Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku

Sanja Vukmirović

Golombova hijerarhija popločavanja poliominama i njena proširenja

-master rad-

Mentor:
dr Anna Slivková

Novi Sad, 2026

Predgovor

Ovaj master rad prikazuje određene oblasti kombinatorne geometrije, matematičke discipline koja proučava geometrijske probleme koristeći kombinatorne metode. Posebna pažnja u radu posvećena je Golombovoj hijerarhiji, popločavanjima ravni i pravougaonih oblasti poliominama, kao i različitim proširenjima ovih problema. Poliominima se nazivaju geometrijske figure sastavljene od konačnog broja međusobno povezanih jediničnih kvadrata. Iako su njihove definicije jednostavne, problemi koji se odnose na njihovo popločavanje često zahtevaju složene kombinatorne, geometrijske i algebarske metode.

U radu se razmatraju svojstva poliomina, mogućnosti popločavanja pravougaonika i drugih oblasti, kao i uslovi pod kojima je određeno popločavanje moguće ili nemoguće. Posebno mesto zauzima Golombova hijerarhija, koja omogućava sistematizaciju i proučavanje različitih klasa poliomina prema njihovim geometrijskim i kombinatornim osobinama. Cilj rada je da se predstave osnovni pojmovi i rezultati iz ove oblasti, analiziraju odabrani problemi popločavanja i ukaže na mogućnosti njihovog proširivanja i daljeg proučavanja, kao i na značaj Wangovih pločica u teoriji popločavanja.

Najpre želim da se zahvalim svom mentoru, dr Anni Slivkovoj, na izdvojenom vremenu, bezgraničnom trudu i detaljnim uputstvima i objašnjenjima koja su bila neophodna za moje razumevanje ove teme. Zahvaljujem se i predsedniku komisije dr Olgi Bodroži Pantić i članu dr Petru Markoviću što su prihvatili svoju ulogu u oceni ovog rada, a koji su takođe doprineli da ovaj rad bude završen u potpunosti u skladu sa svim zahtevima. Na kraju, beskrajno se zahvaljujem svojoj porodici, prijateljima i kolegama na podršci, ne samo u toku pisanja rada, već i tokom polaganja svih ispita.

Novi Sad, septembar 2026 Sanja Vukmirović

Sadržaj

1 Uvod **3**

2 Osnovne definicije i pojmovi **4**

3 Golombova hijerarhija popločavanja **13**
3.1 Uspostavljanje hijerarhije 14
3.2 Liuovo proširenje hijerarhije 17
3.3 Karakteristični primeri 19

4 Popločavanje skupovima poliomina **27**
4.1 Osnovni koncepti popločavanja skupom poliomina 27
4.2 Golombova hijerarhija za protoskupove 28
4.3 Karakteristični primeri 31
4.4 Problemi popločavanja ravni i Wangove pločice 34

5 Teselacija u trodimenzionalnom prostoru **39**
5.1 Polikubovi 39
5.2 Hijerarhija u trodimenzionalnom prostoru 41
5.3 Karakteristični primeri 48

6 Zaključak **55**

Biografija **56**

Literatura **57**

1 Uvod

Problem popločavanja ravni i prostora poliominama predstavlja izazov koji je matematički intrigantan i praktično primenljiv. Poliomine su oblici sastavljeni od jediničnih kvadrata spojenih duž ivica. Pojam poliomina prvi je uveo Solomon Golomb pedesetih godina 20. veka, kada je proučavao kombinatorne mogućnosti sastavljanja figura od povezanih kvadratnih jedinica. Njegovo istraživanje, predstavljeno u radu [9], postalo je osnova za dalja istraživanja u ovoj oblasti.

Praktična primena poliomina seže do dizajna igrica poput Tetrisa, koje su inspirisane osnovnim oblicima poliomina. U matematici, poliomine su postale alat za istraživanje problema pokrivanja i kombinatornih obrazaca, uključujući optimizaciju popločavanja i analizu prostorne simetrije. Ovi geometrijski oblici otvaraju pitanja o tome koje regije mogu popločati, kako se mogu optimizovati obrasci popločavanja i koje matematičke strukture najbolje opisuju njihove osobine. Jedno od ključnih pitanja u ovoj oblasti jeste algoritamska odlučivost: da li je moguće unapred odrediti da li određena poliomina ili skup poliomina može popločati ravan ili specifične regije poput pravougaonika, traka ili kvadranata.

Osim teorijskih aspekata, analiza poliomina ima praktične primene u arhitekturi, optimizaciji industrijskih procesa, umetničkom dizajnu i teoriji računarskih sistema. Uvođenje pojma „rep-pločica“, odnosno poliomine koja može popločati uvećanu verziju same sebe, dodatno proširuje ovu oblast i uvodi koncept beskonačnih popločavanja s iterativnim obrascima.

Ovaj rad ima za cilj da pruži pregled ključnih pojmova i metoda vezanih za popločavanje poliominama. Fokusiraćemo se na hijerarhiju popločavanja jednom i skupom poliomina. Takođe ćemo istražiti i proširenje na trodimenzionalne prostore.

2 Osnovne definicije i pojmovi

Pre nego što uvedemo definiciju poliomine, definisaćemo neke osnovne pojmove koji su neophodni za dalja razmatranja. Neka je $\mathbb{E}^2$ Euklidska ravan i neka je u njoj zadat Dekartov pravougli koordinatni sistem.

Definicija 2.1. *Konačna ili prebrojiva familija $\mathcal{T} = \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, dvodimenzionih figura $\mathcal{F}_i (i \in I)$ se naziva **popločavanje ravni (razbijanje ravni, razlaganje, tajling, teselacija)**, u oznaci $\mathcal{T}$, ako je njihova unija jednaka celoj ravni i ako svake dve figure te familije imaju disjunktne unutrašnjosti. Figure iz $\mathcal{T}$ nazivamo **pločice** tajlinga $\mathcal{T}$. Ako su sve pločice tajlinga međusobno podudarne, onda kažemo da je on **jednotipni**, a ako se sve pločice mogu podeliti u n klasa međusobno podudarnih pločica govori se o **n-tipnom** tajlingu.*

Analogno se definiše i popločavanje ograničenih i neograničenih figura F kao sto su pravougaonik, traka, polutraka, kvadrant i sl.

Za dve pločice razbijanja $\mathcal{T}$ kažemo da su **dodirne** ako imaju zajedničkih tačaka koje pripadaju rubu obe pločice. Rub svake pločice razložen je na lukove, pri čemu svaki luk koji nije tačka, pripada rubovima tačno dve pločice razbijanja. Te pločice nazivaju se **susednim**. Dve dodirne pločice ne moraju biti susedne, jer mogu imati samo zajedničku tačku.

Definicija 2.2. ***Protopločica** je figura za koju postoji jednotipni tajling čije su sve pločice podudarne sa njom. Ako u popločavanju postoje više podudarnih klasa pločica, onda skup pločica koje su predstavnici ovih klasa nazivamo **protoskup**.[1] Kažemo da protoskup S **omogućava** tajling $\mathcal{T}$ ako postoji tajling $\mathcal{T}$ ravni $\mathbb{E}^2$ (ili figure F) čiji je protoskup odgovara skupu S. Takođe tada kažemo i da skup S popločava ravan (ili figuru).*

Definicija 2.3. ***Simetrija popločavanja** $\mathcal{T}$ ravni je izometrija $\sigma\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ koja preslikava svaku pločicu popločavanja $\mathcal{T}$ u podudarnu pločicu iz $\mathcal{T}$. Primetimo da skup svih simetrija popločavanja T, u oznaci $S(\mathcal{T})$, sa kompozicijom preslikavanja ima strukturu grupe.*

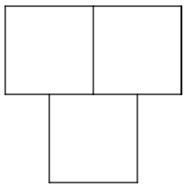
Definicija 2.4. *Popločavanje ravni naziva se **periodičnim** ako grupa simetrija tog popločavanja sadrži bar dve neparalelne translacije. Popločavanje je **netranslaciono** ako odgovarajuća grupa simetrija ne sadrži translaciju. Protoskup je **aperiodičan** ako omogućava popločavanja, ali ako je svako takvo popločavanje netranslaciono.*

[1] Reč grčkog porekla „proto-" označava „prvi" ili „osnovni", a koristi se da označi početnu grupu elemenata u nekom sistemu.

Pored ovih vrsta popločavanja postoje i mnoge druge, kao na primer kvaziperiodična i nasumična [15], ali u ovom radu će nam biti potrebna samo definisana popločavanja.

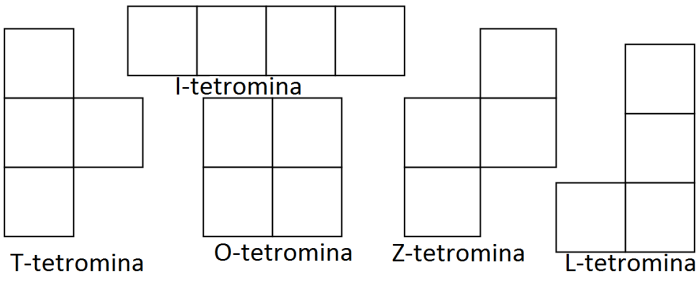
Celobrojna rešetka je skup svih tačaka ravni čije su obe koordinate celi brojevi, tj. $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) \in \mathbb{E}^2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Celobrojnoj rešetki odgovara popločavanje ravni jediničnim kvadratima, čija je protopločica kvadrat površine 1, a čija temena kvadrata imaju celobrojne koordinate. Taj tajling naziva se **kvadratnom mrežom** i označavaćemo ga nadalje se sa K. Stranice jediničnih kvadrata nazivaju se **granama** kvadratne mreže, a njihova temena **čvorovima** mreže.

Definicija 2.5. ***Poliomina*** *je poligon čiji je rub sastavljen od grana kvadratne mreže. Poliominu sastavljenu od tačno n jediničnih kvadrata nazivamo* ***n-nominom****.*



Slika 1. Figura koja nije poliomina, jer joj kvadrati nisu na istoj kvadratnoj mreži

Broj jediničnih kvadrata kvadrata predstavlja površinu poliomine. Prema tome, te poliomine često nazivamo specifičnim imenom dominom (površine 2), trominom (površine 3), tetrominom (površine 4, slika 2) i sl.

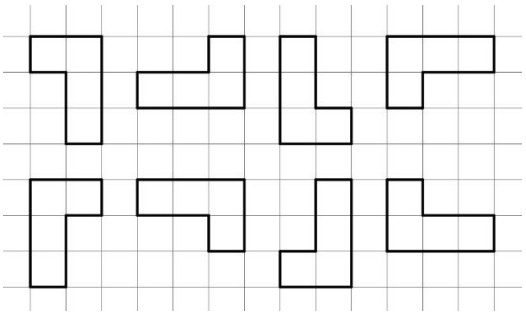


Slika 2. Tetromine

U ravni, dve poliomine nazivaju se dodirnim ako imaju bar jednu zajedničku tačku koja pripada rubu svake od njih. Rub svake poliomine sastoji se od duži i njihovih krajnjih tačaka. Svaka duž koja je deo rubova dveju pločica

predstavlja njihov zajednički deo ruba. Dve dodirne pločice ne moraju biti susedne: ako imaju samo zajedničku tačku, a ne i zajedničku duž, one nisu susedne. Prema tome, dve pločice nazivaju se susednim ako imaju zajedničku duž koja je deo ruba svake od njih.
Radi preciznog definisanja različitih načina posmatranja poliomina, uvodimo dve relacije ekvivalencije na skupu svih poliomina. Poliomine P i Q su u relaciji $P{\sim_{\text{tr}}}Q$ ako postoji translacija ravni koja preslikava P na Q. Primetimo da je ova relacija relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim_{\text{tr}}$ naziva se **fiksiranom poliominom**. Prema tome, dve poliomine predstavljaju istu fiksiranu poliominu ako se razlikuju samo po položaju u ravni. Poliomine P i Q su u relaciji $\sim$ odnosu na izometrije kvadratne mreže ako se jedna može dobiti iz druge nekom izometrijom podudarnosti. Kako se temena poliomine P koji su iz $\mathbb{Z}^2$ preslikavaju u temena od Q (koja su takođe iz $\mathbb{Z}^2$), sledi da se kvadratna mreža preslikava na samu sebe. Takve izometrije obuhvataju translacije za vektore sa celobrojnim koordinatama, rotacije oko odgovarajućih centara (čvorovi, središte elementarnog kvadratića i središte grane) za uglove koji su celobrojni umnošci ugla $\pi/2$, osnu simetrije u odnosu na odgovarajuće ose simetrije mreže, kao i njihov proizvod. Klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim$ naziva se **slobodnom poliominom**. Za dve poliomine, kažemo da predstavljaju istu slobodnu poliominu akko su podudarne. Svaka fiksirana poliomina pripada tačno jednoj klasi relacije $\sim$, ali u toj klasi se mogu sadržati više različitih fiksiranih poliomina.

Vidimo na slici 3 da L- tetromina ima 8 različitih fiksiranih pojava (koje pripadaju različitim klasama relacije $\sim_{\text{tr}}$) i predstavlja jednu od mogucih 5 slobodnih pojava L-tetromine prikazanih na slici 2. Kako kvadratna mreža



Slika 3. L-tetromina

ima četiri moguća ugla rotacije koji je čuvaju, kao i četiri pravca osa osnih simetrija koje je čuvaju, sleda da svaka klasa relacije $\sim$ sadrži najviše 8 klasa relacije $\sim_{\text{tr}}$.

Klasa slobodnih domina postoji samo jedna, koja sadrži dve klase fiksiranih domina (horizontalne i vertikalne). Što se tiče tetromina videli na slici

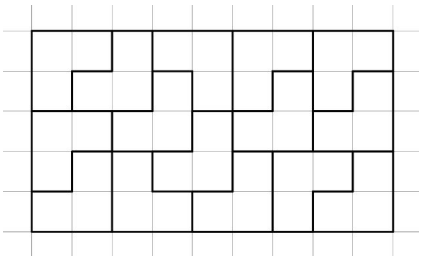
2 smo da imamo 5 klasa slobodnih tetromina, koje nazivamo prema njihovom izgledu nazivamo T-tetromina, I-tetromina, O-tetromina, Z-tetromina i L-tetromina, . U klasi slobodnih L-tetromina nalazi se 8 klasa $\sim_{\text{tr}}$, u klasi Z-tetromine, kao i u klasi T-tetromine po 4 klase $\sim_{\text{tr}}$, u klasi O-tetromine samo jedna, dok u klasi I-tetromine dve klase $\sim_{\text{tr}}$.

Broj različitih slobodnih poliomina (nepodudarnih) za različite n dat je u tabeli 1.

n	broj različitih n-omina
1 (monomina)	1
2 (domina)	1
3 (tromina)	2
4 (tetromina)	5
5 (pentomina)	12
6 (heksomina)	35
7 (heptomina)	108
8 (oktomina)	369
9 (devetomina)	1285
10 (dekomina)	4655
11	17073
12	63600
13	238591
14	901971
15	3426576
16	13079255
17	50107909
18	192622052
19	742624232
20	2870671950
21	11123060678
22	43191857688
23	168047007728
24	654999700403

Tabela 1. Broj slobodnih n-omina

Vrednosti do 24 iz pomenute tabele prvi je izračunao D. H. Redelmeier i objavio u svom radu [13]. U ovom radu bavimo se popločavanjem ravni i nekih drugih oblasti kao što su pravougaonik, traka, polutraka, kvadrant i sl., isključivo pomoću poliomina, pa u nastavku navodimo još neke neophodne definicije za dalja razmatranja.



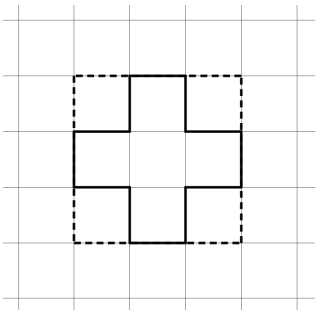
Slika 4. L-tromina popločava pravougaonik 9×5

Definicija 2.6. *Poliomina P je **rektifibilna** ako omogućava popločavanje nekog pravougaonika. **Red** rektifibilne poliomine P je najmanji broj k poliomina podudarnih sa P potrebnih za popločavanje nekog pravougaonika.*

Površina pravougaonika čije je popločavanje poliomina P omogućava jednaka je proizvodu broja k i površini poliomine P.

Primer 2.1. *Razmotrimo popločavanje pravougaonika poliominom P koja sadrži tri jedinična kvadrata raspoređena u obliku slova L. Red poliomine je 2, jer je pravougaonik najmanje površine koji se može popločati ovim trominama pravougaonik 3×2 (3 je dužina horizontalne stranice), a sa 15 takvih poliomina može se popločati pravougaonik 9×5 što je prikazano na slici 4).*

Definicija 2.7. *Pravougaonik najmanje površine koji sadrži datu poliominu P kao podskup i čije su stranice paralelne stranicama poliomine naziva se **pravougaoni omotač** poliomina.*



Slika 5. Poliomina i njen pravougaoni omotač, gde nijedan elementarni ugaoni kvadrat ne pripada poliomini.

U okviru definicije 2.7 elementarni kvadrat koji pripada pravougaonom omotaču i sadrži teme pravougaonog omotača nazivamo ugaoni elementarni kvadrat pravougaonog omotača. Ako ugaoni kvadrat pripada poliomini onda shodno tome možemo da govorimo o donjem levom ugaonom kvadratu pravougaonog omotača, gornjem desnom itd.

