$$

kao i skup inverznu sliku skupa $B \subset Y$ za funkciju f kao:

$$f^{-1}(B) = f^{-1}[B] = \{x \in X|\ f(x) \in B\},$$

gde je potrebno naglasati da zbog nekih komplikacija u zapisu koristimo uglaste zagrade u nekim delovima.

Ako je f funkcija iz skupa X u skup Y, i ako je g funkcija koja slika skup Y u skup Z, kompoziciju funkcija označavamo sa $g \circ f$, i ona predstavlja preslikavanje iz skupa X u skup Z takvo da je $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, za $x \in X$.

Funkcija f iz X u Y je injektivna, ili "1-1", ako za sve $x_1, x_2 \in X$ važi da, ako $f(x_1) = f(x_2)$ onda važi $x_1 = x_2$. Ako funkcija f zadovoljava uslov da je $f(X) = Y$, za nju kažemo da je sirjektivna, ili "na". Inverzne funkciju, u oznaci f^{-1} postoje u slučaju da je funkcija f injektivna, gde, ako f slika X u Y injektivno, tada f^{-1} slika $f[X]$ u X takođe injektivno, i definišemo ga kao $f^{-1}(y) = x$ kada je $f(x) = y$. Identičko preslikavanje skupa X, jeste preslikavanje skupa X u njega samoga, u oznaci $id_X : X \to X$, koje je definisano kao $id_X(x) = x$ za svako x iz skupa X.

Ako je X neprazan skup, onda svako preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup X, $x : \mathbb{N} \to X$, zovemo niz u skupu X. Tada umesto $x(n)$ obično pišemo x_n, a niz x označavamo sa $\{x_n|\ n \in \mathbb{N}\}$, ili kraće sa $\{x_n\}$.

Relacija ρ skupa X, tj. imamo da je $\rho \subseteq X \times X$, je relacija ekvivalencije akko je refleksivna (R), simetrična (S) i tranzitivna (T), što znači da zadovoljava sledeće uslove:

R $(\forall x \in X)\ x\rho x$,

S $(\forall x, y \in X)$ ako važi $x\rho y$ onda važi i $y\rho x$

T $(\forall x, y, z \in X)$ ako važi $x\rho y$ i $y\rho z$ tada važi i $x\rho z$,

gde je potrebno istaći da pišemo $x\rho y$ ako važi $(x, y) \in \rho$. Svaka relacija ekvivalencije određuje dekompoziciju samog skupa na kojem je definisana na disjunktkne skupove čija je unija ceo skup X. Disjunktni skupovi čija je unija ceo skup nazivaju se klase ekvivalencije, gde dva elementa skupa pripadaju istoj klasi ekvivalencije akko su u relaciji (preciznije rečeno oba uređena para određena ovim elemntima su elementi relacije). Klasu elementa x označavamo sa $[x]$, a dekompoziciju skupa nazivamo particija. Takođe, proizvoljna particija, tj. familija disjunktnih podskupova nekog skupa čija je unija ceo skup, određuje relaciju ekvivalencije.

Relacija ρ je relacija poretka na skupu X ako je refleksivna (R), antisimetrična (A) i tranzitivna (T). Relacija ρ je antisimetrična akko $(\forall x, y \in X)(x\rho y \wedge x \neq y) \implies \neg y\rho x$, gde je sa $\neg y\rho x$ označeno da $(y, x) \notin \rho$. Ako imamo da je $\leq$ relacija poretka na skupu X, tada ćemo uređeni par $(X, \leq)$ nazivati parcijalno uređen skup. Često ćemo samo skup P nazivati parcijalno uređenim skupom ako je iz konteksta jasno koje je uređenje u pitanju. Slično ćemo postupati i sa linearno uređenim skupovima.

Neka je $(P, \leq)$ parcijalno uređen skup, $\emptyset \neq X \subset P$ i $a \in P$. Tada je a:

- gornje ograničenje skupa X ako $(\forall x \in X)\ x \leq a$.
- donje ograničenje skupa X ako $(\forall x \in X)\ a \leq x$.
- supremum skupa X, u oznaci $\sup X$, ako je a gornje ograničenje skupa X, i za svako drugo gornje ograničenje b skupa X važi $a \leq b$.
- infimum skupa X, u oznaci $\inf X$, ako je a donje ograničenje skupa X, i za svako drugo donje ograničenje c skupa X važi $c \leq a$
- maksimum skupa X ako $a \in X$, i za svako $x \in X$ važi da je $x \leq a$.
- minimum skupa X ako $a \in X$, i za svako $x \in X$ važi da je $a \leq x$.

Za skup X kažemo da je ograničen odozgo akko ima gornje ograničenje, analogno, za skup X kažemo da je ograničen odozdo akko ima donje ograničenje. Parcijalno uređen skup P je dobro uređen akko svaki neprazan podskup skupa P ima minimum.

Skup x je tranzitivan ako i samo ako za svako $y \in x$ važi $y \subset x$. Tranzitivan skup α je ordinal ako i samo ako je $(\alpha, \in)$ dobro uređen skup. Klasu svih ordinala označavamo sa ON. Elementi ordinala su takođe ordinali, i za svako $\beta \in \alpha$ važi $\beta = \{\gamma \in \alpha |\ \gamma \in \beta\}$. Neka je α ordinal, tada je $\alpha^+ = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ takođe ordinal kojeg nazivamo sledbenik ordinala α. Neprazan ordinal koji nije sledbenik nazivamo granični ordinal.

Neka je X neprazan skup ordinala. Tada je $\bigcap X$ ordinal koji pripada X i važi da je $\bigcap X = \min(X, \in)$, tj. možemo zaključiti da je svaki skup ordinala dobro uređen relacijom $\in$. Sa druge strane, $\bigcup X$ je takođe ordinal, i to najmanji za koji važi da za svako $\alpha \in X$ imamo $\alpha \leq \bigcup X$. Skup ordinala ne mora biti ordinal, ali zato svaki tranzitivan skup ordinala jeste ordinal.

Skupovi A i B su ekvipotentni, u oznaci $A \sim B$, ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Ordinal α je kardinal ako i samo ako za sve $\beta \in \alpha$ važi $\neg\beta \sim \alpha$. Za skup X definišemo njegov kardinalni broj u oznaci $|X|$ kao $|X| = \kappa$ akko je κ kardinal i $X \sim \kappa$. Sa ω označavamo prvi beskonačni kardinal, a sa ω_1 prvi neprebrojivi kardinal. Skup A je beskonačan ako i samo ako je ekvipotentan nekom svom pravom podskupu, tj. ako postoji neko $A_1 \subset A$ takvo da je $A_1 \sim A$. SKup je konačan ako i samo ako nije beskonačan. Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva označavamo sa $\aleph_0$. Za skup A kažemo da je prebrojiv ako i samo ako je $A \sim \mathbb{N}$, tj. $|A| = \aleph_0$. Napomenimo i teoremu Kantora: za proizvoljan skup A važi $|A| < |P(A)|$. Po teoremi Kantora imamo $|P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Kardinalni broj $|P(\mathbb{N})|$ označavamo sa $\mathfrak{c}$ i naziva se kontinuum. Skup realnih brojeva, kao svi intervali realnih brojeva imaju kardinalnost $\mathfrak{c}$.

Parcijalno uređen skup $(X, \leq)$ je linearno uređen akko

$$(\forall x, y \in X)\ x \leq y \vee y \leq x.$$

Ako na skupu X imamo linearno uređenje $\leq$, može se definisati relacija $<\subset X \times X$ koja je irefleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija. Relacija je irefleksivna akko nema elementa skupa koji je u relaciji sa samim sobom. Za ovu relaciju takođe važi i zakon trihotomije:

$$(\forall x, y \in X)(x < y \lor y < x \lor x = y).$$

Obratno, ako imamo $<\subset X \times X$ koja je irefleksivna, antisimetrična i tranzitivna, i pritom zadovoljava zakon trihotomije, onda relacija $\leq\subset X \times X$ definisana sa $x \leq y \Leftrightarrow x < y \lor x = y$ određuje linearno uređenje na X. Pošto obe relacije linearno uređuju skup X, možemo ih ravnopravno koristiti.

Definicija 1.1. *Linearno uređenje $(X, <)$ je gusto ako i samo ako*

$$(\forall x, y \in X) \quad (x < y \implies (\exists z \in X \ x < z < y)).$$

Definicija 1.2. *Linearno uređen skup X je Dedekind kompletan ako zadovoljava Dedekindovu aksiomu: svaki podskup $A \subset X$ ima najmanje gornje ograničenje.*

Definicija 1.3. *Linearno uređen skup je neprekidno uređen akko*

1. *X je gusto linearno uređen,*
2. *X je Dedekindovski kompletan.*

Definicija 1.4. *Neka je $(X, <)$ linearno uređen skup. Uređeni par (D, E), gde su $D, E \subset X$ je rez ako i samo ako*

1. *$D \neq \emptyset$ i $E \neq \emptyset$,*
2. *$(x \in D \land y \in E) \implies x < y$,*
3. *$X = D \cup E$.*

Skup D ćemo zvati donja klasa, a skup E gornja klasa. Dalje, za svaki rez (D, E) linearno uređenog skupa X važi tačno jedan od sledećih uslova:

1. Postoji $\max D$ i postoji $\min E$.
2. Postoji $\max D$ i ne postoji $\min E$.
3. Ne postoji $\max D$ i postoji $\min E$.
4. Ne postoji $\max D$ i ne postoji $\min E$.

Ako je ispunjen uslov 1. tada rez nazivamo skok(od engleske reči *jump*), a ako je ispunjen uslov 4. tada rez nazivamo pukotina (od engleske reči *gap*). Na kraju, imamo da je X gusto uređen ako i samo ako ni jedan od rezova nije skok. Ako pritom ni jedan od rezova nije pukotina, onda je X neprekidno uređen.

Teorema 1.1. *Linearno uređen skup X je dedekindovski kompletan akko ne postoji pukotina.*

Potrebno je diskutovati i odnos minimalnog, odnosno maksimalnog elementa, ili ti krajnjih tačaka linearnog uređenja, sa praznim skupom. Naime, svaki element linearnog uređenja X jeste jedno gornje ogračenje $\emptyset$, pošto nema takvog $y \in \emptyset$ takvog da je $x \nleq y$ (pošto ništa ne pripada praznom skupu). Jasno, ako linearno uređenje ima najmanji element (takav da su svi ostali element u relaciji sa njim) on će biti gornje ograničenje i to najmanje, jer je manji od svih ostalih elemenata, pa važi $\sup \emptyset = x$, gde je x minimalni element skupa X. Slično pristupamo i infimumu praznog skupa. Ako imamo proizvoljno $x \in X$, tada ne postoji $y \in \emptyset$ takvo da je $y \nleq x$, pa je x donje ograničenje. Jasno, šta važi za proizvoljan element, važi i za svaki element skupa X, pa su svi elementi donja ograničenja za $\emptyset$. Sada, $\emptyset$ ima najveće donje ograničenje ako X ima maksimalni element, te za $y = \max X$ imamo da je $\inf \emptyset = y$.

Homomorfizam između dva linearna uređenja $(X, <_X)$ i $(Y, <_Y)$ je svako preslikavanje $f : X \to Y$ za koje važi: ako su $a, b \in X$ i $a <_X b$, tada je i $f(a) <_Y f(b)$. Homomorfizam f je izomorfizam ako i samo je f bijekcija. Sada možemo navesti i sledeću teoremu, koja takođe nosi ime po Kantoru.

Teorema 1.2. *Ma koja dva prebrojiva gusta linearna uređenja bez krajnjih tačaka su izomorfna.*

1.2 Osnovne topološke osobine

U drugom delu pozabavićemo se pojmom topologije, topološkog prostora i različitih osobina istih, i istaći za nas najbitnije osnovne topološke osobine. Naravno, počinjemo sa pojmom otvorenog skupa, topologije i topološkog prostora.

Definicija 1.5. *Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako važe sledeća tri uslova:*

$(O1)$ *$\emptyset$ i skup X su otvoreni, tj. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,*

$(O2)$ *Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, tj. za svako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$,*

$(O3)$ *Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, tj. za svaku familiju $\{O_i |\ i \in I\} \subset \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.*

Za familiju $\mathcal{O}$ kažemo i da je topologija na skupu X, dok uređeni par $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je topološki prostor, a elemente skupa X nazivamo tačkama. Dalje, za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako i samo ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren skup. Najpoznatiji primer topologije na skupu realnih brojeva jeste uobičajena topologija, u oznaci $\mathcal{O}_{uob}$, (gde ćemo u nastavku videti da bazu, pojam koji uvodimo u uvodu, ovog prostora čine otvoreni intervali koje uvodimo u glavi 2) skupa realnih brojeva, upravo ono što će odgovarati linearno uređenoj topologiji na $\mathbb{R}$. Familiju zatvorenih skupova označavamo sa $\mathcal{F}$.

Ako su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ topologije na skupu X, i ako je $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, tada kažemo da je topologija $\mathcal{O}_2$ finija u odnosu na topologiju $\mathcal{O}_1$, odnosno da je $\mathcal{O}_1$ grublja u odnosu na topologiju $\mathcal{O}_2$.

Kako je već navedeno, zatvoreni skupovi su komplementi otvorenih. U narednoj teoremi dajemo neke njihove osnovne osobine.

Teorema 1.3. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada familija $\mathcal{F}$ svih zatvorenih skuova zadovoljava sledeće uslove:*

$(F1)$ *Prazan skup i skup X su zatvoreni,*

$(F2)$ *Unija dva (pa i konačno mnogo) zatvorenih skupova je zatvoren skup,*

$(F3)$ *Presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.*

Treba imati u vidu da se topološka struktura, upravo zbog veze zatvorenih i otvorenih skupova, može definisati i ako prvo krenemo od kolekcije svih zatvorenih skupova.

Naredni pojam baze topologije se može nazvati pandanom baze vektorskog prostora. Naime, kako svaki vektor nekog vektorskog prostora možemo da izrazimo kao linearnu kombinaciju baznih vektora, tako i svaki otvoreni skup $O \in \mathcal{O}$ možemo izraziti kao uniju elemenata baze topologije. Familiju $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ nazivamo bazom topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ ako se svaki neprazan otvoreni podskup skupa X može predstaviti kao unija neke podfamilije familije $\mathcal{B}$.

Teorema 1.4. *Svaka baza $\mathcal{B}$ topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava sledeće uslove:*

$(B1)$ *Za sve $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ i svaku tačku $x \in U_1 \cap U_2$ postoji $U \in \mathcal{B}$ takvo da je $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.*

$(B2)$ *Za svaku tačku $x \in X$ postoji $U \in \mathcal{B}$ takvo da je $x \in U$.*

Definicija 1.6. *Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je baza neke topologije na skupu X ako i samo ako je kolekcija $\{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \mid \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\}$ topologija na skupu X.*

Teorema 1.5. *Kolekcija $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ je baza neke topologije na skupu X ako i samo ako zadovoljava sledeće uslove:*

$(BN1)$ $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

$(BN2)$ $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *postoji kolekcija* $\{B_i | \ i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ *takva da je* $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Takođe definišemo i podbazu topološkog prostora:

Definicija 1.7. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kolekcija $\mathcal{P} \subseteq P(X)$ je podbaza topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

$(PB1)$ *Elementi kolekcije $\mathcal{P}$ su otvoreni skupovi,*

$(PB2)$ *Familija svih konačnih preseka elemenata $\mathcal{P}$ predstavlja neku bazu topologije $\mathcal{O}$.*

Nakon što smo uveli pojam baze možemo govoriti o drugoj aksiomi prebrojivosti. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti ako i samo ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ takva da je $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. Ekvivalent da prostor ima prebrojivu bazu jeste da prostor ima prebrojivu podbazu.

Pošto će u 5. glavi biti reči o metrizabilnim prostorima treba istaći i pojmove metrike i topologije određene metrikom. Na nepraznom skupu X metrika je svaka funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ takva da za sve $x, y, z \in X$ važe sledeći uslovi:

$(M1)$ $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,

$(M2)$ $d(x,y) = d(y,x)$,

$(M3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Ako je d metrika na skupu X, uređeni par (X,d) nazivamo metričkim prostorom, a broj $d(x,y)$ rastojanjem između tačaka x i y. Ako je $x \in X$ i $r > 0$ tada skup

$$L(x,y) = \{y \in X |\ d(x,y) < r\},$$

nazivamo otvorena lopta sa centrom u tački x poluprečnika r.

U svakom metričkom prostoru možemo na prirodan način doći do topologije, i to na sledeći način.

Teorema 1.6. *Neka je (X,d) metrički prostor. Tada je familija svih otvorenih lopti $\mathcal{B}_d = \{L(x,r) |\ x \in X \wedge r > 0\}$ baza neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X.*

Za topologiju $\mathcal{O}_d$ kažemo da je određena, ili indukovana, metrikom d. Topološki prostor $(X,\mathcal{O})$ je metrizabilan ako i samo ako postoji neka metrika d na skupu X takva da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Definicija 1.8. *Neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je okolina tačke $x \in X$ ako i samo ako postoji otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ takav da je $x \in O \subseteq A$. Familiju svih okolina tačke x obeležavamo sa $\mathcal{U}_{(x)}$.*

U topološkim prostorima važi i da je skup otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke. Nakon uvođenja okolina, možemo nastaviti priču o nizovima, pa neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je granica niza $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji prirodan broj n_0, takav da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Za niz koji ima bar jednu granicu kažemo da je konvergentan. Granica ne mora biti jedinstvena u opštem slučaju, ali znamo da je dovoljan uslov da niz ima najviše jednu granicu da je prostor X Hauzdorfov. Ako je tačka x granica nekog niza tačaka skupa A, onda je $x \in \overline{A}$.

Nakon pojma okoline upoznajemo se i sa pojmom baze okolina, ali i prvom aksiomom prebrojivosti.

Definicija 1.9. *Neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor, i neka je $x \in X$. Familija skupova $\mathcal{B}_{(x)}$ je baza okolina tačke x ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

$(BO1)$ *Elementi kolekcije $\mathcal{B}_{(x)}$ su okoline tačke x,*

$(BO2)$ $\forall U \in \mathcal{U}_{(x)}\ \exists B \in \mathcal{B}_{(x)}\ (B \subseteq U)$.

Topološki prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti ako i samo ako za svaku tačku prostora postoji njena prebrojiva baza okolina. Svaki metrički prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti zbog činjenice da familija svih otvorenih lopti sa centrom u jednoj tački čini jednu bazu okolina, gde dalje od te baze uzimamo samo one lopte čiji je poluprečnik $\frac{1}{n}$ gde je $n \in \mathbb{N}$. Dalje, navodimo tvrđenje koje povezuje prvu i drugu aksiomu prebrojivosti.

Teorema 1.7. *Neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor, $x \in X$ i $\mathcal{B}$ neka baza topologije $\mathcal{O}$. Tada važi:*

1. *Familija $\mathcal{B}_{(x)} = \{B \in \mathcal{B} |\ x \in B\}$ je baza okolina tačke x,*

2. *Ako prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda on zadovoljava i prvu aksiomu prebrojivosti.*

Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Tačka $x \in X$ je adherentna tačka skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup A. Tačka $x \in X$ je tačka nagomilavanja skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x seče skup $A \setminus \{x\}$. Skup svih adherentnih tačaka skupa A zovemo adherencija, ili zatvaranje, skupa A i označavamo ga sa $\overline{A}$, dok skup svih tačaka nagomilavanja skupa A zovemo izvod skupa A, i označavamo ga sa A'. Neke od osobina zatvorenja i izvoda jesu: da je skup A zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$, skup $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A i skup A je zatvoren ako i samo ako je $A' \subset A$.

