UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Adel Šoš

Neki problemi rasporeda tačaka i pravih

- Master rad-

Mentor:

dr Bojan Bašić

Novi Sad, 2017

Sadržaj

Predgovor **2**

1 Uvod **3**

2 Razni dokazi Sylvester-Gallaieve teoreme **5**

3 Broj običnih pravih **11**

3.1 Postojanje $3n/7$ običnih pravih 11

3.2 Postojanje $6n/13$ običnih pravih 17

4 Broj pravih **28**

5 O Diracovoj hipotezi i Erdősovoj verziji **35**

Literatura **45**

Biografija **47**

Ključna dokumentacijska informacija **48**

Predgovor

Engleski matematičar James Joseph Sylvester je 1893. godine postavio sledeće pitanje: *ukoliko je u ravni uočen konačan skup tačaka takvih da ma koja prava određena dvema od tih tačaka sadrži bar još jednu tačku iz tog skupa, da li sve tačke iz uočenog skupa moraju biti kolinearne?* U to vreme se nije pojavio zadovoljavajuć odgovor i problem je pao u zaborav, sve dok četrdesetak godina kasnije Erdős nije nezavisno došao do istog pitanja. Konačno, Gallai je dokazao da je odgovor potvrdan i potom je problem objavljen u časopisu *American Mathematical Monthly*, 1943. godine. Do danas je nađen vrlo velik broj dokaza ovog rezultata. Problem je dobio ime Sylvester-Gallaieva teorema, jer Sylvester je pretpostavio a Gallai je dokazao prvi put.

Polazna tačka ovog master rada je Sylvester-Gallaieva teorema u vezi s kojom su se pojavile i druge hipoteze, od kojih su neke već uspešno dokazane, a neke su još otvoreni problemi.

U uvodnom delu se nalaze one definicije, pojmovi, oznake i metode koje ćemo koristiti u celom radu. Značajan pojam je *obična prava*, koja se definiše kao prava koja je incidentna sa tačno dvema tačkama od uočenih konačno mnogo. U drugom delu uvodimo nekoliko (od mnogobrojnih) dokaza Sylvester-Gallaieve teoreme, odabranih kao ilustraciju raznovrsnosti ideja kojima se može stići do cilja. Primetimo da Sylvester-Gallaieva teorema zapravo daje egzistenciju obične prave. Postavlja se pitanje da li postoji više takvih pravih. U trećem delu bavimo se ovim pitanjem i dajemo sve bolju i bolju donju granicu za broj običnih pravih. U četvrtom delu dajemo donju granicu za ukupan broj pravih određenih konoačnim brojem tačaka, pod određenim uslovima. Na kraju, u petom delu razmatramo Dirakovu hipotezu, koja se bavi postojanjem tačke koja je incidentna sa bar $\frac{n}{2} - c$ pravih. Taj problem još nije rešen, ali neke slabe verzije jesu, što će biti ovde prezentovano.

Adel Šoš

1 Uvod

U ovom poglavlju uvodimo glavne definicije, pojmove i oznake, koje ćemo koristiti u celom radu.

U celom radu posmatramo konačan skup n različitih tačaka u ravni koji označavamo sa $\mathbb{T}$, a same tačke sa T_i za $i \in \{1, 2, ..., n\}$, gde $n \geq 3$. Te tačke su nekolinearne i ako to nije naglašeno ili nije rečeno drugačije. Prave koje su određene sa tim tačkama označavamo sa p_j za $j \in \{1, 2, ..., m\}$, a skup svih tih pravih sa $\mathbb{P}$. Za ceo rad važi, ako je reč o jednoj tački ili pravoj, podrazumeva se da je taj objekat element skupa $\mathbb{T}$ ili $\mathbb{P}$, respektivno, ako drugačije nije naglašeno. Raspored tačaka skupa $\mathbb{T}$ i pravih skupa $\mathbb{P}$ kraće ćemo zvati samo **raspored**.

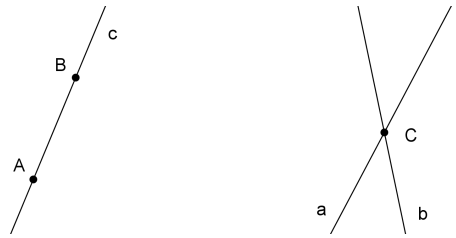
U pojedinim dokazima, kada formulacija tvrđenja ne zahteva boravak u euklidskoj ravni, koristićemo (bez posebnog naglašavanja) pojmove i tehnike projektivne geometrije.

Definicija 1.1. *Za zadatih n tačaka u ravni, pravu određenu nekim dvema od njih nazovimo* ***obična prava*** *ukoliko ona sadrži tačno dve od datih tačaka.*

Kod nekih tvrđenja i dokaza koristićemo neke transformacije datog rasporeda tačaka i pravih.

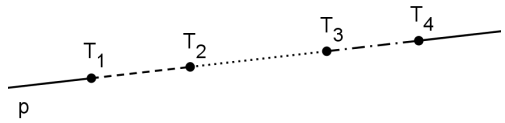
Prva transformacija je **metod dualizacije**. Suština ovog metoda je da date tačke preslikavamo u prave, a prave u tačke (kao oznake koristimo isto slovo, samo veliko pretvorimo u malo i obrnuto), a za pripadnost u dualiziranom rasporedu važi da $A \in b$ ako u originalnom rasporedu $a \ni B$. Pošto svake dve tačke određuju jednu jedinu pravu, možemo zaključiti da se posle dualizacije svake dve prave seku u nekoj tački (videti sliku 1). Primetimo da je u projektivnoj geometriji tvrđenje dobijeno nakon dualizacije ekvivalentno polaznom tvrđenju.

Druga transformacija je **pretvaranje u graf**. Ovaj metod raspored tačaka skupa $\mathbb{T}$ i pravih skupa $\mathbb{P}$ pretvara u graf G, tako da $V(G) = \mathbb{T}$ i $E(G)$ je skup svih duži koje spajaju susedne čvorove, odnosno unija dve poluprave sa iste prave. Videti sliku 2, koja pokazuje podelu jedne prave na grane grafa, koje su predstavljene linijama različitog tipa i to su: (T_1, T_2), (T_2, T_3), (T_3, T_4), a četvrta grana je unija dve poluprave s počecima u T_1 i T_4, koje "pokrivaju" ostatak prave p. Graf G deli ravan na poligonalne oblasti posmatrano iz perspektive projektivne geometrije. U euklidskom smislu, ti poligoni nisu uvek

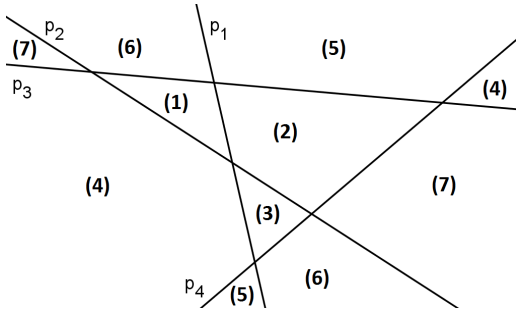


Slika 1: Pripadnost pre i posle dualizacije

konačni i nisu uvek povezani. Videti sliku 3, gde su različiti poligoni označeni različitim brojevima, a isti poligoni istim brojevima. Poligoni (1), (2) i (3) su konačni i povezani, a ostali poligoni ne. Za poligone važi da su ograničeni bar sa tri grane. Broj čvorova, grana i poligona respektivno označavamo sa V, E i F.



Slika 2: Primer za grane određene na pravoj p



Slika 3: Primer za poligone određene pravama p_1, p_2, p_3 i p_4

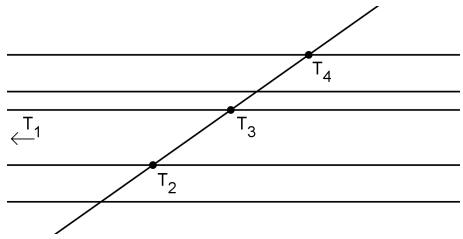
2 Razni dokazi Sylvester-Gallaieve teoreme

U ovom poglavlju rada će biti prezentovano nekoliko različitih dokaza Sylvester-Gallaieve teoreme, koje koriste različite ideje. Korišćeni radovi su [3], [4], [5], [11] i [7]. Jedna formulacija teoreme glasi:

Teorema 2.1. *(Sylvester-Gallaieva teorema) Neka je dato n nekolinearnih tačaka. Tada postoji prava koja sadrži tačno dve od datih n tačaka.*

Prvo dajemo hronološki prvi dokaz po redu, koji potiče od Gallai.

Dokaz. Primenimo projektivnu transformaciju koje tačku T_1 preslikava u beskonačno daleku tačku (pritom ostaju očuvane sve incidencije i kolinearnosti). Novodobijeni raspored je ekvivalentan sa originalnim. U ovoj situaciji prave $p(T_1, T_i)$ za sve $i \in \{2, 3, ..., n\}$ su međusobno paralelne. Pretpostavimo suprotno, da svaka prava određena dvema tačkama sadrži i treću tačku.



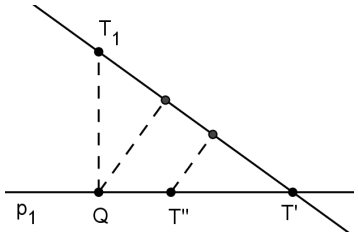
Slika 4

Posmatramo onu trojku različitih tačaka iz $\{T_2, ..., T_n\}$ koje su kolinearne i koja sa pravama $p(T_1, T_i), i \in \{2, ..., n\}$, određuju najmanji ugao. Bez umanjenja opštosti, $p(T_2, T_3, T_4)$ je ta prava, gde važi $T_2 - T_3 - T_4$ i α označava pomenuti ugao.

Po pretpostavci postoji treća tačka $T_k, k \in \{5, ..., n\}$, koja pripada pravoj $p(T_1, T_3)$. Međutim, tada prava $p(T_k, T_2)$ ili $p(T_k, T_4)$ sa $p(T_1, T_3)$ određuje ugao strogo manji od α, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. ■

Na drugom mestu sledi dokaz koji se smatra najelegantnijim. Potiče od Kellya iz 1948. godine.

Dokaz. Izaberemo one uređene dvojke (T_i, p_j) iz $\mathbb{T} \times \mathbb{P}$ za koje važi da $T_i \notin p_j$ i od takvih uređenih dvojki bez umanjenja opštosti neka je (T_1, p_1) ona za koju važi da je rastojanje tačke od prave najmanje. Prava p_1 će biti prava incidentna sa tačno dvema tačkama.



Slika 5

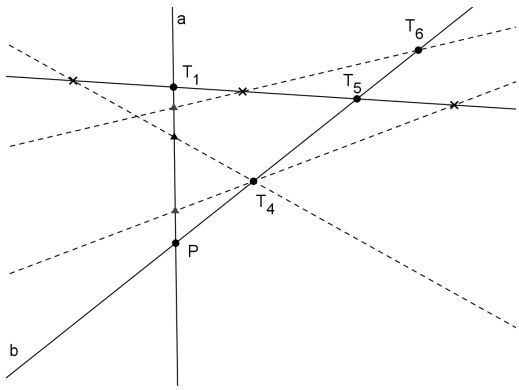
Pretpostavimo suprotno tvrđenje, tj. p_1 sadrži bar tri tačke skupa $\mathbb{T}$ i te označavamo sa T', T'' i T'''. Q označava normalnu projekciju tačke T_1 na pravu p_1, koja može da se poklapa sa najviše jednom tačkom skupa $\{T', T'', T'''\}$. Od tačaka T', T'', T''' dve se nalaze na istoj zatvorenoj polupravi prave p_1 sa početnom tačkom Q. Neka su to T' i T'', od kojih T' ima veće rastojanje od Q. Analiziramo $\triangle T_1QT'$. Rastojanje tačke T'' od prave $p(T', T_1)$ je manje ili jednako sa rastojanjem tačke Q od te iste prave, a ovo je strogo manje od rastojanja tačke T_1 od prave p_1, što je kontradikcija sa pretpostavkom. ■

Naredni dokaz potiče od Steinberga koji je dokazao teoremu u nešto drugačijoj, ekvivalentnoj formulaciji.