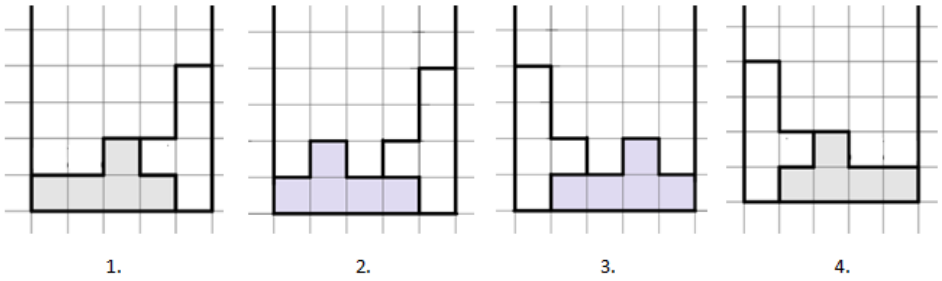
Primer 2.2. *Y-pentomina je rektifibilna poliomina čiji je red* 10*. Da je rektifibilna vidimo sa slike 8 (prikazane su neke od mogućnosti popločavanja). Obrazložimo zašto je njen red* 10*, tj. zašto je pravougaonik* 5×10 *pravougaonik najmanje površine koji se može razložiti na ove pentomine. Pretpostavimo da Y-pentomina popločava pravougaonik dimenzija $w \times h$ (w je dužina horizontalne stranice). Budući da jedna Y-pentomina sadrži pet jediničnih kvadrata, površina pravougaonika mora biti deljiva sa* 5*. Dakle,* $5|wh$*, tj. važi da 5 deli bar jedan od činilaca (w ili h). Za svrhu dokaza fiksirane Y-pentomine koje se mogu smestiti u pravougaonik* 4×2 *zvaćemo široke, a fiksirane koje možemo smestiti u pravougaonik* 2×4 *zvaćemo uske. Jasno je da ako postoji popločavanje $w \times h$ onda postoji isto popločavanje $h \times w$, pa bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $w \leq h$. Ako je $w < 4$ (imamo pravougaonike:* 1×10*,* 2×5*,* 2×10*,* 2×15*,* 2×20*,* 3×5*,* 3×10*,* 3×15*,* 4×5*,* 4×10*), popločavanje bi se moralo izvesti sa uskim pentominama, međutim one se ne mogu uskladiti da popune sve elementarne kvadrate u prvom donjem redu pravougaonika. Široke Y-pentomine ne mogu se smestiti u takav pravougaonik. Dalje, primetimo da dve uske ne mogu da popune prva dva kvadrata u nekom redu.*
Ako je $w = 4$*, vezano za pokrivanje prvog (donjeg) reda kvadratića, imamo dve mogućnosti:*
1. da su svi kvadratići pokriveni samo sa uskim Y-pentominama. U ovom slučaju morali bismo imati 4 *uske pentomine, a problem bi nastao u drugom ili trećem redu gde bi došlo do preklapanja pentomina što nije dozvoljeno.*
2. da su svi kvadratići tog reda pokriveni jednom širokom pentominom. U ovom slučaju dobijamo tri nepokrivena elementarna kvadratića u drugom redu što implicira da se oni moraju pokriti sa tri uske pentomine. Međutim, dve uske pentomine koje bi pokrile dva susedna slobodna kvadratića iz drugog reda bi imala preklapanja u trećem ili četvrtom redu, što opet nije moguće.
Ako je $w = 5$*, analogno kao u slučaju $w = 4$ zaključujemo da nije moguće da se prvi red kvadratića pravougaonika pokrije samo sa uskim pentominama. Dakle, oni se pokrivaju sa jednom uskom i jednom širokom na četiri moguća načina (izbegavajući mogućnost da se pojavi u drugom redu „zarobljeni" kvadratić u drugom redu) prikazana na slici 6. Zbog simetričnosti 1. i 4. načina, odnosno 2. i 3., dovoljno je izanalizirati samo prva dva. U prvom slučaju imamo dva nepokrivena elementarna kvadratića u drugom redu, koji su i susedni, i koji bi se morali pokriti uskim pentominama, ali bi u trećem ili četvrtom redu došlo do preklapanja istih, te je taj slučaj (1. i 4. sa slike) nemoguć. Slučaj 2. sadrži u drugom redu dva nepokrivena kvadrata koji nisu susedni i oni se mogu pokriti sa dve nove pentomine (osenčeno na slici 7) na tri načina (slučaj 2c) i 2b) daju isti efekat, tj. pokrivaju isti skup elementarnih kvadrata, te je dalje dovoljno nastaviti posmatrati slučajeve 2a) i 2b)). U*

slučaju 2a), sledeća dva pentomina koji pokrivaju slobodna polja u četvrtom redu su označeni sivom bojom. Imamo dve mogućnosti:

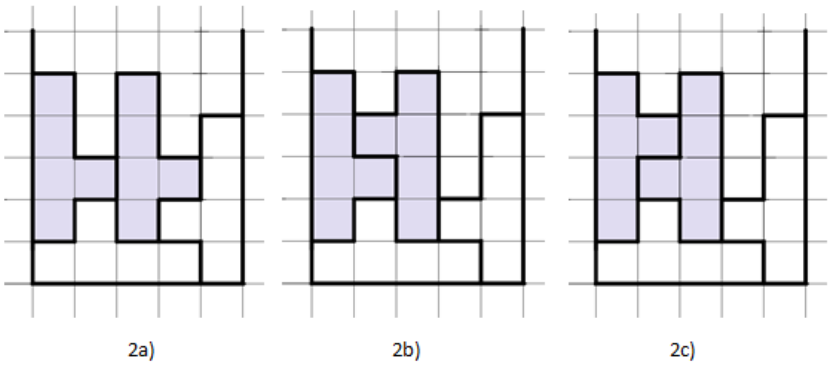
- *U prvoj, slučaj 2a' položaj sledeća tri pentomina su jednoznačno određena, što omogućava da se sa desetim, širokim pentominom kompletira popločavanje pravougaonika formata* 5×10.
- *U drugom slučaju, sledeća tri pentomina se mogu rasporediti na dva načina koji su prikazani na sl. 2a" i 2a"'. No, u oba slučaja, ako bi se i moglo nastaviti popločavanje, vidimo da bi pravougaonik morao imati veću površinu od 50.*

U slučaju 2b) sledeća dva pentomina su jednoznačno određena (označeni sivom bojom na slici 8) dok se sledeća četiri pentomina mogu na dva načina rasporediti tako da se dobije popločavanje pravougaonika formata 5×10.

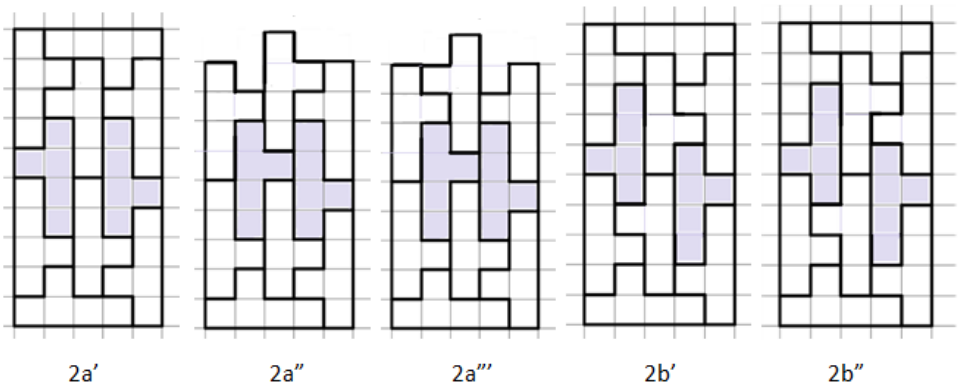
Dakle, imamo 10 *popločavanja pravougaonika formata* 5×10 *(2a', 2b', 2b", dva popločavanja za 2c), osnosimetrične slike svih pet tajlinga u odnosu na vertikalnu osu, a što se odnosi na slučaj 3.) i nemogućnost popločavanja pravougaonika formata* $5 \times h$, *gde je* $h < 10$.



Slika 6. Četiri mogućnosti popločavanja prvog (donjeg) reda kad je $w = 5$.



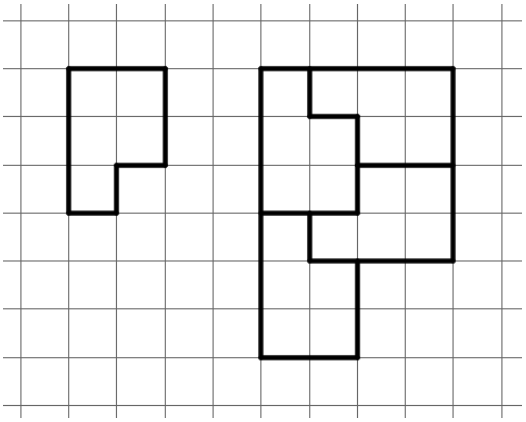
Slika 7. Podslučajevi slučaja 2.



Slika 8. Nastavak popločavanja u slučaju 2a) i 2b).

Definicija 2.8. *Poliomina P se naziva* ***rep-pločica*** *(rep-poliomina) ako se njena uvećana verzija može popločati konačnim brojem figura dobijenih dozvoljenim izometrijskim transformacijama poliomine P, pri čemu je faktor skaliranja ceo broj $k > 1$.*

Primer 2.3. *[14] P-pentomina prikazana na slici 9 je rep-pločica, čiji je faktor skaliranja $k = 2$. Svaki jedinični kvadrat u P-pentomini postaje jedinični kvadrat 2×2, a kako se sastoji od pet jediničnih kvadrata, površina uvećane verzije tim faktorom iznosi 20.*



Slika 9. Rep-pločica P-pentomina

3 Golombova hijerarhija poploč avanja

Hijerarhija koju je definisao Golomb [5] omogućava klasifikaciju poliomina prema figurama koje mogu popločati, počevši od pravougaonika do cele ravni. Ova hijerarhija se koristi za proučavanje složenosti problema i algoritamskih metoda popločavanja. Koristićemo i oznake: (N) označava da poliomina ne popločava nijedan specifičan deo ravni, dok (S) označava da poliomina može popločati skaliranu verziju same sebe. Kako je faktor skaliranja k>1 posmatraćemo uvećanu skaliranu verziju poliomine.

Hijerarhija je uspostavljena u zavisnosti od toga da li poliomine popločavaju sve ili samo neke od sledećih figura (svaka od njih ima svoju oznaku koje ćemo koristiti radi lakšeg zapisa u nastavku rada):

- (P) Pravougaonik – skup tačaka u ravni translatorno podudaran sa skupom $\{(x, y) : 0 \leq x \leq a \text{ i } 0 \leq y \leq b\}$.
- (T) Vertikalna traka širine a– skup tačaka translatorno podudaran sa $\{(x, y) : 0 \leq x \leq a\}$. Analogno se definiše horizontalna traka. Mi ćemo pod pojmom trake i oznakom (T) podrazumevati jednu od njih.
- (ST) Savijena traka – oblast definisana na sledeći način: $\{(x, y) : 0 \leq y \leq a \text{ i } 0 \leq x < \infty\} \bigcup \{(x, y) : 0 \leq y < \infty \text{ i } 0 \leq x \leq b\}$.
- (PT) Polutraka – skup tačaka u ravni dat sa$\{(x, y) : 0 \leq x \leq a \text{ i } 0 \leq y\}$ ili $\{(x, y) : 0 \leq x \leq a \text{ i } y \leq 0\}$.
- (K) Kvadrant – figure definisane na sledeći način:
  I kvadrant : $\{(x, y) : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$;
  II kvadrant:$\{(x, y) : x \leq 0 \wedge y \geq 0\}$;
  III kvadrant: $\{(x, y) : x \leq 0 \wedge y \leq 0\}$;
  IV kvadrant: $\{(x, y) : x \geq 0 \wedge y \leq 0\}$.
- (PR) Poluravan – deo ravni određen sa $y \leq 0, y \geq 0, x \leq 0$ ili $x \geq 0$ u zavisnosti od toga da li se posmatra donja, gornja, leva ili desna poluravan.
- (R) Cela ravan $\mathbb{E}^2$.

3.1 Uspostavljanje hijerarhije

U nastavku ćemo dokazati nekoliko teorema koje uspostavljaju hijerarhiju.

Napomena 3.1. *Koristićemo skraćeni zapis sa implikacijama u formulacijama teorema, npr. zapis* $(P) \Rightarrow (PT)$ *označava da ako poliomina popločava pravougaonik, onda popločava i polutraku.*

Teorema 3.1. *1.* $(P) \Rightarrow (PT) \Rightarrow (ST) \Rightarrow (K) \Rightarrow (PR) \Rightarrow (R) \Rightarrow (N)$

2. $(P) \Rightarrow (PT) \Rightarrow (T) \Rightarrow (PR) \Rightarrow (R) \Rightarrow (N)$

Dokaz. Popločavanje pravougaonika (P) može se sukcesivno translirati za vektor $\vec{v}$, koji je određen jednom od stranica tog pravougaonika, kako bi se formirala popločana polutraka (PT). Dve polutrake mogu se sastaviti pod pravim uglom da bi se formirala savijena traka (ST) i imamo slučaj da se spajanjem polutrake sa osnosimetričnom polutrakom formira traka (T). Savijena polutraka može popločati kvadrant sukcesivnim translacijama za vektor određen rastojanjem i pravcem između dve početne tačke susednih polupravih koje određuju savijenu polutraku, kao što se može videti na slici 14a u primeru 3.1. Trake se translacijom za vektor određen visinom trake preslikati tako da se poploča poluravan (PR). Takođe, dva kvadranta se mogu spojiti da formiraju poluravan. Dve spojene poluravni ispunjavaju celu ravan (R). Implikacija $(R) \Rightarrow (N)$ je trivijalna, jer (N) ne podrazumeva nikakav zahtev za popločavanjem.

□

Teorema 3.2. $(P) \Rightarrow (S) \Rightarrow (R)$

Dokaz. Ako poliomina popločava pravougaonik dimenzija $a \times b$, taj pravougaonik može se koristiti za popločavanje kvadrata dimenzija $ab \times ab$, a taj kvadrat može se koristiti n puta da formira uvećanu verziju originalne poliomine. Ako poliomina popločava skaliranu (uvećanu) verziju sebe, ovaj postupak stvaranja uvećanih modela može se ponavljati unedogled kako bi se pokrivale sve veće figure ravni.

Teorema 3.3. $(ST) \Rightarrow (T)$

Dokaz. Pretpostavimo da poliomina A popločava savijenu traku. Neka je, bez gubitka opštosti, ta savijena traka oblika: $\{(x, y) : 0 \leq y \leq a \text{ i } 0 \leq x < \infty\} \bigcup \{(x, y) : 0 \leq y < \infty \text{ i } 0 \leq x \leq b\}$ gde su a i b pozitivni celi brojevi.

Neka je m maksimalna dužina stranice pravougaonog omotača poliomine A. Grana duž x ose se može analizirati na segmentima dužine m. Za svaki ceo broj $i \geq 0$, posmatramo pravougaonike:

$$R_i = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a \text{ i } i \leq x \leq m + i\}.$$

Analiziramo povezane puteve koji se mogu formirati unutar svakog segmenta u obliku pravougaonika dimenzija $m \times a$. Ove puteve formiramo tako da seku granu od jedne do druge poluprave, koje ograničavaju granu, i da pri tome ne seku nijednu poliominu. Dakle, ovi putevi idu samo po ivicama poliomina datog popločavanja, odnosno po konačnoj mreži unutar pravougaonika dimenzija $m \times a$, te ih ima konačno mnogo. Kako ih je konačno, a segmenata u obliku pravouganika koji čine granu ima beskonačno mnogo, bar jedan ovakav put se mora ponoviti. Stoga deo popločavanja koji se pojavljuje između dva pojavljivanja istog puta se može iskoristiti tako što se njegovim ponavljanjem poploča cela traka.

□

Teorema 3.4. *Bar jedan ugaoni kvadratić pravougaonog omotača rep-pločice pripada toj rep-pločici.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji rep-poliomina P koja nije smeštena ni u jedan ugao svog pravougaonog omotača, tj. nijedan ugaoni kvadratić pravougaonog omotača za P ne pripada toj rep-pločici P, npr. kao na slici 5. To, jasno, važi i za sve kopije od P (poliomine podudarne sa P). Kako je P poligon, on ima bar jedan konveksan unutrašnji ugao (njegova mera je 90^0). Označimo sa A teme tog ugla, sa q jedini elementarni kvadrat od njih četiri koji sadrže teme A. Poliominu sastavljenu od tri preostala elementarna kvadrata sa temenom A označimo sa R. Kako je P rep-pločica, postoji poliomina P_1, slična sa P, uvećana kopija dobijena nekom homotetijom sa koeficijentom uvećanja k (k ceo broj veći od 2), a koja se može popločati sa kopijama od P. Zatim posmatrajmo niz uvećanih poliomina P_2, P_3, ... sličnih sa P, pri čemu P_n ($n \in N$) ima površinu k^2 puta veću od površine poliomine P_{n-1}. Za poliominu P_n teme koje odgovara temenu A poliomine P označimo sa A_n. Prilikom tih homotetija kvadrat q se preslikava u poliomine koje ćemo označiti sa Q_1, Q_2, Q_3, ..., dok se unija tri preostala elementarna kvadrata sa temenom u A, tj. poliomina R tim homotetijama preslikava u poliomine R_1,R_2, ... Elementarni kvadrat sa temenom u A_n koji se nalazi u P_n (a time i u Q_n) označimo sa q_n. Primetimo da je to jedini od četiri elementarna kvadrata incidentnih sa A_n koji se nalazi u P_n. Jasno je da se poliomina P_n može razložiti na poliomine podudarne sa P. Jedna od njih pokriva i elementarni kvadrat q_n. Primetimo da nijedna kopija od P ne pokriva nijedan

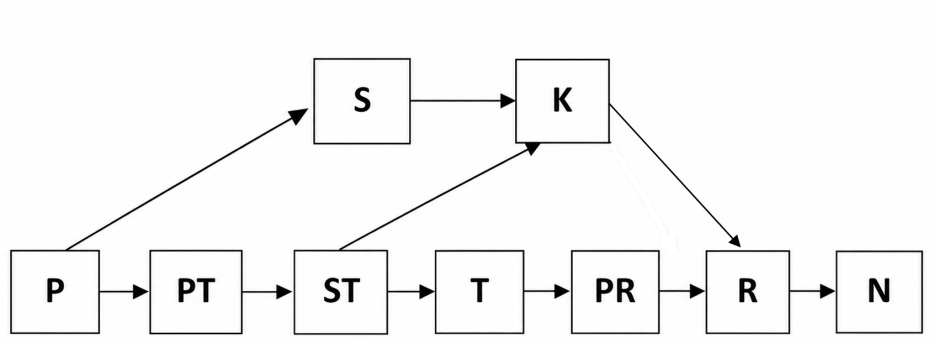
elementarni kvadrat koji se nalazi u R_n. Za dovoljno veliko $n \in N$ možemo postići da poliomina podudarna sa P koja pokriva elementarni kvadrat q_n se cela nalazi u uniji $Q_n \cup R_n$. (Dovoljno je birati da k^n bude veće od dužine duže stranice pravougaonog omotača za P). To znači da se ta poliomina mora naći u kvadratu $Q_n \cup R_n$, a kako je $P_n \cap R_n = \emptyset$, ta poliomina se cela nalazi u Q_n (vertikalna i horizontalna prava kroz A_n predstavljaju potporne prave za tu poliominu). Kako ona pokriva elementarni kvadrat q_n, a cela se nalazi u Q_n, zaključujemo da je q_n ugaoni kvadratić pravougaonog omotača za tu poliominu koja je podudarna sa P i prema pretpostavci ne sme da se nalazi u toj kopiji od P. Kontradikcija. □

Teorema 3.5. *Ako poliomina popločava skaliranu (uvećanu) verziju sebe može da poploča kvadrant.*

Dokaz. Prema teoremi 3.4, bar jedan ugaoni kvadratić pravougaonog omotača rep-poliomine pripada toj rep-poliomini. Pretpostavimo da je P rep-poliomina. Neka je S skup svih fiksiranih poliomina podudarnih poliomini P koje su sadržane u uglu prvog kvadranta. S je neprazan i konačan. Neprazan je zbog teoreme 3.4. Konačan je jer da bismo ga dobili koristimo grupu simetrija kvadrata, te možemo dobiti najviše 8 elemenata u S. Neka je $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ za neki prirodan broj n. Krenimo od bilo kojeg elementa iz S, na primer od s_1. Pošto je P rep-pločica, s_1 je moguće popločati umanjenim poliominama dobijenih od P u odnosu na određeni faktor umanjenja. Ovom podelom dobijamo u delu uz koordinati početak neki od elemenata iz S, na primer s_i. Imaćemo $s_1 \to s_i$. Ponovimo isti postupak za s_i i na taj način dobijemo da postoji poliomina s_j koja je smeštena u odgovarajućem uglu uz koordinatni početak. Tako dolazimo do niza $s_1 \to s_i \to s_j$. Ponavljanjem ovog procesa, kako je S konačan skup mora se desiti da se neka fiksirana poliomina pojavi dva puta u nizu. Neka je to niz $s_i \to s_j \to \cdots \to s_i$ dužine l. I sada krenimo obrnutim redosledom, odnosno krenimo od najmanje poliomine ka većima. Najmanjim poliominama iz l-tog koraka popločamo uvećanu verziju iz prvog koraka ovog niza. Neka je ona veća k puta. Time je popločan deo kvadranta i ovakvu figuru nazovimo sa $F(l)$. Zatim, na isti način, figurama podudarnim $F(l)$ popločamo figuru čija je veličina k puta veća od veličine figure $F(l)$, pri čemu ta figura ima isti raspored jediničnih kvadrata kao s_i. Svaka iteracija ovog procesa će popločavati veći i veći deo kvadranta. Stoga kako proces teži beskonačnosti, prvi kvadrant će biti popločan.