Skup $D \subset X$ je gust X ako i samo ako je $\overline{D} = X$, pisaćemo još i topološki gust kako bismo razlikovali pojam uređajne gustine podskupa. Skup D je gust u topološkom prostoru X ako i samo ako seče svaki neprazan bazni skup. Za topološki prostor X kažemo da je separabilan ako i samo ako postoji prebrojiv gust skup u X. Ako prostor X zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti onda je i separabilan, dok obrat ne mora da važi.

Familija $\mathcal{A} = \{A_s | \ s \in S\}$ podskupova topološkog prostora X je lokalno konačna ako za svaku tačku $x \in X$ postoji okolina U tačke x takva da U seče konačno mnogo skupova iz $\mathcal{A}$. Ako za svaku tačku $x \in X$ postoji okolina koja seče najviše jedan skup iz familije $\mathcal{A}$, onda je familija $\mathcal{A}$ diskretna. Topološki prostor X je sekvencijalan ako i samo ako u njemu važi: skup $A \subset X$ je zatvoren ako i samo ako skup A sadrži granicu svakog konvergentnog niza elemenata iz A.

Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je x_0 proizvoljna tačka skupa X. Funkcija $f : X \to Y$ je

- neprekinda u tački x_0 ako i samo ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 takva da je $f[U] \subseteq V$,

- neprekinda ako i samo ako je neprekinda u svakoj tački skupa X.

Teorema 1.8. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *Preslikavanje f je neprekidno.*

2. *Za svaki otvoreni skup $O \subseteq Y$, skup $f^{-1}[O] \subseteq X$ je otvoren.*

3. *Za svaki zatvoren skup $F \subseteq Y$, skup $f^{-1}[F] \subseteq X$ je zatvoren.*

4. *Za svaki skup $A \subseteq X$ važi $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.*

5. *Ako je $\mathcal{B}_Y$ proizvoljna baza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $B \in \mathbb{B}_Y$ skup $f^{-1}[B] \subseteq X$ otvoren.*

6. *Ako je $\mathcal{P}_Y$ proizvoljna podbaza topologije $\mathcal{O}_Y$, onda je za svaki skup $P \in \mathcal{P}_Y$ skup $f^{-1}[P] \subseteq X$ otvoren.*

Teorema 1.9. *Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ i $(Z, \mathcal{O}_Z)$ topološki prostori, a $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidno preslikavanje.*

Uz pojam neprekidnog preslikavanja, za topološke prostore jako su bitni i pojmovi otvorenog i zatvorenog preslikavanja, kao i pojmovi homeomorfizma i potapanja. Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori, preslikavanje $f : X \to Y$ je otvoreno ako i samo ako je za svaki otvoreni skup $O \subseteq X$ skup $f[O] \subseteq Y$ otvoren. Preslikavanje f je zatvoreno ako i samo ako je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$, skup $f[F] \subseteq Y$ zatvoren. Preslikavanje f je homeomorfizam ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. f je bijekcija,
2. f je neprekidno,
3. f^{-1} je neprekidno.

Prostori $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ homeomorfni, u oznaci $X \cong Y$, ako i samo ako postoji homeomorfizam $f : X \to Y$.

Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je preslikavanje $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

- f je homeomorfizam.
- f je otvoreno.
- f je zatvoreno.

Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je potapanje ako i samo ako je sirjektivna restrikcija $f|_X$ homeomorfizam. Ako je $g : X \to Y$ proizvoljno preslikavanje tada važi:

1. Ako je g neprekidna otvorena injekcija, onda je g potapanje.
2. Ako je g neprekinda zatvorena injekcija, onda je g potapanje.

U velikoj većini matematičkih teorija u toku izučavanja određenih struktura veoma je bitno izučavati i njene podstrukture. One nam mogu dati neke specifične osobine same strukture, a samim time dobijamo i nove modele same teorije. Kako se u teoriji grupa izučavaju podgrupe, ili potprostori vektorskog prostora, tako i topologija izučava potprostore topološkog prostora. Do topologije na nepraznom podskupu $A \subseteq X$ topološkog prostora $(X, \mathcal{O})$ dolazi se na prirodan način: kolekcija $\mathcal{O}_A = \{O \cap A |\ O \in \mathcal{O}\}$ je topologija na skupu A. Za topologiju $\mathcal{O}_A$ na skupu A kažemo da je indukovana topologijom $\mathcal{O}$, i u tom slučaju topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ je potprostor prostora $(X, \mathcal{O})$. Ako je $A \in \mathcal{O}$ (respektivno: $A \in \mathcal{F}$) za ovaj potprostor kažemo da je otvoren (respektivno: zatvoren) potprostor. Takođe važi i sledeće tvrđenje.

Teorema 1.10. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ neprazan skup. Ako sa $\mathcal{F}_A$ označimo familiju svih zatvorenih skupova prostora $(A, \mathcal{O}_A)$, onda važi:*

a) $\mathcal{F}_A = \{F \cap A |\ F \in \mathcal{F}\}$,

b) $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{O}$ *ako i samo ako je* $A \in \mathcal{O}$,

c) $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}$ *ako i samo ako je* $A \in \mathcal{F}$.

Kao i kod ostalih struktura, i u topologiji su zanimljiva pitanja prenošenja osobina sa strukture na podstrukture. Za topološku osobinu $\mathcal{P}$ kažemo da je nasledna ako i samo ako za svaki topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ važi: Ako prostor $(X, \mathcal{O})$ ima osobinu $\mathcal{P}$, onda i svaki njegov potprostor ima tu osobinu. Bitno je istaći da u topologiji imamo i osobine koje isključivo nasleđuju otvoreni, i osobine koje isključivo nasleđuju zatvoreni potprostori. Neki od primera su aksiome seperacije T_0, T_1, T_2 i T_3 koje ćemo definisati nakon potprostora, koje nasleđuju svi potprostori, dok separabilnost nasleđuju samo otvoreni prostori.

Osobina da svake dve tačke realne prave imaju disjunktne otvorene okoline je ključna za dokazivanje jedinstvenosti granice realnog niza i jedinstvenosti granične vrednosti funkcije (ako ove granice postoje) u matematičkoj analizi. Ovu osobinu imaju i svi metrički prostori, dok to ne mora važiti i za sve topološke prostore, i mogućnosti za razdvajanje tačaka otvorenim skupovima su različite. Zato izdvajamo neke od osobina separacije (razdvajanja) tačaka u topološkim prostorima. Neke od njih su tokom istorije bile vezane i za samu definiciju topologije i topološkog prostora.

Definicija 1.10. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je:*

- T_0*-prostor ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji otvoreni skup O koji sadrži tačno jednu od njih.*
- T_1*-prostor ako i samo ako za svaki par različitih tačaka $x, y \in X$ postoji otvoren skup O takav da je $x \in O \not\ni y$.*
- T_2*-prostor ili Hauzdorfov prostor ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da je $x \in O_1$ i $y \in O_2$.*
- *Regularan ako i samo ako za svaki zatvoren skup F i svaku tačku x koja mu ne pripada postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1, O_2 takvi da je $x \in O_1$ i $F \subseteq O_2$.*
- *Normalan ako i samo ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2 postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 takvi da je $F_1 \subseteq O_1$ i $F_2 \subseteq O_2$.*
- T_3*-prostor ako i samo ako je regularan T_1-prostor.*
- T_4*-prostor ako i samo ako je normalan T_1-prostor.*
- $T_{3\frac{1}{2}}$*-prostor ako i samo ako je T_1-prostor sa osobinom da za svaki zatvoren skup F i za svaku tačku $x \notin F$ postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0, 1]$ takvo da je $f(x) = 0$ i $f[F] \subseteq \{1\}$. $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nazivamo još i Tihonovski ili kompletno regularan prostor.*
- T_5*-prostor ako i samo ako je T_4-prostor i svaki njegov potprostor je T_4-prostor. T_5-prostori se nazivaju još i nasledno normalni.*
- T_6*-prostor ako i samo ako je svaki njegov zatvoren skup G_δ skup (prebrojiv presek otvorenih skupova). T_6-prostor se još naziva i savršeno normalan prostor.*

Istaknimo i ekvivalentan uslov da prostor bude T_1, a to je da su svi singltoni (jednoelementni skupovi) zatvoreni.

Teorema 1.11. *Za svaki T_1-prostor X sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *Prostor X je nasledno normalan.*

2. *Svaki otvoren potprostor prostora X je normalan.*

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je T_6-prostor ako i samo ako je T_4-prostor i svaki njegov otvoren skup je F_σ skup (prebrojiva unija zatvorenih). Dalje, za aksiome separacije važi sledeći niz implikacija:

$$T_6 \implies T_5 \implies T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

Još jedna od topoloških osobina koje primenu nalaze u analizi jeste i kompaktnost prostora. Primer primene bi bio kompaktan skup i činjenica da je neprekidna realna funkcija ograničena i uniformno neprekinda nad kompaktnim skupom, i da na kompaktnom skupu dostiže minimum i maksimum. Ovu osobinu prostije možemo opisati kao mogućnost zamene beskonačnog konačnim. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka je $A \subseteq X$. Familija $\{O_i | \ i \in I\}$ podskupova skupa X je pokrivač skupa A ako i samo ako je $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Ako su skupovi O_i, $i \in I$ otvoreni kažemo da je pokrivač otvoren. Za potkolekciju pokrivača koja je i sama pokrivač kažemo da je potpokrivač datog pokrivača.

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je kompaktan ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač. Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je kompaktan skup ako i samo ako je topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan prostor.

Teorema 1.12 (Hajne-Borel)**.** *Podskup A prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je Lindelefov ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži prebrojiv potpokrivač. Ističemo da je topološki prostor kompaktan (respektivno: Lindelefov) ako i samo ako svaki bazni pokrivač skupa X sadrži konačan (respektivno: prebrojiv) potpokrivač. Isto važi i za proizvoljne podskupove skupa X.

Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Definišemo kardinalne funkcije na X:

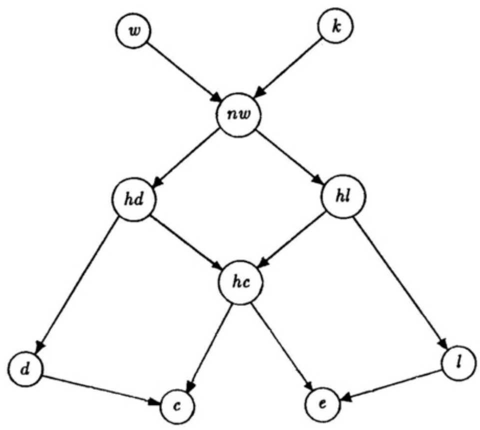
- Težina prostora X: $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B}$ je baza topologije prostora $X\}$.
- Karakter tačke x u prostoru X: $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}_{(x)}| \mid \mathcal{B}_{(x)}$ je baza okolina tačke $x\}$.
- Karakter prostora X: $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) | \ x \in X\}$.
- Pseudokarakter tačke x u T_1 prostoru X, u oznaci $\psi(x, X)$, je najmanji kardinalni broj $|U|$, gde je U familija otvorenih podskupova od X takva da je $\bigcap U = \{x\}$.
- Pseudo karakter T_1 prostora X: $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) | \ x \in X\}$.
- Tesnoća (tightness) tačke x u prostoru X, u oznaci $\tau(x, X)$, je namanji kardinalni broj $\kappa \geq \aleph_0$ sa osobinom da ako $x \in \overline{C}$, onda postoji $C_0 \subseteq C$ takav da je $|C_0| \leq \kappa$ i $x \in \overline{C_0}$.
- Tesnoća (tightness) prostora X: $\tau(X) = \sup\{\tau(x, X) | \ x \in X\}$.
- Ekstent prostora X, u oznaci $e(X)$, je najmanji kardinalni broj $\kappa \geq \aleph_0$ takav da je svaki zatvoren podskup skupa X koji je sačinjen isključivo od izolovanih tačaka skupa X kardinalnosti $\leq \kappa$.

- Celularnost prostora X, u oznaci $c(X)$, je najmanji kardinalni broj $\kappa \geq \aleph_0$ takav da svaka familija po parovima disjunktnih otvorenih podskupova prostora X ima kardinalnost $\leq \kappa$.

- Gustina prostora X, u oznaci $d(X)$, je namanji kardinalni broj oblika $|A|$, gde je A gust podskup skupa X.

- Lindelefov broj prostora X, u oznaci $l(X)$, je najmanji kardinal κ takav da svaki otvoren pokrivač prostora X sadrži otvoren potpokrivač kardinalnosti $\leq \kappa$.

Dalje, za kardinalne funkciju f, definišemo hf kardinalnu funkciju čija je vrednost za prostor X jednaka $\sup f(M)$, gde se supremum posmatra na skupu svih potprostora M prostora X. Kardinalna funkcija hf se naziva nasledno f, gde kao primere imamo naslednu gustinu, nasledni Lindelefov broj, nasledna celularnost... Dodajmo još i pojam mreže prostora X (na engleskom *network*): familija $\mathcal{N}$ je podskupova prostora X je mreža prostora X ako za svaku tačka $x \in X$ i svaku okolinu U od x postoji $N \in \mathcal{N}$ takav da je $x \in U \subseteq N$. Mrežnu težinu prostora X, u oznaci $nw(X)$, definišemo kao najmanju kardinalnost oblika $|\mathcal{N}|$, gde je $\mathcal{N}$ mreža prostora X. Na slici 1.1 možemo videti odnose između kardinalnist funkcija na proizvoljnom prostoru (gde sa k obeležavamo kardninalnost prostora).



Slika 1.1-neki odnosi kardinalnih funkcija

Bitan pojam koji prati kompaktnost prostora jeste i kompaktifikacija. Uređeni par (Y, f) gde je Y kompaktan prostor, a $f : X \to Y$ potapanje prostora X u prostor Y takvo da je $\overline{f[X]} = Y$ naziva se kompaktifikacija prostora X. Bitna osobina linearno uređenih topoloških prostora jeste da su oni uvek T_4-prostori, a samim tim su i kompletno regularni prostori, pa su za nas bitna i tvrđenja:

Teorema 1.13. *Topološki prostor X ima kompaktifikaciju ako i samo ako je X kompletno regularan prostor.*

Teorema 1.14. *Svaki $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X ima kompaktifikaciju (Y, f) takvu da je $w(Y) = w(X)$.*

Topološka osobina koju zadovoljavaju svi prostori koji se proučavaju u matematičkoj analizi jeste povezanost. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je povezan, ili koneksan, ako i samo ako skup X ne može da se predstavi kao unija dva neprazna disjunktna otvorena skupa. Inače kažemo da je prostor nepovezan. Skup $A \subseteq X$ je povezan ako i samo ako je $(A, \mathcal{O}_A)$ povezan prostor. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je

- kontinuum ako i samo ako je kompaktan Hauzdorfov povezan prostor.
- nasledno nepovezan ako i samo ako ne sadrži povezane skupove kardinalnosti veće od 1.
- nula-dimenzionalan ako i samo ako je T_1-prostor i ima bazu $\mathcal{B}$ koja se sastoji od skupova koji su i zatvoreni i otvoreni, tj. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$.
- jako nula-dimenzionalan ako i samo ako je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor i za svaki otvoren pokrivač skupova $\{U_i |\ i \leq k\}$ sa osobinom da postoji neprekidno preslikavanje $f_i : X \to [0, 1]$ i $U_i = f^{-1}[(0, 1)]$ postoji konačno profinjenje $\{V_i |\ i \leq m\}$ da je $V_i \cap V_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Uz naveden uslov postoji još jedan ekvivalentan uslov za jaku nula-dimenzionalnost: za svaki par skupova $A, B \subseteq X$, sa osobinom da postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0, 1]$ takvo da je $f[A] \subseteq \{0\}$, a $f[B] \subseteq \{1\}$, postoji skup koji je i zatvoren i otvoren $U \subseteq X$ takav da je $A \subseteq U \subseteq X \setminus B$. Svaki jako nula-dimenzionalni prostor je nula-dimenzionalni prostor, dok je svaki nula-dimenzionalni prostor nasledno nepovezan. Svaki nula-dimenzionalni prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

Glava 2

Baza linearno uređene toplogije i normalnost prostora

Na skupu sa linearnim uređenjem može se definisati topologija indukovana tim uređenjem koja je normalna, tj. topološki prostor (skup sa topologijom indukovanom linearnom relacijom) koji je normalan Hauzdorfov prostor, što ćemo pokazati u ovom poglavlju. Rezultat ovog poglavlja, zajedno sa nekim osobinama potprostora, dovešće nas do nasledne normalnosti linearno uređene topologije.

Do same linearno uređene topologije dolazimo preko baze koju sačinjavaju otvoreni intervali generisani pomoću linearnog uređenja.

Definicija 2.1. *Neka je skup X linearno uređen relacijom $<$, i neka sadrži barem dva elementa. Tada su, za $a, b \in X$, za koje bez umanjenja opštosti važi $a < b$,*

$$(a, b) = \{x \in X|\ a < x < b\},\ (\leftarrow, a) = \{x \in X|\ x < a\},\ (a, \rightarrow) = \{x \in X|\ a < x\};$$

otvoreni intervali na skupu X.

Pored otvorenih intervala, na linearno uređenom skupu X sa bar dva elementa, za $a, b \in X$, gde je $a < b$, možemo posmatrati još i:

- $[a, b) = \{x \in X|\ a \leq x < b\}$,
- $(a, b] = \{x \in X|\ a < x \leq b\}$,
- $[a, b] = \{x \in X|\ a \leq x \leq b\}$,
- $(\leftarrow, a] = \{x \in X|\ x \leq a\}$,
- $[a, \rightarrow) = \{x \in X|\ a \leq x\}$.

Propozicija 2.1. *Familija $\mathcal{B}$ svih intervala u linearno uređenom (relacijom $<$) skupu X zadovoljava uslove $(B1)$ i $(B2)$, tj. baza je neke topologije.*

Dokaz. Uslov $(B2)$ je krajnje očigledan za linearno uređen prostor. Naime, ako uzmete proizvoljno $x \in X$, on je sadržan u $(\leftarrow, y)$ za $x < y$, kao i u $(y, \rightarrow)$ za $y < x$. Potrebno je napomenuti da, ako je x baš najmanji element u X, onda koristimo proizvnoljno $y \in X$ i $(\leftarrow, y)$, a ako je x najveći u X onda koristimo $(y, \rightarrow)$.

Uslov $(B1)$ pak zahteva pravilno baratanje intervalima. Neka je $x \in X$ i $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, gde $A_1 \neq A_2$, za koje važi $x \in A_1 \cap A_2$. Do željenog baznog $A \in \mathcal{B}$ za koji važi $x \in A \subset A_1 \cap A_2$, u zavisnosti od oblika skupova A_1 i A_2, dolazimo na sledeći način.
Ako su A_1 i A_2 redom $(\leftarrow, a)$ i $(\leftarrow, b)$, za A biramo $(\leftarrow, a)$, ako je $a < b$, ili $(\leftarrow, b)$, ako je $b < a$. Analogno u slučaju $A_1 = (a, \rightarrow)$ i $A_2 = (b, \rightarrow)$.