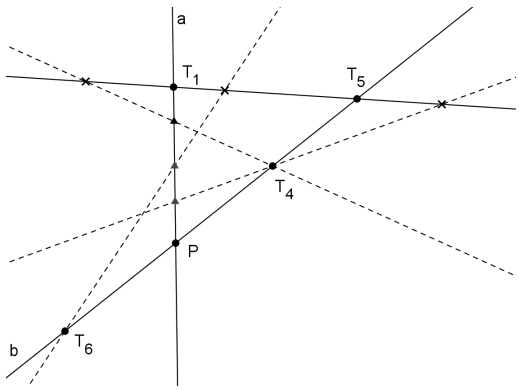
Teorema 2.2. *Neka je dato n tačaka u ravni, takvih da svaka prava povučena kroz ma koje dve od njih sadrži i treću tačku. Tada su sve date tačke kolinearne.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da te tačke nisu kolinearne, tj. postoje tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj i te neka budu T_1, T_2 i T_3. Definišemo pomoćnu pravu a, koja prolazi kroz T_1, ne sadrži nijednu drugu tačku skupa $\mathbb{T}$ i nije paralelna sa nijednom pravom skupa $\mathbb{P}$. Iz prethodne definicije sledi da svaka prava iz $\mathbb{P}$ seče pravu a, te tačke preseka neka budu P_1, P_2,...,P_m, od kojih se neke poklapaju sa T_1 (npr. $a \cap p(T_1, T_2)$), ali ostale su različite od svih T_i. Na osnovu pretpostavke postoji bar jedna tačka P_i, $i \leqslant m$, koja je različita od T_1 (npr. $a \cap p(T_2, T_3)$). Tačke P_i dele pravu a na bar tri dela. P neka bude ono P_i za koje važi da duž T_1P ne sadrži nijedno drugo P_i, a

prava koja određuje tačku P neka se zove b. Na osnovu pretpostavke teoreme bar tri tačke od datih n su incidentne sa pravom b. Neka su to T_4, T_5 i T_6, od kojih se bar dve nalaze na istoj strani tačke P i za redosled te četiri tačke bez umanjenja opštosti imamo dve mogućnosti: $P - T_4 - T_5 - T_6$ (videti sliku 6) ili $T_6 - P - T_4 - T_5$ (videti sliku 7). Tačke T_1 i T_5 na osnovu pretpostavke teoreme su kolinearne sa trećom tačkom i ta neka bude T_7. Tada jedan od pravih $p(T_7, T_4)$ i $p(T_7, T_6)$ seče pravu a kroz duž (T_1P), što je kontradikcija. (Na slici su označene sve tri mogućnosti položaja tačke T_7.)



Slika 6: Slučaj $P - T_4 - T_5 - T_6$



Slika 7: Slučaj $T_6 - P - T_4 - T_5$

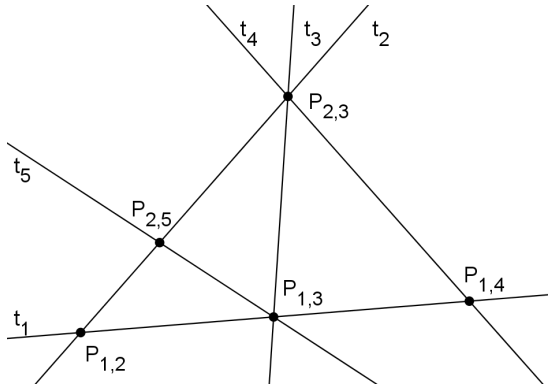
■

1939. godine Motzkin je našao kratak dokaz teoreme, koji koristi u uvodnom delu definisani metod dualizacije. Ako dualiziramo Sylvester-Gallaievu teoremu, dobijamo sledeće tvrđenje:

Teorema 2.3. *Ako se n pravih ne seku u jednoj tački, onda postoji presečna tačka kroz koju prolaze tačno dve prave.*

Dokaz. Definišemo $P_{i,j} := t_i \cap t_j$. Posmatramo prave t_1, t_2, t_3 koje se seku po parovima u različitim tačkama. Imamo dve mogućnosti za presečnu tačku $P_{2,3}$: ili je incidentna samo sa pravama t_2 i t_3, u ovom slučaju dokaz je završen ili pripada i trećoj pravoj t_4. Bez umanjenja opštosti, neka je tačka $P_{1,3}$ između $P_{1,2}$ i $P_{1,4}$.

Ako tačka $P_{1,3}$ nije incidentna sa drugom pravom osim t_1 i t_3, dokaz je završen. Neka zato $P_{1,3}$ pripada pravaoj t_5. Ta prava deli $\triangle P_{1,2}P_{2,3}P_{1,3}$ ili $\triangle P_{1,3}P_{1,4}P_{2,3}$ na dva dela. Bez umanjenja opštosti, $\triangle P_{1,2}P_{2,3}P_{1,3}$ je taj trougao. Opet imamo dve mogućnosti za tačku $P_{2,5}$: ili je to tražena tačka ili pripada pravoj t_6. Po konstrukciji, svaka od pravih koje na ovaj način uočavamo prolazi kroz jednu "novu" tačku (tj. tačku koju nismo dotle uočili), a ta tačka leži na tačno jednoj od dotle uočenih pravih, pritom očito različitoj od novouočene prave; dakle, sve prave koje na ovaj način uočavamo su međusobno različite. Ponavljanjem prethodno opisanog postupka za novodobijene presečne tačke, na kraju dobijamo tačku koja će biti incidentna sa tačno dvema pravama, s obzirom na to da je broj datih pravih konačan.



Slika 8

■

Poslednji dokaz potiče od Melchiora, koji prvo primenjuje dualizaciju, a zatim dobijeni raspored transformiše u graf. To znači da opet treba dokazati postojanje tačke kroz koju pređu tačno dve prave.

Dokaz. Posmatrajmo dobijeni graf u projektivnoj ravni. Svaki čvor tog grafa je incidentan sa bar dve prave. Sa $N_k, k = 2, 3, 4, ...$ označavamo broj čvorova

koji su incidentne sa k pravih. Pošto svaki čvor deli svaku pravu s kojom je incidentan na dva dela, i pošto je svaka grana incidentna s tačno dva čvora, sledi

$$2E = \sum_{k=2}^{n} 2kN_k,$$

odnosno

$$E = \sum_{k=2}^{n} kN_k. \tag{1}$$

Pored toga važi i očigledna jednakost

$$V = \sum_{k=2}^{n} N_k. \tag{2}$$

Ako sa $M_s, s = 3, 4, 5, ...$ označavamo broj poligona ograničenih sa s grana, onda važi

$$F = \sum_{s=3}^{n} M_s \tag{3}$$

i na osnovu činjenice da svaka grana deo tačno dva poligona

$$2E = \sum_{s=3}^{n} sM_s. \tag{4}$$

Ojlerova formula za planaran graf u projektivnoj ravni ([6], Corollary 2.14) daje

$$V - E + F = 1,$$

odnosno ako pomnožimo sa 3

$$3V - 3E + 3F = 3.$$

Pomoću jednakosti (2), (1), (4) i (3), dobijamo niz jednakosti

$$3 \cdot \sum_{k=2}^{n} N_k - \left(\sum_{k=2}^{n} kN_k + \sum_{s=3}^{n} sM_s \right) + 3 \cdot \sum_{s=3}^{n} M_s = 3,$$

$$\sum_{k=2}^{n} (3-k)N_k + \sum_{s=3}^{n} (3-s)M_s = 3,$$

$$N_2 + \sum_{k=4}^{n}(3-k)N_k + \sum_{s=3}^{n}(3-s)M_s = 3,$$

a ako odavde izrazimo N_2 dobijamo

$$N_2 = 3 + \sum_{k=4}^{n}(k-3)N_k + \sum_{s=4}^{n}(s-3)M_s.$$

Sa N_2 upravo smo označavali broj traženih tačaka i pošto je svaki sabirak prethodne jednakosti pozitivan broj sledi $N_2 \geqslant 3$, što dokazuje postojenje bar jedne tačke koja je incidentna sa tačno dvema pravama. ■

3 Broj običnih pravih

U uvodnom delu definisali smo pojam obične prave, što je prava koja je incidentna sa tačno dvema tačaka od datih n. Taj pojam će imati ključnu ulogu u ovom poglavlju.

Na osnovu Sylvester-Gallaieve teoreme dokazano je postojanje obične prave u svakom skupu od n nekolinearnih tačaka. Postavlja se pitanja, da li postoji više takvih pravih? U istoriji ovog pitanja matematičari su dali sve bolju i bolju donju granicu za broj običnih pravih, koje će biti prikazane u ovom poglavlju.

U nastavku ćemo sa $f(n)$ označiti najmanji moguć broj običnih pravih određenih sa n nekolinearnih tačaka.

Teorema 3.1. $f(n) \geqslant 3$.

Tačnost prethodnog tvrđenja sledi neposredno na osnovu Melchiorovog dokaza Sylvester-Gallaieve teoreme.

Dokazi narednih rezultata su složeniji i svako od njih izložićemo u posebnom odeljku.

3.1 Postojanje $3n/7$ običnih pravih

Naredni rezultat potiče od Kellja i Mosera iz 1958. godine [9].

Teorema 3.2. $f(n) \geqslant 3n/7$.

Dokazu ove teoreme prethodi dokaz nekolikih lema i pomoćnih teorema, ali pre toga definišemo potrebne pojmove i konstatujemo važne činjenice. U ovom odeljku sve posmatramo iz ugla projektivne geometrije.

Prave skupa $\mathbb{P}$ dele ravan na poligonalne oblasti. Ako posmatramo samo one prave koje ne prolaze kroz tačku T, onda jedna oblast određena tim pravama sadrži tačku T.

Definicija 3.3. *Prave koje ograničavaju poligonalnu oblast kojoj pripada tačka T se zovu* ***susedi*** *tačke T.*

Definicija 3.4. *Raspored je* ***pramen*** *ako se sve prave seku u jednoj tački, a* ***skoro-pramen*** *ako se $m-1$ prava skupa $\mathbb{P}$ seku u jednoj tački, a m-ta ne prolazi kroz tu tačku.*

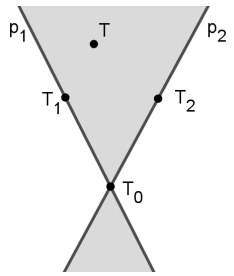
Ako su tačke nekolinearne i $n-1$ su kolinearne, onda lako sledi da je uređenje skoro-pramen.

Lema 3.5. *Ako postoji tačka T koja ima tačno jedog suseda, tada je $\mathbb{P}$ skoro-pramen.*

Dokaz. Suseda tačke T označavamo sa p. Dokazujemo da sve tačke osim T moraju da pripadaju pravoj p. Pretpostavimo suprotno, da postoji tačka T_1 koja nije incidentna sa p. Prava p sadrži bar dve tačke, označavamo njih sa T_2 i T_3, i odavde znamo da se $p(T_1, T_2)$ i $p(T_1, T_3)$ razlikuju i različite su od p. Bar jedna od njih ne sadrži tačku T, pa po definiciji ta prava je drugi sused tačke T. Kontradikcija. ■

Lema 3.6. *Ako postoji tačka T koja ima tačno dva suseda, tada $\mathbb{P}$ je skoro-pramen.*

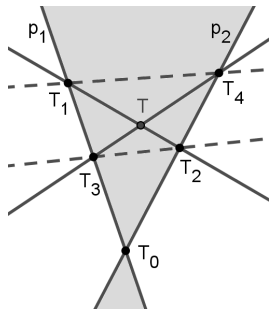
Dokaz. Neka su p_1 i p_2 susedi tačke T. U rasporedu koji sadrži samo prave koje ne prolaze kroz tačku T, poligonalna oblast određena sa pravama p_1 i p_2 koja sadrži T (videti sliku 9) ne može da bude presečena ni sa jednom drugom pravom, jer onda tačka T bi imala i treći sused, što je kontradikcija sa pretpostavkom teoreme. To znači da prave koje ne prolaze kroz tačku T moraju formirati pramen.



Slika 9

Neka je T_0 jedina presečna tačka tih pravih i T_1, T_2 tačke na pravama p_1, p_2, respektivno, koje se razlikuju od T_0. Prava $p(T_1, T_2)$ ne može da prolazi kroz T_0, ali mora da prolazi kroz T, jer inače ta prava bi bila treći sused tačke T,što je kontradikcija sa pretpostavkom teoreme.

Dokažimo još da je $p(T_1, T_2)$ jedina koja prolazi kroz tačku T a ne sadrži tačku T_0. Pretpostavimo suprotno, neka postoji još jedna takva prava. Označimo njene preseke s pravima p_1 i p_2 sa T_3 i T_4. Tada jedan od pravih



Slika 10

$p(T_2, T_3)$ i $p(T_1, T_4)$ ne sadrži tačku T, ali onda bi i ova prava bila sused tačke T, kontradikcija.

