



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Danijela Tomić

Razumevanje razlomaka u osnovnoj školi: između konceptualnog i proceduralnog znanja

- master rad -

Mentor: dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2026.

Sadržaj

Uvod.....	2
1. Pojam razlomka i njegova različita značenja.....	4
2. Razvoj pojma razlomka u osnovnoj školi	6
2.1 Uvođenje pojma razlomaka u osnovnoj školi.....	7
2.2 Analiza udžbenika	9
3. Istraživanja razumevanja razlomaka.....	15
4. Empirijsko istraživanje	24
4.1 Metodologija	24
4.2 Rezultati.....	26
4.3 Diskusija	43
Zaključak	47
Literatura	49
Prilog.....	51
Biografija	52

Uvod

Razlomci predstavljaju jedan od najvažnijih, ali i najsloženijih matematičkih sadržaja sa kojima se učenici susreću tokom osnovnog obrazovanja. Oni čine osnovu za razumevanje racionalnih brojeva i drugih matematičkih pojmova i sadržaja koji se obrađuju u višim razredima osnovne škole i tokom daljeg školovanja. Zbog toga uspešno usvajanje pojma razlomka ima dugoročan značaj za razvoj matematičke pismenosti i predstavlja važan preduslov za uspešno usvajanje složenijih matematičkih sadržaja.

Iako se pojam razlomka uvodi već u osnovnoj školi, brojna istraživanja pokazuju da njegovo razumevanje predstavlja značajan izazov za veliki broj učenika. Teškoće se ne odnose samo na izvođenje računskih operacija, već i na razumevanje različitih reprezentacija razlomka. Upravo zbog toga razumevanje razlomaka predstavlja jedno od najčešće proučavanih pitanja u oblasti didaktike matematike.

Poslednjih decenija sproveden je veliki broj istraživanja posvećenih razumevanju razlomaka i teškoćama sa kojima se učenici susreću prilikom njihovog usvajanja. Posebna pažnja u ovim istraživanjima usmerena je na ispitivanje odnosa između konceptualnog i proceduralnog znanja, identifikovanje tipičnih grešaka i zabluda učenika, kao i unapređivanje nastavnih pristupa koji doprinose razumevanju ovog matematičkog pojma.

Konceptualno znanje odnosi se na razumevanje matematičkih pojmova, njihovih međusobnih odnosa i sposobnost povezivanja različitih zapisa razlomaka. Proceduralno znanje podrazumeva poznavanje algoritama, pravila i postupaka koji omogućavaju rešavanje matematičkih zadataka. Iako su ove dve dimenzije znanja međusobno povezane i dopunjuju se, brojna istraživanja pokazuju da učenici mogu razviti proceduralnu uspešnost bez odgovarajućeg konceptualnog razumevanja, kao i da dobro konceptualno razumevanje ne mora uvek biti praćeno sigurnim izvođenjem procedura. Zbog toga se odnos između konceptualnog i proceduralnog znanja smatra jednim od ključnih pitanja savremene didaktike matematike.

Analiza grešaka koje učenici prave tokom rešavanja zadataka sa razlomcima predstavlja važan izvor informacija o njihovom načinu razmišljanja. Savremena didaktička istraživanja greške ne posmatraju isključivo kao pokazatelje neuspeha, već kao pokazatelje načina na koji učenici razumeju matematičke pojmove i razvijaju strategije rešavanja problema. Identifikovanje tipičnih grešaka i zabluda omogućava bolje razumevanje procesa

učenja, ali i planiranje nastavnih aktivnosti koje mogu doprineti razvoju dubljeg i trajnijeg razumevanja razlomaka.

Polazeći od navedenih saznanja, predmet ovog rada jeste razumevanje razlomaka kod učenika viših razreda osnovne škole, sa posebnim osvrtom na konceptualno razumevanje, tipične greške i strategije koje učenici koriste prilikom rešavanja zadataka. Cilj rada je ispitivanje nivoa konceptualnog razumevanja razlomaka kod učenika viših razreda osnovne škole, identifikovanje najčešćih grešaka, zabluda i strategija rešavanja, kao i utvrđivanje postojanja razlika u postignuću između učenika šestog, sedmog i osmog razreda.

Rad je organizovan u četiri međusobno povezana dela. U prvom delu prikazan je pojam razlomka i njegova različita značenja. Drugi deo rada posvećen je analizi načina uvođenja pojma razlomka u nastavi matematike u osnovnoj školi kroz analizu odabranih udžbenika matematike. Posebna pažnja usmerena je na način predstavljanja pojma razlomka, redosled uvođenja njegovih različitih značenja, kao i odnos između aktivnosti koje podstiču razvoj konceptualnog razumevanja i onih koje su prvenstveno usmerene na usvajanje računskih procedura. U trećem delu prikazana su i analizirana relevantna istraživanja koja se bave razumevanjem razlomaka, odnosom konceptualnog i proceduralnog znanja, najčešćim greškama i zabludama učenika, kao i faktorima koji utiču na njihovo usvajanje. Četvrti deo obuhvata empirijsko istraživanje sprovedeno na uzorku od približno 280 učenika šestog, sedmog i osmog razreda osnovne škole. Kao instrument istraživanja korišćen je test sa šest zadataka kojima se ispituju različiti aspekti razumevanja razlomaka, uključujući predstavljanje, poređenje, interpretaciju i operacije sa razlomcima, uz procenu sigurnosti učenika u tačnost datih odgovora. Dobijeni podaci biće analizirani primenom deskriptivne statistike, jednofaktorske analize varijanse (ANOVA), odgovarajućih post hoc testova i kvalitativne analize obrazaca odgovora, sa ciljem formulisanja preporuka za unapređivanje nastavne prakse.

1. Pojam razlomka i njegova različita značenja

Razlomak predstavlja jedan od osnovnih pojmova u matematici i uvodi se kao zapis kojim se izražava deo celine, odnos dve veličine ili rezultat deljenja dva broja. Iako se zapisuje jednostavnim simboličkim zapisom oblika $\frac{a}{b}$, njegovo značenje nije jednoznačno, već zavisi od matematičkog konteksta u kojem se koristi. Upravo ta višeznačnost čini razlomak jednim od najsloženijih pojmova koje učenici usvajaju tokom osnovnog obrazovanja.

U literaturi se razlikuje više značenja razlomka, među kojima se najčešće izdvajaju razlomak kao deo celine, količnik, odnos, operator i broj (mera na brojevnoj pravoj). Svako od ovih značenja naglašava drugačiji aspekt istog matematičkog pojma i javlja se u različitim matematičkim situacijama. Budući da je predmet ovog rada usmeren na analizu udžbenika i ispitivanje usvajanja pojma razlomka kod učenika osnovne škole, u nastavku će biti prikazana značenja koja su najznačajnija za ovo istraživanje:

- razlomak kao **deo celine**;
- razlomak kao **operator** i
- razlomak kao **broj**.

Jedno od osnovnih značenja razlomka jeste njegovo tumačenje kao dela celine. U ovom slučaju celina se deli na jednake delove, pri čemu imenilac pokazuje na koliko je jednakih delova celina podeljena, a brojilac koliko se tih delova posmatra. Kako bi učenici lakše razumeli ovo značenje, razlomak se najčešće uvodi pomoću konkretnih modela, poput geometrijskih figura, pice, čokolade ili drugih predmeta iz svakodnevnog života, koji omogućavaju vizuelno sagledavanje veze između celine i njenih delova. Posebno je važno da svi delovi celine budu jednake veličine, jer se samo u tom slučaju može govoriti o razlomku. Učenici pritom postepeno uočavaju da povećanjem broja jednakih delova svaki pojedinačni deo postaje manji, kao i da veličina razlomka zavisi od međusobnog odnosa brojioca i imenioca. Takvo razumevanje predstavlja osnovu za kasnije upoređivanje razlomaka i usvajanje njihovih drugih značenja.

Razlomak kao operator predstavlja postupak određivanja dela neke veličine ili broja. Za razliku od razlomka kao dela celine, gde je pažnja usmerena na odnos između dela i celine, ovde razlomak deluje na zadatu količinu i određuje koliki njen deo treba

izdvojiti. Na primer, određivanje $\frac{2}{5}$ od broja 30 podrazumeva da se najpre odredi petina broja, a zatim uzmu dva takva dela. U ovom značenju razlomak ne opisuje deo nekog konkretnog objekta, već predstavlja postupak kojim se dobija nova vrednost. Razlomak kao operator često se primenjuje pri određivanju dela broja, izračunavanju popusta, procenata, površina i drugih veličina, zbog čega ima značajnu ulogu u rešavanju problemskih zadataka i primeni matematike u svakodnevnim situacijama.

Razlomak kao broj podrazumeva njegovo posmatranje kao tačke na brojevnoj pravoj, odnosno kao broja koji ima tačno određeno mesto među ostalim brojevima. Za razliku od razlomka kao dela celine, koji je vezan za konkretan objekat ili skup objekata, razlomak kao broj postoji nezavisno od konkretnog konteksta i predstavlja apstraktnu matematičku veličinu. Takvo razumevanje omogućava upoređivanje razlomaka, određivanje njihovog položaja na brojevnoj pravoj, povezivanje sa decimalnim zapisom. Učenici na taj način uočavaju da se razlomci mogu nalaziti između dva cela broja, da različiti zapisi mogu predstavljati isti broj (npr. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0,5$) i da se sa njima mogu izvoditi iste matematičke operacije kao i sa ostalim brojevima. Posmatranje razlomka kao broja predstavlja važan korak u razvoju pojma racionalnog broja i omogućava njegovo povezivanje sa ostalim brojevnim skupovima.

Iako se navedena značenja razlikuju prema kontekstu u kojem se razlomak koristi, ona ne predstavljaju različite matematičke pojmove, već različite interpretacije istog pojma. Potpuno razumevanje razlomaka podrazumeva sposobnost učenika da uoče veze između ovih interpretacija i da ih primenjuju u različitim matematičkim situacijama. Upravo zbog toga način na koji su pojedina značenja razlomka zastupljena i međusobno povezana u nastavi i udžbenicima predstavlja važno pitanje matematičkog obrazovanja.

2. Razvoj pojma razlomka u osnovnoj školi

Razlomci predstavljaju jedan od najznačajnijih, ali i najzahtevnijih sadržaja u osnovnoškolskoj matematici. Njihovo usvajanje označava prelazak sa razumevanja prirodnih brojeva na širi sistem racionalnih brojeva, pri čemu učenici treba da razviju nova matematička značenja i usvoje različite načine predstavljanja razlomaka. Za razliku od prirodnih brojeva, koji se uglavnom oslanjaju na iskustva brojanja i prebrojavanja, razlomci zahtevaju razumevanje odnosa između dela i celine, veličine broja, ekvivalentnosti, kao i povezanosti različitih prikaza. Zbog toga se u stručnoj literaturi razlomci često navode kao jedna od prekretnica u razvoju matematičkog mišljenja učenika.

Način na koji se pojam razlomka uvodi u nastavu matematike ima značajan uticaj na kasnije razumevanje racionalnih brojeva i uspešnost učenika u savladavanju složenijih matematičkih sadržaja. Postepeno uvođenje različitih značenja razlomka, povezivanje vizuelnih, simboličkih i verbalnih prikaza, kao i razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja predstavljaju osnovne ciljeve nastave u ovom području. Ukoliko učenici razlomke usvajaju pretežno kroz pravila i algoritme, bez razvijenog razumevanja njihovog značenja, često dolazi do formiranja pogrešnih predstava i trajnih teškoća koje se ispoljavaju u kasnijem školovanju.

Iz tog razloga, važno je analizirati na koji način je pojam razlomka zastupljen u nastavnom planu i programu. Program nastave i učenja određuje ishode, sadržaje i očekivanja za svaki razred osnovne škole, dok obrazovni standardi preciziraju nivoe postignuća koje učenici treba da ostvare na kraju obrazovnih ciklusa. Analiza ovih dokumenata omogućava sagledavanje načina na koji se planira razvoj razumevanja razlomaka, kao i u kojoj meri se podstiče razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja.

U nastavku će biti prikazano kako se pojam razlomka postepeno uvodi i razvija kroz nastavu matematike, kroz analizu ishoda učenja definisanih Programom nastave i učenja, kao i obrazovnih standarda za kraj prvog i drugog ciklusa osnovnog obrazovanja.

2.1 Uvođenje pojma razlomaka u osnovnoj školi

Učenici se prvi put susreću sa pojmom razlomka u drugom razredu, kroz sadržaje o polovini, trećini, četvrtini i drugim jednakim delovima celine. Na ovom uzrastu razlomak se uvodi kao deo celine, pri čemu se razumevanje ovog pojma razvija kroz konkretne situacije iz svakodnevnog života i različite slikovne prikaze. Pored razlomka kao dela celine, uvodi se i određivanje dela datog broja. U ovoj fazi naglasak je na izgrađivanju početnog značenja razlomka kroz odnos dela i celine, dok određivanje dela broja uvodi i postupke koji će se kasnije dalje razvijati.

U trećem razredu učenici proširuju znanja o razlomcima stečena u drugom razredu. Upoznaju zapis razlomka, pojam brojioca i imenioca, povezuju simbolički zapis razlomka sa slikovnim prikazima, upoređuju razlomke sa istim imeniocima i prevode razlomke u decimalni zapis sa jednom decimalom.

Dalje, u četvrtom razredu, nastavlja se sistematsko razvijanje znanja o razlomcima stečenih u prethodnim razredima, pri čemu se nastava postepeno usmerava ka produbljivanju razumevanja razlomka kao broja. Pored predstavljanja razlomaka i njihovog povezivanja sa konkretnim i grafičkim modelima, učenici uče da upoređuju razlomke sa jednakim brojiocima, kao i da uočavaju jednake razlomke, prevode razlomke u decimalni zapis sa dve decimale. Na taj način razvijaju razumevanje da isti racionalni broj može biti predstavljen različitim zapisima, što predstavlja važnu osnovu za sadržaje koji se obrađuju u petom razredu. Uvode se prve računске operacije sa razlomcima, tj. sabiranje i oduzimanje razlomaka sa jednakim imeniocima.

Može se uočiti da se u četvrtom razredu i dalje dominantno razvija konceptualno razumevanje razlomaka, ali se istovremeno postavljaju temelji za razvoj proceduralnog znanja. Uvođenjem upoređivanja razlomaka i prvih računskih operacija učenici postepeno prelaze od intuitivnog shvatanja razlomka kao dela celine ka njegovom razumevanju kao broja sa kojim je moguće izvoditi matematičke operacije. Na taj način četvrti razred predstavlja važnu prelaznu etapu između početnog upoznavanja sa razlomcima i njihovog sistematskog proučavanja koje sledi u višim razredima osnovne škole.

U petom razredu pojam razlomka dobija centralno mesto u nastavi matematike i prvi put se sistematski proučava kao zasebna nastavna oblast. Nadovezujući se na znanja stečena u mlađim razredima, učenici proširuju razumevanje razlomaka i usvajaju nove

pojmove, svojstva i postupke koji predstavljaju osnovu za dalje proučavanje racionalnih brojeva. Na početku obrade nastavnih sadržaja pažnja je usmerena na produblјivanje razumevanja razlomka kao broja. Učenici razlomke predstavljaju na brojevnoj polupravoј, određuju njihov položaj i povezuju različite načine predstavljanja istog razlomka. Nakon toga, usvajaju postupke proširivanja i skraćivanja razlomaka, koji predstavljaju osnov za njihovo upoređivanje i izvođenje računskih operacija. Posebna pažnja posvećuje se povezivanju razlomaka sa decimalnim zapisom i procentima, čime učenici uočavaju da različiti zapisi mogu predstavljati isti racionalni broj. Dalje se prelazi na računске operacije, gde se prvo uvodi sabiranje i oduzimanje razlomaka sa jednakim imeniocima, a zatim i sa različitim imeniocima, kao i množenje i deljenje razlomaka. I na kraju se računске operacije sa razlomcima primenjuju u problemskim zadacima, jednačinama i nejednačinama.