Sada, neka su $A_1 = (\leftarrow, a)$ i $A_2 = (b, c)$, za $a, b, c \in X$ i $b < c$. Tada u zavisnosti od odnosa a sa b i c imamo slučajeve:

$$\text{Ako je } b < a < c, \text{ tada } A = (b, a), \text{ ili ako je } b < c < a, \text{ tada je } A = (b, c).$$

Potrebno je prokomentarisati da nas slučaj $a < b < c$ ne interesuje, pošto tražimo takve A_1 i A_2 čiji je presek neprazan. Jasno, analogija važi ako bi A_1 bio interval $(a, \rightarrow)$.

Na kraju imamo i mogućnost da je $A_1 = (a, b)$ i $A_2 = (c, d)$, za $a, b, c, d \in X$ i $a < b,\ c < d$. U ovom slučaju, pošto važi $a < x < b$ i $c < x < d$, jer je $x \in A_1$ i $x \in A_2$, za A uzimamo interval $(\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) \subseteq (a, b) \cap (c.d)$. $\square$

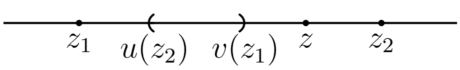
Definicija 2.2. *Linearno uređena topologija, indukovana linearnim uređenjem na nekom skupu, je topologija generisana bazom $\mathcal{B}$, definisanoj u definiciji 2.1. Linearno uređen topološki prostor (LOTS, od engleski Linearly ordered topological space) je prostor čija se topologija može generisati linearnim uređenjem.*

Za bazu linearno uređene topologije $\mathcal{B}$, podbazu čine svi intervali oblika $(\leftarrow, x)$ i $(x, \rightarrow)$ (lako se dokazuje da skup svih takvih zadovoljava osobine $(PB1)$ i $(PB2)$). Kako bismo pokazali da je svaka linearno uređena topologija normalna, prvo moramo dokazati jedno pomoćno tvrđenje gde ćemo koristiti pojam diskretnog skupa.

Definicija 2.3. *Podskup A topološkog prostora X je diskretan ako za svaku tačku skupa A postoji njena okolina koja ne sadrži niti jednu drugu tačku skupa A.*

Teorema 2.1. *Neka je Z diskretan podskup linearno uređenog skupa X sa linearno uređenom topologijom. Tada postoji familija po parovima disjunktnih otvorenih okolina O_z elemenata $z \in Z$.*

Dokaz. Na početku izaberimo za svako $z \in Z$ takav otvoreni interval $I_z = (u(z), v(z))$, gde su $u(z), v(z) \in X$, za koji važi $I_z \cap Z = z$. Pretpostavimo da za elemente $z_1, z_2 \in Z$ važi $z_1 < z_2$ i $I_{z_1} \cap I_{z_2} \neq \emptyset$. Neka je $z_0 \in Z$, takvo je $z_1 < z_0 < z_2$. Tada važi $v(z_1) \leq z_0$ (kako z_0 ne bi pripadalo intervalu I_{z_1}), ali zbog $I_{z_1} \cap I_{z_2} \neq \emptyset$ mora važiti da $z \in I_{z_2}$, pošto je $u(z_2) < v(z_1)$ (jer je presek između intervala neprazan, gde je odnos tačaka kao na slici 1.1). Posto to nije moguće, zbog odabira intervala i diskretnosti skupa Z, u intervalu (z_1, z_2) nemamo niti jednog elementa iz skupa Z.



Slika 2.1

Zato ćemo u slučaju elemenata z_1 i z_2 element z_1 posmatrati kao levog suseda elementa z_2, a element z_2 kao desnog suseda elementa z_1. Dalje, svaki element skupa Z ima najviše jednog levog, odnosno desnog suseda. Sada, za svaki par z_1, z_2 iz skupa Z proizvoljno biramo $w(z_1, z_2) \in X$ koji leži u $I_{z_1} \cap I_{z_2}$, pri čemu pazimo da je $z_1 < z_2$. Sada, možemo napraviti traženu familiju okolina O_z, za $z \in Z$ na sledeći način.

Ako z nema susede, tada za O_z biramo baš I_z. Dalje, ako z ima samo levog suseda z_l za O_z biramo interval $O_z = (w(z_l, z), v(z))$, a ako z ima samo desnog suseda z_d tada za O_z uzimamo baš interval $O_z = (u(z), w(z_d, z))$. Na kraju, ako z ima i levog i desnog suseda, bez umanjenja opštosti neka su to z_l levi i z_d desni sused, tada za interval O_z biramo interval $O_z = (w(z_l, z), w(z_d, z))$. Lako se proverava na osnovu dokaza da su ovakvi O_z za $z \in Z$ disjunktni skupovi.

$\square$

Napomenuo bih da je dokaz ove dve teoreme preuzet iz [7] inspirisan idejama iz [3], i predstavlja uopštenje jačeg tvrđenja koje je dato kao problem u [1]. Sada možemo pokazati da je svaka uređena topologija normalan Hauzdorfov prostor

Teorema 2.2 (Birkhoff 1940 [1]). *Linearno uređen skup X sa uređenom topologijom je normalan Hauzdorfov topološki prostor.*

Dokaz. Neka su $x_0, y_0 \in X$ i bez umanjenja opštosti $x_0 < y_0$. Ako postoji $z \in (x_0, y_0)$ tada su intervali $(\leftarrow, z)$ i $(z, \rightarrow)$ disjunktne okoline tačaka x_0 i y_0 tim redom. Dok, ako je $(x_0, y_0) = \emptyset$, za disjuntkne okoline tačaka x_0 i y_0 uzimamo redom intervale $(\leftarrow, y_0)$ i $(x_0, \rightarrow)$. Na kraju, potrebno je istaći da su u oba slučaja radimo sa intervalima koji su otvoreni skupovi, te smo na ovaj način pokazali da topologija zadovoljava uslov Hauzdorfovog prostora. Naravno, za normalni prostor treba nam prvo da je sam prostor T_1, što imamo, jer je svaki T_2 prostor ujedno i T_1 prostor. Ostaje nam još normalnost.

Neka su sada Z_1 i Z_2 neprazni disjunktni zatvoreni skupovi na skupu X sa uređenom topologijom. Tražimo takve disjunktkne otvorene skupove V_1 i V_2 za koje važi $Z_1 \subseteq V_1$ i $Z_2 \subseteq V_2$. Posmatrajmo prvo:

$$W_1 = \bigcup\{(x, y) | x, y \in Z_1, (x, y) \cap Z_2 = \emptyset\}$$
$$W_2 = \bigcup\{(x, y) | x, y \in Z_2, (x, y) \cap Z_1 = \emptyset\}$$

Skupovi W_1 i W_2 su otvoreni skupovi u uređenoj topologiji kao unija baznih. Dokazaćemo da su disjunktni i još da važi:

$$\overline{W_1} \cap Z_2 = \emptyset \text{ i } \overline{W_2} \cap Z_1 = \emptyset.$$

Pretpostavimo da $z \in W_1 \cap W_2$. Postoje takvi $x_1, y_1 \in Z_1$ i $x_2, y_2 \in Z_2$ za koje važi:

$$z \in (x_1, y_1) \cap (x_2, y_2),\ (x_1, y_1) \cap Z_2 = \emptyset \text{ i } (x_2, y_2) \cap Z_1 = \emptyset,$$

na osnovu definicija skupova W_1 i W_2.

Odavde, imamo $x_1 < y_2$, jer z leži u oba intervala, i $x_1 \notin (x_2, y_2)$ iz čega sledi da je $x_1 \leq x_2$. Slično, imamo da je $x_2 < y_1$, ponovo zato što je z u oba intervala, i $x_2 \notin (x_1, y_1)$, što nam sada daje da je $x_2 \leq x_1$. Odnose tačaka, koji su doveli do jednakosti x_1 i x_2, možemo videti na slici 2.2. Naravno, jasno je da iz prethodnog imamo da je $x_1 = x_2$. Sada je $x_1 = x_2 \in Z_1 \cap Z_2$ što je kontradikcija sa izborom skupova Z_1 i Z_2, pa je pretpostavka pogrešna, te je $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Slika 2.2

Uzmimo sada $z_2 \in Z_2$, i iskoristimo da je Z_1 zatvoren skup koji ne seče Z_2. Tada možemo naći takav interval I koji je otvoren i važi $z_2 \in I$ i $I \cap Z_1 = \emptyset$. Dokažimo da I ne seče W_1, i time dobijamo da je $\overline{W_1} \cap Z_2 = \emptyset$. Pretpostavimo da W_1 nije prazan skup,u suprotnom je dokazano, i uzmimo $w \in W_1$, tada postoje elementi $u, v \in Z_1$ takvi da je $w \in (u, v)$, što imamo na osnovu definicije W_1. Takođe, na osnovu definicije W_1 imamo i $(u, v) \cap Z_2 = \emptyset$. Zato što $u, v \notin I$ (pošto su oni iz Z_1, a I smo birali tako da je $I \cap Z_1 = \emptyset$), imamo da su elementi u, v ili oba gornje ograničenje, ili oba donje ograničenje intervala I, u suprotnom ako bi u bilo donje, a v gornje ograničenje imali bismo da $z_2 \in (u, v)$, što je kontradikcija sa $(u, v) \cap Z_2 = \emptyset$. Zbog toga interval (u, v) ne može sadržati elemente iz intervala I, pa važi $w \notin I$, pa pošto je w bilo proizvoljno važi da $\forall w \in W_1$, $w \notin I$, pa je $I \cap W_1 = \emptyset$. Slično pokazujemo da važi $\overline{W_2} \cap Z_1 = \emptyset$.

Dokažimo dalje da je skup

$$Z = (Z_1 \setminus W_1) \cup (Z_2 \setminus W_2) \text{ diskretan.}$$

Pošto su Z_1 i Z_2 disjunktni, i $Z_1 \backslash W_1$ i $Z_2 \backslash W_2$ zatvoreni, dovoljno je da za svaki $x \in Z_1 \backslash W_1$ (analogno za $Z_2 \setminus W_2$) pronađemo okolinu koja ne sadrži niti jednu drugu tačku iz $Z_1 \setminus W_1$ (odnosno $Z_2 \setminus W_2$). Izaberimo otvoreni interval J koji sadrži $x \in Z_1 \setminus W_1$ i ne seče Z_2 (Ovo možemo da uradimo pošto su skupovi Z_1 i Z_2 su disjunktni i zatvoreni). Dalje, ako su u intervalu J dva elementa iz $Z_1 \setminus W_1$ onda je svaki element između njih u skupu W_1. Zbog toga, J ne može sadržati više od dva elementa iz $Z_1 \setminus W_1$ (inače pošto smo u linearnom uređenju i svi elementi su uporedivi, imali bismo da je bez umanjenja opštosti jedan element iz $Z_1 \setminus W_1$ između ostala dva pa bi se on našao i u W_1, što je kontradikcija jer je on iz $Z_1 \setminus W_1$). Sada, ako je $J \cap (Z_1 \setminus W_1) = \{x\}$ tražena okolina je upravo J, ili ako je u J takvo y da $y \neq x$ i $y \in Z_1 \setminus W_1$ tražena okolina za x je $J \cap (y, \rightarrow)$ kada je $y < x$, odnosno $J \cap (\leftarrow, y)$ kada je $x < y$. Zbog toga je $Z_1 \setminus W_1$ diskretan skup. Analogija važi za $Z_2 \setminus W_2$, pa imamo da je Z diskretan skup.

Na osnovu teoreme 2.1 postoji familija po parovima disjunktnih okolina O_z, $z \in Z$. Uzimamo:

$$U_1 = \bigcup_{z \in Z_1 \setminus W_1} O_z \text{ i } U_2 = \bigcup_{z \in Z_2 \setminus W_2} O_z$$

Pošto je Z diskretan, onda su skupovi U_1 i U_2 disjunktni, i očigledno su još i otvoreni, kao unija otvorenih intervala. Tada su otvoreni i sledeći skupovi:

$$V_1 = (U_1 \setminus \overline{W_2}) \cup W_1 \text{ i } V_2 = (U_2 \setminus \overline{W_1}) \cup W_2$$

Zato što je $Z_1 \subseteq (Z_1 \setminus W_1) \cup W_1 \subseteq U_1 \cup W_1$ i zato što znamo da je $Z_1 \cap \overline{W_2} = \emptyset$, važi $Z_1 \subseteq (U_1 \cup W_1) \setminus \overline{W_2} \subseteq V_1$. Analogno, važi da je $Z_2 \subseteq V_2$. Na kraju, pošto su W_1 i W_2 disjunktni imamo da je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ovim smo pronašli dva otvorena disjunktna skupa, tako da jedan sadrži Z_1, a drugi Z_2. Pošto su Z_1 i Z_2 bili proizvoljni, pokazali smo normalnost linearno uređene topologije, pa samim tim i da je linearno uređeni topološki prostor normalan Hauzdorfov prostor. $\square$

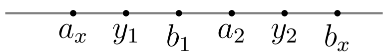
Dokaz normalnost je preuzet iz [7]. Nakon dokaza normalnosti linearno uređenog topološkog prostora, navodimo i dokaz problema koji se pojavljuje u [3] i koji predstavlja uopštenje teoreme 2.1. Dokaz je preuzet iz [12] i prati ideju koju je autor ostavio u [3]. Koristićemo se i diskretnom familijom, pojmom definisanim u uvodu na strani 10.

Teorema 2.3 (Mansfield 1957 [9], dokaz Steen 1970 [14])**.** *Za svaku diskretnu familiju* $\{F_s|\ s \in S\}$ *zatvorenih skupova u linearno uređenom prostoru* X *postoji disjunktna familija* $\{O_s|\ s \in S\}$ *otvorenih skupova takva da je* $F_s \subset O_s$ *za svako* $s \in S$.

Dokaz. Počnimo tako što ćemo, za svako $s \in S$, definisati familiju otvorenih skupova:

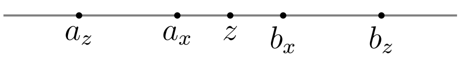
$$W_s = \bigcup\{(a,b)|\ a,b \in F_s \wedge (a,b) \cap \bigcup_{s' \neq s} F_{s'} = \emptyset\}.$$

Pokazaćemo da je $\{W_s|\ s \in S\}$ diskretna familija. Neka je $x \in X$ i neka je (a_x, b_x) okolina tačke x koja seče najviše jedan skup iz familije $\{F_s|\ s \in S\}$. Pretpostavimo da $y_1, y_2 \in (a_x, b_x)$, gde su $y_1 \in W_{s_1}$ i $y_2 \in W_{s_2}$, a $s_1 \neq s_2$, i neka je $y_1 < y_2$. Dalje, uzmimo da važi $y_i \in (a_i, b_i)$, gde $a_i, b_i \in F_{s_i}$, za $i = 1, 2$, $(a_i, b_i) \cap \bigcup_{s' \neq s_i} F_{s'} = \emptyset$. Skupovi $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ imaju prazan presek, jer bi se u suprotnom jedan od krajeva intervala našao u drugom intervalu, što je kontradikcija sa definicijom W_s. Pošto je $(y_1, y_2) \subset (a_x, b_x)$ i $y_1 < b_1 < a_2 < y_2$ (jer je $y_1 < y_2$ i presek intervala je prazan), sledi da je $b_1, a_2 \in (a_x, b_x)$. Ovime dobijamo da (a_x, b_x) seče i F_{s_1} i F_{s_2}, što je kontradikcija.



Slika 2.3-odnos između tačaka a_x, b_x sa y_1, y_2, a_2, b_1

Pokažimo da je $F_s \cap \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s'}} = \emptyset$. Zbog diskretnosti važi $\overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s'}} = \bigcup_{s' \neq s} \overline{W_{s'}}$, dovoljno je pokazati da je $F_s \cap \overline{W_{s'}} = \emptyset$ za proizvoljno $s' \neq s$. Pretpostavimo da postoji $x \in F_s \cap \overline{W_{s'}}$. Kako je $\{F_s|\ s \in S\}$ diskretna, postoji okolina (a_x, b_x) tačke x koja seče F_s i $(a_x, b_x) \cap F_{s'} = \emptyset$. Sa druge strane, kako $x \in \overline{W_{s'}}$ postoji tačka $z \in (a_x, b_x) \cap W_{s'}$. Dalje, imamo $z \in (a_z, b_z)$, gde su $a_z, b_z \in F_{s'}$. Jasno, a_z, b_z ne pripadaju (a_x, b_x) pošto su iz $F_{s'}$, dobijamo da je $x \in (a_z, b_z)$, pošto z mora biti sadržano u (a_z, b_z) (slika 2.4 je prikaz odnosa koji mora važiti), što nam daje kontradikciju sa konstrukcijom skupa $W_{s'}$.



Slika 2.4-odnos između tačaka a_x, b_x, a_z, b_z

Dalje, pokažimo da je familija singltona iz $\bigcup_{s \in S}(F_s \setminus W_s)$ diskretna. Skupovi $F_s \setminus W_s$ su zatvoreni, a kako imamo da je $\{F_s \setminus W_s|\ s \in S\}$ diskretna, sledi da je skup $Z = \bigcup_{s \in S}(F_s \setminus W_s)$ zatvoren. Uzmimo proizvoljno $x \in X$. Ako $x \notin Z$, onda je $X \setminus Z$ okolina tačke x disjunktna sa svakim singltonom iz Z. Ako $x \in Z$, onda mora postojati $s_0 \in S$ takvo da $x \in F_{s_0} \setminus W_{s_0}$. Iz diskretnosti familije $\{F_s|\ s \in S\}$ sledi da je $U = X \setminus \bigcup_{s \neq s_0} F_s$ otvoren skup. Neka je $x \in (a, b) \subset U$. Ako unutar (a, b) ne postoji drugi element iz $F_{s_0} \setminus W_{s_0}$ izuzev tačke x, onda je (a, b) baš ta okolina tačke x koja seče samo singlton $\{x\}$. U suprotnom, neka je y proizvoljan element iz $(a, b) \cap (F_{s_0} \setminus W_{s_0})$ koji je različit od x, i neka je $x < y$. Tada $(x, y) \subset W_{s_0}$, i ne postoji $z \in F_{s_0} \cap (a, b)$ manje od x, pošto bi tada $x \in W_{s_0}$. Tražena okolina tačke x je (a, y), i obeležimo je sa U_x.

Sada koristimo teoremu 2.1 , na osnovu koje postoji disjunktna familija otvorenih $\{V_x|\ x \in$

$Z\}$ da za svako $x \in Z$ važi $x \in V_x \subset U_x$, pa je zbog toga $V_x \cap \overline{F_{s'}} = \emptyset$, dok $x \notin F_{s'}$. Konačno, definišemo za svako $x \in Z$ skup $\tilde{V_x} = V_x \setminus \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s'}}$, gde $x \in F_s$. $\tilde{V_x}$ je očigledno otvoren skup, a kako je $F_s \cap \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s'}} = \emptyset$, to je i okolina tačke x. Takođe važi i $\tilde{V_x} \subset V_x$.

