



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU



Natalija Babić

Matematički i bihejvioralni modeli odlučivanja pri riziku

Master rad

Mentor:
Prof. dr Ivana Štajner – Papuga

Novi Sad, 2026 .

Predgovor

Donošenje odluka može se uporediti sa proznim izražavanjem – ljudi ga svakodnevno primenjuju, bilo svesno ili nesvesno. Ovim procesom bave se brojne naučne discipline, među kojima su matematika, statistika, ekonomija, političke nauke, sociologija i psihologija. Proučavanje odlučivanja obuhvata i normativni i deskriptivni pristup. Normativna analiza usmerena je na pitanja racionalnosti i logike u procesu donošenja odluka. Sa druge strane, deskriptivna analiza proučava ljudska uverenja i sklonosti onakvima kakvi zaista jesu, a ne kakvi bi trebalo da budu. Zbog toga se veliki broj istraživanja u oblasti rasuđivanja i odlučivanja zasniva upravo na poređenju i suprotstavljanju ova dva pristupa.

Svakodnevno funkcionisanje bilo bi izuzetno zahtevno i predstavljalo bi veliki napor kada bi odluke koje ljudi svakodnevno donose zahtevale njihovu potpunu posvećenost i pažnju. Ipak, ljudski mozak ne funkcioniše na taj način. Njegova sposobnost da prepozna obrasce i razvija automatizovane reakcije omogućava da mnoge odluke postanu gotovo instinktivne.

Upravo sposobnost razlikovanja rutinskih aktivnosti od situacija koje zahtevaju pažljivo promišljanje predstavlja jednu od važnih odlika ljudskog uma. Učenje, iskustvo i kontinuirano ponavljanje doprinose tome da se mnoge odluke donose brzo i efikasno. Ono što razlikuje prosečno od izuzetnog odlučivanja jeste sposobnost prepoznavanja trenutka kada je dovoljno osloniti se na intuiciju, a kada je potrebno zastati, analizirati situaciju i doneti promišljenu odluku.

Savremena istraživanja u teoriji odlučivanja sve više napuštaju pretpostavku potpuno racionalnog donosioca odluka i usmeravaju se ka razvoju interdisciplinarnih modela koji povezuju matematiku, psihologiju, neuronauku i veštačku inteligenciju. Posebna pažnja posvećena je proučavanju odlučivanja pri riziku i neizvesnosti, kognitivne pristrasnosti, odbojnosti prema gubicima, kao i dinamičkih modela koji opisuju promenu preferencija tokom samog procesa odlučivanja. Sve značajniji pravac predstavlja razvoj modela saradnje čoveka i sistema zasnovanih na veštačkoj inteligenciji, čiji je cilj unapređenje kvaliteta odluka uz očuvanje ljudskog rasuđivanja i vrednosnih kriterijuma.

U široj perspektivi, ovaj rad ima za cilj da prikaže dva pristupa donošenju odluka u uslovima neizvesnosti i rizika i sagleda njihovo mesto u matematičkom i psihološkom kontekstu. Suština rada je prikazati kako ljudi procenjuju verovatnoće i analizirati da li je čovek u potpunosti racionalan pri donošenju odluka ili se uglavnom vodi nekim drugim metodama.

Na samom početku, u uvodnom delu rada dat je pregled osnovnih pojmova iz teorije odlučivanja, kao i iz teorije verovatnoće. Verovatnoća je neizostavna kada govorimo o odlučivanju u uslovima delimične izvesnosti (rizika). Literatura koja je korišćena u ovom delu rada je: [2], [3], [4], [7], [9], [10], [14], [16], [17], [19], [21].

U nastavku ćemo se baviti analizom odlučivanja i kroz teorijska objašnjenja i primere obradićemo odlučivanje pri izvesnosti, odlučivanje pri neizvesnosti i odlučivanje pri riziku. Literatura koja je korišćena u ovom delu rada je: [17].

Naredno poglavlje posvećeno je teoriji korisnosti. Da u životu nije sve pravolinijski i da ljudi često ne biraju opciju koja ima najveću novčanu dobit, već onu zbog koje se osećaju

sigurnije ili koja im subjektivno više vredi prvi je primetio švajcarski matematičar Danijel Bernuli. Bernuli je uveo ideju da ljudi pri donošenju odluka pod rizikom, ne maksimizuju očekivani novac, nego očekivanu korist. Ono što je kao ideju uveo Danijel Bernuli, razvili su u teoriju očekivane korisnosti Džon fon Nojman i Oskar Morgenštern. Teorija očekivane korisnosti nema za cilj da objasni psihološke procese donošenja odluka, već predstavlja logički okvir za izbor zasnovan na pravilima racionalnosti. Literatura koja je korišćena u ovom delu rada je: [1], [5], [6], [8], [10], [12], [13], [14], [15], [17], [22].

U završnom delu rada biće predstavljena teorija izgleda. Psiholozi Danijel Kaneman i Amos Tverski proučavali su na koji način ljudi biraju između različitih alternativa. Njihov cilj nije bio da polaze od pretpostavke da se ljudi ponašaju racionalno, već da utvrde kako zaista donose odluke u situacijama koje uključuju rizik. Teorija izgleda razvijena je po uzoru na teoriju očekivane korisnosti, ali sadrži nekoliko značajnih razlika. Najvažnija među njima jeste to što je ovaj model isključivo deskriptivnog karaktera, odnosno njegova svrha je da opiše i objasni sistematska odstupanja od aksioma racionalnog odlučivanja. Istraživanja Kanemana i Tverskog pokazala su da ljudi često donose odluke koje nisu u skladu sa pravilima racionalnog odlučivanja. Na taj način nastala je teorija izgleda. Literatura koja je korišćena u ovom delu rada je: [7], [10], [11], [18], [20], [22].

Želim da se zahvalim svojoj mentorki, prof. dr Ivani Štajner – Papuga na korisnim savetima, izdvojenom vremenu i stručnom vođenju tokom izrade ovog rada. Takođe, zahvaljujem se i članovima komisije, prof. dr Andreji Tepavčević i prof. dr Mirjani Štrboja na korisnim komentarima i izdvojenom vremenu.

Posebnu zahvalnost dugujem i svojoj profesorki Milki Janić, koja mi je predavala matematiku u srednjoj školi i pokazala mi šta znači predavati sa mnogo ljubavi i posvećenosti.

Smatram da je prijateljstvo relacija ekvivalencije i da skup ljudi sa kojima se družimo deli na klase. Jedna od tih klasa su pravi prijatelji. Želim da se zahvalim elementima ove klase, mojim ljudima. Hvala vam na razumevanju, podršci, svim lepim danima koje smo delili i teškim periodima koje smo preživeli zajedno.

Na samom kraju, ali za mene najviše bitno, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, majci Ljiljani, ocu Zoranu i sestri Nastasiji.

Mama, mnogo ti hvala za svaki razgovor i što si uvek znala da me saslušas sa beskrajnim strpljenjem. Hvala ti što je tvoja vera u mene bila jača od svih mojih sumnji i što si me naučila šta znači biti hrabra.

Tata, mnoge stvari koje si radio su bile teške, ali nikada to nisi pokazao. Mnogo ti hvala za svu zaštitu, sigurnost i snagu koju si mi pružio.

Nastić, hvala ti što si mi pokazala šta znači imati veliko i čisto srce. Svaki tvoj savet, kritika i pohvala su mi pomogli da izgradim zdravo samopouzdanje i na tome ti neizmerno hvala.

„Sve mogu u Hristu koji mi daje moć.“ (Flp.4,13)

Gospode, Slava Tebi za sve.

Sadržaj

Predgovor	1
1. UVOD	5
1.1. Pojam odlučivanja	5
1.2. Matematičko modelovanje procesa odlučivanja.....	7
1.3. Relacija preferencije i funkcija korisnosti	8
1.4. Osnovni probabilistički pojmovi u teoriji odlučivanja	9
1.4.1. Prostor ishoda i događaji	9
1.4.2. Verovatnoća i prostor verovatnoće.....	10
1.4.3. Uslovna verovatnoća i nova informacija	11
1.4.4. Slučajna promenljiva	14
1.4.5. Matematičko očekivanje.....	15
1.4.6. Jensenova nejednakost.....	17
1.5. Naknadni uvid i kajanje u procesu odlučivanja.....	18
2. ANALIZA ODLUČIVANJA	19
2.1. Odlučivanje pri izvesnosti	20
2.2. Analiza odlučivanja pri neizvesnosti.....	20
2.2.1. MAXIMIN kriterijum (kriterijum pesimizma).....	22
2.2.2. MINIMAX kriterijum (kriterijum žaljenja).....	23
2.2.3. MAXIMAX kriterijum (kriterijum optimizma)	23
2.2.4. Laplace-ov kriterijum	24
2.3. Analiza odlučivanja pri riziku	25
2.3.1. Kriterijum očekivane novčane vrednosti (ONV).....	26
2.3.2. Kriterijum maksimalne verodostojnosti	28
2.3.3. Kriterijum očekivanog žaljenja (OŽ)	28
2.4. Analiza odlučivanja sa uzorkovanjem.....	29
3. TEORIJA KORISNOSTI	34
3.1. Bernuli – rađanje ideje o teoriji korisnosti	35
3.1.1. Nedostaci Bernulijeve teorije	37
3.2. Odnos relacije preferencije i funkcije korisnosti.....	38
3.3. Tipični primeri funkcije korisnosti	41
3.4. Averzija prema riziku	42
3.5. Marginalna korisnost.....	46
3.6. Aksiome teorije korisnosti (Džon fon Nojman i Oskar Morgenštern)	47

3.7.	Konstruisanje funkcije korisnosti	49
3.8.	Očekivana novčana vrednost vs očekivana korisnost.....	51
4.	TEORIJA IZGLEDA	54
4.1.	Averzija prema gubitku	57
4.2.	Rabinova teorema o kalibraciji.....	58
4.3.	Ograničenja teorije izgleda.....	63
	Zanimljivosti	66
	Zaključak.....	67

1. UVOD

U uvodnom delu rada predstavimo osnovne pojmove iz teorije verovatnoće i teorije odlučivanja. Cilj ovog poglavlja jeste da se upoznamo sa terminima koji će se koristiti kasnije u radu. Pored detaljnog prikaza procesa odlučivanja, biće dat pregled poznatih pojmova iz teorije verovatnoće. U prvom poglavlju biće definisani i osnovni pojmovi relacije preferencije i funkcije korisnosti, dok će njihova detaljna teorijska razrada i primena biti predstavljena u trećem poglavlju. Literatura neophodna za potpuno razumevanje ovog poglavlja je: [2], [3], [4], [7], [9], [10], [14], [16], [17], [19], [21].

1.1. Pojam odlučivanja

Sam proces donošenja odluka može se razlikovati u zavisnosti od stepena poznavanja stanja sveta, pa se razlikuju sledeće situacije [17]:

- **Odlučivanje u uslovima izvesnosti.** U uslovima izvesnosti donošenje odluka nije posebno složeno, jer su poznate sve relevantne činjenice i stanja koja se odnose na pojavu o kojoj se odlučuje. U takvim okolnostima ne postoji rizik, pa se ovakve situacije pre mogu posmatrati kao utvrđivanje postojećeg stanja nego kao proces odlučivanja.
- **Odlučivanje pri riziku.** U ovom slučaju stanja sveta nisu u potpunosti poznata, ali je moguće, na osnovu raspoloživih informacija i određene doze subjektivne procene, dodeliti verovatnoće njihovog nastupanja.
- **Odlučivanje u uslovima potpune neizvesnosti.** Ovaj oblik odlučivanja javlja se kada su stanja sveta, kao i njihova učestalost pojavljivanja, u potpunosti nepoznati, zbog čega nije moguće odrediti verovatnoće njihovog nastupanja. Skup stanja sveta predstavlja skup onoga što bi moglo da se desi, odnosno ono što bi moglo da se dogodi u okruženju. Za bolje razumevanje pojma „stanja sveta“ možemo posmatrati sledeći primer: Vlasnik prodavnice je u prilici da nabavi albume za fotografije. Može da naruči pakovanje od 3 albuma ili pakovanje od 6 albuma ili da ne naruči nijedan album. Dakle, postoje tri moguće akcije a_1 – *ne naručuje nijedno pakovanje*, a_2 – *naručiti pakovanje od 3 albuma*, a_3 – *naručiti pakovanje od 6 albuma*. Dok sa druge strane stanja sveta su ono što bi moglo da se desi kao potražnja za albumima. Dakle, stanja sveta u ovom slučaju su S_0 – *ne postoji potražnja za albumima*, S_1 – *potražnja za jednim albumom*, S_2 – *postoji potražnja za dva albuma*, ..., S_6 – *potražnja za šest albuma*. S obzirom da ne postoji više akcija, ovo su sva moguća stanja sveta u ovom primeru.

Model procesa odlučivanja sastoji se od nekoliko osnovnih strukturnih elemenata [17]:

1. **Ciljevi.** Cilj predstavlja željeno buduće stanje objekta odlučivanja kojem se teži.

2. **Alternative.** U okviru problema odlučivanja, alternative predstavljaju skup mogućih rešenja između kojih donosilac odluke bira ono koje će najbolje doprineti ostvarivanju postavljenog cilja. Dakle, problem odlučivanja nastaje kada postoji više mogućih načina delovanja, pri čemu je potrebno izvršiti izbor između njih na osnovu unapred definisanih zahteva i kriterijuma. Alternative zato predstavljaju osnovu procesa odlučivanja, jer bez postojanja najmanje dve moguće akcije između kojih se bira ne postoji ni stvarna potreba za donošenjem odluke.
3. **Ishodi.** Ishodi predstavljaju stanja sistema koja nastaju kao posledica primene izabrane alternative. S obzirom na to da se odluka donosi u sadašnjem trenutku, dok će efekti izabrane akcije biti poznati tek u budućnosti, neophodno je proceniti moguće ishode i odrediti verovatnoću njihovog nastupanja. Upravo procena tih verovatnoća ima značajan uticaj na izbor konačne odluke.
4. **Metode.** Razvojem teorije odlučivanja razvijen je veliki broj metoda koje omogućavaju da se proces odlučivanja zasniva na naučnim principima, umesto isključivo na intuiciji. Ove metode koriste se za identifikovanje, predviđanje, vrednovanje i izbor alternativa, kao i za definisanje odgovarajućih kriterijuma odlučivanja.
5. **Kriterijumi.** Definisanje kriterijuma smatra se jednim od najvažnijih koraka u procesu odlučivanja. Od pravilnog izbora kriterijuma u velikoj meri zavisi kvalitet konačne odluke. Zbog toga je neophodno identifikovati odgovarajuće kriterijume, izvršiti njihovu procenu i odabrati one koji najbolje odgovaraju problemu odlučivanja. U zavisnosti od uslova u kojima se odluka donosi, mogu se primenjivati različiti kriterijumi odlučivanja. Neki od kriterijuma koji se mogu primeniti u uslovima neizvesnosti su: MAXIMAX kriterijum ili MINIMAX kriterijum. O ovim, ali i o drugim kriterijumima koji se mogu primeniti u uslovima neizvesnosti biće reči u drugom poglavlju. Dok se u uslovima rizika mogu koristiti kriterijumi koji uzimaju u obzir verovatnoće nastupanja pojedinih stanja prirode o kojima će, takođe, biti reči kasnije.
6. **Uslovi.** Proces odlučivanja odvija se pod uticajem različitih uslova, među kojima su najznačajniji znanje, iskustvo i motivisanost donosioca odluke, kao i vreme koje mu je na raspolaganju za donošenje odluke. Navedeni faktori određuju način sprovođenja pojedinih faza procesa odlučivanja i utiču na izbor odgovarajućeg pristupa.
7. **Okolina (okruženje).** Proces odlučivanja odvija se u promenljivom okruženju, zbog čega se nakon donošenja odluke mogu pojaviti okolnosti koje u trenutku odlučivanja nisu bile poznate. Takve okolnosti mogu uticati na ostvareni ishod i učiniti da neka od neizabranih alternativa naknadno izgleda povoljnije. Poređenje donete odluke sa alternativama koje su bile dostupne, ali nisu izabrane, predstavlja osnovu za naknadni uvid, dok razlika između ostvarenog ishoda i povoljnijeg ishoda koji je mogao biti ostvaren predstavlja osnovu za određivanje kajanja. Pri tome, donosilac odluke ne može biti odgovoran za posledice nastale usled nepredvidivih okolnosti koje u trenutku odlučivanja nije mogao da uzme u obzir.

1.2. Matematičko modelovanje procesa odlučivanja

Odlučivanje predstavlja sastavni deo svakodnevnog života i prisutno je još od najranijih perioda ljudske istorije. Iako se odluke donose otkad postoji čovečanstvo, tek tokom poslednjih nekoliko decenija razvijena je posebna naučna disciplina koja sistematski proučava proces donošenja odluka – teorija odlučivanja.

Definicija 1.1. [7] Problem odlučivanja je uređena petorka $(A, S, f, X, \succsim)$, gde je A skup alternativa, odnosno akcija, S je skup okolnosti, još se naziva i skup stanja sveta, X predstavlja skup ishoda (rezultata našeg delovanja), funkcija $f: A \times S \rightarrow X$, $\succsim$ je relacija preferencije.

Koristićemo sledeće oznake: a_i – akcija i , S_j – stanje j . Ako u nekom problemu odlučivanja postoji n alternativa i m stanja, tada $a_1, a_2, \dots, a_n$ predstavljaju sve akcije, a $S_1, S_2, \dots, S_m$ predstavljaju sva stanja datog problema.

U zavisnosti od toga šta znamo o stanjima sveta, razlikujemo tri mogućnosti:

1. Odlučivanje pri izvesnosti
2. Odlučivanje pri riziku
3. Odlučivanje pri neizvesnosti

Odlučivanje pri izvesnosti nije „interesantno“, jer znamo šta će se desiti u skupu okolnosti, odnosno u stanju sveta, pa samim tim jasno je koja akcija je optimalna kao izbor. Odlučivanje pri riziku znači da imamo neku dodatnu informaciju (poput verovatnoće) o skupu S . Kada je u pitanju odlučivanje pri neizvesnosti nemamo dodatne informacije o stanju sveta.

Tabela odlučivanja predstavlja standardni način prikazivanja problema odlučivanja. U njoj su sadržani elementi odluke:

Akcije	Stanja sveta			
	S_1	S_2	...	S_m
a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
...				
a_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}

Tabela 1. Tabelarni prikaz problema odlučivanja

Redovi u tabeli predstavljaju akcije (alternative) među kojima biramo $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, kolone odgovaraju mogućim događajima (stanja sveta) u kojima se akcije sprovode $S_j, j = 1, 2, \dots, m$. U poljima koja predstavljaju presek redova i kolona nalaze se ishodi $x_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$.

Mogu se izdvojiti dva osnovna pristupa odlučivanju [17]:

1. **Intuitivno odlučivanje.** Ovaj pristup prisutan je od davnina i zasniva se na iskustvu, ličnoj proceni i uverenjima donosioca odluke. I danas predstavlja najčešći način donošenja odluka u različitim životnim i poslovnim situacijama.

2. **Naučno odlučivanje.** Razvojem teorije odlučivanja kao naučne discipline nastali su brojni savremeni modeli i metode koji pružaju podršku procesu donošenja odluka. Njihovom primenom odluke se u većoj meri zasnivaju na objektivnim i naučno utemeljenim kriterijumima, dok se uticaj subjektivne procene i intuicije donosioca odluke smanjuje.

Brojne su definicije pojma odlučivanja, a neke od njih su:

- Odlučivanje je izbor između više alternativnih mogućnosti za rešavanje problema. [21]
- Odlučivanje je proces u kome se vrši izbor između više alternativnih mogućnosti za promenu stanja sistema radi postizanja cilja. [2]
- Odlučivanje podrazumeva sve aktivnosti oko izbora jedne između raznih mogućnosti. [4]
- Odlučivanje je izbor između mogućih alternativa mogućnosti. [3]

Osnovne definicije iz teorije odlučivanja [17]:

- *Odlučivanje* predstavlja izbor između više mogućih akcija, iz mnoštva prethodno pripremljenih (ili uočenih) akcija, odnosno između više mogućih akcija za razmatrani problem.
- *Proces odlučivanja* je proces kojim se stvara odluka. To je niz međusobno povezanih i uslovljenih aktivnosti koje se odvijaju sukcesivno, usmerene ka krajnjem cilju da se donese određena odluka.
- *Odluka* je rezultat odlučivanja i uvek se donosi da bi se ispunili određeni zahtevi – ciljevi koji su postavljeni u razmatranom problemu.
- *Donosilac odluke* je svako sa kompetencijom da odlučuje i za to snosi punu odgovornost.

1.3. Relacija preferencije i funkcija korisnosti

Matematički pristup donošenju odluka zasniva se na mogućnosti da se preferencije donosioca odluke formalno predstave i analiziraju. U tom kontekstu, relacija preferencije omogućava poređenje različitih alternativa, dok funkcija korisnosti predstavlja način da se te preferencije izraze numerički.

Kao što je poznato odnos između elemenata nekog skupa opisuje se relacijama. Relacije mogu biti unarne, binarne, ..., n-arne, $n \in \mathbb{N}$, u zavisnosti od toga koliki je broj elemenata čiji odnos relacija prikazuje. Ako je X neprazan skup i $n \in \mathbb{N}$, onda je podskup $\rho \subseteq X^n$, n-arna relacija na skupu X . Broj n naziva se arnost relacije ρ . Na osnovu prethodnog zaključujemo da je binarna relacija ρ na skupu X je podskup iz X^2 , odnosno $\rho \subseteq X^2$. Ako je $(x, y) \in \rho$, kažemo da je x u relaciji ρ sa y (*u oznaci, $x\rho y$*).

Relacija ρ na skupu X je:

1. Refleksivna, ako ispunjava uslov $\forall x \in X, x\rho x$,
2. Simetrična, ako ispunjava uslov $\forall x, y \in X, x\rho y \Rightarrow y\rho x$,
3. Antisimetrična, ako ispunjava uslov $\forall x, y \in X, x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$,

4. Tranzitivna, ako ispunjava uslov $\forall x, y, z \in X, xpy \wedge ypz \Rightarrow xpz$

Za relaciju skupa X za koju važe osobine 1,2,4 kažemo da je *relacija ekvivalencije*, dok za relaciju za koju važe osobine 1,3,4, kažemo da je *relacija poretka*.

Definicija 1.3.1. [14] Binarna relacija $\succsim$ koja ispunjava sledeće uslove:

1. $\forall x \in X, x \succsim x$ – refleksivnost
2. $\forall x, y \in X, x \succsim y$ ili $y \succsim x$ – kompletnost
3. $\forall x, y, z \in X, x \succsim y, y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$ – tranzitivnost

se naziva **relacija preferencije**.

Definicija 1.3.2. [14] Relacija striktne preferencije se označava $\succ$, a definiše se na sledeći način:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge \neg(y \succsim x)$$

Definicija 1.3.3. [14] Relacija indiferentnosti označava se $\sim$, a definiše se na sledeći način:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \wedge y \succsim x$$

Definicija 1.3.4. [14] (**funkcija korisnosti**) Neka je $\succsim$ relacija preferencije na skupu X . Funkcija $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, za koju važi $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$, naziva se *funkcija korisnosti* relacije preferencije.

Naravno, važiće:

$$\begin{aligned} x \succ y &\Leftrightarrow u(x) > u(y) \\ x \sim y &\Leftrightarrow u(x) = u(y) \end{aligned}$$

1.4. Osnovni probabilistički pojmovi u teoriji odlučivanja

Za razmatranje procesa odlučivanja u uslovima rizika neophodno je uvesti osnovne koncepte teorije verovatnoće, te sledi pregled neophodnih pojmova.

1.4.1. Prostor ishoda i događaji

Definicija 1.4.1. [16] Skup Ω svih mogućih ishoda nekog eksperimenta naziva se **prostor elementarnih događaja**.