Možemo reći da peti razred predstavlja prelomni trenutak u učenju razlomaka, jer se udeo proceduralnih sadržaja značajno povećava, a uspešno usvajanje algoritama za proširivanje, skraćivanje, upoređivanje i računanje sa razlomcima moguće je jedino ukoliko su zasnovani na prethodno razvijenom konceptualnom razumevanju. U suprotnom postoji opasnost da učenici postupke usvajaju mehanički, bez razumevanja njihovog matematičkog smisla, što može dovesti do formiranja trajnih zabluda i teškoća u daljem učenju matematike.

U višim razredima osnovne škole razlomci se više ne obrađuju kao izdvojena nastavna tema, već se njihova primena proširuje na racionalne brojeve, algebru, proporcionalnost, procenete, jednačine, funkcije i geometrijske sadržaje. Na taj način razlomci postaju sastavni deo različitih matematičkih oblasti, a od učenika se očekuje da stečeno konceptualno razumevanje i proceduralne veštine primenjuju u novim matematičkim situacijama.

Na osnovu analize Programa nastave i učenja može se uočiti da se pojam razlomka razvija postepeno – od intuitivnog razumevanja jednakih delova celine u drugom razredu, preko formalnog uvođenja pojma u trećem i njegovog proširivanja u četvrtom razredu, do sistematskog proučavanja razlomaka kao racionalnih brojeva u petom razredu. Takva progresija ukazuje na nastojanje da se razvoj proceduralnih veština zasnuje na prethodno izgrađenom konceptualnom razumevanju razlomaka.

Obrazovni standardi za kraj prvog i drugog ciklusa osnovnog obrazovanja predstavljaju očekivane ishode koje učenici treba da ostvare u oblasti razlomaka po

završetku odgovarajućeg nivoa obrazovanja. Za razliku od Programa nastave i učenja, koji prikazuje postepeni razvoj pojma razlomka kroz pojedine razrede, standardi određuju nivo znanja i veština koji učenici treba da dostignu na kraju obrazovnog ciklusa.

Standardi za kraj prvog ciklusa potvrđuju da je u ovom periodu naglasak na usvajanju osnovnih pojmova vezanih za razlomke. Od učenika se očekuje da razumeju pojam razlomka, čitaju, zapisuju i upoređuju jednostavne razlomke, povezuju simbolički zapis sa slikovnim prikazom i određuju deo celine. Pored toga, učenici na višim nivoima postignuća izvode i jednostavne računске operacije sa razlomcima jednakih imenilaca i određuju deo date celine. Na taj način standardi potvrđuju da je do kraja prvog ciklusa prioritet izgradnja razumevanja pojma razlomka, dok se proceduralne veštine razvijaju postepeno i u ograničenom obimu.

Standardi za kraj osnovnog obrazovanja proširuju ova očekivanja i usmereni su ka sigurnoj primeni razlomaka u različitim matematičkim sadržajima. Od učenika se očekuje da povezuju razlomke sa decimalnim zapisom i procentima, izvode računске operacije sa racionalnim brojevima i primenjuju stečena znanja u rešavanju matematičkih i problemskih zadataka. Time se potvrđuje kontinuitet u razvoju znanja o razlomcima – od njihovog osnovnog razumevanja u mlađim razredima ka njihovoj primeni u složenijim matematičkim situacijama tokom drugog ciklusa osnovnog obrazovanja.

Analiza obrazovnih standarda pokazuje da se očekivanja u pogledu znanja o razlomcima postepeno razvijaju kroz oba obrazovna ciklusa. Dok su u prvom ciklusu u prvom planu razumevanje pojma razlomka i njegovo predstavljanje, u drugom ciklusu naglasak se pomera ka primeni računskih postupaka i rešavanju složenijih matematičkih problema. Takva progresija ukazuje na nastojanje da se konceptualno i proceduralno znanje razvijaju međusobno povezano, pri čemu konceptualno razumevanje predstavlja osnovu za uspešno ovladavanje proceduralnim veštinama.

2.2 Analiza udžbenika

U cilju sagledavanja načina na koji se pojam razlomka razvija kroz osnovnoškolsko obrazovanje, izvršena je analiza udžbenika matematike za drugi, treći, četvrti i peti razred osnovne škole. Analizirani su udžbenik izdavačke kuće „Nova škola“ d.o.o., Beograd, za

drugi razred i udžbenici izdavačke kuće ArhiKnjiga, Beograd, za treći, četvrti i peti razred. Analiza obuhvata način uvođenja pojma razlomka, ključne pojmove i nastavne sadržaje, kao i njihovo povezivanje sa drugim matematičkim sadržajima. Svi primeri i ilustracije prikazani u nastavku preuzeti su iz analiziranih udžbenika ovih izdavača. Rezultati analize prikazani su u Tabeli 1.

Tabela 1: Analiza udžbenika

Razred	Način uvođenja pojma razlomka	Ključni pojmovi i zapisi	Povezivanje sa drugim sadržajima
II	Razlomci se uvode najpre kroz polovinu u okviru deljenja, a zatim kroz jedinične razlomke kao delove celine.	polovina, trećina, četvrtina, razlomci oblika $\frac{1}{n}$, ($2 \leq n \leq 10$), deo celine, određivanje dela broja	deljenje, geometrijske figure, svakodnevne situacije
III	Uvodi se čitanje i pisanje razlomaka, njihovo upoređivanje i povezivanje sa decimalnim zapisom broja.	brojilac i imenilac, upoređivanje razlomaka sa istim imeniocima, jedno celo, decimalni zapis broja sa jednom decimalom	deljenje, geometrijske figure, decimalni zapis brojeva, jedinice mere
IV	Proširuje se upoređivanje razlomaka, uvodi jednakost razlomaka, sabiranje i oduzimanje razlomaka sa jednakim imeniocima, decimalni zapis brojeva.	upoređivanje razlomaka sa jednakim brojiocima i imeniocima, jednaki razlomci, sabiranje i oduzimanje razlomaka sa jednakim imeniocima, decimalni zapis broja sa dve decimale	računske operacije, decimalni zapis brojeva, jedinice mere
V	Pojam razlomka prvi put se sistematski obrađuje kao zasebna nastavna oblast.	pojam razlomka, razlomak na brojevnoj polupravo, proširivanje, skraćivanje, jednakost, upoređivanje razlomaka, decimalni zapis razlomka, računske operacije, jednačine i nejednačine sa razlomcima	brojeva prava, decimalni brojevi, računske operacije, jednačine i nejednačine, geometrija, problemski zadaci

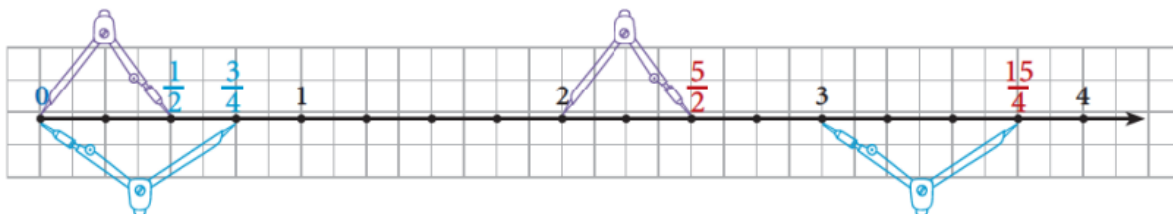
Analiza udžbenika pokazuje da se pojam razlomka tokom osnovnoškolskog obrazovanja razvija postepeno, od intuitivnog razumevanja razlomka kao dela celine ka njegovom formalnijem matematičkom određivanju i razumevanju razlomka kao broja. U drugom razredu razlomci se uvode kroz konkretne situacije iz svakodnevnog života i

geometrijske prikaze, pri čemu učenici najpre usvajaju odnos između celine i njenih jednakih delova. U ovom periodu dominiraju konkretni modeli, poput deljenja jabuke ili čokolade, koji predstavljaju osnovu za uvođenje simboličkog zapisa razlomaka (Slika 1).



Slika 1: Uvođenje razlomka kao dela celine kroz konkretan model (2. razred)

U trećem i četvrtom razredu zadržavaju se slikovni prikazi, ali se sve više naglašava simbolički zapis, čitanje i zapisivanje razlomaka, njihovo upoređivanje i povezivanje sa decimalnim zapisom. Značajan korak ka formalnijem razumevanju ostvaruje se u petom razredu, kada se razlomci predstavljaju na brojevnoj polupravoj (Slika 2), čime se naglašava njihovo značenje broja, a ne samo dela celine. Na taj način učenici postepeno prelaze od konkretnih i vizuelnih modela ka apstraktnijem matematičkom predstavljanju razlomaka.



Slika 2: Predstavljanje razlomka na brojevnoj polupravoj kao korak ka razumevanju razlomka kao broja (5. razred)

Paralelno sa razvojem pojma razlomka razvijaju se i postupci koje učenici primenjuju pri radu sa razlomcima. U mlađim razredima oni su usmereni na određivanje dela celine i dela broja, pri čemu se polazi od jednostavnijih primera sa jediničnim razlomcima, a zatim se postupno proširuju na razlomke čiji brojilac nije jednak 1 (slika 3). U narednim razredima naglasak se pomera ka upoređivanju razlomaka, uočavanju jednakih razlomaka i izvođenju računskih operacija, da bi u petom razredu razlomci postali osnova za rešavanje složenijih matematičkih zadataka, uključujući jednačine, nejednačine i problemske situacije. Na taj način može se uočiti jasan kontinuitet u razvoju postupaka – od jednostavne primene razlomka u konkretnim situacijama do njegovog korišćenja kao sredstva za rešavanje različitih matematičkih problema. (slika 4)

3. Израчунај.

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{4} \text{ броја } 48: \underline{\hspace{2cm}} & \frac{3}{5} \text{ броја } 355: \underline{\hspace{2cm}} \\ \frac{2}{7} \text{ броја } 196: \underline{\hspace{2cm}} & \frac{2}{4} \text{ броја } 124: \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

Slika 3: Uvođenje razlomka kao operatora kroz određivanje dela broja (3. razred)

3. У пекари је испечено 360 мафина. Емилија је спаковала $\frac{4}{8}$ мафина у кутије за доставу, а Огњен је спаковао $\frac{5}{10}$. Колико је мафина спаковала Емилија, а колико Огњен? Ко је спаковао више мафина?

Slika 4: Primena razlomaka u rešavanju problemskih zadataka iz svakodnevnog života (4. razred)

Pojam razlomka od samog početka nije razvijan kao izolovan matematički sadržaj, već se postepeno povezuje sa drugim oblastima matematike. U početku ta povezanost ima funkciju izgradnje osnovnog značenja razlomka, dok se u višim razredima sve češće koristi u okviru drugih matematičkih sadržaja (slika 5). Razlomci tako više nisu samo zasebna nastavna oblast, već postaju sastavni deo različitih matematičkih sadržaja.

56. У једној школи је одлучено да се бетонира део дворишта облика правоугаоника дужине $7\frac{1}{2}$ m, а ширине $8\frac{3}{4}$ m. Са свим припремама, цена бетонирања је 4 000 динара по квадратном метру. Колико ће школа платити за ове радове?

Slika 5: Primer proširivanja primene razlomaka na druge matematičke oblasti (5. razred)

Međutim, analiza udžbenika ukazuje i na određena ograničenja u načinu predstavljanja razlomaka. Najveća pažnja posvećena je razlomku kao delu celine, dok su druga značenja razlomka manje eksplicitno obrađena. Iako se određivanje dela broja uvodi već u drugom razredu i postepeno proširuje u narednim razredima, razlomak kao operator uglavnom se razvija kroz rešavanje zadataka, bez posebnog razmatranja njegove matematičke prirode i bez jasnog povezivanja sa razlomkom kao delom celine. Slično tome, razlomak se u petom razredu predstavlja na brojevnoj polupravoj kao broj, ali se prelaz od razlomka kao dela celine ka razlomku kao broju ne naglašava eksplicitno. Zbog toga različita značenja razlomka ostaju uglavnom implicitno povezana, što može otežati učenicima da ih sagledaju kao različite interpretacije istog matematičkog pojma.

Značaj razlomaka u osnovnoškolskom obrazovanju potvrđuje se i njihovom zastupljenošću na završnom ispitu. Analiza zadataka pokazuje da se od učenika ne očekuje samo poznavanje računskih postupaka sa razlomcima, već i razumevanje njihovih različitih reprezentacija i sposobnost primene u problemskim situacijama. Razlomci se na završnom ispitu pojavljuju u zadacima različitih nivoa složenosti i u okviru različitih matematičkih sadržaja, što ukazuje na njihov značaj u proveru znanja i njihove primene. Na Slici 6 prikazana su dva reprezentativna zadatka sa završnog ispita 2026. godine.

Prvi zadatak zahteva povezivanje razlomka sa njegovim decimalnim zapisom, čime se proverava razumevanje različitih reprezentacija istog broja. Drugi zadatak zahteva primenu razlomka u realnom kontekstu, pri čemu učenik određuje deo celine, a zatim dobijeni rezultat koristi u daljem rešavanju problema. Zanimljivo je da oba zadatka zahtevaju primenu različitih značenja razlomka – kao broja i kao operatora – iako analiza udžbenika pokazuje da njihove međusobne veze nisu uvek eksplicitno naglašene tokom nastave.

1. У тексту који следи појављује се разломак.
„У једном одељењу петог разреда четири петине од укупног броја ученика је остварило позитиван резултат на тесту из биологије.”
Који је децимални запис тог разломка?
Обој кружић испред тачног одговора.
- ☐ 4,5 ☐ 0,45 ☐ 0,8 ☐ 5,4
2. Никола је купио лаптоп чија је цена била 60 000 динара. Прва рата је износила $\frac{1}{4}$ укупне цене, а остатак је платио у четири једнаке рате. Колики је био износ једне од преосталих рата?
Обој кружић испред тачног одговора.
- ☐ 11 250 динара ☐ 12 000 динара ☐ 13 250 динара ☐ 14 000 динара

Slika 6: Zadaci sa završnog ispita koji proveravaju različita značenja i primenu razlomaka

Posmatrano u celini, analiza udžbenika pokazuje postepeno proširivanje pojma razlomka, od dominantnog oslanjanja na model dela celine ka razlomku kao broju i njegovoj primeni u različitim matematičkim sadržajima. Istovremeno, različita značenja razlomka nisu uvek eksplicitno međusobno povezana. Stoga se kao posebno značajno pitanje izdvaja u kojoj meri učenici tokom školovanja uspevaju da izgrade veze između različitih interpretacija razlomka i da ih primene u različitim tipovima zadataka.

3. Istraživanja razumevanja razlomaka

Razumevanje razlomaka već dugi niz godina predstavlja jednu od najznačajnijih tema istraživanja u oblasti didaktike matematike. Savremena istraživanja usmerena su na različite aspekte učenja razlomaka, među kojima se izdvajaju odnos konceptualnog i proceduralnog znanja, učeničke greške i zablude, metakognitivni procesi, kao i faktori koji utiču na uspešnost učenja. U nastavku su prikazana četiri reprezentativna istraživanja koja se bave navedenim aspektima razumevanja razlomaka.

Lenz, Reinhold i Wittmann [2] sprovedli su longitudinalno istraživanje sa ciljem da ispituju razvoj konceptualnog i proceduralnog znanja razlomaka kod učenika sedmog razreda. Polazeći od rezultata ranijih istraživanja koja ukazuju da ova dva oblika znanja mogu biti razvijena u različitoj meri, autori su želeli da utvrde da li se profili konceptualnog i proceduralnog znanja menjaju tokom vremena, koliko su stabilni i koji individualni faktori utiču na njihove promene.