Na kraju, za svako $s \in S$ definišemo $O_s = W_s \cup (\bigcup_{x \in F_s \setminus W_s} \tilde{V_x})$. Očigledno je $F_x \subset O_x$. Pokažimo još da je familija $\{O_s |\ s \in S\}$ disjunktna. Neka su $s, s' \in S$ različiti. Tada je:

$$O_s \cap O_{s'} = \Big(W_s \cup \Big(\bigcup_{x \in F_s \setminus W_s} \tilde{V_x}\Big)\Big) \cap \Big(W_{s'} \cup \Big(\bigcup_{x \in F_{s'} \setminus W_{s'}} \tilde{V_x}\Big)\Big) =$$

$$= \Big(W_s \cap W_{s'}\Big) \cup \Big(W_s \cap \Big(\bigcup_{x \in F_{s'} \setminus W_{s'}} \tilde{V_x}\Big)\Big) \cup \Big(\Big(\bigcup_{x \in F_s \setminus W_s} \tilde{V_x}\Big) \cap W_{s'}\Big) \cup$$

$$\cup \Big(\Big(\bigcup_{x \in F_s \setminus W_s} \tilde{V_x}\Big) \cap \Big(\bigcup_{x \in F_{s'} \setminus W_{s'}} \tilde{V_x}\Big)\Big) = \emptyset$$

Dakle, $\{O_s |\ s \in S\}$ je tražena familija. □

Na kraju ovog poglavlja pozabavićemo se sekvencijalnim linearno uređenim topološkim prostorima, i njihovog odnosa sa prvom aksiomom prebrojivosti. Pokazaćemo da svaka tačka u sekvencijalnom linearnom uređenom topološkom prostoru ima prebrojivu bazu okolina, isključivo se koristeći bazom linearno uređene topologije i osobinama sekvencijalnih prostora. Treba napomenuti da, što važi za sve topološke prostore, ako zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti onda su ujedno i sekvencijalni, ili, prostije rečeno, za sve topološke prostore važi obrt sledećeg tvrđenja.

Teorema 2.4 (Meyer 1969 [11]). *Svaki sekvencijalni linearno linearno uređeni topološki prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz. Da proizvoljan sekvencijalni linearno uređeni topološki prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti pokazaćemo na standardan način: pronaći ćemo kandidata za bazu okolina koji je očigledno prebrojiv i pokazati da on zadovoljava osobine $(BO1)$ i $(BO2)$ iz definicije 1.9. Neka je skup X skup sa linearnim uređenjem $<$, koji zajedno sa linearno uređenom topologijom generisanom relacijom $<$ čini sekvencijalan linearno uređen topološki prostor. Prvo, ako sa bilo koje strane elementa x imamo skok, tj. ako postoji $y \in X$ tako da je $y < x$ i nema drugih elemenata skupa X koji su između y i x u smislu uređenja za niz levo od x uzimamo stacionaran niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, a_n = y$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Analogno postupamo ako $\exists z \in X$ takav da $x < z$ i ako nema drugih elemenata iz skupa X koji su između x i z.

Ako sa jedne od strana x nemamo prethodno opisanu situaciju, za proizvoljno $x \in X$ posmatraćemo skupove $(\leftarrow, x)$ i $(x, \rightarrow)$, i nizove u ovim skupovima koji konvergiraju baš ka x. Jasno, ovakvi nizovi postoje u sekvencijalnom prostoru, označimo ih sa: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gde je $a_n < x$,, za svako $n \in \mathbb{N}$, niz koji konvergira ka x iz skupa $(\leftarrow, x)$, i isto tako $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gde su $x < b_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$ niz koji konvergira ka x iz $(x, \rightarrow)$.

Sada, kada za sve moguće slučajeve imamo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ kandidata za bazu okolina tačke x formiramo na sledeći način: $\mathcal{B}_{(x)} = \{(a_n, b_n) | n \in \mathbb{N}\}$, gde koristimo pogodne definisane nizove iz prethodnog dela dokaza. Očigledno je da se radi o prebrojivom skupu, pa nam je preostalo da utvrdimo da li se radi o bazi okolina tačke x.

($BO1$) Prvu osobinu, navedena familija intervala zadovoljava veoma očigledno, jer imamo za sve $n \in \mathbb{N}$, bilo da je reč o postajanju y ili z elemenata ili ne, da je $x \in (a_n, b_n)$ i pritom svaki interval je očigledno bazni, pa je time i otvoren u linearno uređenoj topologiji, iz čega se zaključuje da je $\mathcal{B}_{(x)} \subset \mathcal{U}_{(x)}$, pošto je svaki otvoren skup okolina svake svoje tačke.

($BO2$) Neka je $U \in U_{(x)}$, i posmatrajmo prvo slučaj kada x nema susede y i z. Tada, znamo da postoji otvoren skup O iz linearno uređene topologije takav da je $x \in O \subset U$, pa postoji bazni $(a, b) \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in (a, b) \subset O \subset U$. Jasno, važi $a < x < b$, a zbog konvergencije nizova imamo:

$$(\exists n_{0_1} \in \mathbb{N}) \text{ takav da je } a < a_{n_{0_1}},$$
$$(\exists n_{0_2} \in \mathbb{N}) \text{ takav da je } b_{n_{0_2}} < b.$$

birajući za $N_0 = max\{n_{0_1}, n_{0_2}\}$, tada sigurno imamo da je $(a_{N_0}, b_{N_0}) \in \mathcal{B}_{(x)}$, ali i $(a_{N_0}, b_{N_0}) \subset (a, b) \subset U$, čime vidimo da važi i osobina ($BO2$) u ovom slučaju. Ako pak, postoji y ili z diskusija se skraćuje pošto nam je u slučaju postojanja oba interval (y, z) baza okolina sadržana u svakom otvorenom skupu koji sadrži x, a u slučaju postojanja jednog dovoljna diskusija niza sa druge strane elementa x. Ako bi, npr. postojalo y sa prethodno navedenim osobinama, interval koji bi bio sadržan u (a, b) jeste $(y, b_{n_{0_2}})$

Pošto je za proizvoljno x definisana familija $\mathcal{B}_{(x)}$ baza okolina tačke x, koja je pritom prebrojiva, imamo zadovoljen uslov prve aksiome prebrojivosti. □

Glava 3

Potprostori

U glavi 3 pozabavićemo se osobinama potprostora linearno uređenih prostora. Videćemo kako se topologija prenosi na potprostore i iskoristiti lepe osobine konveksnih podskupova linearno uređenih skupova. Osobina razbijanja, ili svojevrsne faktorizacije svakog otvorenog skupa na konveksne komponente biće ključna za dokaz nasledne normalnosti svakog linearno uređenog topološkog prostora.

Počećemo sa indukovanom topologijom na podskupu linearno uređenog topološkog prostora i njenim odnosom sa topologijom koju indukuje restrikcija linearnog uređenja na podskup. Koristićemo oznaku $\mathcal{O}_l$ za topologiju koju linearno uređenje indukuje na podskupu, a $\mathcal{O}_M$ za indukovanu topologiju na podskupu M topološkog prostora.

Teorema 3.1. *Neka je X prostor sa topologijom indukovanom linearnim uređenjem $<$. Tada, za svaki neprazan podskup M skupa X važi: indukovana topologija prostora X na M je finija od topologije indukovane restrikcijom linearnog uređenja $<$, $\mathcal{O}_l$, na M.*

Dokaz. Pretpostavimo da M sadrži barem dva elementa (u suprotnom je trivijalno). Dovoljno je pokazati da svi elementi baze topologije O_l pripadaju bazi indukovane topologije $\mathcal{O}_M$. Elementi baze $\mathcal{O}_l$, za $a, b \in M$ su intervali oblika:

$$(a,b)_M = (a,b) \cap M,\ (a,\rightarrow)_M = (a,\rightarrow) \cap M \text{ i } (\leftarrow,a)_M = (\leftarrow,a) \cap M$$

gde jasno vidimo da su oni takođe sadržani i u bazi $\mathcal{O}_M$, pa kako su proizvoljni bazni iz $\mathcal{O}_l$, u sva tri oblika, sadržani u bazi topologije $\mathcal{O}_M$ imamo $\mathcal{O}_l \subseteq \mathcal{O}_M$ što je i trebalo dokazati. $\square$

Topologije $\mathcal{O}_l$ i $\mathcal{O}_M$ se ne moraju poklapati, što se može videti u narednom primeru.

Primer. Posmatrajmo $Y = \{-1\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ kao podskup skupa $\mathbb{R}$, sa standardnim uređenjem $<$. Singlton $\{-1\}$ je u indukovanoj topologiji $\mathcal{O}_Y$ otvoren, pošto možemo uzeti interval $(\leftarrow, 0)$, gde je, očigledno. $Y \cap (\leftarrow, 0) = \{-1\}$. Sa druge strane, u topologiji $\mathcal{O}_l$ na Y svaki otvoreni skup koji sadrži -1 mora sadržati sve do konačno mnogo elemenata skupa Y, pošto su jedini skupovi koji sadrže -1 oblika $(\leftarrow, \frac{1}{n})$, za neko $n \in \mathbb{N}$, a kako postoji prebrojivo mnogo prirodnih brojeva većih od n, imamo isto toliko elemenata koji su manji od $\frac{1}{n}$ u Y. $\square$

Što se tiče obrata, postoje familije podskupova za koje važi da se indukovana topologija poklapa sa topologijom restrikcije linearnog uređenja. Prva od dve sa kojima ćemo se mi baviti jesu uređajno gusti podskupovi.

Definicija 3.1. *Podskup M linearno uređenog skupa X, gde je $<$ linearno uređenje, je uređajno gust ako* $\forall a, b \in X \ (a < b \implies \exists x \in M \ a < x < b)$.

Teorema 3.2. *Neka je $<$ linearno uređenje na skupu X. Tada, za svaki uređajno gust podskup M skupa X važi da je $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_l$.*

Dokaz. Posmatrajmo, za proizvoljno $a \in X$, skup $(a, \rightarrow) \cap M$. On je očigledno u $\mathcal{O}_M$. Pretpostavimo da je $(a, \rightarrow) \cap M = [c, \rightarrow)_M$ za neko $c \in M$. Pošto je $(a, \rightarrow)$ bazni za topologiju indukovanu linearnim uređenjem $<$ na X, tada je posmatrani presek sa M bazni za $\mathcal{O}_M$ po teoremi 3.1, i činjenice koja je pokazana za bazne. Zbog uređajne gustine podskupa M postoji $x \in M$ za koje važi $a < x < c$, što daje kontradikciju sa $(a, \rightarrow) \cap M = [c, \rightarrow)_M$, jer $x \in (a, \rightarrow) \cap M$, a $x \notin [c, \rightarrow)$. Za uređajno guste podskupove svaki bazni indukovane topologije oblika $(r, \rightarrow) \cap M, r \in X$, će biti sadržan i u bazi topologije indukovane restrikcijom uređenja $<$ na podskupu M, jer niti jedan bazni interval ne može biti zatvoren u M. Analogija važi i za sve bazne u indukovanoj topologiji oblika $(\leftarrow, r) \cap M, r \in X$. Time imamo pokazano za podbazne, što nam je dovoljno za zaključak da je $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_l$ za uređajno gust podskup M. □

Primer. Situacija može biti različita ako posmatramo topološki guste podskupove, tj jednakost topologija na podprostoru ne mora da važi. Kontraprimer za tako nešto jeste skup $Y_0 = \{-1\} \cup \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ i njegov podskup $Y = \{-1\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ o kojem je već bilo reči. Jasno, važi $\overline{Y} = Y_0$. Zbog dodavanja 0, kada posmatramo standardno uređenje između brojeva u skupu Y_0 imamo ponovo da je $\{-1\}$ otvoren kao $(\leftarrow, 0)$, dok on nije otvoren u $\mathcal{O}_l$ na Y. □

Još jedna familija podskupova ima istu osobinu, poklapanja indukovane topolije na podskupu sa topologijom indukovanom restrikcijom linearnog uređenja na podskupu, a to su konveksni podskupovi. Ova familija biće ključna u dokazivanju nasledne normalnosti linearno uređenih topoloških prostora, pre svega zbog osobine razlaganja podskupova na konveksne komponente.

Definicija 3.2. *Podskup C linearno uređenog skupa X je konveksan ako $(x, y) \subset C$, za sve $x, y \in C$.*

Lema 3.1. *Za proizvoljnu, nepraznu familiju konveksnih skupova $\mathcal{C}$ važi da: ako je $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$ tada je $\bigcup \mathcal{C}$ konveksan skup.*

Dokaz. Uzmimo $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ proizvoljne, gde je $x \in C_1$ i $y \in C_2$ za $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Neka je, bez umanjenja opštosti, $x < y$ i $c \in \bigcap \mathcal{C}$. Tada, ako je x ili y jednako sa c onda imamo očiglednu situaciju: npr neka je $x = c$, onda je $(x, y) = (c, y) \subset C_2$, pošto je C_2 konveksan. Analogno za $y = c$. U suprotnom, za x, y i c može važiti da je:

$$c < x < y \text{ ili } x < c < y \text{ ili } x < y < c.$$

Prvi i treći slučaj su analogni, pa stoga pokažimo samo za slučaj $c < x < y$. Tada očigledno imamo $(c, y) \subset C_2$, jer je C_2 konveksan i $c \in \bigcap \mathcal{C}$ kao i u prethodnom delu. Sada imamo $(x, y) \subset (c, y) \subset C_2$ pa je i $(x, y) \subset C_2$, pa je i $(x, y) \subset \bigcup \mathcal{C}$.

Na kraju, ostaje jos mogućnost $x < c < y$. Tada posmatramo (x, y) kao $(x, c) \cup \{c\} \cup (c, y)$, gde imamo

- $(x, c) \subset C_1 \subset \bigcup \mathcal{C}$, jer $c \in C_1$ pošto je c u preseku familije,

- $c \in \bigcup \mathcal{C}$ pošto je u preseku familije,
- $(c, y) \subset C_2 \subset \bigcup \mathcal{C}$, jer $c \in C_2$ pošto je c u preseku familije.

Pošto su sve tri celine u $\bigcup \mathcal{C}$, jasno je da je i $(x, y) \subset \bigcup \mathcal{C}$. Time smo pokazali da bez obzira na odnos tačaka x, y, c uvek važi $(x, y) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, a samim tim i konveksnost. $\square$

Naredna osobina važi za sve podskupove linearno uređenog skupa, bilo da su oni zatvoreni ili otvoreni u nekoj topologiji, koju nakon definisanja konveksnih skupova, možemo dokazati uz pomoć leme 3.1. Ideje dokaza teorema 3.3 i 3.4 nalaze se u [7].

Teorema 3.3. *Svaki podskup M linearno uređenog skupa X je unija po parovima disjunktnih maksimalnih konveksnih podskupova skupa M. Te podskupove skupa M nazivamo njegovim konveksnim komponentama.*

Dokaz. Uvodimo binarnu relaciju na skupu M u oznaci $\sim$ takvu da za $u, v \in M$ važi $u \sim v$ kada M sadrži interval (u, v) kada je $u \leq v$, odnosno interval (v, u) kada je $v \leq u$. Ovo je relacija ekvivalencije, gde refleksivnost važi pošto za svako $u \in M$ imamo $(u, u) = \emptyset \subseteq M$. Za simetričnost posmatramo neke $u, v \in M$, i bez umanjenja opštosti $u < v$, za koje važi $u \sim v$, pa imamo da $(u, v) \subseteq M$, ali tada istovremeno je i $v \sim u$. Kod tranzitivnosti, ako važi $u \sim v$ i $v \sim w$, gde su u, v, w tri različita elementa iz M. Uzmimo bez umanjenja opštosti da je $u < v < w$, tada imamo $(u, v) \subseteq M$, kao i $(v, w) \subseteq M$, pa imamo i $(u, w) = (u, v) \cup \{v\} \cup (v, w) \subseteq M$. Zbog toga $\sim$ deli skup M na klase ekvivalencije, koje čine jednu particiju. Upravo ove particije činiće maksimalne konveksne komponente skupa M, što ćemo pokazati. Neka je za $x \in M$ njegova klasa $[x]$. Sama klasa je zapravo, po definiciji relacije $\sim$, unija konveksnih skupova, koja nije prazna jer je u njoj barem x (iz refelksivnosti), te iz leme 3.1 imamo da je svaka klasa, pa tako i $[x]$, konveksan skup. Dalje, neka je $Z \subseteq X$ konveksan, i neka sadrži $[x]$. Tada, za svaki $z \in Z$ imamo da $(z, x) \subset Z$, pa je $z \in [x]$ tj. $z \sim x$ zbog konveksnosti Z. Odavde je jasno da sada imamo $Z = [x]$, čime je dobijena maksimalnost, pa je $[x]$ maksimalan konveksan podskup skupa M. Pošto radimo sa relacijom ekvivalencije, klase ekvivalencije čine particiju, tj. njihova unija je ceo M i one su disjunktne. $\square$

Teorema 3.4. *Za otvoren podskup M linearno uređenog prostora X važi da su njegove konveksne komponente otvorene.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljan $x \in M$, gde je M otvoren podskup u X, i posmatrajmo proizvoljan $y \in [x]$. Pošto je $y \in M$ (jer se nalazi u jednoj klasi ekvivalencije) znamo da mora postojati bazni $B \subset M$ takav da je $y \in B$. Bazni skup može imati tri oblika, i neka je prvo bez umanjenja opštosti $B = (a, b)$, gde $a, b \in X$. Jasno, zbog činjenice da $y \in (a, b)$ imamo da je $(a, y) \subset M$ i $(y, b) \subset M$ pa važi $a, b \in [y] = [x]$. Tada, imamo da za $B = (a, b) \subseteq [x]$, konveksna komponenta $[x]$ je okolina svoje proizvoljne tačke y. Time imamo da je $[x]$ otvoren skup, kao okolina svake svoje tačke. Preostala dva slučaja za oblik baznog koji sadrži y dokazuju se analogno.

$\square$

Kako bismo pokazali naslednu normalnost svakog linearno uređenog prostora, preostalo nam je još da pokažemo poklapanje topologija na familiji konveksnih podskupova. Time ćemo kompletirati priču u ovoj glavi. Dokaz 3.6 preuzet je iz [12].

Teorema 3.5. *Neka je M konveksan podskup linearno uređenog prostora X. Tada važi $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_l$.*

Dokaz. Ako M ima manje od dva elementa tvrđenje važi trivijalno. Pretpostavimo da je $|M| \geq 2$ i uzmimo proizvoljno $a \in X$ i posmatrajmo $(a \rightarrow)$ (analogija važi za $(\leftarrow, a)$). Imamo tri mogućnosti za element a:

1. $(\forall m \in M)\ a < m$: tada je $(a, \rightarrow) \cap M = M$;

2. $(\forall m \in M)\ m < a$: tada je $(a, \rightarrow) \cap M = \emptyset$;

3. $(\exists m_1, m_2 \in M)\ m_1 < a < m_2$: tada zbog konveksnosti imamo $(m_1, m_2) \subset M$, pa je $a \in M$.