- **Slučajan događaj** (događaj) je bilo koji podskup skupa Ω .
- **Nemoguć događaj** označava se sa $\emptyset$, a Ω je **siguran događaj**.

Relacije i operacije:

U skupu Ω definišemo relacije i operacije sa događajima analogno kao sa skupovima:

- $A \subseteq B$, označavamo da događaj A implicira događaj B .
- Događaji A i B su ekvivalentni ako važi da je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
- A^c ili $\bar{A}$ označavamo suprotan događaj događaja A i važi:
$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$
- $A \cap B$ označavamo presek događaja A i B i važi:
$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$

- $A \cup B$ označavamo uniju događaja A i B i važi:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$
- Razlika događaja A i B je događaj $A \setminus B$ za koji važi:

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

Primer 1.4.1. Direktor škole treba da donese odluku da li će se planirane sportske aktivnosti održati na školskom dvorištu. Odluka zavisi od vremenskih uslova koji se očekuju tog dana.

$$\Omega = \{\text{sunčano, oblačno, kišovito, snežno, vetrovito}\}$$

Događaj A – *Sportske aktivnosti se održavaju na školskom dvorištu.*

Pretpostavimo da se školske aktivnosti održavaju kada je vreme sunčano, oblačno ili vetrovito. Tada je $A = \{\text{sunčano, oblačno, vetrovito}\}$.

Suprotan događaj predstavlja odluku da se školske aktivnosti ne održavaju na školskom dvorištu, već da se premeste u školsku salu.

$$\bar{A} = \{\text{kišovito, snežno}\}$$

Na osnovu prikazanog škola donosi odluku:

- Ako se ostvari neki ishod iz skupa A , **aktivnosti se održavaju na dvorištu**
- Ako se ostvari neki ishod iz skupa $\bar{A}$, **aktivnosti se ne održavaju na dvorištu.**

B – *vreme je povoljno za održavanje svih planiranih aktivnosti na dvorištu*

$$B = \{\text{sunčano, oblačno}\}$$

$$A \cap B = \{\text{sunčano, oblačno}\}$$

Što znači da će se aktivnosti održati na dvorištu i vremenski uslovi su posebno povoljni.

$$A \cup B = \{\text{sunčano, oblačno, vetrovito}\}$$

Predstavlja sve vremenske uslove kod kojih škola donosi odluku da aktivnosti mogu da se održe na dvorištu.

$$A \setminus B = \{\text{vetrovito}\}$$

Predstavlja situaciju kada se sportske aktivnosti ipak održavaju na školskom dvorištu, ali vremenski uslovi nisu idealni.

1.4.2. Verovatnoća i prostor verovatnoće

U aksiomatskom zasnivanju teorije verovatnoće pojam koji je od izuzetnog značaja jeste pojam σ – *polja* događaja.

Definicija 1.4.2.1. [16] Neka je Ω prostor elementarnih događaja i $\mathcal{P}(\Omega)$ familija svih podskupova od Ω . Skup $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ nazivamo σ – *polje događaja* ako važi:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3. $(\forall i \in \mathbb{N}) A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

Primer 1.4.2.1. Neka je sada $\Omega = \{\text{sunčano}, \text{oblačno}, \text{kišovito}\}$

$\mathcal{F} =$

$\{\emptyset, \Omega, \{\text{sunčano}\}, \{\text{oblačno}\}, \{\text{kišovito}\}, \{\text{sunčano}, \text{oblačno}\}, \{\text{sunčano}, \text{kišovito}\}, \{\text{oblačno}, \text{kišovito}\}\}$

Tada je $\mathcal{F}$ σ – polje događaja.

Sledi definicija pojma verovatnoće (koristeći aksiomatski pristup).

Definicija 1.4.2.2. [16] Neka je Ω prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ – polje događaja.

Funkcija $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ je **verovatnoća** ako važi:

1. $P(A) \geq 0, (\forall A \in \mathcal{F}),$
2. $P(\Omega) = 1,$
3. $P(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i),$ za sve $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ takve da je $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$

Osobine koje su navedene su prethodnoj definiciji nazivaju se: nenegativnost, normiranost, σ – aditivnost. Broj $P(A)$ je verovatnoća događaja A . Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se zove prostor verovatnoća.

Neke osobine verovatnoće:

- Aditivnost, $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$
- Monotonost, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B),$
- $0 \leq P(A) \leq 1,$
- Verovatnoća suprotnog događaja, $P(A^c) = 1 - P(A),$
- Verovatnoća unije dva događaja, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.4.3. Uslovna verovatnoća i nova informacija

U teoriji odlučivanja, uslovna verovatnoća predstavlja ažuriranje početnih uverenja nakon dobijanja nove informacije.

Neka je dat prostor elementarnih događaja i pretpostavimo da se dogodio događaj (A) . Ukoliko je potrebno odrediti verovatnoću događaja (B) , tada se posmatranje ograničava na događaj (A) , odnosno prostor elementarnih događaja svodi se na skup ishoda koji pripadaju događaju (A) . Na ovaj način uvodi se pojam uslovne verovatnoće.

Definicija 1.4.3.1. [19] Neka je dat prostor Ω elementarnih događaja i verovatnoća P . Uslovna verovatnoća događaja B u odnosu na događaj A , takav da je $P(A) > 0$ je:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

A je nova informacija, dok je $P(B|A)$ nova verovatnoća događaja B nakon informacije A .

Pod uslovom da važi $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$ iz relacije

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ i } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Direktno sledi takozvano **pravilo množenja**:

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Na osnovu njega lako dobijamo drugi izraz za uslovnu verovatnoću:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Definicija 1.4.3.2. [19] (*potpun sistem događaja*): Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{F}$ zadovoljavaju sledeće uslove:

1. $P(H_i) > 0, i = 1, \dots, n$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset; i, j = 1, \dots, n; i \neq j$
3. $\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$

Događaji $H_1, \dots, H_n$ se zovu hipoteze, a $\{H_1, \dots, H_n\}$ je potpun sistem događaja. Verovatnoće $P(H_i), 1 \leq i \leq n$, nazivamo *apriorne verovatnoće*, a verovatnoće $P(A|H_i)$, (gde je A neki događaj iz prostora ishoda Ω), nazivamo *aposteriorne verovatnoće*.

Teorema 1.4.3.1. [19] (*formula totalne verovatnoće*): Ako je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sistem događaja, onda $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$, za svako $A \in \mathcal{F}$.

Dokaz. Neka $H_1, H_2, \dots, H_n$ čine potpun sistem događaja. Tada se svaki događaj A može predstaviti kao unija međusobno disjunktih događaja $A \cap H_i$, odnosno

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^n H_i) = \cup_{i=1}^n (A \cap H_i)$$

Kako važi da su događaji $H_1, H_2, \dots, H_n$ međusobno disjunkt, i događaji $A \cap H_1, A \cap H_2, \dots, A \cap H_n$ su takođe međusobno disjunkt. Zbog toga primenom osobine aditivnosti verovatnoće, dobijamo:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i)$$

Dalje, prema pravilu množenja verovatnoća,

$$P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zamenom ovog izraza u prethodnu jednakost, dobijamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$$

Čime je formula totalne verovatnoće dokazana. ■

Primer 1.4.3.1. Direktor škole treba da donese odluku da li će se planirane sportske aktivnosti održati na školskom dvorištu ili u fiskulturnoj sali, što zavisi od vremenskih uslova tog dana. Pretpostavimo da direktor donosi odluku na sledeći način: Ako je verovatnoća održavanja aktivnosti na dvorištu najmanje 60%, aktivnosti se planiraju na školskom dvorištu, u suprotnom se planiraju u sali.

Pretpostavimo da su mogući vremenski uslovi:

$$\Omega = \{\text{sunčano}, \text{oblačno}, \text{kišovito}\}$$

Neka su mogući vremenski uslovi podeljeni na tri međusobno disjunktne događaja:

- $H_1 = \{\text{sunčano}\}$
- $H_2 = \{\text{oblačno}\}$
- $H_3 = \{\text{kišovito}\}$

Neka je A – *aktivnosti se održavaju na školskom dvorištu*

Pretpostavimo sledeće verovatnoće na osnovu podataka iz prethodnih godina:

- $P(H_1) = 0.4$
- $P(H_2) = 0.3$
- $P(H_3) = 0.3$

Za svaku od vremenskih prilika znamo i verovatnoću da će se aktivnosti ipak održati napolju:

- $P(A|H_1) = 1$
- $P(A|H_2) = 0.9$
- $P(A|H_3) = 0$

Koristeći formulu totalne verovatnoće možemo izračunati ukupnu verovatnoću da će se aktivnosti održati na školskom dvorištu:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0 \\ = 0.4 + 0.27 = 0.67$$

Kako je $P(A) = 67\% > 60\%$, na osnovu svega prikazanog direktor škole donosi odluku: Sportske aktivnosti se planiraju na školskom dvorištu.

Naredna formula se naziva Bayesova formula. Dokazao ju je engleski matematičar Thomas Bayes (1701-1761). Ova formula je korisna ako se posmatra pojava gde se ne može sa sigurnošću odrediti koji od n mogućih uzoraka je izaziva. Pomoću nje možemo da odredimo verovatnoću da neki od tih n mogućih uzoraka zapravo pravi uzorak posmatrane pojave.

Teorema 1.4.3.2. [19] (*Bayesova formula*): Ako je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sistem događaja, onda

$$P(H_m|A) = \frac{P(H_m) \cdot P(A|H_m)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}, m = 1, \dots, n; A \in \mathcal{F}, P(A) > 0$$

Primer 1.4.3.2. U ovom primeru biće proširen prethodni primer 1.4.3.1. Sada se postavlja pitanje: Ako su se sportske aktivnosti održale na školskom dvorištu, kolika je verovatnoća da je tog dana bilo sunčano?

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 A)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 1}{0.67} = 0.60$$

1.4.4. Slučajna promenljiva

Definicija 1.4.4.1. [16] Neka je Ω prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ -polje događaja na Ω . Za funkciju $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, za koju važi $\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$, kažemo da je **slučajna promenljiva**.

Događaj $\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\}$ kraće označavamo sa $\{X < x\}$. Kako je $\{X < x\} = X^{-1}(-\infty, x)$ imamo da je $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna promenljiva ako $X^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.4.4.2. [16] Slučajna promenljiva $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **diskretnog** tipa ako je skup $X(\Omega)$ konačan ili prebrojiv.

Diskretna slučajna promenljiva $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je opisana ako se zna skup $X(\Omega) = \{x_i: i \in I\}$, gde je I konačan ili prebrojiv i ako se zna funkcija $P: X(\Omega) \rightarrow [0,1]$, to jest ako se znaju verovatnoće $p_i = P\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x_i\}$.

Zakon raspodele slučajne promenljive X je:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

U ovom radu pažnja će biti usmerena na diskretne slučajne promenljive, uz napomenu da postoje i slučajne promenljive neprekidnog tipa.

Definicija 1.4.4.3. [16] Slučajna promenljiva $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **neprekidnog** tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takva da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}$$

Funkcija f je gustina raspodele verovatnoća slučajne promenljive X .

Ako je f integrabilna onda je F neprekidna, a ako je f neprekidna onda je F diferencijabilna i važi $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ako je f neprekidna tada je

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ i } \int_a^b f(t)dt = P(a \leq X \leq b).$$

1.4.5. Matematičko očekivanje

Matematičko očekivanje predstavlja jedan od osnovnih pojmova teorije verovatnoće i statistike. Njegov značaj ogleda se u mogućnosti da se na osnovu raspodele verovatnoće određene slučajne promenljive pridruži vrednost koja predstavlja njen očekivani ishod, čime se stvaraju osnove za dalju analizu i donošenje zaključaka.

U ovom delu biće dat pregled pojmova poput disperzije i standardnog odstupanja. Takođe, definisana je i Jensenova nejednakost koja predstavlja značajan rezultat u oblasti matematičke analize i teoriji verovatnoće, a lepu primenu ima i u teoriji odlučivanja.

Definicija 1.4.5.1. [9] Neka slučajna promenljiva X uzima vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$ redom sa verovatnoćama $p_1, p_2, \dots, p_n$, pri čemu je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Matematičko očekivanje slučajne promenljive X je

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Navešćemo neke **osobine** matematičkog očekivanja:

1. Za konstantu C , matematičko očekivanje je $E(C) = C$
2. Ako je a konstanta i X slučajna promenljiva tada je $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

$$E(a \cdot X) = \sum_{i=1}^k (a \cdot x_i) \cdot p_i = a \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i = a \cdot E(X)$$

3. Ako su X i Y slučajne promenljive sa konačnim matematičkim očekivanjima $E(X)$ i $E(Y)$, tada je $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dokaz:

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n (x_i + y_m) \cdot p_{im} = \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n x_i \cdot p_{im} + \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n y_m \cdot p_{im} \\ &= \sum_{i=1}^k x_i \sum_{m=1}^n p_{im} + \sum_{m=1}^n y_m \sum_{i=1}^k p_{im} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i + \sum_{m=1}^n y_m \cdot p_m \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

4. Za svako $\omega \in \Omega$, ako je $X(\omega) \geq 0$ onda je $E(X) \geq 0$
5. Za svako $\omega \in \Omega$, ako je $X(\omega) \geq Y(\omega)$ onda je $E(X) \geq E(Y)$

Dokaz:

Kako je $X(\omega) - Y(\omega) \geq 0$, na osnovu prethodne osobine imamo $E(X - Y) \geq 0$, na osnovu osobine 3 dalje sledi $E(X) + E(-Y) \geq 0$ i konačno iz osobine 2 imamo $E(X) - E(Y) \geq 0$, odnosno $E(X) \geq E(Y)$. ■

6. $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$

Dokaz:

Ovo ćemo dokazati pomoću matematičke indukcije.

Baza je $E(X) = E(X)$.

$$E(X_1 + X_2 + \dots + (X_n + X_{n+1})) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n + X_{n+1})$$

Korišćenjem osobine 3 dobijamo

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n + X_{n+1}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) + E(X_{n+1})$$

Čime je tvrđenje dokazano. ■

7. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa konačnim matematičkim očekivanjima $E(X)$ i $E(Y)$ tada je $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Dokaz:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n (x_i \cdot y_m) \cdot p_{im} = \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n x_i \cdot y_m \cdot p_i \cdot p_m$$

$$= \sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i \cdot \sum_{m=1}^n y_m \cdot p_m = E(X) \cdot E(Y)$$

8. Za nezavisne slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$ sa konačnim očekivanjima važi $E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n)$

Dokazuje se indukcijom, analogno kao osobina 6.

Definicija 1.4.5.2 [9] Disperzija je prosečno kvadratno odstupanje slučajne promenljive X od njenog matematičkog očekivanja

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

Definicija 1.4.5.3. [9] Standardno odstupanje je odstupanje slučajne promenljive X od njenog matematičkog očekivanja

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Definicija 1.4.5.4. [9] Kovarijacija i koeficijent korelacije su mere zavisnosti slučajnih promenljivih:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ \rho &= \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} \end{aligned}$$

1.4.6. Jensenova nejednakost

Definicija 1.4.6.1. [14] Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ interval. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je konkavna ako za sve $x, y \in D$ i svako $\alpha \in [0, 1]$ važi sledeća nejednakost:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Neka je $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ konkavna funkcija na intervalu D , a X slučajna promenljiva koja uzima vrednosti u D , pri čemu su $E(X)$ i $E(f(X))$ konačni. Tada važi Jensenova nejednakost.

$$f(E(X)) \geq E(f(X))$$

Jensenova nejednakost ima veliki značaj u teoriji odlučivanja, jer matematički pokazuje da iz **konkavne** funkcije korisnosti proizilazi **averzija prema riziku**. Averzija prema riziku predstavlja sklonost donosioca odluke da, između sigurne i rizične opcije sa jednakim očekivanim novčanim ishodom, preferira sigurnu opciju (o averziji prema riziku biće reči i kasnije u radu, u trećem poglavlju jedan deo je posvećen ovoj temi).

Da bismo objasnili prethodni pasus možemo funkciju f zameniti funkcijom korisnosti u . Jensenova nejednakost tada izgleda:

$$u(E(X)) \geq E(u(X))$$

Ovo se može zapisati:

$$u(E(X)) \geq \sum_i p_i u(x_i)$$

Dakle, korisnost sigurnog očekivanog ishoda veća je od očekivane korisnosti rizične opcije.

Primer 1.4.6.1. Donosilac odluke treba da izabere između sigurnih 100\$ i rizične opcije gde može dobiti 50\$ sa verovatnoćom 0,5 ili 150\$ sa verovatnoćom 0,5.

Očekivana novčana vrednost kod rizične opcije je $50 \cdot 0,5 + 150 \cdot 0,5 = 100$. Dakle, obe opcije imaju očekivanu novčanu vrednost 100\$. Međutim, ako je funkcija korisnosti konkavna npr. $u(x) = \ln x$, onda je $u(E(X)) = \ln 100$, dok je $E(u(X)) = 0,5 \cdot \ln 50 + 0,5 \cdot \ln 150$.

Dakle, $\ln 100 > 0,5 \cdot \ln 50 + 0,5 \cdot \ln 150$. Iako obe opcije imaju istu očekivanu novčanu vrednost, sigurna opcija ima veću korisnost.

1.5. Naknadni uvid i kajanje u procesu odlučivanja

Procena kvaliteta odluke nije jednostavna, jer odluka koja je u trenutku donošenja delovala kao najbolji izbor kasnije može imati lošiji rezultat. Zato se kvalitet odluke ne može procenjivati samo na osnovu njenog ishoda.

Na rezultat odluke utiču i spoljašnje okolnosti koje donosilac odluke ne može uvek da predvidi ili kontroliše. Zbog toga uspeh ili neuspeh odluke zavisi ne samo od njenog kvaliteta, već i od različitih okolnosti i neizvesnosti (videti [10]).

Zato je važno procenjivati i proces donošenja odluke – da li su korišćene dostupne informacije, da li je postupak bio odgovarajući i da li je odluka u tom trenutku bila razumna. Međutim, u praksi je teško sasvim odvojiti kvalitet odluke od njenog konačnog rezultata, jer je teško odluku koja nije dovela do povoljnih rezultata jednostavno opravdati time da je doneta na pravilan način.

Kada se pojavi nova i neočekivana informacija, ljudi menjaju svoje mišljenje kako bi je uklopili u postojeću sliku stvarnosti.

Na primer, ako dva košarkaška tima imaju isti broj pobeda i poraza, a jedan ubedljivo pobjedi drugi, može se zaključiti da je taj tim mnogo bolji. Ta nova informacija može promeniti ne samo očekivanja o budućim utakmicama, već i način na koji se posmatraju prethodni rezultati. Iako je prilagođavanje mišljenja novim informacijama korisno i prirodno, ono može dovesti i do pogrešnih zaključaka. Problem je u tome što, nove informacije dovode do potiskivanja prethodnih uverenja i stiče se utisak da je razmišljanje koje je formirano na osnovu novih informacija zapravo razmišljanje koje je takvo bilo oduvek (videti [10]).

Ovaj proces može se jasnije objasniti kroz koncept uslovne verovatnoće. Pre odigravanja utakmice, na osnovu dostupnih informacija moguće je proceniti verovatnoću da je jedan tim kvalitetniji od drugog. Ukoliko su oba tima do tada ostvarila isti broj pobeda i poraza, početna procena njihovih sposobnosti može biti približno jednaka. Međutim, nakon što jedan tim ostvari ubedljivu pobjedu, dostupna je nova informacija koja utiče na prethodnu procenu. Tada se više ne posmatra samo verovatnoća da je određeni tim kvalitetniji, već verovatnoća da je kvalitetniji pod uslovom da je ostvario ubedljivu pobjedu. Matematički, takva procena predstavlja uslovnu verovatnoću, odnosno verovatnoću nastupanja jednog događaja kada je poznato da se drugi događaj već dogodio.

Primer 1.5.1. [10] Istraživači su, na osnovu stvarnog sudskog slučaja, ispitivali studente iz Kalifornije o odluci grada Duluta u Minesoti. Grad je razmatrao da li treba da izdvoji novac za zapošljavanje stalnog nadzornika mosta, kako bi se sprečilo nagomilavanje otpada koje bi moglo da blokira rečni tok. Jednoj grupi studenata date su samo informacije koje su bile poznate u trenutku donošenja odluke. Samo 24% njih smatralo je da grad treba da zaposli nadzornika. Drugoj grupi je rečeno da je kasnije došlo do blokiranja reke, poplava i velike materijalne štete. U toj grupi je 56% studenata smatralo da je grad trebalo da zaposli nadzornika, iako su bili upozoreni da ne uzimaju naknadne informacije u obzir.

Ljudi često procenjuju da li je neka odluka bila dobra na osnovu njenog ishoda, umesto na osnovu informacija koje su bile dostupne u trenutku donošenja odluke. Kada se dogodi nešto loše, znakovi upozorenja često izgledaju očiglednije nego što su zaista bili pre događaja. Zbog toga se razumna odluka može naknadno činiti kao očigledno pogrešna.

To pokazuje primer grada Duluta. Kada su studenti imali samo informacije koje su bile poznate pre odluke, samo 24% njih smatralo je da grad treba da zaposli stalnog nadzornika mosta. Kada su saznali da je kasnije došlo do poplave i velike štete, čak 56% je smatralo da je grad trebalo da ga zaposli.

Primer pokazuje da naknadno saznanje o ishodu može značajno promeniti procenu ranije odluke. Što je posledica događaja gora, ova pristrasnost je obično izraženija.

Na osnovu literature može se zaključiti da je potrebno razlikovati kvalitet odluke od kvaliteta njenog ishoda. Nije svaka loša posledica rezultat loše odluke, kao što ni dobar rezultat ne dokazuje da je odluka bila najbolja moguća. Dobra odluka bi trebalo da se procenjuje na osnovu informacija koje su bile dostupne u trenutku kada je doneta, kao i na osnovu načina na koji su procenjeni mogući rizici i koristi.

Kajanje je neprijatan osećaj koji se javlja kada osoba razmišlja kako bi ishod bio drugačiji da je donela drugu odluku. Zbog straha od kajanja, ljudi često unapred pokušavaju da izbegnu odluke zbog kojih bi kasnije mogli da se osećaju loše (videti [10]).

Kajanje je obično jače kada osoba aktivno promeni postojeće stanje i zbog toga pretrpi gubitak. Na primer, ako neko uloži novac i izgubi ga, kajanje može biti veoma snažno. Ako ne uloži novac, a kasnije se pokaže da bi zaradio, takođe može da oseti kajanje, ali ono često bude slabije.

Zbog toga ljudi često biraju uobičajena ili podrazumevana rešenja, jer tako smanjuju osećaj lične odgovornosti ako rezultat bude loš.

2. ANALIZA ODLUČIVANJA

Analiza odlučivanja predstavlja sistematičan pristup koji omogućava identifikovanje svih mogućih alternativa i izbor one koja u datim okolnostima pruža najpovoljnije rešenje. U okviru ovog procesa razmatraju se brojni faktori koji mogu uticati na ishod odluke, pri čemu se posebna pažnja posvećuje proceni rizika i neizvesnosti, kao najznačajnijim elementima procesa odlučivanja. Primenom metoda analize odlučivanja donosilac odluke može objektivnije da proceni moguće rizike i stepen neizvesnosti koji prati svaku od raspoloživih alternativa. Iako se procena zasniva na raspoloživim informacijama i činjenicama, ona u određenoj meri uključuje i lična iskustva, uverenja i intuiciju donosioca odluke. Za razliku od intuitivnog pristupa, analiza odlučivanja obezbeđuje organizovaniji, dosledniji i sistematičniji način donošenja odluka.

U ovom poglavlju biće prikazano odlučivanje pri izvesnosti, odlučivanje pri neizvesnosti i odlučivanje pri riziku. Takođe, biće prikazana i analiza odlučivanja sa uzorkovanjem, koja podrazumeva primenu Bayes-ove teoreme. Svaka celina ilustrovana je odgovarajućim primerima, čime se dodatno produbljuje razumevanje obrađenih tema. Literatura koja je upotrebljena u ovom poglavlju je [17].