Tako smo dobili da je raspored skoro-pramen. ■

Teorema 3.7. *Ako $\mathbb{P}$ nije skoro-pramen, onda svaka tačka skupa $\mathbb{T}$ ima bar tri suseda.*

Dokaz. Ako bi postojala tačka sa jednim ili dva suseda, na osnovu lema 3.5 i 3.6 raspored bi bio skoro-pramen, što je kontradikcija sa pretpostavkom teoreme. ■

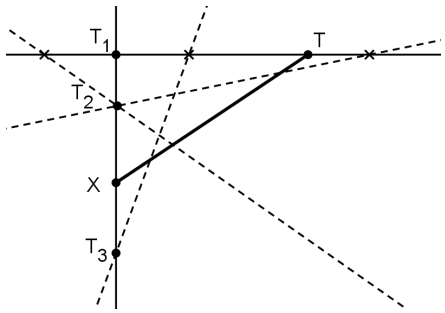
Definicija 3.8. *Broj običnih pravih koje prolaze kroz T je **red** tačke T. Broj suseda tačke T koje su ujedno i obične prave je **rang** tačke T. Zbir reda i ranga je **indeks** tačke T.*

Teorema 3.9. *Ako je red tačke T nula, onda je svaki sused tačke T obična prava.*

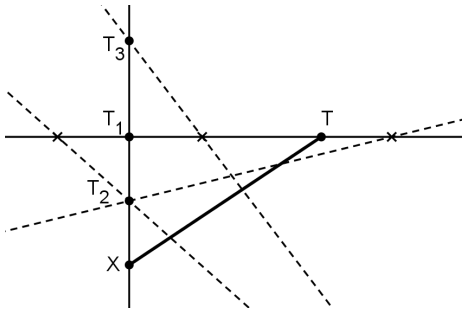
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji sused tačke T koji sadrži bar tri tačke skupa $\mathbb{T}$, koje označavam sa T_1, T_2 i T_3. Neka je X tačka na toj pravoj koja je ujedno i na ivici poligonalne oblasti, što znači da otvorena duž (TX) ne može da bude presečena nijednom pravom skupa $\mathbb{P}$. Bez umanjenja opštosti, redosled tačaka je $T_3 - X - T_2 - T_1$ (videti sliku 11) ili $X - T_2 - T_1 - T_3$ (videti sliku 12). Pošto je red tačke T nula, prava $p(T, T_1)$ sadrži bar još jednu tačku, recimo T_4 skupa $\mathbb{T}$. Ali u ovom slučaju nezavisno od toga da gde se nalazi tačka T_4, bar jedna od pravih $p(T_2, T_4)$ i $p(T_3, T_4)$ seče otvorenu duž (TX), što je kontradikcija.

■

Teorema 3.10. *Indeks svake tačke skupa $\mathbb{T}$ čiji red nije dva je bar tri.*



Slika 11: Slučaj $T_3 - X - T_2 - T_1$



Slika 12: Slučaj $X - T_2 - T_1 - T_3$

Dokaz. Ako je raspored skoro-pramen, onda uslov teoreme važi za $n \geqslant 4$. U ovom slučaju red presečne tačke $n-1$ prave je $n-1$, pa na osnovu definicije indeksa tvrđenje je tačno. Lako konstatujemo da je red ostalih tačaka 1, rang je 2, pa je indeks tih tačaka tačno 3.

Dalje se bavimo ostalim rasporedima, koje delimo na tri slučaja. Sa T označavamo tačku koja ispunjava uslov teoreme.

- *Red tačke T je 0:* Pošto raspored nije skoro-pramen onda na osnovu teoreme 3.7 T ima bar tri suseda, koje su na osnovu teoreme 3.9 obične prave. Lako sledi tvrđenje teoreme.

- *Red tačke T je 1:* Sa T_1 označavamo drugu tačku koja leži na običnoj pravoj kroz T. Istom metodom korišćenom u prethodnom dokazu, možemo pokazati da, ako sused tačke T nije obična prava, onda ona prolazi kroz T_1. Lako se vidi da tri suseda nemaju zajedničkih tačaka, pa sledi da svaka tačka može da ima najviše dva suseda koji nisu obične prave.

  Ako tačka T ima bar četiri suseda, onda bar dva od tih su obične prave. Te obične prave sa $p(T, T_1)$ daju indeks bar tri za tačku T.

Ako tačka T ima tačno tri suseda, onda možemo dokazati da bar dva od tih su obične prave. Pretpostavimo suprotno, p_1 i p_2 su susedi tačke T koji nisu obične prave i u tom slučaju obe su incidentne sa tačkom T_1. Neka je X tačka prave p_1 sa ivice poligonalne oblasti takva da (T_1X) ne sadrži tačku skupa $\mathbb{T}$. Bez umanjenja opštosti, za redosled T_2 i T_3 (koje su ostale dve tačke sa p_1) važi $T_2-T_3-T_1-X$ ili $T_3-T_1-X-T_2$. Tada je prava $p(T,T_3)$ obična prava jer bi inače postojala prava koja seče duž (XT). Prava $p(T,T_3)$ je ujedno i druga obična prava kroz tačku T, ali to je kontradikcija sa pretpostavkom slučaja. Sažeto, tačka T ima bar dve susedne obične prave, red je jedan, pa je indeks bar tri.

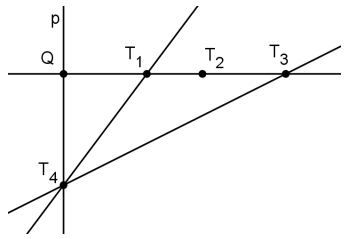
- *Red tačke T je bar 3:* Po definicije indeksa lako sledi tvrđenje.

■

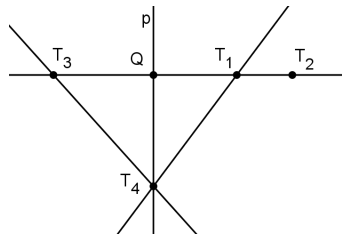
Teorema 3.11. *Ako je prava $p \in \mathbb{P}$ sused tri tačke T_1, T_2 i T_3, onda tačke skupa $\mathbb{T}$ koje pripadaju pravoj p pripadaju i nekoj od pravih $p(T_1,T_2)$, $p(T_2,T_3)$ ili $p(T_3,T_1)$.*

Dokaz. Prvo dokazujemo da tačke T_1, T_2 i T_3 ne mogu da budu kolinearne. Pretpostavimo suprotno, tj. da jesu kolinearne, i presečnu tačku pravih p i $p(T_1,T_2,T_3)$ označavamo sa Q. Pošto su bar dve tačke na istoj strani prave p, bez umanjenja opštosti $Q-T_1-T_2$, a T_3 se nalazi bilo gde izvan duži $[QT_2]$. Prava p sadrži bar dve tačke skupa $\mathbb{T}$ i jednu od tih označavamo sa T_4. Zbog pravih $p(T_1,T_4)$ i $p(T_3,T_4)$ p nije sused tačke T_2 (videti slike 13 i 14). Kontradikcija.

Sa X_k označavamo presečnu tačku prave p i $p(T_i,T_j)$, gde je i,j,k permutacija brojeva $1,2,3$. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji tačka $T \in \mathbb{T}$ na pravoj p različita od X_1, X_2 i X_3. Nezavisno od toga gde se nalazi T, zbog neke dve od pravih $\{p(T,T_1),p(T,T_2),p(T,T_3)\}$ sledi da p nije sused jedne tačke skupa $\{T_1,T_2,T_3\}$. Kontradikcija.



Slika 13: Slučaj $Q-T_1-T_2-T_3$



Slika 14: Slučaj $T_3 - Q - T_1 - T_2$

■

Posledica 3.12. *Svaka prava skupa $\mathbb{P}$ je sused najviše četiri tačke.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: neka je prava p sused tačkama T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5. Neka je T tačka iz $\mathbb{T}$ na pravoj p. Po prethodnoj teoremi imamo da T leži na nekoj od pravih $p(T_1, T_2)$, $p(T_2, T_3)$ ili $p(T_1, T_3)$; bez umanjenja opštosti, uzmimo prvi slučaj. Ponovo po prethodnoj teoremi primenjenoj na tačke T_1, T_3 i T_4 imamo da P leži na $p(T_3, T_4)$ (mora biti baš na njoj jer bismo u suprotnom dobili $P \equiv T_1$). No, sada prethodna teorema primenjenja na tačke T_1, T_3 i T_5 vodi u kontradikciju (zbog $P \not\equiv T_1$ i $P \not\equiv T_3$). ■

Teorema 3.13. *Ako sa I_i označavamo indeks tačke T_i, onda*

$$f(n) \geqslant \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Dokaz. Donju granicu za broj običnih pravih određujemo preko indeksa tačaka skupa $\mathbb{T}$. U $\sum_{i=1}^{n} I_i$ svaku običnu pravu, na osnovu posledice 3.12, najviše četiri puta računamo kao rang tačaka i tačno dva puta kao red tačaka. Sledi da svaku običnu pravu računamo najviše šest puta. Odavde direktno sledi nejednakost. ■

Sad smo spremni da dokažemo glavnu teoremu 3.2, tj. postojanje $3n/7$ običnih pravih.

Dokaz. Broj tačaka čiji red je dva označavamo sa k, za koji važi

$$f(n) \geqslant k. \tag{5}$$

Zaista, kroz svaku tačku reda dva prolaze tačno dve obične prave (po definiciji reda), i brojećii prave na ovaj način, svaku običnu pravu smo uračunali

najviše dva puta (jer svaka obična prava sadrži tačno dve tačke, pa samim tim najviše dve tačke reda 2), te važi gornja nejednakost.

Na osnovu Teorema 3.10, 3.13 i na osnovu nejednakost (5) sledi

$$f(n) \geqslant \frac{2k + 3(n-k)}{6} = \frac{3n-k}{6} \geqslant \frac{3n - f(n)}{6},$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} 6f(n) &\geqslant 3n - f(n), \\ 7f(n) &\geqslant 3n, \\ f(n) &\geqslant \frac{3n}{7}. \end{aligned}$$

■

3.2 Postojanje $6n/13$ običnih pravih

Naredni rezultat potiče iz rada [2]. Pre svega dualiziramo definiciju 1.1, što će biti potrebno u ovom poglavlju.

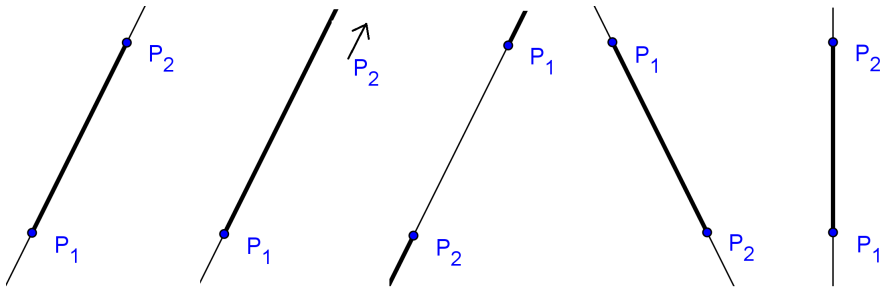
Definicija 3.14. *Za zadatih n pravih u ravni, presečna tačka dve od njih je* ***obična tačka*** *ukoliko ona leži na tačno dve prave.*

1993. godine Csima i Sawyer su dali bolju donju granicu za broj običnih pravih, tj. običnih tačaka, pošto u toku ovog poglavlja posmatramo dualiziranu verziju rasporeda.

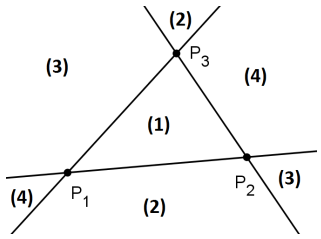
Imamo skup pravih $\mathbb{T}$ sa n elemenata i važi da se svake dve prave seku u jednoj tački i te tačke obrazuju skup $\mathbb{P}$. Posle dualizacije, $f(n)$ označava broj običnih tačaka. Tokom rada koristićemo izraze **levo**, **desno**, **gore** i **dole**, gde se referenciramo na crtež priložen uz odgovarajući dokaz. Ako su P_1 i P_2 dve tačke na pravoj t, koja nije vertikalna, onda sa $[P_1, P_2]$ označavamo zatvoreni deo te prave koji dobijamo idući iz P_1 ka P_2 uz t u smeru nadesno. Ako je ta prava vertikalna, onda se kretanje vrši gore (videti sliku 15). Sa (P_1, P_2), $[P_1, P_2)$ i $(P_1, P_2]$ označavamo deo prave t koji je otvoren, otvoren sa desne i otvoren sa leve strane.

Bilo koje tri prave dele ravan na četiri oblasti sa ivicama $[P_1, P_2]$ ili $[P_2, P_1]$, $[P_2, P_3]$ ili $[P_3, P_2]$, $[P_3, P_1]$ ili $[P_1, P_3]$ i te oblasti ćemo zvati **trouglovi** (videti sliku 16). Trouglovi obuhvataju i ivicu poligonalne oblasti.

Definicija 3.15. *U $\triangle P_1P_2P_3$, sa zatvorenim delom $[P_2, P_3]$ na pravoj t, P_1 ćemo zvati* ***t-teme****, a $[P_2, P_3]$* ***t-baza****.*



Slika 15: Nekoliko varijacija za $[P_1, P_2]$



Slika 16: Primer za podelu ravni na trouglove

Definisaćemo neke posebne vrste trouglova.