□

Teoreme 3.1 – 3.5 u potpunosti uspostavljaju hijerarhiju popločavanja poliominama. Na slici 10 možemo videti dijagram koji predstavlja ovu hijerarhiju.



Slika 10. Golombova hijerarhija popločavanja poliominama

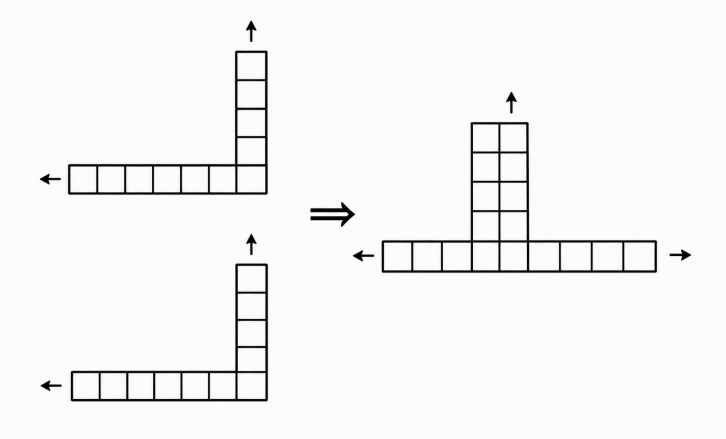
3.2 Liuovo proširenje hijerarhije

Prema klasifikaciji koju je uveo A. Liu [8], razgranata traka predstavlja traku sa drugom polutrakom koja se od nje grana, dok ukrštena traka predstavlja dve trake koje se međusobno ukrštaju. One se u koordinatnom sistemu mogu reprezentovati sledećim skupovima:

- (UT) Ukrštena traka: $\{(x,y)| -\infty < x < \infty \text{ i } 0 \leq y \leq a\} \bigcup$ $\{(x,y)|0 \leq x \leq b \text{ i } -\infty < y < \infty\}$,
- (RT) Razgranata traka: $\{(x,y)| -\infty < x < \infty \text{ i } 0 \leq y \leq a\} \bigcup \{(x,y)|0 \leq x < b \text{ i } a \leq y\}$.

Teorema 3.6. $(ST) \Rightarrow (RT)$

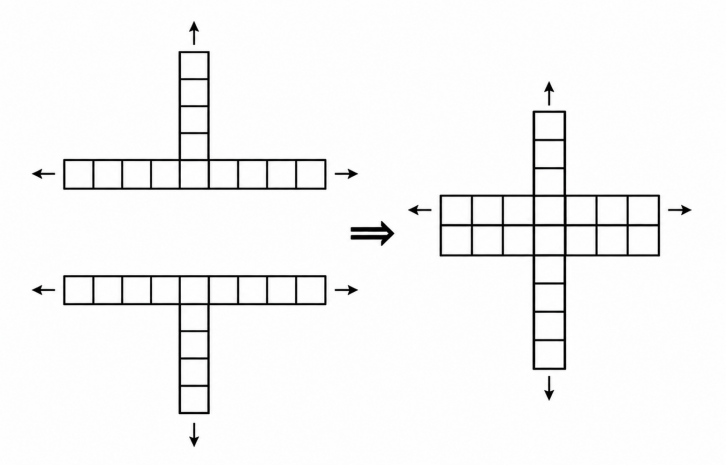
Dokaz. Pretpostavimo da poliomina P popločava savijenu traku (ST). Uzmimo još jednu traku njoj podudarnu, zarotiramo je za 90^o i postavimo tako da jedan krak bude nastavak drugog kraka prve trake. Na slici 11 je prikazan način spajanja savijenih traka i u strelice koje označavaju da se trake nastavljaju u naznačenim pravcima. Pošto po pretpostavci poliomina P može popločati obe trake, onda može popločati i njihovu uniju koja predstavlja (RT). □



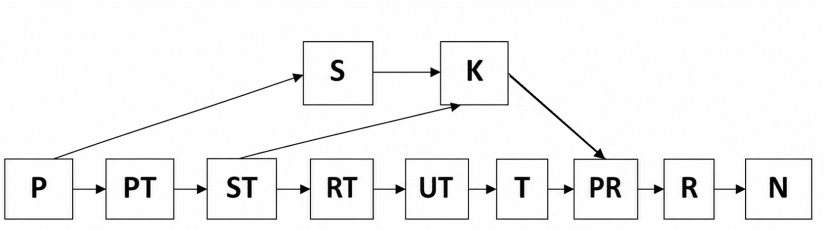
Slika 11. Šematski prikaz spajanja dve savijene trake koje čine razgranatu traku.

Teorema 3.7. $(RT) \Rightarrow (UT)$

Dokaz. Pretpostavimo da poliomina P popločava razgranatu traku (RT). Ako konstruišemo jednu njoj podudarnu razgranatu taku koju pritom zarotiramo za 180^o i postavimo je tako da se njihove horizontalne grane spoje dobijemo par ukrštenih traka (slika 12). Pošto je prema pretpostavci moguće popločavanje date (RT) i svih njoj podudarnih traka, a unijom istih dobijamo (UT), onda zaključujemo da poliomina P popločava i (UT). □



Slika 12. Šematski prikaz spajanja dve razgranate trake koje čine ukrštenu traku



Slika 13. Luiovo proširenje hijerarhije

3.3 Karakteristični primeri

S obzirom da možemo da klasifikujemo poliomine u zavisnosti od figura koje popločavaju, mi ih delimo na klase. Na slici 10 je prikazan dijagram sa implikacijama koje nam govore da ako znamo da neka poliomina popločava određenu figuru, onda popločava i sve figure koje slede iz nje na datom dijagramu. Prirodno se postavlja pitanje da li obrnute implikacije važe, odnosno da li se ove klase mogu poistovetiti ili se moraju odvojiti jedna od druge. U nastavku ćemo se baviti karakterističnim primerima koji pokazuju da se određene klase razlikuju. Naredna tri primera su preuzeta iz [5].

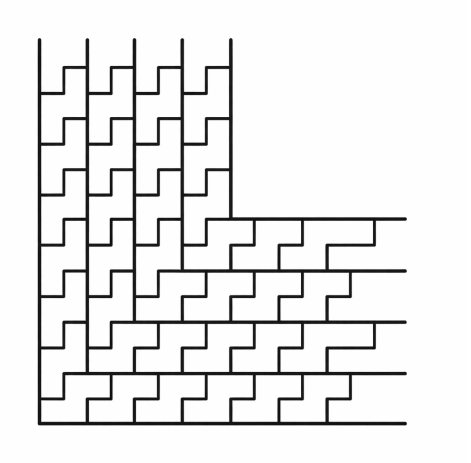
Primer 3.1. *Karakterističan nivo za popločavanje Z-tetrominom je savijena traka. To popločavanje prikazano je na slici 14a. Ukoliko pretpostavimo da Z-tetromina ne pripada ovoj klasi onda bi ona popločavala polutraku. Međutim, jasno je da ova tetromina ne može da poploča ceo prostor do konačne ivice traku pokrivajući oba ugla (slika 14b).*

Teorema 3.8. *Ne važi* $(ST) \Rightarrow (PT)$.

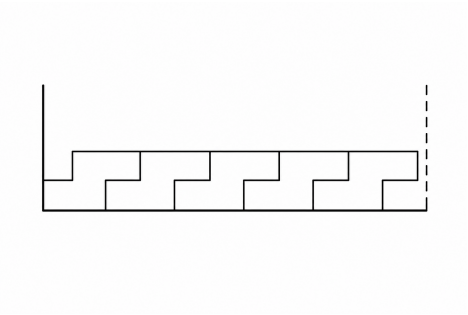
Dokaz. *Primer 3.1 nam prikazuje poliominu koja popločava savijenu traku, ali ne i polutraku.* □

Primer 3.2. *F-pentomina, prikazana na slici 15a, popločava traku, ali ne može da poploča ni kvadrant ni savijenu traku. Međutim, na slici 15b vidimo da, ako je F-pentomina postavljena tako da leži u uglu kvadranta, dobijamo jedinični kvadrat (na slici 15b obeležen sa X) koji ne možemo popločati ni jednom fiksiranom F-pentominom tako da pri tome ne popločamo i deo ravni van kvadranta. Sličan problem se javlja i pri pokušaju popločavanja savijene trake, jer se u okolini njenog ruba pojavljuje deo koji se ne može popločati, a da ne izađe izvan savijene trake. Prema tome, F-pentomina ne može da poploča ni kvadrant, ni savijenu traku.*

Teorema 3.9. *Ne važi* $(T) \Rightarrow (ST)$.

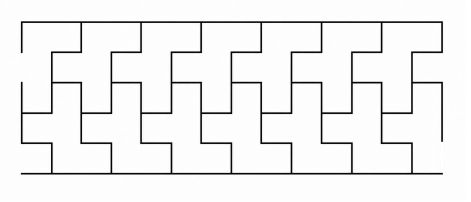


(a) Z-tetromina popločava savijenu traku, a popločavanje savijene trake implicira popločavanje kvadranta

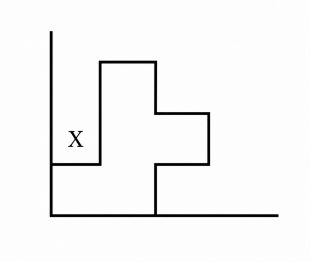


(b) Prikaz Z-tetromine i trake

Slika 14. Klasa Z-tetromine je klasa savijene trake



(a) F-pentomina popločava traku



(b) F-pentomina dodiruje ugao, ali ne može da popuni ostatak dela do ivice

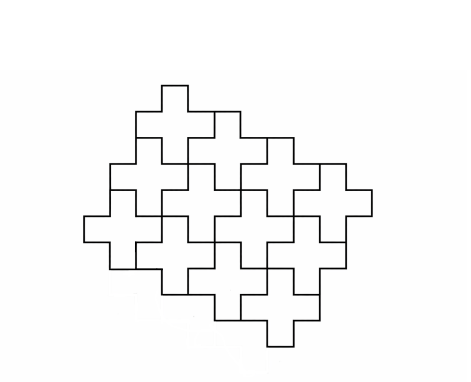
Slika 15. Popločavanje F-pentominom

Dokaz. Dokaz ove teoreme proizilazi direktno iz kontraprimera 3.2. □

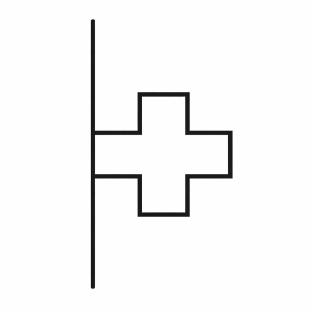
Primer 3.3. *X-pentomina, prikazana na slici 16a popločava celu ravan. Međutim, jasno je da ne može popločati poluravan jer ako se postavi tako da je strana jednog njenog jediničnog kvadrata leži na pravoj koja određuje poluravan (slika 16b), onda nastaju dva jedinična kvadrata koja ne mogu biti pokrivena.*

Teorema 3.10. *Ne važi* $(R) \Rightarrow (PR)$.

Dokaz. Dokaz ove teoreme proizilazi direktno iz kontraprimera 3.3. □



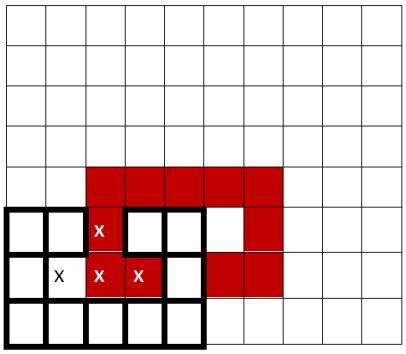
(a) X-pentomina popločava ravan



(b) X-pentomina dodiruje ivicu, ali stvara dva nepristupačna kvadrata

Slika 16. Popločavanje X-pentominom

Primer 3.4. *Jedan od karakterističnih primera klase (N) je poliomina prikazana na slici 17. Jasno je da popločavanjem neophodno pokriti četiri naznačena kvadrata, ali to je nemoguće zbog samog oblika poliomine. Naime, uvek ostane bar jedan kvadrat koji nije popločan. Stoga, ova poliomina ne popločava ravan. Treba imati u vidu da postoje i poliomine koje sadrže i manji broj kvadrata koje pripadaju ovoj klasi.*



Slika 17. Poliomina klase (N)

Do sada nisu pronađeni potvrđeni primeri koji su karakteristični za bilo koju od drugih klasa: (PR), (K), (T), (PT) i (S). S druge strane, svi poznati primeri rep-pločica pripadaju klasi (P). Možda zaista važi da ako je poliomina rep-pločica, onda ona nužno popločava pravougaonik, ali to je još uvek otvoreno pitanje za dvodimenzionalni prostor. Hochberg i Reid [7] su pokazali da u svim dimenzijama većim od 2 postoje polikubovi koji su rep-pločice,

ali ne popločavaju nijedan pravougaonik (analog pravougaoniku u 3D je pravougaona prizma). O tome ćemo više u poglavlju 5. Za dvodimenzionalni prostor važi da iako sama konstrukcija rep-pločice ne mora obuhvatiti pravougaonik, kao što se vidi u primeru 2.3, na slici 9, uočimo da P-pentomina ipak popločava pravougaonik (slika 18).

Slika 18. P-pentomina popločava pravougaonik

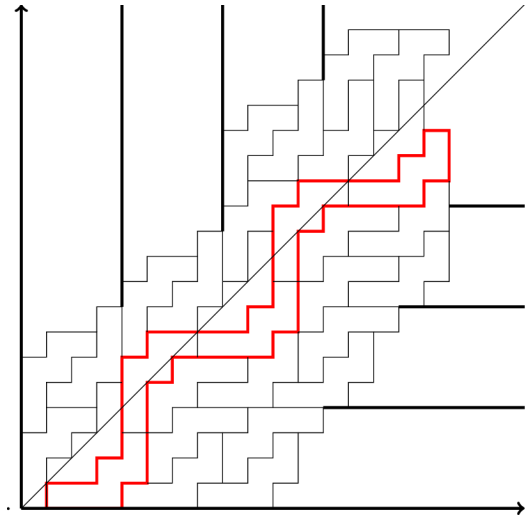
U okviru proučavanja karakterističnih primera poliomina za popločavanje polutrake, nijedan primer do sada nije konačno potvrđen kao poliomina koja popločava polutraku, ali ne popločava pravougaonik. Golomb i Reid razmatrali su moguće primere ove klase, ali za razmatrane poliomine nije konačno utvrđeno da ne mogu popločati odgovarajući pravougaonik. Zbog toga njihova uloga kao karakterističnih primera ostaje nepotvrđena.

Jedan od primera koji je Golomb razmatrao jeste W-heksomina (korišćena u popločavanju na slici 19). U njegovoj klasifikaciji [5] ova heksomina navedena je kao primer poliomine koja karakteristično popločava traku.

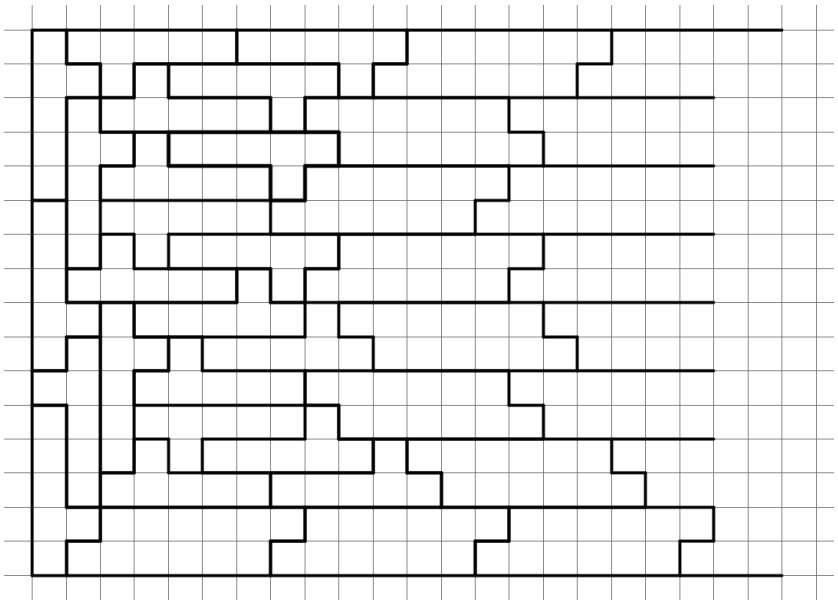
Međutim, Michael Saxton je 2015. godine [14] prikazao popločavanje kvadranta pomoću iste heksomine. Ovaj rezultat predstavlja naknadno proširenje poznatih svojstava W-heksomine i otvara mogućnost da ona bude karakterističan primer i za kvadrant i za traku. Pri tome, samo postojanje popločavanja kvadranta ne predstavlja konačan dokaz da ta poliomina pripada klasi kvadranta, već je potrebno utvrditi da li W-heksomina može popločati odgovarajuće pravougaonike.