2.1. Odlučivanje pri izvesnosti

Izvesnost predstavlja situaciju u kojoj su donosiocu odluke poznate sve relevantne činjenice koje se odnose na stanje sveta. U takvim okolnostima proces odlučivanja odvija se bez nepoznatih faktora, jer postoji samo jedno moguće stanje ili, ukoliko ih ima više, sa potpunom sigurnošću se zna koje će od njih nastupiti.

Kada se odluke donose u uslovima potpune izvesnosti, ne postoji dilema u pogledu izbora odgovarajuće alternative, budući da su sve okolnosti unapred poznate i ne ostavljaju prostor za neizvesnost. Ipak, ovakve situacije se u praksi javljaju veoma retko. Savremeno poslovno okruženje karakterišu stalne promene, intenzivna konkurencija i promenljivi zahtevi potrošača, zbog čega je potpuno predvidivo okruženje gotovo nemoguće obezbediti.

Primer 2.1.1. Postoje dva autobusa koje ćemo označiti sa A_1 i A_2 . Prvi autobus troši 15 l/h, a drugi autobus troši 17 l/h. Ovi autobusi prevoze putnike do dva odmarališta koja ćemo označiti O_1 i O_2 . Do prvog odmarališta treba voziti 3 sata, dok je do drugog odmarališta potrebno voziti 5 sati. Donosilac odluke treba da odabere koji autobus će ići u koje odmaralište, ako je jedini kriterijum potrošnja goriva.

Ovaj problem ima dve akcije:

- a_1 : A_1 ide u O_1 i A_2 ide u O_2
- a_2 : A_1 ide u O_2 i A_2 ide u O_1

U prvoj akciji ukupna potrošnja goriva je : $15 \cdot 3 + 17 \cdot 5 = 130$ l, dok je u drugoj akciji ukupna potrošnja goriva: $15 \cdot 5 + 17 \cdot 3 = 126$ l.

S obzirom da kod druge akcije imamo manju potrošnju goriva, izvesno je da će se odlučiti za tu akciju.

2.2. Analiza odlučivanja pri neizvesnosti

U situacijama kada donosilac odluke nije u mogućnosti da odredi verovatnoće nastupanja pojedinih stanja sveta, primenjuje se analiza odlučivanja bez apriornih verovatnoća. Ovakav pristup koristi se za rešavanje problema u kojima postoji više mogućih

alternativa, a cilj je izbor najpovoljnije akcije u uslovima neizvesnosti. Njegova primena posebno je zastupljena kod problema koji se odnose na unapred određivanje količine proizvoda koju je potrebno nabaviti.

Za izbor optimalne alternative mogu se primeniti različiti kriterijumi odlučivanja, među kojima se najčešće izdvajaju [17]:

- MAXIMIN kriterijum
- MINIMAX kriterijum
- MAXIMAX kriterijum
- Laplace-ov kriterijum

Zajednička karakteristika svih navedenih kriterijuma jeste da se odluke donose bez pouzdanih informacija o verovatnoći nastupanja pojedinih stanja. Izabrani kriterijum predstavlja važan element procesa odlučivanja, jer u velikoj meri određuje koja će alternativa na kraju biti ocenjena kao najpovoljnija.

Naredni primer ilustruje svaku od navedenih metoda.

Primer 2.2.1. Mundijal, odnosno Svetsko prvenstvo u fudbalu je najprestižnije međunarodno fudbalsko takmičenje. Održava se svake 4 godine i učestvuju najbolje reprezentacije iz celog sveta. Triona je zvanična lopta Svetskog prvenstva 2026. godine.

Jedna sportska prodavnica planira da nabavi određeni broj ovih lopti. Lopte se nabavljaju po ceni od $T = 50\$$ (trošak), a prodaju po ceni od $C = 60\$$. Lopte koje se ne prodaju dok traje Svetsko prvenstvo, nakon završetka istog biće prodavane po sniženoj ceni $R = 30\$$ (rasprodaja).

Donosilac odluke ne može tačno da proceni koliko je lopti potrebno, ali pretpostavlja da je potražnja između 160 i 200 zato odlučuje da analizira sledeće akcije: $a_1 = 160$ (nabavljamo 160 lopti), $a_2 = 170$; $a_3 = 180$; $a_4 = 190$; $a_5 = 200$. Stanja okruženja takođe ima pet i uzimaju iste vrednosti $S_1 = 160$ (potražnja 160 lopti); $S_2 = 170$; $S_3 = 180$; $S_4 = 190$; $S_5 = 200$.

Prvo je potrebno formirati tabelu plaćanja (efekata) za datu situaciju. Ova tabela pokazuje efekte za sve kombinacije onoga što je naručeno (akcije) i onoga što je prodato (stanje sveta).

	$S_1 = 160$	$S_2 = 170$	$S_3 = 180$	$S_4 = 190$	$S_5 = 200$
$a_1 = 160$	1 600	1 600	1 600	1 600	1 600
$a_2 = 170$	1 400	1 700	1 700	1 700	1 700
$a_3 = 180$	1 200	1 500	1 800	1 800	1 800
$a_4 = 190$	1 000	1300	1 600	1 900	1 900
$a_5 = 200$	800	1100	1 400	1 700	2 000

Tabela 2. Tabela plaćanja (efekata)

Primeri izračunavanja pojedinih efekata iz tabele plaćanja:

$$e_{11} = (C - T) \cdot a_1 = (60 - 50) \cdot 160$$

$$e_{21} = (C - T) \cdot S_1 - (T - R) \cdot (a_2 - S_1) = 10 \cdot 160 - 20 \cdot 10 = 1400$$

$$e_{22} = (C - T) \cdot a_2 = 10 \cdot 170 = 1700$$

$$e_{31} = (C - T) \cdot 160 - (T - R) \cdot (a_3 - S_1) = 1600 - 400 = 1200$$

Nakon formiranja tabele plaćanja (efekata) treba formirati i tabelu žaljenja. Žaljenje je propušteni profit, zbog izbora akcije koja nije najbolja (gubitak prilike).

Vrednosti iz tabele žaljenja dobijaju se na osnovu izračunatih vrednosti u tabeli plaćanja. U svakoj koloni tabele plaćanja nađemo maksimalnu vrednost, a zatim od te vrednosti oduzmemo odgovarajuće vrednosti iz te kolone.

	$S_1 = 160$	$S_2 = 170$	$S_3 = 180$	$S_4 = 190$	$S_5 = 200$
$a_1 = 160$	0	100	200	300	400
$a_2 = 170$	200	0	100	200	300
$a_3 = 180$	400	200	0	100	200
$a_4 = 190$	600	400	200	0	100
$a_5 = 200$	800	600	400	200	0

Tabela 3. Tabela žaljenja (gubitak prilike)

$$\check{Z}_{11} = \max e_{i1} - e_{11} = 1600 - 1600 = 0$$

$$\check{Z}_{21} = \max e_{i1} - e_{21} = 1600 - 1400 = 200$$

$$\check{Z}_{43} = \max e_{i3} - e_{43} = 1800 - 1600 = 200$$

Na osnovu formiranih tabela plaćanja i žaljenja donosilac odluke primenjuje neki od pet navedenih kriterijuma.

2.2.1. MAXIMIN kriterijum (kriterijum pesimizma)

MAXIMIN kriterijum podrazumeva da će donosilac odluke zauzeti oprezan stav. Ovaj kriterijum je još poznat i kao kriterijum pesimizma, jer se očekuje sprovođenje svake akcije sa najnepovoljnijim ishodima. Odnosno, kriterijum podrazumeva da koja god akcija da bude izabrana očekuje se ostvarivanje njenog najslabijeg ishoda. Zato je potrebno odabrati najbolji među najgorim ishodima, odnosno potrebno je odabrati akciju kod koje se maksimizira minimalna korisnost.

Akcije	MIN Profit	Izbor MAX
$a_1 = 160$	1 600	1 600
$a_2 = 170$	1 400	
$a_3 = 180$	1 200	
$a_4 = 190$	1 000	
$a_5 = 200$	800	

Tabela 4. Izbor akcije po MAXIMIN kriterijumu

Iz tabele vidimo da na osnovu ovog kriterijuma treba odabrati akciju a_1 .

2.2.2. MINIMAX kriterijum (kriterijum žaljenja)

MINIMAX kriterijum poznat je i kao kriterijum žaljenja. Njegova primena zasniva se na određivanju najvećeg mogućeg žaljenja za svaku raspoloživu alternativu u tabeli žaljenja. Nakon toga se bira ona akcija kod koje je utvrđeno maksimalno žaljenje najmanje u poređenju sa ostalim alternativama.

Drugim rečima, izbor se vrši prema principu minimalnog od maksimalnih žaljenja, što predstavlja osnovu zbog koje je ovaj kriterijum dobio naziv MINIMAX. U nastavku će biti prikazana tabela koja ilustruje primenu ovog kriterijuma, a na osnovu nje će biti određena najpovoljnija akcija prema navedenom principu.

Akcije	MAX Žaljenje	Izbor MIN
$a_1 = 160$	400	
$a_2 = 170$	300	300
$a_3 = 180$	400	
$a_4 = 190$	600	
$a_5 = 200$	800	

Tabela 5. Izbor akcije po MINIMAX kriterijumu

Kao što možemo videti iz tabele, po ovom kriterijumu najbolje je odabrati akciju a_2 .

2.2.3. MAXIMAX kriterijum (kriterijum optimizma)

Ovaj kriterijum poznat je i kao kriterijum optimizma, jer se zasniva na pretpostavci da će se ostvariti najpovoljniji mogući ishod. Njegova primena podrazumeva izbor one alternative kod koje je maksimalni mogući profit, odnosno efekat, najveći u odnosu na ostale raspoložive akcije.

Zbog usmerenosti ka najboljim mogućim rezultatima, ovaj kriterijum najčešće primenjuju donosioci odluka koji imaju veću sklonost ka preuzimanju rizika. U narednoj tabeli biće prikazani podaci na osnovu kojih će se, primenom ovog kriterijuma, utvrditi najpovoljnija akcija.

Akcije	MAX Profit	Izbor MAX
$a_1 = 160$	1 600	
$a_2 = 170$	1 700	
$a_3 = 180$	1 800	
$a_4 = 190$	1 900	
$a_5 = 200$	2 000	2 000

Tabela 6. Izbor akcije po kriterijumu MAXIMAX

Prema MAXIMAX kriterijumu treba odabrati akciju a_5 .

2.2.4. Laplace-ov kriterijum

Donosilac odluke usvaja da svako stanje ima istu verovatnoću pojavljivanja. Zatim, sa tako odabranim verovatnoćama potrebno je izračunati očekivani profir (efekat) za svaku akciju, a zatim ćemo odabrati akciju sa maksimalnim očekivanim profitom.

Očekivani profit za akciju a_i ćemo označiti sa $\overline{p}_i$.

Očekivani profit izračunava se prema opštem obrascu:

$$\overline{p}_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} \cdot P\{S_j\}, m - stanja$$

Očekivani profit predstavlja poseban slučaj matematičkog očekivanja u kojem se, usled nepoznavanja stvarnih verovatnoća stanja sveta svim stanjima dodeljuje jednaka verovatnoća pojavljivanja, pa očekivani profit postaje aritmetička sredina mogućih ishoda, a bira se alternativa sa najvećom prosečnom vrednošću.

Izbor akcije po Laplace-ovom kriterijumu predstavljen je u sledećoj tabeli.

Akcije	Očekivani profit	Izbor MAX
$a_1 = 160$	1 600	
$a_2 = 170$	1 640	1640
$a_3 = 180$	1 620	
$a_4 = 190$	1 540	
$a_5 = 200$	1 400	

Tabela 7. Izbor akcije po Laplace-ovom kriterijumu

Vrednosti iz tabele 7 su dobijene na sledeći način:

$$\overline{p}_1 = \frac{1}{5} (1600 + 1600 + 1600 + 1600 + 1600) = 1600$$

$$\overline{p}_2 = \frac{1}{5} (1400 + 1700 + 1700 + 1700 + 1700) = 1640$$

$$\overline{p}_3 = \frac{1}{5} (1200 + 1500 + 1800 + 1800 + 1800) = 1620$$

$$\overline{p_4} = \frac{1}{5} (1000 + 1300 + 1600 + 1900 + 1900) = 1540$$

$$\overline{p_5} = \frac{1}{5} (800 + 1100 + 1400 + 1700 + 2000) = 1400$$

Možemo primetiti da je najbolja akcija na osnovu ovog kriterijuma a_2 .

Interesantno je da smo na početku naveli da je za **odlučivanje pri neizvesnosti** karakteristično to da nisu poznate verovatnoće nastupanja pojedinih stanja sveta, međutim Laplace-ov kriterijum jeste jedan od kriterijuma za odlučivanje pri neizvesnosti iako radimo sa određenim verovatnoćama. Radi se o tome da kod ovog kriterijuma verovatnoće nisu stvarno poznate. One se pretpostavljaju kao jednake zato što nemamo informaciju da je jedno stanje verovatnije od drugog, zato se Laplace-ov kriterijum u teoriji odlučivanja svrstava u **odlučivanje pri neizvesnosti**.

Na osnovu prethodno predstavljenih rezultata možemo zaključiti da izbor kriterijuma odlučivanja presudno utiče na izbor akcije. Dosta na rezultate utiču lične osobine donosioca odluke, njegova uverenja, iskustvo i intuicija. Kod odlučivanja pri neizvesnosti donosilac odluke zna koje su moguće posledice svojih alternativa, ali ne zna kolika je verovatnoća da će nastupiti pojedina stanja sveta. Zbog toga matematički model nije dovoljan sam po sebi, već u prvi plan dolaze lične karakteristike.

Lične osobine su važne, jer na izbor kriterijuma utiče stav donosioca odluke prema neizvesnosti. Optimista očekuje najpovoljniji ishod (MAXIMAX kriterijum), pesimista polazi od najgoreg ishoda (MAXIMIN kriterijum), oprezan želi da smanji moguće kajanje (MINIMAX kriterijum), neutralan donosilac odluke nema razloga da favorizuje bilo koje stanje (Laplace-ov kriterijum).

2.3. Analiza odlučivanja pri riziku

Analiza odlučivanja u uslovima rizika zasniva se na pretpostavci da je donosilac odluke sposoban da pojedinim mogućim stanjima sveta pridruži odgovarajuće verovatnoće njihovog nastupanja. Osnovni cilj je izbor najoptimalnije akcije među više raspoloživih alternativa, pri čemu se često rešavaju problemi koji zahtevaju određivanje količine proizvoda koju je potrebno unapred nabaviti.

Za rešavanje problema odlučivanja u uslovima rizika razvijene su različite metode, među kojima se izdvajaju [17]:

- kriterijum očekivane novčane vrednosti (ONV)
- kriterijum maksimalne verodostojnosti
- kriterijum očekivanih žaljenja (OŽ)

2.3.1. Kriterijum očekivane novčane vrednosti (ONV)

Za kriterijum očekivane novčane vrednosti koristimo tabelu plaćanja. Funkcioniše tako što prvo određujemo sume proizvoda odgovarajućih efekata i verovatnoća za svako stanje sveta. Zatim se traži maksimalna vrednost ovih suma proizvoda i usvaja se akcija koja donosi tu vrednost.

Primer 2.3.1.1. Koristićemo primer 2.2.1. gde smo već formirali tabelu plaćanja. Ono što u primeru 2.2.1. nismo imali jesu **verovatnoće nastupajućih stanja**. Ovde ćemo to promeniti i formiraćemo proširenu tabelu plaćanja.

- a) Neka je donosilac odluke dodelio sledeće verovatnoće svim stanjima: $P\{S_1\} = 0,1$; $P\{S_2\} = 0,2$; $P\{S_3\} = 0,4$; $P\{S_4\} = 0,2$; $P\{S_5\} = 0,1$ (suma verovatnoća mora biti jednaka 1). Dakle, formiraćemo proširenu tabelu plaćanja (efekata) i proširenja se odnose na uvođenje verovatnoća stanja. Takođe u novoj tabeli ćemo imati i jednu posebnu kolonu u kojoj ćemo uneti očekivanu novčanu vrednost za svaku akciju $ONV(a_i)$.

Akcije	Stanja (potražnja)					ONV(a_i)
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	160 0,1	170 0,2	180 0,4	190 0,2	200 0,1	
$a_1 = 160$	1 600	1 600	1 600	1 600	1 600	1 600
$a_2 = 170$	1 400	1 700	1 700	1 700	1 700	1 670
$a_3 = 180$	1 200	1 500	1 800	1 800	1 800	1 680
$a_4 = 190$	1 000	1 300	1 600	1 900	1 900	1 570
$a_5 = 200$	800	1 100	1 400	1 700	2 000	1 400

Tabela 8. Proširena tabela plaćanja (efekata)

Primeri izračunavanja $ONV(a_i)$ za neke akcije, postupak je na početku detaljno opisan, tako da će biti predstavljena samo dobijanje novčane vrednosti za akcije a_1 i a_2 .

$$ONV(a_1) = 1600 \cdot 0,1 + 1600 \cdot 0,2 + 1600 \cdot 0,4 + 1600 \cdot 0,2 + 1600 \cdot 0,1 = 1600$$

$$ONV(a_2) = 1400 \cdot 0,1 + 1700 \cdot 0,2 + 1700 \cdot 0,4 + 1700 \cdot 0,2 + 1700 \cdot 0,1 = 1670$$

Na osnovu ovog kriterijuma treba izabrati akciju a_3 , jer je očekivana novčana vrednost za tu akciju maksimalna.

- b) Neka je donosilac odluke dodelio sledeće verovatnoće svim stanjima: $P\{S_1\} = 0,3$; $P\{S_2\} = 0,1$; $P\{S_3\} = 0,1$; $P\{S_4\} = 0,3$; $P\{S_5\} = 0,2$ (suma verovatnoća mora biti jednaka 1). Dakle, formiraćemo proširenu tabelu plaćanja (efekata) i proširenja se odnose na uvođenje verovatnoća stanja.

S obzirom da je postupak kako dolazimo do ONV za svaku akciju detaljno opisan na početku priče o kriterijumu očekivane novčane vrednosti, a primeri kako vršimo sam račun su

navedeni u delu pod a) , u primerima pod b) i c) nećemo detaljno opisivati ceo proces, samo ćemo rezultate predstaviti u tabeli.

Akcije	Stanja (potražnja)					ONV(a_i)
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	160 0,3	170 0,1	180 0,1	190 0,3	200 0,2	
$a_1 = 160$	1 600	1 600	1 600	1 600	1 600	1600
$a_2 = 170$	1 400	1 700	1 700	1 700	1 700	1610
$a_3 = 180$	1 200	1 500	1 800	1 800	1 800	1590
$a_4 = 190$	1 000	1 300	1 600	1 900	1 900	1540
$a_5 = 200$	800	1 100	1 400	1 700	2 000	1400

Tabela 9. Proširena tabela plaćanja (efekata)

- c) Neka je donosilac odluke dodelio sledeće verovatnoće svim stanjima: $P\{S_1\} = 0,5$; $P\{S_2\} = 0,2$; $P\{S_3\} = 0,1$; $P\{S_4\} = 0,1$; $P\{S_5\} = 0,1$ (suma verovatnoća mora biti jednaka 1).

Akcije	Stanja (potražnja)					ONV(a_i)
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	160 0,5	170 0,2	180 0,1	190 0,1	200 0,1	
$a_1 = 160$	1 600	1 600	1 600	1 600	1 600	1600
$a_2 = 170$	1 400	1 700	1 700	1 700	1 700	1550
$a_3 = 180$	1 200	1 500	1 800	1 800	1 800	1440
$a_4 = 190$	1 000	1 300	1 600	1 900	1 900	1300
$a_5 = 200$	800	1 100	1 400	1 700	2 000	1130

Tabela 10. Proširena tabela plaćanja (efekata)

Na osnovu prikazanih rezultata možemo videti kako različite raspodele verovatnoća dovode do odabira različitih akcija, odnosno vidimo koliko je odluka osetljiva na verovatnoće. Naime, u primeru a) treba odabrati akciju a_3 , jer je očekivana novčana vrednost za tu akciju maksimalna, dok je u primeru b) maksimalna očekivana novčana vrednost za akciju a_2 , tako da treba odabrati ovu akciju, dok u primeru c) na osnovu date raspodele verovatnoća maksimalna očekivana novčana vrednost je za akciju a_1 , tako da u ovom slučaju na osnovu kriterijuma očekivane novčane vrednosti treba odabrati akciju a_1 .

Rezultati pokazuju da kriterijum ONV nije određen isključivo novčanim posledicama alternativa, već u značajnoj meri zavisi od verovatnoća pridruženih stanjima prirode. Promena procenjenih verovatnoća dovodi do promene očekivanih novčanih vrednosti alternativa, a u određenim slučajevima može dovesti i do promene rangiranja alternativa i, samim tim, do drugačije odluke, kao što možemo primetiti u ovom primeru.

Zbog toga precizno i argumentovano određivanje verovatnoća predstavlja jedan od ključnih elemenata odlučivanja pri riziku. Što su procene verovatnoća pouzdanije, to je pouzdanija i odluka zasnovana na kriterijumu ONV.

2.3.2. Kriterijum maksimalne verodostojnosti

Donosilac odluke dodeljuje verovatnoće nastupanja svim stanjima i potrebno je uočiti ono stanje sa najvećom verovatnoćom. Zatim je potrebno izabrati akciju sa najboljim plaćanjem (profitom) za to stanje. Dakle, suština ovog kriterijuma jeste da usvojimo akciju sa maksimalnim profitom posmatrano za stanje sa najvećom verovatnoćom pojavljivanja.

Recimo da je donosilac odluke iz Primera 2.2.1. dodelio sledeće verovatnoće stanjima sveta: $P\{S_1\} = 0,1$; $P\{S_2\} = 0,2$; $P\{S_3\} = 0,4$; $P\{S_4\} = 0,2$; $P\{S_5\} = 0,1$ (suma verovatnoća mora biti jednaka 1, odnosno moramo imati potpun sistem događaja).

Onako kako je donosilac odluke rasporedio verovatnoće, možemo primetiti da stanje S_3 ima najveću verovatnoću pojavljivanja, s obzirom na to potrebno je da izdvojimo sve akcije za ovo stanje. Ovo ćemo uraditi u narednoj tabeli i iz tabele ćemo moći da pročitamo koja akcija je najbolja kada je u pitanju kriterijum maksimalne verodostojnosti.

Akcije	Profit za najverovatnije stanje S_3
$a_1 = 160$	1 600
$a_2 = 170$	1 700
$a_3 = 180$	1 800
$a_4 = 190$	1 600
$a_5 = 200$	1 400

Tabela 11. Izbor akcije po kriterijumu maksimalne verodostojnosti

Na osnovu podataka iz tabele možemo zaključiti da je akcija koju je najbolje izabrati na osnovu kriterijuma maksimalne verodostojnosti a_3 .

2.3.3. Kriterijum očekivanog žaljenja (OŽ)

Da bi se došlo do najpovoljnije akcije na osnovu kriterijuma očekivanog žaljenja potrebno je koristiti tabelu žaljenja. Potrebno je odrediti sume proizvoda odgovarajućih žaljenja i verovatnoća za svaku akciju. Nakon toga je potrebno odrediti minimalnu vrednost ovih suma proizvoda i usvaja se akcija koja obezbeđuje ovu vrednost.