Definicija 3.16. *Neka $P_2, P_3 \in t$. $\triangle P_1P_2P_3$ je*

- ***t-širok*** *ako ne postoji prava koja seče pravu t izvan $[P_2, P_3]$;*
- ***t-minimalan*** *ako je t-širok i ne sadrži tačku van prave t različitu od P_1;*
- ***t-čvrst*** *ako ne postoji prava koja razdvaja tačku P_1 i zatvoren deo $[P_2, P_3]$;*
- ***t-faličan*** *ako sadrži tačku van prave t različitu od P_1.*

Lema 3.17. *Ako je $\triangle P_1P_2P_3$ t-minimalan trougao, onda je P_1 obična tačka ili postoji tačka u otvorenom delu (P_2, P_3) i svaka takva tačka je obična.*

Dokaz. Ako je P_1 obična tačka, tvrđenje je tačno, pa pretpostavimo da to ne važi. Dakle, postoji prava t_1 koja prolazi kroz P_1 i pošto je $\triangle P_1P_2P_3$ t-širok, t_1 seče t u tački $P_4 \in (P_2, P_3)$. Tačka P_4 mora da bude obična, jer inače bi postojala prava t_2 koja prolazi kroz nju i seče jednu od ostale dve strane. Ta presečna tačka bi bila sadržana u t-minimalan trouglu, što bi bila kontradikcija. ■

Lema 3.18. *Neka je trougao $\triangle P_1P_2P_3$ t-čvrst. Ako je $\triangle P_1P_2P_3$ t-faličan ili t-širok, onda sadrži t-minimalan trougao.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je trougao $\triangle P_1P_2P_3$ t-čvrst i t-faličan. Neka je P_4 tačka u trouglu koja je najbliža pravoj t. P_5 i P_6 na t izaberimo tako da budu maksimalno udaljene jedna od druge. Trougao $\triangle P_4P_5P_6$ je sadržan u trouglu $\triangle P_1P_2P_3$, jer na primer ako $P_5 \notin [P_2, P_3]$, onda prava $p(P_4, P_5)$ bi razdvojila P_1 i $[P_2, P_3]$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $\triangle P_1P_2P_3$ t-čvrst. Pošto smo P_4 izabrali tako da bude najbliža pravoj t, $\triangle P_4P_5P_6$ ne sadrži tačku osim P_4, što znači da je to traženi t-minimalan trougao.

Sada pretpostavimo da je $\triangle P_1P_2P_3$ t-čvrst i t-širok trougao. Ako je $\triangle P_1P_2P_3$ t-minimalan, onda je dokaz gotov, ono je traženi trougao. U suprotnom trougao sadrži tačku različitu od P_1, i to znači da je t-faličan i tvrđenje sad sledi direktno na osnovu prvog dela dokaza. ■

Definicija 3.19. *Ako je $\triangle P_1P_2P_3$ t-minimalan i P_1 je obična tačka, onda kažemo da je P_1* ***pridružena pravoj t****.*

Lema 3.20. *Neka je trougao $\triangle P_1P_2P_3$ t-čvrst. Ako je $\triangle P_1P_2P_3$ t-faličan ili t-širok, onda sadrži tačku $P \in \mathbb{P}$ različitu od P_2 i P_3 koja je obična i ili pridružena pravoj t ili leži na t.*

Dokaz. Na osnovu leme 3.18 sledi da $\triangle P_1P_2P_3$ sadrži jedan t-minimalan trougao $\triangle P_4P_5P_6$. Na osnovu leme 3.17 znamo da ili je P_4 obična tačka, pa je ona pridružena pravoj t, ili (P_5, P_6) sadrži bar jednu običnu tačku. ■

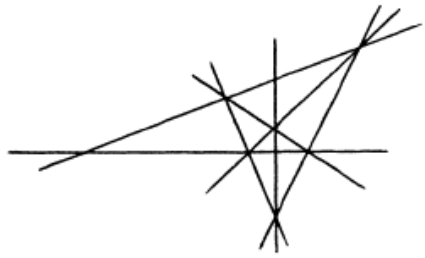
Definicija 3.21. ***Tip*** *prave t označavamo i definišemo sa $V(t) := (\mu, \nu)$, gde μ označava broj običnih tačaka koje leže na pravoj t, a ν označava broj pridruženih tačaka prave t.*

Definicija 3.22. *Ako prava t ima (μ, ν) tip i $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$,* ***$\alpha$-težina*** *prave t je $w_\alpha(t) := \alpha\mu + \nu$.*

Teorema 3.23. *Neka je P obična tačka na pravoj t, a δ_1 i δ_2 su t-čvrsti trouglovi sa najviše jednom tačkom u unutrašnjosti, i za oba važi, ako sadrži P, onda je to teme trougla. Važi još da je δ_1 t-faličan ili t-širok i isto tako i δ_2 je t-faličan ili t-širok. Tada t ne može da bude tipa $(2, 0)$.*

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu leme 3.20. ■

Definicija 3.24. ***Kelly-Moserova konfiguracija*** *je raspored 7 pravih prikazan na slici 17 ili bilo koja ekvivalentna verzija.*

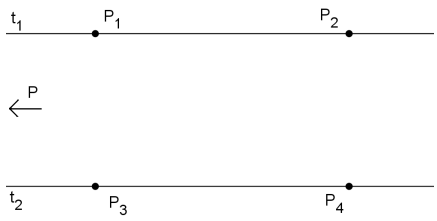


Slika 17

Teorema 3.25. *Neka u skupu* $\mathbb{T}$ *imamo dve prave čije je tip* $(2,0)$ *i koje se seku u običnoj tački. Tada je* $\mathbb{T}$ *Kelly-Moserova konfiguracija.*

Dokaz. Prvo konstatujemo da $\mathbb{T}$ ne može da bude skoro-pramen, zbog sledećeg razloga: ako pretpostavimo suprotno, onda za $n = 3$ svaka prava ima $(2,1)$ tip, a za $n \geqslant 4$ jedna prava ima $(n-1,0)$ tip, a sve ostale $(1,2)$. U svakom slučaju nemamo dve prave tipa $(2,0)$, što je kontradikcija.

Sa t_1 i t_2 označavamo prave koje imaju $(2,0)$ tip. Bez umanjenja opštosti, te dve prave se seku u običnoj tački P, koja je u beskonačnosti i stoje horizontalno. P_1 i P_2 su tačke prave t_1 koje su najdalje levo i desno, a respektivno P_3 i P_4 prave t_2. U oba slučaja te dve tačke su različite, jer ako bi se poklapale onda bi $\mathbb{T}$ bila skoro-pramen, što smo dokazali da je nemoguće. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da tačke P_1, P_2, P_3 i P_4 su temena pravougaonika (videti sliku 18). Te tačke ćemo zvati **ekstremne tačke**.



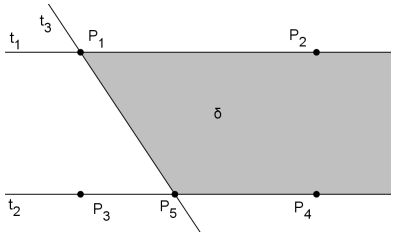
Slika 18

Dokaz ćemo izvršiti u četiri koraka.

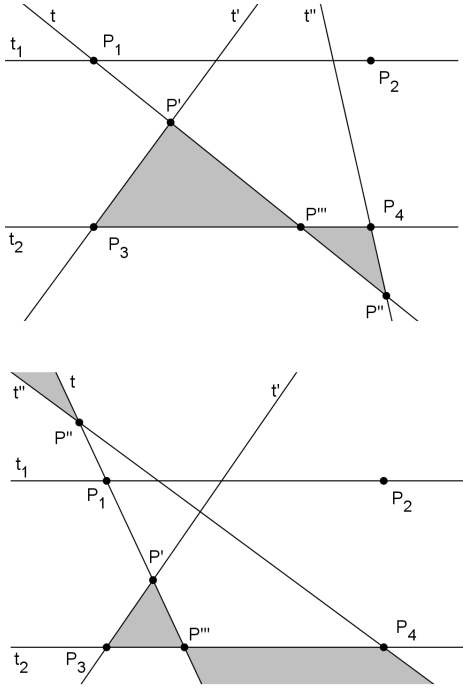
- *1. korak: Nijedna ekstremna tačka nije obična.*

  Pretpostavimo suprotno, npr. da je tačka P_1 obična. Neka je t_3 druga prava koja prolazi kroz P_1 i seče pravu t_2 u tački P_5. Označimo sa δ trougao određen sa $[P_1, P_5]$, $[P_1, P]$ i $[P_5, P]$ (videti sliku 19), koji je

t_1-čvrst i t_1-širok, jer nijedna prava ne može da seče (P, P_1). Na osnovu leme 3.20 posmatranjem prave t_1 sledi da ili $\mu \geqslant 3$ ili $\nu \geqslant 1$, ali svakako $V(t_1) \neq (2, 0)$, što je kontradikcija.



Slika 19



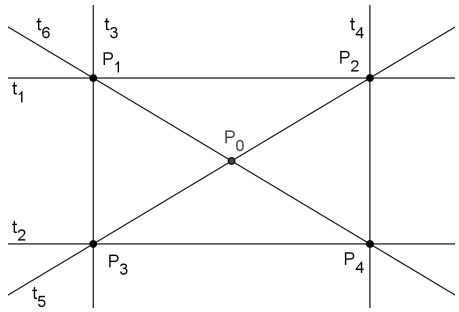
Slika 20

- *2. korak: Svaka prava sadrži tačno dve ekstremne tačke ili nijednu.*

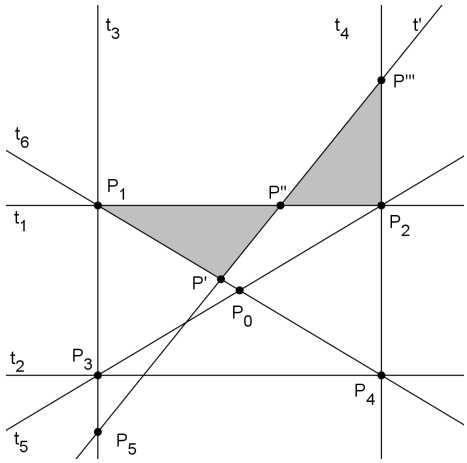
  Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji prava t koja prolazi kroz P_1, ali ne sadrži ni P_3 ni P_4. t' i t'' su prave koje prolaze respektivno kroz P_3 i P_4 i ne sadrže tačku P_1 (videti sliku 20). Takve prave postoje, na osnovu 1. koraka. Prava t seče prave t', t'' i t_2 respektivno u tačkama

P', P'' i P'''. $\triangle P'P_3P'''$ i $\triangle P''P'''P_4$ su t_2-širok i t_2-čvrst trouglovi, na osnovu činjenice da su P_1, P_2, P_3 i P_4 ekstremne tačke. Odavde na osnovu teoreme 3.23 sledi da prava t_2 ne može da ima tip $(2, 0)$, što je kontradikcija.

Pretpostavimo da postoje one prave koje sadrže parove tih ekstremnih tačaka i to su $t_3(P_1, P_3)$, $t_4(P_2, P_4)$, $t_5(P_2, P_3)$ i $t_6(P_1, P_4)$. Sa P_0 označavamo presečnu tačku pravih t_5 i t_6 (videti sliku 21).



Slika 21



Slika 22

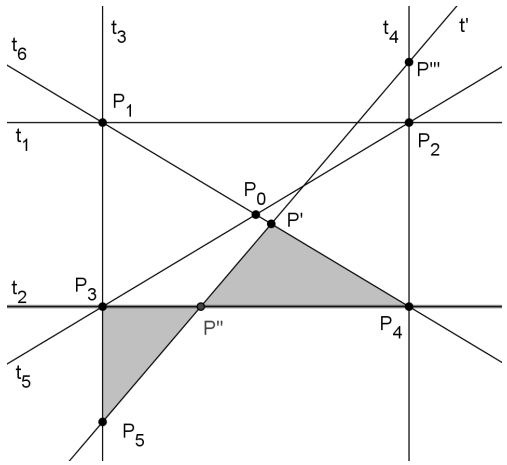
- *3. korak: Sve ostale prave su vertikalne.*

  Pretpostavimo suprotno, da postoji prava različita t_i, za sve $i = 1, ..., 6$ i nije vertikalna. Takve prave seku t_3 u tački koja nije u beskonačnosti i različita od P_1 i P_3 (jer inače bismo dobili kontradikciju sa 2. korakom). Iz skupa tih tačaka sa P_5 označavamo onu koja ima osobinu da (P_5, P_3)

ili (P_1, P_5) ne sadrži tačku. Sa t' označavamo pravu koja seče t_3 u P_5 i bez umanjenja opštosti pretpostavimo da se ta tačka nalazi ispod t_2. Odavde sledi da je (P_5, P_3) bez tačke, jer (P_1, P_5) već sadrži tačku u beskonačnosti.

Prva mogućnost je da t' je iznad P_0 (videti sliku 22). t' seče prave t_6, t_1 i t_4 u tačkama P', P'' i P''' respektivno. Možemo konstatovati da su $\triangle P'P_1P''$ i $\triangle P'''P''P_2$ t_1-široki i t_1-čvrsti trouglovi. Na kraju na osnovu teoreme 3.23 sledi da prava t_1 ne može bude tipa $(2, 0)$, što je kontradikcija.