U istraživanju je učestvovalo 166 učenika sedmog razreda iz devet odeljenja pet nemačkih škola, prosečne starosti 12,6 godina. Nakon početnog testiranja učenici su prošli kratku nastavnu intervenciju koja se sastojala od tri nastavne jedinice u trajanju od po 45 minuta. Prva nastavna jedinica bila je usmerena na razvoj konceptualnog razumevanja razlomaka, druga na razumevanje ekvivalentnih razlomaka, dok je treća obuhvatala sabiranje i oduzimanje razlomaka. Tokom nastave korišćene su različite reprezentacije razlomaka sa ciljem povezivanja vizuelnih, simboličkih i verbalnih prikaza.

Za procenu konceptualnog znanja korišćeni su zadaci koji su zahtevali verbalno objašnjavanje pojma razlomka, predstavljanje razlomaka na brojevnoj pravoj i povezivanje različitih prikaza razlomaka. Proceduralno znanje procenjivano je zadacima pretvaranja nepravilnih razlomaka u mešovite brojeve i obrnuto, proširivanja i skraćivanja razlomaka, kao i izvođenja računskih operacija. Pored toga, ispitivane su osnovne aritmetičke kompetencije, opšte kognitivne sposobnosti, matematička anksioznost i interesovanje za matematiku kao faktori koji mogu uticati na uspešnost učenika.

Analiza rezultata pokazala je da se nakon nastavne intervencije poboljšalo i konceptualno i proceduralno znanje učenika. Međutim, proceduralno znanje napredovalo je u većoj meri od konceptualnog, što ukazuje da je usvajanje računskih postupaka često brže od razvoja dubljeg razumevanja razlomaka. Primenom latentne tranzicione analize

autori su identifikovali šest profila konceptualnog i proceduralnog znanja, koji su se razlikovali prema nivou razvijenosti oba oblika znanja. Rezultati su pokazali da su ovi profili uglavnom bili stabilni tokom vremena i da nije dolazilo do naglog razvoja slabije razvijenog oblika znanja. Drugim rečima, učenici koji su na početku istraživanja imali izraženije proceduralno nego konceptualno znanje uglavnom su zadržavali taj obrazac i nakon intervencije, kao i učenici kod kojih je situacija bila obrnuta.

Rezultati istraživanja pokazali su da su učenici sa bolje razvijenim osnovnim računskim veštinama i izraženijim sposobnostima logičkog zaključivanja češće pripadali grupama sa višim nivoom konceptualnog i proceduralnog znanja razlomaka. Sa druge strane, viši nivo matematičke anksioznosti bio je povezan sa slabijim postignućima, dok interesovanje za matematiku nije pokazalo značajan uticaj na razvoj ovih oblika znanja.

Istraživanje potvrđuje da konceptualno i proceduralno znanje predstavljaju međusobno povezana, ali različita područja matematičkog znanja. Posebno je značajan nalaz da kratkotrajna nastavna intervencija nije bila dovoljna da učenici razviju uravnotežen odnos između ova dva oblika znanja. Ovi nalazi ukazuju na potrebu da se u nastavi matematike, pored usvajanja računskih postupaka, podjednaka pažnja posveti razumevanju značenja razlomaka, obrazlaganju postupaka i povezivanju različitih interpretacija razlomka.

Pored istraživanja koja su bila usmerena na odnos konceptualnog i proceduralnog znanja, novija istraživanja razumevanja razlomaka sve više pažnje posvećuju metakognitivnim procesima, odnosno načinu na koji učenici procenjuju sopstveno znanje i sigurnost u rešavanju zadataka. Polazi se od pretpostavke da učenici mogu biti veoma sigurni u odgovore koji su zapravo zasnovani na pogrešnom razumevanju matematičkih pojmova. Ovim pitanjem bavili su se Grenell, Butts, Levine i Fyfe [1]. Autori su pošli od činjenice da učenici često razvijaju stabilne zablude prilikom rešavanja zadataka iz matematike, naročito u oblastima matematičke ekvivalentnosti i razlomaka. Iako su ove dve oblasti često predmet zasebnih istraživanja, zajedničko im je da učenici u njima primenjuju strategije koje proizlaze iz prethodno usvojenog znanja, ali u novom kontekstu dovode do pogrešnih rešenja. Cilj istraživanja bio je da se ispita u kojoj meri učenici uspešno procenjuju tačnost sopstvenih odgovora, kao i da li je ova sposobnost povezana sa pojedinim kognitivnim sposobnostima, kao što su radno pamćenje, sposobnost potiskivanja automatskih odgovora i sposobnost prilagođavanja različitim načinima rešavanja zadataka.

U istraživanju je učestvovalo 80 učenika uzrasta od sedam do devet godina (prosečna starost 7,7 godina). Učenici su individualno rešavali zadatke matematičke ekvivalentnosti i zadatke sa ekvivalentnim razlomcima, a nakon svakog zadatka procenjivali su koliko su sigurni u tačnost svog odgovora. Prvi test odnosio se na matematičku ekvivalentnost i sadržao je četiri zadatka oblika $3 + 5 = 4 + \square$, dok je drugi test obuhvatao osam zadataka sa ekvivalentnim razlomcima u kojima je bilo potrebno odrediti nedostajući broj kako bi dve razlomljene vrednosti bile jednake (npr. $\frac{1}{2} = \frac{\square}{4}$). Nakon rešavanja svakog zadatka učenici su na četvorostepenoj skali procenjivali koliko su sigurni da su dali tačan odgovor. Umesto jednostavne analize tačnih i netačnih odgovora, autori su analizirali i strategije koje su učenici koristili prilikom rešavanja zadataka. Kod zadataka matematičke ekvivalentnosti autori su razlikovali tačne strategije i nekoliko tipičnih pogrešnih strategija, poput sabiranja svih brojeva u izrazu ili sabiranja brojeva sa leve strane jednakosti. Kod zadataka sa razlomcima analizirano je da li učenici razumeju pojam ekvivalentnih razlomaka ili pri rešavanju primenjuju način razmišljanja karakterističan za prirodne brojeve, posmatrajući brojilac i imenilac odvojeno, umesto vrednosti razlomka kao celine.

Rezultati istraživanja pokazali su da su učenici bili uspešniji u rešavanju zadataka matematičke ekvivalentnosti nego zadataka sa razlomcima. Prosečna tačnost odgovora na zadacima matematičke ekvivalentnosti iznosila je 47%, dok je na zadacima sa razlomcima iznosila 31%. Istovremeno, učenici su u oba tipa zadataka pokazivali relativno visok nivo sigurnosti u svoje odgovore (3,34 i 3,08 na četvorostepenoj skali), pri čemu su bili najsigurniji kada su davali tačne odgovore. Međutim, visok nivo sigurnosti uočen je i kod pojedinih netačnih odgovora koji su bili posledica karakterističnih zabluda. Drugim rečima, učenici često nisu bili svesni da greše, već su bili uvereni da su njihova rešenja ispravna. Ovakvi rezultati ukazuju da pogrešni odgovori nisu bili slučajni, već su proizlazili iz stabilnih i doslednih strategija razmišljanja. U pogledu povezanosti između procene sopstvenih odgovora i pojedinih kognitivnih sposobnosti, rezultati su pokazali da su radno pamćenje i sposobnost potiskivanja automatskih pogrešnih odgovora u određenoj meri povezani sa uspešnijom procenom tačnosti sopstvenih rešenja, dok za ostale ispitivane sposobnosti nije utvrđena značajna povezanost. Takođe, nije pronađena izražena povezanost između procene sopstvenih odgovora u zadacima matematičke ekvivalentnosti i zadacima sa razlomcima, što ukazuje da uspešnost u proceni sopstvenog znanja može zavisi od matematičke oblasti.

Rezultati ovog istraživanja ukazuju da analiza tačnosti odgovora sama po sebi nije dovoljna za potpuno razumevanje učeničkog znanja. Jednako je važno ispitati koliko su učenici sigurni u svoje odgovore, jer visok nivo sigurnosti u pogrešna rešenja može ukazivati na postojanje duboko ukorenjenih zabluda. Ovaj nalaz je od posebnog značaja za nastavu matematike, jer nastavnicima može pomoći da razlikuju slučajne greške od onih koje proizlaze iz pogrešnog razumevanja matematičkih pojmova.

Posebnu pažnju u savremenoj literaturi privlači pitanje na koji način prethodno matematičko znanje utiče na usvajanje pojma razlomka. Ovim problemom bavili su se Xu, Di Lonardo Burr, Li, Liu i Si [3], koji su analizirali međusobne odnose između znanja o prirodnim brojevima, razumevanja razlomaka i rešavanja tekstualnih zadataka. Njihov cilj bio je da utvrde na koji način se ova znanja međusobno nadovezuju i koja od njih imaju najveći značaj za uspešno rešavanje složenijih matematičkih problema.

Instrument istraživanja bio je koncipiran tako da obuhvati različite aspekte matematičkog znanja, od osnovne aritmetike prirodnih brojeva do rešavanja tekstualnih zadataka. Ispitivanje je sprovedeno na uzorku od 1160 učenika šestog razreda iz dve osnovne škole u Kini. Zadaci iz aritmetike prirodnih brojeva obuhvatali su sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Svaka računaska operacija bila je ispitivana posebnim testom koji je sadržao 40 zadataka, pri čemu je vreme za rešavanje svakog testa bilo ograničeno na jedan minut. Pored zadataka iz aritmetike prirodnih brojeva, učenici su rešavali četiri grupe zadataka kojima su ispitivani različiti aspekti razumevanja razlomaka. Prvu grupu činili su zadaci povezivanja grafičkog prikaza sa simboličkim zapisom razlomka, u kojima je na osnovu obojenog dela slike trebalo zapisati odgovarajući razlomak. Drugu grupu činili su zadaci ekvivalentnih razlomaka, u kojima su učenici procenjivali da li simbolički zapis odgovara prikazanoj slici. Treću grupu činili su zadaci poređenja razlomaka, u kojima je bilo potrebno odrediti ili zaokružiti veći od dva ponuđena razlomka. Četvrtu grupu činili su zadaci sabiranja i oduzimanja razlomaka sa istim i različitim imeniocima. Na kraju su učenici rešavali tekstualne zadatke preuzete iz revidirane verzije aritmetičkog podtesta Wechslerove skale inteligencije za kinesku decu (WISC; Zhang, 2009). Zadaci su bili raspoređeni po težini, a uspešnost je izražavana ukupnim brojem ostvarenih poena, pri čemu su za složenije zadatke dodeljivani i bonus poeni za brzo rešavanje. Kao kontrolne varijable ispitivani su neverbalna inteligencija i brzina pisanja brojeva.

Rezultati istraživanja pokazali su da su učenici ostvarili visoka postignuća u svim ispitivanim oblastima. U aritmetici prirodnih brojeva najbolji rezultati ostvareni su u deljenju ($M = 34,8$, gde M označava prosečan broj tačnih odgovora), zatim množenju ($M = 33,5$), sabiranju ($M = 31,5$) i oduzimanju ($M = 30,1$). Visok nivo uspešnosti ostvaren je i u ispitivanju razumevanja razlomaka, pri čemu je prosečna tačnost u svim grupama bila veća od 75%. Svaka grupa sadržala je po 20 zadataka, a prosečan broj tačnih odgovora kretao se od 15,7 do 17,2. Najbolji rezultati ostvareni su u povezivanju grafičkog prikaza sa simboličkim zapisom razlomka ($M = 17,2$), dok su prosečni rezultati na zadacima ekvivalentnih razlomaka ($M = 16,1$), poređenja razlomaka ($M = 16,2$), sabiranja razlomaka ($M = 15,7$) i oduzimanja razlomaka ($M = 16,3$) bili međusobno slični. Uočene su i razlike između dečaka i devojčica u pojedinim grupama zadataka. Devojčice su ostvarile nešto bolje rezultate na zadacima povezivanja grafičkog prikaza sa simboličkim zapisom razlomka (17,4 u odnosu na 17,0), dok su dečaci bili nešto uspešniji u zadacima poređenja razlomaka (16,3 u odnosu na 16,0). Ipak, autori ističu da su ove razlike bile male. U tekstualnim zadacima učenici su u proseku ostvarili 22,4 poena od maksimalno 30, pri čemu je standardna devijacija iznosila 3,4.

Analiza korelacija, zasnovana na Pirsonovom koeficijentu korelacije (r), pokazala je da su sve ispitivane oblasti bile međusobno pozitivno povezane. Korelacije između aritmetike prirodnih brojeva i različitih aspekata razumevanja razlomaka bile su umerene i kretale su se od 0,39 do 0,54, što ukazuje da razvijenije računske veštine predstavljaju značajnu osnovu za uspešnije usvajanje sadržaja o razlomcima. Korelacije između pojedinih aspekata razumevanja razlomaka uglavnom su bile niske do umerene (od 0,33 do 0,48), dok je najizraženija povezanost utvrđena između sabiranja i oduzimanja razlomaka ($r = 0,71$). Pozitivne, ali niske do umerene korelacije uočene su i između rešavanja tekstualnih zadataka i svih ispitivanih oblasti (od 0,23 do 0,35), pri čemu su najveće korelacije zabeležene sa sabiranjem i oduzimanjem razlomaka. Ovi rezultati pokazuju da uspešnost učenika u jednoj vrsti zadataka sa razlomcima ne podrazumeva nužno jednaku uspešnost u ostalim vrstama zadataka.

Iako su korelacione analize pokazale da su sve ispitivane oblasti međusobno povezane, one ne omogućavaju zaključak o tome koja znanja neposredno doprinose uspešnosti u drugim oblastima. Zbog toga su autori primenili multilevelni model strukturnih jednačina (multilevel SEM), u koji su, pored ispitivanih oblasti matematičkog znanja, kao kontrolne varijable uključeni neverbalna inteligencija, brzina pisanja brojeva i

pol. Na taj način procenjeni su direktni i indirektni odnosi između aritmetike prirodnih brojeva, razumevanja razlomaka i rešavanja tekstualnih zadataka.