Za prva dva slučaja situacija je očigledna, pošto su $\emptyset$ i M otvoreni u svakoj topologiji na M, pa nemamo problema. U trećem slučaju imamo, pošto $a \in M$, da je $(a, \rightarrow) \cap M = (a, \rightarrow)_M$, što znači da se bazni iz indukovane poklapa sa baznim u $\mathcal{O}_l$. Kao što je napomenuto, analogija važi za skupove oblika $(\leftarrow, a)$ i intervali oblika $(a, \rightarrow) \cap M$ i $(\leftarrow, a) \cap M$ su sadržani u bazi $\mathcal{O}_l$, pa imamo dovoljno materijala da pokažemo da je baza $\mathcal{O}_M$ sadržana u bazi $\mathcal{O}_l$. Zapravo, preostalo nam je da pokažemo još da za $x, y \in X$ i bez umanjenja opštosti $x < y$, skup $(x, y) \cap M \in \mathcal{O}_l$. Ovo je očigledno kada (x, y) posmatramo kao $(x, \rightarrow) \cap (\leftarrow, y)$, jer sada imamo: $(x, y) \cap M = \big((\leftarrow, y) \cap M\big) \cap \big((x, \rightarrow) \cap M\big)$, gde znamo da su $(\leftarrow, y) \cap M$ i $(x, \rightarrow) \cap M$ elementi baze $\mathcal{O}_l$. Pokazali smo da su sve vrste baznih u $\mathcal{O}_M$ sadržani u bazi $\mathcal{O}_l$, te je $\mathcal{O}_M \subseteq \mathcal{O}_l$, i uz teoremu 3.1, imamo $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_l$. □

Teorema 3.6 (Bourbaki 1948 [2])**.** *Svaki linearno uređen prostor je T_5-prostor.*

Dokaz. Koristićemo se teoremom 1.11, i ekvivalentnim uslovom: prostor je T_5-prostor ako i samo ako je svaki otvoren podskup T_4-prostor.

Neka je X prostor sa linearnim uređenjem $<$, i neka je M otvoren podskup skupa X. Uzmimo, dalje, da je skup S skup koji sadrži po jednog predstavnika svake klase relacije ekvivalencije $\sim$ koju smo definisali u teoremi 3.3., i neka je $\{[x] |\ x \in S\}$ familija konveksnih komponenti skupa M. Kao familija klasa ekvivalencije, ova familija je disjunktna, i još, prema teoremi 3.4, svaka komponenta je otvoren skup. Uzimimo sada $F, G \in \mathcal{F}_M$ za koje važi $F \cap G = \emptyset$. Neka su $F_x = [x] \cap F$ i $G_x = [x] \cap G$, za $x \in S$. Sada koristimo teoremu 1.10, pa imamo $F_x, G_x \in \mathcal{F}_{[x]}$ i takođe znamo da je $F_x \cap G_x = \emptyset$.

Prelazak na $[x]$ nam omogućuje i jednakost $\mathcal{O}_{[x]} = \mathcal{O}_{l[x]}$, gde je $\mathcal{O}_{l[x]}$ topologija indukovana restrikcijom relacije $<$ na skupu $[x]$, zbog konveksnosti samog skupa (teorema 3.5). Sada, kada o $[x]$ govorimo kao o prostoru, on je T_4-prostor, pošto je topologija indukovana linearnim uređenjem (teorema 2.2). Pošto smo u T_4-prostoru, postoje skupovi U_x, V_x otvoreni u $[x]$, tj. $U_x, V_x \in \mathcal{O}_{[x]}$ takvi da je $F_x \subset U_x$ i $G_x \subset V_x$ pri čemu je $U_x \cap V_x = \emptyset$.

Na kraju, imamo $F = \bigcup_{x \in S} F_x \subset \bigcup_{x \in S} U_x = U$ i $G = \bigcup_{x \in S} G_x \subset \bigcup_{x \in S} V_x = V$, gde je $U \cap V = \emptyset$ kao i $U, V \in \mathcal{O}_M$, pošto su U_x, V_x za svako $x \in S$ u $\mathcal{O}_M$ zbog teoreme 1.10 (uzeli smo da je M otvoren). Dokaz da je $(M, \mathcal{O}_M)$ T_4-prostor je time kompletan. □

Glava 4

Kompaktnost, leksikografsko uređenje i kardinalne funkcije

4.1 Kompaktnost i kompaktifikacija linearno uređenih topoloških prostora

U ovome delu glave 4 razmatraće se ekvivalentan uslov kompaktnosti linearno uređenih topoloških prostora i kompaktifikacija istih. Za kompaktnost, ispostavilo se, sve što nam treba je uslov Dedenkindove kompletnosti, ali i Alexanderova teorema o podbazi koja će biti navedena u dokazu i koju možemo naći u [3].

Teorema 4.1 (Haar, König 1910 [4]). *Prostor X sa topologijom indukovanom linearnim uređenjem $<$ je kompaktan ako i samo ako svaki podskup $A \subset X$ ima najmanje gornje ograničenje.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je prostor X kompaktan i neka je $A \subset X$ proizvoljan podskup. Želimo da pokažemo da A ima supremum. Definišimo skup svih gornjih ograničenja skupa A kao $U(A) := \{x | \forall a \in A,\ a \leq x\}$. Pretpostavimo da A nema supremum u skupu X. Po definicji skupa $U(A)$ jasno je da, ako bi skup A imao supremum, važi: $\sup(A) = \min(U(A))$. Sada, posmatrajmo skupove $L_p = \{x \in X | x < p\} = (\leftarrow, p)$ i $D_p = \{x \in X | p < x\} = (p, \rightarrow)$ i definišimo familiju $\mathcal{U} = \{L_x | x \in A\} \bigcup \{D_u | u \in U(A)\}$.

Pretpostavimo da je $x \in X$ takvo da ne pripada niti jednom $L_p,\ p \in A$. To znači da x nije manje ni od jednog elementa iz A, pa je x jedno gornje ograničenje skupa A, tj. $x \in U(A)$. Ovo nam daje da postoji $u \in U(A)$ takvo da je $u < x$, inače bi x bio supremum, što bi bilo kontradiktorno sa pretpostavkom (nemamo min u $U(A)$), pa je $x \in D_u$ baš za to u. Vidimo da proizvoljan $x \in X$ mora biti bilo u nekom $L_p, p \in A$ ili u nekom $D_p, p \in U(A)$, pa je zbog toga, kao i zbog svoje definicije, familija $\mathcal{U}$ jedan otvoreni pokrivač.

Zbog kompaktnosti, konačno mnogo elemenata koji su u $\mathcal{U}$ pokriva celo X (jedan potpokrivač) npr. neka je to $\mathcal{U}' = \{L_a | a \in A'\} \bigcup \{D_u | u \in U'\}$ gde su U' i A' konačni podskupovi redom U i A. Po ideji za proizvoljno $x \in X$, vidimo da niti jedan od A', U' nije prazan. Dalje neka je $a_0 = \max(A')$ i $u_0 = min(U')$. Očigledno je $X = L_{a_0} \cup D_{u_0}$, odakle zaključujemo da $a_0 \in D_{u_0}$, pošto se ne nalazi u L_{a_0}, pa je $u_0 < a_0$. Ovo je kontradikcija sa činjenicom da je $u_0 \in U(A)$, pa je naša pretpostavka loša, tj. skup A ima supremum.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da svaki podskup $A \subset X$ ima najmanje gornje ograničenje. U dokazu će se koristiti Alexanderova teoremu o podbazi (referenca iz literature [1]): ako svaki pokrivač koji se sastoji od elemenata podbaze prostora ima konačan potpokrivač, prostor je kompaktan.

Neka je $\{L_{x_i}|i \in I\}\bigcup\{D_{x_j}|j \in J\}$ pokrivač skupa X koji je sačinjen od elemenata podbaze i neka je $p = \sup\{x_i|i \in I\}$. Tačka p ne može biti ni u jednom $L_{x_i}, i \in I$, kao supremum, te je u nekome $D_{x_{j_0}}$, pa jasno je da imamo $x_{j_0} < p$. To znači da x_{j_0} nije gornje ograničenje skupa $\{x_i|i \in I\}$, inače bi bilo manje od p, najmanjeg gornjeg ograničenja toga skupa. Uzmemo to x_{i_0} za koje važi $x_{j_0} < x_{i_0}$, i na ovaj način dolazimo do $L_{x_{i_0}}$ i $D_{x_{j_0}}$ za baš ove x_{i_0} i x_{j_0} koji pokrivaju ceo X, i čine konačan potpokrivač. Time smo zadovoljili Alexanderovu teoremu, i prostor X je kompaktan.

□

Nakon uslova za kompaktnost pozabavićemo se i kompaktifikacijom linearno uređenih topoloških prostora. Ideju Dedekindove kompaktifikacije i dokazi preuzeti su iz [12]. Kako bismo došli do kompaktifikacije krenućemo od pojma Dedekindovog preseka.

Definicija 4.1. *Neka je X skup linearno uređen relacijom $<$. Skup $D \subset X$ je Dedekindov presek akko*

1. $D \neq \emptyset$,
2. $x \leq y \in D \implies x \in D$,
3. *ako D ima supremum, onda mu supremum i pripada, tj. onda je to maksimum skupa D.*

Upravo će skup svih Dedekindovih preseka biti kompaktifikacija linearno uređenog topološkog prostora, koja je istovremeno linearno uređen prostor. Zbog toga ćemo skup svih Dedekindovih preseka skupa X označiti sa cX. Prvo, potrebno je doći do uređenja na cX, a uz to nam treba i uslov teoreme 4.1, tj. da sa tim uređenjem skup cX zadovolji Dedekindovu aksiomu kompletnosti.

Teorema 4.2. *Neka je X linearno uređen skup relacijom $<$ i neka je cX skup svih Dedekindovih preseka u X. Na skupu cX definišemo relaciju $<'$: $D_1 <' D_2 \Leftrightarrow D_1 \subset D_2$. Tada je*

a) $(cX, <')$ linearno uređenje sa najvećim elementom X,

b) cX je Dedekindovski kompletno linearno uređen skup.

Dokaz. a) Svaka dva elementa cX uporediva su relacijom $<'$, dok tranzitivnost i irefleksivnost relacije $<'$ slede iz tranzitivnosti i irefleksivnosti relacije biti podskup. Pokažimo da je relacija linearna, tj. da su svaka dva elementa uporediva, uzmimo $D_1, D_2 \in cX$ takvi da $D_1 \neq D_2$. Pretpostavimo da važi $D_1 \not\subset D_2$ i $D_2 \not\subset D_1$. Tada postoje $x \in D_1 \setminus D_2$ i $y \in D_2 \setminus D_1$. Ako bi važilo $y < x$, onda bi po definiciji bilo $y \in D_1$, što je kontradikcija, a u suprotnom, ako bi važilo $x < y$, tada bismo imali $x \in D_2$, što je takođe kontradikcija. Odavde imamo da mora važiti $D_1 \subset D_2$ ili $D_2 \subset D_1$, što nam daje $D_1 <' D_2$ ili $D_2 <' D_1$.

b) Kao linearno uređen skup, skup X jeste Dedekindov presek, pa sigurno znamo da je cX, ali i svaki njegov podskup, ograničen odozgo. Potrebno je da pokažemo da svaki podskup skupa cX ima supremum. Uzmimo $\{D_s|\ s \in S\}$ neprazan podskup skupa cX, i neka je $D = \bigcup_{s\in S} D_s$. Skup D zadovoljava prva dva uslova definicije Dedekindovog preseka, pošto je unija nepraznih skupova neprazna i ako bismo pretpostavili da postoji $x \leq y \in D$ takvo da $x \notin D$ imali bismo da $x \notin D_s, s \in S$, pa bi to bila kontradikcija sa činjenicom da radimo sa Dedekindovim presecima.

Ako D nema supremum u skupu X onda $D \in cX$, isto tako ako ga ima i važi $\sup D \in D$, tada je $D \in cX$. Jasno je, u ova dva slučaja D je supremum skupa $\{D_s|\ s \in S\}$.

Sada pretpostavimo da D ima supremum i da $\sup D \notin D$, pa u ovom slučaju D nije Dedekindov presek. Neka je $x = \sup D$. Pokažimo da je tada skup $(\leftarrow, x] = \sup\{D_s|\ s \in S\}$ u skupu cX. Skup $(\leftarrow, x]$ jeste Dedekindov presek, pošto nije prazan (tu je barem x), ima supremum koji mu pripada (upravo element x) i svi $y \leq x$ su sigurno u njemu po definiciji intervala. Dalje, ovaj skup je jedno gornje ograničenje. Uzmimo sada $E \in cX$ neko drugo gornje ograničenje skupa $\{D_s|\ s \in S\}$. Tada ćemo imati $D \subseteq E$. Pretpostavimo da za E važi $E <' (\leftarrow, x]$. Jasno, mora važiti $x \notin E$. Ako pretpostavimo da E ima supremum u X, onda bismo imali $\sup D = x \leq \sup E = y$. Pošto je E Dedekindov presek, mora važiti $y \in E$. Kako je $x < y$ sledi da je $x \in E$, što je kontradikcija, te skup E nema supremum u X. Zbog toga, i zbog činjenice da je x gornje ograničenje skupa E, mora postojati gornje ograničenje x_1 takvo da je $x_1 < x$, ali tada je x_1 i gornje ograničenje skupa D, što je nemoguće, pa na kraju zaključujemo da važi $(\leftarrow, x] <' E$. □

Sa ovim, formirali smo linearno uređen topološli prostor cX čiju linearnu uređenu topologiju indukuje uređenje $<'$. U nastavku formiramo preslikavanje iz linearno uređenog topološkog prostora X u cX i pokazujemo njegovu injektivnost. Ovo preslikavanje će upotpuniti priču o kompaktifikaciji, i ono će biti traženo potapanje.

Teorema 4.3. *Preslikavanje $f : X \to cX$ dato sa $f(x) = (\leftarrow, x]$ je striktno rastuće i čuva supremume i infimume.*

Dokaz. Prvo, imamo očigledno da za $x_1 < x_2$ važi $(\leftarrow, x_1] \subset (\leftarrow, x_2]$, i time imamo da je striktno rastuće.

Sada, posmatrajmo skup $A \subset X$ i $x = \sup A$. Pokažimo da je $\sup\{f(a)|\ a \in A\} = f(x)$. Pre svega $f(x)$ jeste jedno gornje ograničenje, pošto za svako $a \in A$ važi $f(a) = (\leftarrow, a] \subset (\leftarrow, x] = f(x)$. Potrebno je još pokazati da je $f(x)$ najmanje gornje ograničenje skupa $\{f(a)|\ a \in A\}$. Posmatrajmo takvo $E \in cX$ za koje imamo da za svako $a \in A$ važi $f(a) \subset E$. Potrebno je pokazati da je $f(x) = (\leftarrow, x] \subset E$. Sigurno imamo $A \subset E$, i tu imamo dva slučaja:

1. $E \in f[X]$. Tada postoji $e \in E$ takvo da je $f(e) = E$. Pošto je f striktno rastuće, e je jedno gornje ograničenje skupa A, pa mora biti $x \leq e$, pa je $f(x) \subset f(e) = E$.

2. $E \notin f[X]$. Tada skup E nema supremum. Pokazaćemo da $x \in E$ u ovom slučaju. Pretpostavimo suprotno, odnosno da $x \notin E$. Tada je x gornje ograničenje, skupa E, pošto je E Dedekindov presek i pošto nemamo minimum na skupu gornjih ograničenja postoji $y < x$ takvo da je $E \subset (\leftarrow, y]$. Na ovaj način smo dobili da je y gornje ograničenje skupa A, manje od x što je kontradikcija. Jasno, imamo da je $x \in E$, pa je $f(x) = (\leftarrow, x] \subset E$.

□

Treba napomenuti da bez obzira da li X ima najveći element ili ne, cX uvek ima najveći element. Ako skup X nema najveći element, skup $cX \setminus \{X\}$ sadržaće sliku skupa $f[X]$, za preslikavanje f definisano u teoremi 4.3, i ujedno je Dedekindovski kompletan.

Definicija 4.2. *Neka je X linearno uređen skup. Ako skup X ima najveći element, pod Dedekindovim kompletiranjem skupa X podrazumevamo cX, a ako ga nema onda je Dedekindovo kompletiranje skupa X skup $cX \setminus \{X\}$.*

Kako bismo došli do kompaktifikacije preostalo je da pokažemo da je f potapanje, ali i da je $\overline{f[X]} = cX$. Tu ćemo se koristiti, osim do sada navedenim osobinama Dedekindovih preseka i preslikavanja f, još jednom činjenicom koju navodimo u lemi.

Lema 4.1. *Dedekindovi preseci su zatvoreni skupovi.*

Dokaz. Neka je D Dedekindov presek i neka je $E = X \setminus D$. Ako D ima supremum x, tada mu on i pripada i važi $D = (\leftarrow, x]$, što jeste zatvoren skup. Ako pak, D nema supremum u X, onda E, kao skup svih gornjih ograničenja, nema minimalni. Tada važi da je $E = \bigcup_{x \in E}(x, \rightarrow)$, kao unija otvorenih je otvoren skup. Sada, imamo da je D komplement otvorenog skupa, i kao takav je zatvoren. □

Teorema 4.4. *Neka je X linearno uređen skup sa krajnim tačkama koje ćemo označiti sa 0 i 1 i neka je $(cX, <')$ Dedekindovo kompletiranje skupa X definisano u definiciji 4.2. Tada je:*

a) cX je kompaktan prostor.

b) Preslikavanje $f : X \to cX$ dato sa $f(x) = (\leftarrow, x]$ je potapanje.

c) $\overline{f[X]} = cX$.

Dokaz. *a*) Na osnovu teoreme 4.1 potrebno nam je da dokažemo da svaki podskup skupa cX ima supremum. Prvo, imamo da je $\sup \emptyset = 0$. Dalje, pošto X ima najveći element po definiciji 4.2 i teoremi 4.2 imamo da je cX Dedekindovski kompletan (svaki neprazan podskup ima supremum), ali i cX ima najveći element što je upravo X. Sada možemo primeniti teoremu 4.1, prema kojoj je cX kompaktan prostor.

b) Teorema 4.3 nam daje injektivnost funkcije f. Za neprekidnost je dovoljno pokazati da je inverzna slika svakog podbaznog skupa topologije na cX otvoren skup u X. Neka je $D \in cX$, tada

$$x \in f^{-1}[(\leftarrow, D)] \Leftrightarrow (\leftarrow, x] <' D \Leftrightarrow (\exists t \in D)\ x < t \Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{t \in D}(\leftarrow, t).$$

Dakle, imamo $f^{-1}[(\leftarrow, D)] = \bigcup_{t \in D}(\leftarrow, t)$, što je otvoren skup. U drugom slučaju imamo

$$x \in f^{-1}[(D, \rightarrow)] \Leftrightarrow D <' (\leftarrow, x] \Leftrightarrow D \subset (\leftarrow, x] \Leftrightarrow x \notin D \Leftrightarrow x \in X \setminus D.$$

Sada imamo da je $f^{-1}[(D, \rightarrow)] = X \setminus D$, što je otvoren skup na osnovu leme 4.1, pošto je D zatvoren.