Primer 2.3.3.1. Situacija koja se posmatra je ista kao u primeru 2.2.1. Kriterijum očekivanog žaljenja će dati jednu akciju koja je najpovoljnija na osnovu ovog kriterijuma. Da bi se došlo do te akcije biće posmatrana tabela žaljenja kao u primeru 2.2.1. s tim što će se u ovom primeru data tabela proširiti, jer će biti dodate verovatnoće za svako stanje. Neka je donosilac odluke dodelio sledeće verovatnoće: $P\{S_1\} = 0,1$; $P\{S_2\} = 0,2$; $P\{S_3\} = 0,4$; $P\{S_4\} = 0,2$; $P\{S_5\} = 0,1$.

Akcije	Stanja (potražnja)					OŽ(a_i)
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
	160	170	180	190	200	
	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	
$a_1 = 160$	0	100	200	300	400	200
$a_2 = 170$	200	0	100	200	300	130
$a_3 = 180$	400	200	0	100	200	120
$a_4 = 190$	600	400	200	0	100	230
$a_5 = 200$	800	600	400	200	0	400

Tabela 12. Proširena tabela žaljenja (gubitka prilike)

Primeri izračunavanja očekivanih žaljenja za neke akcije:

$$O\check{Z}(a_1) = 0 \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,2 + 200 \cdot 0,4 + 300 \cdot 0,2 + 400 \cdot 0,1 = 200$$

$$O\check{Z}(a_2) = 200 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,4 + 200 \cdot 0,2 + 300 \cdot 0,1 = 130$$

Iz kolone koja pokazuje očekivana žaljenja treba odabrati minimalnu vrednost da bi se utvrdilo koja je najpovoljnija akcija po ovom kriterijumu. To je akcija a_3 .

2.4. Analiza odlučivanja sa uzorkovanjem

Kada je u pitanju analiza odlučivanja sa uzorkovanjem vrši se prikupljanje dodatnih informacija i podataka da bi se bolje pristupilo problemu pre donošenja odluke. Dodatne informacije služe za korekciju prvobitnih apriori verovatnoća u aposteriori verovatnoće (u prvom poglavlju, posle definicije potpunog sistema događaja objašnjeni su pojmovi apriori i aposteriori verovatnoće). Dodatne informacije se nazivaju i informacije uzorkovanja. Najčešće se neizvesnost prikupljanjem dodatnih informacija ne može u potpunosti ukloniti, već samo smanjiti. Ako bi postojala potpuna informacija ona bi dovela do toga da se više ne govori o uslovima rizika, već se odlučivanje pri riziku pretvara u odlučivanje pri izvesnosti. Međutim, dodatna informacija uglavnom nije potpuna, takođe dodatna informacija nekada nije, zbog načina prikupljanja, potpuno pouzdana. Na primer, ako preduzeće planira da uvede novi proizvod, može se sprovesti ispitivanje tržišta u svrhu prikupljanja dodatnih informacija o potražnji tog proizvoda i da se na osnovu tih informacija oceni mogući nivo prodaje. Ali,

čak i ako rezultati dodatnih informacija ukazuju na postojanje visoke potražnje, to nije garancija da će tako i biti, odnosno može doći do prosečne, pa čak i niske potražnje.

Bajesova teorema kada je potrebno dodate informacije uključiti u već postojeće stanje. Naime, potrebno je revidirati početne verovatnoće događaja i u tu svrhu se koristi Bajesova teorema koja je definisana u prvom poglavlju ovog rada.

Primer 2.4.1. [17] Škola stranih jezika „FOX“ za sada nudi učenje dva strana jezika, a to su nemački i engleski. Planira da u svoje programe uvrsti i učenje još jednog jezika. Taj jezik može biti italijanski (N_1) ili ruski (N_2) ili španski (N_3). Takođe, postoji i opcija da sve ostane kao i do sada, da ne uvide novi jezik, što će biti jedna od akcija koje će biti posmatrane, tako da ukupno postoje četiri akcije $a_1(N_1)$, $a_2(N_2)$, $a_3(N_3)$, $a_4(nema_promena)$.

U problemu odlučivanja postoje tri stanja: S_1 – niska potražnja, S_2 – srednja potražnja, S_3 – visoka potražnja. Svim ovim stanjima donosilac odluke dodelio je sledeće apriori verovatnoće $P\{S_1\} = 0,1$; $P\{S_2\} = 0,6$; $P\{S_3\} = 0,3$.

Takođe, donosilac odluke je pretpostavio profite za svaku akciju u slučaju niske, srednje i visoke potražnje i ti profiti su predstavljeni u sledećoj tabeli efekata.

Na osnovu ovih podataka moguće je izračunati ONV za svaku akciju. Takođe, biće formirana i tabela žaljenja i biće izračunato očekivano žaljenje.

Akcije	Stanja (potražnja)			ONV(a_i)
	S_1	S_2	S_3	
	0,1	0,6	0,3	
$a_1(N_1)$	100	3 000	5 000	3 310
$a_2(N_2)$	-100	4 000	7 000	4 490
$a_3(N_3)$	-500	3 500	10 000	5 050
$a_4(nema_promena)$	0	0	0	0

Tabela 13. Tabela plaćanja (efekata)

Možemo primetiti da su profiti kod akcije a_4 u prethodnoj tabeli jednaki nula bez obzira na stanje. Ovo je logično i nije ništa čudno, jer je to akcija gde se ništa ne preduzima.

$$ONV(a_1) = 100 \cdot 0,1 + 3000 \cdot 0,6 + 5000 \cdot 0,3 = 3310$$

$$ONV(a_2) = -100 \cdot 0,1 + 4000 \cdot 0,6 + 7000 \cdot 0,3 = 4490$$

$$ONV(a_3) = -500 \cdot 0,1 + 3500 \cdot 0,6 + 10000 \cdot 0,3 = 5050$$

Akcije	Stanja (potražnja)			OŽ(a_i)
	S_1 0,1	S_2 0,6	S_3 0,3	
$a_1(N_1)$	0	1 000	5 000	2 100
$a_2(N_2)$	200	0	3 000	920
$a_3(N_3)$	600	500	0	360
$a_4(nema_promena)$	100	4 000	10 000	5 410

Tabela 14. Tabela žaljenja

$$O\check{Z}(a_1) = 0 \cdot 0,1 + 1000 \cdot 0,6 + 5000 \cdot 0,3 = 2100$$

$$O\check{Z}(a_2) = 200 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,6 + 3000 \cdot 0,3 = 920$$

$$O\check{Z}(a_3) = 600 \cdot 0,1 + 500 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,3 = 360$$

$$O\check{Z}(a_4) = 100 \cdot 0,1 + 4000 \cdot 0,6 + 10000 \cdot 0,3 = 5410$$

Prema dobijenim podacima iz obe tabele, možemo zaključiti da je optimalna akcija a_3 .

Međutim, vlasnik škole želi da prikupi dodatne podatke. Interesuje se o prodaju kurseva iz italijanskog, ruskog i španskog jezika i vrši dodatna istraživanja tržišta. Potrebno je ispitati kako će novodobijeni podaci uticati na apriori verovatnoće, a time i na izbor akcije. Moguće informacije sa tržišta obeležavaju se kao:

X_1 – slaba prodaja; X_2 – srednja prodaja; X_3 – velika prodaja.

Sledeća tabela predstavlja uslovne verovatnoće nastale nakon prikupljanja dodatnih informacija.

Akcije	Stanja (potražnja)		
	S_1	S_2	S_3
X_1	0,7	0,3	0,1
X_2	0,2	0,6	0,3
X_3	0,1	0,1	0,6
Ukupno	1,00	1,00	1,00

Tabela 15. Uсловne verovatnoće

Apriori verovatnoće se obeležavaju $P(S_j)$, a uslovne verovatnoće se obeležavaju $P(X_k|S_j)$. Primenom Bayes-ove teoreme određuju se aposteriori verovatnoće koje se obeležavaju sa $P(S_j|X_k)$. Aposteriori verovatnoće se još nazivaju i revidirane verovatnoće. Rezultati uzorkovanja X_1, X_2, X_3 predstavljaju međusobno isključive mogućnosti, pri čemu se ostvaruje tačno jedna od njih. Određivanje najpovoljnije akcije vrši se posebno za svako X_k koje može biti rezultat uzorkovanja.

a) **Optimalna akcija ako je kao rezultat uzorkovanja dobijena informacija X_1**

Primenom Bayes-ove teoreme aposteriori verovatnoće za ovaj slučaj iznose:

$$P(S_1|X_1) = \frac{P(S_1) \cdot P(X_1|S_1)}{\sum_{j=1}^3 P(S_j) \cdot P(X_1|S_j)} = \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,1 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,1} = 0,2500$$

$$P(S_2|X_1) = \frac{P(S_2) \cdot P(X_1|S_2)}{\sum_{j=1}^3 P(S_j) \cdot P(X_1|S_j)} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{0,1 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,1} = 0,6429$$

$$P(S_3|X_1) = \frac{P(S_3) \cdot P(X_1|S_3)}{\sum_{j=1}^3 P(S_j) \cdot P(X_1|S_j)} = \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,1} = 0,1071$$

Računanje aposteriori verovatnoća možemo predstaviti i u tabeli:

Stanja S_j	Apriori verovatnoće $P(S_j)$	Uslovne Verovatnoće $P(X_j S_j)$	Zajedničke verovatnoće $P(S_j) \cdot P(X_1 S_j)$	Aposteriori verovatnoće $P(S_j X_1)$
S_1	0,1	0,7	$0,1 \cdot 0,7 = 0,07$	$0,07/0,28 = 0,25$
S_2	0,6	0,3	$0,6 \cdot 0,3 = 0,18$	$0,18/0,28 = 0,6429$
S_3	0,3	0,1	$0,3 \cdot 0,1 = 0,03$	$0,03/0,28 = 0,1071$
Ukupno	1,00		0,28	1,00

Tabela 16. Tabela proračun aposteriori verovatnoća za informaciju X_1

OŽ na osnovu aposteriori verovatnoća u opštem slučaju računa se prema izrazu:

$$O\check{Z}(a_j|X_k) = \sum_{j=1}^m \check{Z}(a_j, S_j) \cdot P(S_j|X_k)$$

Tako da očekivana žaljenja u slučaju slabe prodaje možemo dobiti na sledeći način:

$$O\check{Z}(a_1|X_1) = \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_1, S_j) \cdot P(S_j|X_1)$$

$$= 0 \cdot 0,25 + 1000 \cdot 0,6429 + 5000 \cdot 0,1071 = 1178,4$$

$$O\check{Z}(a_2|X_1) = \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_2, S_j) \cdot P(S_j|X_1)$$

$$= 200 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,6429 + 3000 \cdot 0,1071 = 371,3$$

$$O\check{Z}(a_3|X_1) = \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_3, S_j) \cdot P(S_j|X_1)$$

$$= 600 \cdot 0,25 + 500 \cdot 0,6429 + 0 \cdot 0,1071 = 471,45$$

$$O\check{Z}(a_4|X_1) = \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_4, S_j) \cdot P(S_j|X_1)$$

$$= 100 \cdot 0,25 + 4000 \cdot 0,6429 + 10000 \cdot 0,1071 = 3667,6$$

Dakle, u slučaju X_1 – *slaba prodaja*, potrebno je preduzeti akciju a_3 .

b) Optimalna akcija ako je kao rezultat dobijena informacija X_2

Stanja S_j	Apriori verovatnoće $P(S_j)$	Uslovne Verovatnoće $P(X_j S_j)$	Zajedničke verovatnoće $P(S_j) \cdot P(X_2 S_j)$	Aposteriori verovatnoće $P(S_j X_2)$
S_1	0,1	0,2	$0,1 \cdot 0,2 = 0,02$	$0,02/0,47 = 0,0426$
S_2	0,6	0,6	$0,6 \cdot 0,6 = 0,36$	$0,36/0,47 = 0,7660$
S_3	0,3	0,3	$0,3 \cdot 0,3 = 0,09$	$0,09/0,47 = 0,1914$
Ukupno	1,00		0,47	1,00

Tabela 17. Tabelarni proračun aposteriori verovatnoća za informaciju X_2

$$\begin{aligned}
 O\check{Z}(a_1|X_2) &= \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_1, S_j) \cdot P(S_j|X_2) \\
 &= 0 \cdot 0,0426 + 1000 \cdot 0,7660 + 5000 \cdot 0,1914 = 1723
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O\check{Z}(a_2|X_2) &= \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_2, S_j) \cdot P(S_j|X_2) \\
 &= 200 \cdot 0,0426 + 0 \cdot 0,7660 + 3000 \cdot 0,1914 = 582,72
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O\check{Z}(a_3|X_2) &= \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_3, S_j) \cdot P(S_j|X_2) \\
 &= 600 \cdot 0,0426 + 500 \cdot 0,7660 + 0 \cdot 0,1914 = 408,56
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O\check{Z}(a_4|X_2) &= \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_4, S_j) \cdot P(S_j|X_2) \\
 &= 100 \cdot 0,0426 + 4000 \cdot 0,7660 + 10000 \cdot 0,1914 = 4982,26
 \end{aligned}$$

U slučaju informacije X_2 – *srednja prodaja* treba odabrati akciju a_3 .

c) Optimalna akcija ako je kao rezultat uzorkovanja dobijena informacija X_3

Stanja S_j	Apriori verovatnoće $P(S_j)$	Uslovne Verovatnoće $P(X_j S_j)$	Zajedničke verovatnoće $P(S_j) \cdot P(X_1 S_j)$	Aposteriori verovatnoće $P(S_j X_1)$
S_1	0,1	0,1	$0,1 \cdot 0,1 = 0,01$	$0,01/0,25 = 0,04$
S_2	0,6	0,1	$0,6 \cdot 0,1 = 0,06$	$0,06/0,25 = 0,24$
S_3	0,3	0,6	$0,3 \cdot 0,6 = 0,18$	$0,18/0,25 = 0,72$
Ukupno	1,00		0,25	1,00

Tabela 18. Tabelarni proračun aposteriori verovatnoća za informaciju X_3

$$O\check{Z}(a_1|X_3) = \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_1, S_j) \cdot P(S_j|X_3)$$

$$\begin{aligned}
&= 0 \cdot 0,04 + 1000 \cdot 0,24 + 5000 \cdot 0,72 = 3840 \\
O\check{Z}(a_2|X_3) &= \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_2, S_j) \cdot P(S_j|X_3) \\
&= 200 \cdot 0,04 + 0 \cdot 0,24 + 3000 \cdot 0,72 = 2168 \\
O\check{Z}(a_3|X_3) &= \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_3, S_j) \cdot P(S_j|X_3) \\
&= 600 \cdot 0,04 + 500 \cdot 0,24 + 0 \cdot 0,72 = 144 \\
O\check{Z}(a_4|X_3) &= \sum_{j=1}^3 \check{Z}(a_4, S_j) \cdot P(S_j|X_3) \\
&= 100 \cdot 0,04 + 4000 \cdot 0,24 + 10000 \cdot 0,72 = 8164
\end{aligned}$$

U slučaju X_3 – *velike prodaje* optimalna akcija je a_3 .

Optimalno pravilo odlučivanja predstavlja granasto definisanu funkciju koja rezultate uzorkovanja X_k povezuje sa odgovarajućom optimalnom akcijom. Za dati primer, optimalno pravilo ima sledeći oblik:

$$PO^*(X) = \begin{cases} a_2, & X = X_1 \\ a_3, & X = X_2 \\ a_3, & X = X_3 \end{cases}$$

Očekivani rizik optimalne strategije obeležava se kao $OR(OP^*, n)$, gde n predstavlja obim uzorka. Očekivani rizik optimalne strategije je zapravo očekivano žaljenje optimalne strategije $O\check{Z}(OP^*, n)$, a dobija se kao suma proizvoda $O\check{Z}$ optimalnih strategija za svaki rezultat uzorkovanja i verovatnoća odgovarajućih rezultata uzorkovanja. U prethodnom primeru očekivani rizik optimalne strategije je:

$$OR(OP^*, n) = O\check{Z}(OP^*, n) = 371,3 \cdot 0,28 + 408,56 \cdot 0,47 + 144 \cdot 0,25 = 331,9872$$

3. TEORIJA KORISNOSTI

Ovo poglavlje posvećeno je teoriji korisnosti. Definicija relacije preferencije i funkcije korisnosti data je na početku rada. Dodatno će biti prikazane teoreme koje se tiču funkcije korisnosti. Biće predstavljen doprinos Danijela Bernulija teoriji korisnosti. On je prvi primetio da ljudski izbori nisu zasnovani na novčanoj, već na psihološkoj vrednosti ishoda, odnosno na njihovoj korisnosti. U ovom delu rada biće predstavljena Bernulijeva ideja, ali i greška koju je napravio. Izuzetan značaj teoriji korisnosti dali su matematičar Džon fon Nojman i

ekonomista Oskar Morgenštern. Oni su dali aksiomatsku verziju teorije korisnosti, koja će biti navedena u radu, a glavna ideja njihovog pristupa ogleda se u tome da donosilac odluke koji teži da bude racionalan mora da se rukovodi principom očekivanja.

Teorija korisnosti predstavlja jedan od najznačajnijih i najčešće primenjivanih pristupa u rešavanju složenih problema odlučivanja. Njena široka primena zasniva se na brojnim prednostima, među kojima se izdvajaju:

- Primena funkcije korisnosti pojednostavljuje i ubrzava postupak analize alternativa i donošenja odluka.
- Teorija korisnosti pruža značajnu podršku donosiocu odluke u strukturiranju procesa odlučivanja, realnijoj proceni verovatnoća mogućih ishoda i sagledavanju preferencija kao nelinearnog odnosa između rizika i vrednosti ishoda.
- Primena teorije korisnosti doprinosi izboru strategija koje omogućavaju efikasnije upravljanje rizikom i donošenje racionalnijih odluka u uslovima neizvesnosti.

Literatura koja je upotrebljena za izradu ovog poglavlja je [1], [5], [6], [8], [10], [12], [13], [14], [15], [17], [22].

3.1. Bernuli – rađanje ideje o teoriji korisnosti

Interesovanje za igre na sreću i situacije neizvesnosti javilo se veoma rano, još u XVIII veku, zahvaljujući radovima Danijela Bernulija. Osnovni cilj bio je proučavanje problema odlučivanja sa kojim se suočava kockar, odnosno utvrđivanje koja od mogućih alternativa treba da bude izabrana kako bi se povećale verovatnoće za ostvarivanje dobitka.

U teorijskim razmatranjima analizirane su različite igre na sreću, poput bacanja novčića, bacanja kocke i kartaških igara. Zajednička karakteristika svih ovih situacija jeste da su ishodi izraženi u novčanim iznosima, što omogućava određivanje verovatnoća nastupanja pojedinih događaja, kao i izračunavanje očekivane vrednosti dobitka.

U tom kontekstu:

- povoljnom se smatra igra koja donosi pozitivnu očekivanu korist;
- najboljom se smatra igra koja obezbeđuje najveću očekivanu korist.

Subjektivne procene verovatnoće, bilo da ih formira pojedinac ili grupa ljudi, predstavljaju numerički izraz njihovih uverenja i preferencija. Ove procene odražavaju se kroz očekivanu korisnost dobitka, koja predstavlja osnov za donošenje odluka u uslovima rizika i neizvesnosti.

Psihofizika je psihološka disciplina koju je tako nazvao nemački psiholog Gustav Fehner. Fehner je bio opsednut odnosom uma i materijalnog. S jedne strane je promenljiv fizički kvantitet, poput energije svetlosti, frekvencije zvuka ili iznosa novca. S druge strane je subjektivno iskustvo o svetlosti, tonalitetu ili vrednosti. Na tajanstven način, varijacije fizičkog kvantiteta uzrokuju varijacije intenziteta ili kvaliteta subjektivnog iskustva. Fehner je zamislio da otkrije psihofizičke zakone povezanosti subjektivnog kvantiteta u umu posmatrača s objektivnim kvantitetom materijalnog sveta. Smatrao je da se u mnogim dimenzijama radi o logaritamskoj funkciji – što znači da porast intenziteta stimulansa za određen faktor (recimo za 1,5 ili 10 puta) uvek rezultira istim pojačanjem psihološkog iskustva. Ako intenziviranje zvuka sa 10 na 100 jedinica fizičke energije povećava psihološki intenzitet iskustva za 4 jedinice, onda će dalje jačanje intenziteta stimulansa sa 100 na 1000 takođe pojačati psihološki intenzitet za 4 jedinice. (Kahneman, 2011, str. 254)

Gustav Teodor Fehner (1801-1887) bio je nemački fizičar, filozof i psiholog i jedan od osnivača psihofizike. Njegova israživanja bila su usmerena na proučavanje odnosa između fizičkih nadražaja i subjektivnog doživljaja. Fehner nije bio prvi koji je nastojao da uspostavi vezu između psihološkog intenziteta doživljaja i fizičke veličine stimulansa. Gotovo jedan vek pre njega, švajcarski matematičar Danijel Bernuli razvio je ideju koja predstavlja jedan od temelja psihofizičkog pristupa u objašnjenju averzije prema riziku. Polazio je od pretpostavke da se ljudske odluke ne zasnivaju na novčanoj vrednosti ishoda, već na njihovoj psihološkoj vrednosti, odnosno korisnosti. Zbog toga se psihološka vrednost rizične alternative ne određuje kao ponderisani prosek mogućih novčanih ishoda, već kao očekivana korisnost, odnosno prosek korisnosti pojedinačnih ishoda, pri čemu se svaki od njih vrednuje u skladu sa svojom verovatnoćom.

Bernuli je ovu ideju primenio na odnos između psihološke vrednosti novca i njegovog nominalnog iznosa. Smatrao je da poklon od 10 dukata ima približno jednaku korisnost za osobu koja poseduje 100 dukata kao poklon od 20 dukata za osobu koja raspolaže sa 200 dukata. Ovakvo razmišljanje ukazuje na to da ljudi promene bogatstva ne procenjuju prema njihovom apsolutnom iznosu, već u odnosu na postojeći nivo bogatstva. Zbog toga relativno jednaka procentualna promena bogatstva izaziva sličan psihološki efekat kod osoba različitog imovinskog stanja, za razliku od jednakih apsolutnih novčanih iznosa.

U skladu sa Fehnerovim zakonom, psihološka reakcija na promenu bogatstva obrnuto je proporcionalna početnom nivou bogatstva, što upućuje na zaključak da se korisnost može opisati logaritamskom funkcijom bogatstva.

Na osnovu ovakvog shvatanja korisnosti bogatstva, Bernuli je formulisao novi pristup proceni rizika, čime je napravio značajan iskorak u odnosu na tadašnje matematičke teorije. Pre Bernulija, procena rizika uglavnom se zasnivala na kriterijumu očekivane vrednosti, prema kojem se vrednost rizične alternative određuje kao prosečna vrednost svih mogućih ishoda, pri čemu se svaki ishod ponderiše odgovarajućom verovatnoćom njegovog nastupanja (videti [10]).

3.1.1. Nedostaci Bernulijeve teorije

Bernulijeva analiza odnosa prema riziku u kontekstu novčanih dobitaka uspešno je odolela protoku vremena i dalje zauzima značajno mesto u ekonomskim analizama.

Trajnost ove teorije posebno je upečatljiva ako se ima u vidu da poseduje određene ozbiljne nedostatke. Naime, slabosti neke teorije ne ogledaju se prvenstveno u onome što ona tvrdi, već u onome što izostavlja, zanemaruje ili podrazumeva bez eksplicitnog obrazloženja. Da bismo to ilustrovali, razmotrićemo sledeći primer:

Primer 3.1.1.1. Neka Maksim i Mila danas imaju jednako bogatstvo od 4 miliona dinara. Pretpostavimo da je Maksim juče imao 1 milion, a Mila 10 miliona. Pitanje koje se postavlja jeste da li je korisnost jednaka za Maksima i Milu?

Po Bernulijevoj teoriji korisnost bogatstva ljude čini manje ili više srećnim. Maksim i Mila poseduju jednako bogatstvo, pa bi trebalo na osnovu ove teorije da su podjednako srećni. Međutim to nije tako, iako trenutno imaju podjednaku sumu novca. Ova analiza nas dovodi do prvog nedostatka Bernulijeve teorije.