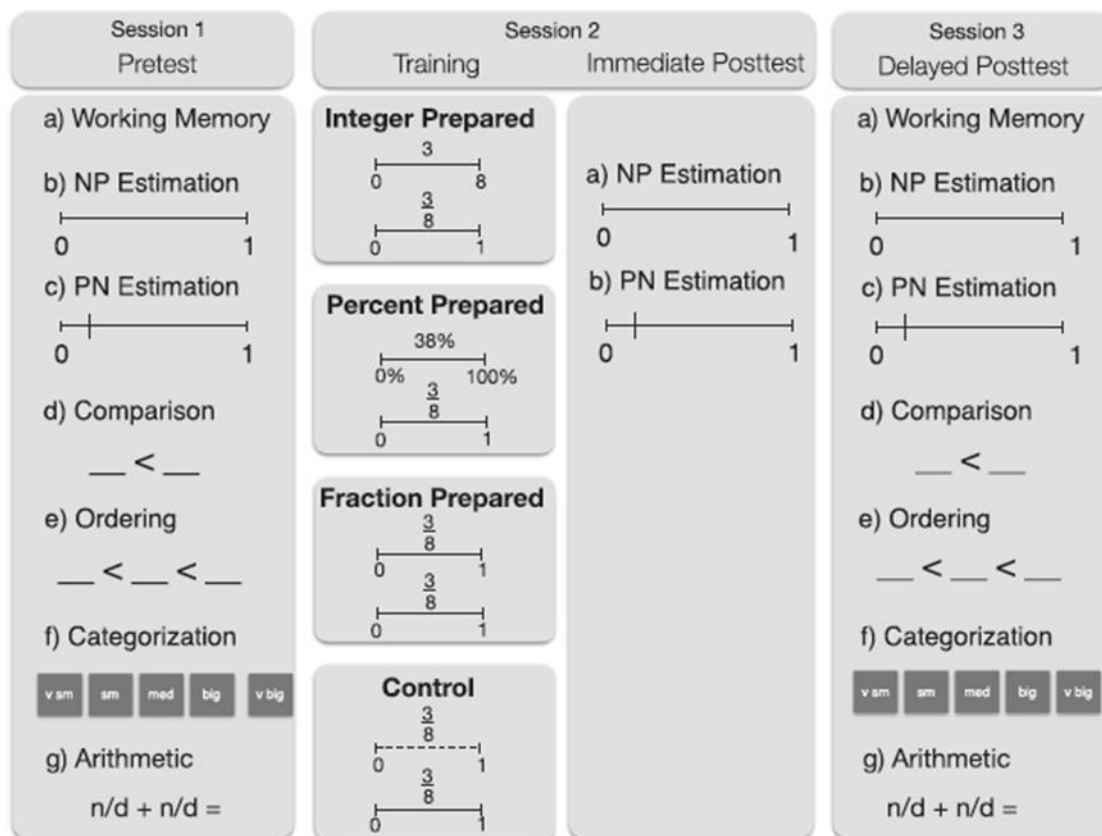
Rezultati su pokazali da aritmetika prirodnih brojeva direktno doprinosi uspešnosti u svim ispitivanim aspektima razumevanja razlomaka. Najizraženiji uticaj utvrđen je na aritmetiku razlomaka ($\beta = 0,70$; $p < 0,001$), pri čemu β označava jačinu uticaja u modelu, dok p označava nivo statističke značajnosti. Značajni uticaji zabeleženi i na ekvivalentnost razlomaka ($\beta = 0,55$; $p < 0,001$), poređenje razlomaka ($\beta = 0,49$; $p < 0,001$) i povezivanje grafičkog prikaza sa simboličkim zapisom razlomka ($\beta = 0,43$; $p < 0,001$). Istovremeno, pokazalo se da je aritmetika razlomaka jedina neposredno doprinosila uspešnosti u rešavanju tekstualnih zadataka ($\beta = 0,32$; $p < 0,001$), dok aritmetika prirodnih brojeva nije imala direktan uticaj, već je njen doprinos bio posredan preko znanja o razlomcima (indirektni efekat $b = 0,21$; $p < 0,001$). Ovi nalazi potvrđuju da razvijene računske veštine sa prirodnim brojevima predstavljaju osnovu za uspešno usvajanje razlomaka. Istovremeno, razumevanje i računanje sa razlomcima predstavljaju ključnu vezu između osnovnih računskih veština i uspešnog rešavanja tekstualnih zadataka.

Na osnovu sprovedenog istraživanja autori zaključuju da usvajanje razlomaka ima ključnu ulogu u uspešnom rešavanju složenijih matematičkih problema. Zbog toga ističu da u nastavi treba podsticati razvoj različitih aspekata znanja o razlomcima, a ne samo ovladavanje računskim postupcima.

Mogućnost unapređenja razumevanja razlomaka primenom analogije bila je predmet istraživanja Yu, Sidney, Kim, Thompson i Opfer [4]. Autori su pošli od pretpostavke da se novo matematičko znanje lakše usvaja ukoliko se poveže sa prethodno usvojenim i učenicima poznatim sadržajima. Cilj istraživanja bio je da se ispita da li povezivanje znanja o prirodnim brojevima, procentima ili razlomcima može doprineti uspešnijem usvajanju pojma razlomka i da li se efekti takvog učenja zadržavaju i nakon određenog vremena.

U istraživanju je učestvovalo 109 učenika četvrtog i petog razreda iz pet osnovnih škola u Sjedinjenim Američkim Državama. Učenici su nasumično raspoređeni u četiri grupe. U prvoj grupi analogija je uspostavljana između razlomaka i prirodnih brojeva, u drugoj između razlomaka i procenata, a u trećoj između različitih prikaza razlomaka, dok su učenici kontrolne grupe rešavali iste zadatke, ali bez aktivnosti koje su podsticale

uočavanje analogije. Istraživanje je obuhvatilo pretest, fazu treninga, neposredni posttest i odloženi posttest sproveden dve nedelje nakon završetka treninga (Slika 7).



Slika 7: Prikaz postupka istraživanja i grupa zadataka korišćenih za procenu razumevanja razlomaka [4].

Pre i nakon treninga učenici su rešavali zadatke kojima su ispitivani različiti aspekti razumevanja razlomaka. Prvu grupu činili su zadaci određivanja položaja razlomka na brojnoj pravoj i zapisivanja razlomka na osnovu označenog položaja. Drugu grupu činili su zadaci poređenja razlomaka, u kojima je bilo potrebno odrediti koji je od ponuđenih razlomaka veći. Treća grupa obuhvatala je zadatke ređanja razlomaka po veličini, dok su u četvrtoj grupi učenici razvrstavali razlomke u odgovarajuće kategorije prema njihovoj brojnoj vrednosti (npr. „skoro ništa“, „nešto“, „polovina“, „najviše“ i „skoro sve“). Peta grupa zadataka odnosila se na sabiranje i oduzimanje razlomaka. Tokom treninga učenici su rešavali zadatke na brojnoj pravoj. U eksperimentalnim grupama zadaci su bili organizovani tako da podstaknu uočavanje analogije između razlomaka i prirodnih brojeva, procenata ili drugih razlomaka, dok su učenici kontrolne grupe rešavali zadatke bez takvog

poređenja. Neposredno nakon treninga ponovo su rešavali zadatke određivanja položaja broja na brojevnoj pravoj, a dve nedelje kasnije sproveden je odloženi posttest kojim su ponovo ispitivani svi aspekti razumevanja razlomaka.

Rezultati pretesta pokazali su da između grupa nije bilo statistički značajnih razlika u početnom nivou znanja, što ukazuje da su grupe bile međusobno ujednačene pre početka treninga. Tokom treninga učenici iz sve tri eksperimentalne grupe ostvarili su bolje rezultate od učenika kontrolne grupe u oba tipa zadataka na brojevnoj pravoj. Kod zadataka određivanja položaja broja na brojevnoj pravoj procentualna greška iznosila je 2,1% u grupi koja je radila sa prirodnim brojevima, 2,8% u grupi sa procentima i 1,8% u grupi sa razlomcima, dok je u kontrolnoj grupi iznosila 6,7%. Slični rezultati dobijeni su i kod zadataka zapisivanja razlomka na osnovu označenog položaja na brojevnoj pravoj, gde je procentualna greška u eksperimentalnim grupama iznosila 0,4%, 0,9% i 0,4%, naspram 4,1% u kontrolnoj grupi. Sve razlike između eksperimentalnih i kontrolne grupe bile su statistički značajne ($p < 0,001$), što ukazuje da je analogijsko povezivanje različitih matematičkih sadržaja već tokom treninga doprinosilo uspešnijem rešavanju zadataka na brojevnoj pravoj. Međutim, na neposrednom posttestu nisu utvrđene statistički značajne razlike između grupa, što pokazuje da se prednosti analogijskog učenja nisu ispoljile odmah nakon završetka treninga.

Za razliku od neposrednog posttesta, rezultati odloženog posttesta pokazali su da su se prednosti analogijskog učenja ispoljile tek dve nedelje nakon završetka treninga. U ukupnom postignuću statistički značajno bolje rezultate od učenika kontrolne grupe ostvarili su samo učenici koji su tokom treninga uočavali analogiju između razlomaka i prirodnih brojeva ($OR = 1,48$; $p = 0,011$). Vrednost OR pokazuje da su učenici iz ove grupe imali veće šanse za postizanje boljeg rezultata od učenika kontrolne grupe, dok p označava nivo statističke značajnosti utvrđene razlike. U grupama u kojima su razlomci povezivani sa procentima ($OR = 1,17$; $p = 0,301$) i različitim prikazima razlomaka ($OR = 1,20$; $p = 0,231$) nije utvrđena statistički značajna razlika u odnosu na kontrolnu grupu. Posebna analiza zadataka koji nisu bili obuhvaćeni treningom pokazala je da su sve tri eksperimentalne grupe bile uspešnije od kontrolne. Najveći efekat ostvaren je u grupi u kojoj je analogija uspostavljana između razlomaka i prirodnih brojeva ($OR = 1,53$; $p = 0,009$), zatim u grupi u kojoj su razlomci povezivani sa procentima ($OR = 1,46$; $p = 0,018$), dok je nešto manji, ali i dalje statistički značajan efekat ostvaren u grupi u kojoj je analogija uspostavljana između različitih prikaza razlomaka ($OR = 1,39$; $p = 0,042$).

Ovi rezultati ukazuju da analogijsko povezivanje nije unapredilo samo rešavanje zadataka koji su bili obuhvaćeni treningom, već je omogućilo i uspešan prenos znanja na nove zadatke sa razlomcima.

Na osnovu sprovedenog istraživanja autori zaključuju da analogijsko povezivanje predstavlja efikasan pristup učenju razlomaka. Posebno se ističe povezivanje razlomaka sa prirodnim brojevima, koje je dovelo do najizraženijih i najtrajnijih efekata. Dobijeni nalazi ukazuju da analogija omogućava prenos znanja na nove matematičke situacije, što može doprineti dubljem razumevanju razlomaka u nastavi.

4. Empirijsko istraživanje

4.1 Metodologija

Cilj istraživanja

Cilj istraživanja bio je da se ispita razumevanje pojma razlomka kod učenika viših razreda osnovne škole kroz različite interpretacije razlomka i različite tipove zadataka. Posebna pažnja usmerena je na utvrđivanje najčešćih teškoća koje učenici imaju prilikom predstavljanja razlomka, određivanja dela celine, predstavljanja razlomka na brojnoj pravoj, izvođenja računskih operacija sa razlomcima, poređenja razlomaka i verbalizacije postupka sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima.

Istraživačka pitanja

IP1: Kakav je nivo uspešnosti učenika u rešavanju zadataka koji ispituju različite aspekte razumevanja pojma razlomka?

IP2: Postoje li razlike u uspešnosti učenika različitih razreda?

IP3: Postoji li povezanost između uspeha iz matematike i uspešnosti u rešavanju zadataka o razlomcima?

IP4: Koje su najčešće greške koje učenici prave pri rešavanju pojedinih tipova zadataka?

IP5: Koliko je procena sopstvene uspešnosti povezana sa stvarnim postignućem učenika?

Dizajn istraživanja

Istraživanje je sprovedeno primenom deskriptivnog, neeksperimentalnog istraživačkog dizajna. Podaci su prikupljeni jednokratnim testiranjem učenika pomoću pisanog instrumenta konstruisanog za potrebe ovog istraživanja. Cilj istraživanja nije bio ispitivanje efekata nastavnog tretmana, već utvrđivanje nivoa razumevanja pojma razlomka kod učenika različitih razreda osnovne škole, identifikovanje tipičnih grešaka koje se javljaju pri rešavanju zadataka, kao i ispitivanje povezanosti postignuća na testu sa uspehom iz matematike i procenom sopstvene uspešnosti učenika.

Uzorak

U istraživanju je učestvovao 281 učenik šestog, sedmog i osmog razreda osnovne škole. Uzorak je obuhvatio 151 dečaka (53,74%) i 130 devojčica (46,26%). Najveći broj ispitanika pohađao je osmi razred (117 učenika; 41,64%), zatim šesti razred (85 učenika; 30,25%), dok je sedmi razred pohađalo 79 učenika (28,11%). Struktura uzorka prema razredu i polu prikazana je u Tabeli 2.

Tabela 2: Struktura uzorka

razred	dečaci	devojčice	ukupno
VI	41	44	85
VII	46	33	79
VIII	64	53	117
ukupno	151	130	281

Prosečna zaključna ocena iz matematike na polugodištu za ceo uzorak iznosila je 3,57 ($SD = 1,16$). Prosečne ocene kretale su se od 3,42 kod učenika sedmog razreda do 3,79 kod učenika šestog razreda, ali analiza varijanse nije pokazala statistički značajne razlike između razreda ($F(2,278) = 2,32$; $p = 0,100$). S druge strane, uočena je statistički značajna razlika u oceni iz matematike između dečaka i devojčica. Devojčice su imale više prosečnu ocenu ($M = 3,92$) od dečaka ($M = 3,28$) ($F(1,279) = 22,85$; $p < 0,001$).

Instrument

Za potrebe istraživanja konstruisan je test koji je obuhvatao šest zadataka različitog tipa. Zbog organizacije testiranja pripremljene su dve gotovo identične verzije testa, koje su se razlikovale samo u vrednostima pojedinih razlomaka i brojčanih podataka, dok su struktura, težina i koncepti koji su ispitivani bili isti. Stoga u daljoj analizi nije pravljena razlika između dve verzije instrumenta.

Test je bio osmišljen tako da ispituje različite aspekte razumevanja pojma razlomka. Prvi zadatak odnosio se na predstavljanje razlomka kao dela celine. Drugim zadatkom ispitivano je razumevanje razlomka kao operatora („deo od broja“). Treći zadatak proveravao je razumevanje razlomka kao broja kroz njegovo predstavljanje na brojnoj pravoj. Četvrti zadatak obuhvatao je izvođenje osnovnih računskih operacija sa razlomcima. Peti zadatak bio je usmeren na konceptualno razumevanje poređenja

razlomaka, dok je šesti zadatak ispitivao sposobnost učenika da rečima opišu postupak sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima. Na kraju testa učenici su procenjivali sopstvenu uspešnost u rešavanju zadataka.

Tabela 3: Opis zadataka

Zadatak	Naziv	Šta se ispituje
1	Razlomak kao deo celine	deo-celina
2	Razlomak kao operator	deo od broja
3	Razlomak na brojnoj pravoj	razlomak kao broj
4	Operacije sa razlomcima	proceduralno znanje
5	Poređenje razlomaka	konceptualno razumevanje
6	Verbalizacija algoritma	proceduralno-konceptualno znanje

Obrada podataka

Prikupljeni podaci analizirani su primenom deskriptivne statistike (frekvencije, procenti, srednje vrednosti i standardne devijacije), χ^2 testa nezavisnosti, t-testa i analize varijanse (ANOVA), u zavisnosti od prirode promenljivih. Pored kvantitativne analize, za otvorene zadatke izvršena je kvalitativna analiza učeničkih odgovora, pri čemu su identifikovane i kategorisane najčešće greške i načini obrazloženja.

4.2 Rezultati

Rezultati pokazuju da uspešnost učenika značajno varira u zavisnosti od aspekta razumevanja razlomka koji se ispituje, Tabela 4. Najveći procenat tačnih odgovora ostvaren je na zadatku koji se odnosi na sabiranje razlomaka sa jednakim imeniocima (79,4%), dok je najmanje uspešno rešen zadatak u kome je od učenika traženo da verbalno opišu postupak sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima (5,0%). Veoma mali procenat tačnih odgovora zabeležen je i na zadatku poređenja razlomaka (17,4%), kao i na zadatku predstavljanja razlomaka na brojnoj pravoj (21,4% i 28,1%).

Tabela 4: Uspešnost rešavanja pojedinačnih zadataka

zadatak	tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih	%neuspešnih ¹
1 - Deo celine	169	107	5	60.1%	39.9%
2 - Operator	118	88	75	42.0%	58.0%
3.1 - Brojeva prava (5/9)	60	121	100	21.4%	78.6%
3.2 - Brojeva prava (21/23)	79	100	102	28.1%	71.9%
4.1 – Sabiranje (jednaki imenioci)	223	55	3	79.4%	20.6%
4.2 - Oduzimanje	166	88	27	59.1%	40.9%
4.3 - Sabiranje (različiti imenioci)	150	98	33	53.4%	46.6%
4.4 - Množenje	167	75	39	59.4%	40.6%
4.5 - Deljenje	92	129	60	32.7%	67.3%
5 - Poređenje razlomaka	49	112	120	17.4%	82.6%
6 - Verbalizacija algoritma	14	126	141	5.0%	95.0%

¹neuspešan odgovor se smatra pogrešno urađen ili bez odgovora

Pored netačnih odgovora, kod pojedinih zadataka uočljiv je i veliki broj učenika koji nisu dali odgovor. To je posebno izraženo kod zadatka verbalizacije postupka, na koji nije odgovorilo 141 učenik, kao i kod zadatka poređenja razlomaka, bez odgovora kod 120 učenika. Veliki broj izostavljenih odgovora zabeležen je i na oba zadatka predstavljanja razlomka na brojnoj pravoj.