Preslikavanje $F|_X : X \to f[X]$ je neprekidna bijekcija (pošto je f neprekidno i injektivno). Ostaje nam još da pokažemo da je otvoreno preslikavanje. Zbog injektivnosti dovoljno je pokazati otvorenost direktnih slika podbaznih skupova. Važi

$$D \in f[(\leftarrow, x)] \Leftrightarrow (\exists t < x)\ D = (\leftarrow, t] \Leftrightarrow D \in f[X] \wedge D \in (\leftarrow, (\leftarrow, x]).$$

Na osnovu toga, imamo $f[(\leftarrow, x)] = (\leftarrow, (\leftarrow, x]) \cap f[X]$, što je otvoren skup u indukovanoj topologiji na $f[X]$. Slično

$$D \in f[(x, \rightarrow)] \Leftrightarrow (\exists t > x)\ D = (\leftarrow, t] \Leftrightarrow D \in f[X] \wedge (\leftarrow, x] <' D.$$

Zbog toga sada imamo $f[(x, \rightarrow)] = ((\leftarrow, x], \rightarrow) \cap f[X]$ što je ponovo otvoren skup u indukovanoj topologiji na $f[X]$. Ovim smo pokazali i otvorenost, te imamo sve potrebne uslove da f bude potapanje.

c) Pokazaćemo da $f[X]$ seče svaki neprazan bazni otvoren skup B u cX. Postoje tri mogućnosti:

1. $B = (\leftarrow, D)$. Tada, kako $B \neq \emptyset$ imamo da je $\{0\} <' D$, pa $f(0) = (\leftarrow, 0] = \{0\} <' D$, tj. $f(0) \in B \cap f[X]$.

2. $B = (D, \rightarrow)$. Tada, kako je $B \neq \emptyset$ imamo da je $D <' X = (\leftarrow, 1] = f(1)$, pa $f(1) \in B \cap f[X]$.

3. $B = (D_1, D_2)$. Tada, kako $B \neq \emptyset$ postoji D takvo da je $D_1 <' D <' D_2$. Neka je $x \in D \setminus D_1$ i $y \in D_2 \setminus D$. Kako $x \notin D_1$, sledi da je $D_1 <' (\leftarrow, x] = f(x)$. Takođe, kako $y \notin D$ sledi da je $x < y$, pa imamo $(\leftarrow, x] \subset (\leftarrow, y] \subset D_2$ odakle $f(x) <' D_2$, pa je $f(x) \in B \cap f[X]$.

□

Bez dokaza dajemo naredno tvrđenje koje nam govori kako se formira kompaktifikacija za linearna uređenja bez krajnjih tačaka.

Teorema 4.5. *a) Neka je X linearno uređen prostor bez krajnjih tačaka. Neka je $X^* = X \cup \{0, 1\}$, gde $0, 1 \notin X$, gde je X^* definisano tako da su 0 i 1 najmanja odnosno najveća tačka. Onda je cX^* kompaktifikacija prostora X.*

b) Neka je X linearno uređen prostor sa najvećom i bez najmanje tačke. Tada, neka je $X^* = X \cup \{0\}$, gde uređenje na X^* definišemo tako da 0 bude najmanji element. Onda je cX^* kompaktifikacija prostora X.

c) Neka je X linearno uređen topološki prostor sa najmanjom i bez najveće tačke. Neka je $X^* = X \cup \{1\}$, gde je uređenje na X^* definisano tako da 1 bude najveći element. Tada je cX^* kompaktifikacija prostora X.

Teorema 4.6. *Za svaki prostor X sa topologijom indukovanom linearnim uređenjem $<$ postoji kompaktifikacija cX, gde je c odgovarajuće potapanje, čija je topologija indukovana linearnim uređenjem $<'$ takvim da $cx <' cy$ ekvivalentno sa $x < y$ za sve $x, y \in X$.*

Dokaz. Tražena kompaktifikacija je cX kada imamo najveći i najmanji element, odnosno pogodna cX^* za specijalne slučajeve kao u teoremi 4.5. Potrebna funkcija jeste f iz teorema 4.3 i 4.4, kao i dokazi za potrebne osobine koje smo dali u iste dve teoreme. □

Dalje, dajemo i dva dokaza o odnosu osobina topološke gustine i uređajne gustine potprostora linearno uređenog topološkog prostora, koji će se koristiti u glavi 5. Kao i priča o kompaktifikaciji, dokazi su preuzeti iz [12].

Propozicija 4.1. *Neka je X linearno uređen topološki prostor. Ako je $M \subseteq X$ uređajno gust u X, onda je i topološki gust u X, tj. $\overline{M} = X$.*

Dokaz. Neka je $B = (a, b)$ neprazan bazni skup u X. Tada, zbog uređajne gustine M u X postoji $c \in M$ takvo da je $a < c < b$, tj $c \in B$, pa je $M \cap B \neq \emptyset$. Ako je $B = (a, \rightarrow) \neq \emptyset$, onda postoji $b \in (a, \rightarrow)$. Kako je M uređajno gust u X, postoji $c \in M$ takvo da je $a < c < b$, pa je $M \cap B \neq \emptyset$. Analogno se pokazuje da za $B = (\leftarrow, b) \neq \emptyset$ važi $M \cap B \neq \emptyset$.

Dakle, skup M seče svaki neprazan bazni skup u X, pa je M topološki gust u X. □

Propozicija 4.2. *Neka je X gusto uređen linearno uređen topološki prostor. Neka je $M \subseteq X$. M je uređajno gust u X ako i samo ako je M topološki gust u X*

Dokaz. Treba samo pokazati da iz topološke gustine uređajna gustina. Neka je M topološki gust u X. Pokažimo da između svake dve tačke iz X postoji tačka iz M. Neka su $x, y \in X$ i neka je $x < y$. Tada je, zbog topološke gustine, $M \cap (x, y) \neq \emptyset$, pa postoji $m \in M$ takvo da je $m \in (x, y)$, tj. $x < m < y$, što je i trebalo pokazati. □

Na kraju ovog dela glave 4 biće reči o topologiji na skupu svih ordinala manjih ili jednakih sa prvim neprebrojivim ordinalom ω_1, gde ćemo sa W označiti skup svih takvih ordinala. Jednu bazu nad skupom W, skup svih ordinala manjih ili jednakih sa ω_1, čine segmeti $(y, x] = \{z \in W | y < z \leq x\}$, gde je naravno $y < x \leq \omega_1$, kao i jednočlani skup $\{0\}$, gde je 0 ordinal koji odgovara praznom skupu. Bazu ćemo označiti sa $\mathcal{B}_\omega$. U [1] postoje dokazi kompaktnosti prostora W sa topologijom čija je baza $\mathcal{B}_\omega$ i napominje se da je prostor Hauzdorfov. Ovde izlažemo jednakost topologije ǐndukovane bazom $\mathcal{B}_\omega$ sa topologijom indukovanom prirodnim linearnim uređenjem na klasi svih ordinala $<$

Propozicija 4.3. *Topologija indukovana bazom $\mathcal{B}_\omega$ jednaka je sa topologijom indukovanom prirodnim linearnim uređenjem $<$ na klasi svih ordinala.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}_<$ baza koju generišu svi intervali (definicija 2.1 i propozicija 2.1) za relaciju $<$, prirodnog poretka među ordinalima. Radimo sa skupom W, svim ordinala manjih ili jednakih od prvog neprebrojivog ordinala ω_1. Prvo, pokaćemo da je $\mathcal{B}_< \subseteq \mathcal{B}_\omega$, tako što ćemo svaki od tri tipa intervala prikazati preko segmenata iz $\mathcal{B}_\omega$. Neka su $\alpha, \beta \in W$:

- $(\alpha, \rightarrow) = (\alpha, \omega_1]$,
- $(\leftarrow, \beta) = \begin{cases} (0, \gamma], & \text{ako je } \beta \text{ sledbenik, tj. } \beta = \gamma \cup \{\gamma\}; \\ \bigcup_{\gamma<\beta}(0, \gamma], & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinal;} \end{cases}$
- $(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\alpha, \gamma], & \text{ako je } \beta \text{ sledbenik, tj. } \beta = \gamma \cup \{\gamma\}; \\ \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha, \gamma], & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinal;} \end{cases}$

Ovime je pokazano da je $\mathcal{B}_< \subseteq \mathcal{B}_\omega$, a znamo da isti odnos važi i za odgovarajuće topologije.

Ostajem nam druga inkluzija, da segmente predstavimo preko intervala. Tu imamo jednostavniji priču:

- $(\alpha, \beta] = (\alpha, \beta \cup \{\beta\})$, za $\beta \neq \omega_1$
- $(\alpha, \omega_1] = (\alpha, \rightarrow)$

- $\{0\} = (\leftarrow, 0 \cup \{0\})$

pa imamo i $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}_<$. Naravno, iz jednakosti baza, zaključujemo i jednakost odgovarajućih topologija. □

4.2 Leksikografsko uređenje na skupu I^2

Pre svega, na početku ovoga dela glave 4 da napomenemo da se sa I označava skup $[0, 1]$, a uređeni par pišemo kao $\langle x, y\rangle$. Leksikografsko uređenje definišemo:

Definicija 4.3. *Neka je X skup, a $<_X$ relacija linearnog uređenja skupa X, i neka je Y skup sa svojim linearnim uređenjem $<_Y$. Tada na skupu $X \times Y$ definišemo leksikografsko linearno uređenje kao: $\langle x_1, y_1\rangle <_l \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 < y_2)$.*

Na intervalu I imamo linearno uređenje $<$ skupa realnih brojeva preko kojeg prelazimo na $<_l$. Kao linearno uređenje skupa, $<_l$ generiše topologiju $\mathcal{O}_{<_l}$ preko svoje baze, koju ćemo označiti sa $\mathcal{B}_{<_l}$. Kompaktnost prostora $(I^2, \mathcal{O}_{<_l})$ dokazaćemo koristeći jedno pomoćno tvrđenje, ali i kompaktnost $[0, 1]$, koju nam daje teorema 1.12. Potrebno je istaći da su dokazi u ovom segmentu glave 4 preuzeti iz [12], osim kompaktnosti, gde ideja leme 4.2 potiče sa sajta stackexchange i kolege, topologa iz Holandije [15].

Lema 4.2. *Neka su $(X, <_X)$ i $(Y, <_Y)$ linearno uređeni skupovi sa svojim uređenjima. Ako oba skupa zadovoljavaju Dedekindovu kompletnost, onda je zadovoljava i $X \times Y$ uz leksikografsko uređenje.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq X \times Y$. Definišemo : $A_0 = \pi_1[A] = \{x|(\exists y \in Y)\langle x, y\rangle \in A\}$ projekcija skupa A na X. Tada, zbog Dedenkidove kompletnosti skupa X, postoji $p = \sup(A_0)$. Dalje, definišemo: $B_0 = \{y \in Y|\langle p, y\rangle \in A\}$, pa će postojati i $q = \sup(B_0)$, sada zbog Dedekindove kompletnosti skupa Y. Uočimo da ako je $B_0 = \emptyset$, onda će njegov supremim zapravo biti najmanji element skupa X, tj. 0. Dokažimo da je $\langle p, q\rangle = \sup(A)$.

Pretpostavimo da naš uređen par nije gornje ograničenje skupa A. Tada postoji neko $\langle a, b\rangle \in A$, tako da je $\langle p, q\rangle <_l \langle a, b\rangle$. Ovo znači da je ili $p <_X a$, ali to je kontradiktorno sa time da je $p = \sup A_0$, ili da je $p = a$ i $q <_Y b$, što je kontradiktorno sa time da je $q = \sup(B_0)$. Jasno, pošto oba slučaja otpadaju, $\langle p, q\rangle$ mora biti gornje ograničenje skupa A.

Preostaje nam još da pokažemo minimalnost među ostalim gornjim ograničenjima skupa A. Pretpostavimo da je $\langle x, y\rangle$ jedno gornje ograničenje skupa A, i uzmimo neko $a \in A_0$. Tada $\langle a, b\rangle \in A$ za neko $b \in B_0$, pa je $\langle a, b\rangle \leq_l \langle x, y\rangle$. Konkretno, važi da je $a \leq_X x$, pa je x jedno gornje ogračenje skupa A_0, pa odavde imamo da je $p \leq_X x$, jer je $p = \sup A_0$. Ako bi $p <_X x$, tada bi sigurno važilo $\langle p, q\rangle <_l \langle x, y\rangle$ i završili smo. Pretpostavimo da je $p = x$, i sada za svako $b \in B_0$ znamo da važi $\langle p, b\rangle \in A$, pa imamo $\langle p, b\rangle <_l \langle x, y\rangle$. Pošto je $p = x$, onda mora važiti $b <_Y y$ za sve $b \in B_0$. Ovime dobijamo da je y jedno gornje ograničenje skupa B_0, pa mora važiti ponovo $q \leq_Y y$, pošto je $q = \sup(B_0)$, jer $\langle a, b\rangle = \langle p, b\rangle \in A$. Jasno je da smo ovim pokazali da je $\langle p, q\rangle \leq_l \langle x, y\rangle$, i time je $\langle p, q\rangle = \sup(A)$. □

Propozicija 4.4. *I^2 je kompaktan prostor sa leksikografskim uređenjem.*

Dokaz. Pošto znamo da je $[0, 1]$ kompaktan i uređen skup, on prema teoremi 4.1, zadovoljava uslov Dedekindove kompletnosti, pa možemo primeniti lemu 4.1. □

I^2 sa leksikografskim uređenjem zadovoljava još i prvu aksiomu prebrojivosti, gde ćemo do dokaza doći koristeći se poznatim metodama za skup realnih brojeva. Nakon toga, pričom prelazimo na separabilnost i kompletnu normalnost (T_6).

Teorema 4.7. *Prostor I^2 sa topologijom koju indukuje leksikografsko uređenje zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.*

Dokaz. Kao i u teoremi 2.4 koristimo standardnu metodu. Potrebno je pronaći bazu okolina koja je prebrojiva i koja će zadovoljiti osobine ($B01$) i ($B02$). U ovom slučaju imaćemo malo više komplikacija, pre svega zbog tačaka oblika $\langle x, 1\rangle$ i $\langle 0, x\rangle$ kojima ne možemo prići iz ni jedne vertikale, pošto ne možemo odrediti najbližu (jer radimo sa realnim brojevima, za svaka dva realna broja postoji jedan između njih, pa je isti slučaj i sa vertikalama).

Uzmimo proizvoljno $\langle x, y\rangle \in I^2$, i definišimo bazu okolina za tu tačku:

- Ako je $y \in (0,1)$ neka je

$$\mathcal{B}(\langle x, y\rangle) = \{\big(\langle x, y'_n\rangle, \langle x, y''_n\rangle\big) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

gde je $y'_n = \max\{0, y - \frac{1}{n}\}$ i $y''_n = \min\{1, y + \frac{1}{n}\}$.

- Ako je $y = 0$ i $0 < x$ definišemo:

$$\mathcal{B}(\langle x, 0\rangle) = \{\big(\langle x'_n, 0\rangle, \langle x, \tfrac{1}{n}\rangle\big) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

gde je $x'_n = \max\{0, x - \frac{1}{n}\}$.

- Ako je $y = 0$ i $x = 0$ definišemo:

$$\mathcal{B}(\langle 0, 0\rangle) = \{\big(\leftarrow, \langle 0, \tfrac{1}{n}\rangle\big) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Ako je $y = 1$ i $x < 1$, definišemo:

$$\mathcal{B}(\langle x, 1\rangle) = \{\big(\langle x, 1 - \tfrac{1}{n}\rangle, \langle x''_n, 1\rangle\big) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ gde je } x''_n = \min\{1, x + \tfrac{1}{n}\}.$$

- I na kraju, ako je $x = 1 = y$ definišemo:

$$\mathcal{B}(\langle 1, 1\rangle) = \{\big(\langle 1, 1 - \tfrac{1}{n}\rangle, \leftarrow \big) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Familija $\mathcal{B}(\langle x, y\rangle)$ je u svakom od slučajeva prebrojiva familija otvorenih skupova koji sadrže $\langle x, y\rangle$. Iz tog razloga imamo u svim slučajevima zadovoljenu osobinu ($BO1$). Preostaje nam jos ($BO2$). Neka je $\langle x, y\rangle \notin \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$, i neka je U proizvoljna okolina tačke $\langle x, y\rangle$. Tada postoji interval $O = \big(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\big)$ tako da je: $\langle x, y\rangle \in \big(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\big) \subset U$.

Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $y \in (0, 1)$. Tada je moguće:

- $x_1 < x < x_2$ gde imamo očiglednu situaciju da je O nadskup svih iz $\mathcal{B}(\langle x, y\rangle)$.

- $x_1 = x < x_2$, tada je $y_1 < y$ pa postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takvo da je $y_1 < y - \frac{1}{n_1}$, i imamo $\big(\langle x, y'_{n_1}\rangle, \langle x, y''_{n_1}\rangle\big) \subset U$.
- $x_1 < x = x_2$, tada mora biti $y < y_2$, pa postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takvo da je $y + \frac{1}{n_2} < y_2$ i imamo $\big(\langle x, y'_{n_2}\rangle, \langle x, y''_{n_2}\rangle\big) \subset U$.
- $x_1 = x_2$, onda mora biti $y_1 < y < y_2$, pa postoji $n_3 \in \mathbb{N}$ da je $y_1 < y - \frac{1}{n_3} < y < y + \frac{1}{n_3} < y_2$ i imamo $\big(\langle x, y'_{n_3}\rangle, \langle x, y''_{n_3}\rangle\big) \subset U$.

2. $y = 0$ onda mora biti $x_1 < x$, pa postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takvo da je $x_1 < x - \frac{1}{n_1}$, te je i $x_1 < x'_{n_1}$ gde nam još preostaje da razmotrimo:

- Ako je $x < x_2$ onda imamo $\big(\langle x'_{n_1}, 0\rangle, \langle x, \frac{1}{n_1}\rangle\big) \subset U$.
- Ako je $x = x_2$ onda mora biti $0 < y_2$, pa postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takvo da je $\frac{1}{n_2} < y_2$. Uzmimo da je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tada je $\big(\langle x'_{n_0}, 0\rangle, \langle x, \frac{1}{n_0}\rangle\big) \subset U$

3. $y = 1$, analogno slučaju 2.
Za $\langle x, y\rangle \in \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ dokaze je analogan slučaju 2.

Ovim je pokazana i osobina $(BO2)$, pa imamo da je familija $\mathcal{B}(\langle x, y\rangle)$ baza okolina, koja je prebrojiva, te zaključujemo da prostor $(I^2, \mathcal{O}_{<_l})$ zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. □

Nakon što smo pokazali da važe kompaktnost i prva aksioma prebrojivosti, pokaćemo da prostor nije separabilan, niti da je T_6-prostor.

Propozicija 4.5. *$(I^2, \mathcal{O}_{<_l})$ nije separabilan.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji prebrojiv gust skup A (tj. da je prostor separabilan). Tada A mora seći sve skupove oblika $\big(\langle x, 0\rangle, \langle x, 1\rangle\big)$, kojih ima kontinuum mnogo, i koji su svi disjunktni, što je kontradikcija. □

Propozicija 4.6. *$(I^2, \mathcal{O}_{<_l})$ nije T_6.*

Dokaz. Da bismo pokazali da leksikografski kvadrat nije T_6-prostor pokazaćemo da otvoren skup $U = [0,1] \times (0,1) = \bigcup_{x\in[0,1]} \big(\langle x, 0\rangle, \langle x, 1\rangle\big)$ nije F_σ skup, tj. da nije prebrojiva unija zatvornih skupova.