Popločavanje koje je prikazao Saxton (slika 19) poseduje i posebnu strukturnu osobinu. Duž regiona označenog crvenom bojom uočava se klizna simetrija. Druga kolona može se dobiti iz prvog reda odgovarajućom rotacionom transformacijom, dok se analogna relacija nastavlja između narednih kolona i redova. Ova pravilnost omogućava periodično proširivanje konstrukcije na ceo kvadrant.

Golomb je kao potencijalnog kandidata za klasu (PT) razmatrao i Y-heksominu. Poznato je da Y-heksomina može popločati polutraku širine 16 (slika 20). U odgovarajućoj konstrukciji, obrazac se periodično ponavlja, pri čemu figura sastavljena od dve Y-heksomine predstavlja osnovnu jedinicu ponavljanja. Međutim, mogućnost da Y-heksomina popločava i neki pravou-



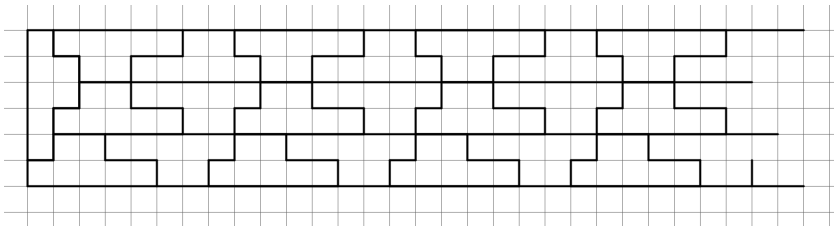
Slika 19. W-heksomina popločava kvadrant



Slika 20. Y-heksomina popločava polutraku

gaonik nije isključena. Do sada nisu pronađene konstrukcije kojima bi takvo pravougaono popločavanje bilo ostvareno, ali nepostojanje pronađenog primera ne predstavlja dokaz da takvo popločavanje nije moguće. [5]

Još jedan primer koji je Golomb razmatrao jeste heptomina koja popločava polutraku širine 6 na jedinstven način (slika 21). Na osnovu jedinstvenosti ovog popločavanja zaključuje se da data heptomina ne može popločati nije-



Slika 21. Heptomina popločava polutraku

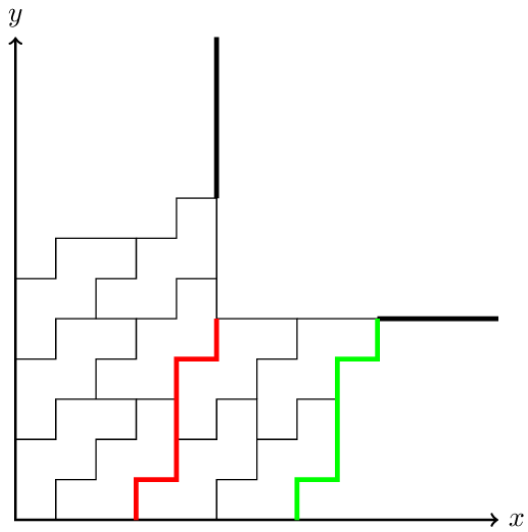
dan pravougaonik širine 6 [6]. Međutim, nije pokazano da ova heptomina, kao ni bilo koja druga poliomina za koju je poznato da popločava polutraku, ne može popločati pravougaonik proizvoljne širine. Stoga se navedeni rezultat odnosi konkretno na pravougaonike širine 6, dok mogućnost popločavanja pravougaonika drugih širina ostaje otvoreno pitanje.

Na osnovu navedenih rezultata, ostaje otvoreno pitanje karakterizacije preostalih nivoa u hijerarhiji. Jedan od pravaca daljeg istraživanja jeste utvrđivanje da li za svaki od tih nivoa postoji karakterističan primer, odnosno poliomina koja pripada datoj klasi, ali ne pripada klasi iz koje sledi pripadnost datoj klasi. Drugi pravac jeste ispitivanje mogućnosti redukcije hijerarhije, odnosno utvrđivanje da li se pojedini nivoi mogu izostaviti ukoliko se pokaže da između odgovarajućih klasa ne postoji logički relevantna razlika u pogledu mogućnosti popločavanja. Rezultati takvih istraživanja mogli bi doprineti potpunijem određivanju strukture hijerarhije i odnosa između različitih tipova popločavanja polio minama.

Jedno od centralnih pitanja jeste da li je moguće algoritamski odrediti da li data poliomina može popločati određenu figuru. Ovaj problem postaje sve složeniji sa povećanjem broja kvadrata koji čine poliominu (što će biti detaljnije obuhvaćeno u narednom poglavlju) i uključivanjem rotacija i simetrija u analizama.

Opšti problem klasifikacije bilo koje poliomine prema njenim svojstvima popločavanja logički je nerešiv. To znači da ne postoji (konačan) računski program sposoban da obavi ovu klasifikaciju za sve poliomine. Ovakav rezultat nerešivosti dobija se metodama H. Wanga i njegovih saradnika, o čemu ćemo još govoriti u narednom poglavlju. S druge strane, mnogi pojedinačni slučajevi mogu se lako rešiti, uključujući većinu jednostavnijih poliomina.

W-pentomina popločava savijenu traku (slika 22), ali nije uvek očigledno kako konstruisati konkretno popločavanje [14]. U tabeli 2 navodimo najčešće primere poliomina koji su potvrđeni. Ovi rezultati su Golombovi [5] uz izmene Saxtona [14] i Tullekena [15].



Slika 22. Savijena traka popločana W-pentominom

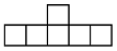
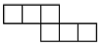
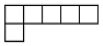
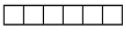
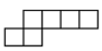
Poliomina	Klasa	Poliomina	Klasa	Poliomina	Klasa
	P		P		UT
	P		P		T
	P		P		T
	P		P		T
	P		P		Rper
	P		P		Rper
	P		P		Rper
	P		P		Rper
	ST		P		Rper
	P		P		Rper
	P		ST		Rper
	P		ST		Rper
	P		ST		Rper
	ST		ST		Rper
	ST		ST		
	RT		ST		
	RT		RT		
	Rper		RT		
	Rper		RT		
	Rper		UT		
	Rper		UT		

Tabela 2. Primeri poliomina za koje su potvrđene klase. Klasa Rper označava da postoji periodično popločavanje ravni.

4 Popločavanje skupovima poliomina

4.1 Osnovni koncepti popločavanja skupom poliomina

Popločavanje skupom poliomina podrazumeva korišćenje više različitih oblika iz skupa kako bi se popločao određen deo ravni. Za razliku od pojedinačne poliomine, gde se pločice ponavljaju jednim oblikom, skupovi omogućavaju veći stepen fleksibilnosti, ali daju i veću složenost u analizi. Jedini uslov koji mora da bude zadovoljen jeste da su jedinični kvadrati jednoznačno određeni kod poliomina u istom skupu, ali je dozvoljen proizvoljan broj jedinica određenog poliomina koji se koristi iz datog skupa (uključujući izostavljanje određenog poliomina iz skupa).

Definicija 4.1. *Neka je S protoskup koji sadrži konačno mnogo poliomina. Kažemo da S ima* ***slabo svojstvo rep-popločavanja*** *ako se svaka poliomina $P \in S$ može uvećati skaliranjem i popločati poliominama iz S. S ima* ***jako svojstvo rep-popločavanja*** *ako ispunjava slabo svojstvo rep-popločavanja i ako postoji zajednički faktor skaliranja za sve poliomine iz S.*

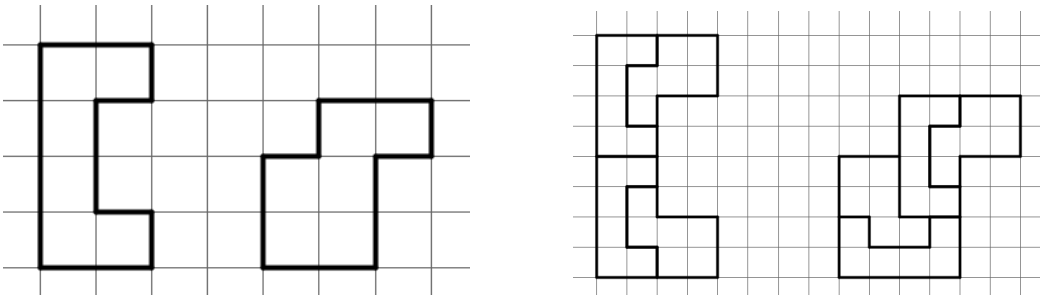
Napomena 4.1. *Za sada nisu poznati protoskupovi koji imaju slabo svojstvo rep-popločavanja, a da nemaju jako svojstvo rep-popločavanja.*

Rep-pločice su posebno zanimljive jer omogućavaju iterativno popločavanje uvećanih verzija poliomina. Ovo svojstvo čini ih pogodnim za proučavanje beskonačnih obrazaca popločavanja i povezuje se sa fraktalnim geometrijskim strukturama. Recimo, ako skup S popločava pravougaonik, taj pravougaonik može se koristiti za popločavanje kvadrata, a taj kvadrat može se koristiti za popločavanje svakog člana, poliomine, u S. Potom, ono što je analogno, te važi i u slučaju popločavanja skupom poliomina jesu teoreme 3.3 i 3.5, kao dve netrivijalne implikacije, ali ideja dokaza je ista, stoga ih sad nećemo dokazivati. Međutim, važno je napomenuti sledeće:

Napomena 4.2. *Slabo svojstvo rep-popločavanja ne mora implicirati popločavanje kvadranta.*

Napomena 4.3. *Teorema 3.3 važi i ukoliko imamo konačan protoskup poliomina, ali ne nužno i za beskonačan protoskup.*

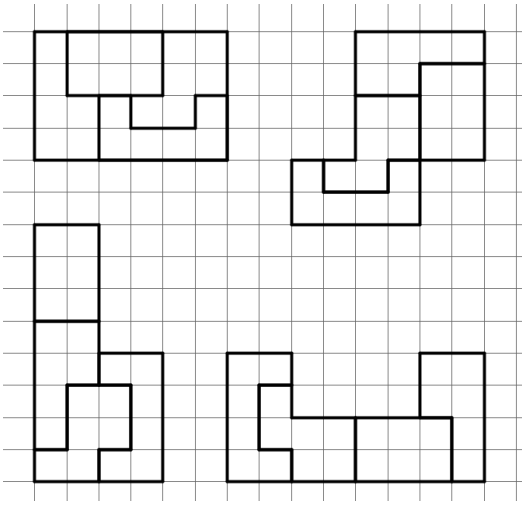
Primer 4.1. *[6] Primer skupa na slici 23a je primer za koji važi da je skup rep-poliomina. Ovaj primer je netrivijalan, jer nijedna poliomina sama po sebi ne poseduje svojstvo rep-pločica, jer prva poliomina pripada klasi (T), a druga klasi (ST) (rezultati Golomba, Saxtona i Tullekena dati u tabeli 2), ali kad ih posmatramo kao skup, vidimo na slici 23b da formiraju odgovarajuće rep-pločice. Zanimljivo je i da ovaj skup takođe može popločati i pravougaonik, kao što to može svaki skup rep-pločica pronađen do sada.*



(a) Skup rep-pločica (b) Rep-pločice

Slika 23. Skup koji obrazuje rep-pločice, ali pojedinačni elementi skupa nisu rep-pločice

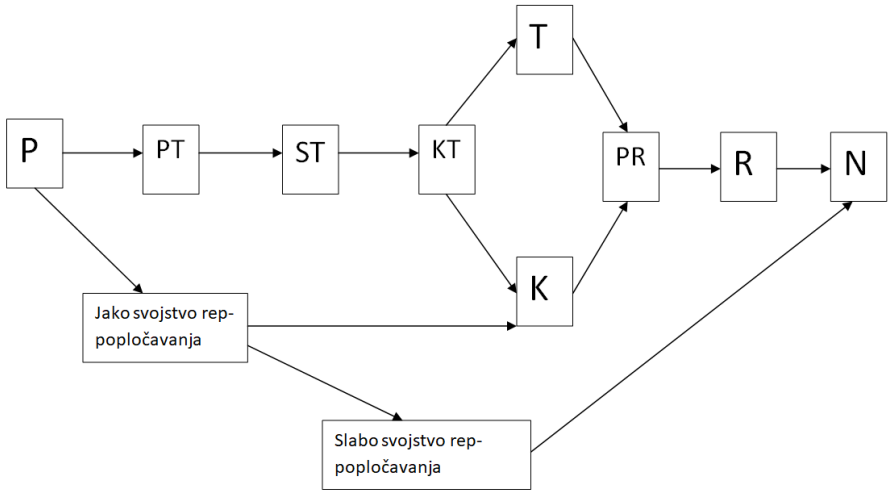
Protoskup poliomina ima svojstvo regularnog skupa rep-pločica sa indeksom k ako se pri replikaciji svake poliomine iz protoskupa svaka različita poliomina iz tog protoskupa pojavljuje tačno k puta. Primer sa indeksom $k = 1$, koji uključuje četiri različite heksomine, prikazan je na slici 24.



Slika 24. Protoskup koji ima svojstvo regularnog skupa rep-pločica

4.2 Golombova hijerarhija za protoskupove

Hijerarhija popločavanja, definisana za pojedinačne poliomine, može se proširiti na skupove poliomina (slika 25). Glavni nivoi hijerarhije uključuju, kao i kod pojedinačnih poliomina: (P), (T), (PT), (ST), (K), (PR), (R), (N), ali pored toga i klasu (KT) koja se odnosi na mogućnost da poliomina može da poploča i kvadrant i traku, potom jako svojstvo rep-popločavanja



Slika 25. Hijerarhija popločavanja protoskupovima

i slabo svojstvo rep-popločavanja. Razlika hijerarhije za protoskupove u odnosu na hijerahiju za pojedinačne poliomine sastoji se u tome da se umesto klase (S), uvodi klasa jakog i klasa slabog svojstva rep-popločavanja na osnovu definicije 4.1, kao i uopštenje za pojedinačne klase (K) i (T) koje sada proizilaze iz klase (KT).[2]

Teorema 4.1. *Neka je $S = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ konačan protoskup poliomina. Ako protoskup S popločava neki pravougaonik, tada S poseduje svojstvo jakog rep-popločavanja.*

Dokaz. Pretpostavimo da protoskup S popločava pravougaonik dimenzija $a \times b$, gde su a i b prirodni brojevi. Označimo taj pravougaonik sa R. To znači da postoji popločavanje pravougaonika R podudarnim poliominama iz skupa S, pri čemu sve pločice imaju isti faktor skaliranja. Određenim skupom podudarnih pravougaonika R možemo popločati kvadrat. U jednom redu rasporedimo b pravougaonika podudarnih pravougaoniku R, a zatim formiramo a takvih redova. Na taj način dobijamo kvadrat $ab \times ab$. Dakle, kvadrat čija je stranica ab može se popločati sa ukupno ab pravougaonika koji su podudarni sa R. Pošto se svaki od tih pravougaonika R može popločati članovima skupa S, sledi da se kvadrat dimenzija $ab \times ab$ može popločati članovima skupa S. Sada proizvoljno izaberemo član $P_i \in S$. Neka se poliomina P_i sastoji od n_i jediničnih kvadrata. Svaki taj jedinični kvadrat poliomine P_i zamenimo

[2]Golomb klasu (KT) pominje i u radu [5] iako je ne dokazuje u istom, već dokaze implikacija navodi za pojedinačne (K) i (T).

kvadratom stranice ab. Tako dobijena figura predstavlja uvećanu verziju poliomine P_i, pri čemu je faktor uvećanja jednak ab. Svaki od kvadrata kojima je konstruisana ova uvećana poliomina može se popločati članovima skupa S, jer se kvadrat dimenzije $ab \times ab$ može popločati članovima skupa S. Prema tome, uvećana poliomina P_i, može se popločati članovima skupa S. Pošto je P_i bio proizvoljno izabran član skupa S, zaključujemo da se svaki član skupa S može popločati članovima skupa S tako da je faktor uvećanja isti za sve članove skupa. Taj zajednički faktor je ab. Prema tome, protoskup S poseduje svojstvo jakog rep-popločavanja.

□

Napomena 4.4. *U dokazu prethodne teoreme ako je $ab = 1$, tada je $a = b = 1$, pa je u pitanju monomina. U tom posebnom slučaju zaključak je neposredan, jer monomina može popločati svaku svoju uvećanu verziju. Za $ab > 1$ dobija se faktor uvećanja strogo veći od 1.*

Lema 4.1. *Neka je $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ konačan protoskup poliomina sa jakim svojstvom rep-popločavanja i neka je $k > 1$ zajednički faktor skaliranja. Tada za svako $P \in S$ postoji beskonačan niz popločavanja $T_0, T_1, T_2, \ldots$ takav da:*
1. $T_0 = \{P\}$,
2. za svako $n \geq 1$, T_n je popločavanje skalirane poliomine $k^n P$ poliominama iz skupa S,
3. T_{i+1} se dobija od T_i tako što se najpre svaki element popločavanja T_i skalira faktorom k, a zatim se svaka tako dobijena poliomina zameni jednim njenim rep-popločavanjem poliominama iz S.

Dokaz. Fiksirajmo proizvoljnu poliominu $P \in S$. Za dokaz koristimo indukciju. Prema 1. iz formulacije leme imamo $T_0 = P$. Skaliranjem poliomine P faktorom k dobijamo poliominu kP. Pošto protoskup S ima jako svojstvo rep-popločavanja, poliomina kP može se popločati poliominama iz skupa S. To popločavanje označimo sa T_1. Tada je T_1 popločavanje poliomine $kP = k^1 P$ poliominama iz skupa S.
Pretpostavimo da za neko $n \geq 1$ postoji popločavanje T_n poliomine $k^n P$ poliominama iz skupa S. Dokažimo sada da tvrđenje važi i za $n + 1$. Posmatrajmo popločavanje T_n. Prema 3., svaki element popločavanja T_n najpre skaliramo faktorom k. Dobijamo popločavanje kT_n. Pošto T_n popločava poliominu $k^n P$, nakon skaliranja svih njenih elemenata faktorom k, popločavanje kT_n popločava poliominu $k(k^n P) = k^{n+1} P$. Sada, zbog jakog svojstva rep-popločavanja protoskupa S, svaka poliomina dobijena skaliranjem elemenata T_n može se popločati poliominama iz skupa S. Zamenom svake takve poliomine odgovarajućim rep-popločavanjem dobijamo novo popločavanje T_{n+1}.