Najviša uspešnost ostvarena je u rutinskom zadatku sabiranja razlomaka sa jednakim imeniocima, dok su učenici znatno manje uspešni u zadacima koji zahtevaju procenu veličine razlomka, njegovo predstavljanje na brojevnoj pravoj ili verbalno obrazlaganje postupka.

Zadatak *Deo celine*

Prvi zadatak ispitivao je razumevanje razlomka kao dela celine. Učenici su imali zadatak da oboje $\frac{3}{5}$, odnosno $\frac{2}{5}$ pravougaonika podeljenog na deset jednakih delova, raspoređenih u dva reda po pet delova. Ukupno je 60,1% učenika uspešno rešilo zadatak, dok 39,9% učenika nije dalo tačan odgovor ili nije odgovorilo na zadatak.

Tabela 5: Uspešnost rešavanja zadatka *Deo celine* po razredima

razred	<i>n</i>	tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih
VI	85	42	40	3	49.4%
VII	79	51	28	0	64.6%
VIII	117	76	39	2	65.0%

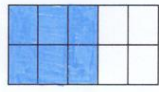
Posmatrano prema razredima, tačno je odgovorilo 49,4% učenika šestog razreda, 64,6% učenika sedmog razreda i 65,0% učenika osmog razreda, Tabela 5. Iako χ^2 test nije pokazao statistički značajnu razliku između razreda na nivou od 0,05 ($\chi^2 = 5,857$; $p = 0,054$), rezultat je veoma blizu granice statističke značajnosti. Dodatna analiza pokazala je da učenici šestog razreda postižu značajno slabiji rezultat u odnosu na ukupnu proporciju tačnih odgovora (60,1%), dok između sedmog i osmog razreda nema uočljivih razlika.

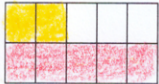
Između uspešnosti rešavanja zadatka i ocene iz matematike utvrđena je pozitivna i statistički značajna povezanost (Spearmanov $\rho = 0,29$; $p < 0,001$), što ukazuje da učenici sa višim školskim uspehom češće pravilno predstavljaju razlomak kao deo celine. Iako je povezanost umerene jačine, rezultat potvrđuje da razumevanje ovog osnovnog značenja razlomka raste sa opštim postignućem iz matematike.

Analiza odgovora

Analiza načina rešavanja pokazuje da su učenici koji su tačno rešili zadatak gotovo jednoglasno koristili isti način predstavljanja razlomka – obojili su po tri od pet jednakih delova u oba reda (146 učenika), Tabela 6. To ukazuje da većina učenika koji razumeju pojam razlomka kao dela celine koristi standardan način predstavljanja.

Tabela 6: Karakteristični odgovori učenika u zadatku *Deo celine*

Tip odgovora	Primer učeničkog odgovora	Broj učenika
<i>Tačno rešenje</i> - obojena po 2 (3) dela u prvom i drugom redu		146
<i>Pogrešno rešenje</i> - Obojena samo 2 (3) dela		49

<i>Pogrešno rešenje - Obojena 2 (3) dela u prvom redu i 5 delova u drugom redu</i>		49
--	--	----

Među pogrešnim odgovorima izdvajaju se dva dominantna tipa grešaka. Prvu grupu činili su učenici koji su obojili samo tri dela pravougaonika zanemarujući ukupan broj jednakih delova (49 učenika) što ukazuje da razlomak nisu interpretirali kao odnos između obojenog i ukupnog broja jednakih delova. Drugu, takođe brojnu grupu (49 učenika), činili su učenici koji su u prvom redu obojili dva, a u drugom pet delova, što pokazuje da su razlomak tumačili kao dva odvojena broja, a ne kao jedinstvenu celinu. Ostali tipovi pogrešnih odgovora javljali su se znatno ređe.

Zadatak *Operator*

Drugi zadatak ispitivao je razumevanje razlomka kao operatora, odnosno sposobnost učenika da odrede koliki je dati razlomak od zadatog broja. U ovom slučaju učenici su imali zadatak da odrede koliko iznosi $\frac{2}{5}$ od 30 (odnosno $\frac{3}{5}$ od 30 u drugoj verziji testa). Ovaj tip zadatka zahteva razumevanje razlomka kao operacije nad celinom, a ne samo njegovog predstavljanja ili računanja sa razlomcima.

Tabela 7: Uspešnost rešavanja zadatka *Operator* po razredima

razred	<i>n</i>	tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih
VI	85	25	41	19	29.4%
VII	79	39	24	16	49.4%
VIII	117	54	23	40	46.2%

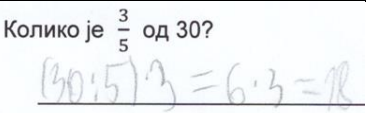
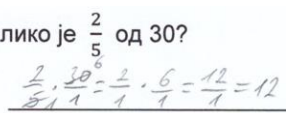
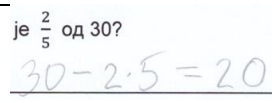
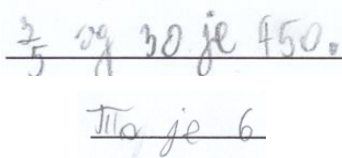
Ukupno 42,0% učenika tačno je rešilo zadatak, dok 58,0% učenika nije dalo tačan odgovor ili nije odgovorilo na zadatak. Posmatrano prema razredima, tačno je odgovorilo 29,4% učenika šestog razreda, 49,4% učenika sedmog razreda i 46,2% učenika osmog razreda, Tabela 7. χ^2 test pokazao je da postoje statistički značajne razlike između razreda ($\chi^2 = 21,869$; $p < 0,001$). Dodatna analiza pokazala je da učenici šestog razreda postižu značajno slabije rezultate u odnosu na učenike starijih razreda, dok između sedmog i osmog razreda nisu uočene značajne razlike.

Između uspešnosti rešavanja zadatka i ocene iz matematike utvrđena je pozitivna i statistički značajna povezanost (Spearmanov $\rho = 0,32$), što ukazuje da učenici sa boljim uspehom iz matematike uspešnije rešavaju zadatke u kojima se razlomak koristi kao operator.

Analiza odgovora

Analiza odgovora pokazuje da među tačnim rešenjima dominiraju tri karakteristična načina rešavanja, Tabela 8. Najveći broj učenika (49) naveo je samo tačan odgovor bez prikazivanja postupka. Pored toga, 37 učenika prikazalo je potpuno tačno rešenje sa odgovarajućim postupkom, dok je 29 učenika do tačnog rezultata došlo množenjem broja 30 odgovarajućim razlomkom, uz ispravno sproveden postupak. Ovi rezultati ukazuju da učenici koriste različite, ali matematički ispravne strategije za određivanje razlomka od broja.

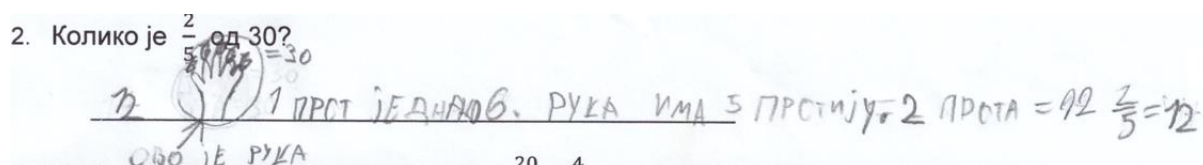
Tabela 8: Karakteristični odgovori učenika u zadatku *Operator*

Tip odgovora	Primer učeničkog odgovora	Broj učenika
Tačan odgovor bez postupka		49
<i>Tačno rešenje</i> $(30 : 5) \cdot 3$ tačan odgovor		37
<i>Tačno rešenje</i> Množi $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{1}$, tačan postupak		29
<i>Pogrešno rešenje</i> Odgovor je 15 ili 20 ($30-3 \cdot 5$ ili $30-2 \cdot 5$)		17
<i>Pogrešno rešenje</i> Odgovor je neki od brojeva 22; 6; 3; 2; 2,5; 65; 7; 4; 450; 8		31

Među pogrešnim odgovorima nije dominirala jedna karakteristična greška. Jedna grupa učenika davala je odgovore poput 15 ili 20, što ukazuje na nerazumevanje značenja razlomka kao operatora i pogrešan izbor računskih operacija. Drugu, brojniju grupu činili

su učenici koji su davali različite numeričke odgovore (npr. 22, 6, 3, 2, 2,5, 65, 7, 4, 450 i 8), bez uočljive zajedničke strategije rešavanja.

Posebno su zanimljiva dva izdvojena odgovora. Jedan učenik predstavio je broj 30 pomoću šake sa pet prstiju, pri čemu je svaki prst predstavljao šest jedinica, pa je zaključio da dva prsta odgovaraju vrednosti 12, odnosno $\frac{2}{5}$ od 30 (Slika 8). Drugi učenik proširio je razlomak tako da imenilac postane 30, a zatim brojilac tako dobijenog razlomka protumačio kao konačan odgovor. Oba odgovora su tačna, ali se izdvajaju po nestandardnom načinu rešavanja i ukazuju na to da učenici mogu koristiti različite modele i prethodno usvojena znanja kako bi došli do odgovarajućeg rezultata, pružajući tako dodatni uvid u njihov način razmišljanja.



Slika 8: Primer nestandardnog postupka određivanja razlomka od broja

Zadatak Brojeva prava

Treći zadatak ispitivao je razumevanje razlomka kao broja kroz njegovo predstavljanje na brojevnoj pravoj. Od učenika se tražilo da na datoj brojevnoj pravoj označe dva razlomka: $\frac{4}{9}$ i $\frac{20}{23}$, odnosno $\frac{5}{9}$ i $\frac{21}{23}$ u drugoj verziji testa. Pri proceni tačnosti uziman je u obzir položaj označene tačke u odnosu na 0 i 1, kao i na pomoćnu oznaku koja je odgovarala polovini jediničnog intervala.

Tabela 9: Uspešnost rešavanja zadatka *Brojeva prava* po razredima

razred	n	Razlomak $\frac{4}{9}$ ($\frac{5}{9}$)				Razlomak $\frac{20}{23}$ ($\frac{21}{23}$)			
		tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih	tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih
VI	85	6	45	34	7.1%	13	37	35	15.3%
VII	79	20	32	27	25.3%	26	26	27	32.9%
VIII	117	34	44	39	29.1%	40	37	40	34.2%

Rezultati, Tabela 9, pokazuju da je predstavljanje razlomaka na brojevnoj pravoj predstavljalo značajnu teškoću za učenike. Razlomak $\left(\frac{4}{9}\right)$ odnosno $\left(\frac{5}{9}\right)$ pravilno je označilo 60 učenika (21,4%), dok je razlomak $\left(\frac{20}{23}\right)$ odnosno $\left(\frac{21}{23}\right)$ pravilno označilo 79 učenika (28,1%). Uspešnost se povećavala sa razredom, pri čemu je kod oba razlomka posebno niska bila u šestom razredu. Prvi razlomak pravilno je označilo 7,1% učenika šestog, 25,3% učenika sedmog i 29,1% učenika osmog razreda, dok su odgovarajući procenti za drugi razlomak iznosili 15,3%, 32,9% i 34,2%.

U odgovorima na dva podzadatka uočena je izražena podudarnost. Oba razlomka pravilno je označio 51 učenik (18,1%), oba je pogrešno označilo 92 učenika (32,7%), dok 97 učenika (34,5%) nije odgovorilo ni na jedan podzadatak. Ovakav obrazac pokazuje da uspešnost nije zavisila samo od konkretnog razlomka koji je trebalo predstaviti, već da su učenici koji su imali teškoće sa jednom reprezentacijom najčešće imali teškoće i sa drugom. χ^2 test pokazao je statistički značajne razlike između razreda kod oba podzadatka ($\chi^2 = 15.501$; $p = 0,003$, odnosno $\chi^2 = 10.132$; $p = 0,038$). Dodatna analiza pokazala je da su učenici šestog razreda bili manje uspešni od učenika starijih razreda, dok između učenika sedmog i osmog razreda nisu utvrđene značajne razlike.

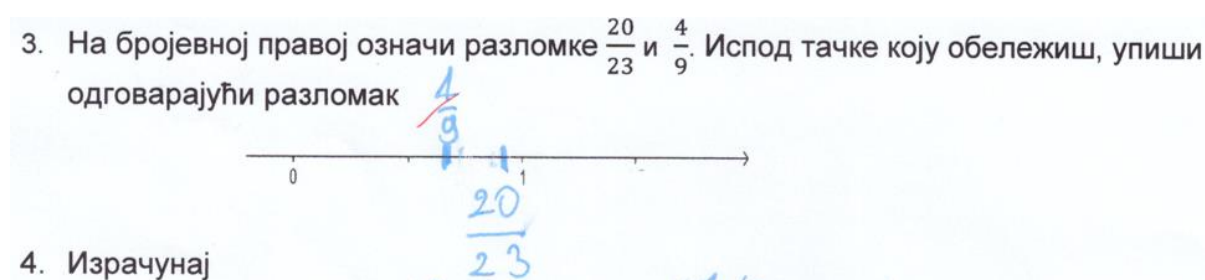
Uspešnost na oba podzadatka bila je pozitivno povezana sa ocenom iz matematike. Spearmanovi koeficijenti korelacije iznosili su $\rho = 0,32$ za prvi i $\rho = 0,40$ za drugi podzadatak, što pokazuje da su učenici sa višom ocenom iz matematike češće uspešno predstavljali razlomke na brojevnoj pravoj.

Analiza odgovora

Analiza netačnih odgovora pokazala je nekoliko karakterističnih obrazaca koji ukazuju na različite teškoće u predstavljanju razlomaka na brojevnoj pravoj. Najčešći tip greške zabeležen je kod 49 učenika (38,6% kodiranih netačnih odgovora), koji su razlomke upisivali ispod već označenih crtica na brojevnoj pravoj. Budući da su postojeće oznake predstavljale 0 , $\frac{1}{2}$, 1 i $1\frac{1}{2}$, ovakav način rešavanja ukazuje da učenici nisu koristili brojevu pravu kao kontinuiranu reprezentaciju veličine broja, već su razlomke vezivali za unapred označene položaje. Postojeće oznake na brojevnoj pravoj, umesto da posluže kao referentne vrednosti za procenu položaja razlomka, kod ovih učenika verovatno su shvaćene kao ponuđena mesta na koja treba rasporediti zadate razlomke.

Drugu izraženu grupu činili su odgovori koji pokazuju teškoće u proceni da li je razlomak manji ili veći od 1. Kod 24 učenika (18,9%) oba zadata razlomka označena su kao veća od 1, iako je kod svih zadatih razlomaka brojilac manji od imenioca. Pored toga, kod manjeg broja odgovora razlomak $\frac{21}{23}$ označen je kao veći od 1. Ovakvi odgovori ukazuju da učenici ne koriste odnos brojioca i imenioca kao osnovu za procenu veličine pravog razlomka.

Posebnu grupu čine greške povezane sa procenom položaja razlomka u odnosu na $\frac{1}{2}$. Razlomak $\frac{5}{9}$, koji je veći od $\frac{1}{2}$, pojedini učenici označavali su kao manji od $\frac{1}{2}$, dok je razlomak $\frac{4}{9}$, koji je manji od $\frac{1}{2}$, označavan kao veći od $\frac{1}{2}$ (Slika 9). U drugoj verziji testa javljali su se i odgovori u kojima je postavljen tačno na mesto $\frac{1}{2}$, odnosno na mesto $\frac{1}{4}$. Ovi odgovori pokazuju da učenici prepoznaju interval između 0 i 1 kao prostor u kojem treba smestiti razlomak, ali ne koriste pouzdano referentnu vrednost $\frac{1}{2}$ za procenu njegove veličine.