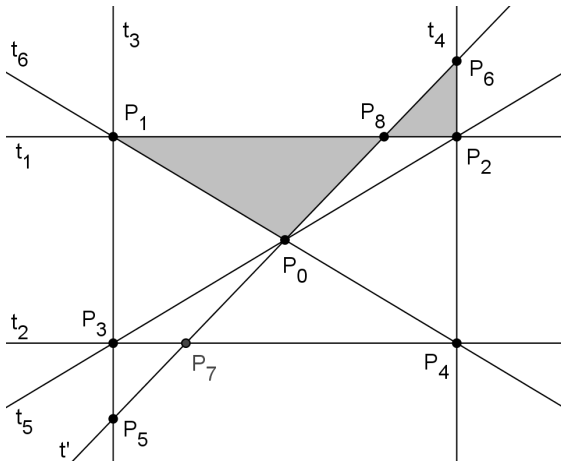
Druga mogućnost je da je t' ispod P_0 (videti sliku 23). U ovom slučaju je P'' presečna tačka prave t' i t_2. Dokaz izvršimo na isti način dokazujući da su $\triangle P_5P_3P''$ i $\triangle P'P''P_4$ t_2-široki i t_2-čvrsti trouglovi i na kraju dobijamo kontradikciju.



Slika 23

Ostala je jedina mogućnost da prava t' sadrži tačku P_0 (videti sliku 24). Na osnovu dokazanog ne postoji prava kroz tačke P_5 osim t' i t_3, pa sledi da ta tačka je obična.

Simetrično možemo dokazati da i na pravoj t_4 postoji tačka P_6 sa osobinama da je obična i da prava koja seče pravu t_4 u toj tački prolazi kroz P_0. Za tačke P_5 i P_6 važi da je jedna ispod t_2, a druga je iznad t_1, i te tačke sa P_0 su kolinearne, jer ako ne bi bile, onda bi bio presečen nedozvoljen deo neke prave. Bez umanjenja opštosti, P_5 je ispod prave t_2, a P_6 je iznad prave t_1 i uvodimo oznake $P_7 := t' \cap t_2$ i $P_8 := t' \cap t_1$

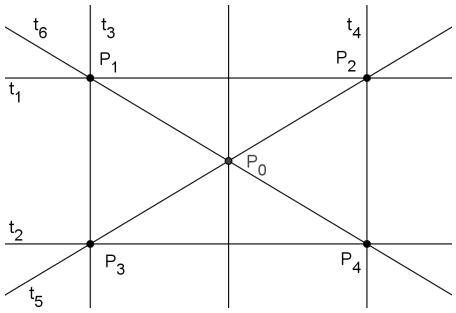


Slika 24

(videti sliku 24). Pošto prava t_2 ima tip (2,0), P_5 ne može da bude pridružena pravoj t_2 i pošto (P_5, P_3) ne sadrži tačku, prava koja prolazi kroz trougao $\triangle P_5P_3P_7$ seče (P_5, P_7) i (P_3, P_7), pa i (P_1, P_0) u tački P_9. Odavde imamo da je $\triangle P_0P_1P_8$ t_1-čvrst i t_1-faličan, dok je $\triangle P_6P_8P_2$ t_1-čvrst i t_1-širok, pa na osnovu teoreme 3.23 dobijamo da prava t_1 ne može da bude tipa $(2, 0)$, što je kontradikcija.

- *4. korak:* $\mathbb{T}$ *je Kelly-Moserova konfiguracija.*

  U prethodnom koraku smo dokazali da svaka prava skupa $\mathbb{T}$ različita od t_i, za sve $i = 1, ..., 6$ je vertikalna. Te prave seku t_1 i t_2 u običnoj tački i pošto su te dve prave tipa $(2, 0)$, postoji tačno jedna takva



Slika 25

vertikalna prava i prolazi kroz P_0, jer inače bismo dobili kontradikciju

sa činjenicom da t_1 i t_2 nema pridružene tačke (videti sliku 25). Sad možemo konstatovati da je to baš Kelly-Moserova konfiguracija.

■

Sledeća lema je dualizirana verzija teoreme 3.10.

Lema 3.26. *Ako $V(t) \neq (2,0)$, tada $w_1(t) \geqslant 3$. To jedino za pramen ne važi.*

Lema 3.27. *Ako prave t_1 i t_2 imaju običnu presečnu tačku i prave skupa $\mathbb{T}$ ne obrazuju pramen ni Kelly-Moserovu konfiguraciju, onda $w_1(t_1) + w_1(t_2) \geqslant 5$.*

Dokaz. Prave ne mogu da budu istovremeno tipa $(2,0)$, jer na osnovu teoreme 3.25 sledilo bi da prave skupa $\mathbb{T}$ obrazuju Kelly-Moserovu konfiguraciju, što je kontradikcija sa pretpostavkom.

Ako je tip obe prave različit od $(2,0)$, onda na osnovu leme 3.26 sledi $w_1(t_1) + w_1(t_2) \geqslant 3 + 3 \geqslant 5$.

Bez umanjenja opštosti, tip prave t_1 je $(2,0)$ a prave t_2 je različit od toga. Na osnovu leme 3.26 dobijamo nejednakost $w_1(t_1) + w_1(t_2) \geqslant 2 + 3 = 5$.

■

Sad smo spremni da dokažemo glavnu teoremu ovog poglavlja.

Teorema 3.28. *Ako prave skupa $\mathbb{T}$ ne obrazuju pramen ni Kelly-Moserovu konfiguraciju, onda $f(n) \geqslant 6n/13$.*

Dokaz. Obične tačke podelimo u skupove

$\mathbb{A} = \{P \in \mathbb{P} \mid P$ je obična tačka i leži na pravoj tipa (2,0)$\}$,

$\mathbb{B} = \{P \in \mathbb{P} \mid P$ je obična tačka i ne leži na pravoj tipa (2,0)$\}$,

a prave skupa $\mathbb{T}$ u disjunktne podskupove

$\mathbb{E} = \{t \in \mathbb{T} \mid V(t) = (2,0)\}$,

$\mathbb{F} = \{t \in \mathbb{T} \mid t$ sadrži tačku skupa $\mathbb{A}$ ali $t \notin \mathbb{E}\}$ i

$\mathbb{G} = \{t \in \mathbb{T} \mid t$ ne sadrži tačku skupa $\mathbb{A}\}$.

Skup $\mathbb{F}$ dalje delimo u podskupove

$\mathbb{F}_j = \{t \in \mathbb{F} \mid t$ sadrži tačno j tačaka skupa $\mathbb{A}\}$.

Tačka $P \in \mathbb{A}$ je presečna tačka tačno dve prave. Jedna prava je iz skupa $\mathbb{E}$ sa 1-težinom 2 i na osnovu leme 3.27 1-težina druge prave je bar 3 i pripada skupu $\mathbb{F}$. Možemo zaključiti da svaka tačka skupa $\mathbb{A}$ leži na tačno jednoj pravi skupa $\mathbb{E}$ i tačno jednoj pravi skupa $\mathbb{F}$.

Ako uvedemo oznake $A = |\mathbb{A}|$, $B = |\mathbb{B}|$, $E = |\mathbb{E}|$, $F = |\mathbb{F}|$, $G = |\mathbb{G}|$ i $F_j = |\mathbb{F}_j|$, onda možemo konstatovati sledeće jednakosti:

$$F = \sum_j F_j, \tag{6}$$

$$\sum_{j \geqslant 1} jF_j = A = 2E. \tag{7}$$

Ako $t \in \mathbb{F}_1$, onda $V(t) = (\mu, \nu) \geqslant (1, 0)$ i pošto $V(t) \neq (2, 0)$ na osnovu leme 3.26 $w_1(t) = \mu + \nu \geqslant 3$, a za proizvoljnu vrednost α važi $w_\alpha(t) = \alpha\mu + \nu \geqslant \alpha + 2$. Ako $t \in \mathbb{F}_2$, onda $V(t) \geqslant (2, 0)$ i pošto $V(t) \neq (2, 0)$, na isti način kao u prethodnom slučaju $w_1(t) \geqslant 3$, a za proizvoljnu vrednost α $w_\alpha(t) \geqslant 2\alpha + 1$. Ako $t \in \mathbb{F}_j$ za $j \geqslant 3$, $w_\alpha(t) \geqslant \alpha j$. Na kraju, ako $t \in \mathbb{E}$ onda $w_\alpha(t) = 2\alpha$, a na osnovu leme 3.26, ako $t \in \mathbb{G}$, onda $w_\alpha(t) \geqslant w_1(t) \geqslant 3$. Na osnovu prethodne izjave sa jednakostima (6) i (7) važi

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in \mathbb{T}} w_\alpha(t) &= \sum_{t \in \mathbb{E}} w_\alpha(t) + \sum_j \sum_{t \in \mathbb{F}_j} w_\alpha(t) + \sum_{t \in \mathbb{G}} w_\alpha(t) \\
&\geqslant 2\alpha E + (\alpha + 2)F_1 + (2\alpha + 1)F_2 + \sum_{j \geqslant 3} j\alpha F_j + 3G \\
&= 2\alpha E + \alpha \sum_{j \geqslant 1} jF_j + 2F_1 + F_2 + 3G \\
&= 2\alpha E + \alpha 2E + 2F_1 + F_2 + 3G \pm 2E \\
&= (4\alpha - 2)E + 2F_1 + F_2 + \sum_{j \geqslant 1} jF_j + 3G \\
&= (4\alpha - 2)E + 3F_1 + 3F_2 + \sum_{j \geqslant 3} jF_j + 3G \\
&\geqslant (4\alpha - 2)E + 3F + 3G.
\end{aligned}$$

Uzmimo $\alpha = \frac{5}{4}$, tada $4\alpha - 2 = 3$ i dobijamo nejednakost

$$\sum_{t \in \mathbb{T}} w_{\frac{5}{4}}(t) \geqslant 3E + 3F + 3G = 3n. \tag{8}$$

Obična tačka P leži na tačno dve prave i zato postoji najviše četiri trougla sa jednim temenom P. Važi još da je P pridružena tačka najviše četiri prave. Bez umanjenja opštosti sa P_j, $1 \leqslant j \leqslant f(n)$, označavamo sve obične tačke skupa $\mathbb{P}$. Odredimo matricu $[m_{ij}]_{n \times f(n)}$, gde $m_{ij} = \frac{5}{4}$ ako $P_j \in t_i$, $m_{ij} = 1$ ako je P_j pridružena tačka pravoj t_i, a inače 0. Ako saberemo elemente bilo koje

kolone, možemo dobiti najviše $2 \cdot (\frac{5}{4}) + 4 \cdot 1 = \frac{13}{2}$, što je $w_{\frac{5}{4}}(t)$. Na osnovu prethodnog razmatranja sa nejednakošću (8) sledi

$$3n \leqslant \sum_{t \in \mathbb{T}} w_{\frac{5}{4}}(t) \leqslant \frac{13}{2} f(n),$$

tj.

$$\frac{6}{13} n \leqslant f(n),$$

kako smo i hteli dokazati. ■

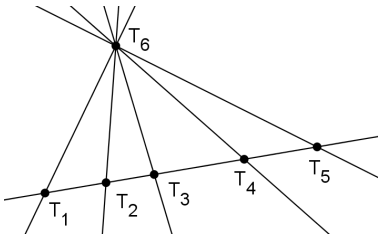
4 Broj pravih

Za zadat konačan broj tačaka u ravni, logično se postavlja pitanje koliko najmanje pravih oni određuju. Jasno, ukoliko su sve tačke kolinearne, tada je pitanje trivijalno, pa zato uvodimo ograničenje da su tačke posmatranog skupa nekolinearne. Kao i ranije, sa m označavamo broj pravih određenih tačkama skupa $\mathbb{T}$. U ovoj glavi korišćeni su radovi [5], [11] i [9].

Teorema 4.1. *Neka je dato n nekolinearnih tačaka. Te tačke određuju najmanje n pravih.*

Da ne postoji bolja donja granica, pokazuje sledeći primer:

Primer 4.2. *Ako je raspored skoro-pramen (videti definiciju 3.4), onda n tačaka određuje tačno n pravih. Za $n = 6$ ta konstrukcija izgleda na sledeći način:*



Slika 26

Teorema 4.1 će biti dokazana na više načina. Prvi dokaz što ću navesti potiče od R. Steinberga (1944), a drugi od Th. Motzkina. Oba dokaza su bazirana na Sylvester-Gallaievoj teoremi, ali ipak su korišćene različite ideje.

Dokaz. (1) Pošto su tačke nekolinearne, na osnovu Sylvester-Gallaieve teoreme postoji prava koja prolazi kroz tačno dve tačke i te neka budu T_1 i T_2. Vađenjem tačke T_1 iz skupa nestala je i $p(T_1, T_2)$ tj. broj pravih određen sa $n-1$ tačkom je najviše $m-1$. Ovaj postupak ponovimo dok je novodobijeni skup tačaka nekolinearan. Ako se proces završi posle r ponavljanja, onda je preostalo $n-r$ kolinearnih tačaka, a pre izvršenja r-tog koraka je postojala tačka van prave određene preostalim tačkama. Te tačke određuju $n-r+1$ pravu.