Kao pomoćno tvrđenje pokazaćemo da adherencija proizvoljnog skupa A koji seče beskonačno mnogo skupova $\big(\langle x, 0\rangle, \langle x, 1\rangle\big)$ seče barem jedan od skupova $[0,1]\times\{0\}$ i $[0,1]\times\{1\}$, tj. da važi:

$$\Big|\pi_1[A \cap ([0,1] \times (0,1))]\Big| \geq \aleph_0 \implies \overline{A} \cap \big(([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\})\big) \neq \emptyset.$$

Neka je $X = \pi_1[A \cap ([0,1] \times (0,1))]$ i neka je $|X| \geq \aleph_0$. Kako je $X \subset [0,1]$, u odnosu na uobičajenu topologiju na $[0,1]$ postoji tačka nagomilavanja x skupa X, kao i konvergentan niz $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ elemenata skupa X koji konvergira ka x. Možemo, dalje, iz njega izvući monoton podniz $\{x_{n_k} | k \in \mathbb{N}\}$.

Pretpostavimo prvo, da je taj niz rasući, i pokažimo da tada $\langle x, 0\rangle \in \overline{A}$, gde je $x > 0$. Bazne okoline tačke $\langle x, 0\rangle$ su oblika $\big(\langle x'_n, 0\rangle, \langle x, \frac{1}{n}\rangle\big), n \in \mathbb{N}$, gde je $x'_n = max\{0, x - \frac{1}{n}\}$. Uzmimo proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ i pokažimo da je $\big(\langle x'_n, 0\rangle, \langle x, \frac{1}{n}\rangle\big) \cap A \neq \emptyset$. Kako važi $x'_n < x$, postoji $k \in \mathbb{N}$ da je $x'_n < x_{n_k} < x$. Zbog toga je

$$\big(\langle x_{n_k}, 0\rangle, \langle x_{n_k}, 1\rangle\big) \subset \big(\langle x'_n, 0\rangle, \langle x, \tfrac{1}{n}\rangle\big).$$

Kako je $A \cap \big(\langle x_{n_k}, 0\rangle, \langle x_{n_k}, 1\rangle\big) \neq \emptyset$, postoji $y \in (0,1)$ takvo da je:

$$\langle x_{n_k}, y\rangle \in A \cap \big(\langle x_{n_k}, 0\rangle, \langle x_{n_k}, 1\rangle\big) \subset \big(\langle x'_n, 0\rangle, \langle x, \tfrac{1}{n}\rangle\big),$$

tj. svaka okolina tačke $\langle x, 0\rangle$ seče skup A, pa sama tačka pripada zatvaranju skupa A. Analogno se pokazuje da ako je niz $\{x_{n_k} | k \in \mathbb{N}\}$ monotono opadajući, onda $\langle x, 1\rangle \in \overline{A}$.

Pretpostavimo sada da je skup $[0,1] \times (0,1)$ ujedno i F_σ skup, tj. da se može predstaviti kao unija prebrojive familije $\mathcal{G}$ zatvorenih skupova. $\bigcup \mathcal{G} = [0,1] \times (0,1)$. To znači da su svi skupovi oblika $\{x\} \times (0,1)$ pokriveni. Takvih skupova ima kontinuum, pa postoji skup $G \in \mathcal{G}$ koji seče beskonačno mnogo skupova oblika $\{x\} \times (0,1)$. Međutim skup G sadrži i neku tačku skupa $([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\})$, što je kontradikcija. □

4.3 Kardinalne funkcije na linearno uređenim topološkim prostorima

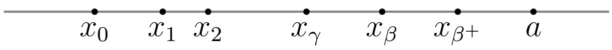
U ovom delu glave 4 pozabavićemo se kardinalnim funkcijama u linearno uređenim topološkim prostorima. Pored osnovnih relacija između njih, ispostavlja se da za linearno uređene topološke prostore važi mnogo više. Prvi odnos o kojem će biti reči je odnos celularnosti i karaktera na linearno uređenim topološkim prostorima.

Teorema 4.8 (Mardešić, Papić 1962 [10])**.** *Za svaki linearno uređeni topološki prostor X važi $\chi(X) \leq c(X)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka je $(X, \mathcal{O})$ prostor sa topologijom indukovanom linearnim uređenjem $<$, za koji važi da je $\chi(X) > c(X)$. Posmatrajmo tačku $a \in X$ čija baza okolina ima kardinalnost veću od celularnosti prostora X. Ovde možemo imati više slučajeva. Počnimo od elementa x_0 za koje je $x_0 < a$, takav da izgrađuje jedan od elemenata baze okolina tačke a, oblika (x_0, g), gde je g takav da važi $a < g$.

Formirajmo niz elemanta $\{x_i | \ i \in I\}$ koji grade elemente baze okolina tačke a. Uzmimo sada x_1, takav da gradi bazni i da je $x_0 < x_1 < a$, pa dalje uzimamo x_2 koji gradi neki element baze okolina tačke a, za koji važi $x_1 < x_2 < a$ i tako dalje. Na ovaj način formiramo niz koji se približava elementu a. Pošto nismo u sekvencijalnom prostoru, mi ne možemo sa sigurnošću tvrditi da postoji niz koji konvergira ka a. Ako pak, dođemo do supremuma našeg niza x_α prelazimo sa postupkom na drugu stranu, tj. uzimamo one koji čine bazne $\{x_j | \ j \in J\}$, za koje važi da je $a < x_j$ za $j \in J$. Ovih elemanata možemo staviti u niz makar kolika je kardinalnost baze okolina, tj. koliki je karakter elementa $\chi(a, X)$. Od njih uzimamo svaki drugi, počevši od x_0, gde ako bismo slučajno prešli na drugu stranu a u postupku ne menjamo ideju..

Pošto je karakter elementa a veći od celularnosti, sa parnim elementima u našem nizu $\{x_i | \ i \in I\}$ kao krajevima intervala, mi formiramo više nego što je celularnost prostora X disjunktnih nepraznih otvorenih intervala oblika (x_i, x_{i+2}) i (x_γ, x_{β^+}), gde je $\gamma \cup \{\gamma\} = \beta$. Ovo je kontradikcija, pošto smo našli familiju disjunktnih otvorenih intervala veće kardinalnosti od celularnosti prostora X. Uzimamo svaki drugi element kako bismo osigurali činjenicu da su intervali neprazni (iz odnosa elemenata na slici 4.1 uočavamo da će ti preskočeni elementi biti u intervalima koje posmatramo).



Slika 4.1

$\square$

Nakon karaktera prostora, priču prebacujemo na nasledni Lindelefov broj hl linearno uređenih topoloških prostora. Dalje, daćemo dokaz, u slučaju da je $c(X) = \aleph_0$, što se drugačije kaže da prostor zadovoljava osobinu ccc (*countable chain condition*), jednakosti $hl(X) = c(X)$. Naime, prostor zadovoljava ccc ako je svaka kolekcija disjunktnih otvorenih skupova prebrojiva. Nakon toga, slično se može dokazati i za gustinu (tj. ako je prostor separabilan) i naslednu gustinu. Generalizacija ova dva dokaza daju nam isti odnos kardinalnih funkcija i za sve ostale linearno uređene topološke prostore, što navodimo nakon oba dokaza. Dokaze preuzimamo od originalnih autora tvrđenja, H. R. Bennett-a i D. J. Lutzer-a, koji su prvi odvojili ovaj problem od osobine povezanosti, jer su prvobitni dokazi bili izvedeni isključivo za povezane LOTS. Pre dokaza navodimo i lemu koju su autori koristili, i koja se dokazuje transinfinintnom indukcijom.

Lema 4.3. *Pretpostavimo da je X linearno uređen topološki prostor, koji zadovoljava osobinu ccc, tj. $c(X) = \aleph_0$, i da je $Y \subseteq X$. Neka je $z \in Y$, tada postoje prebrojivi podskupovi P i Q redom skupova $(\leftarrow, z] \cap Y$ i $[z, \rightarrow) \cap Y$, takvih da ako je $y \in Y$, onda postoje $p \in P$ i $q \in Q$ za koje važi $p \leq y \leq q$.*

Teorema 4.9 (Lutzer, Bennett 1969 [8])**.** *Za svaki linearno uređeni topološki prostor X važi da je $hl(X) = c(X)$, ako se zna da X zadovoljava uslov ccc, tj. $c(X) = \aleph_0$.*

Dokaz. Kako bismo pokazali da je linearno uređeni topološki prostor X koji zadovoljava osobinu ccc nasledno Lindelefovski (tj. da je njegov nasledni Lindelefov broj $\aleph_0$), dovoljno je pokazati da ako je $\mathcal{V}$ bilo kakva kolekcija otvorenih intervala u X, onda postoji prebrojiva potkolekcija $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ koja pokriva skup $\bigcup \mathcal{V}$.

Neka je $Y = \bigcup \mathcal{V}$. Za svako $x \in Y$, uzmimo da je $I(x) = \{y \in Y |$takvih y da se skup svih tačaka skupa Y koje leže između x i y, u smislu uređenja $<$ na X, može pokriti prebrojivom potkolekcijom od $\mathcal{V}\}$. Svaki skup $I(x)$ je otvoren u prostoru X, i važi za različite x i y iz Y da je ili $I(x) = I(y)$ ili $I(x) \cap I(y) = \emptyset$, slično kao kod konveksnih komponenti. Pošto radimo sa prostorom koji zadovoljava ccc, kolekcija $\rho = \{I(x) | x \in Y\}$ je prebrojiva, pa možemo uzeti da je $\rho = \{I(x) | x \in C\}$ gde je C prebrojiv podskup skupa Y.

Fiksirajmo sada $x \in C$. Koristeći lemu 4.3, uzimamo prebrojive skupove $P(x)$ i $Q(x)$ redom za $I(x) \cap (\leftarrow, x]$ i $I(x) \cap [x, \rightarrow)$ takve da, ako je $y \in I(x)$, onda postoje $p \in P(x)$ i $q \in Q(x)$ takvi da je $p \leq y \leq q$. Po definiciji skupa $I(x)$ za svako $p \in P(x)$ i $q \in Q(x)$ postoje prebrojive potkolekcije $\mathcal{V}(x, p)$ i $\mathcal{V}(x, q)$ kolekcije $\mathcal{V}$ koje pokrivaju redom skupove $Y \cap [p, x]$ i $Y \cap [x, q]$. Uzmimo da je $\mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{V}(x, r) | r \in P(x) \cap Q(x)$ i $x \in C\}$. Tada je tako definisano $\mathcal{U}$ prebrojiva potkolekcija od $\mathcal{V}$ koja pokriva $Y = \bigcup \mathcal{V}$, čime je dokaz završen. $\square$

Sada ćemo dati dokaz za separabilne linearno uređene prostore, koji će povezati gustinu i naslednu gustinu. Kao što je i spomenuto generalizacija ovog tvrđenja jeste da za svaki linearno uređen topološki prostor X važi $d(X) = hd(X)$. Prvo navodimo dve leme, prva je posledica teoreme 4.9

Lema 4.4. *Neka je X linearno uređen topološki prostor koji zadovoljava ccc, i neka je Y njegov diskretan podskup. Tada je Y prebrojiv.*

Definicija 4.4. *Topološki prostor X je nasledno kolektivno normalan ako zadovoljava dva uslova:*

1. *Za svaki potprostor je T_1 prostor koji zadovoljava uslove teoreme 2.3,*
2. *Takođe zadovoljava uslov da: za svaku familiju $\{F_s\}_{s\in S}$ podskupova skupa X koji su diskretni u uniji $\bigcup_{s\in S} F_s = F$ i koji su sačinjeni od skupova zatvorenih u F,postoji familija $\{U_s\}_{s\in S}$ po parovima disjuntknih otvorenih podskupova prostora X takvih da je $F_s \subseteq U_s$ za svako $s \in S$.*

Lema 4.5 (Steen 1970 [1])**.** *Svaki linearno uređen topološki prostor je nasledno kolektivno normalan.*

Teorema 4.10 (Skula 1965 [13], kraći dokaz Lutzer, Bennett 1969 [8])**.** *Separabilan linearno uređen topološki prostor je nasledno separabilan, tj. ako je $h(X) = \aleph_0$ za linearno uređeni topološki prostor X, tada je i $hd(X) = \aleph_0$.*

Dokaz. Neka je X separabilan linearno uređen topološki prostor, i neka je $A \subseteq X$. Neka je $I(A) = \{a \in A | \{a\}$ je otvoren u $\mathcal{O}_A\}$. Po lemi 4.4, skup $I(A)$ je prebrojiv. Neka je D prebrojiv gust podskup skupa X. Uzmimo da je:

$$\mathcal{D} = \{(r, s) | r, s \in D, r < s \text{ i } A \cap (r, s) \neq \emptyset\}.$$

Za svaki interval $J \in \mathcal{D}$, biramo tačku $a(J) \in A \cap J$. Neka je $D(A) = I(A) \bigcup \{a(J) | J \in \mathcal{D}\}$, gde je očigledno $D(A)$ prebrojiv podskup skupa A. Kako bismo pokazali da je $D(A)$ gust u A biće dovoljno da pokažemo da ako je U otvoren u X i ako je $A \cap U \neq \emptyset$, onda je $D(A) \cap U \neq \emptyset$. Birajmo $a \in A \cap U$, ako je $a \in I(A)$, onda je $a \in D(A) \cap U$. Dalje, ako važi $a \notin I(A)$, onda postoje dve mogućnosti:

(*i*) $(\leftarrow, a) \neq \emptyset$ i $(x, a) \cap A \neq \emptyset$ za sve $x < a$, ili

(*ii*) $(a, \rightarrow) \neq \emptyset$ i $(a, y) \cap A \neq \emptyset$, za sve $a < y$.

Razmatraćemo samo prvi slučaj. Kako je U okolina za tačku $a \in X$, pošto su otvoreni skupovi okoline svih svojih tačaka, postoji tačka $z < a$ takva da je $(z, a) \subseteq U$. Koristimo (i), i biramo tačke $b \in (z, a) \cap A$, $c \in (b, a) \cap A$ i $d \in (c, a) \cap A$. Pošto je D gust u X, i pošto $(z, c) \neq \emptyset \neq (c, a)$, postoje tačke $r \in (z, c) \cap D$ i $s \in (c, a) \cap D$. Uzmimo dalje da je $J = (r, s)$, dobijamo element iz $\mathcal{D}$. Onda imamo da je $a(J) \in (z, a) \cap D(A) \subseteq U \cap D(A)$. $\square$

Nakon ovih dokaza možemo pričati o generalizaciji teorema 4.9 i 4.10. U nastavku κ će označavati beskonačan kardinalni broj.

Definicija 4.5. *Prostor X je κ-separabilan ako X sadrži gust podskup kardinalnosti $\leq \kappa$, ili preko kardinalnih funkcija: $d(X) = \kappa$. X zadovoljava κ-chain condition ako svaka disjunktna kolekcija otvorenih podskupova skupa X ima kardinalnost $\leq \kappa$, tj. važi $c(X) = \kappa$. Na kraju, prostor X je κ-Lindelefovski ako svaki otvoren pokrivač od X ima potpokrivač kardinalnosti $\leq \kappa$.*

Koristeći metode iz dokaza teorema 4.9 i 4.10 može se dokazati sledeće:

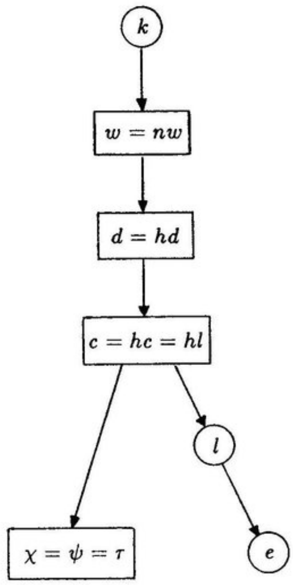
Teorema 4.11. *Linearno uređen topološki prostor zadovoljava κ-chain condition ako i samo ako je nasledan κ-Lindelefovski prostor, što možemo zapisati preko kardinalnih funkcija: za svaki linearno uređen topološki prostor X važi $hl(X) = c(X)$.*

Teorema 4.12. *κ-separabilan linearno uređen topološki prostor je nasledno κ-separabilan.*

Zbog odnosa kardinalnih funkcija teorema 4.12 zapravo daje sledeći odnos za svaki linearno uređen topološki prostor X: $d(X) = hd(X)$. Bez dokaza dajemo još jedan odnos između kardinalnih funkcija, koji upotpunjuje diagram koji dajemo nakon teoreme.

Teorema 4.13. *Za svaki linearno uređen topološki prostor X važe sledeći odnosi među kardinalnim funkcijama: $\chi(X) = \psi(X) = \tau(X)$ i $w(X) = nw(X)$.*

Istaknimo da postoje još neki odnosi između kardinalnih funkcija na linearno uređenim topološkim prostorima, koje možemo predstaviti diagramom (gde nam k predstavlja kardinalnost prostora):



Slika 4.2-odnosi između kardinalnih funkcija

Glava 5

Povezanost na linearno uređenim topološkim prostorima

Kao i sa kompaktnošću i povezanost ima svoj ekvivalentant uslov za linearno uređene topološke prostore. Ponovo nam je potrebna osobina Dedekindove kompletnosti, ali sada pojačana osobinom da je naš prostor gusto uređen. Ove dve osobine zajedno ekvivalente su sa osobinom neprekidne uređenosti (ili linearnog kontinuuma, kako navode neki autori) linearno uređenog skupa.

Teorema 5.1. *Linearno uređen topološki prostor je povezan ako i samo ako je neprekidno uređen.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Uzimamo da je X povezan linearno uređen topološki prostor. Pretpostavimo prvo da nije gusto uređen linearnim uređenjem $<$. Tada postoje $x, y \in X$, $x < y$ za koje ne postoji $z \in X$ takav da je $x < z < y$. Sada je samo dovoljno da posmatramo $A = (\leftarrow, y)$ i $B = (x, \rightarrow)$. Ovo su dva otvorena skupa, pošto se radi o intervalima, koja su očigledno disjunktni, zbog pretpostavke o odnosu x i y, za koje važi da je $X = A \cup B$, što je kontradikcija sa povezanošću prostora X.

Treba se još pozabaviti sa uslovom Dedekindove kompletnosti. Uzmimo da je $C \subseteq X$ koji je ograničen odozdo, a da nema supremum. Neka je skup D unija svih intervala oblika $(b, \rightarrow)$, gde b prolazi skupom svih gornjih ograničenja skupa C. Skup D je otvoren kao unija intervala, ali je ujedno i zatvoren jer: ako uzmemo $a \notin D$, tada je $a < b$, za svako b koje je gornje ograničenje skupa C, pa mora postojati $q \in C$ takvo da je $a < q$, inače bismo imali da je a najmanje gornje ograničenje, te postoji otvoren interval koji sadrži a i ne seče skup D. Sada imamo D koji je otvoren, ali i njegov komplement koji će biti otvoren kao komplement zatvorenog skupa, koji su disjunktni otvoreni skupovi čija je unija X, što je ponovo kontradikcija sa povezanošću prostora X.