Slika 9. Primer pogrešne procene položaja razlomka u odnosu na $\frac{1}{2}$

Kod 10 učenika (7,9%) označeni položaji bili su blizu tačnog rešenja. Za razliku od prethodnih tipova grešaka, ovi odgovori ukazuju da učenici imaju približnu predstavu o veličini zadatog razlomka, ali ga ne pozicioniraju dovoljno precizno na brojevnoj pravoj. Zabeleženi su i pojedinačni odgovori sa izrazito nekonzistentnim položajima, kao što je istovremeno smeštanje $\frac{5}{9}$ blizu 1 i $\frac{21}{23}$ levo od 0.

Posmatrano u celini, analiza odgovora pokazuje da teškoće učenika nisu ograničene na precizno označavanje položaja razlomka. Kod značajnog broja učenika uočeno je nedovoljno razumevanje same brojevnice prave kao reprezentacije veličine broja, dok drugi odgovori ukazuju na teškoće u proceni veličine razlomka u odnosu na referentne vrednosti

$\frac{1}{2}$ i 1. Rezultati stoga ukazuju da deo učenika simbolički zapis razlomka ne povezuje pouzdano sa njegovom numeričkom veličinom i odgovarajućim položajem na brojevnoj pravoj.

Zadatak *Računske operacije*

Četvrti zadatak ispitivao je proceduralno znanje učenika u izvođenju osnovnih računskih operacija sa razlomcima. Zadatak se sastojao od pet podzadataka: sabiranja razlomaka sa jednakim imeniocima, oduzimanja, sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima, množenja i deljenja. Uspešnost učenika po razredima prikazana je u Tabeli 9.

Tabela 10: Uspešnost rešavanja zadatka *Računske operacije* po razredima

		4.1 – Sabiranje (jednaki imenioci)				4.2 - Oduzimanje			
	n	tačno	netačno	bez odgovora	%tačnih	tačno	netačno	bez odgovora	%tačnih
VI	85	64	20	1	75.3%	42	37	6	49.4%
VII	79	60	19	0	75.9%	48	24	7	60.8%
VIII	117	99	16	2	84.6%	76	27	14	65.0%

4.3 - Sabiranje (različiti imenioci)				4.4 - Množenje				4.5 - Deljenje			
tačno	netačno	bez odgovora	%tačnih	tačno	netačno	bez odgovora	%tačnih	tačno	netačno	bez odgovora	%tačnih
37	42	6	43.5%	43	30	12	50.6%	25	39	21	29.4%
42	28	9	53.2%	41	24	14	51.9%	22	39	18	27.8%
71	31	15	60.7%	83	21	13	70.9%	45	51	21	38.5%

Najuspešnije je rešeno sabiranje razlomaka sa jednakim imeniocima, sa ukupno 79,4% tačnih odgovora, dok je najmanja uspešnost zabeležena kod deljenja razlomaka (32,7%). Preostala tri podzadatka tačno je rešilo približno polovina učenika: oduzimanje 59,1%, sabiranje razlomaka sa različitim imeniocima 53,4% i množenje 59,4%. Učenici su, dakle, bili najuspešniji u računski najjednostavnijoj situaciji, u kojoj sabiranje nije zahtevalo svođenje razlomaka na zajednički imenilac, dok je najveće teškoće predstavljalo deljenje razlomaka.

Svih pet podzadataka tačno su rešila 54 učenika (19,2%), dok je 57 učenika (20,3%) tačno rešilo samo jedan podzadatak. Nijedan od pet podzadataka nije tačno rešilo 17 učenika (6,0%).

Posmatrano prema razredima, kod većine operacija uočava se porast uspešnosti od šestog ka osmom razredu, ali statistički značajne razlike između razreda utvrđene su samo

kod oduzimanja ($\chi^2 = 9.97$; $p = 0,040$), sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima ($\chi^2 = 12.96$; $p = 0,011$) i množenja ($\chi^2 = 12.08$; $p = 0,017$). Kod sabiranja sa jednakim imeniocima i deljenja nisu utvrđene statistički značajne razlike između razreda.

Kod svih pet podzadataka utvrđena je pozitivna i statistički značajna povezanost između uspešnosti rešavanja i ocene iz matematike. Spearmanovi koeficijenti korelacije iznosili su redom $\rho = 0.30$; $\rho = 0.49$; $\rho = 0.50$; $\rho = 0.21$ i $\rho = 0.46$. Najizraženija povezanost sa ocenom utvrđena je kod sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima i oduzimanja, dok je najslabija bila kod množenja.

Analiza odgovora

Analiza netačnih odgovora pokazala je da se kod pojedinih računskih operacija izdvajaju karakteristični obrasci grešaka. Pored računskih omaški, u odgovorima su uočeni i postupci koji ukazuju na nepravilnu primenu ili prenošenje pravila karakterističnih za jednu računsku operaciju na druge operacije sa razlomcima.

Kod sabiranja razlomaka sa jednakim imeniocima, koje je ujedno bilo najuspešnije rešeno, najčešća greška bila je sabiranje i brojilaca i imenilaca. Ovakav postupak primenilo je 37 učenika, dok je kod osam učenika zabeležena greška pri sabiranju brojilaca, a kod tri učenika pojedinačna omaška u zapisu imenioca. Sabiranje brojilaca i imenilaca predstavlja karakterističan pogrešan postupak u kojem učenici operaciju sabiranja primenjuju nezavisno na oba dela simboličkog zapisa razlomka.

Kod oduzimanja razlomaka nije uočena jedna dominantna greška. Najbrojniju kategoriju činile su računске omaške, zabeležene kod 18 učenika. Kod manjeg broja učenika javljali su se različiti pogrešni postupci: zamena oduzimanja sabiranjem, oduzimanje brojilaca i imenilaca, kao i određivanje recipročne vrednosti jednog od razlomaka i primena postupaka karakterističnih za množenje ili deljenje razlomaka. Raznovrsnost ovih odgovora pokazuje da, za razliku od nekih drugih podzadataka, kod oduzimanja nije izdvojen jedan zajednički obrazac koji bi objasnio većinu netačnih rešenja.

Kod sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima izdvojena je izrazito dominantna greška. Čak 61 učenik sabirao je brojioc i imenioce bez prethodnog svođenja razlomaka na zajednički imenilac. Kod 18 učenika zabeležena je računska omaška u sabiranju, dok su se ostali pogrešni postupci, poput unakrsnog sabiranja ili unakrsnog skraćivanja, javljali znatno ređe. Veliki broj učenika koji neposredno sabiraju brojioc i imenioce pokazuje da se pravilo za sabiranje razlomaka sa različitim imeniocima kod dela učenika ne primenjuje

pravilno. Posebno je značajno da se isti osnovni tip greške, sabiranje i brojlaca i imenilaca, javlja i kod sabiranja razlomaka sa jednakim imeniocima.

Kod množenja razlomaka najčešća karakteristična greška bila je svođenje razlomaka na zajednički imenilac, koje je primenio 31 učenik. Kod 16 učenika zabeležena je računski omaška u množenju, dok je sedam učenika određivalo recipročnu vrednost drugog razlomka pre množenja. Ostali tipovi grešaka javljali su se znatno ređe. Svođenje na zajednički imenilac kod množenja pokazuje da učenici postupak koji je potreban pri sabiranju i oduzimanju prenose na operaciju kod koje on nije potreban. Nasuprot tome, određivanje recipročne vrednosti drugog razlomka ukazuje na prenošenje postupka karakterističnog za deljenje razlomaka.

Najizraženije teškoće uočene su kod deljenja razlomaka. Pored toga što je ovaj podzadatak imao najmanji procenat tačnih odgovora, kod njega je zabeležen i najveći broj učenika koji nisu dali odgovor. Među netačnim rešenjima izrazito je dominirao odgovor $\frac{1}{2}$, koji je dalo 70 učenika. U njihovim zapisima pojavljuje se $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Velika učestalost istog netačnog odgovora pokazuje da se ne radi o pojedinačnoj računskoj omašci, već o karakterističnom pogrešnom postupku.

I kod drugih netačnih odgovora na zadatak deljenja uočava se nepravilna primena poznatih postupaka računanja sa razlomcima. Dvadeset jedan učenik svodio je razlomke na zajednički imenilac, a zatim delio, dok je 15 učenika određivalo recipročnu vrednost prvog umesto drugog razlomka. Kod manjeg broja učenika zabeleženi su i određivanje recipročnih vrednosti oba razlomka, proširivanje prvog razlomka pre deljenja i zamena mesta razlomcima pri prelasku sa deljenja na množenje. Ovakvi odgovori pokazuju da deo učenika koristi postupke koji pripadaju računanju sa razlomcima, ali ih ne primenjuje pravilno u konkretnoj računskoj operaciji.

Posmatrano u celini, analiza netačnih odgovora pokazuje da teškoće učenika pri izvođenju računskih operacija sa razlomcima nisu samo posledica pojedinačnih računskih omaški. U odgovorima se pojavljuju ponovljivi pogrešni postupci, među kojima se posebno izdvajaju sabiranje brojlaca i imenilaca, svođenje na zajednički imenilac kod množenja i deljenja i nepravilna primena recipročne vrednosti. Uočljivo je da učenici često koriste postupke koji jesu karakteristični za računanje sa razlomcima, ali ih primenjuju u operacijama u kojima nisu odgovarajući. Ovakvi odgovori ukazuju da kod dela učenika pojedinačna proceduralna pravila nisu dovoljno jasno diferencirana prema operaciji u kojoj se primenjuju.

Zadatak Poređenje razlomaka

Peti zadatak ispitivao je razumevanje veličine razlomka i sposobnost učenika da obrazlože poređenje dva razlomka sa jednakim brojiocima i različitim imeniocima. Učenicima je predstavljena netačna tvrdnja da je $\frac{3}{7}$ veće od $\frac{3}{5}$ zato što je 7 veće od 5, odnosno odgovarajuća tvrdnja sa razlomcima $\frac{3}{7}$ i $\frac{3}{4}$ u drugoj verziji testa. Od učenika se nije zahtevalo samo da utvrde da tvrdnja nije tačna, već i da obrazlože svoj odgovor.

Tabela 11: Uspešnost rešavanja zadatka *Poređenje razlomka* po razredima

razred	<i>n</i>	tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih
VI	85	7	49	29	8.2%
VII	79	8	30	41	10.1%
VIII	117	34	33	50	29.1%

Zadatak je uspešno rešilo 49 učenika (17,4%). Uspešnost se razlikovala prema razredu: tačan odgovor dalo je 7 učenika VI razreda (8,2%), 8 učenika VII razreda (10,1%) i 34 učenika VIII razreda (29,1%). Razlika između razreda bila je statistički značajna ($\chi^2 = 29,9$; $p < 0,001$). Utvrđena je i pozitivna, statistički značajna povezanost između uspešnosti na ovom zadatku i ocene iz matematike ($\rho = 0.27$), što pokazuje da su učenici sa višom ocenom iz matematike češće uspešno rešavali zadatak poređenja razlomaka.

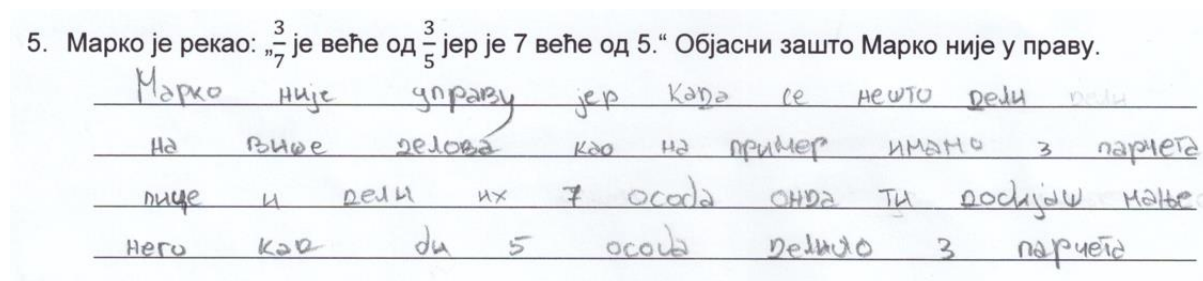
Analiza odgovora

S obzirom na otvoreni karakter zadatka, odgovori učenika omogućavaju dodatni uvid u načine na koje učenici obrazlažu poređenje razlomaka. Odgovori učenika kodirani su prema tačnosti obrazloženja, ali nisu dodatno razvrstavani prema vrsti korišćene strategije. Zbog toga naredna analiza nema za cilj utvrđivanje učestalosti pojedinih strategija, već ilustraciju karakterističnih načina obrazlaganja.

U jednom broju odgovora učenici su se oslanjali na pravilo za poređenje razlomaka sa jednakim brojiocima, navodeći da je, kada su brojioci jednaki, veći razlomak sa manjim imeniocem. Na primer, jedan učenik navodi: „Ako su imenioci različiti a brojioci isti onaj

razlomak sa manjim imeniocem je veći“, dok drugi obrazlaže: „Što je imenilac veći, razlomak je manji.“ Ovi odgovori pokazuju poznavanje odgovarajućeg pravila poređenja, mada samo obrazloženje ne mora nužno pokazivati zbog čega to pravilo važi.

Drugi učenici koristili su značenje razlomka kao dela celine, najčešće kroz primere pice, torte, čokolade ili jabuke (Slika 10). U tim odgovorima objašnjava se da podela iste celine na veći broj jednakih delova daje manje delove, pa su, na primer, tri petine veće od tri sedmine. Jedan učenik navodi da „kad se torta iseče na 5 delova parčići su veći, a kad se podeli na 7 delova parčići su manji“, dok drugi poredi tri parčeta iste celine podeljene na pet, odnosno sedam delova. U pojedinim odgovorima učenici su isti odnos prikazivali i crtežom pravougaonika ili krugova podeljenih na odgovarajući broj delova.



Slika10: Primer obrazlaganja poređenja razlomaka pomoću modela dela celine

Uočeni su i odgovori zasnovani na referentnim vrednostima, pre svega na polovini i jedinici. Tako učenici navode da je $\frac{3}{7}$ manje od polovine, dok je $\frac{3}{4}$ veće od polovine, ili porede koliko svakom razlomku nedostaje do jednog celog. Jedan učenik precizno obrazlaže da za $\frac{3}{7}$ „brojilac mora biti bar pola od broja 7“ da bi razlomak predstavljao najmanje polovinu, dok je kod $\frac{3}{4}$ brojilac veći od polovine imenioca (Slika 11). Drugi učenici koriste udaljenost od jedinice, navodeći, na primer, da do jednog celog razlomku $\frac{3}{7}$ nedostaje $\frac{4}{7}$, a razlomku $\frac{3}{4}$ samo $\frac{1}{4}$.

Deo učenika koristio je proceduralni pristup, svodeći razlomke na zajednički imenilac i zatim poredeći njihove brojioce. Na primer, razlomci $\frac{3}{7}$ i $\frac{3}{4}$ predstavljeni su kao $\frac{12}{28}$ i $\frac{21}{28}$, nakon čega je zaključeno da je $\frac{3}{4}$ veće. Sličan postupak primenjen je i kod poređenja $\frac{3}{7}$ i $\frac{3}{5}$, svođenjem na imenilac 35. Ovakvi odgovori dovode do tačnog zaključka, ali se

zasnivaju na naučenom algoritmu, za razliku od odgovora u kojima se veličina razlomka obrazlaže njegovim značenjem ili odnosom prema referentnoj vrednosti.

5. Марко је рекао: „ $\frac{3}{7}$ је веће од $\frac{3}{4}$ јер је 7 веће од 4.“ Објасни зашто Марко није у праву.

За разломак $\frac{3}{7}$ бројилац мора бити бар пола од броја 7 (пола од 7 је 3,5) да би разломак био пола целог разломка, а у овом случају је бројилац 3 што значи да није ни пола целог разломка а да $\frac{3}{7}$ је већи бројилац од 2 што значи да је више од пола разломка.