Svakim ponavljanjem postupka, nestaje bar jedna prava tj. posle $r-1$ ponavljanja ostalo je najviše $m-(r-1)=m-r+1$ prava tj.

$$\begin{aligned} n-r+1 &\leqslant m-r+1, \\ n &\leqslant m, \end{aligned}$$

što znači da je broj pravih određenih sa n tačaka je bar n. ■

Dokaz. (2) Dokaz vršimo preko indukcije. Za $n=3$ tvrđenje je trivijalno. Pretpostavimo da važi za $n-1$. Sad posmatramo n tačaka koje su nekolinearne. Na osnovu Sylvester-Gallaieve teoreme sledi postojanje obične prave $p(T_{n-1}, T_n)$. Za položaj tačaka T_i gde $i=1,...,n-1$ imamo dve mogućnosti: ili su kolinearne i tada n tačaka određuje tačno n pravih i dokaz je gotov, ili su nekolinearne pa na osnovu indukcijske hipoteze one određuju bar $n-1$ pravu a zajedno sa $p(T_{n-1}, T_n)$ skup $\mathbb{P}$ sadrži bar n pravih. ■

Ako date tačke nisu samo nekolinearne nego ispunjavaju i dodatne uslove, onda možemo dobiti i bolju donju granicu za broj određenih pravih. Erdős je pretpostavio da za dovoljno veliko n, ako su najviše $n-2$ tačaka kolinearne, onda su određene bar $2n-4$ prave. Ako broj kolinearnih tačaka smanjimo za najviše $n-3$, onda broj određenih prava će biti približno $3n$. Kelly i Moser (1958) su to precizirali u obliku sledeće teoreme.

Teorema 4.3. *Ako su najviše $n-k$ tačka skupa $\mathbb{T}$ kolinearne i*

$$n \geqslant \frac{1}{2}[3(3k-2)^2+3k-1], \tag{9}$$

onda

$$m \geqslant kn - \frac{1}{2}(3k+2)(k-1).$$

Pre nego što dokažemo ovu teoremu, uvodimo nove oznake, pojmove i konstatujemo neke veze. Za konstatacije tih veza posmatramo raspored za koji prvo primenimo metod dualizacije, pa metod pretvaranja u graf.

Sa $F_i, i \geqslant 3$, označavamo broj poligona koji su ograničeni sa tačno i grana, a V_i označava broj čvorova koji su incidentni sa i grana. Pošto je svaki čvor incidentan sa parnim brojem grana, sledi $V_i=0$ za neparne i-ove, i pošto kroz svaku tačku prolaze bar dve prave, sledi $V_2=0$. Te informacije impliciraju jednakosti

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + ... \tag{10}$$

i

$$V = V_4 + V_6 + V_8 + V_{10} + ... \tag{11}$$

Na osnovu činjenice da je svaka grana incidentna sa dva čvora i svaka grana je deo dva poligona, važi

$$E = 2V_4 + 3V_6 + 4V_8 + 5V_{10} + ... \tag{12}$$

i

$$2E = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ... \tag{13}$$

Sabiranjem jednakosti (12) i (13) dobijamo

$$3E = 2V_4 + 3V_6 + 4V_8 + 5V_{10} + ... + 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ... \tag{14}$$

Ako u Ojlerovu formulu

$$V - E + F = 1$$

uvrstimo jednakosti (10), (11) i (14), posle sređivanja dobijamo

$$V_4 = 3 + V_8 + 2V_{10} + 3V_{12} + ... + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + ... \tag{15}$$

U nastavku posmatramo originalni raspored.

Definicija 4.4. *Prava skupa $\mathbb{P}$ koja je incidentna sa i tačaka skupa $\mathbb{T}$ se zove* ***i-prava*** *i sa u_i ćemo označavati broj takvih pravih.*

Obične prave u tom smislu su 2-prave i $f(n) = u_2$. Pomoću dualizacije jednakosti (15) dobijamo nejednakost

$$f(n) = u_2 \geqslant 3 + u_4 + 2u_5 + 3u_6 + ... \tag{16}$$

Definicija 4.5. *Tačka skupa $\mathbb{T}$ koja je incidentna sa k pravih skupa $\mathbb{P}$ se zove* ***k-tačka*** *i sa v_k ćemo označavati broj takvih tačaka.*

Razumljivo da

$$\sum_{k=2} v_k = n,$$

$$\sum_{k=2} u_k = m,$$

odnosno

$$\sum_{k=2} ku_k = \sum_{k=2} kv_k \tag{17}$$

jer obe sume predstavljaju broj tačka-prava incidencije. Iz nejednakosti (16) dobijamo

$$3u_2 + 3u_3 + 3u_4 + ... \geqslant 3 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4 + 5u_5 + ...$$

što zajedno sa (17) daje nejednakost

$$3m \geqslant 3 + \sum_{k=2} ku_k = 3 + \sum_{k=2} kv_k. \tag{18}$$

Lema 4.6. *Ako su tačno $n - r$ tačaka skupa $\mathbb{T}$ kolinearne i*

$$n \geqslant \frac{3r}{2} \geqslant 3,$$

onda

$$m \geqslant rn - \frac{1}{2}(3r + 2)(r - 1).$$

Dokaz. Neka su $n - r$ kolinearnih tačaka označene sa $T_{r+1}, T_{r+2}, ..., T_n$, a prava koja je određena s tim tačkama sa p. Ostalih r tačaka $T_1, T_2, ..., T_r$ nisu incidentne sa pravom p. Prave $p(T_a, T_b)$ i $p(T_c, T_d)$, gde $1 \leqslant a, c \leqslant r$; $r + 1 \leqslant b, d \leqslant n$, sigurno su različite, ako $b \neq d$. Prava tipa $p(T_i, T_j)$, gde $1 \leqslant i \leqslant r$; $r + 1 \leqslant j \leqslant n$, imamo najviše $r(n - r)$, a među njima bar

$$r(n - r) - \frac{1}{2}r(r - 1)$$

su različite. Računajući i pravu p dobijamo traženu nejednakost

$$m \geqslant 1 + r(n - r) - \frac{1}{2}r(r - 1) = rn - \frac{1}{2}(3r + 2)(r - 1).$$

■

Sad sledi dokaz glavne teoreme 4.3.

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja.

- *1. slučaj:*

$$\sum_{i=2}^{3k-1} v_i \geqslant 2.$$

U ovom slučaju postoje dve tačke koje su incidentne sa najviše $3k-1$ pravom. Te tačke označavamo sa T_1 i T_2, i definišemo pravu $p := p(T_1, T_2)$. Prave kroz tačke T_1 ili T_2 koje se razlikuju od p seku se u najviše $(3k-2)^2$ tačke, što znači da bar $n-(3k-2)^2$ tačke su incidentne sa pravom p. Ako sa $n-x$ označimo broj tačaka incidentnih sa pravom p, onda na osnovu prethodne konstatacije i uslova teoreme važi

$$k \leqslant x \leqslant (3k-2)^2. \tag{19}$$

Pomoću nejednakosti (9), (19) i činjenice da $3k-1 \geqslant 0$ važi

$$n \geqslant \frac{1}{2}\left(3(3k-2)^2 + 3k - 1\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 3(3k-2)^2 \geqslant \frac{3}{2}x,$$

tj.

$$n \geqslant \frac{3}{2}x,$$

i na osnovu leme 4.6

$$m \geqslant xn - \frac{1}{2}(3x+2)(x-1). \tag{20}$$

Na osnovu (9) i (19) važi

$$n \geqslant \frac{1}{2}\left(3(3k-2)^2 + 3k - 1\right) \geqslant \frac{1}{2}(3x + 3k - 1) = \frac{1}{2}\left(3(x+k) - 1\right),$$

što pomnoženo sa $x-k$ daje

$$n(x-k) \geqslant \frac{1}{2}(3x^2 - 3k^2 - x + k).$$

Sređivanjem te nejednakosti, uz (20), dobijamo traženu nejednakost

$$m \geqslant xn - \frac{1}{2}(3x+2)(x-1) \geqslant kn - \frac{1}{2}(3k+2)(k-1).$$

- *2. slučaj:*

$$\sum_{i=2}^{3k-1} v_i \leqslant 1.$$

U ovom slučaju postoji najviše jedna tačka koja je incidentna sa bar dve prave. Na osnovu te konstatacije i nejednakosti (18) dobijamo

$$3m \geqslant 3 + 2 + 3k(n-1),$$

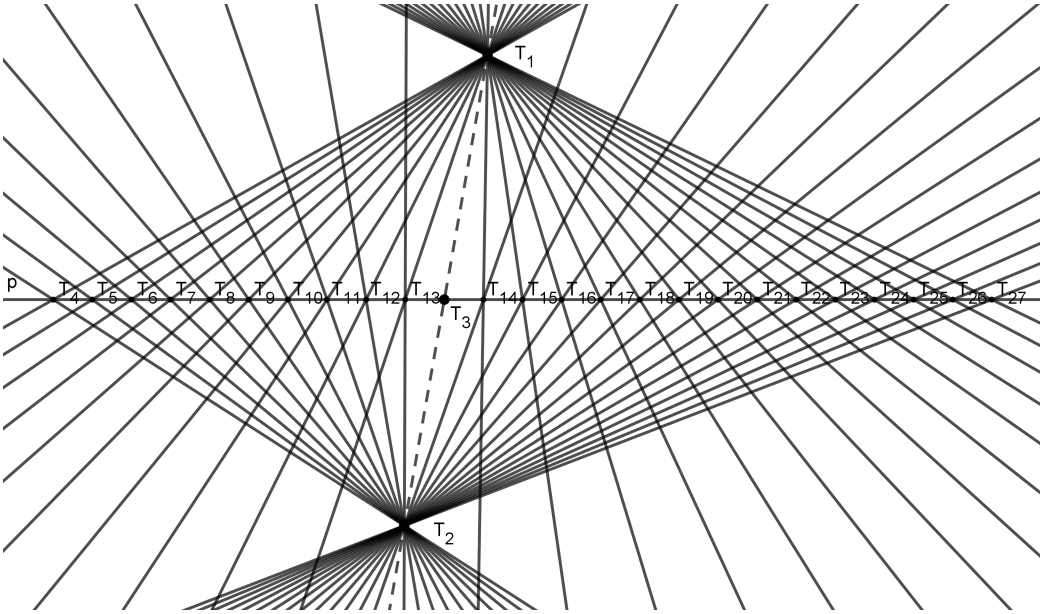
a posle sređivanja dobijamo traženu nejednakost

$$m \geqslant kn - k + \frac{5}{3} \geqslant kn - \frac{1}{2}(3k+2)(k-1).$$

■

Da ne postoji bolja donja granica pod datim uslovima za broj pravih u teoremi 4.3, pokazuje sledeći primer.

Primer 4.7. *U ravni su date tačke $T_1, T_2, ..., T_k$, između kojih ne postoje tri kolinearne i tako određuju $\binom{k}{2}$ pravih. Te su prve tačke skupa $\mathbb{T}$. Prava p u istoj ravni je takva da ne sadrži ni jednu prethodno spomenutu tačku, ni presečnu tačku njima određenih pravih i nije paralelna ni sa jednom takvom pravom. U ovoj situaciji prave $p(T_i, T_j)$ gde $1 \leqslant i, j \leqslant k$ seku pravu p u*



Slika 27

$\binom{k}{2}$ tačaka, koje stavimo u skup $\mathbb{T}$. Ostale $n - k - \binom{k}{2}$ tačke skupa $\mathbb{T}$ proizvoljno odredimo tako da budu incidentne sa pravom p ali različite od već određenih tačaka. Lako se može konstatovati da te tačke određuju tačno

$$1 + k(n-k) - \binom{k}{2} = kn - \frac{1}{2}(3k+2)(k-1)$$

pravu.

Na slici 27 je pokazano jedan konkretan primer za $n = 27$ *i* $k = 2$*. U ovom slučaju* $m = 50$*.*

5 O Diracovoj hipotezi i Erdősovoj verziji

1951. godine Dirac se bavio postojanjem tačke koja je incidentna sa određenim brojem pravih skupa $\mathbb{P}$, i postavio sledeću hipotezu: *Svaki skup nekolinearnih n tačaka sadrži tačku koja je incidentna bar sa $\frac{n}{2} - c$ pravih određenih tim tačkama, za neku konstantu c.*

Pošto Diracova hipoteza nije bila dokazana, 1961. godine Erdős je predložio sledeću verziju: *Svaki skup nekolinearnih n tačaka sadrži tačku koja je incidentna bar sa $\frac{n}{c'}$ pravih određenih tim tačkama, za neku konstantu c'.* Ovu verziju hipoteze dokazali su 1983. godine Szemerédi i Trotter, što ću dati u ovom poglavlju na osnovu rada [14]. Nezavisno od njih, i Beck je dao dokaz ove hipoteze. Zainteresovani mogu to da pogledaju u radu [1].

U ovom delu rada sa I označavamo broj svih tačka-prava incidencija. Takođe, pretpostavljamo $n \geqslant 5$ i da skup $\mathbb{T}$ ne sadrži $\frac{n}{2}$ kolinearnih tačaka (u suprotnom tvrđenje trivijalno važi).

Lema 5.1. *Postoji konstanta c_1 tako da, ako $\sqrt{n} \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$, onda broj incidencija između tačaka iz $\mathbb{T}$ i pravih iz $\mathbb{P}$ je strogo manji od $c_1 n^{\frac{2}{3}} m^{\frac{2}{3}}$.*

Dokaz ove leme može se naći u spomenutom radu. Treba napomenuti da je dokaz izvršen za konkretnu konstantu $c_1 = 10^{60}$.