Njihovo osećanje sreće određeno je nedavnom promenom njihovog bogatstva u odnosu na različite početne nivoe imovine (Maksim polazi od jednog miliona, a Mila od deset miliona).

Naredni primer takođe prikazuje nedostatke Bernulijeve teorije:

Primer 3.1.1.2. Pretpostavimo da Vasa i Vera imaju različito trenutno bogatstvo. Neka Vasino trenutno bogatstvo iznosi 1 milion dinara, dok Verino trenutno bogatstvo iznosi 6 miliona dinara. Oboje biraju između iste dve opcije, jedna je sigurna opcija, a druga je rizična opcija. Kod rizične opcije postoji verovatnoća 0,5 da će na kraju imati 1 milion dinara i verovatnoća 0,5 da će imati 6 miliona dinara. Sigurna opcija koja im se nudi podrazumeva da će na kraju imati 3 miliona dinara.

Iako su ponuđene opcije u novčanom smislu iste za oboje, njihovo psihološko vrednovanje može biti različito zbog različitih referentnih tačaka (trenutnog bogatstva). Vasa, čije trenutno bogatstvo iznosi 1 milion dinara, sigurnih 3 miliona može posmatrati kao dobitak od 2 miliona. Nasuprot tome, Vera, čije trenutno bogatstvo iznosi 6 miliona, sigurnu opciju od 3 miliona može doživeti kao gubitak od 3 miliona. Kod rizične opcije Vasa može ostvariti dobitak od 5 miliona ili ostati na trenutnom nivou, dok Vera može pretrpeti gubitak od 5 miliona ili ostati na trenutnom nivou.

Na osnovu teorije izgleda (opširnije o teoriji izgleda biće predstavljeno u sledećem poglavlju), Vasa će imati veću sklonost ka sigurnoj opciji, dok će Vera imati veću sklonost ka prihvatanju rizika.

Ovaj primer pokazuje značaj referentne tačke u donošenju odluka. Ljudi ne vrednuju ishode isključivo prema njihovoj apsolutnoj novčanoj vrednosti, već i prema tome da li ih doživljavaju kao dobitke ili gubitke u odnosu na referentnu tačku.

Na osnovu navedenih primera može se zaključiti da Bernulijeva teorija korisnosti poseduje određene nedostatke. Njeno osnovno ograničenje ogleda se u tome što korisnost ishoda određuje na osnovu konačnog nivoa bogatstva, dok ne uzima u obzir referentnu tačku u odnosu na koju pojedinac procenjuje ishode.

3.2. Odnos relacije preferencije i funkcije korisnosti

Relacije preferencije omogućavaju da se ishodi poređaju prema stepenu poželjnosti, odnosno od ishoda koje potrošač najmanje preferira do ishoda koje preferira najviše. Na taj način dolazimo do **ordinalne komponente funkcije korisnosti**.

Ishodi nastaju kao posledica primene izabrane akcije (alternative). U uvodnim pojmovima već je definisana funkcija korisnosti, koja je uvedena kao funkcija koja skup ishoda (X), na kome je definisana relacija preferencije, preslikava na skup realnih brojeva ($\mathbb{R}$). Ovde je potrebno objasniti njenu ordinalnu komponentu.

Ordinalno znači da je nešto predstavljeno po redosledu, a ne po veličini razlike između vrednosti. Ordinalna komponenta funkcije korisnosti nosi takav naziv zato što brojevi prikazuju samo poredak opcija po preferencijama, pri čemu se veći broj pridružuje bolje rangiranom ishodu. Dakle, osnovna svrha ordinalne komponente funkcije korisnosti jeste da predstavi redosled preferencija (videti [15]).

Na primer, ako potrošač bira između deset dobara, dobru koje najviše preferira može se dodeliti korisnost 100, sledećem dobru korisnost 90, i tako redom, sve do najmanje poželjnog dobra. Međutim, ove numeričke vrednosti ne predstavljaju intenzitet preferencija. To što jedno dobro ima korisnost 100, a drugo 50, ne znači da prvo dobro potrošač voli dvostruko više od drugog. Veća vrednost funkcije korisnosti označava da je odgovarajuće dobro poželjnije od dobra sa manjom vrednošću korisnosti, ali ne daje informaciju o tome kolika je razlika u stepenu preferiranja između njih.

Primer 3.2.1. Donosilac odluke odlučuje o tome šta će jesti. U restoranu koji planira da poseti dobio je preporuku za sledeća jela: Pileći file sa povrćem, file lososa i rižoto sa pečurkama.

Neka je X skup odgovarajućih ishoda:

$$X = \{\textit{Pileći file sa povrćem}, \textit{file lososa}, \textit{rižoto sa pečurkama}\}$$

Neka je $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija korisnosti.

Donosilac odluke ne voli pečurke, a kada su u pitanju pileći file i file lososa radije će se odlučiti za file lososa.

Na osnovu opredeljenja donosioca odluke, relacija preferencije primenjena na skup ishoda izgleda ovako:

$$file\ lososa \succcurlyeq pileći\ file\ sa\ povrćem \succcurlyeq rižoto\ sa\ pečurkama$$

Na osnovu preferencija, ishodima se mogu dodeliti sledeće vrednosti funkcije korisnosti:

$$u(file\ lososa) = 90$$

$$u(pileći\ file\ sa\ povrćem) = 70$$

$$u(rižoto\ sa\ pečurkama) = 10$$

Donosilac odluke donosi odluku da će jesti file lososa.

Definicija 3.2.1. [6] Element $a \in A \subseteq X$ je **minimalni element** za relaciju preferencije na skupu A ako $\forall x \in A$ važi $x \succcurlyeq a$.

Lema 3.2.1. [14] Neka je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na skupu X . Svaki konačan podskup $A \subseteq X$ ima minimalan element relacije $\succcurlyeq$.

Dokaz leme: Dokaz ćemo raditi primenom matematičke indukcije.

Baza indukcije: Neka je kardinalni broj skupa A jednak 1 ($|A| = 1$). Tada je $a \in A$ minimalni element skupa A , jer važi $a \succcurlyeq a$.

Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo sada da je kardinalnost skupa A jednaka n , odnosno ($|A| = n$), tada važi da postoji minimalni element $a \in A$, odnosno $\forall x \in A$ važi $x \succcurlyeq a$.

Korak indukcije: Neka je sada $|A| = n + 1$. Skup A tada možemo zapisati kao $A = \{b\} \cup (A \setminus \{b\})$. Dakle, $|A \setminus \{b\}| = n$, pa na osnovu indukcijske hipoteze možemo zaključiti da ovaj skup ima minimalan element koji opet označimo sa a . Zatim posmatramo odnos elemenata a i b . Ukoliko važi $b \succcurlyeq a$, onda je a minimalan element čitavog skupa A , dok ukoliko važi $a \succcurlyeq b$, tada je b minimalan element skupa A . U oba slučaja, skup A ima minimalan element. *Što je trebalo pokazati.* ■

Teorema 3.2.1.: [14] Ako je $\succcurlyeq$ relacija preferencije na konačnom skupu X , tada relacija $\succcurlyeq$ ima funkciju korisnosti čije su vrednosti u skupu prirodnih brojeva.

Dokaz: Kako je skup X konačan, na osnovu prethodne leme možemo zaključiti da ima minimalan element.

Označimo sa X_1 skup minimalnih elemenata skupa X . Neka važi da je korisnost svih ovih elemenata jednaka 1, odnosno $\forall x \in X_1, u(x) = 1$. Označimo sa X_2 skup minimalnih elemenata skupa $X \setminus X_1$. Zatim, neka važi $\forall x \in X_2, u(x) = 2$. Zatim, sa X_3 označimo skup minimalnih elemenata skupa $X \setminus (X_1 \cup X_2)$ i neka važi $\forall x \in X_3, u(x) = 3$. Nastavljamo postupak dok ne potrošimo sve elemente skupa X . Neka je poslednji skup u nizu $X_k, |X_k| \leq$

$|X|$ i neka je ovaj skup, skup minimalnih elemenata skupa $X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{k-1})$, svakom element $x \in X_k$ dodelićemo korisnost $u(x) = k$.

Jasno je da su skupovi $X_1, X_2, \dots, X_k$ disjunktni, a kako važi da je $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$, na ovaj način smo formirali funkciju koja svim elementima skupa X dodeljuje prirodne brojeve kao njihove korisnosti. Ovo je trebalo dokazati. ■

Teorema 3.2.2. [14] Ako je $\succsim$ relacija preferencije na prebrojivom skupu X , tada relacija $\succsim$ ima funkciju korisnosti čije su vrednosti u intervalu $(-1, 1)$.

Dokaz: Kako važi da je skup X prebrojiv, njegove elemente možemo poredati u niz $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Neka je $u(x_1) = 0$ i neka elementi niza $x_2, x_3, \dots, x_n$ imaju korisnost u skupu $(-1, 1)$, tj. neka važi $u(x_i) \in (-1, 1)$.

Posmatraćemo element x_{n+1} ? Za ovaj element postoje dve mogućnosti:

1. $\exists j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tako da je $x_j \sim x_{n+1}$; tada je $u(x_{n+1}) = u(x_j)$
2. $\nexists j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tako da je $x_j \sim x_{n+1}$;

(gde je $\sim$ relacija indiferentnosti)

U 1. slučaju jasno je da će korisnost elementa x_{n+1} biti u intervalu $(-1, 1)$.

Za 2. slučaj definisaćemo sledeća dva skupa:

$$D = \{u(x_j), j \in \{1, 2, \dots, n | x_{n+1} \succ x_j\}\} \cup \{-1\}$$

$$G = \{u(x_j), j \in \{1, 2, \dots, n | x_j \succ x_{n+1}\}\} \cup \{1\}$$

(elemnti -1 i 1 su ubačeni u skupove da bismo osigurali da su skupovi neprazni).

Neka je $d = \max D, g = \min G$. Kako je $d < g$, možemo izabrati $u(x_{n+1}) = \frac{d+g}{2}$. Ovim izborom čuva se predstavljeni poredak svih do tada razmatranih elemenata, pa induktivni postupak određuje funkciju korisnosti na celom skupu X . Jasno, $u(x_{n+1}) \in (d, g) \in (-1, 1)$. Kako ovo važi $\forall n \in \mathbb{N}$, tvrđenje je dokazano. ■

Teorema 3.2.3. [14] Ako je u funkcija korisnosti za relaciju preferencije $\succsim$ na skupu X , tada je za svaku strogo rastuću realnu funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija v određena sa $v(x) = f(u(x))$ takođe funkcija korisnosti za tu relaciju preferencije.

Dokaz: Na osnovu definicije funkcije korisnosti imamo:

$$x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y),$$

Kako je f rastuća funkcija, prethodni izraz je ekvivalentan sa $f(u(x)) \geq f(u(y))$, što je ekvivalentno sa $v(x) \geq v(y)$. Dakle, važi $x \succsim y \Leftrightarrow v(x) \geq v(y)$, čime je tvrđenje dokazano. ■

Ova teorema odnosi se na ordinalnu korisnost, odnosno na očuvanje poretka ishoda. Pri vrednovanju lutrija očekivanom korisnošću, isti poredak lutrija očuvan je pozitivnim afnim

transformacijama $v(x) = au(x) + b$, gde je $a > 0$, dok proizvoljna strogo rastuća transformacija to ne mora obezbediti.

Definicija 3.2.3. [14] Neka je $u: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija korisnosti. Tada se svaka nivo kriva funkcije (skup svih tačaka iz domena koje se preslikavaju u istu vrednost) naziva indiferentna kriva relacije preferencije određene datom funkcijom korisnosti. Indiferentna kriva određena vrednošću c data je sa $I_c = \{x \in X | u(x) = c\}$.

3.3. Tipični primeri funkcije korisnosti

Ishod akcije je rezultat koji nastaje kada donosilac odluke izabere neku akciju, a realizuje se određeno stanje prirode. Po Macku (1971) može se izvršiti sledeća klasifikacija ishoda:

1. **Primarni rezultat** – ishod se izražava u svojoj prirodnoj jedinici mere.
Na primer: proizvedeno je 1000 slika.
2. **Surogat** – ishodi se prikazuju preko pokazatelja uspeha, najčešće profit.
Na primer: profit je 100 000 dinara.
3. **Ocenjeni rezultat** – ishod se vrednuje prema preferencijama donosioca odluke, pomoću funkcije korisnosti.
Na primer: Možemo posmatrati prethodni primer 3.2.1. , jer upravo ovaj primer povezuje ishode sa relacijom preferencije i funkcijom korisnosti. Dakle, donosilac odluke bira ishod koji ima najveću korisnost.

U realnim problemima odlučivanja kriva korisnosti se često može opisati odgovarajućom matematičkom funkcijom. To predstavlja značajnu prednost, jer omogućava precizno određivanje vrednosti funkcije korisnosti na celokupnom intervalu posmatrane promenljive, koja je u praksi najčešće predstavljena profitom ili bogatstvom. Funkcije koje se najčešće koriste za modelovanje krive korisnosti jesu eksponencijalna, logaritamska i kvadratna funkcija. Naravno, nije moguće sve ishode predstaviti na ovaj način. Brojčano izraženi ishodi su pogodni, tu spadaju primarni rezultat i surogat, dok ocenjeni rezultat su ishodi koji nisu brojčani, tako da kriva korisnosti se ne može opisati nekom matematičkom funkcijom.

Eksponencijalna funkcija korisnosti može se definisati sledećim izrazima [17]:

$$u(x) = 1 - e^{-kx} \text{ ili}$$

$$u(x) = \frac{1 - e^{-kx}}{k}$$

Gde su:

- x – vrednost na apscisi čiji se indeks korisnosti meri (neki ishod, najčešće profit),
- k – pozitivna konstanta.

Kvadratna funkcija korisnosti može se definisati sledećim izrazom [17]:

$$u(x) = a + bx - cx^2$$

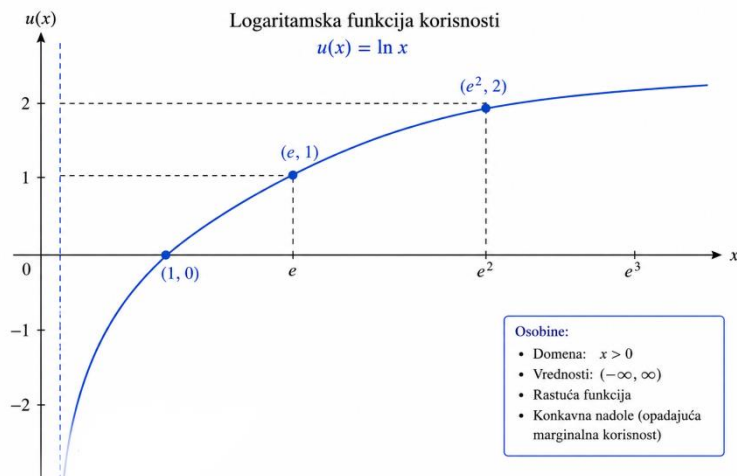
Gde su:

- a, b, c – konstante i $c > 0$.

Logaritamska funkcija korisnosti može se definisati sledećim izrazom [17]:

$$u(x) = \ln x$$

Grafik logaritamske funkcije korisnosti je prikazan na slici 1.



Slika 1. Logaritamska funkcija korisnosti

Logaritamska funkcija korisnosti je definisana samo za $x > 0$. Na slici se vidi da je ovakva funkcija korisnosti vrlo rigorozna kada su u pitanju vrednosti nezavisne promenljive (bogatstva, očekivanog dobitka) bliske 0. Ovo možemo protumačiti kao uplašenost donosioca odluke od ishoda u kojima ne profitira mnogo ili čak gubi.

3.4. Averzija prema riziku

Stepen averzije prema riziku razlikuje se u zavisnosti od oblika funkcije korisnosti i može se procenjivati na osnovu njene zakrivljenosti. Što je funkcija korisnosti izraženije konkavna, odnosno što je njena zakrivljenost veća, to je i averzija prema riziku izraženija. Jedan od najvažnijih pokazatelja stepena averzije prema riziku se izražava pomoću drugog izvoda funkcije korisnosti (videti [13]).

Definicija 3.4.2 . [17] Kvantitativna mera apsolutne averzije prema riziku određuje se pomoću Arrow–Prattovog koeficijenta apsolutne averzije prema riziku. Pretpostavljamo da je funkcija korisnosti dvaput diferencijabilna i da na posmatranom intervalu važi $u'(x) > 0$. Ovaj koeficijent se izračunava po formuli:

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Prvi izvod u ovoj formuli služi za tzv. normalizaciju, odnosno da bi ekvivalentne funkcije korisnosti imale isti koeficijent. U osnovi, Arrow – Pratt koeficijent pokazuje kako se stepen averzije prema riziku menja sa porastom bogatstva. Najčešće sklonost riziku raste sa porastom bogatstva, odnosno donosilac odluke je više spreman da rizikuje ukoliko je finansijski siguran (videti [13]).

Izračunaćemo Arrow – Pratt koeficijente za neke specifične funkcije korisnosti.

Za eksponencijalnu funkciju $u(x) = -e^{-ax}$, $a > 0$ važi da je

$$u'(x) = ae^{-ax}$$

$$u''(x) = -a^2e^{-ax}$$

Dakle, koeficijent apsolutne averzije prema riziku nakon sređivanja iznosi $A(x) = a$. Ovo znači da je kod eksponencijalne funkcije korisnosti averzija konstantna, bez obzira na bogatstvo pojedinca.

Za logaritamsku funkciju korisnosti $u(x) = \ln x$, važi:

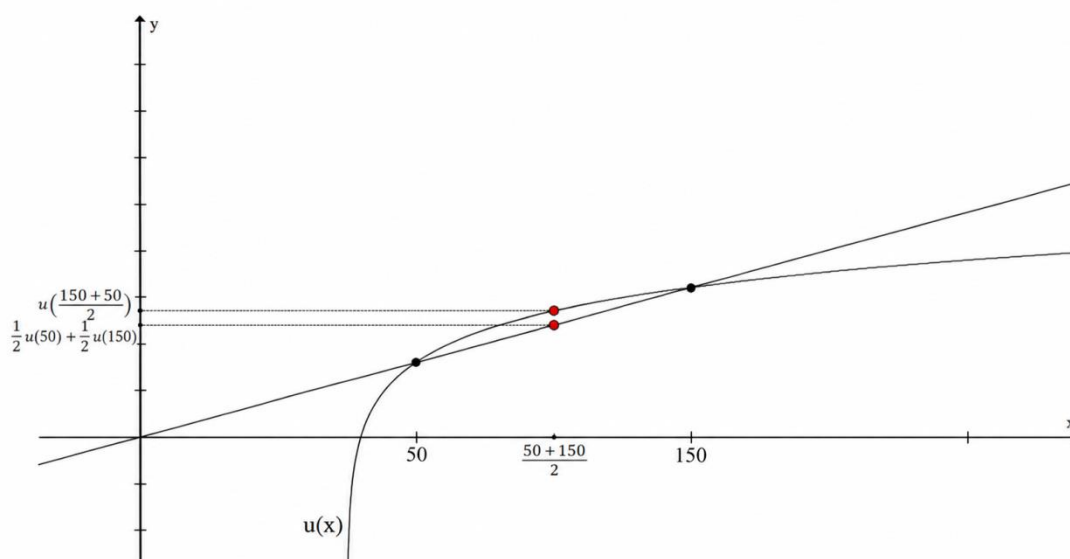
$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Dakle, $A(x) = \frac{1}{x}$ na osnovu ovog podatka tačno možemo primetiti i potvrditi prethodno spomenutu osobinu smanjenja averzije sa porastom sigurnosti.

Pored koeficijenta apsolutne rizik averzije postoji i tzv. koeficijent relativne averzije prema riziku, koji se računa po formuli $R(x) = x \cdot A(x)$. Za logaritamsku funkciju korisnosti važi $R(x) = 1$.

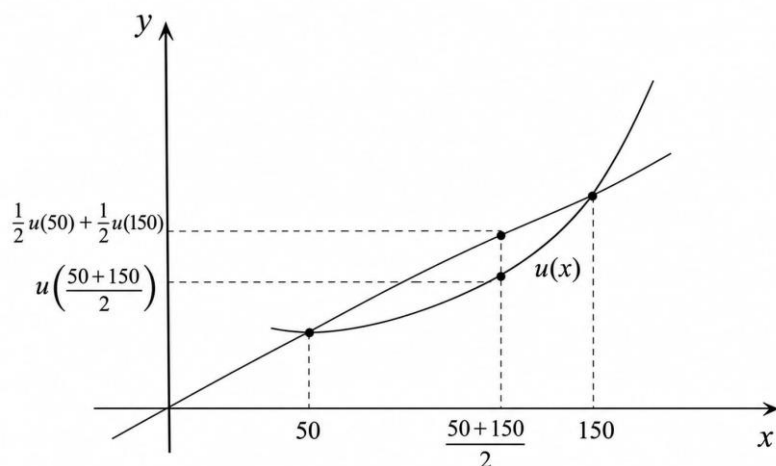
Primer 3.4.1. U prvom poglavlju ovog rada predstavljena je Jensenova nejednakost koja pokazuje da iz konkavne funkcije korisnosti proizilazi averzija prema riziku. Takođe, dat je i primer 1.4.6.1. u kome je funkcija korisnosti baš logaritamska funkcija. U ovom delu rada možemo iskoristiti pomenuti primer i dodatno ga nadograditi grafičkim prikazom.



Slika 2. Konkavna funkcija korisnosti opisuje averziju prema riziku

U datom primeru siguran dobitak iznosi 100\$, a rizik donosiocu odluke može doneti 50\$ ili 150\$ sa jednakim verovatnoćama nastupanja. Očekivana novčana vrednost jednaka je i kod sigurnog događaja i kod rizika. Može se sračunati matematičko očekivanje, a zatim korisnost očekivanja $\left(u\left(\frac{50+150}{2}\right) = u(100)\right)$, što zapravo predstavlja korisnost sigurnog događaja. Sa druge strane, može se posmatrati prvo korisnost za 50\$ i korisnost za 150\$, a onda izračunati očekivanje korisnosti $\frac{1}{2}u(50) + \frac{1}{2}u(150)$, što zapravo predstavlja korisnost rizika. Posmatrajući grafik, može se primetiti da je korisnost sigurnosti veća od korisnosti rizika, što dovodi do zaključka da postoji averzija prema riziku.

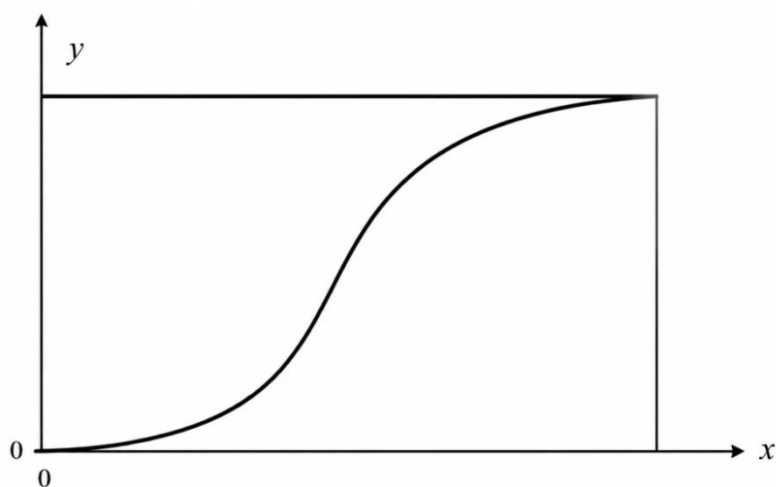
Primer 3.4.2. Pretpostavimo da donosilac odluke ima mogućnosti kao u prethodnom primeru. Dakle, može da bira između sigurnih 100\$ i rizične opcije gde može dobiti 50\$ ili 150\$ sa jednakom verovatnoćom. Očekivana novčana vrednost kod obe opcije je jednaka i iznosi 100\$. U ovom primeru funkcija korisnosti je konveksna.