Slika 11: Primer učeničkog obrazloženja poređenja razlomaka pomoću referentne vrednosti $\frac{1}{2}$

Ređe se pojavljuju i drugi matematički opravdani pristupi. Pojedini učenici pretvarali su razlomke u decimalne brojeve ili procenete, na primer poređenjem $\frac{1}{2}$, odnosno 60% i 42,8%. Jedan učenik je razlomke interpretirao kao količnike, navodeći da je $\frac{3}{7} = 3 : 7$, dok je drugi poređenje obrazložio određivanjem odgovarajućih delova broja 28.

Pored matematički opravdanih objašnjenja, među odgovorima su prisutna i nepotpuna ili pogrešna obrazloženja. Neki učenici navode samo pravilo poput „kod razlomaka je uvek suprotno“ ili tvrde da je „manji broj veći“, bez uzimanja u obzir uslova pod kojima takvo poređenje važi. U drugim odgovorima uočava se mešanje brojioca i imenioca, pogrešno svođenje na zajednički imenilac ili primena računskih operacija koje nisu potrebne za poređenje. Takvi odgovori pokazuju da tačno prepoznavanje odnosa između razlomaka nije uvek praćeno matematički valjanim obrazloženjem.

Ilustrativna analiza odgovora pokazuje da učenici koji uspešno obrazlažu poređenje koriste različite strategije: pravilo za razlomke sa jednakim brojiocima, model dela celine, poređenje sa referentnim vrednostima, svođenje na zajednički imenilac, kao i decimalni ili procentni zapis. Istovremeno, prisustvo nepotpunih i pogrešnih obrazloženja ukazuje da učenici mogu raspolagati pojedinačnim pravilima ili intuitivnim predstavama o veličini razlomka, a da ih ne primenjuju uvek uz odgovarajuće uslove i matematičko obrazloženje.

Zadatak Verbalizacija algoritma

Šesti zadatak ispitivao je sposobnost učenika da verbalno iskažu postupak sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima. Za razliku od prethodnog zadatka računskih operacija,

od učenika se nije zahtevalo da primene algoritam na konkretnom primeru, već da samostalno formulišu uputstvo za njegovo izvođenje.

Kod ovog zadatka odgovor je smatran tačnim ukoliko je učenik naveo da je razlomke sa različitim imeniocima potrebno svesti na isti imenilac odgovarajućim proširivanjem razlomaka, pri čemu se brojilac i imenilac množe istim brojem, a zatim pravilno opisao postupak sabiranja, odnosno naveo da se nakon svođenja sabiraju brojioci, dok se isti imenilac zadržava. Odgovori u kojima je naveden samo deo postupka, bez dovoljno elemenata za pravilno izvođenje sabiranja, tretirani su kao delimično tačni u kvalitativnoj analizi, ali nisu bodovani kao tačni u kvantitativnoj analizi.

Tabela 12: Uspešnost rešavanja zadatka *Verbalizacija algoritma* po razredima

razred	<i>n</i>	tačno	nepotpuno/ netačno	bez odgovora	%tačnih
VI	85	2	43	40	2.4%
VII	79	4	29	46	5.1%
VIII	117	8	54	55	6.8%

Zadatak je u potpunosti tačno rešilo 14 učenika (5,0%). Tačan odgovor dala su 2 učenika VI razreda (2,4%), 4 učenika VII razreda (5,1%) i 8 učenika VIII razreda (6,8%). Iako se uočava porast procenta tačnih odgovora sa razredom, razlike između razreda nisu bile statistički značajne ($\chi^2 = 5,24$; $p = 0,263$). Utvrđena je statistički značajna, ali slaba pozitivna povezanost uspešnosti sa ocenom iz matematike ($\rho = 0.16$).

Posebno je značajno da mali broj potpuno tačnih odgovora ne znači da ostali učenici nisu raspolagali nikakvim znanjem o postupku sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima. Analiza njihovih zapisa pokazuje da je veliki broj učenika naveo bar pojedine ispravne korake algoritma, ali ih nije uspeo potpuno i precizno verbalizovati.

Analiza odgovora

Odgovori učenika nisu dodatno kodirani prema vrsti ili nivou potpunosti, pa naredna analiza nema za cilj utvrđivanje učestalosti pojedinih obrazaca, već ilustraciju karakterističnih načina na koje su učenici opisivali postupak sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima.

U velikom broju odgovora učenici su pravilno prepoznali osnovni preduslov za sabiranje razlomaka sa različitim imeniocima – njihovo svedenje na isti imenilac. Tako se u odgovorima često navodi da razlomke „treba da svedemo na isti imenilac“, da „imenioci moraju da budu isti“ ili da ih treba „proširiti“ kako bi dobili jednake imenioce. Ovakvi odgovori pokazuju da deo učenika poznaje osnovnu ideju postupka, iako često ne navodi sve korake potrebne za njegovo izvođenje.

U potpunijim odgovorima učenici su opisivali i način svedenja na zajednički imenilac, najčešće nalaženjem najmanjeg zajedničkog sadržaoca ili odgovarajućim proširivanjem razlomaka. Na primer, pojedini učenici navode da najpre treba pronaći najmanji zajednički sadržalac imenilaca, zatim proširiti razlomke tako da imaju isti imenilac, sabrati brojioc i zadržati zajednički imenilac. U drugim odgovorima isti postupak prikazan je na konkretnom primeru, uz pravilno proširivanje oba razlomka i sabiranje dobijenih brojilaca.

Međutim, veoma su česti odgovori u kojima je naveden samo deo algoritma. Učenici, na primer, navode da razlomke treba svesti na isti imenilac, ali ne objašnjavaju da pri proširivanju treba istim brojem pomnožiti i brojilac i imenilac, niti šta se nakon toga sabira. Primeri su odgovori „Treba da se svedu na iste imenioce“ ili „Mora da se dovede na isti imenioc pa tek onda da se sabira“. Takvi odgovori nisu potpuna uputstva za izvođenje postupka, ali pokazuju da učenik prepoznaje jedan njegov ključni korak.

Kod dela učenika pojavljuje se i neprecizna matematička terminologija. Umesto pojmova brojilac, imenilac, proširivanje razlomka ili najmanji zajednički sadržalac, učenici koriste izraze poput „gornji broj“, „donji broj“, „pomnožimo brojeve da dođu na iste“ ili jednostavno „pomnožimo razlomke“. Takvi odgovori mogu sadržati osnovnu ideju odgovarajućeg postupka, ali ne predstavljaju dovoljno precizno verbalno uputstvo.

Pojedini odgovori pokazuju i pogrešno ili nepotpuno razumevanje proširivanja razlomka. Neki učenici govore samo o množenju imenilaca, bez jasnog navođenja da se pri proširivanju istim brojem množe brojilac i imenilac. Nasuprot tome, u preciznijim odgovorima učenici eksplicitno navode da treba „pomnožiti i brojilac i imenilac“ kako bi se dobio odgovarajući zajednički imenilac.

Uočeni su i odgovori koji sadrže suštinski pogrešna pravila. Na primer, pojedini učenici navode da pri sabiranju treba sabrati imenioce i brojioc, dok drugi, nakon svedenja na zajednički imenilac, ponovo sabiraju imenioce. U takvim odgovorima prepoznaju se pojedini elementi postupka računanja sa razlomcima, ali su oni povezani na matematički neispravan način.

Posmatrano u celini, odgovori pokazuju znatno složeniju sliku od one koju daje samo procenat potpuno tačnih odgovora. Iako je svega 5,0% učenika uspešno napisalo potpuno i matematički korektno uputstvo, u velikom broju ostalih odgovora prisutni su pojedini ispravni elementi algoritma, naročito zahtev da se razlomci najpre svedu na zajednički imenilac. Teškoća se, dakle, ne ogleda samo u nepoznavanju postupka, već i u sposobnosti učenika da postupak koji su učili celovito, precizno i odgovarajućom matematičkom terminologijom verbalizuju.

Samoprocena znanja o razlomcima

Na kraju testa učenici su procenjivali sopstvenu uspešnost izborom jedne od tri kategorije: *slabo*, *dobro* ili *odlično*. Na nivou celog uzorka, gotovo polovina učenika procenila je da je test uradila dobro (48,4%), 39,9% učenika procenilo je svoju uspešnost kao slabu, dok je 11,7% smatralo da je test uradilo odlično.

Distribucija samoprocene razlikovala se između razreda ($\chi^2 = 10.3$; $p = 0,03$). U šestom razredu 43,5% učenika svoju uspešnost na testu procenilo je kao slabu, 51,8% kao dobru, a samo 4,7% kao odličnu. U sedmom razredu procenat učenika koji su svoju uspešnost ocenili kao slabu bio je nešto veći (46,8%), dok je 41,8% uspešnost procenilo kao dobru, a 11,4% kao odličnu. U osmom razredu uočava se drugačija raspodela: smanjuje se udeo učenika koji svoju uspešnost procenjuju kao slabu (32,5%), dok 50,4% procenjuje kao dobru, a 17,1% kao odličnu.

Povezanost samoprocene sa ocenom iz matematike

Mnogo izraženije razlike u samoproceni uočene su u odnosu na školsku ocenu iz matematike. Među učenicima sa ocenom 2, njih 57 od 70 svoju uspešnost na testu procenilo je kao slabu, dok je samo dvoje smatralo da je odlično uradilo test. Nasuprot tome, među 83 učenika sa ocenom 5, samo 15 je svoju uspešnost procenilo kao slabu, 47 kao dobru, a 21 kao odličnu. Kod učenika sa ocenama 3 i 4 najzastupljenija je bila procena dobro.

Utvrđena je statistički značajna povezanost između ocene iz matematike i samoprocene uspešnosti ($\chi^2 = 85,2$; $p < 0,001$). S obzirom na to da su obe varijable ordinalne, dodatno je izračunat Spearmanov koeficijent korelacije, koji je pokazao umerenu pozitivnu povezanost između ocene iz matematike i samoprocene znanja o razlomcima ($\rho = 0.48$). Učenici sa višim ocenama iz matematike, dakle, imali su tendenciju da svoje znanje o razlomcima procenjuju povoljnije.

4.3 Diskusija

Cilj istraživanja bio je da se ispita razumevanje pojma razlomka kod učenika šestog, sedmog i osmog razreda osnovne škole, sa posebnim osvrtom na različita značenja razlomka, izvođenje računskih operacija, procenu njegove veličine i sposobnost učenika da obrazlože i verbalizuju postupke sa razlomcima. Rezultati pokazuju da uspešnost učenika značajno zavisi od vrste zahteva koji se pred njih postavlja. Učenici su bili uspešniji u pojedinim zadacima koji zahtevaju primenu poznatog postupka ili prepoznavanje poznate reprezentacije, dok su veće teškoće imali kada je bilo potrebno proceniti veličinu razlomka, predstaviti ga na brojevnoj pravoj ili obrazložiti sopstveno matematičko rezonovanje. Ovakvi rezultati ukazuju da znanje o razlomcima ne treba posmatrati kao jedinstvenu sposobnost, već kao skup međusobno povezanih konceptualnih i proceduralnih znanja.

Jedna od važnih razlika uočena je između različitih značenja razlomka. Rezultati prvih zadataka pokazuju da učenici nisu podjednako uspešni kada razlomak treba interpretirati kao deo celine, operator ili broj. Ovaj nalaz može se povezati sa rezultatima analize udžbenika, u kojoj je uočeno da se razlomak najpre i najizraženije razvija kroz model dela celine, dok se druga značenja uvode kasnije i nisu uvek eksplicitno međusobno povezana. Ne može se, naravno, zaključiti da je način predstavljanja u udžbenicima uzrok dobijenih rezultata, ali podudarnost ova dva nalaza ukazuje na značaj sistematskog povezivanja različitih značenja razlomka tokom nastave.

Posebno izražene teškoće pojavile su se u zadatku predstavljanja razlomaka na brojevnoj pravoj. Učenici nisu imali problem samo sa preciznim određivanjem položaja. Karakteristični netačni odgovori pokazali su da su neki učenici razlomke vezivali za unapred označene položaje na pravoj, da su prave razlomke smeštali izvan intervala od 0 do 1 ili da nisu pravilno određivali njihov položaj u odnosu na $\frac{1}{2}$. Takvi odgovori mogu ukazivati na teškoće u povezivanju simboličkog zapisa razlomka sa njegovom veličinom. Razumevanje razlomka kao broja, dakle, ne podrazumeva samo poznavanje njegovog zapisa, već i sposobnost procene njegove veličine i smeštanja u odnosu na druge brojeve i referentne vrednosti. Ovaj nalaz može se povezati sa istraživanjem Yu et al. (2024) [4], u kojem je ispitivano učenje razlomaka kroz analogijsko povezivanje sa prirodnim brojevima, procentima i drugim razlomcima. Rezultati tog istraživanja pokazali su da

povezivanje razlomaka sa drugim, učenicima poznatim numeričkim sadržajima može doprineti njihovom razumevanju, pri čemu se povezivanje sa prirodnim brojevima pokazalo posebno uspešnim i nakon određenog vremenskog perioda. Ovakvi nalazi ukazuju na značaj oslanjanja na prethodno znanje učenika i uspostavljanja veza između različitih vrsta brojeva pri izgrađivanju razumevanja razlomka kao broja.

Rezultati zadatka sa računskim operacijama pružaju drugačiji uvid u znanje učenika. Najveća uspešnost ostvarena je pri sabiranju razlomaka sa jednakim imeniocima, dok se uspešnost znatno razlikovala kod složenijih računskih zahteva, a najveće teškoće pojavile su se kod deljenja. Analiza netačnih odgovora pokazala je da greške nisu bile samo računске omaške. Učenici su, na primer, sabirali brojioce i imenioce, svodili razlomke na zajednički imenilac pri množenju ili deljenju i koristili recipročnu vrednost u situacijama u kojima takav postupak nije odgovarajući. Posebno je značajno što su učenici često koristili postupak koji pripada računanju sa razlomcima, ali su ga primenjivali kod pogrešne računске operacije. To ukazuje da pojedina proceduralna pravila mogu biti usvojena bez dovoljno jasnog razlikovanja uslova u kojima se primenjuju.

Sličan obrazac uočava se i u rezultatima šestog zadatka, koji je zahtevao verbalizaciju postupka sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima. Pregled učeničkih odgovora pokazuje da deo učenika prepoznaje potrebu za svođenjem razlomaka na zajednički imenilac, ali da je potpuno i precizno verbalizovanje postupka znatno zahtevnije. Učenik, dakle, može raspolagati pojedinim elementima algoritma, a da istovremeno nije u stanju da ih poveže u potpuno i matematički precizno uputstvo. Rezultati računskih zadataka i zadatka verbalizacije zato zajedno pružaju osnovu za razmatranje odnosa proceduralnog i konceptualnog znanja. Sličnu neujednačenost između ova dva aspekta znanja pokazalo je istraživanje Lenz, Reinhold i Wittmann (2024) [2], u kojem su utvrđeni različiti profili učenika prema razvijenosti konceptualnog i proceduralnog znanja o razlomcima. Rezultati su pokazali da učenici mogu biti uspešniji u jednom aspektu znanja, dok drugi ostaje slabije razvijen, kao i da je nakon sprovedene intervencije proceduralno znanje bilo izraženije od konceptualnog. Ovi nalazi podržavaju stanovište da uspešno izvođenje računskih postupaka ne podrazumeva nužno i podjednako razvijeno razumevanje njihovog značenja i sposobnost njihovog obrazlaganja.