Lema 5.2. *Postoji konstanta c_2 tako da, ako $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$ i t je broj pravih skupa $\mathbb{P}$ koje sadrže bar k tačaka skupa $\mathbb{T}$, onda $t < \dfrac{c_2 n^2}{k^3}$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo za $c_2 = {c_1}^3$, gde je c_1 konstanta leme 5.1. Pretpostavimo suprotno, tj. za neko k, $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$, postoji raspored sa $t = \dfrac{c_2 n^2}{k^3} = \dfrac{c_1^3 n^2}{k^3}$ pravom, koje sadrže bar k tačaka skupa $\mathbb{T}$. Tada je broj incidencija bar $\dfrac{c_1^3 n^2}{k^2}$. Iz nejednakosti $k \geqslant 2$ i $k \leqslant \sqrt{n}$ sledi respektivno $t \leqslant \binom{n}{2}$ i $t \geqslant \sqrt{n}$. Tačnost prve implikacije je razumljiva, a drugu sad ćemo pokazati:

$$t = \frac{c_1^3 n^2}{k^3} \geqslant \frac{c_1^3 n^2}{\sqrt{n}^3} = 10^{180}\sqrt{n} \geqslant \sqrt{n}.$$

Korišćenjem leme 5.1 dobijamo nejednakost

$$\frac{c_1^3 n^2}{k^2} \leqslant I < c_1 n^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} = c_1 n^{\frac{2}{3}} \left(\frac{c_1^3 n^2}{k^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{c_1^3 n^2}{k^2}$$

što je kontradikcija. ■

Sad sledi prva glavna teorema ovog poglavlja. (Uzimajući $c_3 = \frac{1}{c'}$ dobijamo tvrđenje u obliku koji je dao Erdős.)

Teorema 5.3. *Postoji konstanta $c_3 > 0$ i tačka skupa $\mathbb{T}$ koja je incidentna sa više od $c_3 n$ pravih skupa $\mathbb{P}$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo za $c_3 = 10^{-7} c_2^{-9}$, gde c_2 je konstanta leme 5.2. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji nekolinearan skup tačaka $\mathbb{T}$ tako da je svaka tačka incidentna najviše sa $c_3 n$ pravih skupa $\mathbb{P}$. Sa y_j označavamo broj tačaka koje leže na pravoj p_j, za $j = 1, 2, ..., m$, i sa d_i broj pravih koje sadrže tačku t_i, za $i = 1, 2, ..., n$. Po pretpostavci imamo $d_i \leqslant c_3 n$ i važi sledeća nejednakost:

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^2 > \sum_{j=1}^{m} \binom{y_j}{2} = \binom{n}{2} \geqslant \frac{4n^2}{10}, \tag{21}$$

$$I = \sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{i=1}^{n} d_i \leqslant c_3 n^2. \tag{22}$$

U drugom izrazu jednakost važi jer obe sume računaju broj incidencija u rasporedu.

Uzmimo $M = 100 c_2^3$. Izraz $\sum_{j=1}^{m} y_j^2$ podelimo na četiri sume:

$$S_1 = \sum_{2 \leqslant y_j < M} y_j^2;$$

$$S_2 = \sum_{M \leqslant y_j < \sqrt{n}} y_j^2;$$

$$S_3 = \sum_{\sqrt{n} \leqslant y_j < n^{\frac{2}{3}}} y_j^2;$$

$$S_4 = \sum_{n^{\frac{2}{3}} \leqslant y_j} y_j^2.$$

Za S_1, S_2 i S_3 dokazujemo da su strogo manje od $\frac{n^2}{10}$.

- $S_1 < \frac{n^2}{10}$: Pretpostavimo suprotno, tj. $S_1 \geqslant \frac{n^2}{10}$. Sa $s_j, j = 2, ..., M-1$, označavamo broj pravih koje sadrže j tačaka. Tada $\sum_{j=2}^{M-1} s_j j^2 \geqslant \frac{n^2}{10}$ i odavde sledi da za neko $j = 2, ..., M-1$, važi $s_j \geqslant \frac{n^2}{10M^3}$. Ta s_j prava određuje bar $\frac{n^2}{10M^3} j$ incidenciju, pa važi

$$I \geqslant \frac{n^2}{10M^3} j > \frac{n^2}{10M^3} = \frac{n^2}{10^7 c_2^9} = c_3 n^2,$$

  što je u kontradikciji sa izrazom (22). Dakle $S_1 < \frac{n^2}{10}$.

- $S_2 < \frac{n^2}{10}$: Za svako $i \geqslant 0$ sa osobinom $M2^i < \sqrt{n}$, sa t_i označavamo broj pravih koje sadrže bar $M2^i$ ali manje od $M2^{i+1}$ tačaka skupa $\mathbb{T}$. Na osnovu leme 5.2 sledi $t_i < \frac{c_2 n^2}{M^3 2^{3i}}$. Pošto posmatrane prave sadrže najviše $M2^{i+1}$ tačaka, sledi

$$S_2 < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_2 n^2}{M^3 2^{3i}} (M2^{i+1})^2 = \frac{8c_2 n^2}{M} < \frac{n^2}{10},$$

  što je tražena nejednakost.

- $S_3 < \frac{n^2}{10}$: Sa t_0 označavamo broj pravih koje sadrže bar $\sqrt{n}$ ali manje od $n^{\frac{2}{3}}$ tačaka skupa $\mathbb{T}$. Na osnovu leme 5.2 znamo $t_0 < \frac{c_2 n^2}{n^{\frac{3}{2}}} = c_2\sqrt{n}$ i odavde sledi $S_3 < c_2\sqrt{n} n^{\frac{4}{3}} = c_2 n^{\frac{11}{6}}$. Da bismo dokazali traženu nejednakost, proveravamo da važi $c_2 n^{\frac{11}{6}} < \frac{n^2}{10}$, što dokazujemo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$c_2 n^{\frac{11}{6}} \geqslant \frac{n^2}{10},$$

što se svodi na

$$10^6 c_2^6 \geqslant n.$$

Dalje sledi

$$0.1 > 0.1\frac{1}{c_1^9} = \frac{1}{10c_2^3} = c_3 10^6 c_2^6 \geqslant c_3 n \geqslant d_i$$

za sve $i = 1, 2, ..., n$, što je kontradikcija, jer po definiciji d_i je prirodan broj.

Na osnovu (21) sledi $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 > 4 \cdot \dfrac{n^2}{10}$. Zajedno sa dokazanim nejednakostima za S_1, S_2 i S_3 znamo $S_4 > \frac{n^2}{10}$. Sa $u_i, i \geqslant 0$, označavamo broj pravih koje sadrže bar $n^{\frac{2}{3}}2^i$ ali manje od $n^{\frac{2}{3}}2^{i+1}$ tačaka. Sa $p_1, p_2, ..., p_{u_i}$ označavamo same prave, gde za sve $j = 1, 2, ..., u_i$ važi da prava p_j sadrži bar $n^{\frac{2}{3}}2^i - j + 1$ tačaka koje ne pripadaju ni jednoj pravoj $p_k, 1 \leqslant k \leqslant j - 1$. Za sumu tih vrednosti važi da $\sum_{j=1}^{u_i}\left(n^{\frac{2}{3}}2^i - j + 1\right) \leqslant n$, iz čega sledi

$$u_i \leqslant 2n^{\frac{1}{3}}2^{-i}. \tag{23}$$

Lako možemo konstatovati da $u_i = 0$ važi uvek kad važi $n^{\frac{2}{3}}2^i > c_3 n$. Ako bi postojala prava koja sadrži $c_3 n$ tačku, onda bi tačka van te prave bila incidentna sa bar $c_3 n$ pravih, što je kontradikcija sa pretpostavkom dokaza.

Označimo sa α najmanji takav prirodan broj za koji važi $n^{\frac{2}{3}}2^{\alpha+1} > c_3 n$. To znači $n^{\frac{2}{3}}2^{\alpha} \leqslant c_3 n$, tj.

$$2^{\alpha} \leqslant c_3 n^{\frac{1}{3}}. \tag{24}$$

Po definiciji S_4 i korišćenjem nejednakosti (23) i (24) važi

$$S_4 \leqslant \sum_{i=0}^{\alpha} u_i n^{\frac{4}{3}} 2^{2i+2} \leqslant \sum_{i=0}^{\alpha} 8n^{\frac{5}{3}}2^i = 8n^{\frac{5}{3}}(2^{\alpha+1} - 1) \leqslant 16n^{\frac{5}{3}}2^{\alpha} \leqslant 16c_3 n^2.$$

Ako u tom izrazu uvrstimo i donju granicu za S_4, dobijamo

$$\frac{n^2}{10} < 16c_3 n^2,$$

tj. $c_3 > \frac{1}{160}$, što je kontradikcija. ■

U teoremi 5.3 za vrednost konstante c' dobijen je jako veliki broj. 2014. godine Payne i Wood dokazali su ovu hipotezu s konstantom $c' = 37$, što daje mnogo bolji rezultat. U naredni deo rada na osnovu [13] biće dokazana sledeća teorema:

Teorema 5.4. *Postoji tačka skupa $\mathbb{T}$ koja je incidentna sa više od $\frac{n}{37}$ pravih skupa $\mathbb{P}$.*

Pre nego što dokažemo ovu teoremu, uvedimo nekoliko definicija i tvrđenja. Raspored posmatramo kao graf G. Sa $n = n(G)$ označavamo broj čvorova i sa $e = e(G)$ broj grana grafa G.

Definicija 5.5. ***Presecajuć broj*** *(crossing number) grafa G, označen sa $cr(G)$, je minimalan broj preseka grana u crtanju grafa G u ravni.*

Lema 5.6. *Za svaki graf G sa n čvorova i $e \geqslant \frac{103}{16}n$ grana važi*

$$cr(G) \geqslant \frac{1024e^3}{31827n^2}.$$

Dokaz prethodne leme može se naći u radu [12].

Pojam i-prave će biti korišćen u ovom delu rada, što je dato u definiciji 4.4. Zbog jednostavnijeg praćenja dokaza, neka stoji i ovde.

Definicija 5.7. *Prava skupa $\mathbb{P}$ koja je incidentna sa i tačaka skupa $\mathbb{T}$ se zove* ***i-prava*** *i sa u_i ćemo označavati broj takvih pravih.*

Sa G_i označavamo podgraf grafa G čiji čvorovi su tačke skupa $\mathbb{T}$, a grane tog podgrafa su delovi j-pravih, za $j \geqslant i$. Pošto svaka j-prava određuje $j-1$ granu, sledi $e(G_i) = \sum_{j \geqslant i}(j-1)u_j$. Sledeća teorema daje gornju granicu za broj grana grafa G_i i za broj pravih koje su bar i-prave.

Teorema 5.8. *Neka su α i β pozitivne konstante takve da za svaki graf H sa n čvorova i $e \geqslant \alpha n$ grana važi*

$$cr(H) \geqslant \frac{e^3}{\beta n^2}.$$

Tada za proizvoljan skup n tačaka važi

1. $e(G_i) = \sum_{j \geqslant i}(j-1)u_j \leqslant \max\{\alpha n, \dfrac{\beta n^2}{2(i-1)^2}\}$,

2. $\sum_{j\geqslant i} u_j \leqslant \max\{\frac{\alpha n}{i-1}, \frac{\beta n^2}{2(i-1)^3}\}$.

Dokaz. Ako $e(G_i) < \alpha n$, dokaz je završen. Zato pretpostavimo $e(G_i) \geqslant \alpha n$. Za graf G_i lako možemo konstatovati da važi

$$cr(G_i) \geqslant \frac{e^3}{\beta n^2} = \frac{\left(\sum_{j\geqslant i}(j-1)u_j\right)^2 \cdot e}{\beta n^2} \geqslant \frac{(i-1)^2(\sum_{j\geqslant i} u_j)^2 \cdot e}{\beta n^2}.$$

Sa druge strane, pošto se dve prave seku u najviše jednoj tački, imamo

$$cr(G_i) \leqslant \binom{\sum_{j\geqslant i} u_j}{2} \leqslant \frac{1}{2}(\sum_{j\geqslant i} u_j)^2.$$

Prvu nejednakost iz formulacije dobijamo kombinacijom prethodne dve nejednakosti. Dalje lako možemo uvideti da

$$(i-1)\sum_{j\geqslant i} u_j \leqslant \sum_{j\geqslant i}(j-1)u_j,$$

što zajedno sa prvom nejednakošću implicira drugu nejednakost. ■

Lema 5.9. *Za skup n tačaka od kojih su najviše $n-3$ kolinearne važi*

$$u_2 + \frac{3}{4}u_3 \geqslant n + \sum_{i\geqslant 5}(2i-9)u_i.$$

Dokaz prethodne leme može se naći u radu [8].