($\Longleftarrow$) Pretpostavaimo sada da je X linearno uređen topološki prostor koji nije povezan, ali jeste neprekidno uređen linearnim uređenjem $<$. Pošto X nije povezan, postoje neprazni otvoreni skupovi O_1 i O_2 iz linearno uređene topologije koji su disjunktni i za koje važi $X = O_1 \cup O_2$. Neka su $x_1 \in O_1$ i $x_2 \in O_2$ i uzmimo bez umanjenja opštosti da je $x_1 < x_2$. Pošto je X neprekidno uređen, on zadovoljava Dedekindovu aksiomu kompletnosti, pa za skup $O_1 \cap [x_1, x_2]$ postoji najmanje gornje ograničenje. Neka je $x = \sup(O_1 \cap [x_1, x_2])$.

Ako pretpostavimo da $x \in O_1$, onda postoji interval $(a, b) \subset O_1$ koji sadrži x, jer je

O_1 otvoren i okolina je svake svoje tačke. Mora važiti $b \leq x_2$, inače bismo imali neprazan presek O_1 i O_2, i u (x, b) nema elemenata iz O_1, niti iz X. Ako bi postojao element iz O_1, x više ne bi bio supremum $O_1 \cap [x_1, x_2]$, a ako bi bilo elemenata iz X koji nisu u O_1, već su iz O_2, opet bismo imali element iz preseka $O_1 \cap O_2$. Dobili smo da je $(x, b) = \emptyset$, što je kontradikcija sa gustom uređenošću prostora X.

Inače, ako bismo pretpostavili da $x \in O_2$, imali bismo interval $(a, b) \subset O_2$ kome pripada x, ponovo, jer radimo sa otvorenim skupom O_2. Slično prethodnom slučaju, dobija se da u (a, x) nema elemenata skupa O_1, pošto bismo imali kontradikciju sa praznim presekom, dobijamo da je a gornje ograničenje $O_1 \cap [x_1, x_2]$ manje od supremuma, što je kontradikcija. □

Nakon povezanosti priču prebacujemo na odnos linearno uređenih topoloških prostora sa realnom pravom i intervalom $I = [0, 1]$. Prvo ćemo pokazati da postoji homeomorfizam između linearno uređenih topoloških prostora koji su separabilni i kardinalnosti kontinuum, a onda i da se separabilni metrizabilni linearno uređeni topološki prostori mogu potopiti u realnu pravu. Dokaze ovih tvrđenja možemo naći u [12]

Teorema 5.2. *Svaki separabilan linearno uređen kontinuum je homeomorfan zatvorenom intervalu* $[0, 1]$

Dokaz. Neka je X separabilan linearno uređen kontinuum, tj. X je povezan i kompaktan prostor. Uzmimo da je S topološki gust skup u X koji je prebrojiv (separabilnost). Pokazaćemo da ako S sadrži najmanji element prostora X, x_{min}. Izbacivanjem x_{min} iz skupa S dobijamo skup $S \setminus \{x_{min}\}$ koji je i dalje gust. Pošto je gust, skup S seče svaki neprazan bazni skup. Diskusiju svodimo na razmatranje skupova oblika $(\leftarrow, x) = [x_{min}, x)$, za $x \in X$, koji sadrže najmanji element prostora X. Povezanost nam daje da je X gusto uređen, pa zbog toga znamo da je neprazan svaki skup oblika (x_{min}, x), pa zbog gustine skupa S sigurno važi i $S \cap (x_{min}, x) \neq \emptyset$. Odavde imamo $S \setminus \{x_{min}\} \cap [x_{min}, x) \neq \emptyset$. Analogija važi za x_{max}, najveću tačku skupa X. Ako je sadržana u S, njenim izbacivanjem ne remeti se gustina skupa S. Možemo onda bez umanjenja opštosti pretpostaviti da S ne sadrži krajnje tačke prostora X.

Dalje, pokažimo da je $(S, <_S)$ gusto linearno uređenje. Neka su $x, y \in S$ i neka je $x < y$. Sada koristimo gustinu skupa X, tj. da je gusto uređen, pa $(x, y) \neq \emptyset$. Odatle znamo da je neprazan i $(x, y) \cap S$, što znači da postoji $z \in S$ takav da je $x < z < y$. Takođe, lako pokazujemo i da S nema krajnjih tačaka. Ako pretpostavimo da je s najmanji element skupa S, a za najmanji element skupa X uzmemo x_{min}, tada će skup (x_{min}, s) biti prazan, što je kontradikcija sa povezanošću prostora X, tačnije sa činjenicom da je gusto uređen. Analogno se pokazuje da S nema najveći element.

Dakle, imamo S skup koji je prebrojivo gusto linearno uređen bez krajnjih tačaka, pa je, po teoremi 1.2, izomorfan sa $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Uzmimo da je $f : S \to (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ izomorfizam. Definišimo $F : X \to [0, 1]$ sa

$$F(x_{min}) = 0 \text{ i } F(x) = \sup\{f(s)|\ s \in S \wedge s \leq x \text{ za } x \neq x_{min}\}.$$

Preslikavanje F je dobro definisano upravo zbog gustine skupa S. Za sve $x > x_{min}$ zbog guste uređenosti prostora X, imamo da je $(x_{min}, x) \neq \emptyset$, pa nam činjenica da je S gust u X daje da postoji $s \in S \cap (x_{min}, x)$. Sada znamo da je $\{f(s)|\ s \in S \wedge s \leq x\}$ neprazan, i ograničen odgore (sa 1) pa ima supremum. Takođe, očigledno imamo da je $F|_S = f$, tj. za $s \in S$ imamo $F(s) = f(s)$.

Pokažimo da je F homeomorfizam. Pošto je X kompaktan, a $[0,1]$ Hauzdorfov prostor dovoljno je pokazati da je F neprekidna bijekcija. Prvo, pokazaćemo da je F striktno rastuća funkcija. Neka su $x_1, x_2 \in X$ i neka je $x_1 < x_2$. Pošto je X gusto linearno uređenje, a S je topološki gust u X, na osnovu propozicije 4.2, S je i uređajno gust u X. Zbog ove činjenice postoje $s_1, s_2 \in S$ takvi da je $x_1 < s_1 < s_2 < x_2$, odakle imamo $F(x_1) \leq F(s_1) < F(s_2) \leq F(x_2)$.

Pokažimo sada da je F sirjektivno. Neka je $y \in [0,1]$. Ako $y \in \mathbb{Q}$, onda jasno je da postoji $x \in S \cup \{x_{min}, x_{max}\}$ za koje je $F(x) = y$. Neka je zato $y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Tada je $y = \sup((0,x) \cap \mathbb{Q})$. Neka je $S_1 = \{s \in S |\ f(s) \leq y\}$. Pošto je f striktno rastuće preslikavanje, tada će važiti da ako je $s_1 \in S_1$ i $s_2 < s_1$ onda će i $s_2 \in S_1$. Ako uzmemo da je $x = \sup S_1$ tada važi:

$$y = \sup((0,y] \cap \mathbb{Q}) = \sup\{q \in \mathbb{Q} |\ q \leq y\} = \sup\{f(s) |\ s \in S \wedge f(s) \leq y\}$$

$$F(x) = \sup\{f(s) |\ s \in S \wedge s \leq x\}.$$

Preostalo nam je da pokažemo još da za svako $s \in S$ važi: $s \leq x \Leftrightarrow f(s) \leq y$. Ako je $s \leq x$ onda $s \in S_1$, tj. $f(s) \leq y$. Obratno, ako je $f(s) \leq y$ onda $s \in S_1$, pa je jasno da $s \leq x$.

Pokažimo još da je F neprekidno preslikavanje. Pokazaćemo da je inverzna slika svakog podbaznog otvorena u X. Uzmimo da je $(\leftarrow, b) = [0, b)$ gde je $b \in \mathbb{Q}$, podbazni u $[0,1]$. Tada zbog monotonosti $F^{-1}[(\leftarrow, b)] = (\leftarrow, F^{-1}(b))$, što je otvoren skup. Slično je i $F^{-1}[(b, \rightarrow)] = (F^{-1}(b), \rightarrow)$. □

Na kraju navešćemo dve teoreme bez dokaza, kao i jednu teoremu sa dokazom preuzetim iz [12]. Potrebno je napomenuti da u glavi 4 u [12] imamo potrebne dokaze za težinu Dedekindove kompaktifikacije (naše cX kompaktifikacije) kao i navedene posledice za prenošenje druge aksiome prebrojivosti na kompaktifikaciju sa prostora, i činjenicu da je cX metrizabilan prostor ako X zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti.

Teorema 5.3. *Svaki separabilan metrizabilan linearno uređen prostor se može potopiti u realnu pravu.*

Dokaz. Kako bismo došli do traženog rezultata koristićemo kompaktifikaciju. Do samog potapanja koje se traži dolazimo preko kompozicije, gde je kompaktifikacija prva od dve funkcije. Pretpostavimo da je X separabilan, metrizabilan linearno uređen topološki prostor. Separabilnost i metrizabilnost nam zajedno daju drugu aksiomu prebrojivosti za prostor X, koja se prenosi na kompaktifikaciju cX iz glave 4. Pošto imamo drugu aksiomu prebrojivosti na kompaktifikaciji, kompaktifikacija je tada i metrizabilan prostor, a ono što nam je takođe bitno jeste da nemamo pukotina, pošto radimo sa kompaktnim linearno uređenim prostorom.

Pokažimo da ovaj prostor sadrži najviše prebrojivo mnogo skokova. Pretpostavimo suprotno, da postoji barem $\aleph_1$ skokova. Svaki skok (D, E) karakterišu dve tačke, a to su $d = \max D$ i $e = \min E$. Obeležimo sa S_n familiju skokova sa osobinom da je $\frac{1}{n+1} < d(d, e) \leq \frac{1}{n}$ za $n > 0$, a sa S_0 familiju skokova sa osobinom $d(d, e) > 1$. Kako je familija svih skokova unija familija S_n, sledi da postoji n_0 da je $|S_{n_0}| \geq \omega_1$. Sa D_{n_0} obeležimo familiju maksimuma donjih klasa i posmatrajmo familiju otvorenih lopti oblika $L(d, \frac{1}{2n_0})$, gde d prolazi kroz skup D_{n_0}. Ova familija lopti je po parovima disjunktna familija otvorenih skupova kardinalnosti veće od ω. Kako je cX separabilan prostor, takva familija može biti najviše prebrojiva, što znači da imamo kontradikciju. Dalje, dajemo skicu dokaza.

Sada ćemo definisati novi linearano uređen prostor kX, tako što ćemo sve skokove popuniti kopijom intervala $(0,1)$. Dobijamo praktično da je cX podskup novog prostora kX,i poredak će ostati isti, dok će novi elementi zauzeti mesto skokova koje su popunili. Ako posmatramo sve elemente koji popunjavaju jedan skok (D, E), onda su oni svi veći od svih elemenata iz D i manji od svih elemenata iz E. Nazovimo to potapanje g.

Kako su $(0,1)$ i cX separabilni, separabilan je i kX. Takođe imamo da je kX kompaktan, pošto nema pukotina, a eliminacijom skokova postao je i povezan. Dakle imamo da je kX separabilan kontinuum, pa je homeomorfan intervalu $[0,1]$. Konačno, potapanje prostora X u $\mathbb{R}$ je $g \circ f$. $\square$

Na kraju, navodimo i dve teoreme bez dokaza. Prva povezuje povezanost (odnosno nepovezane prostore) sa jako nula-dimenzionalnim prostorima, a druga daje koji su to uslovi da se na jednom prostoru može definisati linearno uređenje.

Teorema 5.4 (Herrlich 1965 [5]). *Svaki nasledno nepovezan linearno uređen prostor je jako nula-dimenzionalan.*

Teorema 5.5 (Herrlich 1965 [5]). *Svaki metrizabilan jako nula-dimenzionalan prostor* $(X, \mathcal{O})$ *se može linearno urediti relacijom* $<$ *takvom da je* $\mathcal{O}_< = \mathcal{O}$.

Glava 6

Zaključak

U ovom radu smo prošli kroz neke od osnovnih osobina linearno uređenih topoloških prostora. Bitna osobina linearno uređenih topoloških prostora jeste normalnost svakog, a u ovom radu smo ilustrovali dokaz koristeći se osobinama baze linearno uređene topologije i diskretnih skupova. Preko osobina indukovanih topolgija na potprostorima, i konveksnih skupova pokazali smo i više, da je svaki linearno uređen topološki prostor T_5-prostor. Upoznali smo se i sa leksikografskim uređenjem, jednim linearnim uređenjem na Dekartovom proizvodu, i ilustrovali smo dokaze za neke osobine za prostor I^2 sa leksikografskim uređenjem.

Bavili smo se i osobinama kompaktnosti i povezanosti, gde smo pokazali koji su to potrebni i dovoljni uslovi da linearno uređen topološki prostor bude kompaktan, odnosno povezan. Naznačio bih pojam kompaktifikacije i priču o Dedekindovoj kompletnosti, koja nam je dala univerzalnu kompaktifikaciju, koja je pritom i sama linearno uređenje, linearno uređenih topoloških prostora.

Time smo upotpunili priču o linearno uređenim topologijama i osobinama istih sa kojima smo se upoznali na kursu topologije. Treba istaći i priču o kardinalnim funkcijama, koja je jedina tema u radu izvan kursa topologije, u koje je uloženo mnogo rada šezdesetih tih godina prošlog veka. Ilustovana veza između celularnosti i naslednog Lindelefovog broja zahtevala je povezanost prostora, a prvobitno je dokazana takođe samo za kompaktne prostore. Spomenuo bih i pojam parakompaktnosti, koji takođe izlazi izvan kursa topoloje, a koji donosi još dosta zanimljivosti u priču o linearno uređenim topološkim prostorima. Radoznalom čitaocu prepuštamo da samostalno istraži, kako činjenicu da su za svaki linearno uređeni topološki prostor parakompaktnost, jaka parakompaktnost i slaba parakompaktnost ekvivalentni uslovi (videti [3]), tako i vezu leksikografski uređenog I^2 sa pravom Zorgenfreja, ili ostale probleme vezane za kardinalne funkcije. Za one sa boljim znanjem nemačkog jezika preporučuje se [5], a sa boljim znanjem francuskog [2].

Bibliografija

[1] Garrett Birkhoff, *Lattice theory,* New York, 1940.

[2] Nicolas Bourbaki, *Topologie général ch. IX,* Paris, 1948.

[3] Ryszard Engelking, *General Topology,* Heldermann Verlag Berlin 1989.

[4] Alfréd Haar, Denes König, *Ueber einfach geordnete Mengan,* J för die reine und angew. Math. 139, 1910.

[5] Horst Herrlich, *Ordunngsfähigkeit total-diskontinuierlicher, Räume,* Math. Ann. 159, 1965.

[6] Miloš Kurilić, *Osnovi opšte topologije,* Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1998.

[7] Boris Lavrič, *Linearna urejenost in intervalska topologija ,* Obzornik za matematiko in fiziko Ljubljana 2001.

[8] David Lutzer, H Bennett, *Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property in linearly orderable spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 23, 1969.

[9] M.J. Mansfield, *Some generalizations of full normality,* Trans. Amer. Math. Soc 86, 1957.

[10] Sibe Mardešić, Pavle Papić, *Continues images of ordered compacta, the Suslin property and diadic compacta,* Glasnik Mat. 17, 1962.

[11] Paul Meyer, *Sequential properties of ordered topological spaces,* Comp. Math. 21, 1969.

[12] Aleksandar Pavlović, *Topologije indukovane linearnim uređenjima,* Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2002.

[13] Ladislav Skula, *Dědičná m-separabilita uspořádaného prostoru,* Čas.pro pěst.mat., Prag 90, 1965.

[14] L. A. Steen, *A direct proof that a linearly ordered space is hereditarily collectionwise normal,* Proc. Amer. Math. Soc. 24, 1970.

[15] https://math.stackexchange.com/questions/1742889/how-to-prove-ordered-square-is-compact

Kratka biografija

Aleksandar Janjoš rođen je 15. novembra 1992. u Novom Sadu, Rep. Srbija. Završava osnovnu školu „Miloš Crnjanski"u Žablju kao nosilac Vukove diplome. Nakon toga upisuje srednju školu „22. oktobar"u Žablju, smer opšti tip gimnazije, koju završava 2011. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Matematika. Osnovne studije na smeru Diplomirani profesor matematike završava 2015. godine sa prosekom 9.05, i upisuje master akademske studije na istom fakultetu, smer Master profesor matematike. Sve ispite planirane planom i programom položio je u julskom roku 2017. godine, čime je stekao uslov za odbranu ovog master rada, i završetak studija. Od septembra 2016. godine je zaposlen na Fakultetu tehničkih nauka pri katedri za matematiku, kao saradnik u nastavi.

Novi Sad, oktobar 2017.

Aleksandar Janjoš

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: *Aleksandar Janjoš*
AU
Mentor: *dr Aleksandar Pavlović, vanr. prof.*
MN
Naslov rada: *Linearno uređena topologija*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/e*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2017.*
GO
Izdavač: *autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: *6 poglavlja, 52 strane, 15 lit. citata, 8 slika*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO
Naučna disciplina: *topologija*
ND
Ključne reči: *Linearno uređenje, topologija, baza topologije, normalni topološki prostori, kompaktnost, povezanost, kompaktifikacija, kardinalne funkcije*
PO
UDK
Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*
ČU
Važna napomena:

VN
Izvod: *Glavni cilj ovog rada je da se na jednom mestu sakupe rezultati vezani za linearno uređene topologije i osobine linearno uređenih prostora. U prvom delu rada je data teorijska osnova koja je potrebna za razumevanje dokaza tvrđenja. Nakon toga su izvođeni dokazi za pojedine osobine linearno uređenih topoloških prostora gde treba istaći dokaze za normalnost i naslednu normalnost svih linearno uređenih topoloških prostora, kao i ekvivalentne uslove da linearno uređen topološki prostor bude kompaktan. Na kraju rada dat je ekvivalentan uslov da linearno uređeni topološki prostor bude povezan kao i ilustracija potapanja svakog separabilnog metrizabilnog linearno uređenog prostora u realnu pravu.*
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *8. septembar 2017.*
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Ljiljana Gajić, redovni profesor*
Član: *dr Miloš Kurilić, redovni profesor*
Član: *dr Aleksandar Pavlović, vanredni profesor*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents code: *Master thesis*
CC
Author: *Aleksandar Janjoš*
AU
Mentor: *Aleksandar Pavlović, PhD*
MN
Title: *Order topology*
XI
Language of text: *Serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2017.*
PY
Publisher: *author's reprint*
PU
Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: *6 chapters, 52 pages, 15 lit. references, 8 images*
PD
Scientific field: *mathematics*
SF
Scientific discipline: *Topology*
SD
Key words: *Linear order, topology, basis, normal space, completely normal space, compactness, connectedness, compactification, cardinal functions*
UC
Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*
HD
Note:
N

Abstract: *The main goal of this paper is to gather results about linearly ordered topology and the linearly ordered topological spaces LOTS. In first chapter we gave theoretical basis which is necessary for understanding proofs of theorems. In following chapters we prove theorems concerning individual properties of linearly ordered spaces, where we should point out proofs that every linear order set is normal, and more, completely normal, and we also discuss compactness. At the end of this paper we give a condition equivalent to connectedness in linearly ordered spaces as well as presentation of proof that every separable metrizable linearly ordered space can be embedded into the real line.*
AB
Accepted by the Scientific Board on: *8th September 2017*
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: *Dr Ljiljana Gajić, Full Professor*
Member: *Dr Miloš Kurilić, Full Professor*
Member: *Dr Aleksandar Pavlović, Associate Professor*