Slika 3. Funkcija korisnosti kada je donosilac odluke sklon riziku

Ukoliko funkcija korisnosti ima konveksan oblik, to ukazuje da donosilac odluke pokazuje sklonost ka riziku. Kao što se može videti na grafiku, u ovom primeru je korisnost očekivanja, odnosno korisnost sigurnosti manja od očekivanja korisnosti, tj. korisnosti rizika. To znači da donosilac odluke preferira rizik, odnosno sklon je riziku.

Donosilac odluke može pokazivati i sklonost ka riziku i averziju prema riziku. Sklonost ka riziku pokazuje kada su u pitanju mali novčani iznosi, dok kod većih novčanih iznosa zastupljena je odbojnost prema riziku. U opisanoj situaciji, funkcija korisnosti ima oblik kao na sledećoj slici:



Slika 4. Funkcija korisnosti kada donosilac odluke ima i sklonost i averziju prema riziku (preuzeto iz [17])

3.5. Marginalna korisnost

Definicija 3.5.1. [1] Neka je X skup ishoda i neka je $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija korisnosti. Marginalna korisnost predstavlja prvi izvod funkcije korisnosti ($u'(x)$).

Marginalna korisnost izražava promenu nivoa korisnosti usled promene bogatstva. S obzirom na to da konkavnost funkcije korisnosti proizlazi iz negativne vrednosti njenog drugog izvoda, prvi izvod funkcije korisnosti je opadajuća funkcija, što ukazuje na opadajuću marginalnu korisnost.

Drugim rečima, povećanje bogatstva za jednu dodatnu jedinicu ima veću vrednost za pojedinca kada je početni nivo bogatstva nizak, nego kada je nivo bogatstva visok.

Primer 3.5.1. Neka je verovatnoća za dobijanje 100 dolara jednaka 0,7, dok je verovatnoća za dobijanje 10 dolara jednaka 0,3. Siguran dobitak iznosi 70 dolara, a očekivana vrednost iznosi 73 dolara.

U ovom primeru osoba može da dobije sigurnih 70 dolara ili da rizikuje. Iako je očekivana vrednost rizične opcije 73 dolara, osoba može izabrati sigurnih 70 dolara, jer ne voli rizik. To znači da je spremna da se odrekne 3 dolara kako bi bila sigurna da će dobiti novac. Takvo ponašanje naziva se odbojnost prema riziku. Bernuli je ukazao na to da ljudi tako procenjuju rizike. Osoba koja donosi odluku i ima odbojnost prema riziku pre će odabrati siguran dobitak koji vredi manje od vrednosti koju bi mogao da dobije da rizikuje – time plaća kako bi izbegao neizvesnost.

Primer 3.5.2. [10] Sledeća tabela prikazuje verziju funkcije korisnosti koju je Bernuli izučavao. Predstavlja korisnost različitih nivoa bogatstva, od milion do 10 miliona.

Bogatstvo (milioni)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Jedinice korisnosti	10	30	48	60	70	78	84	90	96	100

Tabela 19. Podaci funkcije korisnosti (preuzeto iz [10])

Prva vrsta u tabeli predstavlja bogatstvo koje je izraženo u milionima, druga vrsta predstavlja korisnost. Povećanje bogatstva sa jednog miliona na 2 miliona donosi 20 jedinica korisnosti, povećanje sa 2 miliona na 3 donosi 18 jedinica korisnosti, povećanje sa 3 miliona na 4 donosi 12 jedinica korisnosti. Nastavljajući na ovaj način da posmatramo tabelu možemo primetiti da dodatni milion na bogatstvo od 9 miliona donosi samo 4 jedinice korisnosti. Zaključak koji se može izvesti jeste da što je bogatstvo veće svaki sledeći milion koji se dodaje znači manje. Korisnost se sa svakim dodatim milionom povećava, međutim dodatna (marginalna) korisnost se smanjuje. Osobi koja poseduje 1 milion dodatni milion dosta znači i mnogo toga može da promeni, sa druge strane osobi koja poseduje 9 miliona dodatni milion neće drastično promeniti situaciju. Bernuli je prikazanu tabelu posmatrao da bi objasnio averziju prema

riziku, odnosno povećanoj potrebi ljudi da odaberu sigurnu opciju. Za bolje razumevanje Bernulijeve tačke gledišta možemo se posmatrati sledeća situacija. Neka donosilac odluke treba da odabere između sigurne opcije koja donosi 4 miliona ili rizične opcije gde su jednake verovatnoće da dobije 1 milion ili 7 miliona. Očekivana novčana vrednost kod rizične opcije je 4 miliona, tako da obe mogućnosti imaju istu očekivanu novčanu vrednost. Ukoliko bi se posmatrala samo očekivana novčana vrednost može se zaključiti da su ove dve opcije ekvivalentne. Međutim, prema Bernuliju, ljudima nije važan samo iznos novca, već i korisnost tog novca, a ako se iz ovog ugla sagledaju mogućnosti, ove dve opcije nisu ekvivalentne. Korisnost rizika je $0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 84 = 47$ (korisnost dva moguća ishoda od kojih svaki ima jednaku verovatnoću da se desi), dok je korisnost sigurne opcije koja iznosi 4 miliona, kako se može pročitati iz tabele, jednaka 60. S obzirom na to da je korisnost sigurne opcije veća od korisnosti rizične opcije, donosilac odluke će se odlučiti da ne rizikuje i odabiraće sigurnu opciju.

3.6. Aksiome teorije korisnosti (Džon fon Nojman i Oskar Morgenštern)

Većina važnih odluka koje donosimo u životu donosi se u uslovima određene neizvesnosti. Zbog toga istraživači u oblasti teorije odlučivanja nastoje da saznanja dobijena proučavanjem teorijskih modela primene na rešavanje složenijih i praktično značajnih problema iz svakodnevnog života. Jedan od najznačajnijih modela racionalnog odlučivanja zasniva se na teoriji očekivane korisnosti. Ova teorija nije razvijena kao psihološki model ljudskog ponašanja, već predstavlja logički okvir za donošenje odluka koji počiva na osnovnim principima, odnosno aksiomima racionalnosti. Matematičar Džon fon Nojman, jedan od najistaknutijih naučnika 20. veka, i ekonomista Oskar Morgenštern razvili su teoriju racionalnog izbora između alternativa polazeći od skupa aksioma koji definišu racionalno ponašanje pri odlučivanju (videti [5]).

Pre navođenja aksioma potrebno je definisati pojam lutrije.

Lutrija predstavlja standardni matematički model za predstavljanje situacija u kojima postoji neizvesnost u pogledu ishoda. Ona se sastoji od konačnog ili prebrojivog skupa mogućih ishoda, pri čemu je svakom ishodu pridružena određena verovatnoća njegove realizacije. Skup ishoda i njima pridružene verovatnoće zajedno čine lutriju. Verovatnoće moraju biti nenegativne, a njihov zbir jednak jedinici, dok ishodi treba da čine potpun sistem događaja.

Spisak aksioma [8]:

1. Aksiom: Uporedivost (ponekad se naziva i potpunost)

Za ceo skup neizvesnih alternativa, donosilac odluke može da kaže da preferira ishod x u odnosu na ishod y ($x \succsim y$) ili da preferira y u odnosu na x ($y \succsim x$) ili da je indiferentan između ishoda x i y ($x \sim y$).

2. Tranzitivnost

Ako donosilac odluke preferira ishod x u odnosu na ishod y , a ishod y u odnosu na ishod z . Tada preferira i ishod x u odnosu na ishod z . Odnosno, $x \succsim y \wedge y \succsim z \implies x \succsim z$.

Ako je donosilac odluke indiferentan između ishoda x i y i istovremeno indiferentan između ishoda y i z , onda je indiferentan i između ishoda x i z . Odnosno, $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

3. Jaka nezavisnost

Pretpostavimo da donosilac odluke ima verovatnoću P da ostvari ishod x i verovatnoću $(1 - P)$ da ostvari ishod z . Takvu lutriju označavamo $L(x, P; z, (1 - P))$. Aksiom jake nezavisnosti kaže da ukoliko je donosilac odluke indiferentan između ishoda x i y , tada će biti indiferentan i između dve lutrije:

- Prve lutrije, u kojoj se ishod x ostvaruje sa verovatnoćom P , a međusobno isključiv ishod z sa verovatnoćom $(1 - P)$.
- Druge lutrije, u kojoj se ishod y ostvaruje sa verovatnoćom P , dok se međusobno isključiv ishod z ostvaruje sa verovatnoćom $(1 - P)$.

Drugim rečima, zamena jednog ishoda drugim, pod uslovom da su dva ishoda jednako poželjna za donosioca odluke, ne menja njegove preferencije prema lutriji u kojoj se ti ishodi pojavljuju.

Formalno: Ako važi $x \sim y$ onda važi $L(x, P; z, (1 - P)) \sim L(y, P; z, (1 - P))$.

4. Merljivost

Ako je ishod y manje poželjan od ishoda x , ali poželjniji od ishoda z , tada postoji jedinstvena vrednost P (verovatnoća), takva da je donosilac odluke indiferentan između sigurnog ishoda y i lutrije u kojoj se x ostvaruje sa verovatnoćom P , a ishod z sa verovatnoćom $(1 - P)$.

Drugim rečima, za svaki ishod koji se prema preferencijama nalazi između druga dva ishoda, moguće je odrediti tačnu verovatnoću, pri kojoj je donosilac odluke podjednako sklon da prihvati taj siguran ishod ili odgovarajuću lutriju sastavljenu od boljeg i lošijeg ishoda.

Formalno: Ako važi $x \succ y \succ z$ ili $x \succ y \succ z$. Onda postoji jedinstvena verovatnoća P , takva da važi $y \sim L(x, P; z, (1 - P))$.

5. Rangiranje

Ako se ishodi y i u nalaze između ishoda x i z , prema preferencijama donosioca odluke i ako se može konstruisati lutrija tako da je donosilac odluke indiferentan između ishoda y i lutrije u kojoj se ishod x , ostvaruje sa verovatnoćom P_1 , a ishod z sa verovatnoćom $(1 - P_1)$, dok je istovremeno indiferentan između ishoda u i druge lutrije u kojoj se ishod x ostvaruje sa verovatnoćom P_2 , a ishod z sa verovatnoćom $(1 - P_2)$, tada važi ukoliko je P_1 veće od P_2 , ishod y preferiran u odnosu na ishod u .

Formalno: Ako važi $x \succ y \succ z \wedge x \succ u \succ z$ i ako je $y \sim L(x, P_1; z, (1 - P_1))$ i $u \sim L(x, P_2; z, (1 - P_2))$,

Onda sledi:

- Ako je $P_1 > P_2$, tada je $y \succ u$.
- Ako je $P_1 = P_2$, tada je $y \sim u$.

6. Monotonost

Pretpostavimo da je ishod x poželjniji od ishoda y ($x \succ y$). Posmatrajmo dve lutije:

- Prva lutrija daje ishod x sa verovatnoćom P_1 , a ishod y sa verovatnoćom $(1 - P_1)$.

- Druga lutrija daje isti ishod x sa verovatnoćom P_2 , a ishod y sa verovatnoćom $(1 - P_2)$.

Ako je $P_1 > P_2$ tada će donosilac odluke preferirati prvu lutriju u odnosu na drugu.

Formalno: Ako je $x \succsim y$ i $P_1 > P_2$ onda važi

$$L(x, P_1; y, (1 - P_1)) \succsim L(x, P_2; y, (1 - P_2)).$$

U standardnoj formulaciji teorije očekivane korisnosti, aksiomi se postavljaju za preferencije nad lutrijama i omogućavaju njihovo predstavljanje funkcijom $U(L) = \sum_i p_i u(x_i)$, gde su x_i mogući ishodi lutrije, a p_i njihove verovatnoće. Funkcija u u ovoj reprezentaciji jedinstvena je do na pozitivne affine transformacije.

Ekonomisti su teoriju očekivane korisnosti prihvatili kako kao normativni okvir koji određuje na koji način bi racionalne odluke trebalo donositi, tako i kao model koji opisuje način razmišljanja ekonomskih aktera. Osnovna ideja aksiomatske verzije teorije korisnosti, koju su Džon fon Nojman i Oskar Morgenštern predstavili 1944. godine, jeste da se racionalan donosilac odluka mora rukovoditi principom očekivane korisnosti. Oni su pokazali da svako vrednovanje neizvesnih ishoda koje nije strogo proporcionalno njihovim verovatnoćama dovodi do nedoslednosti u preferencijama i drugih ozbiljnih posledica prilikom odlučivanja. Izvođenje principa očekivane korisnosti iz aksioma racionalnog izbora predstavljalo je značajan teorijski doprinos i veoma brzo je prihvaćeno kao veliki napredak u oblasti teorije odlučivanja. Zahvaljujući tome, teorija očekivane korisnosti postala je temelj modela racionalnog odlučivanja u ekonomiji, a potom je našla široku primenu i u drugim društvenim naukama (videti [12]).

3.7. Konstruisanje funkcije korisnosti

Korisnost predstavlja lični odnos čoveka prema mogućim ishodima odluke, posebno kada postoji rizik. Drugim rečima korisnost pokazuje kako pojedinac vrednuje različite moguće ishode i koliko je spreman da prihvati rizik i neizvesnost pri donošenju odluka. Funkcija korisnosti služi da prikaže koliko je neki ishod vredan za konkretnog donosioca odluke. Dve osobe mogu imati različite funkcije korisnosti čak iako biraju između istih opcija. Razlog je taj što su različite njihove lične preferencije, procene verovatnoće, iskustvo, stavovi... Zato se funkcija korisnosti konstruiše za konkretnog donosioca odluke.

Primer 3.7.1. [17] Potrebno je konstruisati funkciju korisnosti za donosioca odluke koji bira između dve alternative:

- zadržavanja postojećeg proizvodnog programa, koji obezbeđuje siguran profit;
- prelaska na novi proizvodni program, koji može ostvariti dve različite vrednosti profita sa jednakom verovatnoćom nastupanja.

Za konstrukciju funkcije korisnosti potrebno je odrediti tačke u kojima je donosilac odluke indiferentan između sigurnog profita i rizika. Tačke indiferentnosti za konkretnog donosioca odluke prikazane su u Tabeli 20.

Redni Broj	Profit u slučaju orijentacije na nov proizvodni program [10 ⁶ dinara]		Siguran profit u slučaju zadržavanja starog proizvodnog programa [10 ⁶ dinara]
	Nepovoljan ishod (0,5)	Povoljan ishod (0,5)	
1	0	100	30
2	30	100	60
3	30	60	40
4	0	40	15
5	15	40	25
6	0	25	10
7	60	100	70
8	70	100	80

Tabela 20. Indiferentnost konkretnog donosioca odluke za pojedine situacije

Objašnjenje tabele:

Donosilac odluke je u prvoj situaciji **indiferentan** između novog proizvodnog programa (koji donosi $0 \cdot 10^6$ dinara sa verovatnoćom 0,5 i $100 \cdot 10^6$ dinara sa verovatnoćom 0,5) i starog proizvodnog programa koji donosi $30 \cdot 10^6$ dinara. To znači da bi se donosilac odluke odlučio za stari proizvodni program uvek kada je vrednost iznad $30 \cdot 10^6$, dok bi se odlučio da rizikuje u svakom slučaju kada je ponuđena vrednost ispod $30 \cdot 10^6$. Vrednost pri kojoj je donosilac odluke indiferentan između sigurnog profita i rizika naziva se ekvivalent novčane izvesnosti (ENI). Minimalni profit preduzeća je 0 dinara, a maksimalni $100 \cdot 10^6$ dinara. Minimalni profit ima 0 jedinica korisnosti, dok je korisnost maksimalnog profita jednaka 1. Na osnovu ovih vrednosti može se izračunati korisnost za $30 \cdot 10^6$, koja će se kasnije koristiti.

$$u(30) = 0,5 \cdot u(0) + 0,5 \cdot u(100) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 = 0,5$$

Analogno se postupa kada je u pitanju druga situacija iz tabele. Sada je donosilac odluke indiferentan između novog proizvodnog programa (koji iznosi $30 \cdot 10^6$ dinara sa verovatnoćom 0,5 i $100 \cdot 10^6$ sa verovatnoćom 0,5) i starog proizvodnog programa koji iznosi $60 \cdot 10^6$ dinara. Sada se može izračunati vrednost ENI za drugu situaciju:

$$u(60) = 0,5 \cdot u(30) + 0,5 \cdot u(100) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 1 = 0,75$$

Sada se usvaja treća situacija tako što se uzima prethodno izračunati rezultat $u(60) = 0,75$. U trećem slučaju donosilac odluke je indiferentan između novog proizvodnog programa (koji iznosi $30 \cdot 10^6$ dinara sa verovatnoćom 0,5 i $60 \cdot 10^6$ dinara sa verovatnoćom 0,5) i

starog proizvodnog programa koji iznosi sigurnih $40 \cdot 10^6$ dinara. Sada se može izračunati korisnost ENI za treću situaciju:

$$u(40) = 0,5 \cdot u(30) + 0,5 \cdot u(60) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,75 = 0,625$$

Na sličan način možemo odrediti i ostale situacije. Pri tome treba obratiti pažnju na to da se situacije tako formiraju da rezultati ravnomerno pokrivaju čitav mogući opseg na apscisi funkcije korisnosti.

$$u(15) = 0,5 \cdot u(0) + 0,5 \cdot u(40) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,625 = 0,3125$$

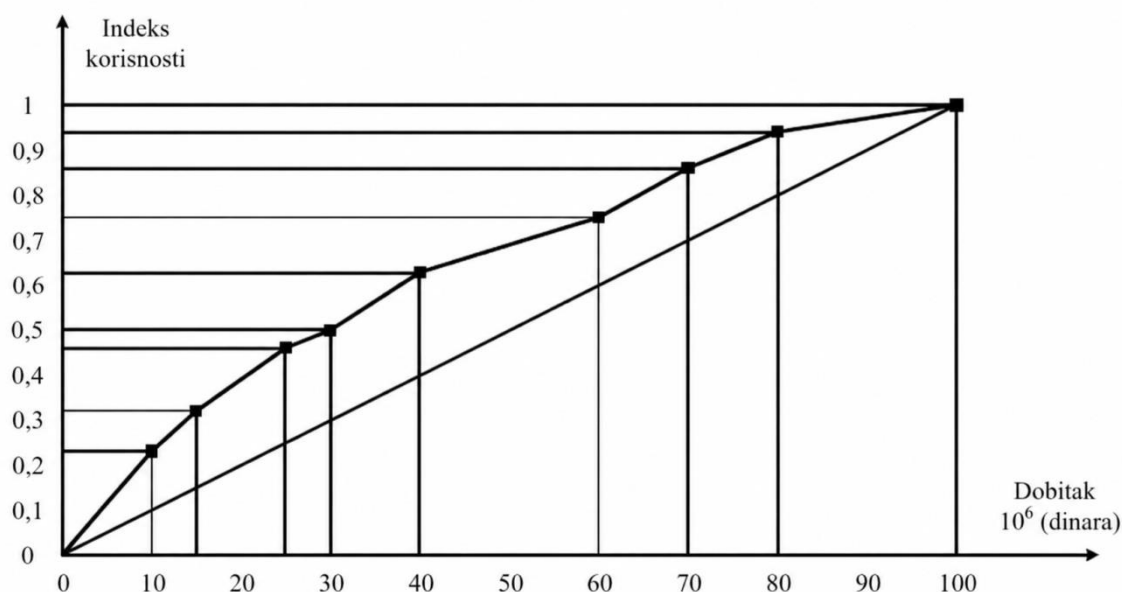
$$u(25) = 0,5 \cdot u(15) + 0,5 \cdot u(40) = 0,5 \cdot 0,3125 + 0,5 \cdot 0,625 = 0,469$$

$$u(10) = 0,5 \cdot u(0) + 0,5 \cdot u(25) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,469 = 0,2345$$

$$u(70) = 0,5 \cdot u(60) + 0,5 \cdot u(100) = 0,5 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 1 = 0,875$$

$$u(80) = 0,5 \cdot u(70) + 0,5 \cdot u(100) = 0,5 \cdot 0,875 + 0,5 \cdot 1 = 0,9375$$

Na ovaj način formirano je ukupno deset tačaka funkcije korisnosti. Veći broj tačaka dovodi do preciznije funkcije korisnosti. Za dati primer, funkcija korisnosti prikazana je na slici 5.



Slika 5. Funkcija korisnosti za primer 3.7.1. (preuzeto iz [17])

3.8. Očekivana novčana vrednost vs očekivana korisnost

Kada je konstruisana kriva korisnosti proces donošenja odluke je blizu kraja.

Definicija 3.8.3. Očekivana novčana vrednost predstavlja sumu proizvoda odgovarajućih ishoda i verovatnoća svakog ishoda nastupanja:

$$ONV = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i$$

Definicija 3.8.2. Očekivana korisnost nastaje kao suma proizvoda indeksa korisnosti pojedinačnih ishoda i verovatnoća njihovog nastupanja:

$$OK = \sum_{i=1}^n u(x_i) \cdot P_i$$

Primer 3.8.1. Donosilac odluke poseduje auto u vrednosti od 20 000 dolara. Potrebno je da donese odluku da li da osigura auto ili ne. Premija osiguranja iznosi 2 000 dolara. U slučaju osiguranja donosilac odluke plaća premiju od 2 000 dolara, čime se njegov početni novčani položaj od 20 000 dolara smanjuje na 18 000 dolara. Ukoliko automobil ne osigura, postoje dva moguća ishoda. Verovatnoća da dođe do krađe iznosi 0,2 pri čemu donosilac odluke gubi automobil vredan 20 000 dolara. Verovatnoća da do krađe ne dođe iznosi 0,8 u kom slučaju zadržava automobil u vrednosti od 20 000 dolara.

Prikazani primer predstavljemo i tabelarno.

Odluka	Ishod	Verovatnoća	Konačno bogatstvo
Osigurati	krađa	0,2	18 000\$
Osigurati	Nema krađe	0,8	18 000\$
Ne osigurati	krađa	0,2	0\$
Ne osigurati	Nema krađe	0,8	20 000\$

Tabela 21: Predstavljanje primera 3.8.1.

Postoje dve moguće akcije:

$a_1 = \text{osigurati auto}$

$a_2 = \text{ne osigurati auto}$

Ukoliko se posmatra kriterijum očekivane novčane vrednosti, preporuka je **osigurati** auto, jer na osnovu tog kriterijuma važi:

$$ONV(a_1) = 18\,000$$

$$ONV(a_2) = 0,2 \cdot 0 + 0,8 \cdot 20\,000 = 16\,000$$

Dakle, $ONV(a_1) > ONV(a_2)$, zato je preporuka **osigurati** auto.