Pošto se svaka skalirana poliomina popločava unutar iste figure, figura koju popločava T_{n+1} jednaka je figuri koju popločava kT_n. Prema tome, T_{n+1} je popločavanje poliomine $k^{n+1}P$ poliominama iz skupa S. Time je dokaz završen.

□

Golomb u svom radu [6] navodi da implikacija koja vodi od skupa sa jakim svojstvom rep-popločavanja ka popločavanju kvadranta važi jer je uopštenje slučaja popločavanja jednom rep-pločicom. Lema 4.1 pokazuje prvi deo ovog uopštenja: iz jakog svojstva rep-popločavanja sledi postojanje beskonačnog niza uzastopnih profinjenja popločavanja, pri čemu se u svakom koraku poliomine skaliraju sa istim faktorom, a zatim zamenjuju svojim rep-popločavanjem.

Međutim, iz same činjenice da postoji ovakav beskonačan niz profinjenja popločavanja ne sledi neposredno popločavanje kvadranta. U dokazu za pojedinačnu poliominu ključnu ulogu ima uslov da je svaka rep-pločica sadrži bar jedan ugaoni kvadratić svog pravougaonog omotača, odnosno da se kroz uzastopna rep-popločavanja očuvava odgovarajuća konfiguracija u uglu kvadranta.

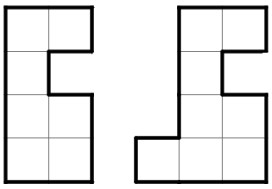
Kod skupa poliomina sa jakim svojstvom rep-popločavanja definicija sama po sebi ne obezbeđuje takvu osobinu. Iako lema 4.1 daje beskonačan niz profinjenja, nije neposredno pokazano da se mogu odabrati rep-popločavanja u svim skaliranjima tako da se kroz ceo niz očuvava ista geometrijska struktura potrebna za konstrukciju kvadranta. Stoga je ovaj korak u konstrukciji neophodan da bi se uz pomoć leme 4.1 dovelo do popločavanja kvadranta. U dostupnom Golombovom materijalu ovaj korak nije razrađen, dok kasniji radovi, poput [10, 11], reprodukuju Golombovu hijerarhiju, ali ne pružaju dokaz ove implikacije.

4.3 Karakteristični primeri

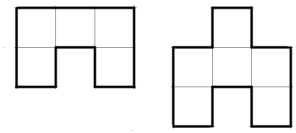
U prethodnom poglavlju su dati karakteristični primeri individualnih poliomina za pojedine klase. Sada ćemo prikazati karakteristične primere za klase „Poluravan", „Kvadrant", „Traka" i „Polutraka" u hijerarhiji.

Primer 4.2. *Koristeći skup od dve poliomine prikazane na slici 26a može se popločati kvadrant (slika 27a), ali se ne može popločati traka, pa ovaj skup ne pripada klasi (KT), dok skup poliomina prikazanih na slici 26b može popločati polutraku (slika 27b), ali ne može popločati pravougaonik [6].*

Primer 4.3. *Sada uz pomoć skupa od dve poliomine prikazane na slici 28a može se popločati poluravan (slika 29a), ali ne može popločati ni kvadrant ni*

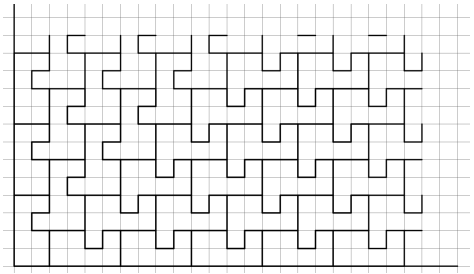


(a) Skup poliomina koji popločava kvadrant

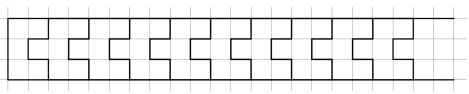


(b) Skup poliomina koji popločava polutraku

Slika 26. Skupovi od dve poliomine



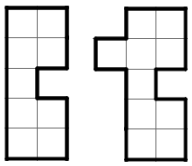
(a) Kvadrant popločan skupom poliomina prikazanih na 26a



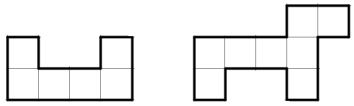
(b) Polutraka popločana skupom poliomina prikazanih na 26b

Slika 27. Popločavanje kvadranta i polutrake

traku jer te poliomina zbog uklapanja ostavljaju nepopunjene jedinične kvadrate u uglu kvadranta, kao i duž jedne prave koja određuje traku [6]. Skup poliomina prikazanih na slici 28b može popločati kvadrant (slika 29b) i traku. Za dati primer koji popločava kvadrant i traku važi da popločavanje savijene trake nije moguće [6], a čak je jedna od te dve poliomine iz skupa je dovoljna za popločavanje trake (slika 29c).

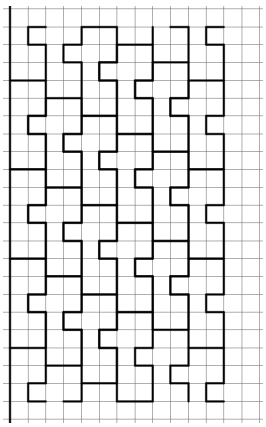


(a) Skup koji popločava poluravan

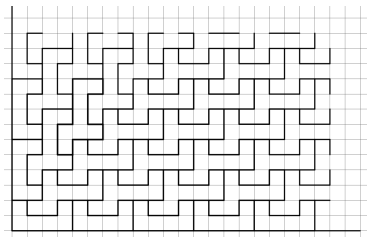


(b) Skup koji popločava kvadrant i traku

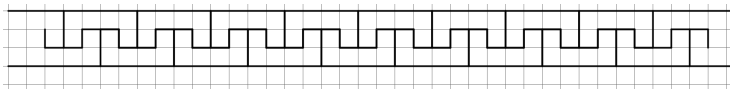
Slika 28. Skupovi od dve poliomine



(a) Poluravan popločana skupom poliomina prikazanih na 28a



(b) Kvadrant popločan skupom poliomina prikazanih na 28b



(c) Traka popločana skupom poliomina prikazanih na 28b

Slika 29. Kategorija poluravan i kategorija kvadrant i traka

4.4 Problemi popločavanja ravni i Wangove pločice

Posebnu ulogu u razvoju problema popločavanja ravni imaju tzv. Wangove pločice, koje je uveo Hao Wang početkom šezdesetih godina XX veka, u kontekstu proučavanja odlučivanja u predikatskoj logici. Ovi problemi imaju izuzetnu teorijsku važnost jer uspostavljaju direktnu vezu između geometrijskih konstrukcija, formalne logike i teorije Tjuringovih mašina. U nastavku uvodimo formalnu definiciju Wangovih pločica i popločavanja ravni, zasnovanu na opisnoj definiciji koju je dao Wang[16].

Definicija 4.2. *Neka je C unapred definisan konačan skup boja. Wangova pločica se definiše kao uređena četvorka*

$$t = (c_N, c_E, c_S, c_W),$$

gde komponenete $c_N, c_E, c_S, c_W \in C$ označavaju redom boje gornje, desne, donje i leve ivice pločice.

Dakle, Wangova pločica se geometrijski interpretira kao fiksiran jedinični kvadrat, čije su četiri ivice obojene iz skupa C.

Definicija 4.3. *Neka je $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ konačan skup Wangovih pločica. Popločavanje ravni skupom Wangovih pločica jeste funkcija*

$$f : \mathbb{Z}^2 \to T$$

koja svakom čvoru dvodimenzionalne celobrojne mreže dodeljuje jednu pločicu iz skupa T, pri čemu važi uslov podudaranja boja susednih ivica. Za svako $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ mora važiti:

$$c_E(f(i, j)) = c_W(f(i + 1, j))$$

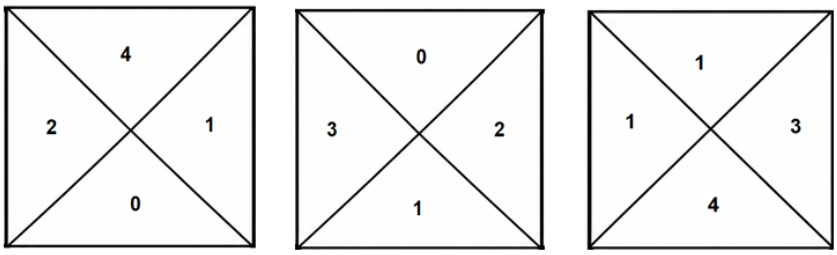
i

$$c_N(f(i, j)) = c_S(f(i, j + 1))$$

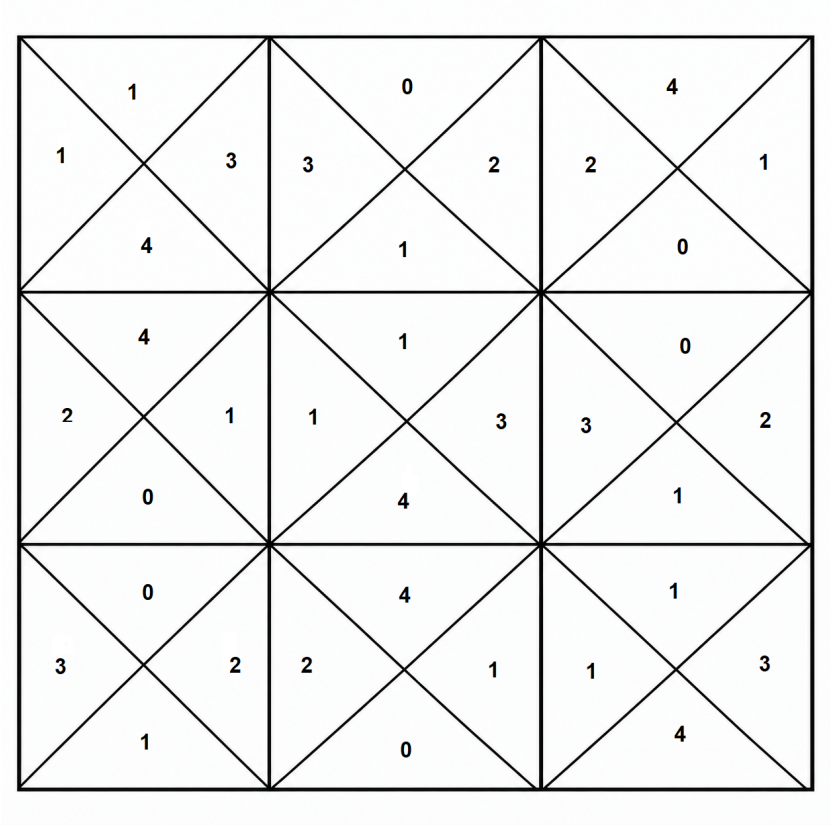
gde c_N,c_E,c_S,c_W označavaju boje odgovarajućih ivica.

Drugim rečima, boje susednih stranica dve susedne pločice moraju biti jednake. Pretpostavlja se da je za svaku pločicu $t_i \in T$ na raspolaganju beskonačno mnogo pločica koje su podudarne pločici $t_i \in T$. Pločice se mogu pomerati translacijom, dok rotacija i simetrija nisu dozvoljene.

Primer 4.4. *Na slici 30 uočavamo tri Wangove pločice gde različiti brojevi označavaju različite boje. Kako se pločice pomeraju isključivo translacijom, jer rotacija i simetrija nisu dozvoljene, primetimo da slaganje pločica nije*



Slika 30. Primeri Wangovih pločica na kojima različiti brojevi označavaju različite boje



Slika 31. Prikaz složenih Wangovih pločica sa slike 30

moguće u rasporedu koji je prikazan na toj slici. Naime, prva među njima treba da stoji s desne strane pločice koja je druga u nizu ili sa leve strane treće pločice. Pritom, drugu pločicu je moguće postaviti i sa desne strane treće pločice. Ako posmatramo vertikalno slaganje ove tri pločice primetimo da druga pločica može da se postavi ispod prve,a treća ispod druge i iznad prve pločice kako bi boje na susednim ivicama bile iste. Jedno moguće slaganje ovih Wangovih pločica prikazano je na slici 31.

Centralno pitanje koje se postavlja jeste da li dati konačan skup Wangovih pločica može popločati celu ravan. Ovo se može posmatrati kao pitanje da li postoji algoritam koji za svaki konačan skup Wangovih pločica odlučuje da li on popločava ravan ili ne. Ovakvom tematikom se bavi teorija algoritama, te nećemo ulaziti u detalje, ali ćemo kratko predstaviti suštinske stvari. Kažemo da je problem odlučiv ako postoji algoritam koji će za svaki mogući unos dati potvrdan ili odričan odgovor i nakon toga se sigurno zaustaviti. Problem je neodlučiv ako je dokazano da ne postoji algoritam koji može dati tačan „da/ne“ odgovor za svaki mogući slučaj. Iako je Wang postavio hipotezu (1961) da je problem popločavanja ravni konačnim brojem Wangovih pločica odlučiv, Berger [2] je 1966. dokazao suprotno. U okviru svog dokaza, Berger je konstruisao i prvi poznati konačan aperiodičan skup Wangovih pločica, odnosno skup koji popločava ravan, ali ne dopušta nijedno periodično popločavanje. Na taj način Bergerov rezultat povezuje dva važna fenomena u teoriji popločavanja: neodlučivost problema postojanja popločavanja i postojanje popločavanja bez translacione periodičnosti.

Protoskup poliomina i skup Wangovih pločica predstavljaju dva različita načina formulacije problema popločavanja ravni. Protoskupovi poliomina i skupovi Wangovih pločica predstavljaju dva različita modela za formulaciju problema popločavanja ravni. Kod protoskupova poliomina osnovni objekti su geometrijske figure sastavljene od jediničnih kvadrata, pri čemu mogućnost njihovog međusobnog uklapanja proizlazi iz njihovog oblika i dozvoljenih izometrija. Kod Wangovih pločica sve pločice imaju isti geometrijski oblik, odnosno oblik jediničnog kvadrata, dok se informacije o dozvoljenom susedstvu eksplicitno zadaju bojama njihovih ivica. Stoga se jedan problem popločavanja može, odgovarajućom konstrukcijom, prevesti u drugi problem popločavanja. Pod prevođenjem, odnosno kodiranjem jednog problema popločavanja na drugi, podrazumeva se konstrukcija kojom se instance jednog problema preslikavaju u instance drugog problema tako da se očuva pitanje postojanja popločavanja. Preciznije, neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dva problema popločavanja. Kažemo da se problem $\mathcal{A}$ može svesti na problem $\mathcal{B}$ ako postoji konstruisano preslikavanje

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

takvo da za svaku instancu A problema $\mathcal{A}$ važi

$$A \text{ ima popločavanje} \iff F(A) \text{ ima popločavanje.}$$

Na ovaj način rešavanje problema $\mathcal{B}$ omogućava rešavanje problema $\mathcal{A}$.

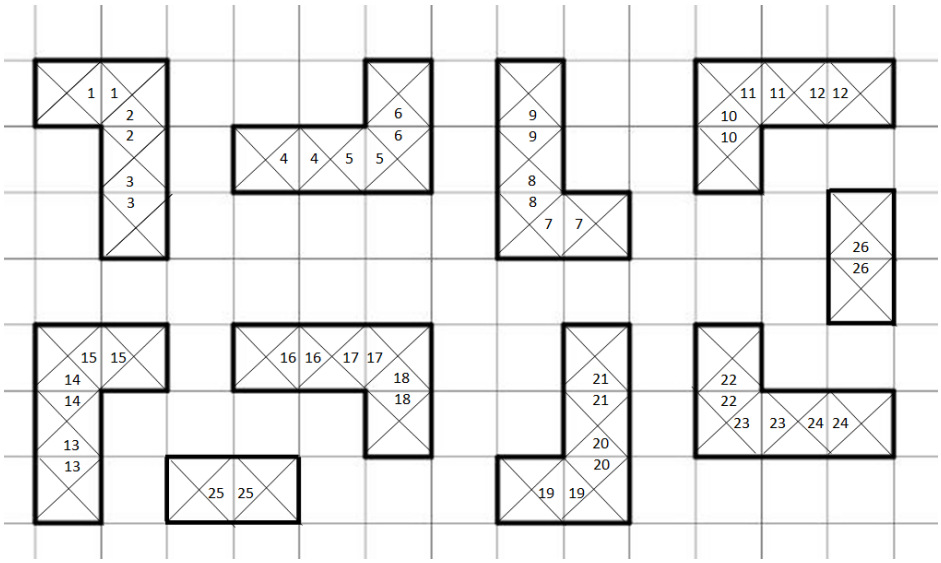
Kod problema popločavanja važno je da se kodiranje ne zasniva nužno na preslikavanju jedne pločice u jednu pločicu. Jedan objekat početnog sistema može biti predstavljen odgovarajućom makropločicom, odnosno konačnim blokom pločica u novom sistemu. Unutar takvog bloka lokalni uslovi treba da obezbede da se on ponaša kao jedna pločica početnog sistema. Istovremeno, boje na spoljašnjim ivicama makropločice nose informacije potrebne za njeno povezivanje sa susednim makropločicama. Na taj način, pri kodiranju, se nastoji da se ispune dve osnovne osobine. Prvo, svako popločavanje početnog sistema treba da može da se prevede u popločavanje novim pločicama. Drugo, iz svakog popločavanja novog sistema treba da bude moguće rekonstruisati odgovarajuće popločavanje početnog sistema, odnosno izdvojiti strukturu koja odgovara makropločicama. Time se uspostavlja korespondencija između rešenja dva problema.