Otvoreni zadatak poređenja razlomaka dodatno pokazuje koliko je zahtev za obrazlaganjem važan za procenu razumevanja. Relativno mali broj učenika dao je potpuno prihvatljivo objašnjenje zbog čega je ponuđeno poređenje razlomaka pogrešno, ali su među uspešnim odgovorima uočeni različiti načini matematičkog rezonovanja. Učenici su

koristili pravilo za poređenje razlomaka sa jednakim brojiocima, model dela celine, referentne vrednosti poput $\frac{1}{2}$ i 1, svodenje na zajednički imenilac, kao i decimalni ili procentni zapis. Raznovrsnost ovih odgovora pokazuje da se razumevanje veličine razlomka može zasnivati na različitim reprezentacijama i strategijama. Istovremeno, nepotpuna i pogrešna obrazloženja pokazuju da davanje tačnog zaključka ili poznavanje pojedinačnog pravila ne mora nužno biti praćeno sposobnošću da se objasni zašto to pravilo važi.

Kada se rezultati različitih zadataka posmatraju zajedno, može se uočiti razlika između sposobnosti primene pojedinih naučenih postupaka i povezivanja različitih aspekata pojma razlomka. Učenik može uspešno izvesti određenu računsku operaciju, a imati teškoće kada treba proceniti veličinu razlomka, predstaviti ga na brojevnoj pravoj ili obrazložiti svoje rezonovanje. U tom smislu, rezultati podržavaju posmatranje znanja o razlomcima kao skupa međusobno povezanih konceptualnih i proceduralnih znanja koja ne moraju biti podjednako razvijena. Ovakvo tumačenje u skladu je sa nalazima Lenz et al. (2024) [2], koji su pokazali da se kod učenika mogu izdvojiti različiti profili konceptualnog i proceduralnog znanja, uključujući profile u kojima je jedan aspekt znanja razvijeniji od drugog. Sličnu složenost znanja o razlomcima pokazuju i rezultati Xu et al. (2024) [3]. U njihovom istraživanju različite komponente znanja o razlomcima – povezivanje simboličkih i grafičkih prikaza, ekvivalentnost, poređenje i računanje sa razlomcima – bile su međusobno povezane, ali su predstavljale različite aspekte znanja. Takvi nalazi, zajedno sa rezultatima ovog istraživanja, ukazuju da uspešnost u jednom tipu zadataka ne podrazumeva nužno podjednaku uspešnost u drugim aspektima razumevanja razlomaka.

Rezultati prema razredu ne pokazuju jednostavan i jednoznačan razvojni obrazac. U pojedinim zadacima učenici starijih razreda bili su značajno uspešniji, dok kod drugih razlike nisu bile statistički značajne. Posebno je važno da su pojedine karakteristične teškoće prisutne i kod učenika osmog razreda, iako su sadržaji povezani sa razlomcima uvedeni znatno ranije. Ipak, budući da je istraživanje presečnog karaktera i da nisu praćeni isti učenici tokom školovanja, razlike između razreda ne treba neposredno tumačiti kao razvojne promene. Rezultati pre pokazuju da se pojedini aspekti razumevanja razlomaka razlikuju između uzrasnih grupa, dok se određene teškoće zadržavaju i kod starijih učenika.

Ocena iz matematike bila je pozitivno povezana sa uspešnošću na ispitivanim zadacima, ali jačina povezanosti nije bila ista za sve zadatke. Učenici sa višim ocenama uglavnom su bili uspešniji, što je očekivano, ali dobijene korelacije istovremeno pokazuju

da školska ocena ne određuje u potpunosti uspešnost u konkretnim zadacima sa razlomcima. Različita jačina povezanosti u zavisnosti od vrste zadatka dodatno potvrđuje da instrument obuhvata različite aspekte znanja o razlomcima, a ne samo opštu školsku uspešnost iz matematike.

Rezultati samoprocene pokazali su da je najveći broj učenika smatrao da je test uradio dobro, dok je manji broj svoju uspešnost procenio kao odličnu. Samoprocena uspešnosti razlikovala se prema razredu i bila je povezana sa ocenom iz matematike. Umerena pozitivna povezanost između ocene i samoprocene ($\rho = 0.48$) pokazuje da učenici sa višim ocenama imaju tendenciju da povoljnije procenjuju sopstveni učinak na testu. Međutim, pošto samoprocena nije neposredno poređena sa stvarnim postignućem na testu, na osnovu ovog istraživanja ne može se zaključivati o tome koliko učenici tačno procenjuju sopstvenu uspešnost.

Posmatrano u celini, rezultati ukazuju da teškoće učenika u radu sa razlomcima ne treba svoditi samo na nedovoljno poznavanje računskih algoritama. One se pojavljuju pri povezivanju različitih značenja razlomka, proceni njegove veličine, prelasku između reprezentacija, izboru odgovarajućeg računskog postupka i obrazlaganju matematičkog rezonovanja. Rezultati zato ukazuju na značaj nastave u kojoj se različita značenja razlomka eksplicitno povezuju, brojeva prava koristi kao sredstvo za razvoj osećaja za veličinu razlomka, a od učenika se, pored izvođenja postupaka, traži da svoje postupke i zaključke obrazlažu.

Zaključak

Razlomci predstavljaju jedan od složenijih matematičkih sadržaja u osnovnoj školi, jer njihovo razumevanje ne podrazumeva samo ovladavanje pravilima računanja, već i povezivanje različitih značenja razlomka, procenu njegove veličine i sposobnost primene stečenog znanja u različitim situacijama. Cilj ovog istraživanja bio je da se ispita razumevanje pojma razlomka kod učenika šestog, sedmog i osmog razreda osnovne škole kroz različite interpretacije i tipove zadataka, kao i da se utvrde karakteristične teškoće koje se pri tome javljaju.

Dobijeni rezultati pokazali su izražene razlike u uspešnosti u zavisnosti od zahteva zadatka. Učenici su bili najuspešniji u pojedinim rutinskim računskim postupcima, posebno pri sabiranju razlomaka sa jednakim imeniocima, dok su znatno veće teškoće imali pri predstavljanju razlomaka na brojevnoj pravoj, proceni njihove veličine, poređenju i verbalnom obrazlaganju postupaka. Analiza netačnih odgovora dodatno je pokazala da teškoće nisu samo posledica računskih omaški. Učenici su često primenjivali poznata pravila u situacijama u kojima ona nisu odgovarajuća, što ukazuje na to da poznavanje pojedinačnih postupaka nije uvek praćeno jasnim razumevanjem uslova njihove primene.

Rezultati takođe pokazuju da različita značenja razlomka nisu podjednako razvijena. Veća uspešnost u predstavljanju razlomka kao dela celine u odnosu na razlomak kao operator i, naročito, kao broj na brojevnoj pravoj ukazuje na značaj povezivanja različitih interpretacija ovog pojma. Teškoće u određivanju položaja razlomka u odnosu na $\frac{1}{2}$ i 1, kao i karakteristične greške pri poređenju, pokazuju da simbolički zapis razlomka kod dela učenika nije pouzdano povezan sa predstavom o njegovoj numeričkoj veličini. Istovremeno, različiti načini obrazlaganja koje su koristili uspešni učenici pokazuju da se razumevanje razlomka može graditi oslanjanjem na različite modele, referentne vrednosti i matematičke postupke.

Posebno je značajno što se određene teškoće javljaju i kod učenika osmog razreda, iako su se sa razlomcima susretali tokom prethodnih godina školovanja. Ovaj nalaz ukazuje na to da se usvajanje pojma razlomka ne završava njegovim početnim uvođenjem niti učenjem pravila za izvođenje računskih operacija. Pojam razlomka zato ne bi trebalo posmatrati kao sadržaj koji se u jednom trenutku obradi i potom smatra usvojenim. Potrebno je njegovo kontinuirano razvijanje i ponovno razmatranje kroz različite matematičke sadržaje i razrede, uz postepeno povezivanje različitih značenja i načina

predstavljanja. Posebno mesto u tome mogu imati brojna prava, procena veličine razlomka, poređenje sa referentnim vrednostima i zadaci u kojima se od učenika zahteva da objasne i obrazlože svoj postupak.

Posmatrano u celini, rezultati ovog istraživanja ukazuju da razumevanje razlomaka ne treba svoditi na uspešno izvođenje računskih algoritama. Proceduralno znanje jeste važan deo matematičkog znanja, ali njegova puna funkcionalnost zahteva povezivanje sa razumevanjem značenja razlomka, njegove veličine i odnosa prema drugim brojevima. Stoga bi jedan od važnih ciljeva nastave razlomaka trebalo da bude ne samo da učenik zna kako da izvede određeni postupak, već i da razume zašto ga primenjuje, kada je on odgovarajući i kako je povezan sa samim značenjem razlomka.

Literatura

- [1] Grenell, A., Butts, J. R., Levine, S. C., & Fyfe, E. R. (2024). Children's confidence on mathematical equivalence and fraction problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 246. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.106003>
- [2] Lenz, K., Reinhold, F., & Wittmann, G. (2024). Transitions between conceptual and procedural knowledge profiles. Patterns in understanding fractions and indicators for individual differences. *Learning and Individual Differences*, 116. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2024.102548>
- [3] Xu, C., Di Lonardo Burr, S., Li, H., Liu, C., & Si, J. (2024). From whole numbers to fractions to word problems: Hierarchical relations in mathematics knowledge for Chinese Grade 6 students. *Journal of Experimental Child Psychology*, 242. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105884>
- [4] Yu, S., Sidney, P., Kim, D., Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2024). From integers to fractions: The role of analogy in transfer and long-term learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 243. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105918>
- [5] Čuk, M., Milošević, B., & Marković, B. (2019). *Matematika: udžbenik za drugi razred osnovne škole*. Nova škola.
- [6] Županjac, I., Stojković, J., Radosavljević, K., & Vukajlović, Z. (2025). *Matematika 3: udžbenik za treći razred osnovne škole (2. deo)*. Arhiknjiga.
- [7] Stojković, J., Županjac, I., Vukajlović, Z., & Radosavljević, K. (2026). *Matematika 4: udžbenik za četvrti razred osnovne škole (2. deo)*. Arhiknjiga.
- [8] Ognjanović, S., & Kostić, N. (2022). *Matematika 5: udžbenik sa zbirkom zadataka za peti razred osnovne škole*. ArhiKnjiga.
- [9] Drugi razred – *Pravilnik o programu nastave i učenja za drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, Službeni glasnik RS – Prosvetni glasnik, br. 16/2018, 3/2019 i 5/2021.
- [10] Treći razred – *Pravilnik o programu nastave i učenja za treći razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, Službeni glasnik RS – Prosvetni glasnik, br. 5/2019, 1/2020 i 6/2020.
- [11] Četvrti razred – *Pravilnik o programu nastave i učenja za četvrti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*, Službeni glasnik RS – Prosvetni glasnik, br. 11/2019 i 6/2020.
- [12] Peti razred – *Pravilnik o planu nastave i učenja za peti i šesti razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja i programu nastave i učenja za peti i šesti razred osnovnog obrazovanja i*

vaspitanja, Službeni glasnik RS – Prosvetni glasnik, br. 15/2018, 18/2018, 3/2019, 3/2020, 6/2020 i 17/2021.

- [13] Ministarstvo prosvete. (2024). *Pravilnik o standardima obrazovnih postignuća za kraj prvog ciklusa osnovnog obrazovanja i za kraj osnovnog obrazovanja*. Službeni glasnik RS, 104/2024. <https://pravno-informacioni-sistem.rs/eli/rep/sgrs/ministarstva/pravilnik/2024/104/6/reg>

Prilog

Test razumevanja razlomaka korišćen za potrebe istraživanja

Име и презиме: _____

Пред тобом је неколико кратких задатака о разломцима. Потруди се и напиши онако како ти размишљаш - то је најважније.

1. Обоји $\frac{3}{5}$ правоугаоника на слици.



2. Колико је $\frac{3}{5}$ од 30?

3. На бројевној правој означи разломке $\frac{21}{23}$ и $\frac{5}{9}$. Испод тачке коју обележиш, упиши одговарајући разломак



4. Израчунај

$$\frac{1}{3} + \frac{11}{3} =$$

$$\frac{6}{5} - \frac{3}{10} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} =$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{9} =$$

5. Марко је рекао: „ $\frac{3}{7}$ је веће од $\frac{3}{5}$ јер је 7 веће од 5.“ Објасни зашто Марко није у праву.

6. Напиши упутство за сабирање разломака са различитим именицима.

За крај: Процени како си урадио/ла овај тест. Означи један од одговора.

- ☐ **Одлично**, све сам добро урадио/ла.
☐ **Добро**, али мислим да имам неку грешку.
☐ **Слабо**, већину задатака нисам урадио/ла како треба.

Biografija



Danijela Tomić rođena je 3. maja 1990. godine u Užicu. Osnovnu školu „Mito Igumanović“ u Kosjeriću završila je 2005. godine. Iste godine upisala je Tehničku školu u Kosjeriću, smer ekonomski tehničar, koju je završila 2009. godine.

Nakon završetka srednje škole upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, studijski program Diplomirani profesor matematike, koje je završila 2014.

godine.

Od 2016. godine zaposlena je u Osnovnoj školi „Mito Igumanović“ u Kosjeriću, gde radi kao nastavnik matematike.

Godine 2024. upisala je master akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, studijski program Master profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene studijskim programom i stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, 2026.

Danijela Tomić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Danijela Tomić

AU

Mentor: dr Zorana Lužanin

MN

Naslov rada: Razumevanje razlomaka u osnovnoj školi: između konceptualnog i proceduralnog znanja

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski i engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 4/51/13/12/11/0/1

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Metodika matematike

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: razlomci, konceptualno znanje, proceduralno znanje, razumevanje razlomaka, nastava matematike, osnovna škola

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Tema ovog master rada je razumevanje pojma razlomka kod učenika viših razreda osnovne škole, sa posebnim osvrtom na odnos konceptualnog i proceduralnog znanja. U teorijskom delu razmatrana su različita značenja razlomka i načini njegovog predstavljanja, analiziran je način uvođenja pojma razlomka u udžbenicima i dat pregled relevantnih istraživanja. Empirijsko istraživanje sprovedeno je na uzorku od 281 učenika šestog, sedmog i osmog razreda osnovne škole. Ispitivana je uspešnost učenika u zadacima koji obuhvataju razlomak kao deo celine, razlomak kao operator, određivanje položaja razlomka na brojevnoj pravoj, operacije sa razlomcima, poređenje razlomaka i verbalno objašnjenje postupka sabiranja razlomaka sa različitim imeniocima. Rezultati su ukazali na izražene razlike u uspešnosti u zavisnosti od tipa zadatka: učenici su bili uspešniji u proceduralnim zadacima, dok su veće teškoće uočene kod poređenja razlomaka, rada na brojevnoj pravoj i verbalizacije postupka.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 05.03.2026.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:	dr Goran Radojev, vanredni profesor Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor:	dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Petar Đapić, vanredni profesor Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Danijela Tomić

AU

Mentor: Zorana Lužanin Ph.D.

MN

Title: Understanding fractions in primary school: between conceptual and procedural knowledge

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: 4/51/13/12/11/0/1

(chapters/pages/references/tables/figures/graphs/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Teaching of Mathematics

SD

Subject/Key words: fractions, conceptual knowledge, procedural knowledge, understanding of fractions, mathematics teaching, primary school

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The topic of this master's thesis is the understanding of the concept of fractions among students in the upper grades of primary school, with particular emphasis on the relationship between conceptual and procedural knowledge. The theoretical part discusses different meanings of fractions and ways of representing them, analyzes how the concept of fractions is introduced in textbooks, and provides a review of relevant research. The empirical study was conducted on a sample of 281 students in the sixth, seventh, and eighth grades of elementary school. Students' performance was examined on tasks involving fractions as part of a whole, fractions as operators, locating fractions on the number line, operations with fractions, comparing fractions, and verbally explaining the procedure for adding fractions with unlike denominators. The results indicated pronounced differences in performance depending on the type of task: students were more successful on procedural tasks, while greater difficulties were observed in comparing fractions, working with the number line, and verbalizing the procedure.

Accepted by the Scientific Board on: 05.03.2026.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Goran Radojev, Ph.D., Associate Professor
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Petar Đapić, Ph.D., Associate Professor
Faculty of Sciences, University of Novi Sad