Međutim, može se posmatrati i korisnost. Kada je u pitanju korisnost, potrebno je posmatrati kakav je odnos donosioca odluke prema novcu i da li će se konačan zaključak promeniti ukoliko se umesto novčane vrednosti posmatra korisnost. Pretpostavimo da je ponuđena lutrija gde su jednake verovatnoće da donosilac odluke osvoji 20 000 dolara ili da izgubi sve,

može se pretpostaviti da je konkretan donosilac odluke indiferentan za 9 000 dolara. To znači da je njemu svejedno da li će odabrati lutriju ili sigurnu vrednost od 9 000 dolara. Ako bi mu bila ponuđena cifra iznad 9 000 dolara, odlučio bi se za sigurnu vrednost, a ako bi u ponudi bila cifra ispod 9 000 dolara, rizikovao bi. Kako je korisnost od 20 000 dolara jednaka 1, a korisnost od 0 dolara je 0, može se izračunati i korisnost za 9 000 dolara.

$$u(9\,000) = u(20\,000) \cdot 0,5 + u(0) \cdot 0,5 = 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 0,5$$

Neka je donosilac odluke indiferentan između lutrije u kojoj su jednake verovatnoće da osvoji 20 000 dolara i 9 000 dolara i sigurnog dobitka od 15 000 dolara. Onda je korisnost od 15 000 dolara jednaka:

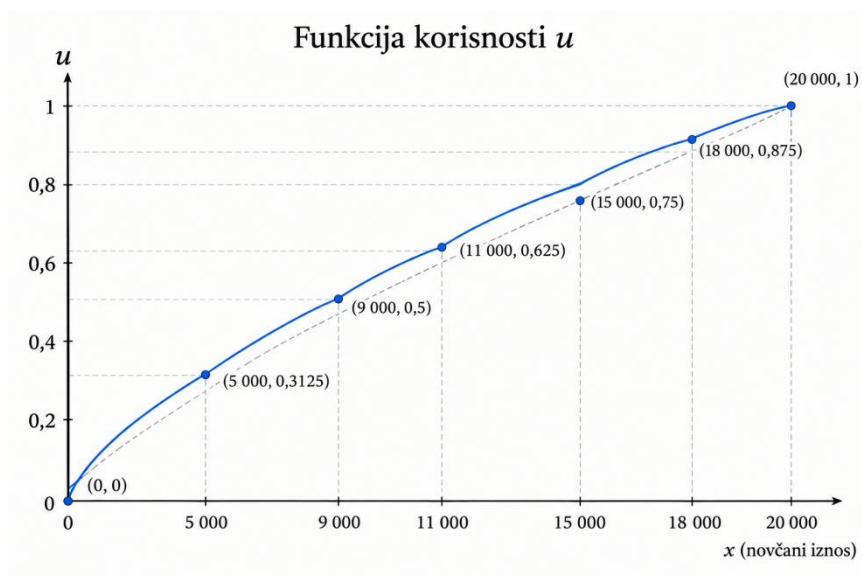
$$u(15\,000) = u(9\,000) \cdot 0,5 + u(20\,000) \cdot 0,5 = 0,75$$

Analogno, neka je donosilac odluke indiferentan između lutrije, gde su jednake verovatnoće da osvoji 9 000 dolara i 15 000 dolara i sigurnog dobitka od 11 000 dolara.

$$u(11\,000) = u(9\,000) \cdot 0,5 + u(15\,000) \cdot 0,5 = 0,625$$

$$u(5\,000) = u(0) \cdot 0,5 + u(11\,000) \cdot 0,5 = 0,3125$$

Na osnovu prethodnih rezultata može se konstruisati funkcija korisnosti.



Slika 6. Funkcija korisnosti za primer 3.8.1.

$$u(a_1) = u(18\,000) = 0,5 \cdot u(15\,000) + 0,5 \cdot u(20\,000) = 0,5 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 1 = 0,875$$

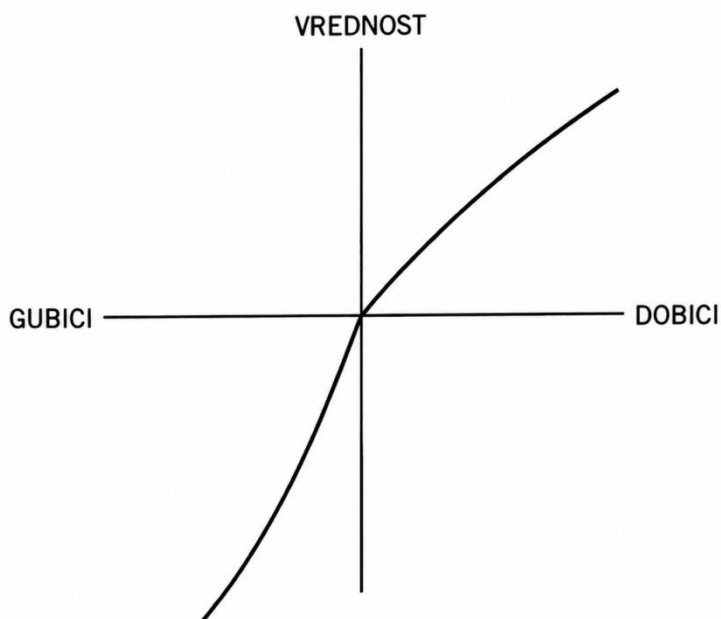
$$u(a_2) = 0,8 \cdot u(20\,000) + 0,2 \cdot u(0) = 0,8$$

S obzirom da je očekivana korisnost za prvu akciju veća od očekivane korisnosti za drugu akciju, $OK(a_1) > OK(a_2)$, izvodi se zaključak da je i na osnovu kriterijuma očekivane korisnosti poželjno **osigurati** auto.

4. TEORIJA IZGLEDA

U tradicionalnim analizama odlučivanja ishodi odluka najčešće se posmatraju kroz promene ukupnog bogatstva pojedinca. Međutim, ovakav pristup nije u potpunosti u skladu sa načinom na koji ljudi psihološki doživljavaju ishode svojih odluka. Naime, relativno male promene u bogatstvu ljudi uglavnom ne procenjuju u odnosu na svoje ukupno bogatstvo, već ih doživljavaju kao dobitke, gubitke ili neutralne ishode. Ukoliko pojedinci vrednuju promene u bogatstvu, odnosno ono što su dobili ili izgubili, umesto ukupnog nivoa bogatstva kojim raspolažu, psihološka analiza odlučivanja treba da bude zasnovana na dobitcima i gubicima, a ne na konačnom bogatstvu. Ova pretpostavka predstavlja osnovu teorije izgleda (*eng. Prospect Theory*), koja na drugačiji način objašnjava donošenje odluka u uslovima rizika. Literatura koja je upotrebljena za pisanje ovog poglavlja je: [7], [10], [11], [18], [20], [22].

Subjektivna vrednost dobitaka je konkavna funkcija njihove veličine. Isti obrazac može se uočiti i kod gubitaka. Tako se, na primer, subjektivna razlika između gubitka od 200 dolara i gubitka od 100 dolara doživljava većom od razlike između gubitka od 1.200 dolara i gubitka od 1.100 dolara, iako je u oba slučaja apsolutna razlika jednaka. Kada se funkcije vrednosti za dobitke i gubitke objedine, dobija se karakteristična funkcija u obliku slova S, prikazana na sledećoj slici (videti [10]).



Slika 7. Hipotetička funkcija vrednosti (preuzeto iz [10])

Funkcija vrednosti u teoriji izgleda ima nekoliko važnih karakteristika [10]:

1. **Vrednost se određuje na osnovu dobitaka i gubitaka**, a ne na osnovu ukupnog bogatstva. Važno je koliko se stanje promenilo u odnosu na početnu, odnosno referentnu tačku.
2. **U području dobitaka funkcija je konkavna**, što znači da dodatni dobici donose sve manju psihološku korist. Na primer, razlika između dobitka od 100 i 200 dolara doživljava se jače nego razlika između 1.000 i 1.100 dolara.
3. **U području gubitaka funkcija je konveksna**, što pokazuje drugačiji odnos prema riziku. Kada postoji mogućnost gubitka, ljudi mogu postati skloniji riziku, posebno kada je verovatnoća gubitka velika.

Gubici imaju veći psihološki uticaj od dobitaka iste veličine. Ova pojava naziva se odbojnost prema gubitku (*loss aversion*). Na primer, gubitak od 100 dolara obično izaziva mnogo jači negativan osećaj nego što dobitak od 100 dolara izaziva pozitivan osećaj.

Zbog toga ljudi često odbijaju opklade u kojima postoji jednaka mogućnost da dobiju ili izgube isti iznos novca. Potencijalni dobitak jednostavno nije dovoljno privlačan da bi nadoknadio neprijatnost zbog mogućeg gubitka.

Ovakav način posmatranja rizika posebno je važan jer pokazuje da ljudi ne reaguju isto na dobitke i gubitke. Kada postoji mogućnost dobitka, ljudi su uglavnom oprezniji i izbegavaju rizik. Međutim, kada pokušavaju da izbegnu ili nadoknade gubitak, mogu postati spremniji da rizikuju.

Kaneman i Tverski su kroz teoriju izgleda upravo istakli ovu razliku. Umesto da se donošenje odluka posmatra samo kroz pitanje zašto ljudi izbegavaju rizik, pažnja je usmerena i na to koliko snažno ljudi žele da izbegnu gubitke. Zbog toga se u nekim situacijama rizik prihvata upravo zato da bi se sprečio ili nadoknadio gubitak. [10]

Primer 4.1. [10]:

- **Problem 1:** Donosilac odluke raspolaže određenom sumom novca kojoj se dodaje još 1.000 dolara. Nakon toga treba da izabere jednu od dve opcije: verovatnoća je 50% da dobije dodatnih 1.000 dolara ili siguran dobitak od 500 dolara.
- **Problem 2:** Donosilac odluke raspolaže određenom sumom novca kojoj se dodaje još 2.000 dolara. Zatim bira između dve mogućnosti: verovatnoća je 50% da izgubi 1.000 dolara ili siguran gubitak od 500 dolara.

Posmatrano sa stanovišta konačnog nivoa bogatstva, koje u Bernulijevoj teoriji predstavlja jedini relevantan kriterijum, problemi 1 i 2 su identični. U oba slučaja donosilac odluke bira između sigurne i rizične alternative. Ukoliko izabere sigurnu opciju, njegovo bogatstvo će se uvećati za 1.500 dolara. Ukoliko se odluči za rizičnu opciju, sa jednakom verovatnoćom može ostvariti povećanje bogatstva od 1.000 ili 2.000 dolara. Prema Bernulijevoj teoriji, ovakve ekvivalentne situacije trebalo bi da dovedu do istog izbora.

Međutim, rezultati istraživanja koja su sprovedi Kaneman i Tverski pokazuju drugačije ponašanje ispitanika:

- u prvom problemu velika većina ispitanika opredeljuje se za siguran dobitak;
- u drugom problemu većina ispitanika bira rizičnu alternativu.

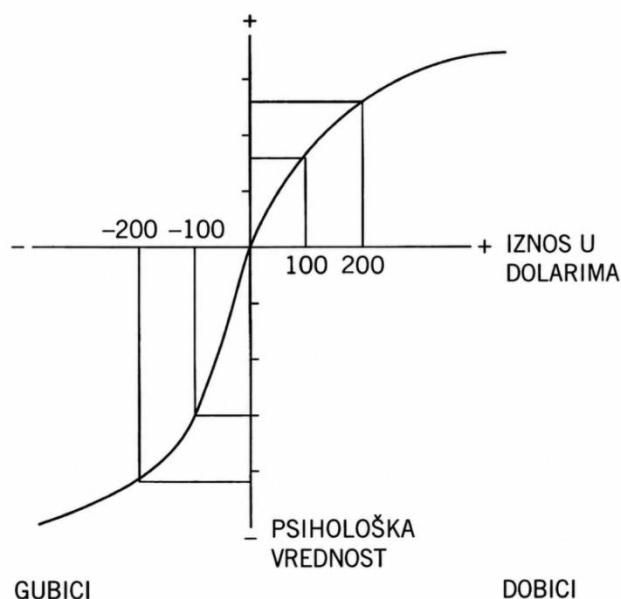
Ovakvi rezultati predstavljaju značajan kontraprimer osnovnoj pretpostavci Bernulijeve teorije. Ukoliko bi korisnost zavisila isključivo od konačnog nivoa bogatstva, ekvivalentno formulisani problemi morali bi da dovedu do identičnih odluka. Međutim, empirijski nalazi pokazuju da način predstavljanja ishoda značajno utiče na izbor donosioca odluke.

Poređenje ova dva problema ukazuje na ključnu ulogu referentne tačke u procesu procene alternativa. U prvom problemu referentna tačka nalazi se 1.000 dolara iznad početnog nivoa bogatstva, dok je u drugom problemu postavljena na 2.000 dolara iznad tog nivoa. Zbog toga se povećanje bogatstva od 1.500 dolara u prvom slučaju doživljava kao dobitak od 500 dolara, dok se u drugom slučaju isti ishod posmatra kao gubitak od 500 dolara. Upravo odsustvo referentne tačke predstavlja jedno od osnovnih ograničenja Bernulijeve teorije. Dok je prema toj teoriji dovoljno poznavati ukupan nivo bogatstva kako bi se odredila njegova korisnost, teorija izgleda polazi od toga da je za pravilno vrednovanje ishoda neophodno uzeti u obzir i referentno stanje u odnosu na koje se procenjuju dobici i gubici.

Teorija izgleda zasniva se na tri osnovne kognitivne karakteristike [10]:

- **Procena u odnosu na referentnu tačku (nivo adaptacije).** Ishodi se vrednuju u odnosu na neutralnu referentnu tačku, koja se naziva nivo adaptacije. Ishodi iznad referentne tačke doživljavaju se kao dobici, dok se ishodi ispod nje smatraju gubicima.
- **Princip slabljenja osetljivosti.** Kako se veličina dobitaka ili gubitaka povećava, subjektivna osetljivost na njihove promene opada. Na primer, subjektivna razlika između 900 i 1.000 dolara znatno je manja od razlike između 100 i 200 dolara.
- **Odbojnost prema gubitku.** Gubici imaju veći psihološki značaj od dobitaka iste veličine. Zbog toga se pri neposrednom poređenju negativni ishodi doživljavaju intenzivnije nego odgovarajući pozitivni ishodi.

Navedeni principi na kojima se zasniva vrednovanje ishoda u okviru teorije izgleda ilustrovani su na sledećoj slici.



Slika 8. Grafički prikaz psihološke vrednosti dobitaka i gubitaka (preuzeto iz [10])

Grafikon prikazuje kako ljudi psihološki doživljavaju dobitke i gubitke. U teoriji izgleda, upravo ti dobitci i gubici određuju koliko nešto ima vrednost. To se razlikuje od Bernulijevog modela, u kojem se vrednost određuje na osnovu nivoa ukupnog bogatstva.

Grafikon ima dve strane koje se nalaze oko referentne tačke. Referentna tačka predstavlja početni ili neutralni nivo, u odnosu na koji se određuje da li se neka promena doživljava kao dobitak ili kao gubitak. Desno od nje nalaze se dobitci, a levo gubici.

Kriva na grafikonu ima oblik sličan slovu S. To pokazuje da se osetljivost na dodatne dobitke i gubitke smanjuje kako njihova veličina raste. Na primer, razlika između dobitka od 100 i 200 dolara doživljava se intenzivnije nego razlika između 1.000 i 1.100 dolara.

Međutim, kriva nije potpuno simetrična. Gubici imaju jači psihološki uticaj od dobitaka iste veličine. Na primer, gubitak od 100 dolara obično se doživljava mnogo intenzivnije nego što se dobitak od 100 dolara doživljava pozitivno.

Ova karakteristika teorije izgleda naziva se odbojnost prema gubitku (*loss aversion*). Ona znači da bol zbog gubitka određene količine novca obično ima veći intenzitet nego zadovoljstvo zbog dobitka iste količine (videti [10]).

4.1. Averzija prema gubitku

Odluke sa kojima se pojedinci često suočavaju mogu biti mešovite prirode, odnosno mogu istovremeno uključivati mogućnost ostvarivanja dobitka i rizik nastanka gubitka. U takvim situacijama donosilac odluke treba da proceni da li je spreman da prihvati određeni nivo rizika ili će se opredeliti za sigurniju alternativu.

Kao ilustracija može poslužiti primer bacanja novčića. Pretpostavimo da je novčić pravilan, odnosno da postoji jednaka verovatnoća pojavljivanja glave i pisma. Ukoliko ishod bude pismo, posledica je gubitak od 100 dolara, dok ishod glave donosi dobitak od 150 dolara. Ovakve situacije bile su predmet istraživanja Kanemana i Tverskog. Na osnovu analize velikog broja sličnih primera, zaključili su da ljudi gubitke doživljavaju intenzivnije nego dobitke iste ili slične veličine, odnosno da ispoljavaju odbojnost prema gubicima. Kod većine pojedinaca negativan efekat mogućeg gubitka od 100 dolara snažniji je od pozitivnog očekivanja dobitka od 150 dolara (videti [10]).

Koeficijent odbojnosti prema gubitku procenjivan je kroz različite eksperimente i najčešće se nalazi u rasponu od 1,5 do 2,5. Pri tome je važno naglasiti da se radi o prosečnim vrednostima, jer intenzitet odbojnosti prema gubicima varira među pojedincima. Sa povećanjem veličine uloga raste i koeficijent odbojnosti prema gubitku, iako to povećanje nije proporcionalno veliko. U određenim situacijama ovaj koeficijent može poprimiti veoma visoke, pa čak i beskonačne vrednosti. To se odnosi na rizike koje pojedinci nisu spremni da prihvate bez obzira na moguću nagradu, posebno kada potencijalni gubitak predstavlja ozbiljnu pretnju po život ili ima izuzetno nepovoljne posledice za donosioca odluke (videti [10]).

Sledeća dva zapažanja predstavljaju osnovu teorije izgleda [11]:

- Kod mešovitih opcija, koje istovremeno uključuju mogućnost dobitka i gubitka, odbojnost prema gubicima utiče na donošenje odluka koje karakteriše izražena averzija prema riziku.
- Kod nepovoljnih izbora, u kojima se poredi siguran gubitak sa mogućnošću većeg, ali manje verovatnog gubitka, princip opadajuće osetljivosti dovodi do veće spremnosti pojedinaca da preuzmu rizik.

4.2. Rabinova teorema o kalibraciji

Bihevioralni ekonomista Metju Rabin je 2000. godine pokazao da objašnjavanje izražene averzije prema malim rizicima isključivo konkavnošću funkcije korisnosti konačnog bogatstva može dovesti do nerealno izražene averzije prema velikim rizicima.

Teorema 4.2. [18] Pretpostavimo da je za svako bogatstvo ω , funkcija korisnosti $u(\omega)$, strogo rastuća i slabo konkavna. Pretpostavimo dalje da postoje brojevi $\bar{\omega} > \underline{\omega}$, $g > l > 0$, tako da za svako $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$, važi $0,5 u(\omega - l) + 0,5 u(\omega + g) < u(\omega)$. Tada za sve $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$, i za svako $x > 0$, važe nejednakosti:

- 1) Ako je $g \leq 2l$, onda

$$u(\omega) - u(\omega - x) \geq \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{k^*(x)} \left(\frac{g}{l}\right)^{i-1} r(\omega), & \omega - \underline{\omega} + 2l \geq x \geq 2l \\ 2 \left[\sum_{i=1}^{k^*(\omega - \underline{\omega} + 2l)} \left(\frac{g}{l}\right)^{i-1} r(\omega) \right] + [x - (\omega - \underline{\omega} + l)] \left(\frac{g}{l}\right)^{k^*(\omega - \underline{\omega} + 2l)} r(\omega) & x \geq \omega - \underline{\omega} + 2l \end{cases}$$

2)

$$u(\omega + x) - u(\omega) \leq \begin{cases} \sum_{i=0}^{k^{**}(x)} \left(\frac{l}{g}\right)^i r(\omega), & x \leq \bar{\omega} - \omega \\ \sum_{i=0}^{k^{**}(x)} \left(\frac{l}{g}\right)^i r(\omega) + [x - \bar{\omega}] \left(\frac{l}{g}\right)^{k^{**}(\bar{\omega})} r(\omega), & x \geq \bar{\omega} - \omega \end{cases}$$

Gde je $k^*(x) = \text{int}\left(\frac{x}{2l}\right)$, gde oznaka $\text{int}(y)$ predstavlja najveći ceo broj koji nije veći od y . $k^{**}(x) = \text{int}\left(\frac{x}{g} + 1\right)$ i $r(\omega) = u(\omega) - u(\omega - l)$, što predstavlja pad korisnosti kada se izgubi iznos l .

Dokaz:

Dokaz 1. dela teoreme

Zbog jednostavnosti zapisa i bez gubitka opštosti neka je $r(\omega) = u(\omega) - u(\omega - l) = 1$, tada važi $u(\omega - l) - u(\omega - 2l) \geq 1$, zbog konkavnosti funkcije korisnosti. Takođe, pošto je $2l > g > l$, znamo da $\omega - 2l + g \in (\omega - l, \omega)$ i zbog konkavnosti funkcije korisnosti znamo da je $u(\omega - 2l + g) - u(\omega - l) \geq \frac{g-l}{l} = \frac{g}{l} - 1$,

Otuda,

$$u(\omega - 2l + g) - u(\omega - 2l) \geq \frac{g}{l} - 1 + 1 = \frac{g}{l}$$

Dakle, ako je $\omega - 2l \geq \underline{\omega}$ znamo da $u(\omega - 2l) - u(\omega - 3l) \geq \frac{g}{l}$, jer prema pretpostavci važi $u(\omega - 2l - l) + u(\omega - 2l + g) \leq 2u(\omega - 2l)$. Zbog konkavnosti takođe znamo da $u(\omega - 3l) - u(\omega - 4l) \geq \frac{g}{l}$.

Opštije, ako je $\omega - 2kl \geq \underline{\omega}$ onda

$$u(\omega - (2k - 1)l) - u(\omega - 2kl) \geq u(\omega - 2(k - 1)l) - u(\omega - (2k - 1)l)$$

Odakle sledi

$$u(\omega - 2kl + g) - u(\omega - 2kl) \geq \frac{g}{l} [u(\omega - 2(k-1)l) - u(\omega - (2k-1)l)]$$

Dalje sledi

$$u(\omega - 2kl) - u(\omega - (2k-1)l) \geq \frac{g}{l} [u(\omega - 2(k-1)l) - u(\omega - (2k-1)l)].$$

Ove donje granice za marginalne korisnosti daju donju granicu za ukupnu korisnost $u(\omega) - u(\omega - x)$ u delu 1) teoreme.

Dokaz 2. Dela teoreme

Ponovo, neka je $r(\omega) - u(\omega - l) = 1$

Tada, $u(\omega + g) - u(\omega) \leq 1$

Zbog konkavnosti funkcije korisnosti, $u(\omega + g) - u(\omega + g - l) \leq \frac{l}{g}$.

Ali, ako je $\omega + g \leq \bar{\omega}$, onda iz pretpostavke sledi $u(\omega + 2g) - u(\omega + g) \leq \frac{l}{g}$, jer $u(\omega + g - l) + u(\omega + 2g) \leq 2u(\omega + g)$

Opštije, znamo da ako je $\omega + mg \leq \bar{\omega}$, onda $u(\omega + mg + g) - u(\omega + mg) \geq \frac{l}{g} [u(\omega + mg) - u(\omega + mg - g)]$.

Ove gornje granice za marginalne korisnosti daju gornju granicu za $u(\omega + x) - u(\omega)$ u delu 2) teoreme.