Primer 4.5. *Konkretan način kodiranja može se videti na primeru prevođenja problema popločavanja poliominama u problem popločavanja Wangovim pločicama.* [3] *Polazi se od konačnog skupa poliomina i najpre se razmatraju sve poliomine, dobijene izometrijskim transformacijama koje su dozvoljene u početnom problemu. Posmatrajmo skup od dve poliomine: L-tetromine i domine. Zatim se svaka poliomina razdvaja na jedinične kvadrate. Svakoj spoljašnjoj stranici* [4] *dodeljuje se ista, posebna boja, dok se svakoj unutrašnjoj stranici ćelije, koja je zajednička za dva jedinična kvadrata iste poliomine, dodeljuje posebna boja. Na taj način se unutrašnja susedstva između kvadrata jedne poliomine kodiraju bojama. Za pomenuti skup je dodeljivanje boja predstavljeno na slici 32 s tim da je svaka boja označena brojem. Dobijeni obojeni jedinični kvadrati posmatraju se kao Wangove pločice, pri čemu su kod popločavanja ravni su dozvoljene samo translacije. Postavljanje jednog takvog kvadrata određuje koje pločice mogu biti postavljene uz njega, a odgovarajuća kombinacija boja uzrokuje da se na kraju formira upravo poliomina*

[3] U literaturi [6] se često spominje pojam Makmahonovi kvadrati koji su preteča Wangovih pločica. Naime, MakMahonov rad je inspirisao i postavio temelje za koncept koji je Wang kasnije formalizovao, a ključna razlika je što za Wangove pločice u odnosu na Makmahonove kvadrate nisu dozvoljene rotacije i simetrije.

[4] Spoljašnja stranica je stranica koja nije zajednička za dva jedinična kvadrata posmatrane poliomine.

kojoj taj kvadrat pripada. Tako se popločavanje početnim poliominima može jednoznačno predstaviti popločavanjem odgovarajućim skupom Wangovih pločica. Obrnuti smer konstrukcije polazi od konačnog skupa Wangovih pločica i svakom tipu pločice pridružuje odgovarajuću poliominu, tako da se svojstvo popločavanja ravni očuva. Ideja je da se informacije sadržane u bojama ivica Wangovih pločica kodiraju geometrijskim oblikom ivica poliomina. Svakoj boji dodeljuje se različit binarni kod, a cifre tog koda određuju odgovarajuće izmene na ivicama poliomine (npr. 0 ostaje isto, 1 postoji izbočina ili udubljenje). Na taj način jednako obojene susedne ivice Wangovih pločica odgovaraju delovima ivica poliomina koji se međusobno geometrijski uklapaju.



Slika 32. Fiksirane L-tetromine i domine kojima su dodeljene boje označene brojevima

Wangove pločice predstavljaju pogodan model za proučavanje popločavanja jer razdvajaju geometrijski oblik pločice od informacija o njenim susedima, omogućavajući da se složene globalne strukture opisuju jednostavnim lokalnim uslovima. Ova osobina omogućila je povezivanje teorije popločavanja sa teorijom izračunljivosti, jer se ponašanje računarskih sistema može predstaviti pomoću lokalnih uslova između susednih pločica. Istovremeno, Wangove pločice pokazuju da konačan skup lokalnih pravila može dovesti do globalnog aperiodičnog ponašanja, zbog čega predstavljaju jedan od osnovnih modela za proučavanje aperiodičnih protoskupova. Ovaj princip je značajan i za teoriju protoskupova poliomina, jer pokazuje da složenost popločavanja može proisticati ne iz oblika ili broja pločica, već iz načina na koji su lokalni uslovi međusobno povezani.

5 Teselacija u trodimenzionalnom prostoru

Ovaj koncept se može proširiti na trodimenzionalni prostor, gde poliomine zamenjuju polikubovi. Umesto termina „popločavanje" koristićemo termin „teselacija". Ključna pitanja u trodimenzionalnom prostoru uključuju: Da li konačan skup polikubova τ može teselirati kvadar dimenzije $m \times n \times p$? Da li neki skup polikubova τ može teselirati ceo trodimenzionalan prostor $\mathbb{E}^3$?

Trodimenzionalna celobrojna rešetka je skup tačaka $\mathbb{Z}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x, y, z \in \mathbb{Z}\}$. Teselaciju prostora $\mathbb{E}^3$ (sa zadatim desnim Dekartovim koordinatnim sistemom) na jedinične kocke (zapremine 1) čija su sva temena sa celobrojnim koordinatama nazivamo **Kubna mreža** i označavaćemo je sa $\mathcal{K}$. Ivice elementarnih (jediničnih) kocki nazivamo granama kubne mreže, a njihova temena čvorovima kubne mreže (čvorovi trodimenzione celobrojne rešetke).
Jasno, elementarne ćelije ovog specijalnog razbijanja prostora su skupovi tačaka $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 | n_i \leq x_i \leq n_{i+1}, i = 1, 2, 3\}$, gde su n_1, n_2, n_3 celi brojevi.

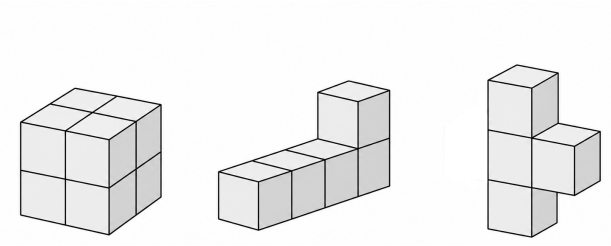
5.1 Polikubovi

Uvedimo sada definiciju polikuba kao i nekih drugih bitnih pojmova u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{E}^3$. Uopštenje pravougaonika jeste kvadar. Kvadar se definiše kao skup tačaka $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, 3\}$, pri čemu su $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ i $b_i > a_i$, za sve $i = 1, 2, 3$.

Definicija 5.1. ***Polikub*** *je poliedar čiji je rub sastavljen samo od strana elementarnih jediničnih kocki kubne mreže $\mathcal{K}$.*

Jasno, polikub predstavlja uniju nekog konačnog broja elementarnih jedinčnih kocki kubne mreže $\mathcal{K}$ i važi da za svake dve kocke iz te unije postoji niz kocki unutar tog skupa u kojem su svake dve uzastopne kocke imaju zajedničku stranu (jedinični kvadrat). Za dva polikuba sa disjunktnim unutrašnjostima kažemo da su **dodirni** ako imaju bar jednu zajedničku tačku (koja pripada rubu svakog od njih), a da su **susedni** ako je u njihovom preseku (tj. u preseku njihovih rubova) barem jedna strana elementarne kocke mrev ze $\mathcal{K}$. Dva dodirna polikuba ne moraju biti susedna (u slučaju da im je zajednički deo ruba samo ivica ili teme.

Definicija 5.2. *Polikub P naziva se* ***rep-polikub*** *ako se njegova uvećana verzija može popločati konačnim brojem polikubova dobijenih dozvoljenim izometrijskim transformacijama polikuba P, pri čemu je faktor skaliranja ceo broj $k > 1$.*



Slika 33. Primeri polikubova u trodimenzionalnom prostoru

Primer 5.1. *Na slici 33 prikazano je nekoliko primera polikubova.*

Primer 5.2. *Razmotrimo polikub P dimenzija $2 \times 2 \times 2$. Kvadar $4 \times 4 \times 4$ može se teselirati sa tačno 8 polikubova podudarnih polikubu P. Međutim, kvadar dimenzija $3 \times 4 \times 4$ ne može biti teselirana jer dimenzija 3 nije deljiva sa dimenzijom 2 datog polikuba.*

Primer 5.2 je trivijalan. Međutim, nije uvek tako jednostavno odrediti da li određeni polikub teselira dato telo ili neki neograničen skup tačaka. U nastavku navodimo još neke potrebne definicije i teoreme koje su nam potrebne za hijerarhiju teselacije prostora. Hijerarhiju koju sada uspostavljamo [14] analogno hijerarhiji dvodimenzionalnog prostora čine:

- (PrP) Četvorostrana pravougaona prizma koja je po definiciji kvadar.
- (PrG) Prostorne grede koje definišemo kao skup tačka koje se pružaju u jednom pravcu, sa ograničenjem u preostala dva pravca tj. $PrG \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -\infty < z < \infty\}$ za neke prirodne brojeve a, b.
- (PrPG) Prostorne polugrede definišemo na sledeći način: $PrPG \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z < \infty\}$ za neke prirodne brojeve a, b.
- (PrSG) Prostorne savijene grede definišemo kao uniju dve polugrede tj. $PrSG \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z < \infty\} \cup \{(x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq a\}$ za neke prirodne brojeve a i b.
- (PrK) Kvadranti u trodimenzionalnom prostoru tj. oblasti beskonačne u dva pravca, ograničene u jednom definišemo na sledeći način: $PrK \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < a, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$ za neki prirodan broj a.
- (PrPL) Ploče koje interpretiramo kao ravni u prostoru definišemo tako što jednu koordinatu ograničimo, a dve su neograničene tj. $PrPL \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$ za neki prirodan broj a.

- (PrO) Oktant je deo prostora definisan na sledeći način:
  $PrO \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$.
- (PrOO) Omotač oktanta je skup tačaka podudaran uniji:

$$\begin{aligned} PrOO \cong &\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\} \\ &\cup \{(x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z < \infty\} \\ &\cup \{(x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z \leq c\}. \end{aligned}$$

Definicija 5.3. *Poluprostori su neograničeni skupovi tačka na koje se euklidski prostor $\mathbb{E}^3$ razlaže jednom ravni, pri čemu sve tačke te ravni pripadaju tim poluprostorima.*

U ovom radu pod pojmom „poluprostor" podrazumevaćmeo neki od sledećih šest poluprostora, određenih koordinatnim ravnima:

$$\begin{aligned} {H_x}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^2 | x \geq 0\}, \\ {H_x}^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^2 | x \leq 0\}, \\ {H_y}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^2 | y \geq 0\}, \\ {H_y}^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^2 | y \leq 0\}, \\ {H_z}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^2 | z \geq 0\}, \\ {H_x}^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^2 | z \leq 0\}. \end{aligned}$$

5.2 Hijerarhija u trodimenzionalnom prostoru

Na slici 34 prikazana je hijerahija u trodimenzionalnom prostoru. Svaka prikazana implikacija se može dokazati. Generalno, možemo zaključiti da ako neki skup polikubova može teselirati kvadar dimenzija $a \times b \times c$, tada može teselirati i prostor $\mathbb{E}^3$. U nastavku su teoreme koje u potpunosti potvrđuju implikacije date hijerarhije.

Teorema 5.1. *Ako polikub P teselira kvadar, onda je P rep-polikub i teselira polugredu.*

Dokaz. Ako polikub P koji se sastoji od n kocki može da teselira kvadar dimenzija $a \times b \times c$, onda može da teselira i kocku dimenzija $abc \times abc \times abc$. Jedan način je da se unutar te kocke postavljaju kvadri tako što se duž ivice kocke bc puta postavi prizma tako da ivica a prati ivicu kocke abc, u drugom pravcu ac puta ivica b i u trećem pravcu ab puta ivica a. Na taj način može da se teselira data kocka pomenutim kvadrima. Jasno je dalje da se uz pomoć n

kocki dimenzija $abc \times abc \times abc$ može napraviti polikub P u uvećanoj verziji jer se sama sastoji od n jediničnih kocki. Stoga je polikub P rep-polikub. Potom, ukoliko prvi kvadar dimenzija $a \times b \times c$ postavimo u koordinatni početak u prvom oktantu, zatim slažemo uzastopno kvadre $a \times b \times c$ dobićemo figuru $B \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z < \infty\}$ što je po definiciji prostorna polugreda. □

Teorema 5.2. *Ako polikub P teselira prostornu polugredu, onda P teselira i prostornu savijenu gredu.*

Dokaz. Pretpostavimo da polikub P može da teselira prostornu polugredu $PrPG \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z < \infty\}$ za neke $a, b \in \mathbb{N}$. Zatim, ako zarotiramo $PrPG$ za 90^o u odnosu na xy osu i pomerimo teselaciju za a jedinica duž x ose dobijamo još jednu teselaciju prostorne polugrede $PrPG' \cong \{(x, y, z) : a \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq a\}$ za neke prirodne brojeve a, b. Ako spojimo $PrPG$ i $PrPG'$, po definiciji dobijamo prostornu savijenu gredu. □

Teorema 5.3. *Ako polikub P teselira prostornu savijenu gredu, onda P teselira i prostornu gredu.*

Dokaz. Analogno teoremi 3.3 koja se odnosi na dvodimenzionalan prostor, može se dokazati da ako polikub P teselira prostornu savijenu gredu onda teselira i prostornu gredu, ali je potrebno uzeti u obzir dodatnu dimenziju. □

Teorema 5.4. *Ako polikub P teselira prostornu savijenu gredu, onda P teselira i kvadrant u trodimenzionalnom prostoru.*

Dokaz. Pretpostavimo da P teselira prostornu savijenu gredu. Najpre formirajmo teselaciju prostornih savijenih greda podudarnih polaznoj, a zatim ugnezdimo takve teselacije savijenih greda jednu u drugu, na sledeći način:

$PrSG_1 \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z < \infty\}$
$\cup \{(x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq a_1\}$,
$PrSG_2 \cong \{(x, y, z) : a_1 \leq x \leq a_2, 0 \leq y \leq b, a_1 \leq z < \infty\}$
$\cup \{(x, y, z) : a_1 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, a_1 \leq z \leq a_2\}$,
...
$PrSG_n \cong \{(x, y, z) : a_{n-1} \leq x \leq a_n, 0 \leq y \leq b, a_{n-1} \leq z < \infty\}$
$\cup \{(x, y, z) : a_{n-1} \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, a_{n-1} \leq z \leq a_n\}$,

za neke prirodne brojeve a_n i b, gde $n \to \infty$. Unutar $PrSG_1$ se ugnezdi $PrSG_2$, unutar $PrSG_2$ se ugnezdi $PrSG_3$, ... , u $PrSG_{n-1}$ se ugnezdi $PrSG_n$ i tako dobijemo teselaciju kvadranta u trodimenzionalnom prostoru. □

Teorema 5.5. *Ako polikub P teselira prostornu savijenu gredu, onda teselira i oktant i gredu.*

Dokaz. Na osnovu 5.3 iz teselacije prostorne savijene grede možemo dobiti teselaciju grede. Pokažimo sada da ako P teselira savijenu gredu, onda teselira i oktant. Na osnovu teoreme 5.4 imamo da ako P teselira savijenu gredu, onda teselira i kvadrant u trodimenzionalnom prostoru, pa neka je taj kvadrant definisan na sledeći način: $PrK \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < a, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty$ za neki prirodan broj a$\}$. Formiranjem teselacija podudarnih teselaciji polaznog kvadranta imamo:
$PrK_1 \cong \{(x, y, z) : a \leq x < a_1, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$,
$PrK_2 \cong \{(x, y, z) : a_1 \leq x < a_2, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$,
...
$PrK_n \cong \{(x, y, z) : a_{n-1} \leq x < a_n, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$,
za neke a_n prirodne brojeve gde $n \to \infty$, dobijamo uniju $PrO = PrK \cup PrK_1 \cup ... \cup PrK_n$ koja po definiciji predstavlja oktant. Time smo dokazali da teselacija prostorne savijene grede implicira teselaciju oktanta.

□

Teorema 5.6. *Ako polikub P teselira kvadrant u trodimenzionalnom prostoru, onda P teselira i omotač oktanta.*

Dokaz. Najpre primetimo da je omotač oktanta unija tri različita kvadranta u trodimenzionalnom prostoru, stoga omotač možemo predstaviti kao uniju tri skupa tačaka. Pretpostavimo da ćelija P teselira kvadrant u trodimenzionalnom prostoru definisan sa $PrK_1 \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < a, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty$ za neki prirodan broj $a\}$. Ukoliko ovaj kvadrant rotiramo za 90^o u odnosu na xz ravan i duž x ose ga pomerimo za a, dobićemo kvadrant $PrK_2 \cong \{(x, y, z) : a \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z \leq a\}$. Na isti način, ukoliko PrK_1 rotiramo za 90^o u odnosu na xy ravan i duž x i z ose ga transliramo za a dobićemo kvadrant $PrK_3 \cong \{(x, y, z) : a \leq x < \infty, 0 \leq y \leq a, a \leq z < \infty\}$. Tada je unija $S = PrK_1 \cup PrK_2 \cup PrK_3$ omotač koji smo teselirali.

□

Teorema 5.7. *Ako polikub P teselira kvadrant, onda teselira i ploču.*

Dokaz. Neka polikub P teselira kvadrant dat sa $Q_{++} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < a, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$ za neki prirodan broj a. Posmatrajmo ravni $y = 0$ i $z = 0$. Simetrijom prostora u odnosu na ravan $y = 0$, kvadrant Q_{++} preslikava se u $Q_{-+} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < a, -\infty < y \leq 0, 0 \leq z < \infty\}$, a simetrijom u odnosu na ravan $z = 0$ kvadrant Q_{++} se preslikava u $Q_{+-} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < a, 0 \leq y < \infty, -\infty < z \leq 0\}$. Kako simetrija čuva podudarnost i

međusobni odnos kocki, primenom simetrije na obe pomenute ravni dobijamo teselaciju $Q_{--} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < a, -\infty < y \leq 0, -\infty < z \leq 0\}$. Teselacijom unije $Q_{++} \cup Q_{-+} \cup Q_{+-} \cup Q_{--}$ datim polikubom zaključujemo da polikub P teselira ploču.

□

Teorema 5.8. *Ako polikub P teselira gredu, onda teselira i ploču.*

Dokaz. Neka polikub P teselira prostornu gredu datu sa $PrG \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -\infty < z < \infty\}$ za neke prirodne brojeve a i b. Posmatrajmo grede podudarne datoj na sledeći način:
$PrG_{11} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, b \leq y \leq b_{11}, -\infty < z < \infty\}$,
$PrG_{12} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, b_{11} \leq y \leq b_{12}, -\infty < z < \infty\}$,
...
$PrG_{1n} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, b_{1(n-1)} \leq y \leq b_{1n}, -\infty < z < \infty\}$, kao i
$PrG_{21} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, b_{21} \leq y \leq 0, -\infty < z < \infty\}$,
$PrG_{22} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, b_{22} \leq y \leq b_{21}, -\infty < z < \infty\}$,
...
$PrG_{2m} \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, b_{2m} \leq y \leq b_{2(m-1)}, -\infty < z < \infty\}$, gde su a, b_{1n} i b_{2m} prirodni brojevi pri čemu $n \to \infty$ i $m \to -\infty$. Unija $PrG \cup PrG_{11} \cup PrG_{12} \cup ... \cup PrG_{1n} \cup PrG_{21} \cup PrG_{22} \cup ... \cup PrG_{2m}$ je po definiciji podudarna ploči. Stoga, ukoliko P teselira gredu, onda teselira i tako formiranu uniju, odnosno ploču. □

Teorema 5.9. *Ako polikub P teselira ploču, onda teselira poluprostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da polikub P teselira ploču datu sa $PrPL \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$ za neki prirodan broj a. Napravimo podudarne teselacije ploče i nadovežemo ih na sledeći način:
$PrPL_1 \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$,
$PrPL_2 \cong \{(x, y, z) : a \leq x \leq a_1, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$,
...
$PrPL_n \cong \{(x, y, z) : a_{n-1} \leq x \leq a_n, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$
za neke prirodne brojeve a_1, a_2,...a_n, gde $n \to \infty$. $PrPL_1$ se nadoveže na $PrPL$, $PrPL_2$ se nadoveže na $PrPL_1$ itd. Kako je unija $PrPL \cup PrPL_1 \cup$ .... $\cup PrPL_n$ skup tačaka podudaran poluprostoru, time je dokazano da P teselira poluprostor. □

Teorema 5.10. *Ako polikub P teselira gredu, onda teselira i poluprostor.*

Dokaz. Ova teorema je direktna posledica teoreme 5.8 i 5.9 jer važi tranzitivnost implikacije. □

Teorema 5.11. *Ako je polikub P rep-polikub, onda P teselira i oktant.*

Da bismo pokazali ovo tvrđenje, neophodno je da uvedemo propoziciju datu u [7], ali svedenu na trodimenzionalni slučaj, kao i definiciju kvadarskog omotača polikuba.

Definicija 5.4. *Polikub kvadar najmanje zapremine koji sadrži dati polikub P naziva se* ***kvadarski omotač*** *polikuba P.*

Jasno, on se dobija u preseku zatvorenih poluprostora određenih sa potpornim ravnima za polikub P, a koje su ortogonalne na koordinatne ose. Elementarnu (jediničnu) kocku koja pripada kvadarskom omotaču i sadrži teme kvadra nazivamo „budžak" kocka kod tog temena. Jasno, ona pripada triedru kod tog temena pa je možemo zvati po analogiji sa dvodimenzionim slučajem „triedarska" elementarna kocka kod tog temena.

Propozicija 5.1. *[7] Bar jedna „budžak" kocka kvadarskog omotača rep-polikuba P pripada rep-polikubu P.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji rep-polikub P koji nije smešten ni u jedan triedar svog kvadarskog omotača, tj. nijedna „budžak" kocka kvadarskog omotača za P ne pripada tom rep-polikubu P. Kako je P sastavljen od jediničnih kocki, on ima bar jedan konveksan pravougli triedar (poluprave koje ishode iz temena triedra formiraju međusobno uglove od 90^0). Označimo sa A teme tog triedra, sa q „budžak" kocku koja sadrže teme A. Polikub sastavljen od sedam preostalih elementarnih kocki sa temenom A označimo sa R. Kako je P rep-polikub, postoji polikub P_1, sličan sa P, uvećana kopija dobijena nekom homotetijom sa koeficijentom uvećanja k (k ceo broj veći od 2), a koja se može teselirati sa kopijama od P. Zatim posmatrajmo niz uvećanih polikubova P_2, P_3, ... sličnih sa P, pri čemu P_n ($n \in N$) ima zapreminu k^3 puta veću od zapremine polikuba P_{n-1}. Za polikub P_n teme koje odgovara temenu A polikuba P označimo sa A_n. Prilikom tih homotetija kocka q se preslikava u polikubove koje ćemo označiti sa Q_1, Q_2, Q_3, ..., dok se unija 7 preostalih elementarnih kocki sa temenom u A, tj. polikub R tim homotetijama preslikava u polikubove R_1,R_2, ... Elementarnu kocku sa temenom u A_n koja se nalazi u P_n (a time i u Q_n) označimo sa q_n. Primetimo da je to jedina od osam elementarnih kocki incidentnih sa A_n koja se nalazi u P_n. Jasno je da se polikub P_n može razložiti na polikubove podudarne sa P. Jedan od njih pokriva i elementarnu kocku q_n. Primetimo da nijedna kopija od P ne pokriva nijednu elementarnu kocku koja se nalazi u R_n. Za dovoljno veliko $n \in N$ možemo postići da polikub podudaran sa P koji pokriva elementarnu kocku q_n se ceo nalazi u uniji $Q_n \cup R_n$. (Dovoljno je birati da k^n bude veće od dužine najduže ivice kvadarskog omotača za P). To znači da se taj polikub mora naći u kocki $Q_n \cup R_n$, a kako je $P_n \cap R_n = \emptyset$, taj polikub se ceo nalazi

u Q_n. Kako taj polikub podudaran sa P pokriva elementarnu kocku q_n, a ceo se nalazi u Q_n, tj. i on i njegov kvadarski omotač. Zaključujemo da je qn triedarska elementarna kocka kvadarskog omotača za taj polikub koji je podudaran sa P u temenu A_n što je u kontradikciji sa pretpostavkom da P nema budžak kocku (a time ni njene kopije).

□

Sada analogno teoremi 3.5 sledi dokaz teoreme 5.11.

Dokaz teoreme 5.11. Prema propoziciji 5.1, rep-polikub P se može smestiti u bar jedan triedar svog kvadarskog omotača, tj. bar jedna „budžak" kocka pripada polikubu P. Posmatrajmo oktant određen pozitivnim delovima koordinatnih osa x, y i z. Neka je S skup svih polikubova podudarnih polukubu P koji se mogu smestiti u triedar prvog oktanta. Skup S je neprazan i konačan. Neprazan je jer, prema propoziciji 5.1, postoji bar jedan polikub podudaran polikubu P koji se može dobiti izmotrijskim transformacijama tako da P bude smešten u triedar svog kvadarskog omotača, pa se odgovarajućim izometrijama može smestiti i u tridar prvog oktanta. Konačan je jer se različiti fiksirani polikubovi podudarni polikubu P dobijaju primenom izometrija kocke, kojih ima najviše 24. Dakle, $S = \{s_1, ..., s_n\}$, za neki prirodan broj $n \leq 24$. Krenimo od bilo kog elementa iz S, na primer s_1. Pošto je P rep-polikub, polikub koji je položaja kao s_1 možemo podeliti na umanjene polikubove koji su manji od P u odnosu na određeni faktor skaliranja. Prema propoziciji 5.1, među tim polikubovima koji učestvuju u teseliranju postoji polikub koji se nalazi u triedru svog kvadarskog omotača. Taj polikub pripada skupu S. Označimo ga sa s_i. Tako dobijamo $s_1 \to s_i$. Ponovimo isti postupak za s_i. Na isti način dobijamo da postoji polikub s_j koji je smešten u odgovarajućem triedru, pa imamo $s_1 \to s_i \to s_j$. Ponavljanjem ovog postupka dobijamo niz elemenata iz skupa S, a kako je S konačan skup, neki element će se ponoviti dva puta. Dakle, postoji niz oblika $s_i \to s_j \to ... \to s_i$ dužine $l \geq 1$. Sada posmatrajmo ovaj niz obrnutim redosledom. Pošto se početni i završni položaj u nizu poklapaju, odgovarajuća popločavanja mogu se povezati tako da se dobije popločana figura $F(l)$, sastavljena od polikubova podudarnih sa P. Neka je $k > 1$ odgovarajući faktor uvećanja. Tada se figura $F(l)$ može smestiti u triedar prvog oktanta, a njeno uvećanje faktorom k može se popločati figurama koje su podudarne sa $F(l)$. Ponavljanjem ovog postupka dobijamo sve veće i veće popločane delove prvog oktanta. Kako se postupak nastavlja beskonačno mnogo puta, polikub P će teselirati ceo oktant na taj način. □

Teorema 5.12. *Ako polikub P teselira omotač oktanta, onda P teselira i oktant.*

Dokaz. Poput konstruktivnog postavljanja uzastopnih prostornih savijenih

greda u teoremi 5.4 i u ovom dokazu je moguće uspostaviti uzastopnu postavku svakog narednog omotača unutar prethodnog, tako da se u beskonačnosti na ovaj način popuni ceo oktant.

□

Teorema 5.13. *Ako polikub P popunjava oktant, onda P teselira i poluprostor.*

Dokaz. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da polikub P teselira oktant definisan $O_1 \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$. Preslikavanjem slaganja polikubova u odnosu na x osu, y osu i pravu $y = -x$ dati polikub će teselirati i sledeće oktante:
$O_2 \cong \{(x, y, z) : 0 \leq x < \infty, -\infty < y \leq 0, 0 \leq z < \infty\}$,
$O_3 \cong \{(x, y, z) : -\infty < x \leq 0, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$ i
$O_4 \cong \{(x, y, z) : -\infty < x \leq 0, -\infty < y \leq 0, 0 \leq z < \infty\}$.
Unijom ova četiri oktanta dobijamo poluprostor. □

Teorema 5.14. *Ako polikub P teselira oktant i gredu, onda teselira i oktant.*

Dokaz. Pošto klasa oktant i greda označava da polikub teselira i oktant i gredu, ovo tvrđenje trivijalno važi. □

Teorema 5.15. *Ako polikub P teselira oktant i gredu, onda teselira i gredu.*

Dokaz. Pošto klasa oktant i greda označava da polikub teselira obe i oktant i gredu, ovo tvrđenje trivijalno važi. □

Teorema 5.16. *Ako polikub P teselira oktant i gredu, onda teselira i poluprostor.*

Dokaz. Direktna posledica teorema 5.14 i 5.15. □

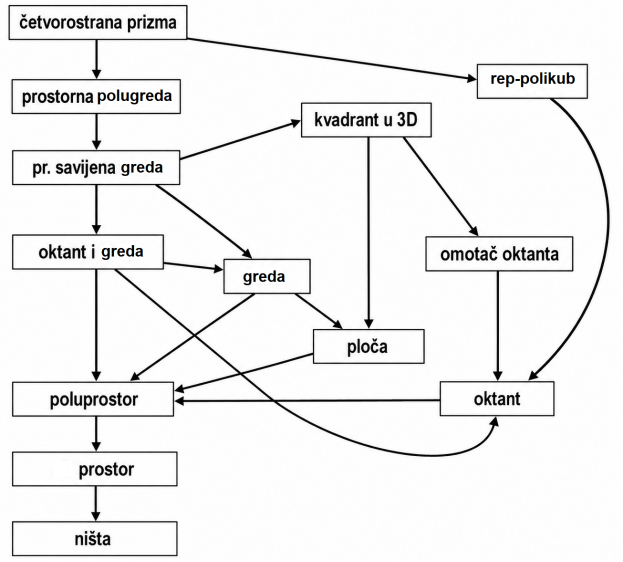
Teorema 5.17. *Ako polikub P teselira poluprostor, onda P teselira i ceo trodimenzionalni prostor.*

Dokaz. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da polikub P teselira poluprostor iznad xy ravni. Preslikavanjem teselacije tog poluprostora u odnosu na xy ravan dobijamo teselaciju celog trodimenzionalnog prostora. □

Teorema 5.18. *Ako polikub P teselira trodimenzionalni prostor, onda teselira i ništa, tj. prazan skup.*

Dokaz. Ovo uvek važi, jer sa 0 polikubova P (kako god izgledali) možemo teselirati prazan skup.

□



Slika 34. Hijerarhija teselacija u trodimenzionalnom prostoru

5.3 Karakteristični primeri

Postavlja se pitanje da li navedene implikacije važe i u suprotnom smeru. Budući da većina njih nije razmatrana u literaturi, pre izlaganja karakterističnih primera iz ovog dela uvodimo nekoliko neophodnih definicija i propoziciju, koje su uveli Hochberg i Reid u [7].

Ako uzmemo u obzir uopštenje osobine koja se odnosi susedstvo polikubova možemo definisati sledeće:

Definicija 5.5. ***Ćelija (ili jedinična hiperkocka)*** *u d-dimenzionalnom prostoru* $\mathbb{E}^d$ *se definiše sa* $C(n_1, n_2, ...n_d) = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{E}^d | n_i \leq x_i \leq n_i + 1 \text{ za } i = 1, 2, ..., d\}$*, gde su* $n_1, n_2, ...n_d$ *celi brojevi. Konačna unija ćelija takva da za svake dve ćelije te unije postoji konačan niz ćelija iz iste unije, pri čemu su svake dve uzastopne ćelije u nizu susedne, tj. imaju zajedničku hiperstranu*[5]*, naziva se* ***d-dimenzionalni polikub*** *(polikocka). Podskup prostora* $\mathbb{E}^d$ *podudaran sa* $\{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{E}^d | 0 \leq x_i \leq a_i \text{ za } i = 1, 2, ..., d\}$ *za neke pozitivne* $a_1, a_2, ..., a_d$ *naziva se* ***d-dimenzionalna pravougaona prizma****.*

Definicija 5.6. ***Dvostruka d-dimenzionalna*** *ćelija je hiperkocka* $Q(2n_1, 2n_2, ..., 2n_d) = \{(x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{E}^d | 2n_i \leq x_i \leq 2n_i + 2, \text{ za } i = 1, 2, ..., d\}$ *za neke* $n_1, n_2, ..., n_d \in \mathbb{Z}$*.*

[5]Hiperstrana je uopštenje strane, tj. to je (d-1)-dimenzionalni politop.

Definicija 5.7. *Unija $2^d - 1$ ćelija $\{C(n_1, n_2, ..., n_d) | gde\ svako\ n_i \in \{0, 1\}$ i bar jedno $n_i = 0\}$ je d-dimenzionalni polikub koji se naziva* ***d-dimenzionalna okrnjena kocka****.*

Propozicija 5.2. *Okrnjena d-dimenzionalna kocka je rep-polikub. Pritom, razlaganje rep-polikuba u tom slučaju je jedinstveno.*

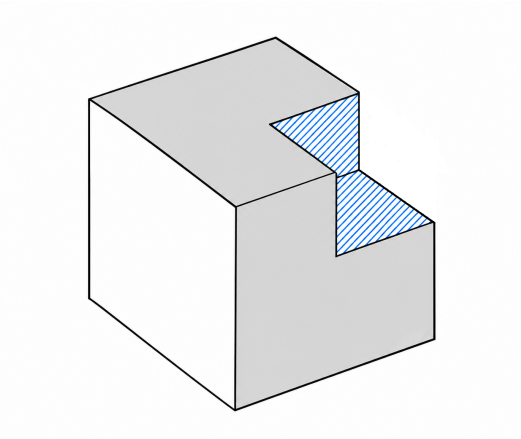
Dokaz. Dokažimo da se uvećana, sa koeficijentom uvećanja 2, okrnjena d-dimenzionalna kocka X može razložiti na 2^d okrnjenih d-dimenzionalnih kocki. X se sastoji od svih ćelija $C(n_1, n_2, ..., n_d)$, gde je $n_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, za svako $i = 1, ..., d$, osim onih kod kojih su sve koordinate iz skupa $\{2, 3\}$. Broj ćelija u X jednak je $4^d - 2^d = (2^d - 1) \cdot 2^d$, što odgovara ukupnom broju ćelija u 2^d okrnjenih d-dimenzionalnih kocki. Posmatrajmo ćelije $C(n_1, n_2, ..., n_d)$ za koje je svaka koordinata $n_i \in \{0, 3\}$, pri čemu je bar jedna koordinata jednaka 0, pošto ne razmatramo ćelije gde su sve koordinate iz skupa $\{2, 3\}$. Takvih ćelija ima $2^d - 1$, jer postoji 2^d mogućih kombinacija iz skupa $\{0, 3\}$, a ćelija $C(3, 3, ..., 3)$ ne pripada X. Primetimo da svaka okrnjena kocka mora pokriti odgovarajuću izdvojenu ćeliju i istovremeno biti sadržana u pripadajućoj dvostrukoj ćeliji. Zato svaku od njih mora pokrivati različita okrnjena kocka, što znači da je za njihovo pokrivanje potrebno $2^d - 1$ okrnjenih kocki. Preostaje još jedna okrnjena kocka. Da bi teselacija bila potpuna, ona mora pokriti po jednu ćeliju iz svake dvostruke ćelije koje čine X. Te ćelije su upravo ćelije $C(n_1, n_2, ..., n_d)$ za koje je $n_i \in \{1, 2\}$ za svako $i = 1, ..., d$, pri čemu je bar jedna koordinata jednak 1. Time je jednoznačno određen položaj preostale okrnjene kocke, a taj položaj jednoznačno određuje i položaj ostalih. Prema tome, X se može razložiti na 2^d okrnjenih d-dimenzionalnih kocki. Dakle, okrnjena d-dimenzionalna kocka je rep-polikub.

□

Napomena 5.1. *Teselacija uvećane verzije okrnjene rep-polikocke uz pomoć 8 podudarnih okrnjenih kocki naziva se 8-teselacija[7].*

Primer 5.3. *Na osnovu propozicije 5.2 zaključujemo da okrnjena kocka u trodimenzionalnom prostoru jeste rep-polikub, (slika 35) te može teselirati svoju uvećanu verziju, skaliranu faktorom 2, koristeći pritom osam okrnjenih kocki njoj podudarnih. Ova teselacija je jedinstvena.*

Propozicija 5.3. *Neka je pozitivni oktant prostora $\mathbb{E}^3$ teseliran okrnjenim i punim kockama ivice dužine 2. Tada svaka dvostruka ćelija u potpunosti sadrži jednu od njih. Ekvivalentno, pošto se svaka dvostruka ćelija sastoji od $2^3 = 8$ ćelija, njenih osam ćelija može biti raspodeljeno između različitih elemenata teselacije samo na jedan od sledeća dva načina:*



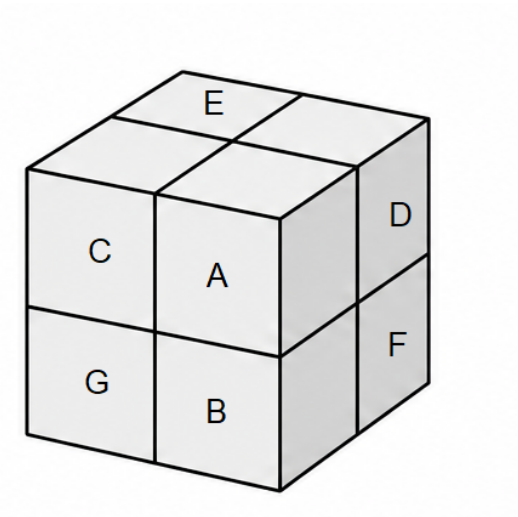
Slika 35. Okrnjeni polikub za $d = 3$

- $(7+1)$ *: 7 ćelija dvostruke ćelije pokriva jedan elemenat, dok preostala* 1 *ćelija pripada drugom elementu teselacije;*
- (8) *: svih* 8 *ćelija pripada jednom elementu u teselaciji, tj. jednoj dvostrukoj kocki.*

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da propozicija ne važi. To znači da postoji bar jedna dvostruka ćelija sa nevažećom raspodelom koja se razlikuje od dozvoljenih oblika $(7 + 1)$ i (8). Među svim takvim „neispravnim" dvostrukim ćelijama, posmatrajmo onu sa oznakom $Q = Q(n_1, n_2, n_3)$ koja se nalazi najbliže koordinatnom početku, u smislu da je zbir njenih koordinata $n_1+n_2+n_3$ minimalan. Neka su A, B, C, D, E, F, G i H osam jediničnih ćelija koje čine Q, pri čemu je $A = C(n_1, n_2, n_3)$ ona ćelija koja je najbliža koordinatnom početku, dok su ostale raspoređene onako kako je prikazano na slici 36.
U naredna tri stava koja ćemo dokazati pod terminom kocka ćemo podrazumevati okrnjena ili puna kocka kada se tvrđenje odnosi na obe, a posebno naglašavati kad je jedna od njih u pitanju.
Stav 1: Kocka koja sadrži ćeliju A ne pokriva nijednu drugu ćeliju unutar posmatrane dvostruke ćelije Q.

Ukoliko bismo posmatrali kocku koja prekriva A, ona unutar Q može pokrivati 1, 2, 3, 4, 7 ili 8 ćelija. Ukoliko bi taj broj bio 7 ili 8, dobili bismo ispravnu raspodelu, što je u suprotnosti sa našom polaznom pretpostavkom. S druge strane, ako bi pokrivala tačno 4 ćelije (recimo A, B, G i C), to bi značilo da ista kocka obuhvata 3 ili 4 ćelije u susednoj dvostrukoj ćeliji koja deli pljosan $ABGC$. Pošto je ta susedna dvostruka ćelija bliža koordinatnom



Slika 36. Dvostruka ćelija Q

početku od Q i takođe ima nevažeću raspodelu, dolazimo do kontradikcije. Analogan zaključak (postojanje bliže neispravne dvostruke ćelije) dobijamo i za slučajeve kada kocka zahvata 2 ili 3 ćelije. Time je prvi stav potvrđen. Takođe, važno je primetiti da kvadarski omotač kocke koja pokriva A ne obuhvata ćeliju B. U suprotnom, ta kocka bi morala da bude baš okrnjena kocka i pokrivala bi po 2 ćelije iz svake od tri susedne dvostruke ćelije koje su bliže koordinatnom početku od Q, što ponovo vodi u kontradikciju. Iz istog razloga, omotač te kocke ne sadrži ni ćeliju C ni ćeliju D.

Stav 2: Kocka koja pokriva ćeliju B mora da obuhvati bar još jednu ćeliju iz dvostruke ćelije Q.

Pretpostavimo suprotno – da B deli kocku koja ne pokriva nijednu drugu ćeliju iz Q. Ako bi njen omotač obuhvatao A, F ili G, taj element teselacije bi zahvatao po 2 ćelije u nekoj od susednih dvostrukih ćelija (preko pljosni $ABFD$ ili $ABGC$), koje su bliže početku koordinatnog sistema, što je nemoguće. Zaključujemo da omotač mora sadržati po jednu ćeliju u 8 različitih dvostrukih ćelija. Samim tim, ta kocka mora sadržati po 1 ćeliju u najmanje dve od tri dvostruke ćelije koje se spajaju duž ivice AB. Pošto isto pravilo važi i za kocku koja pokriva A, sledi da bi bar jedna od tih bližih dvostrukih ćelija morala da ima dva sabirka vrednosti 1 u svojoj raspodeli, čime se dobija kontradikcija koja dokazuje drugi stav. Prateći potpuno istu logiku, zaključujemo da i kocke koje pokrivaju ćelije C i D moraju zahvatati još najmanje po jednu ćeliju unutar Q.

Stav 3: Ćelije B i C moraju biti pokrivene različitim kockama.

Kada bi pripadale istoj kocki, ta kocka bi morala da bude okrnjena kocka i samim tim bi pokrivala i ćeliju G. Tada bi ona pokrila ili preostale 4 ćelije u Q (što bi dalo validnu raspodelu $(7 + 1)$ i oborilo pretpostavku), ili bi zahvatila 4 ćelije u susednoj dvostrukoj ćeliji preko pljosni $ABGC$, koja je bliža koordinatnom početku i ima neispravnu raspodelu, što je kontradikcija te važi i stav 3. Iz istog razloga, različitim kockama moraju biti pokriveni parovi C i D, kao i D i B. To znači da ove tri ćelije pripadaju trima različitim kockama, pri čemu svaka od njih zahvata najmanje 2 ćelije iz Q. Budući da je zbir njihovih minimalnih učešća $1 + 2 + 3 + 3 > 8$, nemoguće je drugačije nego da tačno dva od ovih elemenata teselacije pokrivaju po 2 ćelije iz Q. Uzimajući u obzir simetriju, imamo dva moguća slučaja:

1. Jedan elemenat teselira B i F, dok drugi teselira C i E. U ovom rasporedu, kocka koja je zadužena za ćeliju D ne bi smela da pokrije nijednu dodatnu ćeliju u Q, što direktno ruši stav 2.

2. Jedna kocka obuhvata B i F, a druga obuhvata C i G. Tada prva kocka pokriva 1 ili 2 ćelije u susednoj dvostrukoj ćeliji preko pljosni $ADFB$. Budući da je reč o bližoj dvostrukoj ćeliji, ona tu sme da pokrije samo 1 ćeliju. Analogno, druga kocka pokriva 1 ćeliju susedne dvostruke ćelije preko pljosni $ABGC$. Međutim, znamo da i kocka koja pokriva A takođe zahvata po 1 ćeliju u jednoj ili obe ove susedne dvostruke ćelije. To bi značilo da bar jedna od tih bližih dvostrukih ćelija ima dva sabirka 1 u svojoj raspodeli, što nas dovodi do poslednje kontradikcije.

□

Naredna tvrđenja važe za $d \geq 3$ i ta uopštenja su data u [7], a ovde ih navodimo za slučaj kada je $d = 3$.

Propozicija 5.4. *Svaka teselacija pozitivnog oktanta prostora $\mathbb{E}^3$ okrnjenim kockama nastaje uzastopnom primenom 8-teselacije okrnjene kocke. Pritom, okrnjena kocka koja teselira ćeliju u triedru $C(0, 0, 0)$ predstavlja translaciju okrnjene kocke koja ne teselira ćeliju $C(1, 1, 1)$.*

Teorema 5.19. *Pozitivni oktant prostora $\mathbb{E}^3$ može se na jedinstven način teselirati okrnjenim kockama.*

Teorema 5.20. *Za trodimenzionalnu okrnjenu kocku postoji teselacija uvećane verzije sa m^3 njoj podudarnih okrnjenih kocki, ako i samo ako je m stepen broja 2. Štaviše, za svaki takav m, teselacija je jedinstvena.*

Dokaz. Trodimenzionalna okrnjena kocka se sastoji od $2^3 - 1 = 7$ ćelija. Posmatrajmo teselaciju uvećane okrnjene kocke sa m^3 podudarnih okrnjenih kocki. Dokazujemo indukcijom po m. Za $m = 1$ tvrđenje je očigledno, jer sama okrnjena kocka predstavlja rep-polikocku. Dakle, postoji 1^3 teselacija i ona je jedinstvena. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve pozitivne cele brojeve manje od m. Neka sada postoji m^3 podudarnih okrnjenih kocki koje teseliraju skaliranu okrnjenu kocku. Kako na osnovu propozicije 5.2 važi da je okrnjena kocka rep-polikub, onda na osnovu teoreme 5.11 teselacija pozitivnog oktanta će biti proširenje teselacije skalirane okrnjene kocke.

Ako je $m > 1$ neparan, onda korišćenjem m^3 podudarnih okrnjenih kocki za teselaciju skalirane okrnjene kocke iskorišćeno je $7 \cdot m^3$ ćelija, te je skaliranje sa koeficijentom m^3. Na osnovu propozicije 5.3 svaka dvostruka ćelija će sadržati u potpunosti jednu od podudarnih okrnjenih kocki. Zbog neparnosti m granica skalirane verzije okrnjene kocke će prolaziti kroz jednu dvostruku ćeliju, te to znači da će neke podudarne okrnjene kocke iz teselacije imati ćelije raspoređene i van te telesacije. Samim tim zaključujemo da m ne može biti neparan, pa mora da važi $m = 2n$ za neki pozitivan ceo broj n.

Dakle, važi $m^3 = (2n)^3 = 8n^3$. Pošto se dvostruke ćelije ne mogu deliti u teselaciji između različitih okrnjenih kocki, onda se ukupan broj podudarnih okrnjenih kocki koje učestvuju u teselaciji $8n^3$ grupiše u blokove od po 8. Svaki takav blok predstavlja jednu 2^3- teselaciju, odnosno jednu teselaciju sa 8 elemenata. Broj takvih blokova je n^3. Dakle, početna teselacija sa m^3 podudarnih okrnjenih kocki može se posmatrati kao n^3 teselacija čiji su elementi upravo blokovi od po 8. Po induktivnoj pretpostavci, n^3-teselacija postoji samo ako je n stepen broja 2. Dakle, $n = 2^k$ za neko $k \geq 0$. Tada je $m = 2n = 2^{k+1}$, pa je i m stepen broja 2.

Ostaje da pokažemo da je teselacija jedinstvena. Za $m = 1$ je već pokazano. Neka je sada $m = 2n$. Prema induktivnoj pretpostavci, n^3-teselacija je jedinstvena. Dakle, jedinstveno su određeni položaji svih blokova kojih ima n^3. Unutar svakog od tih blokova se nalazi 8 okrnjenih kocki podudarnih polaznoj. Prema propoziciji 5.2, 8-teselacija trodimenzionalne kocke je jedinstvena. Samim tim je jedinstveno određen i raspored svih m^3 podudarnih okrnjenih kocki. □

Primer 5.4. *Na osnovu teoreme 5.20 zaključujemo da je mogući broj okrnjenih kocki podudarnih polaznoj koji mogu da teseliraju njenu uvećanu verziju:* 1^3, 2^3, 4^3, 8^3, 16^3,..., *odnosno moguće su samo teselacije sa* $(2^k)^3 = 8^k$ *elemenata.*

Teorema 5.21. *Trodimenzionalna okrnjena kocka ne može da teselira nijedan kvadar.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da trodimenzionalna okrnjena kocka teselira $n_1 \times n_2 \times n_3$ kvadar. Kvadrima njemu podudarnim teseliramo $N \times N \times N$ kocku, gde je $N = n_1 n_2 n_3$, pa samim tim imamo N^3-teselaciju okrnjene kocke. Međutim, N je deljivo sa $2^3 - 1$, što nije stepen 2, a to je u kontradikciji sa teoremom 5.20.

□

Dakle, na osnovu prethodnih tvrđenja možemo zaključiti da je okrnjena kocka karakterističan primer koji dokazuje da obrnuta implikacija kod reppolikubova i teselacija kvadara ne važi.

6 Zaključak

Teselacije ravni poliominama i trodimenzionalnog prostora polikubovima otvara vrata širokom spektru matematičkih i praktičnih problema. Hijerarhija popločavanja, odlučivost i aperiodični protoskupovi ključni su doprinosi razumevanju ovih problema. Dalje se teorijski doprinosi produbljuju do praktične primene u različitim sferama, tj. od arhitekture do optimizacije industrijskih procesa, poliomine i polikubovi pronalaze mesto u svakodnevnoj primeni. Proširenja na trodimenzonalan prostor i kompleksniji skupovi poliomina i polikubova otvaraju mogućnosti za dalja istraživanja.

Pored teorijskih aspekata, dalje istraživanje poliomina ima značajan potencijal za dalju primenu u optimizaciji prostora i industrijskom dizajnu. Razumevanje složenih obrazaca popločavanja može doprineti i razvoju efikasnih industrijskih rešenja i otkrivanju novih estetskih formi u umetnosti i arhitekturi. U arhitekturi i građevinarstvu, polikubovi se koriste za modeliranje struktura i optimizaciju prostora u dizajnu objekata. U računarstvu i skladištenju podataka, teselacija u prostoru se koristi za raspoređivanje podataka u mrežama ili optimizaciju hardverskih komponenti. Za industrijski dizajn i pakovanje pokazano je da se efikasno korišćenje prostora u skladištima ili transportnim kontejnerima zasniva se na metodama teselacije polikubovima. Posebno imamo značaj Wangovih pločica koje predstavljaju prirodnu vezu između geometrijske teorije popločavanja, kombinatorike i teorije izračunljivosti. Njihova uloga u konstruisanju aperiodičnih protoskupova pokazuje da proučavanje netranslatornih struktura zahteva istovremeno razmatranje lokalnih pravila, globalne strukture i algoritamske složenosti problema

Ovaj rad pruža pregled ključnih pojmova i metoda u oblasti teselacije, naglašavajući njihovu matematičku lepotu i praktični značaj.

Biografija

Sanja Vukmirović (rođ. Ilijin) je rođena 19.06.1993. godine u Novom Kneževcu. Osnovnu školu „Jovan Jovanović Zmaj“ je završila kao odličan učenik u Banatskom Aranđelovu, a potom 2012. godine i Ekonomsko-trgovinsku školu u Kikindi. Diplomirala je februara 2019. godine na studijskom programu Primenjena matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Iste godine započinje svoju karijeru kao nastavnik matematike u Osnovnoj školi „Jovan Jovanović Zmaj“ u Novom Kneževcu, nakon čega, zbog izbora profesije tj. da se bavi nastavom i podučavanjem, odlučuje da nastavi svoje školovanje. Upisuje iste godine integrisane akademske studije Master profesor matematike na istom fakultetu. Položivši poslednji ispit stiče pravo na odbranu ovog rada.

Literatura

[1] C. Adams, *The tiling book: An introduction to the mathematical theory of tilings*, American Mathematical Society (2023).

[2] R. Berger, *The undecidability of the domino problem*, vol. 66, Providence: American Mathematical Society, (1966).

[3] O. Bodroža-Pantić, *Kombinatorna geometrija*, Univerzitet u Novom Sadu (2000).

[4] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag (1993).

[5] S.W. Golomb, Tiling with Polyominoes, *Journal of combinatorial theory* 1 (1966), 280–296.

[6] S.W. Golomb, Tiling with Sets of Polyominoes, *Journal of combinatorial theory* 9 (1970), 60–71.

[7] R. Hochberg, M.Reid, Tiling with notiched cubes, *Discrete Mathematics 214* (2000) 255–261.

[8] A. Liu, *SMART Circle Overview*, Springer International Publishing, (2018).

[9] G.Martin, *Polyominoes: A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, Cambridge University Press (1991).

[10] V. Nitica, Revisiting a Tiling Hierarchy, *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(4), (2018), 3162–3169.

[11] V. Nitica, Revisiting a tiling hierarchy (II), *Journal of Discrete Mathematics* 8, (2018), 48–63.

[12] N. Ollinger, Tiling the Plane with a Fixed Number of Polyminoes, *Journal of combinatorial theory* (2008). Dostupno na: https://hal.science/hal-00335781v1/file/unpo.pdf.

[13] D. H. Redelmeier, Counting polyominoes: yet another attack, *Discrete Mathematics 36* (1981), 191–203.

[14] M. Saxton, *Tiling with Polyominoes, Polycubes, and Rectangles*, master rad, Departman za matematiku, Univerzitet Centralne Floride, Orlando (2015). Dostupno na: https://stars.library.ucf.edu/etd/1438/, Pristupljeno: 01.09.2026.

[15] H.Tulleken, *Polyominoes: How they fit together*, verzija 2.2 (2019). [Onlajn izdanje]. Dostupno na: http://codespot.co.za/downloads/polyominoes/Polyominoes.pdf Pristupljeno: 15.08.2026.

[16] H.Wang, Games, logic and computers, in *Computation, Logic, Philosophy: A Collection of Essays*, 195–217. Dordrecht: Springer Netherlands (1965).

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	master rad
Autor: **AU**	Sanja Vukmirović
Mentor: **MN**	dr Anna Slivková
Naslov rada: **NR**	Golombova hijerarhija popločavanja poliominama i njena proširenja
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	s/en
Zemlja publikovanja: **ZP**	Republika Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2026
Izdavač: **IZ**	autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Novi Sad, Trg D. Obradovića 3
Fizički opis rada (broj poglavlja/strana/lit.citata/	

tabela/slika/grafika/priloga):	(5/58/16/2/36/0/0)
FO	
Naučna oblast:	matematika
NO	
Naučna disciplina:	Kombinatorna geometrija
ND	
Predmetne odrednice, ključne reči:	poliomine, popločavanje, Golombova hijerarhija, polikubovi, teselacija, protoskup
PO	
UDK	
Čuva se:	Biblioteka departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
ČU	
Važna napomena:	
VN	
Izvod:	Predmet ovog rada je Golombova hijerarhija popločavanja poliominama- klasifikacioni model koji uspostavlja logičke implikacije i hijerarhijske odnose između različitih oblasti ravni koje poliomina može da poploča. U radu su obrađeni karakteristični primeri koji pokazuju strogu inkluziju određenih klasa, kao i uopštenja hijerarhije na skupove pločica i trodimenzionalni prostor.
IZ	
Datum prihvatanja teme od strane NN veća:	1.septembar 2026.
DP	
Datum odbrane:	
DO	

Članovi komisije:

Predsednik: dr Olga Bodroža Pantić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član: dr Petar Marković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, član, mentor: dr Anna Slivková, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

KO

UNIVESITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Acession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	monograph type
Type of record: **TR**	printed text
Contents code: **CC**	master thesis
Author: **AU**	Sanja Vukmirović
Mentor: **MN**	Dr Anna Slivková
Title: **TI**	Golomb's Polyomino Tiling Hierarchy and Its Extensions
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	s/en
Country of publication: **CP**	Republic of Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2026
Publisher: **PU**	author's reprint
Publication place: **PP**	Novi Sad, Trg D. Obradovića 3
Physical description (chapters/pages/references/tables/	

pictures/charts/supplements): (5/58/16/2/36/0/0)

PD

Scientific field: mathematics

SF

Scientific discipline: Combinatorial geometry

SD

Subject, key words: polyomino, tiling, Golomb's hierarchy, polycube, tesselation, prototileset

SKW

UC

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The subject of this thesis is Golomb's hierarchy of polyomino tilings - a classification model that establishes logical implications and hierarchical relationships between different regions of the plane that a polyomino can tile. The thesis also examines characteristic examples that demonstrate the strict inclusion of certain classes, as well as generalizations of the hierarchy to sets of tiles and three-dimensional space.

AB

Accepted on Scientific board on: September 1st, 2026

AS

Defended:

DE

Thesis Defend board: President: Olga Bodroža Pantić, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Member: Petar Marković, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Member, mentor: Anna Slivková, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

DB