Teorema 5.10. *Neka su α i β pozitivne konstante takve da za svaki graf H sa n čvorova i $e \geqslant \alpha n$ grana važi*

$$cr(H) \geqslant \frac{e^3}{\beta n^2}.$$

Fiksiramo prirodan broj $c \geqslant 8$ i realan broj $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\alpha})$ i definišemo $h := \frac{c(c-2)}{5c-18}$. Tada za svaki skup n tačaka u ravni od kojih su najviše εn kolinearne, postoji bar δn^2 tačka-prava incidencija, gde

$$\delta = \frac{1}{h+1}\left(1 - \varepsilon\alpha - \frac{\beta}{2}\left(\frac{(c-h-2)(c+1)}{c^3} + \sum_{i\geqslant c}\frac{i+1}{i^3}\right)\right).$$

Dokaz. Definišimo $J := \{2, 3, ..., \lfloor \varepsilon n \rfloor\}$. Posmatranjem podgrafova G_i definišemo k, kao najmanji prirodan broj sa osobinom da $e(G_k) \leqslant \alpha n$. Ako ne postoji takvo k, onda $k := \lfloor \varepsilon n \rfloor + 1$.

Za $i \in J$ kažemo da je

- **veliko**, ako je $i \geqslant k$;
- **malo**, ako je $i \leqslant c$;
- **srednje**, ako nije ni veliko ni malo.

O odnosu brojeva k i c ne znamo ništa, to jest to znači da neko $i \in J$ može da bude u isto vreme i veliko i malo.

Par tačaka jedne i-prave se zove **i-par**. **Mali par** je i-par gde je i malo. Analogno definišemo **srednji par** i **veliki par**. Sa P_M, P_S i P_V označavamo broj malih, srednjih i velikih parova tačaka.

Incidencija između jedne tačke i jedne i-prave se zove **i-incidencija**. **Mala incidenicja** je i-incidencija za neko malo i. Analogno definišemo **srednju incidenciju**. Sa I_M i I_S označavamo broj malih i srednjih incidencija. Pošto I označava broj svih tačka-prava incidencija, onda

$$I = \sum_{i \in J} i u_i$$

i

$$I_M = \sum_{i=2}^{c} i u_i.$$

U nastavku dokaza, određujemo jednu gornju granicu za broj malih, srednjih i velikih parova i na kraju pomoću njih dobijamo traženu donju granicu za ukupan broj incidencija.

- *Granica za P_M*: Pošto se bavimo rasporedom u kom ne postoji $\frac{n}{2}$ kolinearnih tačaka i $n \geqslant 5$, sledi da ne postoji više od $n - 3$ kolinearnih tačaka skupa $\mathbb{T}$. Iz leme 5.9 sledi

$$h u_2 + \frac{3h}{4} u_3 - hn - h \sum_{i \geqslant 5} (2i - 9) u_i \geqslant 0$$

za $h > 0$. Korišćenjem prethodnog izraza dobijamo

$$\begin{aligned}
P_M &= u_2 + 3u_3 + 6u_4 + \sum_{i=5}^{c} \binom{i}{2} u_i \\
&\leqslant (h+1)u_2 + \left(\frac{3h}{4} + 3\right) u_3 + 6u_4 + \sum_{i=5}^{c} \binom{i}{2} u_i - hn - h\sum_{i=5}^{c}(2i-9)u_i \\
&= \frac{h+1}{2} \cdot 2u_2 + \frac{h+4}{4} \cdot 3u_3 + \frac{3}{2} \cdot 4u_4 + \sum_{i=5}^{c} \left(\frac{i-1}{2} - 2h + \frac{9h}{i}\right) \cdot iu_i - hn.
\end{aligned}$$

Definisanjem $X := \max\{\frac{h+1}{2}, \frac{h+4}{4}, \frac{3}{2}, \max_{5 \leqslant i \leqslant c}(\frac{i-1}{2} - 2h + \frac{9h}{i})\}$ prethodna nejednakost dobiće kraći oblik

$$P_M \leqslant XI_M - hn. \tag{25}$$

Gornja nejednakost je najjača kada minimalizujemo vrednost za X određivanjem optimalne vrednosti za h, što je $\dfrac{c(c-2)}{5c-18}$, a za tu vrednost $X = \dfrac{h+1}{2}$.

- *Granica za P_S*: Pošto i nije veliko, sledi

$$e(G_i) = \sum_{j \geqslant i} (j-1)u_j > \alpha n$$

iz čega pomoću teoreme 5.8 sledi

$$\sum_{j \geqslant i} ju_j = \sum_{j \geqslant i} (j-1)u_j + \sum_{j \geqslant i} u_j \leqslant \frac{\beta n^2}{2(i-1)^2} + \frac{\beta n^2}{2(i-1)^3} = \frac{\beta n^2 i}{2(i-1)^3}. \tag{26}$$

Definišemo $Y := c - 1 - 2X$. Dobijamo

$$\begin{aligned} P_S - XI_S &= \left(\sum_{i=c+1}^{k-1} \binom{i}{2} u_i \right) - X \left(\sum_{i=c+1}^{k-1} i u_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=c+1}^{k-1} (i - 1 - 2X) i u_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=c+1}^{k-1} (i - c + Y) i u_i \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=c+1}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} j u_j \right) + \frac{Y}{2} \left(\sum_{i=c+1}^{k-1} i u_i \right). \end{aligned}$$

Primenom (26) za prethodnu jednakost dobijamo

$$P_S - XI_S \leqslant \frac{\beta n^2}{4} \left(Y \frac{c+1}{c^3} + \sum_{i \geqslant c} \frac{i+1}{i^3} \right). \tag{27}$$

- *Granica za P_V:* Iz definicije broja k znamo $e(G_k) \leqslant \alpha n$, pa na osnovu toga sledi

$$P_V = \sum_{i=k}^{\lfloor \varepsilon n \rfloor} \binom{i}{2} u_i \leqslant \frac{\varepsilon n}{2} \sum_{i \geqslant k} (i-1) u_i = \frac{\varepsilon n}{2} \cdot e(G_k) \leqslant \frac{\varepsilon \alpha n^2}{2}. \tag{28}$$

Iz nejednakosti (25), (27) i (28) dobijamo

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \leqslant P_M + P_S + P_V$$

$$\leqslant XI_M - hn + XI_S + \frac{\beta n^2}{4} \left(Y \frac{c+1}{c^3} + \sum_{i \geqslant c} \frac{i+1}{i^3}. \right) + \frac{\varepsilon \alpha n^2}{2},$$

iz čega posle sređivanja sledi

$$I \geqslant I_M + I_S \geqslant \frac{1}{2X} \left(1 - \varepsilon\alpha - \frac{\beta}{2} \left(Y \frac{c+1}{c^3} + \sum_{i \geqslant c} \frac{i+1}{i^3}. \right) \right) n^2 + \frac{2h-1}{2X} n$$

$$> \frac{1}{2X}\left(1-\varepsilon\alpha-\frac{\beta}{2}\left(Y\frac{c+1}{c^3}+\sum_{i\geqslant c}\frac{i+1}{i^3}.\right)\right)n^2.$$

Nakon umetanja vrednosti za Y i X dobijamo traženu vrednost za δ, čime je dokaz završen. ■

Teorema 5.11. *Svaki skup n tačaka od kojih su najviše $\frac{n}{37}$ kolinearne, određuje bar $\frac{n^2}{37}$ tačka-prava incidencija.*

Dokaz. Iz leme 5.6 i teoreme 5.10 sa konstantama $\alpha = \frac{103}{16}$, $\beta = \frac{31827}{1024}$, $c = 71$ i $\varepsilon = \delta$ dobijamo $\delta \geqslant \frac{1}{36{,}158} > \frac{1}{37}$, čime je dokaz završen. ■

Sad smo spremni za dokazivanje glavne teoreme 5.4.

Dokaz. Ako skup $\mathbb{T}$ sadrži $\frac{n}{37}$ kolinearnih tačaka, onda bilo koja tačka izvan te prave je incidentna sa bar $\frac{n}{37}$ pravih skupa $\mathbb{P}$.

Inače iz teoreme 5.11 znamo da skupovi $\mathbb{T}$ i $\mathbb{P}$ određuju bar $\frac{n^2}{37}$ tačka-prava incidencija. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji tačka incidentna sa bar $\frac{n}{37}$ pravih, onda dobijamo da ukupan broj tačka-prava incidencija je strogo manji od $n\frac{n}{37}$, što je kontradikcija. ■

Literatura

[1] J. Beck: On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős in combinatorial geometry, *Combinatorica* **3** (1983), pp. 281–297

[2] J. Csima, E. T. Sawyer: There exist $6n/13$ ordinary points, *Discrete Comput. Geom.* **9** (1993), pp. 187–202

[3] N. G. de Bruijn, P. Erdős: On a combinatorial problem, *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* **51** (1948), pp. 1277–1279

[4] P. Erdős: Néhány elemi geometriai problémáról, *Köz. Mat. Lapok* **24/5** (1962), pp. 1–9

[5] P. Erdős, R. Steinberg: Problem 4065, *Amer. Math. Monthly* **51** (1944), pp. 169–171

[6] P. Giblin: Graphs, Surfaces and Homology, *Cambridge University Press, Cambridge* (2010)

[7] B. Green, T. Tao: On set defining few ordinary lines, *Discrete Comput. Geom.* **50** (2013), pp. 409–468

[8] F. Hirzebruch: Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers, *Contemp. Math.* **58** (1986), pp. 141–155

[9] L. M. Kelly, W. O. J. Moser: On the number of ordinary lines determined by n points, *Canad. J. Math.* **10** (1958), pp. 210–219

[10] W. O. J. Moser, P. Borwein: A survey of Sylvester's problem and its generalizations, *Aequationes Math.* **40** (1990), pp. 111–135

[11] T. Motzkin: The lines and planes connecting the points of a finite set, *Trans. Amer. Math. Soc.* **70** (1951), pp. 451–464

[12] J. Pach, R. Radoičić, G. Tardos, G. Tóth: Improving the crossing lemma by finding more crossings in sparse graphs, *Discrete Comput. Geom.* **36** (2006), pp. 527–552

[13] M. S. Payne, D. R. Wood: Progress on Dirac's conjecture, *Electron. J. Combin.* **21** (2014), pp. 1–9

[14] E. Szemerédi, W. T. Trotter: Jr. Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica* **3** (1983), pp. 381–392

Biografija

Adel Šoš je rođena 2. aprila 1991. godine u Senti. Osnovnu školu je završila 2006. godine u Senti. Po završetku Ekonomsko-trgovinske škole u Senti 2010. godine, upisala je osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika. U septembru 2013. godine je završila osnovne studije sa prosečnom ocenom 8,15. Iste godine je upisala master studije na istom fakultetu, smer nastava matematike. Položila je sve ispite predviđene planom i programom sa prosečnom ocenom 8,72 i time stekla pravo na odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Adel Šoš
AU

Mentor: dr Bojan Bašić
MN

Naslov rada: Neki problemi rasporeda tačaka i pravih
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2017.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 5/47/14/0/27/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Geometrija
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: obična prava, obična tačka, raspored tačaka i pravih
PO

UDK:

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Polazna tačka ovog master rada je Sylvester-Gallaieva teorema, koja glasi: *Neka je dato n nekolinearnih tačaka. Tada postoji prava koja sadrži tačno dve od datih n tačaka.* Ovo tvrđenje motiviše uvođenje pojma obične prave (tačke), što se definiše kao prava (tačka) koja je incidentna s tačno dvema tačkama (pravama) od uočenih konačno mnogo. U drugom delu rada dajemo nekoliko dokaza Sylvester-Gallaieve teoreme, odabranih kao ilustraciju raznovrsnosti ideja kojima se mo e stii do cilja, a u treem delu dajemo sve bolju i bolju donju granicu za broj običnih pravih. U četvrtom delu dajemo donju granicu za ukupan broj pravih određenih konačnim brojem tačaka, pod određenim uslovima. Na kraju, u petom delu razmatramo Diracovu hipotezu, koja se bavi postojanjem tačke koja je incidentna sa bar $\frac{n}{2} - c$ pravih. Taj problem još nije rešen, ali neke slabe verzije jesu, qv sto će biti ovde prezentovano.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 16. 6. 2015.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Bojan Bašić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Petar Đapić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČK

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master's thesis
CC

Author: Adel Šoš
AU

Mentor: Bojan Bašić, PhD
MN

Title: Some problems of arrangements of points and lines
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2017.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/47/14/0/27/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Geometry
SD

Subject / Key words: ordinary line, ordinary point, arrangement of points and lines
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The starting point of the present thesis is Sylvester-Gallai theorem, which states: *Let n noncollinear points be given. Then there exists a line that contains exactly two of those n points.* This statement also motivates introduction of the notion of ordinary line (point), that is defined as a line (point) incident with exactly two points (lines) among finitely many given ones. In the second part of the thesis we present a few proofs of Sylvester-Gallai theorem, chosen to illustrate the wealth of different ideas leading to the same goal, and in the third part we provide better and better lower bounds for the number of ordinary lines. In the fourth part we provide a lower bound for the total number of lines determined by a finite number of points, under certain conditions. Finally, in the fifth part we consider the Dirac's conjecture, that is concerned with existence of a point incident with at least $\frac{n}{2} - c$ lines. This problem is still unsolved, but some weaker versions of it are, that shall be presented in the thesis.
AB

Accepted by Scientific Board on: Jun 16, 2015
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:

President: Boris Šobot, PhD, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: Bojan Bašić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Petar Đapić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
DB