Posledica:

Pretpostavimo da je za svako bogatstvo ω , funkcija korisnosti $u(\omega)$ je strogo rastuća i slabo konkavna. Pretpostavimo da postoje brojevi $g > l > 0$ takvi da za svako ω važi $0,5u(\omega - l) + 0,5u(\omega + g) < u(\omega)$. Tada za svaki pozitivan ceo broj k i za svaki $m < m(k)$, važi $0,5 u(\omega - 2kl) + 0,5 u(\omega + mg) < u(\omega)$, pri čemu je

$$m(k) = \begin{cases} \frac{\ln \left[1 - \left(1 - \frac{l}{g} \right) 2^{\sum_{i=1}^k \left(\frac{g}{l} \right)^i} \right]}{\ln \frac{l}{g}} - 1, & 1 - \left(1 - \frac{l}{g} \right) 2^{\sum_{i=1}^k \left(\frac{g}{l} \right)^i} > 0 \\ \infty, & 1 - \left(1 - \frac{l}{g} \right) 2^{\sum_{i=1}^k \left(\frac{g}{l} \right)^i} \leq 0 \end{cases}$$

Dokaz posledice:

Iz dokaza teoreme znamo da

$$u(\omega) - u(\omega - 2kl) \geq 2 \sum_{i=1}^k \left(\frac{g}{l}\right)^{i-1} r(\omega) \quad \text{i} \quad u(\omega + mg) - u(\omega) \leq \sum_{i=0}^{m+1} \left(\frac{l}{g}\right)^i r(\omega)$$

Dalje, ako važi $u(\omega) - u(\omega - 2kl) < u(\omega + mg) - u(\omega)$, onda sledi

$$2 \sum_{i=1}^k \left(\frac{g}{l}\right)^{i-1} < \sum_{i=0}^{m+1} \left(\frac{l}{g}\right)^i$$

Rešavanjem po m dobija se navedena formula. Napomenimo da, ako je $g > 2l$, dovoljno je da važi $u(\omega) - u(\omega - 2kl) \geq 2k(u(\omega) - u(\omega - 1))$, kako bi se dobio željeni rezultat. ■

Prema teoriji očekivane korisnosti, ljudi izbegavaju rizik zato što dodatni novac ne donosi istu korist svima. Kada osoba ima malo novca, određeni iznos joj mnogo znači, dok isti taj iznos ima mnogo manji značaj za veoma bogatu osobu. Zbog toga ljudi više žele da izbegnu gubitak koji bi mogao da ugrozi njihovu finansijsku sigurnost. Ova teorija, međutim, ima jedan važan problem. Ona pretpostavlja da su ljudi uglavnom ravnodušni prema riziku kada su u pitanju mali iznosi novca. Ali, ako se posmatra ponašanje ljudi kod malih opklada i rizika, pokazuje se da oni često ipak ne žele da prihvate ni male rizike.

Rabinova teorema ukazuje na problem koji nastaje kada se averzija prema riziku objašnjava samo konkavnom funkcijom korisnosti. Ako se pretpostavi da osoba veoma izbegava čak i male rizike, tada bi isti model predvideo da ta osoba mora biti izuzetno, čak nerealno mnogo opreznija prema velikim rizicima.

Na primer, ako osoba odbija malu opkladu zbog relativno malog mogućeg gubitka, model predviđa da bi ta ista osoba odbila i veoma veliku opkladu čak i kada bi mogući dobitak bio veoma značajan. Takvo ponašanje nije realno.

Zato Rabinova teorema pokazuje jedan od važnih problema klasične teorije očekivane korisnosti: *samo konkavnost funkcije korisnosti nije dovoljna da realno objasni zašto ljudi izbegavaju rizik*. Ako se pomoću nje objasni jaka averzija prema malim rizicima, onda model predviđa nerealno veliku averziju prema velikim rizicima (videti [18]).

Teorema je „neparametarska“, što znači da ne zahteva određeni oblik funkcije korisnosti. Potrebno je samo da se pretpostavi da je funkcija korisnosti konkavna, odnosno da dodatni novac donosi sve manju korist kako bogatstvo raste.

Rabin pomoću jednostavnih primera pokazuje problem koji postoji u teoriji očekivane korisnosti. Pretpostavlja se da osoba odbija malu opkladu u kojoj postoje jednake šanse da izgubi 100 dolara ili da dobije 110 dolara. Iako je ova opklada povoljna, jer je mogući dobitak veći od mogućeg gubitka, osoba je ipak odbija, jer ne želi da preuzme rizik.

Prema teoriji očekivane korisnosti, ako osoba odbija takvu malu opkladu, onda bi morala da odbija i mnogo veće opklade. Na primer, za sve početne nivoe bogatstva ako odbija opkladu u kojoj može da izgubi 1.000 dolara ili da dobije 1.050 dolara, teorija predviđa da bi odbila i opkladu u kojoj može da izgubi 20.000 dolara, čak i kada bi mogući dobitak bio veoma veliki.

Problem je u tome što je takvo ponašanje veoma teško smatrati realnim. Razumno je da osoba ne želi da rizikuje 100 ili 1.000 dolara, ali nije realno pretpostaviti da bi zbog toga odbila svaku veoma povoljnu opkladu sa mnogo većim mogućim dobitkom.

Rabin zato zaključuje da se averzija prema malim rizicima ne može objasniti samo činjenicom da dodatni novac donosi sve manju korist kako bogatstvo raste. To je jedan od razloga zbog kojih je postalo potrebno razmatrati drugačije načine objašnjavanja ljudskog ponašanja, kao što je teorija izgleda.

Sušтина Rabinovog argumenta je sledeća: ako teorija očekivane korisnosti pokušava da objasni odbijanje malih, čak i povoljnih opklada, onda mora da pretpostavi veoma izraženu averziju prema riziku. Zbog toga ista teorija predviđa nerealno veliko odbijanje veoma povoljnih velikih opklada. Upravo ta nelogična posledica pokazuje ograničenje klasične teorije očekivane korisnosti (videti [18]).

Tabela I proizilazi iz posledice Rabinove teoreme. Može se posmatrati osoba za koju je poznato da za svaki početni nivo bogatstva odbija opkladu gde su jednake verovatnoće:

- izgutiti 100\$ / dobiti 101\$
- izgubiti 100\$ / dobiti 105\$
- izgubiti 100\$ / dobiti 110\$
- izgubiti 100\$ / dobiti 125\$

Tabela prikazuje implikacije gde je jednaka verovatnoća za gubitkom L i dobitkom G. Svaki red tabele odgovara određenoj vrednosti L, a u tabeli je upisana najveća vrednost G (na osnovu granica dobijenih iz posledice Rabinove teoreme) za koju je ta tvrdnja tačna.

TABELA I

Tabela 22. Ako osoba za SVE nivoe bogatstva odbija opklade gde je jednaka verovatnoća, „izgubi 100\$ / dobije g\$“ tada će odbiti i opklade gde je jednaka verovatnoća da izgubi L\$ i dobije G\$“. Vrednosti G prikazane su u tabeli. (preuzeto iz [18])

L	G			
	\$101	\$105	\$110	\$125
\$400	400	420	550	1 250
\$600	600	730	990	∞
\$800	800	1 050	2 090	∞
\$1 000	1 010	1 570	∞	∞
\$2 000	2 320	∞	∞	∞
\$4 000	5 750	∞	∞	∞
\$6 000	11 810	∞	∞	∞
\$ 8 000	34 940	∞	∞	∞
\$ 10 000	∞	∞	∞	∞
\$ 20 000	∞	∞	∞	∞

Ekstremna averzija prema riziku prikazana u Tabeli I ne zavisi od pretpostavke da osoba odbija datu opkladu za sve početne nivoe bogatstva. Zato je važna Tabela II. Ona pokazuje da Rabinov rezultat ostaje ekstreman čak i kada ne pretpostavimo da osoba odbija male opklade na svim nivoima bogatstva. Tabela II prikazuje kalibracije u situaciji kada znamo samo da osoba odbija opklade tipa *izgubi 100/dobije g*, za početne nivoe bogatstva manje od 300 000\$. Tabela prikazuje koje će opklade odbijati ako joj je početno bogatstvo 290 000\$.

TABELA II

Tabela 23 . Tabela I ponovljena za početni nivo bogatstva od 290 000\$, kada je ponašanje u vezi sa opkladama l / g poznato samo za nivoe bogatstva $\omega \leq 300\,000\$$ (preuzeto iz [18])

	G			
L	\$101	\$105	\$110	\$125
\$400	400	420	550	1 250
\$600	600	730	990	$36 \cdot 10^9$
\$800	800	1 050	2 090	$9 \cdot 10^{10}$
\$1 000	1 010	1 570	718 190	$16 \cdot 10^{10}$
\$2 000	2 320	69 930	12 210 880	$85 \cdot 10^{10}$
\$4 000	5 750	635 670	60 528 930	$94 \cdot 10^{11}$
\$6 000	11 510	1 557 360	180 000 000	$89 \cdot 10^{12}$
\$8 000	19 290	3 058 540	510 000 000	$83 \cdot 10^{13}$
\$10 000	27 780	5 503 790	1 300 000 000	$77 \cdot 10^{14}$
\$20 000	85 750	71 799 110	160 000 000 000	$54 \cdot 10^{19}$

4.3. Ograničenja teorije izgleda

U psihologiji postoji pojam *slepilo indukovano teorijom*. Ovaj pojam označava pojavu u kojoj ljudi, kada prihvate određenu teoriju ili objašnjenje, počinju da zanemaruju dokaze koji pokazuju da ta teorija možda nije potpuno tačna (videti [10]).

Drugim rečima, postojeće uverenje može uticati na to kako se posmatraju nove informacije. Ako se pojavi informacija koja nije u skladu sa prihvaćenom teorijom, postoji mogućnost da se takva informacija zanemari ili ne shvati dovoljno ozbiljno.

Ova pojava nije vezana samo za teoriju korisnosti. I teorija izgleda ima određene nedostatke, ali su oni dugo bili manje primećeni. Teorija izgleda je vremenom postala važna alternativa teoriji korisnosti jer je ponudila neke nove načine objašnjavanja ljudskog ponašanja.

Posebno su važni pojmovi referentne tačke i odbojnosti prema gubicima. Ovi pojmovi pokazali su da ljudi ne procenjuju odluke samo na osnovu konačnog bogatstva, već i na osnovu toga da li nešto doživljavaju kao dobitak ili kao gubitak u odnosu na određenu početnu tačku.

Značaj ovih novih pojmova potvrđen je i istraživanjima. Oni su omogućili postavljanje novih predviđanja o tome kako ljudi donose odluke, a mnoga od tih predviđanja kasnije su potvrđena u praksi.

Pretpostavka teorije izgleda da referentna tačka, što je obično status quo, ima neutralnu vrednost zvuči smisljeno, ali neke njene implikacije su besmislene.

Primer 4.3.1. [10] Donosilac odluke treba da razmotri sledeću situaciju:

- Šansa 1:1 000 000 da dobije 1 milion dolara.
- Verovatnoća je 0,9 da dobije 12 dolara i verovatnoća je 0,1 da ne dobije ništa.
- Verovatnoća je 0,9 da dobije 1 milion dolara i verovatnoća je 0,1 da ne dobije ništa.

Ishod „ne dobiti ništa“ moguć je u sva tri slučaja, a teorija izgleda tom ishodu pripisuje istu vrednost u svakoj od njih. Budući da predstavlja referentnu tačku, njegova vrednost iznosi nula. Međutim, takav pristup zanemaruje važnu razliku između ovih situacija. U prva dva slučaja ne dobiti ništa predstavlja očekivan, odnosno neutralan ishod, pa je opravdano pripisati mu nultu vrednost. Nasuprot tome, u trećem slučaju isti ishod može biti izrazito razočaravajući. Kada postoji velika verovatnoća osvajanja značajne novčane sume, samo očekivanje dobitka privremeno stvara novu referentnu tačku. Zbog toga se izostanak očekivanog dobitka može doživeti kao značajan gubitak.

Teorija izgleda ne uspeva da obuhvati ovu pojavu, jer ne dopušta da se vrednost istog ishoda – u ovom slučaju, ishoda „ne dobiti ništa“ – menja u zavisnosti od verovatnoće njegovog nastanka ili od vrednosti propuštene alternative. Jednostavno rečeno, teorija izgleda ne može adekvatno da objasni razočaranje. Budući da su razočaranje i očekivanje razočaranja sastavni deo stvarnog procesa odlučivanja, njihovo izostavljanje predstavlja jedno od ograničenja ove teorije.

Ni teorija izgleda ni teorija korisnosti ne uzimaju u obzir kajanje. Obe polaze od iste pretpostavke: da se prilikom odlučivanja raspoložive opcije procenjuju zasebno i nezavisno jedna od druge, nakon čega se bira ona kojoj je pripisana najveća vrednost. Međutim, sledeći primer pokazuje da ova pretpostavka nije u skladu sa načinom na koji ljudi zaista donose odluke.

Primer 4.3.2. [10] Ispred donosioca odluke su dva problema. Svaki problem se sastoji od dva događaja i verovatnoćama realizacije tih događaja. Donosilac odluke treba da izabere jedan od ponuđena dva događaja.

- Problem 1: verovatnoća je 0,9 za dobitak od milion dolara ili siguran dobitak od 50 dolara.
- Problem 2: verovatnoća je 0,9 za dobitak od milion dolara ili siguran dobitak od 150 000 dolara.

Posmatrajmo očekivano kajanje u situaciji kada donosilac odluke izabere rizičnu opciju, ali ne ostvari željeni ishod. U oba slučaja doživeće razočaranje ukoliko ne osvoji milion dolara. Međutim, očekivano kajanje u problemu 2 biće izraženije, jer donosilac odluke zna da će, ukoliko rizikuje i izgubi, žaliti zbog sopstvene pohlepne odluke da odbaci siguran dobitak od 150 000 dolara.

Neki ekonomisti i psiholozi pokušali su da objasne kako ljudi donose odluke uzimajući u obzir kajanje i razočaranje. Iako su te emocije veoma važne u stvarnom životu i utiču na naše odluke, teorije koje ih uključuju nisu postale toliko značajne kao teorija izgleda.

Glavni razlog je to što teorije zasnovane na kajanju uglavnom ne daju mnogo drugačija predviđanja od teorije izgleda. Dakle, iako objašnjavaju neke stvari, ne donose dovoljno novih zaključaka koji bi ih jasno izdvojili.

Još jedna prednost teorije izgleda je što je jednostavnija. Teorija koja bi pokušala detaljno da objasni odlučivanje preko kajanja bila bi složenija (videti [10]).

Zanimljivosti

Psihologija opisuje kako ljudi razmišljaju i odlučuju, dok matematika iste procese opisuje formalnim modelima, funkcijama i verovatnoćama. Sledeća tabela zamišljena je da kroz nekoliko pojmova predstavi matematiku kao most između psihologije i teorije odlučivanja. Jezik je drugačiji, ali je suština ista.

Psihologija	Matematika	Teorija odlučivanja
Zadovoljstvo	$u(x)$, funkcija korisnosti	Korisnost koja se maksimizuje pri izboru alternative
Averzija prema riziku	$u''(x) < 0$, konkavna funkcija	Preferiranje sigurnog ishoda u odnosu na rizični, sa istom očekivanom vrednošću
Neizvesnost	$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ prosta slučajna promenljiva	Skup mogućih stanja sveta sa pridruženim verovatnoćama
Očekivanje	$E(X)$ – matematičko očekivanje	Očekivana korisnost. $E(u(X))$, osnovni kriterijum racionalnog odlučivanja

Tabela 24. Različito predstavljanje istog pojma

Psihologija opisuje kako čovek doživljava određeni pojam, matematika daje formalni jezik koji taj pojam opisuje, dok teorija odlučivanja objašnjava kako se taj pojam koristi pri izboru između alternativa.

Zaključak

U ovom radu kroz teorijska objašnjenja i primere iz svakodnevnog života predstavljeno je racionalno donošenje odluka, razmatranje svih alternativa gde donosilac odluke postepeno i postupno dolazi do izbora optimalne akcije. Kako je čovek kompleksno biće, kome su pored razuma data i osećanja, dolazimo do toga da donošenje odluka neće uvek biti racionalno, već se određene odluke donose na bazi osećanja.

U uvodnom delu rada su date teoreme i definicije koje su teorijska osnova za razumevanje verovatnoće kao pojma i teorije odlučivanja kao nauke.

Analiza odlučivanja je bitna, jer predstavlja proces koji omogućava da sagledamo moguće alternative i odaberemo najbolju akciju. U ovom radu je predstavljena analiza odlučivanja bez uzorkovanja i analiza odlučivanja sa uzorkovanjem. U okviru analize odlučivanja bez uzorkovanja podrazumevamo odlučivanje bez apriori verovatnoća (kada donosilac odluke nije u mogućnosti da pojedinim stanjima dodeli odgovarajuće verovatnoće) i odlučivanje sa apriori verovatnoćama (kada donosilac odluke jeste u mogućnosti da dodeli verovatnoće odgovarajućim stanjima). Analiza odlučivanja sa uzorkovanjem zahteva primenu Bayes-ove teoreme, prikupljanje dodatnih informacija u cilju donošenja bolje odluke. U radu su navedena i dva bitna primera, čiji zadatak je da ilustruju ceo proces analize odlučivanja.

Predstavljena je Bernulijeva teorija korisnosti, matematičara Danijela Bernulija koji je prvi primetio da ljudski izbori nisu zasnovani na novčanoj, već na psihološkoj vrednosti ishoda.

Teoriju očekivane korisnosti aksiomatski su zasnovali Džon fon Nojman i Oskar Morgenštern. Ovo je teorija na kojoj počiva model racionalnosti. Glavna ideja aksiomatske verzije teorije korisnosti jeste da donosilac odluke koji teži da bude racionalan mora da se rukovodi principom očekivanja. Takođe, predstavljene su matematičke funkcije u teoriji korisnosti kao što su logaritamska funkcija, eksponencijalna i kvadratna. Logaritamska funkcija je posebno važna, jer jasno prikazuje da averzija prema riziku opada sa rastom bogatstva.

Na samom kraju je prikazana formulacija i dat dokaz Rabinove teoreme, koja je od izuzetnog značaja za teoriju izgleda. Teorija izgleda je nastala kao odgovor na nedostatke teorije očekivane korisnosti o kojima je takođe bilo reči u radu. Teorija izgleda uspešnije opisuje stvarno ljudsko ponašanje i objašnjava pojave kao što su averzija prema gubicima i različit odnos prema riziku kod dobitaka i gubitaka, kao i to da ljude više boli gubitak, nego što ih dobitak iste vrednosti raduje.

Glavna poruka ovog rada sastoji se u tome da matematički modeli odlučivanja predstavljaju neophodan alat za analizu izbora u uslovima neizvesnosti, ali nijedan model ne može u potpunosti opisati ljudsko ponašanje. Teorija očekivane korisnosti pruža racionalan normativni okvir, dok teorija izgleda, zasnovana na empirijskim nalazima uspešnije objašnjava stvarne odluke ljudi. Posmatrano zajedno ove dve teorije daju potpuniju sliku

procesa odlučivanja i pokazuju da je razumevanje ljudske psihologije jednako važno kao i matematičko modelovanje.

Literatura

- [1] Bernoulli, D. (1954 [1738]). Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. *Econometrica*, 22, 23–36.
- [2] Bulat, V. (1997). *Industrijski menadžment*. ICIM – Izdavački centar za industrijski menadžment, Kruševac.
- [3] Čupić, M., Suknović, M. (1994). *Višekriterijumsko odlučivanje: metode i primeri*. UBK, Beograd.
- [4] Čupić, M., Tummala, R., Suknović, M. (2001). *Odlučivanje: formalni pristup*. Fakultet organizacionih nauka, Beograd.
- [5] Fishburn, P. C., Kochenberger, G. A. (1979). Two-Piece von Neumann–Morgenstern Utility Functions. *Decision Sciences*, 10, 503–518.
- [6] Gajić, Lj. *Predavanja iz Uvoda u analizu*. Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.
- [7] Gilboa, I. (2009). *Theory of Decision under Uncertainty*. Cambridge University Press.
- [8] Hossain, S. (2020). *The Economic Theory of Choice (Uncertainty)*. Department of Finance, University of Chittagong.
- [9] Ivković, Z. (1976). *Teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom*. Građevinska knjiga, Beograd.
- [10] Kahneman, D. (2011). *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus and Giroux.
- [11] Kahneman, D., Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47, 263–291.
- [12] Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A. (ur.) (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press, New York, 201–208.
- [13] Levy, H., Levy, A. (1991). Arrow–Pratt Measures of Risk Aversion: The Multivariate Case. *International Economic Review*, 32(4), 891–898.
- [14] Lužanin, Z. (2007). *Matematički modeli u ekonomiji*. Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, pisani materijal.

- [15] Mitevska, N. (2005). *Teorija odlučivanja sa primerima*. Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru.
- [16] Mitrović, Z. *Vjerovatnoća i statistika*. Elektrotehnički fakultet u Banjaluci.
- [17] Nikolić, M. (2009). *Metode odlučivanja*. Zrenjanin: Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“.
- [18] Rabin, M. (2000). Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem. *Econometrica*, 68(5), 1281–1292.
- [19] Ross, S. M. (2019). *A First Course in Probability* (10th ed.). Pearson.
- [20] Ruggeri, K., et al. (2020). Replicating Patterns of Prospect Theory for Decision under Risk. *Nature Human Behaviour*, 4(6), 622–633.
- [21] Schermerhorn, J. P. (1996). *Management and Organizational Behavior*. John Wiley, New York.
- [22] Wakker, P. P. (2010). *Prospect Theory: For Risk and Ambiguity*. Cambridge University Press.

Biografija



Natalija Babić rođena je 20. oktobra 1999. godine u Kruševcu. Osnovnu školu „Aca Aleksić“ završila je u Aleksandrovcu. Nakon završene osnovne škole, srednjoškolsko obrazovanje nastavlja u Kraljevu, gde upisuje obrazovni profil geodetski tehničar. Sve vreme tokom školovanja ostvaruje odličan uspeh i nosilac je Vukove diplome. Na Republičkom takmičenju geodetskih škola iz matematike, održanom 2018. godine u Beogradu, osvojila je prvo mesto. Iste godine upisuje Matematički fakultet u Beogradu. Dve godine kasnije školovanje nastavlja na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerziteta u Novom Sadu, na smeru Master – profesor matematike. Položila je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 8,62 i time stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Natalija Babić

AU

Mentor: Prof. dr Ivana Štajner-Papuga

ME

Naslov rada: Matematički i bihejvioralni modeli odlučivanja pri riziku

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski / engleski

JI

Zamlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (4/71/22/24/8/0/0)

FOR (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Teorija verovatnoće i matematičko modelovanje

ND

Predmetne odrednica/ ključne reči: relacija preferencije, funkcija korisnosti, averzija prema riziku, averzija prema gubitku, očekivana novčana vrednost, očekivana korisnost

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

ČS

Važna napomena: Nema

VN

Izvod: U ovom radu predstavljena je normativna i deskriptivna analiza donošenja odluka. Na početku, zbog uspešnog razumevanja rada u celini dat je pregled osnovnih pojmova iz teorije odlučivanja i teorije verovatnoće. U radu je predstavljena teorija korisnosti, u okviru koje se govori o uvođenju pojma korisnosti, zatim o relaciji preferencije i samoj funkciji korisnosti, o averziji prema riziku, o aksiomamateorije korisnosti, konstrukciji funkcije korisnosti. Prikazana je i teorija izgleda (Prospect Theory), čija je osnovna ideja posmatrati dobitke i gubitke, a ne ukupno bogatstvo. Na samom kraju je prikazana i Rabinova teorema o kalibraciji. Kako bi se sve što jasnije približilo čitaocu u celom radu je dato dosta primera koji su iz svakodnevnog života.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 18.08.2026.

DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: Prof. dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: Prof. dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: Prof. dr Mirjana Štrboja, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents code: Master's thesis

CC

Author: Natalija Babić

AU

Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD

MN

Title: Mathematical and behavioral models of decision – making under risk

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: serbian / english

LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2026.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (4/71/22/24/8/0/0) (chapters / pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Probability Theory and Mathematical Modeling
SD

Subject Key words: preference relation, utility function, risk aversion, loss aversion, expected monetary value, expected utility
SKW

Holding data: In the library of Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This paper presents a normative and descriptive analysis of decision-making. At the beginning, in order to facilitate a comprehensive understanding of the paper, an

overview of the basic concepts of decision theory and probability theory is provided. The paper presents utility theory, within which the introduction of the concept of utility is discussed, followed by the preference relation and the utility function itself, risk aversion, the axioms of utility theory, and the construction of the utility function. Prospect theory is also presented, the main idea of which is to consider gains and losses rather than total wealth. Finally, Rabin's calibration theorem is presented. In order to make all the concepts as clear and accessible as possible to the reader, the paper includes numerous examples drawn from everyday life.

AB

Accepted on Scientific board on: 18.08.2026.

AS

Defended:

DE

Thesis Defend board:

DB

President: PhD Andreja Tepavčević, Full Profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: PhD Ivana Štajner-Papuga, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: PhD Mirjana Štrboja, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad